UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Un método de estabilización para la ecuación de Maxwell

Mauricio Javier Mendiluce

Directora: Dra. María Gabriela Armentano

Fecha de Presentación:
11 de noviembre de 2019

Agradecimientos

Agradezco especialmente a Gabriela, mi directora, por su compromiso, la buena predisposición, los consejos y la ayuda que me brindó desde el primer momento que comenzamos a trabajar en esta Tesis. Además de una gran docente fue una excelente guía en esta última parte del camino.

A mis viejos que me apoyaron desde el primer día que decidí seguir esta carrera y brindarme todo lo posible para que pueda empezar a estudiar sin complicaciones. A mis hermanos por el apoyo en todo momento, su compañerismo y el aliento que me dieron cuando desaprobaba un parcial o cuando aprobaba una materia.

A Gastón y Dari, inigualables compañeros de finales, cursadas, de trabajo, pero por sobre todo, grandes personas y amigos que gracias a la Facultad tuve el privilegio de conocer.

A Luz, Lucho, Ana, Fran, compañeros de cursadas, los cuales tuve el placer de conocer.

A Sandra y Gabriel por sus comentarios y sugerencias para finalizar este trabajo.

A mis compañeros de Tecnópolis, por todos los años y etapas compartidas. A mis compañeros divulgadores y al EPC por haberme dado la posibilidad de participar y transitar esa linda experiencia que es ser divulgador de la carrera y de generar ese sentido de pertenencia a la Facultad. A la SECCB, en especial a Nati y Ana por la confianza que depositaron en mí.

A mis amigos y compañeros de docencia del CBC de La Costa, por los lindos años compartidos y por tener el mismo compromiso con la educación pública.

A Pancho, Maxi, Juanma, Barby, Noe, Vicky, Berny. Amigos que me dió la infancia, la secundaria y la música, que a pesar de los años y los diferentes caminos que fuimos tomando siguen estando ahí.

Pero nada de esto hubiese sido posible sin Paula, mi compañera de vida, que me acompaña, me apoya, me entiende y me banca en todo momento incondicionalmente.

Por último, no quiero dejar de agradecer a la Universidad Pública, a los que la defienden y luchan por una Universidad de calidad, libre e inclusiva.

Índice general

Introducción

Hasta el siglo XIX, los efectos eléctricos y magnéticos se consideraban fenómenos físicos independientes, ligados a las cargas eléctricas y a los imanes, respectivamente. Sin embargo, en 1820 Oersted observó que las corrientes eléctricas podían influir sobre una aguja imantada. Los aportes de Ampere y el descubrimiento de la inducción por Faraday establecieron las bases para una teoría unificada del electromagnetismo. Hacia 1860 Maxwell reunió y completó los resultados anteriores, sintetizando las teorías eléctrica y magnética en un único sistema de ecuaciones. En particular, estas ecuaciones predicen que los campos eléctricos variables generan campos magnéticos y que, recíprocamente, los campos magnéticos variables inducen corrientes eléctricas. Desde un punto de vista práctico, este fenómeno de inducción electromagnética resulta fundamental para diseñar adecuadamente un dispositivo eléctrico. En efecto, las corrientes inducidas pueden ser útiles o bien producir pérdidas, según sea la aplicación dada a una máquina eléctrica. Consecuentemente, en la práctica interesa modelar la distribución de las corrientes inducidas y simular numéricamente su comportamiento. Esto involucra el análisis del sistema de ecuaciones de Maxwell, que en su forma completa presenta una gran complejidad.

El análisis electromagnético ha sido una parte indispensable de muchos estudios científicos y de ingeniería desde que J. C. Maxwell completó la teoría electromagnética. Esto se debe principalmente al poder predictivo de las ecuaciones de Maxwell como se ha demostrado a lo largo de los años y la presencia de los fenómenos electromagnéticos en las tecnologías modernas. Algunos ejemplos de estas tecnologías son el radar, la detección remota, la geoelectromagnética, la bioelectromagnética, las antenas, la comunicación inalámbrica, la óptica, los circuitos de alta frecuencia / alta velocidad, etc.

El problema del análisis electromagnético es en realidad un problema que consiste en resolver un conjunto de ecuaciones sujetas a una condición de borde dada y estas son fundamentales ya que gobiernan todos los fenómenos electromagnéticos macroscópicos.

La simulación de esto fenómenos electromagnéticos exige métodos numéricos precisos y eficientes adecuados para el computo a gran escala. Los métodos de Elementos Finitos se usan comúnmente en este contexto porque pueden manejar geometrías complicadas mediante el uso de mallas no estructuradas, proporcionar un marco matemático riguroso y permitir la adaptación automática de la malla guiandose por estimaciones a posterior del error. En muchas aplicaciones de interés actual el problema electromagnético está acoplado a otros procesos físicos (magnetohidrodinámica, física del plasma, entre otros). La simulación de estos problemas se ve beneficiada por un metodo de Elementos Finitos mixto el cual es adecuado para diferentes subproblemas, simplificando los problemas de implementación y la aplicación de las condiciones de acoplamiento.

El operador de Maxwell tiene una estructura de punto silla, con la particularidad de que el multiplicador de Lagrange introducido para imponer la restricción de divergencia libre es idénticamente cero. Los métodos de Elementos Finitos existentes que satisfacen la contraparte discreta de la condición inf-sup inherente para este problema se basan en elementos de borde o de Nédelec ([22], [29]) los cuales conducen a campos con componente normal discontinuo en los bordes o caras del elemento.

Con el Objetivo de resolver el problema de Maxwell con Elementos Finitos de Lagrange, el operador diferencial del problema se puede transformar en uno elíptico agregando un termino de penalización exacto que contenga la divergencia ([21]) y la penalización es exacta porque el multiplicador de Lagrange desaparece. El método resultante satisface las condiciones de compatibilidad sobre las caras del elemento en un sentido puntual. Desafortunadamente, este método no puede converger a soluciones no suaves que aparecen en dominios no convexos, por ejemplo en dominios con esquinas reentrantes ([13] y [21]).

Costabel y Dauge ([13]) proponen una estabilización del problema para Elementos Finitos nodales C^0 conforme a H^1 basadas en una versión ponderada del término de penalización que puede converger a la solución "buena" en dominios no convexos. Con el fin de utilizar el método numérico resultante, las regiones de singularidad deben identificarse a priori y las funciones ponderadas adecuadas deben construirse basándose en esta información. El lado negativo está en la complicación de la integración numérica del término ponderado, que conduce a la pérdida de eficiencia computacional y dificulta la automatización de las simulaciones.

Un enfoque alternativo para resolver el problema de Maxwell es la descomposición de la solución en partes singulares y suaves ([3] y [21]), pero este método es más dificil de generalizar, especialmente en tres dimensiones.

Duan et al. han diseñado en [17] un método basado en proyecciones locales que utiliza un espacio de Elementos Finitos compuesto por elementos nodales cúbicos enriquecidos con burbujas de borde y elemento. La introducción de la proyección local en el término de penalización permite garantizar la convergencia del método aún en presencia de soluciones no suaves, pero la misma proyección debilita la convergencia, ya que solo se logra en la norma L^2. Existen otros métodos de Elementos Finitos basados en nodos, pero convergen a soluciones espurias en dominios no convexos ([24] y [25]).

En esta tesis estudiaremos la aproximacón numérica por elementos finitos, usando bases nodales, propuesta en ([5]) para resolver el problema de Maxwell. La resolución se realiza a través de su formulación como un problema mixto, basada en una aproximación estabilizada de una formulación aumentada del problema de Maxwell. El algoritmo numérico resultante es capaz de capturar soluciones no suaves, por lo que es adecuado para problemas en dominios no convexos. El método es estable y convergente. La implementación es sencilla, ya que los términos adicionales son estándar y se pueden integrar numéricamente sin más dificultad que la que conlleva la integración de los términos de Galerkin inherentes a la ecuación.

En el Capitulo 1, se presentan algunos resultados previos como también parte de la teoria abtracta de problemas mixtos que nos serán útiles para el desarrollo de este trabajo. En el Capitulo 2, presentaremos los diferentes enfoques teóricos del problema hasta llegar a la formulación conveniente. En el Capítulo 3, se expondrá el sitema de ecuaciones con la estabilización propuesta, desarrollaremos el análisis de estabilidad y el error a priori de la aproximación númerica.

Finalmente en el Capítulo 4 presentaremos algunos ejemplos numéricos que muestran la buena perfomance del método propuesto.

Capítulo 1

Resultados previos

En este capítulo introduciremos algunas definiciones y resultados para dar un contexto a la teoría abstracta en la cual nos basaremos a lo largo de este trabajo y de los cuales algunos nos serán de utilidad en el Capítulo 2. Los mismos son estudiados en [18] y [20]. En primer lugar haremos un repaso de algunos resultados del análisis funcional, para luego terminar con una reseña de la teoría abstracta de los Problemas Mixtos. Los resultados que no demostraremos aquí pueden consultarse en [7] y en [18]. El objetivo será ver que condiciones debe cumplir un Problema Mixto para estar bien definido.

1.1. Definiciones y Resultados básicos

En esta sección haremos un repaso de algunas definiciones y resultados de la teoria de operadores en espacios de Banach.

Definición 1.1.1. *Sea V y W dos espacios vectoriales normados. Se define $\mathcal{C}(V;W)$ al espacio vectorial de funciones lineales continuas. Una función $A \in \mathcal{C}(V;W)$ también es llamada operador.*

Proposición 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial normado y W un espacio de Banach. El espacio $\mathcal{C}(V;W)$ con la norma:*

$$\forall\, A \in \mathcal{C}(V;W), \quad ||A||_{\mathcal{C}(V;W)} = \sup_{v \in V} \frac{||Av||_W}{||v||_V},$$

es un espacio de Banach.

Definición 1.1.2. *Sea V un espacio vectorial normado. El espacio dual de V esta definido en $\mathcal{C}(V;\mathbb{R})$ y se denota V'. Un elemento $A \in V'$ es llamado una forma lineal continua. La acción sobre un elemento $v \in V$ se denota como $\langle A, v\rangle_{V',V} = Av$*

Observación 1.1.1. *A partir de la proposición 1.1.1 se tiene que V' es un espacio de Banach con la siguiente norma:*

$$\forall A \in V', \ \ ||A||_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{\langle A, v\rangle_{V',V}}{||v||_V}.$$

Proposición 1.1.2. *Sea V un espacio normado y sea $F \subset V$ un subespacio. Si asumimos que $(\forall f \in V', f(F) = 0) \Rightarrow (f = 0)$. Entonces, $\overline{F} = V$.*

Definición 1.1.3. *Sea V y W dos espacios vectoriales normados y sea $A \in C(V;W)$. El operador dual $A^T : W' \longrightarrow V'$ está definido por:*

$$\forall v \in V,\ \forall w' \in W',\ \ \langle A^T w', v\rangle_{V',V} = \langle w', Av\rangle_{W',W}$$

Definición 1.1.4. *Sea Z_1 y Z_2 dos espacios vectoriales normados. Se denota $C(Z_1 \times Z_2;\mathbb{R})$ al espacio vectorial de formas bilineales continuas $\{a : Z_1 \times Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Este espacio de Banach esta dotado de la siguente norma:*

$$||a||_{Z_1,Z_2} = \sup_{z_1\in Z_1, z_2\in Z_2} \frac{a(z_1,z_2)}{||z_1||_{Z_1}||z_2||_{Z_2}}.$$

Proposición 1.1.3. *Sea Z_1 y Z_2 dos espacios de Banach y sea $a \in C(Z_1 \times Z_2;\mathbb{R})$. Entonces, el operador $A : Z_1 \longrightarrow Z_2'$ definido por*

$$\forall z_1 \in Z_1,\ \forall z_2 \in Z_2,\ \ \langle Az_1, z_2\rangle_{Z_2',Z_2} = a(z_1,z_2),$$

está en $C(Z_1;Z_2')$ y $||A||_{C(Z_1;Z_2')} = ||a||_{Z_1,Z_2'}$.

Definición 1.1.5. *Se define el doble dual de un espacio de Banach V al dual de V' y este se denota por V''.*

Observación 1.1.2. *Por la proposición 1.1.1 resulta que V'' es un espacio de Banach.*

Proposición 1.1.4. *Sea V un espacio de Banach y sea $J_V : V \longrightarrow V''$ una función lineal definida por*

$$\forall u \in V,\ \forall v' \in V',\ \ \langle J_V u, v'\rangle_{V'',V'} = \langle v', u\rangle_{V',V}.$$

Entonces, J_V es una isometría.

Definición 1.1.6. *Sea V un espacio de Banach. V se dice reflexivo si J_V es un isomorfismo.*

Proposición 1.1.5. *Un espacio de Hilbert es reflexivo.*

1.1.1. Operadores de Banach Biyectivos

Para $A \in C(V;W)$, denotaremos por $\mathrm{Ker}(A)$ a su núcleo y por $\mathrm{Im}(A)$ a su imagen. Si el operador A es continuo, $\mathrm{Ker}(A)$ es cerrado en V.

Para $M \subset V$, $N \subset V'$, se definen los anuladores de M y N por:

$$M^0 = \{v' \in V';\ \forall m \in M,\ \langle v', m\rangle_{V',V} = 0\}$$
$$N^0 = \{v \in V;\ \forall n' \in N,\ \langle n', v\rangle_{V',V} = 0\}.$$

Lema 1.1.1. *Para $A \in C(V;W)$, se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{Ker}(A) = (\mathrm{Im}(A^T))^0$.

2. $\mathrm{Ker}(A^T) = (\mathrm{Im}(A))^0$.

3. $\overline{\mathrm{Im}(A)} = (\mathrm{Ker}(A^T))^0$.

4. $\overline{\mathrm{Im}(A^T)} \subset (\mathrm{Ker}(A))^0$.

Teorema 1.1.1. *Sea $A \in C(V; W)$. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Im}(A)$ *es cerrado.*

2. $\mathrm{Im}(A^T)$ *es cerrado.*

3. $\mathrm{Im}(A) = (\mathrm{Ker}(A^T))^0$.

4. $\mathrm{Im}(A^T) \subset (\mathrm{Ker}(A))^0$.

Lema 1.1.2. *Sea $A \in C(V; W)$. Son equivalentes:*

1. $\mathrm{Im}(A)$ *es cerrado.*

2. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall w \in \mathrm{Im}(A),\ \exists v_w \in V,\ Av_w = w \ \text{ y } \ \alpha\|v_w\| \leq \|w\|_W.$$

1.1.2. Caracterización de operadores suryectivos

Lema 1.1.3. *Sea $A \in C(V; W)$. Son equivalentes:*

1. $A^T : W' \longrightarrow V'$ *es suryectivo.*

2. $A : V \longrightarrow W$ *es inyectivo y* $\mathrm{Im}(A)$ *es cerrada en W.*

3. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\forall v \in V,\ \|Av\|_W \geq \alpha\|v\|_V.$$

4. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\inf_{v \in V} \sup_{w' \in W'} \frac{\langle w', Av\rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'}\|v\|_V} \geq \alpha.$$

Lema 1.1.4. *Sea $A \in C(V; W)$. Son equivalentes:*

1. $A : V \longrightarrow W$ *es suryectivo.*

2. $A^T : W' \longrightarrow V'$ *es inyectivo y* $\mathrm{Im}(A^T)$ *es cerrado en V'.*

3. *Existe $\alpha > 0$ tal que*
$$\forall w \in W',\ \|A^T w'\|_{V'} \geq \alpha\|w'\|_{W'}.$$

4. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{w' \in W'} \sup_{v \in V} \frac{\langle A^T, v \rangle_{V',V}}{\|w'\|_{W'} \|v\|_V} \geq \alpha.$$

Lema 1.1.5. *Sea V y W dos espacios de Banach y sea $A \in C(V;W)$ un operador suryectivo. Sea $\alpha > 0$. La propiedad*

$$\forall w \in \mathrm{Im}(A),\ \exists v_w \in V,\ Av_w = w \text{ y } \alpha\|v_w\| \leq \|w\|_W,$$

implica

$$\inf_{w' \in W'} \sup_{v \in V} \frac{\langle A^T w', v \rangle_{V',V}}{\|w'\|_{W'} \|v\|_V} \geq \alpha.$$

Lo contrario es verdadero si V es reflexivo.

1.1.3. Caracterización de operadores de Banach biyectivos

Teorema 1.1.2. *Sea $A \in C(V;W)$. A es biyectivo sí y solo sí $A^T : W' \longrightarrow V'$ es inyectivo y existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall v \in V,\ \ \|Av\|_W \geq \alpha\|v\|_V.$$

Observación 1.1.3. *La interpretación del teorema anterior dice que un operador de Banach es biyectivo sí y solo sí este es inyectivo, su imagen es cerrada y su dual es un operador inyectivo.*

Corolario 1.1.1. *Sea $A \in C(V;W)$. Son equivalentes:*

1. *A es biyectivo*

2. *Existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\forall v \in V,\ \|Av\|_W \geq \alpha\|v\|_V,$$
$$\forall w' \in W',\ (A^T w' = 0) \Rightarrow (w' = 0).$$

3. *Existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{v \in V} \sup_{w' \in W'} \frac{\langle w', Av \rangle_{W',W}}{\|w'\|_{W'} \|v\|_V} \geq \alpha,$$
$$\forall w' \in W',\ (\langle w', Av \rangle_{W',W} = 0,\ \forall v \in V) \Rightarrow (w' = 0).$$

Asumamos ahora que $A \in C(V;W)$ está asociado a una forma bilineal $a \in C(Z_1 \times Z_2; \mathbb{R})$ tal que $\langle Az_1, z_2 \rangle_{Z_2',Z_2} = a(z_1, z_2)$, es decir, $V = Z_1$ y $W = Z_2'$.

Corolario 1.1.2. *Si Z_2 es reflexivo, son equivalentes:*

1. *Para toda $f \in Z_2'$, existe una única $u \in Z_1$ tal que $a(u, z_2) = \langle f, z_2 \rangle_{Z_2',Z_2}$ para toda $z_2 \in Z_2$.*

2. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{z_1 \in Z_1} \sup_{z_2 \in Z_2} \frac{a(z_1, z_2)}{\|z_1\|_{Z_1} \|z_2\|_{Z_2}} \geq \alpha,$$
$$\forall z_2 \in Z_2,\ (\forall z_1 \in Z_1, a(z_1, z_2) = 0) \Rightarrow (z_2 = 0).$$

1.2. El teorema de Banach-Necas-Babuska (BNB)

El teorema de BNB será de gran utilidad como veremos. Adoptamos el termino "BNB" ya que este fue expuesto por primera vez por Necas en 1962 [28] y popularizado por Babuska en 1972 en el contexto de los Métodos de Elementos Finitos (ver [4], p. 112). Desde el punto de vista del análisis funcional, este teorema es una reformulación de dos resultados fundamentales para espacios de Banach: el teorema del rango cerrado y el teorema del mapeo abierto.

1.2.1. El teorema BNB: Condición inf-sup

Consideremos el siguiente problema: Sea $u \in W$ tal que,

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{1.1}$$

Teorema 1.2.1. *Sea W un espacio de Banach y sea V un espacio de Banach reflexivo. Sea $a : W \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f \in V'$. Entonces el problema (1.1) está bien definido sí y solo sí*

$$\text{(BNB1)} \quad \exists \alpha > 0, \ \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha, \tag{1.2}$$

$$\text{(BNB2)} \quad \forall v \in V, \ (\forall w \in W, \ a(w, v) = 0) \Rightarrow (v = 0). \tag{1.3}$$

Además, se tiene la siguiente estimación:

$$\forall f \in V', \ \|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}. \tag{1.4}$$

Demostración. A partir de los Corolarios 1.1.1 y 1.1.2 concluimos que las condiciones (BNB1) y (BNB2) son equivalentes y prueban la buena definición de (1.1). La estimación (1.4) sale de las siguientes desigualdades:

$$\alpha \|u\|_W \leq \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{f(v)}{\|v\|_V} = \|f\|_{V'}.$$

□

1.3. Problemas Mixtos

Aquí nos centraremos en una forma particular del problema (1.1), la cual nos introduce en la teoría de los Problemas Mixtos, o también llamados en la literatura como Problemas de punto silla (saddle-points problems).

Sean X y M dos espacios de Banach reflexivos, $F \in X'$, $G \in M'$ y consideremos dos formas bilineales $a \in C(X \times X; \mathbb{R})$ y $b \in C(X \times M, \mathbb{R})$. Connsideremos el problema de hallar $(u, p) \in X \times M$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{rl} a(u, v) + b(v, p) & = F(v) \ \ \forall \ v \in X \\ b(u, q) & = G(q) \ \ \forall \ q \in M. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Otra manera de ver el problema (1.5) consiste en tomar $W = X \times M$, $c((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(v, p) + b(u, q)$, y $k(v, q) = F(v) + G(q)$. De esta mandera consideramos el problema de hallar $(u, p) \in W$ tal que:

$$c((u, p), (v, q)) = k(v, q) \quad \forall (v, q) \in W. \tag{1.6}$$

Es claro que (1.5) y (1.6) son equivalentes. Las condiciones necesarias y suficientes para la buena definición de (1.5) son las condiciones (BNB1) y (BNB2) para la forma bilineal c. Sin embargo es posible reformular estas condiciones en terminos de las formas bilineales a y b.

Sean A y B dos operadores tales que $A : X \longrightarrow X'$ con $\langle Au, v\rangle_{X',X} = a(u, v)$ y $B : X \longrightarrow M'$ (y $B^T : M = M'' \longrightarrow X'$ dado que M es reflexivo) con $\langle Bv, q\rangle_{M',M} = b(v, q)$. Luego, el problema (1.5) es equivalente a:

$$\begin{cases} Au + B^T p &= F \\ Bu &= G. \end{cases} \tag{1.7}$$

Sea $\mathrm{Ker}(B) = \{v \in X : \ \forall q \in M,\ b(v, q) = 0\}$ el núcleo de B y sea $\pi A : \mathrm{Ker}(B) \longrightarrow \mathrm{Ker}(B)'$ tal que $\langle \pi Au, v\rangle_{X',X} = \langle Au, v\rangle_{X',X}$ para toda $u, v \in \mathrm{Ker}(B)$.

Teorema 1.3.1. *El problema (1.7) está bien definido sí y solo sí:*

1. $\pi A : \mathrm{Ker}(B) \longrightarrow \mathrm{Ker}(B)'$ *es un isomorfismo.*

2. $B : X \longrightarrow M'$ *es suryectivo.*

Demostración. Supongamos primero que el problema (1.7) está bien definido. Veamos que se cumple (1) y (2).

- Sea $h \in M'$ y (u, p) la solución de (1.7) con $F = 0$ y $G = h$. Es claro entonces, que B es suryectiva ya que $Bu = h$.

- Veamos que πA es suryectivo. Sea $h \in \mathrm{Ker}(B)'$. Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\widehat{h} \in X'$ tal que $\langle \widehat{h}, v\rangle = \langle h, v\rangle$ para todo $v \in \mathrm{Ker}(B)$ y $||\widehat{h}||_{X'} = ||h||_{\mathrm{Ker}(B)'}$. Sea (u, p) la solución de (1.7) con $F = \widehat{h}$ y $g = 0$. Es claro que $u \in \mathrm{Ker}(B)$. Dado que $\langle B^T p, v\rangle = \langle p, Bv\rangle = 0$ para todo $v \in \mathrm{Ker}(B)$, entonces $\langle \pi Au, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle \widehat{h}, v\rangle = \langle h, v\rangle$ para todo $v \in \mathrm{Ker}(B)$. Luego $\pi Au = h$.

- Veamos que πA es inyectivo. Sea $u \in \mathrm{Ker}(B)$ tal que $\pi Au = 0$. Entonces $\langle Au, v\rangle = 0$ para todo $v \in \mathrm{Ker}(B)$, luego Au está en $\mathrm{Ker}(B)^\perp$. Dado que B es suryectivo, la $\mathrm{Im}(B)$ es cerrada y siguiendo el teorema de Banach sabemos que $\mathrm{Im}(B^T) = \mathrm{Ker}(B)^\perp$. Como resultado, $Au \in \mathrm{Im}(B^T)$, es decir, existe $p \in M'$ tal que $Au = -B^T p$. Por lo tanto, $Au + B^T p = 0$ y $Bu = 0$, lo que demuestra que (u, p) es la solución (1.7) con $F = 0$ y $G = 0$. Como la solución es única inferimos que $u = 0$.

Ahora, supongamos que se cumplen (1) y (2).

- Para $F \in X'$ y $G \in M$, vamos a ver que existe una solución de (1.7). Dado que B es suryectivo, existe $u_G \in X$ tal que $Bu_G = G$. La forma lineal $F - Au_G$ es continua en X y en $\mathrm{Ker}(B)$. Denotemos por $h_{F,G}$ la forma lineal en $\mathrm{Ker}(B)$ tal que $\langle h_{F,G}, v\rangle = \langle F, v\rangle - \langle Au_G, v\rangle$ para todo $v \in \mathrm{Ker}(B)$. Sea $\phi \in \mathrm{Ker}(B)$ la solución del problema $\pi A\phi = h_{F,G}$ y sea $u = \phi + u_G$. Es claro que la forma linea $F - Au$ está en $\mathrm{Ker}(B)^\perp$. Dado que B es suryectivo y que $\mathrm{Ker}(B)^\perp = \mathrm{Im}(B^T)$, existe $p \in M'$ tal que $B^T p = F - Au$. Además, $Bu = B(\phi + u_G) = Bu_G = G$. De esta mandera, queda construida una solución de (1.7).
- Veamos que la solución es única. Sea (u, p) tal que $Bu = 0$ y $Au + B^T p = 0$. Claramente $u \in \mathrm{Ker}(B)$ y $\pi Au = 0$, y como πA es inyectivo, resulta $u = 0$. Luego $B^T p = 0$. Como B es suryectivo, B^T es necesariamene insyecivo, lo que implica que $p = 0$.

□

Teorema 1.3.2. *Bajo las condiciones anteriores, el problema (1.5) está bien definido sí y solo sí*

$$\begin{cases} \exists\, \alpha > 0, & \mathrm{ínf}_{u\in \mathrm{Ker}(B)} \sup_{v\in \mathrm{Ker}(B)} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_X} \geq \alpha, \\ \forall v \in \mathrm{Ker}(B), & (\forall u \in \mathrm{Ker}(B),\ a(u, v) = 0) \Rightarrow (v = 0), \end{cases} \tag{1.8}$$

y

$$\exists\, \beta > 0,\ \mathrm{ínf}_{q\in M} \sup_{v\in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta. \tag{1.9}$$

Además, se tiene la siguiente estimación a priori:

$$\begin{cases} \|u\|_X \leq c_1\|F\|_{X'} + c_2\|G\|_{M'}, \\ \|p\|_M \leq c_3\|F\|_{X'} + c_4\|G\|_{M'}, \end{cases} \tag{1.10}$$

con $c_1 = \frac{1}{\alpha}$, $c_2 = \frac{1}{\beta}(1 + \frac{\|a\|}{\alpha})$, $c_3 = \frac{1}{\beta}(1 + \frac{\|a\|}{\alpha})$, *y* $c_4 = \frac{\|a\|}{\beta^2}(1 + \frac{\|a\|}{\alpha})$.

Demostración. El problema (1.5) está bien definido sí y solo sí las condiciones (1) y (2) del Teorema 1.3.1 se satisfacen. Siguiendo el Corolario 1.1.1 y el hecho de que $\mathrm{Ker}(B)$ es reflexivo, las dos desigualdades en (1.8) son equivalenes por el hecho de que πA es un isomorfismo. Por otro lado, la desigualdad de (1.9) es equivalente al hecho de que B es suryecivo siguiendo la condición (3) del lema 1.1.4 y el hecho de que M es reflexivo. De esta manera la buena definición del problema (1.5) es equivalente a que se cumplan las condiciones (1.8) y (1.9).

Probemos ahora la estimacion a priori (1.10). Por la condición (1.9) y el Lema 1.1.5 (dado que M es reflexivo), podemos deducir que existe $u_G \in X$ al que $Bu_G = G$ y $\beta\|u_G\|_X \leq \|G\|_{M'}$. Poniendo $\phi = u - u_G$ se tiene

$$\forall\ v \in \mathrm{Ker}(B),\ \ a(\phi, v) = F(v) - a(u_G, v).$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} |F(v) - a(u_G, v)| &\leq (\|f\|_{X'} + \|a\|\|u_G\|_X)\|v\|_X \\ &\leq (\|F\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta}\|G\|_{M'})\|v\|_X, \end{aligned}$$

donde $\|a\| = \|a\|_{X,X}$, y tomando supremo sobre $v \in \mathrm{Ker}(B)$ obtenemos

$$\alpha\|\phi\|_X \leq \|F\|_{X'} + \frac{\|a\|}{\beta}\|G\|_{M'},$$

gracias a la condición (1.8). La estimación para u resulta de esta desigualdad y la desigualdad triangular $\|u\|_X \leq \|u - u_G\|_X + \|u_G\|_X$. La prueba para la estimación de p se deduce de la condición (1.9) y el lema (1.1.4) ya que $\beta\|p\|_M \leq \|B^T p\|_{X'}$. Así obtenemos,

$$\beta\|p\|_M \leq \|a\|\|u\|_X + \|F\|_{X'}$$

Luego la estimación para $\|p\|_M$ resulta aplicando lo visto para $\|u\|_X$. □

Proposición 1.3.1. *Sea $W = X \times M$ con la norma $\|(u,p)\|_W = \|u\|_X + \|p\|_M$. Entonces, la forma bilineal c satisface* (BNB1) *y* (BNB2) *sí y solo sí (1.8) y (1.9) también.*

Demostración. Solo mostraremos que (1.8) y (1.9) implican que la forma bilineal c satisface (BNB1) y (BNB2) ya que es lo que nos interesará posteriormente. La otra implicación podra consultarse en [18]. Veamos primero que implica (BNB1). Sea $(u,p) \in W$ y sea $\widehat{u} \in X$ tal que $B\widehat{u} = Bu$ y $\beta\|\widehat{u}\|_X \leq \|Bu\|_{M'}$. Es claro que,

$$\sup_{(v,q)\in W} \frac{c((\hat{u},p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W} \geq \sup_{q\in M} \frac{b(\hat{u},q)}{\|q\|_M} = \|B\hat{u}\|_{M'} \geq \beta\|\hat{u}\|_X.$$

Además, dado que $u - \hat{u}$ está en $\mathrm{Ker}(B)$,

$$\begin{aligned}
\alpha\|u-\hat{u}\|_X &\leq \sup_{v\in \mathrm{Ker}(B)} \frac{a(u-\hat{u},v)}{\|v\|_X} = \sup_{v\in \mathrm{Ker}(B)} \frac{a(u-\hat{u},v) + b(v,p) + b(u,0)}{\|(v,0)\|_W} \\
&\leq \sup_{(v,q)\in W} \frac{c((u,p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W} + \|a\|\|\hat{u}\|_X \\
&\leq (1 + \frac{\|a\|}{\beta}) \sup_{(v,q)\in W} \frac{c((u,p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W}.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular se obiene para $\|u\|_X$:

$$\|u\|_X \leq \|\hat{u}\|_X + \|u-\hat{u}\|_X \leq (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}(1 + \frac{\|a\|}{\beta})) \sup_{(v,q)\in W} \frac{c((u,p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W}. \tag{1.11}$$

Para $\|p\|_M$, procedemos de la siguiene forma:

$$\begin{aligned}
\beta\|p\|_M &\leq \sup_{v\in X} \frac{b(v,p)}{\|v\|_X} \leq \sup_{v\in X} \frac{a(u,v) + b(v,p) + b(u,0)}{\|(v,0)\|_W} + \sup_{v\in X} \frac{a(u,v)}{\|v\|_X} \\
&\leq \sup_{(v,q)\in W} \frac{c((u,p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W} + \|a\|\|u\|_X,
\end{aligned}$$

lo cual junto con (1.11) implica que

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta}(1 + \|a\|(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}(1 + \frac{\|a\|}{\beta}))) \sup_{(v,q)\in W} \frac{c((u,p),(v,q))}{\|(v,q)\|_W}.$$

Esto prueba (BNB1).

Veamos ahora que además se satisface (BNB2), es decir que $\forall v \in V$, $(\forall w \in W,\ a(v,w) = 0) \Rightarrow (v = 0)$ (notemos que en este caso $V = W = X$). Sea $v \in V$ solución de (1.1). Esto implica que $b(v,p) = 0$ en (1.5), es decir, que $v \in \mathrm{Ker}(B)$. Analogamente si $w \in W$, entonces $w \in \mathrm{Ker}(B)$. Si $a(w,v) = 0$ por (1.8) se tiene que $v = 0$. □

1.3.1. Aproximación

Sea X_h un subespacio de X y sea M_h un subespacio de M. Asumamos que X_h y M_h son espacios de dimensión finita y consideremos el problema de encontrar $u_h \in X_h$ y $p_h \in M_h$ tal que:

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) & = F(v_h) \;\; \forall\, v_h \in X_h \\ \qquad\qquad\;\; b(u_h, q_h) & = G(q_h) \;\; \forall\, q_h \in M_h. \end{cases} \tag{1.12}$$

Sea $B_h : X_h \longrightarrow M'_h$ el operador inducido por b tal que $\langle B_h v_h, q_h \rangle_{M'_h, M_h} = b(v_h, q_h)$. Sea $\mathrm{Ker}(B_h)$ el núcleo de B_h, es decir

$$\mathrm{Ker}(B_h) = \{v_h \in X_h;\; \forall q_h \in M_h, b(v_h, q_h) = 0\}.$$

Para el caso discreto se puede definir las condiciones (BNB1) y (BNB2) en su versión discreta de la siguiente forma:

$$(\mathrm{BNB1}_h) \quad \exists \alpha_h > 0, \quad \inf_{w_h \in W_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{a_h(w_h, v_h)}{\|w_h\|_{W_h} \|v_h\|_{V_h}} \geq \alpha_h,$$

$$(\mathrm{BNB2}_h) \quad \forall v_h \in V_h, \;\; (\forall w_h \in W_h, a_h(w_h, v_h) = 0) \Rightarrow (v_h = 0).$$

Lema 1.3.1. *Si* $\dim W_h = \dim V_h$, $(\mathrm{BNB1}_h) \Leftrightarrow (\mathrm{BNB2}_h)$.

La buena definición del problema (1.12) está dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2. *El problema (1.12) está bien definido sí y solo sí:*

$$\exists \alpha_h > 0, \;\; \inf_{u_h \in \mathrm{Ker}(B_h)} \sup_{v_h \in \mathrm{Ker}(B_h)} \frac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\|_X \|v_h\|_X} \geq \alpha_h \tag{1.13}$$

$$\exists \beta_h > 0, \;\; \inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X \|q_h\|_M} \geq \beta_h. \tag{1.14}$$

Demostración. Aplicando el teorema 1.3.2 y usando el hecho de que los espacios son de dimensión finita, la condición (1.8) implica (1.13). Análogamente para la condición (1.14). □

Por último, el siguiente lema da una estimación a priori de los errores $u - u_h$ y $p - p_h$.

Lema 1.3.2. *Asumiendo las condiciones (1.13) y (1.14), siendo* $\|a\| = \|a\|_{X,X}$ *y* $\|b\| = \|b\|_{X,M}$, *la solución* (u_h, p_h) *de (1.12) satisface:*

$$\|u - u_h\|_X \leq c_{1h} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + c_{2h} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M,$$
$$\|p - p_h\|_M \leq c_{3h} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + c_{4h} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M,$$

con $c_{1h} = (1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h})(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h})$, $c_{2h} = \frac{\|b\|}{\alpha_h}$ *si* $\mathrm{Ker}(B_h) \not\subset \mathrm{Ker}(B)$ *o* $c_{2h} = 0$ *en otro caso,* $c_{3h} = c_{1h} \frac{\|a\|}{\beta_h}$, *y* $c_{4h} = 1 + \frac{\|b\|}{\beta_h} + c_{2h} \frac{\|a\|}{\beta_h}$.

Demostración. Definimos el siguiente conjunto,

$$Z_h(g) = \{w_h \in X_h : \ \forall q_h \in M_h, \ b(w_h, q_h) = g(q_h)\}.$$

Es claro que $Z_h(g)$ es no vacío dado que el operador B_h es suryectivo. Sea v_h un elemento arbitrario de V_h. Dado que B_h verifica (1.14), la reciproca del lema 1.1.5 implica la existencia de un r_h en X_h tal que

$$\forall q_h \in M_h, \ b(r_h, q_h) = b(u - v_h, q_h) \ \text{ y } \ \beta_h \|r_h\|_X \leq \|b\| \|u - v_h\|_X.$$

Es claro que $b(r_h + v_h, q_h) = g(q_h)$, pues $r_h + v_h$ está en $Z_h(g)$. Sea $w_h = r_h + v_h$. Puesto que w_h está en $Z_h(g)$, $u_h - w_h$ está en $\mathrm{Ker}(B_h)$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_h \|u_h - w_h\|_X &\leq \sup_{y_h \in \mathrm{Ker}(B_h)} \frac{a(u_h - w_h, y_h)}{\|y_h\|_X} \\
&\leq \sup_{y_h \in \mathrm{Ker}(B_h)} \frac{a(u_h - u, y_h) + a(u - w_h, y_h)}{\|y_h\|_X} \\
&\leq \sup_{y_h \in \mathrm{Ker}(B_h)} \frac{b(y_h, p - p_h) + a(u - u_h, y_h)}{\|y_h\|_X}.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{Ker}(B_h) \subset \mathrm{Ker}(B)$, entonces $b(y_h, p - p_h) = 0$ para $y_h \in \mathrm{Ker}(B_h)$. Por lo tanto,

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_X \leq \|a\| \|u - w_h\|_X.$$

Usando la desigualdad triangular se tiene

$$\|u - u_h\|_X \leq (1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}) \|u - w_h\|_X.$$

En el caso genaral, $b(y_h, p_h) = 0 = b(y_h, q_h)$ para todo $q_h \in M_h$ dado que $y_h \in \mathrm{Ker}(B_h)$, implica

$$\alpha_h \|u_h - w_h\|_X \leq \|a\| \|u - w_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M.$$

Usando la desigualdad triangular se tiene

$$\|u - u_h\|_X \leq (1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}) \|u - w_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \|p - q_h\|_M.$$

La estimación para $\|u - u_h\|_X$ resulta de la siguiente desigualdad

$$\|u - w_h\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|r_h\|_X \leq (1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}) \|u - v_h\|_X.$$

Ahora estimemos $\|p - p_h\|_M$. Dado que $b(v_h, p - p_h) = a(u_h - u, v_h)$ para todo $v_h \in X_h$, podemos tomar $q_h \in M_h$ arbitrario y obtenemos

$$\forall v_h \in X_h, \quad b(v_h, q_h - p_h) = a(u_h - u, v_h) + b(v_h, q_h - p).$$

Luego por la condición (1.14) se tiene

$$\beta_h \|q_h - p_h\|_M \leq \|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|p - q_h\|_M.$$

Luego usando nuevamente la desigualdad triangular se obtiene lo querido. $\square$

1.4. Notación

A continuación se definen algunas notaciones que usaremos a lo largo de este trabajo. En primer lugar, de aquí en adelante vamos a denotar en negrita los vectores y los espacios que consisten en funciones vectoriales.

Para simplificar notación, las normas y seminormas de los espacios de Sobolev $H^m(D)$, con m un entero, son denotadas por $\|\cdot\|_{m,D}$ y $|\cdot|_{m,D}$ respectivamente y $(\cdot,\cdot)_D$ representa el producto interno en $L^2(D)$ o $\mathbf{L}^2(D)$ para cualquier subdominio $D \subset \Omega$. En el caso en que $D = \Omega$ omitiremos el segundo índice, indicando las normas directamente por $\|\cdot\|_m$ y $|\cdot|_m$ y simplemente $\|\cdot\|$ para la norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

Si $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ se define $(f_1, f_2) = \int_\Omega f_1 f_2 dx$ y a $\langle f_1, f_2\rangle$ al producto entre funcionales, y análogamente si $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$

Por otro lado, definimos los siguientes espacios:

- $H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \ \nabla\cdot\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$
- $H(\mathrm{div}\ 0, \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega) : \ \nabla\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$

  Dadas $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, el producto interno natural para este espacio se define por

  $$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\mathrm{div},\Omega)} = \int_\Omega [\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + (\nabla\cdot\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{v})]\, \mathbf{dx}.$$

  Y como consecuencia se define la siguiente norma

  $$\|\mathbf{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla\cdot\mathbf{u}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

  que es equivalente a la norma $|||\mathbf{u}|||_{H(\mathrm{div},\Omega)} = \|\mathbf{u}\| + \|\nabla\cdot\mathbf{u}\|$.

- $H(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \ \nabla\times\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$
- $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega) : \ \mathbf{n}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega\}$ donde $\mathbf{n}$ denota la normal unitaria exterior en $\partial\Omega$.

Dadas $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$, el producto interno natural para este espacio se define por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\mathbf{curl},\Omega)} = \int_\Omega [\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + (\nabla\times\mathbf{u})(\nabla\times\mathbf{v})]\mathbf{dx},$$

y la correspondiente norma como

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla\times\mathbf{u}\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

la cual resulta ser equivalente a la norma $|||\mathbf{u}|||_{H(\mathbf{curl},\Omega)} = \|\mathbf{u}\| + \|\nabla\times\mathbf{u}\|$ por lo que usaremos una u otra indistintamemnte como norma de $H(\mathbf{curl}, \Omega)$

Vamos a denotar con C, una constante genérica positiva. Cabe aclarar que C podría no ser la misma a lo largo de los capítulos. Utilizaremos la notación $A \lesssim B$ para indicar que $A \leq CB$ donde A y B son expresiones que dependen de funciones que en el caso discreto también pueden depender de la discretización.

Capítulo 2

Formulación del Problema

En este capítulo vamos a presentar distintas alternativas para la formulación en forma débil del Problema de Maxwell. Estudiaremos la existencia y unicidad de solución, para cada una de estas formulaciones, y mostraremos como estas formulaciones resultan ser equivalentes entre si. Hacia el final del capítulo nos enfocaremos en la formulación que usaremos en la resolución numérica del problema.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

Antes de introducir el problema que estudiaremos en esta Tesis, expondremos brevemente un resumen de cuales son las Ecuaciones de Maxwell y algunas observaciones que se desprenden de ellas.

Como mencionamos en la introducción la investigación más importante de Maxwell fue elaborar y modelar un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas que describen fenómenos electromagnéticos, utilizando trabajos de investigación anteriores y resultados de físicos como Michael Faraday y André Marie Ampère.

El campo electromagnético se caracteriza por cuatro funciones vectoriales de posición y tiempo: el campo eléctrico $\mathcal{E}$, el vector de desplazamiento $\mathcal{D}$, el campo magnético $\mathcal{H}$ y la inducción magnética $\mathcal{B}$. Las ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}
\text{(Ley de Maxwell y Ámpere)} \;\; \nabla \times \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J}, \\
\text{(Ley de Faraday)} \;\; \nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \\
\text{(Ley de Gauss de magnetismo)} \;\; \nabla \cdot \mathcal{B} &= 0, \\
\text{(Ley de Gauss de electricidad)} \;\; \nabla \cdot \mathcal{D} &= \rho,
\end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de carga electrica y $\mathcal{J}$ la densidad de corriente eléctrica.

Varios de los fenómenos asociados a las ecuaciones de Maxwell pueden tener una estructura común, por ejemplo, el problema magnetostatico, el problema del tiempo armónico y los métodos de paso. Nos interesará tratar esta estructura común en un marco común.

Es por eso que veremos brevemente como se deduce la llamada formulación potencial de las ecuaciones de Maxwell.

Observación 2.1.1. *El siguiente esquema, conocido como secuencia de De Rham tiene como principal propiedad la coincidencia de rangos y núcleos de operadores consecutivos. A partir de esto, también, se puede deducir que los operadores basados en rotor y divergencia son sobreyectivos.*

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\mathbf{curl},\Omega) \xrightarrow{\text{rot}} H(\text{div},\Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}.$$

Para nuestro propósito necesitaremos de las siguientes dos propiedades:

- Suryectividad del operador div: Para $\mathcal{B} \in H(\text{div},\Omega)$ se tiene

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \overset{\text{de Rham}}{\Rightarrow} \exists \mathcal{A} \in H(\mathbf{curl},\Omega) : \quad \nabla \times \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

- Suryectividad del operador rot: Para $\mathcal{A} \in H(\mathbf{curl},\Omega)$ se tiene

$$\nabla \times \mathcal{A} = 0 \overset{\text{de Rham}}{\Rightarrow} \exists \varphi \in H^1(\Omega) \text{ con } \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x = 0 : -\nabla\varphi = \mathcal{A}.$$

2.1.1. Reformulación potencial de las ecuaciones de Maxwell

Bajo ciertas hipótesis sobre el medio material se puede asumir una relación entre los vectores intensidad eléctrica e inducción magnética, a través de dos parámetros conocidos como permitividad eléctrica y permeabilidad magnética. Partiendo de la Ley de Ámpere que nos dice

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J}.$$

podemos entonces asumir que: $\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{E}$, $\mathcal{J} = \sigma\mathcal{E} + \mathbf{j}_i$ y $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$ ($\Rightarrow \mathcal{H} = \mu^{-1}\mathcal{B}$). Aquí ϵ, σ y $\mathbf{j}_i$ corresponde a la permitividad eléctrica, a la conductividad eléctrica y a la densidad de corriente respectivamente. El parámetro μ corresponde a la permeabilidad magnética (es decir, la capacidad que tiene un material de permitirle a un fluido que lo atraviese sin alterar su estructura interna).

Por la suryectividad del operaror div, y dado que $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$, existe un vector potencial $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$. Reemplazando en la Ley de Ámpere tenemos

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathcal{A}) = \epsilon\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sigma\mathcal{E} + \mathbf{j}_i.$$

El objetivo es deshacernos de $\mathcal{E}$. Solo se quiere tener una variable $\mathcal{A}$ en el lado izquierdo. Reformular la ley de Faraday nos lleva a

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \iff \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathcal{A} \iff \nabla \times (\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}) = 0.$$

Usando que el operador rot es suryectivo,

$$\nabla \times (\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \exists \varphi : \quad \mathcal{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathcal{A}) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathbf{j}_i - \sigma\nabla\varphi - \epsilon \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t}.$$

Viendo que para cualquier función escalar ψ los potenciales

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \nabla\psi$$

$$\hat{\varphi} = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

satisfacen también las ecuaciones anteriores. Al elegir un potencial $\mathcal{A}^*$ tal que

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} + \int_{t_0}^{t} \nabla\varphi dt$$

obtenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathcal{A} = \nabla \times \mathcal{A}^*.$$

Por conveniencia escibimos $\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$.

Finalmente se obtiene la formulación potencial de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathcal{A}) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathbf{j}_i.$$

Algunas aplicaciones utilizan funciones armónicas dependientes del tiempo, tomando por ejemplo,

$$\mathbf{j}_i(x,t) = \mathrm{Re}(\mathbf{j}_i(x)e^{i\omega t}), \quad \mathcal{A}(x,t) = \mathrm{Re}(\mathcal{A}(x)e^{i\omega t}).$$

Aquí derivando respecto de t la función $\mathcal{A}$, se obtiene

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathcal{A}) + (i\omega\sigma - \omega^2\epsilon)\mathcal{A} = \mathbf{j}_i,$$

donde $\mathcal{A}$ es desconocido y $\mathbf{j}_i(x,t)$ es conocido. El término $\alpha = (i\omega\sigma - \omega^2\epsilon)$ dependerá del tipo de problema. De esta manera podemos escribir una expresión común para la ecuaciones de Maxwell dada por

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathcal{A}) + \alpha\mathcal{A} = \mathbf{j}_i,$$

Observación 2.1.2. *Existen otros tipos de problema como por ejemplo, el "método de paso", en el cual, en general,* $\epsilon = 0$ *y* $\sigma = 1$ *y se toma* $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t_{k+1}) \approx \frac{\mathcal{A}^{k+1} - \mathcal{A}^k}{\Delta t}$.

La función que nos interesa es $\mathcal{A}$ y se utiliza para calcular la inducción magnética $\mathcal{B} = \nabla \cdot \mathcal{A}$ y la intensidad del campo eléctrico $\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$. A partir de ahora definiremos nuestra función desconocida como $\mathbf{u}$ y definiremos el lado derecho como $\mathbf{f}$.

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{u}) + \alpha\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Si consideramos las ecuaciones de Maxwell relacionadas al problema de tiempo armónico, estas están dadas para $\alpha \leq 0$ ([9]). Para nuestro análisis supondremos que $\alpha = 0$ por lo cual la ecuación resultante viene dada por

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{f}. \tag{2.1}$$

2.2. Formulaciones del Problema

2.2.1. Primeras Formulaciones

Consideremos el problema de Maxwell dado por (2.1) en un dominio acotado, tal que el borde es un conductor perfecto. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d = 2$ (la teoria también puede aplicarse al caso de que $d = 3$), un dominio poliédrico simplemente conexo, no necesariamente convexo con borde ($\partial\Omega$) Lipschitz continuo. Además de su rango de aplicabilidad, este sistema de ecuaciones diferenciales parciales exhibe las complicaciones matemáticas encontradas en problemas de modelos más complejos (ver, por ejemplo, [17] y [11]).

Observación 2.2.1. *Además de lo visto en la sección anterior, el problema de Maxwell puede plantearse como un problema de minimización que consiste en encontrar un campo vectorial* $\mathbf{u}$*, en este caso correspondiente al campo magnético, que minimice el potencial*

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{2} |\nabla \times \boldsymbol{v}|^2 - \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{f} \right) dx,$$

con $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$*,* $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0$ *en* $\partial\Omega$ *(donde* $\mathbf{n}$ *representa la normal exterior al borde de* Ω*) y* λ *un parámetro físico asociado a la permeabilidad (* $\lambda = \mu^{-1}$ *en* (2.1)*).*

De ahora en más, sin pérdida de generalidad supondremos que $\mu = 1$.

El objetivo es encontrar una aproximación numérica del campo vectorial $\mathbf{u}$ que satisfaga las siguientes ecuaciones, el cual denominaremos Problema de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{f} \ \text{ en } \ \Omega \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \ \text{ en } \ \Omega \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ en } \ \partial\Omega, \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{f}$ es tal que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ en Ω y $\mathbf{n}$ representa la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

Por un lado, nos interesará la siguiente formulación que puede verse como una penalización exacta de la condición de divergencia libre. Aquí, buscamos $\mathbf{u}$ solución para

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} \ \text{ en } \ \Omega \tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \ \text{ en } \ \partial\Omega \tag{2.6}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ en } \ \partial\Omega \tag{2.7}$$

donde (2.5) no es más que una forma vectorial de la ecuación de Poisson ya que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\Delta \mathbf{u} \tag{2.8}$$

Aquí la restricción de divergencia libre en Ω se reemplaza por una condición de divergencia libre en $\partial\Omega$ (ver [21]).

Esto último motiva el enfoque de penalidad exacta donde se busca **u** tal que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} \text{ en } \Omega \tag{2.9}$$

Esta reafirmación del problema es (en principio) muy atractiva desde un punto de vista numérico. Sin embargo, como veremos más adelante, esta penalización exacta modifica la configuración funcional del problema original, lo que lleva a soluciones espurias para dominios no convexos.

Por otro lado, consideraremos una interpretación mixta del Problema de Maxwell que consiste en introducir una función p escalar desconocida que desempeña el papel de un multiplicador de Lagrange para la restricción de divergencia libre (2.3). Para el mismo dato $\mathbf{f}$, el par $(\mathbf{u}, p)$ debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} \text{ en } \Omega \tag{2.10}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \tag{2.11}$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega \tag{2.12}$$
$$p = 0 \text{ en } \partial\Omega. \tag{2.13}$$

Observación 2.2.2. *Veremos que p desaparece en un determinado contexto, lo cual nos llevará al problema expuesto al principio del capítulo.*

A groso modo uno podría ver que:
(Problema de Maxwell (2.2)-(2.4)) $\Longleftrightarrow$ (2.5)-(2.7) $\Longleftrightarrow$ (2.10)-(2.13).

De hecho, está claro que una solución del Problema de Maxwell (2.2)-(2.4) satisface tanto (2.10)-(2.13) (con $p = 0$) como (2.5)-(2.7). A la inversa, supongamos primero que $(\mathbf{u}, p)$ es una solución para (2.10)-(2.13). Obviamente **u** cumple con el Problema de Maxwell si $p \equiv 0$. Para probar esto, basta con aplicar el operador de divergencia a (2.10). En virtud que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, vemos que p satisface

$$\Delta p = 0 \text{ en } \Omega \tag{2.14}$$
$$p = 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{2.15}$$

cuya única solución se sabe que es $p = 0$. De manera similar, si **u** es una solución de (2.5)-(2.7), entonces **u** satisface el Problema de Maxwell si $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$. Si $p = \nabla \cdot \mathbf{u}$ y se aplica el operador $\nabla\cdot$ a (2.5), se muestra que p satisface nuevamente (2.14) y (2.15), y se sigue la misma conclusión.

Este planteo podría ser falso, ya que depende del espacio funcional en el que se busca **u**. En efecto, el hecho de que la única solución del problema (2.14)-(2.15) sea la nula se mantiene siempre que p sea lo suficientemente regular. Se puede ver que, por ejemplo, si el dominio es un poliedro no convexo, el conjunto de soluciones en L^2 de este problema homogéneo consiste incluso de un espacio de dimensión infinita. Por lo tanto, es necesario precisar el marco funcional asociado con estos tres problemas y la interpretación correcta de las ecuaciones.

El siguiente lema, será de utilidad para los próximos resultados que expodremos.

Lema 2.2.1. *La forma bilineal* $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{v})$ *define una norma en* $H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}) = \{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}) : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2\}$ *equivalente a su norma natural y por lo tanto* $(\nabla \times \cdot, \nabla \times \cdot)$ *define una norma en* $H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\ 0) = \{\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \ \text{ en } \ \Omega\}$

Demostración. Sea $\|\cdot\|_*$ la norma inducida por la forma bilineal a, dada por

$$\|\mathbf{v}\|_* = \|\nabla \times \mathbf{v}\| + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|,$$

para $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div})$.

Por otro lado sabemos que la norma natural en $H(\mathbf{curl}, \mathrm{div})$ es equivalente a

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})} = \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl})} + \|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{div})}.$$

Para probar la equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})}$ vamos a probar que $\|\cdot\|_* \lesssim \|\cdot\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})}$ y $\|\cdot\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})} \lesssim \|\cdot\|_*$.

Por un lado tenemos que, para $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div})$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})} &= \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl})} + \|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{div})} \\ &\geq \|\nabla \times \mathbf{v}\| + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|_*. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que para cualquier $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl})$ tenemos que $\|\mathbf{v}\| \lesssim \|\nabla \times \mathbf{v}\| + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|$ (ver Corolario 3.51 en [27]) se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl},\mathrm{div})} &= \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl})} + \|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{div})} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{v}\| + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|_*. \end{aligned}$$

Como $H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\ 0)$ hereda la norma de $H_0(\mathbf{curl}.\mathrm{div})$ y por lo visto anteriormente $\|\cdot\|_*$ define una norma $H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\ 0)$.

Sea $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\ 0)$,

$$\|\mathbf{v}\|_* = \|\nabla \times \mathbf{v}\| + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\| = \|\nabla \times \mathbf{v}\|.$$

Por lo tanto, $(\nabla \times \cdot, \nabla \times \cdot)$ define una norma en $H_0(\mathbf{curl}, \mathrm{div}\ 0)$. □

Dado que para la resolución numérica se utilizará una formulación débil de las ecuaciones de los problemas expuestos anteriormente, repasaremos algunas identidades de Green que usaremos en la deducción de cada formulación cuya demostración incluiremos por completitud.

En primer lugar recordemos que la formula estándar de integración por partes para funciones $u, v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \mathbf{n}_i) \cdot v dS. \tag{2.16}$$

donde $\mathbf{n}_i$ es la componente i de la normal exterior a $\partial\Omega$.

Proposición 2.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y $\partial\Omega$ su frontera. Dadas* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *campos vectoriales (con la regularidad necesaria en cada caso) se tiene que:*

$$\int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathrm{d}S, \quad (2.17)$$

$$\int_\Omega \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S - \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{n}$ *es la normal exterior a* $\partial\Omega$.

Demostración. Supongamos que $\nabla \times \mathbf{u} = (w_1, w_2, w_3)$ y que $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces usando (2.16) se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial w_3}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_3}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) \cdot (v_1, v_2, v_3)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left[\frac{\partial w_3}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x_3} v_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} v_3 - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} v_3 \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left[-w_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + w_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - w_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + w_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right] \mathrm{d}x \\
&- \int_{\partial\Omega} [-(w_3 \cdot n_2) \cdot v_1 + (w_2 \cdot n_3) \cdot v_1 + (w_3 \cdot n_1) \cdot v_2 - (w_1 \cdot n_3) \cdot v_2 \\
&- (w_2 \cdot n_1) \cdot v_3 + (w_1 \cdot n_2) \cdot v_3] \mathrm{d}S \\
&= \int_\Omega \left[w_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + w_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + w_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] \mathrm{d}x \\
&- \int_{\partial\Omega} [w_1 \cdot (v_2 \cdot n_3 - v_3 \cdot n_2) - w_2 \cdot (v_3 \cdot n_1 - v_1 \cdot n_3) \\
&+ w_3 \cdot (v_1 \cdot n_2 - v_2 \cdot n_1)] \mathrm{d}S \\
&= \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

De esta manera queda probada la identidad (2.17).

Probemos ahora (2.18). Supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{u} = p$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \cdot (v_1, v_2, v_3)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} v_3 \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \left(p \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + p \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + p \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\partial\Omega} (p \cdot v_1 \cdot \mathbf{n}_1 + p \cdot v_2 \cdot \mathbf{n}_2 + p \cdot v_3 \cdot \mathbf{n}_3) \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y $\partial\Omega$ su frontera. Dado* $\mathbf{u}$ *un campo vectorial y $q : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ (con la regularidad necesaria en cada caso), se tiene que:*

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q \, \mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot q \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.19}$$

donde $\mathbf{n}$ *es la normal exterior a $\partial\Omega$*

Demostración. Consideremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Al igual que en las demostraciones previas utilizaremos la identidad (2.16). Supongamos que $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Veamos (2.19).

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q \, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot q + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot q + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot q \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \left(u_1 \cdot \frac{\partial q}{\partial x_1} + u_2 \cdot \frac{\partial q}{\partial x_2} + u_3 \cdot \frac{\partial q}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\partial\Omega} (u_1 \cdot q \cdot \mathbf{n}_1 + u_2 \cdot q \cdot \mathbf{n}_2 + u_3 \cdot q \cdot \mathbf{n}_3) \mathrm{d}S \\
&= -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot q \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S.
\end{aligned}$$

□

Vamos a considerar tres formulaciones al Problema de Maxwell, las cuales veremos que son equivalentes pero solo una será de mayor utilidad para nuestro problema, ya que las restantes nos puede llevar a “malas” soluciones en determinados contextos.

2.2.2. Formulación Maxwell (curl)

Sea $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ una función test. Multipicando por $\mathbf{v}$ en (2.2) de ambos lados de la igualdad, luego integrando y aplicando (2.17) se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}),
\end{aligned}$$

pues $(\mathbf{n} \times \mathbf{v})|_{\partial\Omega} = 0$.
Así obtenemos una primer formulación para el problema de Maxwell.

Maxwell (**curl**):

Encontrar $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ tal que

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \tag{2.20}$$

La existencia de la solución a "Maxwell (**curl**)" se puede demostrar restringiendo el espacio de los campos de prueba a $H(\mathbf{curl}, \text{div } 0)$, que está permitido por el siguiente lema.

Lema 2.2.2. *Toda* $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ *se puede descomponer como* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla\phi$ *donde*

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 \in H_0(\mathbf{curl}, \text{div } \mathbf{0}) \;\text{ y }\; \nabla \times \mathbf{v}_0 = \nabla \times \mathbf{v} \\ \phi \in H_0^1 \;\text{ y }\; \Delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

La demostración de este resultado se puede seguir a partir del Teorema 3.2 de [19].

El siguiente lema también nos será de utilidad y su demostración puede seguirse a partir de [2].

Lema 2.2.3. *Sea* $\phi \in H_0^1(\Omega)$*, entonces* $\nabla\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$*.*

Notando que para un campo de prueba $\mathbf{v} = \nabla\phi$ con $\phi \in H_0^1(\Omega)$, ambos términos de la ecuación variacional (2.20) desaparecen ya que asumimos que $\mathbf{f}$ es tal que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, y el Lema 2.2.3 nos permite concluir que "Maxwell (**curl**)" es equivalente a

Maxwell ($\mathbf{curl}$, div 0):

Encontrar $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\text{div } 0, \Omega)$ tal que

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\text{div } 0, \Omega)$$

Proposición 2.2.3. *Las formulaciones "Maxwell (*$\mathbf{curl}$*)" y "Maxwell (*$\mathbf{curl}, \text{div } \mathbf{0}$*)" están bien definidas y son equivalentes.*

Demostración. Como mencionamos antes, la equivalencia resulta del Lema anterior tomando como función de prueba $\mathbf{v} = \nabla\phi$, con $\phi \in H_0^1$, en la formulación "Maxwell (**curl**)". Para la buena definición de ambas formulaciones utilizaremos el Lema de Riesz y el lema 2.2.1. Basta ver que el funcional bilineal $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla\times\mathbf{u}, \nabla\times\mathbf{v})$ es continuo en $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ y en $H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)$. En efecto, sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$, como $a(\cdot, \cdot)$ define una norma en $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$, $\|\cdot\|_{H_0(\mathbf{curl})}$, se tiene que $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_{H_0(\mathbf{curl})}\|\mathbf{v}\|_{H_0(\mathbf{curl})}$ lo que dice que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y por el lema de Riesz existe una única solución en $H_0(\mathbf{curl})$. Análogamente si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)$, como $a(\cdot, \cdot)$ define una norma en $H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)$ ($\|\cdot\|_{H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)}$), por lo visto en el lema 2.2.1, entonces se tiene $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_{H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)}\|\mathbf{v}\|_{H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)}$ lo que dice que $a(\cdot, \cdot)$ es continua en $H_0(\mathbf{curl}, \text{div } 0)$ y por lo tanto existe solución única en este espacio. □

2.2.3. Formulación de penalización exacta

Sean $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega)$ una funcion test, y supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Multiplicando por $\mathbf{v}$ en (2.5) de ambos lados de la igualdad, luego integrando y aplicando las identidades (2.17) y (2.18) se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}(\nabla\times\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\Omega}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{\Omega}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
\int_{\Omega}(\nabla\times\mathbf{u})\cdot(\nabla\times\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega}(\nabla\times\mathbf{u})\cdot\ (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\mathrm{d}S- & \\
\left(\int_{\partial\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S-\int_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x}\right) &= \int_{\Omega}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
(\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{v})+(\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{v}) &= (\mathbf{f},\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

pues $\mathbf{n}\times\mathbf{v}=0$ y $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ en $\partial\Omega$.
De esta forma tenemos la siguiente formulación debil.

Penalización Exacta:

Encontrar $\mathbf{u}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)\cap H(\mathrm{div},\Omega)$ tal que

$$
(\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{v})+(\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{v})=(\mathbf{f},\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)\cap H(\mathrm{div},\Omega)\tag{2.21}
$$

Proposición 2.2.4. *El problema de "Penalización Exacta" está bien definido y la solución coincide con la de "Maxwell* (**curl**)*".*

Demostración. Sea $a(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{v})+(\nabla\cdot\mathbf{u},\nabla\cdot\mathbf{v})$. Este funcional es bilineal y continuo. En efecto, la bilinealidad es directa de la linealidad del rotor y de la divergencia. Ahora dado que a define una norma en $H_0(\mathbf{curl},\Omega)\cap H(\mathrm{div},\Omega)$ por el lema 2.2.1, se tiene que $|a(\mathbf{u},\mathbf{v})|\leq||\mathbf{u}|||_{H_0(\mathbf{curl},\mathrm{div})}||\mathbf{v}||_{H_0(\mathbf{curl},\mathrm{div})}$. Así este funcional es continuo y por el Lema de Riesz el problema tiene solución única, es decir, está bien definido.

Ahora supongamos que $\mathbf{u}$ es solución de (2.21) y que $\nabla\cdot\mathbf{f}=0$. Pongamos $p=\nabla\cdot\mathbf{u}$ y sea $\phi\in H_0^1$ solución de $\Delta\phi=p$. Tomemos ahora $\mathbf{v}=\nabla\phi$ y reemplacemos en (2.21), así obtenemos $||p||=0$ (pues $(\mathbf{f},\mathbf{v})=(\mathbf{f},\nabla\phi)=(\nabla\cdot\mathbf{f},\phi)=0$ por (2.18)), lo que implica $p\equiv 0$. Entonces se puede concluir que $\mathbf{u}$ es solución de "Maxwell (**curl**)". □

2.2.4. Formulaciones Mixtas: curl y curl-div

Consideremos ahora la interpretación mixta del Problema de Maxwell introducida anteoriormente en (2.10).

Sean $\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)$ y $q\in H_0^1(\Omega)$ funciones test. Multiplicando por $\mathbf{v}$ en (2.10) de ambos lados de la igualdad, luego integrando y aplicando (2.17) se tiene:

$$\int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u})(\nabla \times \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{v}\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\nabla p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}),$$

pues $(\mathbf{n} \times \mathbf{v})|_{\partial\Omega} = 0$.

Ahora multiplicando por q en (2.11), integrando y aplicando (2.19) se tiene:

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot q\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$
$$-(\nabla q, \mathbf{u}) = 0,$$

pues $q \in H_0^1(\Omega)$.

Así obtenemos la siguiente formulación para el problema.

<u>Formulación **curl**</u>:

Encontrar $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ y $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\nabla p, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \\ -(\nabla q, \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.22}$$

Ahora si tomamos $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ y $q \in L^2(\Omega)$ como funciones tests. Razonando igual que antes para (2.10) y usando (2.18) tenemos:

$$\int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u})(\nabla \times \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\mathrm{d}S - \left(\int_{\partial\Omega} p \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}S - \int_\Omega p \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x} \right) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}),$$

pues $(\mathbf{n} \times \mathbf{v})|_{\partial\Omega} = 0$ y $p \equiv 0$ en $\partial\Omega$.

Para (2.11) solo multiplicamos por la función test q. De esta manera obtenemos la siguiente formulación para el problema.

<u>*Formulación* **curl**-div</u>:

Encontrar $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ y $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} (\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{v})+(p,\nabla\cdot\mathbf{v}) &= (\mathbf{f},\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)\cap H(\mathrm{div},\Omega) \\ (q,\nabla\cdot\mathbf{u}) &= 0 \quad \forall q\in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.23}$$

Proposición 2.2.5. *La "Formulación* **curl***" y la "Formulación* **curl** − div*" son equivalentes y la solución es* $(\mathbf{u},0)$ *donde* $\mathbf{u}$ *es solución de "Maxwell (***curl***)" (o "Maxwell (***curl***,*div *0)").*

Demostración. Veamos la equivalencia de ambas formulaciones (en la próxima sección mostraremos la buena definición).

En primer lugar asumiremos que $\nabla\cdot\mathbf{f}=0$. Supongamos que $\mathbf{u}$ es solución de la "Formulación **curl**",y dado que $\nabla\times(\nabla p)=0$, se tiene que $\mathbf{v}=\nabla p$ está en $H_0(\mathbf{curl},\Omega)$ (usando el Lema 2.2.3) y por ende la podemos tomar como función test en la "Formulación **curl**". En efecto, como por (2.19) tenemos que $(\mathbf{f},\nabla p)=(\nabla\cdot\mathbf{f},p)$, de la primera ecuación de esta formulación se obtiene $\|\nabla p\|=0$. Luego, como además $p\equiv 0$ en $\partial\Omega$ concluimos que $(\mathbf{u},0)$ es solución de "Formulación **curl**" con $\mathbf{u}$ satisfaciendo "Maxwell (**curl**)".

Por otro lado, si $\mathbf{u}$ es solución de la "Formulación **curl** − div" satisface "Maxwell (**curl**,div 0)". En efecto, sea $\phi\in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Delta\phi=p$, y tomemos $\mathbf{v}=\nabla\phi$. Como $\nabla\times\nabla\phi=0$ y $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\Delta\phi\in L^2(\Omega)$, entonces $\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)\cap H(\mathrm{div},\Omega)$. De esta manera, dado que $\nabla\cdot\mathbf{v}=\Delta\phi=p$ de la primera ecuacion de la formulación se sigue que $\|p\|=0$ (pues, $(\mathbf{f},\nabla\phi)=(\nabla\cdot\mathbf{f},\phi)$ por (2.19) y el hecho que $\phi\equiv 0$ en $\partial\Omega$). Por lo tanto p desaparece haciendo que $(\mathbf{u},0)$ sea solución con $\mathbf{u}$ solución de "Maxwell (**curl**,div 0)". □

2.3. Operadores, normas y buena definición del Problema

A continuación definiremos los operadores (funcionales) y las normas que, teniendo en cuenta la "Formulación **curl**", usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 2.3.1. *Para* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{curl},\Omega)$ *y* $p,q\in H_0^1(\Omega)$*, se definen los siguientes operadores:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{v},q) &= -(\nabla q,\mathbf{v}) \\ c((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) &= a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},q)-b(\mathbf{u},p) \end{aligned}$$

Observación 2.3.1. *El signo negativo en el tercer término se justifica a partir de que en* (2.22) *podemos multiplicar la segunda ecuación por* -1 *dando lugar a un problema equivalente. El propósito de este cambio se verá reflejado en la prueba de resultados que se expondrán mas adelante.*

Definición 2.3.2. *Para* $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl})$ *y* $q \in H_0^1(\Omega)$*, Se definen las siguientes normas:*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H_0(\mathbf{curl})} &= \frac{1}{\ell}\|\mathbf{v}\| + \|\nabla \times \mathbf{v}\| \\ \|q\|_1 &= \frac{1}{\ell}\|q\| + \|\nabla q\| \\ |||\mathbf{v}, q||| &= \|\mathbf{v}\|_{H_0(\mathbf{curl})} + \ell^{1/2}\|q\|_1 \end{aligned}$$

con $\ell = \ell(\Omega)$ *una constante para que las normas sean consistentes.*

Llamaremos $\mathbf{V}$ y Q a los espacios $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Observación 2.3.2. *Si* B *es el operador tal que* $\langle B\mathbf{v}, q\rangle = b(\mathbf{v}, q)$*, entonces* $Ker(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ b(\mathbf{v}, q) = 0 \ \forall \ q \in Q\}$.

Antes de probar la buena definición del problema (2.22) introduciremos la desigualdad de Friedrich-Poincaré (expuesta en [27]) que nos será de utilidad para la prueba de la buena definición. Antes mencionaremos el siguiente Lema, cuya demostración puede consultarse en (ver [1] y [31]).

Lema 2.3.1. *Si* Ω *es un dominio Lipschitz acotado el espacio* $H(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$ *es compacto en* $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Lema 2.3.2. ***(Desigualdad de Friedrich-Poincaré)***
Supongamos que Ω *es un dominio acotado y Lipschitz. Si* Ω *es simplemente conexo con borde conexo. Entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo* $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$ *se tiene*

$$\frac{1}{\ell}\|\mathbf{u}\| \leq C\|\nabla \times \mathbf{u}\| \tag{2.24}$$

Demostración. Supongamos que el resultado es falso. Entonces existe una sucesión $\{\mathbf{u}_n\}_n \subset H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$ tal que $\|\nabla \times \mathbf{u}_n\| \leq \frac{1}{n}$ y $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ para todo n. A través del Lema 2.3.1, como $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$ es compacto en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, existe una subsucesión $\{\mathbf{u}_{n_j}\}$ tal que $\mathbf{u}_{n_j} \longrightarrow \mathbf{u}$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ cuando $j \longrightarrow \infty$ para algún $\mathbf{u}$ en $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}\ 0, \Omega)$.

A partir de esto se tiene, por un lado que $\|\mathbf{u}\| = 1$, dado que $\|\mathbf{u}_{n_j}\| = 1$, lo que implica además que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Por otro lado se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. En efecto, como $\nabla \cdot \mathbf{u}_{n_j} = 0$, tomemos $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot f \, d\mathbf{x} = \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}_{n_j}) \cdot f \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

por lo tanto, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Para ver que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, por lo visto al principio de la demostración, $\|\nabla \times \mathbf{u}_{n_j}\| \leq \frac{1}{n_j}$, implica que $\nabla \times \mathbf{u}_{n_j} \longrightarrow 0$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Tomemos $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d$,

$$\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}_{n_j}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d,$$

entonces $\nabla \times \mathbf{u} = 0$.

Esto último implica que existe $p \in H^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u} = \nabla p$.

$$0 = \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot p \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -||\mathbf{u}||^2 \quad \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega,$$

lo que es una contradicción. □

Recordemos, además, la desigualdad de Poincaré para funciones en H_0^1.

Lema 2.3.3. ***(Desigualdad de Poincaré en H_0^1)***
Supongamos que Ω es un dominio acotado y Lipschitz. Entonces existe una constante $C < \infty$ tal que

$$||v|| \leq C|v|. \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 2.3.1. *El operador c satisface la siguiente condición inf-sup:*

$$\inf_{(\mathbf{u},p)\in\mathbf{V}\times Q\setminus\{\mathbf{0},0\}} \sup_{(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times Q\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q))}{|||\mathbf{u},p|||\,|||\mathbf{v},q|||} \geq \beta > 0,$$

y por lo tanto (2.22) está bien definida.

Demostración. Afirmamos que $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ es bilineal, continua y coercitiva restringida a $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$ (es un subespacio cerrado de $\mathbf{V}$ en $\mathrm{Ker}(B)$). En efecto, es fácil ver que a es bilineal y continua. Veamos entonces que es coercitiva. Para esto usaremos la desigualdad de *Poincaré-Friedrich* vista en (2.24).

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$. Dado que $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = ||\nabla \times \mathbf{v}||^2$ y que, en virtud de (2.24), $||\mathbf{v}||_\mathbf{V} = \frac{1}{\ell}||\mathbf{v}|| + ||\nabla \times \mathbf{v}|| \leq C||\nabla \times \mathbf{v}||$, entonces $||\mathbf{v}||_\mathbf{V}^2 \leq C||\nabla \times \mathbf{v}||^2 = Ca(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. De esta manera probamos que a es coercitiva en $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$.
Por otro lado, $b(\cdot, \cdot)$ es bilineal y continua. Además, $\forall\, p \in Q$, $\exists\, \mathbf{v}_p \in \mathbf{V}$ con $||\mathbf{v}_p||_\mathbf{V} = 1$ tal que $b(\mathbf{v}_p, p) \geq \beta_p ||p||_Q$. En efecto, si tomamos $\mathbf{v}_p = \frac{\nabla p}{||\nabla p||}$, satisface que $\mathbf{v}_p \in V$ (por Lema 2.2.3) y $b(\mathbf{v}_p, p) = \int_\Omega \mathbf{v}_p \cdot \nabla p = \frac{1}{||\nabla p||}\int_\Omega |\nabla p|^2 = ||\nabla p|| \geq C||p||_Q$ (usando *Poincaré* ya que $p = 0$ en $\partial\Omega$) .
De esta mandera probamos que a y b cumplen la condición inf-sup. Más precisamente cumplen las condiciones (1.8) y (1.9) del Teorema 1.3.2. Ahora siguiendo la Proposición 1.3.1 implica que la forma bilineal c cumple (BNB1) y (BNB2), es decir la inf-sup, probando así la buena definicion de (2.22). □

Proposición 2.3.1. *Supongamos que* $\mathbf{f} \in H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$*. Las formulaciones (2.23) y (2.21) están bien definidas. Además, son equivalentes a (2.22) en el sentido que conducen a la misma* $\mathbf{u}$.

Demostración. Veamos que $p \equiv 0$ en (2.22).
Tenemos que $\int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \;\; \forall\, \mathbf{v} \in H_0(\mathrm{curl}, \Omega)$. Tomemos $\mathbf{v} = \nabla p$. Es claro que $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ (por el Lema 2.2.3). Usando que $\nabla \times \nabla p = 0$, tenemos que $-||\nabla p||^2 = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\mathbf{x}$. Como $\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} p \cdot (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S - \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{f}) \cdot p \, \mathrm{d}\mathbf{x}$, entonces $||\nabla p|| = 0$ ya que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ (pues $\mathbf{f} \in H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$ por hipótesis) y que $p \equiv 0$ en $\partial\Omega$. Usando ahora la desigualdad de *Poincaré* y que $p \equiv 0$ en $\partial\Omega$, tenemos finalmente que $p \equiv 0$ en Ω.
Por ultimo, aplicando las proposiciones (2.2.5) y (2.2.4) obtenemos lo querido. □

2.4. Formulación aumentada para el problema de Maxwell

En este trabajo estudiaremos una aproximación númerica para el problema de Maxwell donde se parte de una formulación aumentada diferente. Veremos en el siguiente capitulo que en determinados contextos nos será de interés una formulación **curl**.

La idea de esta formulación aumentada consiste en agregar el término $\frac{\ell^2}{\lambda}\Delta p$ a la ecuación (2.11). En este caso $\ell > 0$ es una constante inherente al problema ya que la misma es la utilizada para definir las normas consistentes y la cual se desprende de la desigualdad de *Poincaré-Friedrich*. La formulación en forma fuerte consiste entonces en encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ tal que

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla p &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} - \ell^2 \Delta p &= 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

en Ω con $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $p = 0$ en $\partial\Omega$.
Sean $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y $q \in Q$. Multiplicando la primer ecuación por $\mathbf{v}$ e integrado obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int_\Omega (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación multiplicamos por una función de prueba q e integramos obteniendo

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot q\, \mathrm{d}x - \ell^2 \int_\Omega (\Delta p) \cdot q\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= 0 \\ \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot q \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \ell^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q\, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot q \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= 0 \\ \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q\, \mathrm{d}\mathbf{x} + \ell^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Donde estas igualdades se deducen de las identidades (2.17), (2.18) y (2.19).

Así obtenemos la siguiente formulación.

Formulación Aumentada:

Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $p \in Q$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ -b(\mathbf{u}, q) + s_p(p, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{cases} \tag{2.25}$$

con $s_p = \ell^2 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q$

Proposición 2.4.1. *Supongamos que* $\mathbf{f} \in H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$*. Entonces la formulación (2.25) está bien definida y su solución* $(\mathbf{u}, p)$ *es la solución de (2.22).*

Demostración. Veamos en primer lugar que $p \equiv 0$. Sea $\mathbf{v} = \nabla p$, de la primer ecuación obtenemos $-||\nabla p|| = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla p \;\; \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{f} \cdot p \;\; \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ pues $\mathbf{f} \in H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$. Usando Poincaré y el hecho de que $p|_{\partial\Omega} = 0$ se deduce que $p = 0$ en Ω.

Para ver la buena definición consideremos $\hat{c}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) + s_p(p, q)$ y veamos que se cumple la inf-sup para este operador. Por el Teorema 2.3.1 sabemos que

$$\inf_{(\mathbf{u},p)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} \geq \beta > 0.$$

De aquí podemos inferir que $\forall (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$, $\sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q))}{|||\mathbf{u},p||| |||\mathbf{v},q|||} \geq \beta$.

Ahora, usando como función test $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u}, p)$,

$$\begin{aligned}
\sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{\hat{c}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} &= \sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} + \sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{s_p(p, q)}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} \\
&\geq \sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} + \ell^2 \frac{||\nabla p||^2}{|||\mathbf{u}, p|||^2} \\
&\geq \sup_{(\mathbf{v},q)\setminus\{\mathbf{0},0\}} \frac{c((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q))}{|||\mathbf{u}, p||| |||\mathbf{v}, q|||} \geq \beta > 0,
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre $(\mathbf{u}, p)$ se obtiene que la condición inf-sup para $\hat{c}$ lo que prueba la buena definición de (2.25).

Esta buena definición junto con el hecho de que $p = 0$ en Ω muestra que la solución de (2.25) es $(\mathbf{u}, 0)$, es decir, la misma solución de (2.22). □

Capítulo 3

Aproximación Numérica

En este capítulo vamos a presentar un método de tipo $\mathbf{P}_k P_l$ estabilizado para la formulación aumentada (2.25).

Sea $\mathcal{T}_h$ una partición de Ω en un conjunto de elementos $\{K\}$. Para cada elemento K denotamos por h_K su diámetro y definimos el tamaño de la malla como $h = \text{máx}_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$.

Sea $N_p(\Omega) = \{v_h \in C(\overline{\Omega})/v_h|_K \in P_p \;\; \forall\; K \in \mathcal{T}_h\}$, donde P_p denota el espacio de polinomios de grado menor o igual que p. Este es el tipo de espacio que vamos a considerar para las variables escalares y para todas las componentes de las variables vectoriales. Es un espacio de funciones H^1-conformes, ya que los funciones aproximantes de este espacio resultan ser continuas y pertenecen a $H^1(\Omega)$.

Antes de comenzar con el análisis del método numérico recordaremos las siguientes estimaciones inversas que se tienen para particiones quasi-uniformes (i.e., familias de triangulaciones para las cuales existe una constante σ tal que $h_T \geq \sigma h$): Existe una constante C_{inv}, independiente de h, tal que

$$||\nabla v_h||_{0,K} \leq C_{inv} h_K^{-1} ||v_h||_{0,K} \tag{3.1}$$

$$||\Delta v_h||_{0,K} \leq C_{inv} h_K^{-1} ||\nabla v_h||_{0,K}, \tag{3.2}$$

para toda v_h función de Elementos Finitos definida en $K \in \mathcal{T}_h$. Estas desigualdades pueden usarse para escalares o vectores (ver, por ejemplo, [11]). .

A continuación mostraremos que sucede en el caso particular en un dominio no convexo con la formulación basada en (2.23) y (2.21). Recordemos que se definió $\mathbf{V} = H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ y a $Q = H_0^1(\Omega)$.

3.1. The Corner Paradox

Aunque todas las formulaciones introducidas anteriormente en el Capítulo 2 son equivalentes, estables y consistentes, las aproximaciones numéricas basadas en las formulaciones *curl-div* (2.23) o de *penalización exacta* (2.21) pueden conducir a soluciones espurias en dominios no convexos (por ejemplo, dominios con esquinas reentrantes). A partir del trabajo de Costabel en [15] se puede dar una justificación a esto.

Si consideramos, para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$, las formas bilineales $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})$ y $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})$ siguiendo el Teorema 4.1 de [15] se puede concluir que ambas formas bilineales coinciden. Mas aún, implica que la forma bilineal a_0 es coercitiva con la norma de $H^1(\Omega)$ (ver [19], pág. 52), es decir que

$$\|\mathbf{u}\|_1 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|^2. \tag{3.3}$$

Esta coercitividad implica que $\mathbf{V} \cap X$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ para $X \subseteq H^1(\Omega)$ con la norma de H^1.

El siguiente Lema lo muestra en una forma general.

Lema 3.1.1. *Si Ω no es convexo, $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado propio de $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$*

Demostración. Es claro que $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega) \subseteq \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$.

Ahora, tomemos $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega) \backslash \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ y supongamos que existe una sucesión $\{\mathbf{u}_n\}_n \subset \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div})} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

$$\Rightarrow \|\nabla \times (\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|^2 + \|\nabla \cdot (\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|^2 \longrightarrow 0$$

Usando (3.3) se obtiene que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$ y como $H^1(\Omega)$ es cerrado se concluye que $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ lo que es una contradicción. □

A partir de este resultado podemos inferir que las formulaciones estables en H^1 no pueden converger a soluciones en $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ que no pertenecen a $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$. Podemos probar que este es el caso si consideremos la siguiente formulación *curl-div*: Hallar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{V}$ tal que

$$(\nabla \times \mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \;\; \forall \, \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{X}_h$ es un espacio de elementos finitos conforme H^1.

Corolario 3.1.1. *Si Ω no es convexo, en general* $\lim_{h \to 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)} \neq 0$

Demostración. Sea $\{\mathbf{u}_h\}_{h>0} \in \mathbf{X}_h$ solución del problema (3.4), luego $\{\mathbf{u}_h\}_{h>0} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y tomando $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ en la ecuación (3.4) se tiene que

$$\|\nabla \times \mathbf{u}_h\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h) \lesssim \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}_h\|.$$

Por otro lado, usando la coercitividad de $(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})$ con la norma de $H^1(\Omega)$ se tiene que

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 \lesssim \|\nabla \times \mathbf{u}_h\| + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|$$

En consecuencia, $\|\nabla \times \mathbf{u}_h\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|^2 \lesssim \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}_h\|_1 \lesssim \|\mathbf{f}\| (\|\nabla \times \mathbf{u}_h\| + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|)$

$$\Rightarrow \|\nabla \times \mathbf{u}_h\| + \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\| \lesssim \|\mathbf{f}\| \Rightarrow \|\mathbf{u}_h\|_1 \lesssim \|\mathbf{f}\|$$

Concluimos que $\{\mathbf{u}_h\}$ están uniformemente acotadas en H^1 y por lo tanto existe alguna subsucesión $\{\mathbf{u}_{h_j}\}$ convergente en $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Pero si la $\mathbf{u}$ está en $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega) \backslash \mathbf{H}^1(\Omega)$, usando el hecho de que $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ entonces $\lim_{h_j \longrightarrow 0} \mathbf{u}_{h_j} = \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$ y por lo tanto $\tilde{\mathbf{u}} \neq \mathbf{u}$. Se concluye entonces que la sucesión $\{\mathbf{u}_h\}$ no puede aproximar elementos de $\mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ que no pertenecen a $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^1(\Omega)$. □

Este resultado implica que las aproximaciones basadas en (2.23) y (2.21) no pueden "capturar" soluciones del problema (2.22) que no estén en $\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^1(\Omega)$ y por lo tanto no son en general adecuadas para resoluciones numéricas. Este tipo de soluciones se llaman "no suaves" o "singulares". La clave de este resultado es el control espurio sobre la divergencia de las aproximaciones basadas en (2.23) y (2.21), lo que implica que todo el gradiente está uniformemente acotado en $L^2(\Omega)$, y que $\mathbf{u}_h$ es una función que está en $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para todo h.

Sean $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $Q_h \subset Q$ espacios de Elementos Finitos. Consideremos la aproximación del problema (2.22), es decir, encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ y $p_h \in Q_h$ tal que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \qquad\qquad -b(\mathbf{u}_h, q_h) & = 0 \qquad\quad\ \forall\, q_h \in Q_h \end{cases} \tag{3.5}$$

donde los operadores a y b están definidos por $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\nabla\times\mathbf{u}, \nabla\times\mathbf{v})$ y $b(\mathbf{v}, p) = -(\nabla p, \mathbf{v})$.

La teoría de los Métodos Mixtos, expuesta en el Capítulo 1 y lo probado en el Capítulo 2, nos garantiza que este problema tendrá solución si la forma bilineal

$$c(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{u}_h, q_h)$$

satisface:

$$\inf_{(\mathbf{u}_h,p_h)\in\mathbf{V}_h\times Q_h\setminus(\mathbf{0},0)} \ \sup_{(\mathbf{v}_h,q_h)\in\mathbf{V}_h\times Q_h\setminus(\mathbf{0},0)} \frac{c(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{|||\mathbf{u}_h, p_h|||\,|||\mathbf{v}_h, q_h|||} \geq \beta_\delta > 0 \tag{3.6}$$

para $\beta_\delta > 0$ uniforme con respecto a h (ver [10]), donde recordemos que $|||\mathbf{v}_h, q_h||| = \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} + \ell^{\frac{1}{2}}\|q\|_1$.
No se sabe si existe alguna interpolación nodal para $\mathbf{V}_h \times Q_h$ que satisfaga esta condición inf-sup. Sin embargo, se satisface cuando $\mathbf{V}_h$ está dada por los elementos de Nédelec (o borde); esos elementos solo pertenecen a $H(\mathbf{curl};\Omega)$, ya que no satisfacen la continuidad de la componente normal sobre las caras del elemento. Por otra parte, un espacio de Elementos Finitos nodal se puede utilizar para el espacio Q_h (ver, por ejemplo, [30]).

Como resultado, los Elementos Finitos nodales solo se han usado con la formulación "mala" (3.4), lo que lleva a soluciones espurias para dominios no convexos, por ejemplo, dominios con esquinas reentrantes. Por otro lado, la formulación "buena" (3.5) se ha restringido a los elementos de borde, ya que satisfacen (3.6). Dado que el problema es el hecho de que una formulación curl-div no es adecuada para propósitos numéricos, se ha propuesto una estabilización de Elementos Finitos nodales en [13]. La idea clave de este enfoque es introducir un peso en el término div-div de penalización en (3.4) que depende de la distancia a las singularidades. El problema resultante se plantea en un espacio de Sobolev con pesos que satisface una propiedad de aproximación.

En esta tesis presentamos, siguiendo el trabajo de Badia&Codina [5], una nueva formulación mixta y una correspondiente aproximación de Elementos Finitos estabilizada que se puede resolver con Elementos Finitos nodales. La formulación que se propone se puede utilizar automáticamente para cualquier problema sin la necesidad de saber dónde están las singularidades y de definir una función de ponderación alrededor de cada singularidad.

3.2. Estabilización por FEM y aproximaciones nodales

Este nuevo enfoque puede verse como una discretización estabilizada basada en residuos de la formulación aumentada exacta (2.25), aunque simplemente se establecerá el método sin una motivación heurística adicional. La formulación de Elementos Finitos que se propone está diseñada para espacios de Elementos Finitos conformes con H^1.

Sea $\mathbf{V}_h = N_k(\Omega)^d \cap \mathbf{V}$ y $Q_h = N_l(\Omega) \cap Q$ para $k, l > 0$ el órden de aproximación para $\mathbf{u}$ y p, respectivamente. Como no hay restricción entre k y l, y se permiten aproximaciones de igual orden, supondremos $l = k$. Entonces se busca $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ y $p_h \in Q_h$ solución de

$$\left\{ \begin{array}{rll} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) & \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ -b(\mathbf{u}_h, q_h) + s_p(p_h, q_h) & = 0 & \forall\, q_h \in Q_h \end{array} \right. \tag{3.7}$$

donde

$$s_p(p_h, q_h) = \ell^2 \int_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{3.8}$$

y el término de estabilización está dado por

$$s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{3.9}$$

con $c_{\mathbf{u}}$ una constante algorítmica.

Se puede ver fácilmente que (3.7) es una aproximación de Elementos Finitos basada en residuos de la formulación aumentada (2.25) (ver [12], [23]). El parámetro de estabilización $c_{\mathbf{u}} \frac{h_K^2}{\ell^2}$ debe proporcionar un método dimensionalmente consistente y se puede justificar heurísticamente mediante el uso de técnicas de transformadas de Fourier (ver [6]).

El beneficio de este enfoque es doble: nos permite eludir la necesidad de tener que probar una condición inf-sup y estabilizar problemas singularmente perturbados.

La razón por la cual el término $s_{\mathbf{u}}$ es necesario se hace evidente a partir del analisís teórico y la experimentación numérica. Cuando $h \to 0$ este término desaparece y el método no es un algoritmo *curl-div*.

Definimos la forma bilineal c_s, que resulta de adicionar a la forma bilineal c los términos de estabilización s_u y s_p, es decir,

$$c_s((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}_h, q_h)) = c((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}_h, q_h)) + s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + s_p(p_h, q_h).$$

3.2.1. Análisis de estabilidad

Nuestro interés ahora es demostrar que la foma bilineal c_s es estable respecto de la norma:

$$|||\mathbf{v}_h, q_h|||_h = ||\nabla \times \mathbf{v}_h|| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\ell^2} ||\nabla \cdot \mathbf{v}_h||_{0,K}^2 \right)^{1/2} + \ell ||\nabla q_h||.$$

Es importante mencionar que esta norma depende de la malla.

Lema 3.2.1. *La forma bilineal* $c_s : \mathbf{V}_h \times Q_h \times \mathbf{V}_h \times Q_h \to \mathbb{R}$ *es coercitiva con respecto a la norma* $|||\cdot,\cdot|||_h$.

Demostración. Sea $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, veamos que $c_s((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{v}_h, q_h)) \geq C|||\mathbf{v}_h, q_h|||_h^2$ para alguna constantes $C > 0$.

$$\begin{aligned} c_s((\mathbf{v}_h, q_h); (\mathbf{v}_h, q_h)) &= a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, q_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h) + s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + s_p(q_h, q_h) \\ &= a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + s_p(q_h, q_h) \\ &= \|\nabla \times \mathbf{v}_h\|^2 + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\ell^2} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right) + \ell^2 \|\nabla q_h\|^2 \geq \frac{1}{3} |||\mathbf{v}_h, q_h|||_h^2 \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.1. *Esta norma no es suficiente para fines numéricos, ya que no proporciona explicitamente control uniforme con respecto a h en* $L^2(\Omega)$.

El siguiente lema soluciona este problema.

Lema 3.2.2. *La solución* $(\mathbf{w}_h, \alpha_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ *del problema*

$$c_s((\mathbf{w}_h, \alpha_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_h \rangle + \langle G, q_h \rangle \quad \forall\ (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_g \tag{3.10}$$

para $\mathbf{F} \in \mathbf{V}'$ *y* $G \in Q'$, *satisface* $|||\mathbf{w}_h, \alpha_h||| \lesssim |||\mathbf{w}_h, q_h|||_h + \|G\|_{Q'}$.
Además, $\forall\ (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, *tenemos* $|||\mathbf{v}_h, q_h|||_h \lesssim |||\mathbf{v}_h, q_h|||$.

Demostración. Por la condición inf-sup expuesta en (3.6), podemos garantizar que existe $(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}) \in \mathbf{V} \times Q$ tal que $|||\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}||| = 1$ y

$$c(\mathbf{w}_h, \alpha_h; \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}) \geq \beta |||\mathbf{w}_h, \alpha_h|||$$

Sea $SZ_h(\cdot)$ el interpolador de Scott-Zhang (ver [8]) en el espacio de elementos finitos correspondiente (puede ser $\mathbf{V}_h$ o Q_h y quedará claro por el contexto al hacer la cuenta). Sabemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v - SZ_h(v)\|_{m,K} \leq Ch^{1-m} \|v\|_{1,\omega_K}, \qquad m = 0, 1, \tag{3.11}$$

donde $\omega_K := \bigcup_{K' \cap K \neq \emptyset} K'$. Luego tenemos que

$$c(\mathbf{w}_h, \alpha_h; \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}) = c(\mathbf{w}_h, \alpha_h; \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha} - SZ_h(\tilde{\alpha})) + c(\mathbf{w}_h, \alpha_h; \mathbf{0}, SZ_h(\tilde{\alpha})).$$

Acotamos el primer término de la siguiente manera

$$\begin{aligned} c(\mathbf{w}_h, \alpha_h; \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha} - SZ(\alpha)) &= a(\mathbf{w}_h, \tilde{\mathbf{w}}) + b(\tilde{\mathbf{w}}, \alpha_h) - b(\mathbf{w}_h, \tilde{\alpha} - SZ(\tilde{\alpha})) \\ &\leq \|\nabla \times \mathbf{w}_h\| \|\nabla \times \tilde{\mathbf{w}}\| + \|\nabla \alpha_h\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{H_0(\mathbf{curl})} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \mathbf{w}_h\|_{0,K} \|\tilde{\alpha} - SZ(\tilde{\alpha})\|_{0,K} \\ &\lesssim \|\nabla \times \mathbf{w}_h\| \|\nabla \times \tilde{\mathbf{w}}\| + \|\nabla \alpha_h\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{H_0(\mathbf{curl})} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla \cdot \mathbf{w}_h\|_{0,K} \|\tilde{\alpha}\|_{1,\omega_K} \\ &\lesssim |||\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}||| (\|\nabla \times \mathbf{w}_h\| + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla \cdot \mathbf{w}_h\|_{0,K} + \|\nabla \alpha_h\|) && (3.12) \\ &\lesssim |||\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\alpha}||| |||\mathbf{w}_h, \alpha_h|||_h && (3.13) \end{aligned}$$

En la penúltima desigualdad estamos usando las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\|\nabla\times\tilde{\mathbf{w}}\| &\lesssim \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{H_0(\mathbf{curl})} \lesssim |||\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}|||\\
\|\tilde{\mathbf{w}}\| &\lesssim \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{H_0(\mathbf{curl})} \lesssim |||\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}|||\\
\|\tilde{\alpha}\|_1 &\lesssim |||\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}|||
\end{aligned}$$

Usando que $(\mathbf{w}_h,\alpha_h)$ es solución de (3.10), entonces

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{w}_h,\alpha_h;\mathbf{0},SZ_h(\tilde{\alpha})) &= \langle G, SZ_h(\tilde{\alpha})\rangle - s_p(\alpha_h, SZ_h(\tilde{\alpha}))\\
&\leq \|G\|_{Q'}\|SZ_h(\tilde{\alpha})\|_Q + \ell^2\|\nabla\alpha_h\|\|\nabla SZ_h(\tilde{\alpha})\|\\
&\leq (|||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h + \|G\|_{Q'})|||\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}|||
\end{aligned}$$

En la última desigualdad estamos usando la continuidad de $SZ_h(\cdot)$ en H^1.
Por la condición inf-sup (3.6) para $c(\cdot,\cdot)$ y usando que $|||\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}||| = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{w}_h,\alpha_h||| \lesssim c((\mathbf{w}_h,\alpha_h),\tilde{\mathbf{w}},\tilde{\alpha}) &\lesssim |||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h + (|||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h + \|G\|_{Q'})\\
&\lesssim |||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h + \|G\|_{Q'}
\end{aligned}$$

De esta manera, queda probada la cota superior para $|||\cdot|||$.
Para la cota inferior, usando que $\|\nabla\cdot\mathbf{v}_h\|_{0,K} \leq C_{inv}h_K^{-1}\|\mathbf{v}_h\|_{0,K}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h &= \|\nabla\times\mathbf{w}_h\| + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K^2}{\ell^2}\|\nabla\cdot\mathbf{w}_h\|_{0,K}^2\right)^{1/2} + \ell\|\nabla\alpha_h\|\\
&\leq \|\nabla\times\mathbf{w}_h\| + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K^2}{\ell^2}Ch_K^{-2}\|\mathbf{w}_h\|_{0,K}^2\right)^{1/2} + \ell\|\nabla\alpha_h\|\\
&\lesssim \|\nabla\times\mathbf{w}_h\| + \|\mathbf{w}_h\| + \|\nabla\alpha_h\|\\
&= |||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||.
\end{aligned}$$

Y asi se obtiene que $|||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||_h \lesssim |||\mathbf{w}_h,\alpha_h|||$. □

Observación 3.2.2. *El lema previo pone en evidencia la importancia de* $\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|$ *en el término de estabilización que resulta esencial para poder acotar* $(\nabla\cdot\mathbf{w},\tilde{\alpha} - SZ(\tilde{\alpha}))$ *en* (3.12).

Corolario 3.2.1. *La forma bilineal* $c_s : \mathbf{V}_h\times Q_h\times\mathbf{V}_h\times Q_h \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua con respecto a la norma* $|||\cdot|||$

Demostración. Sean $(\mathbf{u}_h,p_h)\in\mathbf{V}_h\times Q_h$ y $(\mathbf{v}_h,q_h)\in\mathbf{V}_h\times Q_h$, tomando módulo y aplicando desigualdad triangular se tiene

$$|c_s((\mathbf{u}_h,p_h);(\mathbf{v}_h,q_h))| \leq \underbrace{|c((\mathbf{u}_h,p_h);(\mathbf{v}_h,q_h))|}_{(1)} + \underbrace{|s_p(p_h,q_h)|}_{(2)} + \underbrace{|s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)|}_{(3)}.$$

1. Dado que el operador c es continuo respecto a $|||\cdot|||$, tenemos que

$$|c((\mathbf{u}_h,p_h);(\mathbf{v}_h,q_h))| \lesssim |||\mathbf{u}_h,p_h||| \, |||\mathbf{v}_h,q_h|||.$$

2.
$$|s_p(p_h, q_h)| = \ell^2 \left| \int_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla q_h \right| \leq \ell^2 \|\nabla p_h\| \|\nabla q_h\| \lesssim |||\mathbf{u}_h, p_h||| \, |||\mathbf{v}_h, q_h|||,$$

donde la última desigualdad se deduce de que $\|\nabla p_h\|_0 \leq \|p_h\|_1 \leq |||\mathbf{u}_h, p_h|||$ y análogamente para q_h.

3.
$$\begin{aligned} |s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \left| \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} \nabla\cdot\mathbf{u}_h \nabla\cdot\mathbf{v}_h \right| \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2} \|\nabla\cdot\mathbf{u}_h\|_{0,K} \|\nabla\cdot\mathbf{v}_h\|_{0,K} \\ &\underbrace{\leq}_{(*)} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2} C_1 h_k^{-1} \|\mathbf{u}_h\|_{0,K} C_2 h_K^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} \lesssim |||\mathbf{u}_h, p_h||| \, |||\mathbf{v}_h, q_h|||, \end{aligned}$$

donde en (*) estamos usando la desigualdad (3.1).

Juntando (1), (2) y (3) obtenemos
$$|c_s((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}_h, q_h))| \lesssim |||\mathbf{u}_h, p_h||| \, |||\mathbf{v}_h, q_h|||,$$

lo que prueba la continuidad respecto de $|||\cdot|||$. □

Corolario 3.2.2. *El problema (3.7) está bien definido, es decir admite una única solución* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *y vale la siguiente desigualdad:* $|||\mathbf{u}_h, p_h||| \lesssim \|\mathbf{f}\|$.

Demostración. Por el lema 3.2.1 tenemos por un lado que c_s es coercitiva respecto a $|||\cdot|||_h$ y dado que en el problema (3.7), $G = 0$, por el lema anterior se tiene que $|||\mathbf{u}_h, p_h||| \lesssim |||\mathbf{u}_h, p_h|||_h$.
$$\implies \quad |||\mathbf{u}_h, p_h|||^2 \lesssim c_s(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) \tag{3.14}$$

Esto nos dice que (3.7) es un sistema de ecuaciones con una matriz definida positiva. Por lo tanto el sistema tiene solución y dicha solución es única. Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{u}_h\| \leq \|\mathbf{f}\| \, |||\mathbf{u}_h, p_h|||$ (en la segunda desigualdad estamos usando que $\|\mathbf{u}_h\| \leq |||\mathbf{u}_h, p_h|||$). Como $c_s(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h)$ y vale (3.14) concluimos que $|||\mathbf{u}_h, p_h||| \lesssim \|\mathbf{f}\|$. □

3.2.2. Estimación del error

Como se dijo anteriormente, los métodos numéricos basados en la formulación curl-div no convergen en el caso de soluciones singulares debido a la falta de una condición de aproximabilidad (ver Corolario 3.1.1). La formulación (3.7) evita este problema, ya que tanto la estabilidad como la continuidad se mantienen para la misma norma $|||\cdot|||$.
Para definir la función de error de interpolación, utilizaremos el siguiente resultado. La prueba se puede ver siguiendo [1] (Proposición 3.7) y [22] (Lema 4.2).

Lema 3.2.3. *Si* $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$, *entonces* $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^r(\Omega)$ *para algún número real* $r > \frac{1}{2}$, *y se tiene*
$$\ell^{r-1} \|\mathbf{v}\|_{H^r(\Omega)} \lesssim \|\nabla\times\mathbf{v}\| + \|\nabla\cdot\mathbf{v}\|.$$

El lema anterior conduce al siguiente resultado, que se utiliza en la definición de la función de interpolación de errores.

Corolario 3.2.3. *Toda función* $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ *pertenece a* $L^2(\partial K)$ *para todo* $K \in T_h$.

Demostración. Como consecuencia del lema anterior, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^r(K)$ para algún $r > \frac{1}{2}$. Ahora, usando un teorema de trazas para espacios de Sobolev faccionarios (ver, por ejemplo, [16], Teorema 1), se obtiene que $\mathbf{v} \in H^{r-\frac{1}{2}}(\partial K)$, lo que prueba este resultado. □

Definición 3.2.1. *Se define*

$$E_h(\mathbf{u}, p) = \inf_{(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h} \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h)$$

donde

$$\varrho(\mathbf{v}, q) = |||\mathbf{v}, q||| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\ell^2} \|\mathbf{v}\|^2_{0,\partial K} \right)^{1/2}$$

Teorema 3.2.1. *La solución* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *del problema (3.7), para la familia de particiones* $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$*, aproxima a la solución continua* $(\mathbf{u}, p)$ *del problema (2.22) en el siguiente sentido:*

$$|||\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p||| \lesssim E_h(\mathbf{u}, p)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 2.4.1 y el hecho que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ tenemos que $c_s(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}_h, q_h) = c(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}_h, q_h) + s_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + s_p(p, q_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$. Luego $\forall\, (\mathbf{w}_h, p_h)$ y $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_s(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h; \mathbf{v}_h, q_h) =& c_s(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h; \mathbf{v}_h, q_h) = c(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h; \mathbf{v}_h, q_h) \\ &+ s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) + s_p(p - r_h, q_h), \end{aligned}$$

debido a que tanto el lado izquierdo como el derecho de la igualdad son iguales a $(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$. Por un lado tenemos que,

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_k^2}{\ell^2} \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}_h) \nabla \cdot \mathbf{v}_h \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_k^2}{\ell^2} (\mathbf{u} - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \int_{\partial K} \frac{h_k^2}{\ell^2} (\mathbf{u} - \mathbf{w}_h) \cdot \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{v}_h \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \frac{h_k^2}{\ell^2} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,K} \|\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_h)\|_{0,K} \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_{\mathbf{u}} \frac{h_K^2}{\ell^2} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_{0,\partial K} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{0,\partial K} \quad (*) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad estamos usando (2.19) y para la desigualdad utilizamos la desigualdad de Hölder.

Teniendo en cuenta las desigualdad (3.1) y que vale $\|\phi_h\|_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1/2}\|\phi_h\|_{0,K}$ se puede ver que

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,K} C_{inv} h_K^{-1}\|\nabla\cdot\mathbf{v}_h\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,\partial K} h_K^{-1/2}\|\nabla\cdot\mathbf{v}_h\|_{0,K} \\
&\lesssim \overbrace{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,K} h_K^{-2}\|\mathbf{v}_h\|_{0,K}}^{(1)} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{K\in\mathcal{T}_h} c_u \frac{h_K^2}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,\partial K} h_K^{-1/2} h_K^{-1}\|\mathbf{v}_h\|_{0,K}}_{(2)},
\end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos que

$$(1) \lesssim |||\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h||| \, |||v_h, q_h|||.$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Hölder para sumas se obtiene

$$(2) \lesssim \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,\partial K}^2\right)^{\frac{1}{2}} |||\mathbf{v}_h, q_h|||.$$

De esta manera,

$$s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim |||\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h||| \, |||v_h, q_h||| + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,\partial K}^2\right)^{\frac{1}{2}} |||\mathbf{v}_h, q_h|||.$$

Usando la continuidad de c y de s_p tenemos que

$$c(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h; \mathbf{v}_h, q_h) \leq |||\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h||| \, |||\mathbf{v}_h, q_h|||,$$

y

$$s_p(p-r_h, q_h) \leq |||\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h||| \, |||\mathbf{v}_h, q_h|||.$$

Luego, podemos concluir que

$$\frac{c_s(\mathbf{u}_h-\mathbf{w}_h, p_h-r_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{|||\mathbf{v}_h, q_h|||} \lesssim |||\mathbf{u}-\mathbf{w}_h, p-r_h||| + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\ell^2}\|\mathbf{u}-\mathbf{w}_h\|_{0,\partial K}^2\right)^2. \qquad (3.15)$$

Si en (3.15) ponemos $(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{c_s(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h; \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h)}{|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||} &\lesssim |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\ell^2} ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||^2_{0,\partial K} \right)^{1/2} \\
&= \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, en virtud del lema 3.2.2 con $(\mathbf{f}, \cdot) + (g, \cdot) = c_s(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h; \cdot, \cdot)$ y usando que

$$
\begin{aligned}
||g||_{Q'} &= \sup_{q \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{c_s(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h; \mathbf{0}, q)}{||q||_Q} = \sup_{q \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{-b(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, q) + s_p(p - r_h, q)}{||q||_Q} \\
&\leq \sup_{q \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h|| ||\nabla q|| + ||\nabla (p - r_h)|| ||\nabla q||}{||q||_Q} \\
&= \sup_{q \in Q \setminus \{\mathbf{0}\}} (||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h|| + ||\nabla (p - r_h)||) \lesssim |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h|||,
\end{aligned}
$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h||| &\lesssim |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h + |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| \\
&\lesssim |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h + \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

La coercitividad de c_s nos permite afirmar que:

$$
\begin{aligned}
& \frac{|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h^2}{|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||} \lesssim \frac{c_s(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h; \mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h)}{|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||} \lesssim \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h) \\
\Rightarrow \quad & |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h^2 \lesssim |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h||| \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h) \\
\Rightarrow \quad & |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h^2 \lesssim (|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h + \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h)) \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h).
\end{aligned}
$$

Usando que $2ab \leq \frac{1}{\beta} a^2 + \beta b^2$ para cualquier $\beta > 0$, podemos concluir que

$$
|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h^2 \lesssim \frac{1}{\beta} |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h|||_h^2 + (1 + \beta) \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h)^2
$$

con $\beta > 0$.

Luego, tomando β suficientemente grande en la última estimación junto con (3.16) se obtiene que

$$
|||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h||| \lesssim \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h).
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|||\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p||| &= |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h + \mathbf{w}_h - \mathbf{u}, p_h - r_h + r_h - p||| \\
&\leq |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| + |||\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h||| \\
&\lesssim \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h) \forall \, (\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h
\end{aligned}
$$

Tomando infimo sobre $(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ y en vista de la definición (3.2.1) se concluye que

$$|||\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p||| \lesssim E_h(\mathbf{u}, p)$$

□

A continuación, exponemos una de las estimaciones de error a priori. Para esto, antes, consideremos las siguiente estimaciones $\forall\ K \in T_h$ (se pueden ver en [13]):

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} ||\mathbf{v} - \mathbf{w}_h||_{s,K} \lesssim h_K^{t-s} ||\mathbf{v}||_{t,K} \quad 0 \le s \le t \le k+1 \tag{3.17}$$

$$\inf_{r_h \in Q_h} ||q - r_h||_{s,K} \lesssim h_K^{t-s} ||q||_{t,K} \quad 0 \le s \le t \le l+1 \tag{3.18}$$

Del siguiente corolario se obtiene un orden de convergencia para soluciones regulares, que además no depende del orden l de la aproximación para p.

Corolario 3.2.4. *Si la solución del problema (2.22) está dada por* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^r(\Omega)$ *con* $r \ge 1$ $\Rightarrow$ *la solución* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *del problema estabilizado satisface*

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \lesssim h^{t-1} ||\mathbf{u}||_t$$

con $t = \text{mín}\{r, k+1\}$

Demostración. De (3.17) y (3.18) podemos inferir que

$$\inf_{(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h} |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| \lesssim h^{t-1} ||\mathbf{u}||_t$$

en efecto,

$$\begin{aligned} |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| &= ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||_V + ||p - r_h||_1 \\ \Rightarrow \inf_{(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h} |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| &\lesssim h^{t-1} ||\mathbf{u}||_t + h^{t-1} ||p||_t \\ &= h^{t-1} ||\mathbf{u}||_t \end{aligned}$$

(estoy usando que si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^r(\Omega) \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{w}_h \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, y que $p \equiv 0$ *c.t.p*)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varrho(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h) &= |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{l^2} ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||^2_{0,\partial K} \right)^{1/2} \\ &\lesssim |||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_r||| + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{l^2} (||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||^2_{0,K} + h_K ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||^2_{0,K}) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(donde en la última desigualdad se está usando la siguiente desigualdad de traza $||\mathbf{v}||^2_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1} ||\mathbf{v}||^2_{0,K} + h_K ||\nabla \mathbf{v}||^2_{0,K}$) tomando infimo sobre $(\mathbf{w}_h, r_h)$ se obtiene

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \lesssim h^{t-1} ||\mathbf{u}||_t$$

□

Finalizaremos el Capítulo probando una estimación del error a priori que puede aplicarse en el caso de soluciones no suaves bajo una suposición sobre la partición $\mathcal{T}_h$ y/o el grado del polinomio usado en la interpolación en V_h. Para esto necesitaremos usar el Lema 3.2.3 y el siguiente Lema.

Lema 3.2.4. *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ *solución de* (2.22). *Entonces,* $\mathbf{u}$ *se puede descomponer en una parte regular y otra parte singular de la siguiente manera:*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla\varphi,$$

donde $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1+r}(\Omega) \cap \mathbf{V}$*,* $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+r}(\Omega)$ *para algún número real* $r > \frac{1}{2}$.

Este lema es consecuencia de lo estudiado por Costabel y Dauge en los artículos [13, 14] en el análisis de las singularidades en el problema de Maxwell.

Como mencionamos anteriormente para probar una estimación del error para soluciones no suaves debemos hacer una suposición sobre el espacio de Elementos Finitos de $\mathbf{V}_h$.

Suposición 3.2.1. *Existe un espacio de Elementos Finitos* G_h *definido sobre la partición* T_h *tal que para toda función* $\phi_h \in G_h$ *se cumple que* $\nabla\phi_h \in \mathbf{V}_h$*. Además este espacio satiface la siguiente estimación:*

$$\inf_{\phi_h \in G_h} \|\phi - \phi_h\|_{s,K} \lesssim h_K^{t-s} \|\phi\|_{t,K}$$

para todo $K \in T_h$*, para* $\phi \in H^t(K)$ *y* $0 \leq s \leq t \leq 1 + k$.

El Lema 3.2.3 muestra que la solución $\mathbf{u}$ del Problema de Maxwell (2.22) para $\mathbf{f} \in H(\mathrm{div}\, 0, \Omega)$ pertence a $\mathbf{H}^r(\Omega)$ para algún $r > \frac{1}{2}$.

Bajo la suposición (3.2.1) pero sin hacer ninguna hipótesis respecto a la regularidad de la solución, podemos obrtener la siguiente estimación a priori del error usando la descomposición del Lema (3.2.4).

Corolario 3.2.5. *Suponiendo que se cumple la Suposición 3.2.1, la solución* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *del problema* (3.7) *satisface*

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K^t \|\mathbf{u}_0\|_{1+t,K} + \frac{1}{\ell^{1-\epsilon}} h_K^{t-\epsilon} \|\varphi\|_{1+t,K} \right)$$

para todo $\epsilon \in [0, t - 1/2]$ *y* $t = \min\{r, k\}$.

Demostración. Por el Lema 3.2.4 podemos suponer que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla\varphi$, con $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1+r}(\Omega) \cap \mathbf{V}$ y $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+r}(\Omega)$ para algún número real $r > \frac{1}{2}$. Sean $\tilde{\mathbf{u}}_{0,h} \in \mathbf{V}_h$ y $\tilde{\varphi}_h \in G_h$ interpolaciones óptimas para $\mathbf{u}_0$ y φ.

Utilizando (3.17) y (3.18) se obtiene

$$\|\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}\|_{s,K} \lesssim h_K^{1+t-s} \|\mathbf{u}_0\|_{1+t,K} \tag{3.19}$$

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}_h\|_{s,K} \lesssim h_K^{1+t-s} \|\varphi\|_{1+t,K} \tag{3.20}$$

para $0 \leq s \leq t+1$, $t = \text{mín}\{r, k\}$. Estas estimaciones se mantienen localemente en cada elemento.

Sea $\mathbf{w}_h = \tilde{\mathbf{u}}_{0,h} + \nabla\tilde{\varphi}_h \in \mathbf{V}_h$. Se puede verificar, facilmente, que

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - p_h||| &= ||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||_{\mathbf{V}} + \ell||p - p_h||_1 \\
&\lesssim ||\nabla \times (\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h})|| + \frac{1}{\ell}||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}|| + \frac{1}{\ell}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)|| \\
&= ||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||_{\mathbf{H}^1(\Omega)\cap\mathbf{V}} + \frac{1}{\ell}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||
\end{aligned}$$

donde usamos que $\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}_o$, $\nabla \times \mathbf{w}_h = \nabla \times \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}$ y que el término aportado por p desaparece ya que $p = 0$.

Recordemos que $E_h(\mathbf{u}, p) = \text{ínf}_{(\mathbf{w}_h, r_h)\in\mathbf{V}_h\times Q_h}\left(|||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h||| + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\frac{h_K}{\ell^2}||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||^2_{0,\partial K}\right)^{1/2}\right)$ y por el Teorema 3.2.1 tenemos que $|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \lesssim E_h(\mathbf{u}, p)$.

Por un lado, utilizando (3.19) tenemos que

$$||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)\cap\mathbf{V}} = \sum_{K\in T_h}||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||^2_{\mathbf{H}^1(K)\cap\mathbf{V}} \lesssim \sum_{K\in T_h}k_K^{2t}||\mathbf{u}_0||^2_{1+t,K}. \quad (I)$$

Análogamente usando (3.20)

$$||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||^2 \leq ||\varphi - \tilde{\varphi}_h||_1^2 = \sum_{K\in T_h}||\varphi - \tilde{\varphi}_h||^2_{1,K} \lesssim \sum_{K\in T_h}h_K^{2t}||\varphi||_{1+t,K}. \quad (II)$$

Para acotar el segundo término de E_h usaremos que

$$k_K^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u} - \mathbf{w}_h||_{0.\partial K} \lesssim h_K^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||_{0,\partial K} + h_K^{\frac{1}{2}}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||_{0,\partial K}.$$

Utilizando la desigualdad de traza $||\mathbf{v}||^2_{0,\partial K} \lesssim h_K^{-1}||\mathbf{v}||^2_{0,K} + h_K||\nabla\mathbf{v}||^2_{0,K}$,

$$\begin{aligned}
h_K||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||^2_{0,\partial K} &\lesssim ||\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h}||^2_{0,K} + h_k^2||\nabla(\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_{0,h})||^2_{0,K} \\
&\lesssim h_K^{2t}||\mathbf{u}_0||^2_{1+t,K}, \quad (III)
\end{aligned}$$

donde en la ùltima estimación usamos nuevamente (3.19) Para el segundo término de (3.2.2), usaremos la inclusión de $W^{\epsilon,m}(\partial K)$ en $W^{\epsilon+\frac{1}{m},m}(K)$ (ver [19]) para $\epsilon > 0$ y $m = 2$ (i.e., la inclusión de $H^{\epsilon}(\partial K)$ en $H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(K)$) obteniendo

$$\begin{aligned}
h_K^{\frac{1}{2}}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||_{0,\partial K} &\lesssim h_K^{\frac{1}{2}}\ell^{\epsilon}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||_{\epsilon,\partial K} \lesssim h_K^{\frac{1}{2}}\ell^{\epsilon}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||_{\frac{1}{2}+\epsilon,K} \\
&\lesssim h_K^{\frac{1}{2}}\ell^{\epsilon}||\varphi - \tilde{\varphi}_h||_{\frac{3}{2}+\epsilon,K} \lesssim h_K^{\frac{1}{2}}\ell^{\epsilon}h_K^{1+t-\frac{3}{2}-\epsilon}||\varphi||_{t+1,K},
\end{aligned}$$

donde en el último paso estamos usando la estimación (3.20). Por lo tanto,

$$\frac{1}{\ell}h_K^{\frac{1}{2}}||\nabla(\varphi - \tilde{\varphi}_h)||_{0,\partial K} \lesssim \frac{1}{\ell^{1-\epsilon}}h_K^{t-\epsilon}||\varphi||_{1+t,K}. \quad (IV)$$

Por último, combinando las desigualdades (I), (II), (III) y (IV), se concluye que

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \lesssim E_h(\mathbf{u}, p) \lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(h_K^t||\mathbf{u}_0||_{1+t,K} + \frac{1}{\ell^{1-\epsilon}}h_K^{t-\epsilon}||\varphi||_{1+t,K}\right),$$

como queriamos ver. $\square$

Observación 3.2.3. *Cuando se cumple la suposición 3.2.1, el resultado anterior es muy fuerte en el sentido de que se ha demostrado no solo la convergencia hacia la buena solución, sino también un orden (casi) óptimo de convergencia, incluso para soluciones no suaves. También podemos debilitar el supuesto de aproximabilidad sobre Gh, y en el caso límite*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \inf_{\phi_h \in G_h} \|\phi - \phi_h\|_s = 0, \quad s \leq 1 + t$$

obtendríamos una convergencia fuerte hacia la solución sin orden. Alternativamente, en lugar de considerar la descomposición de **u**, *el resultado de interpolación*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \inf_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \left(\ell^{r-1} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_r + \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{w}_h)\| \right) = 0$$

para $\mathbf{V}_h$ *también conduciría a la convergencia hacia la solución, sin la necesidad de introducir* G_h.

Capítulo 4

Experimentos Numéricos

En este último capítulo presentaremos algunos ejemplos concernientes a la resolución numérica del problema de Maxwell, en dominios en el plano, mediante el método de estabilización estudiado en esta tesis. Primeramente se explicará como se construyen cada una de las matrices asociadas al problema, explicitando con que bases trabajaremos para cada uno de los espacios bajo consideración y como se llevan adelante los cálculo involucrados. Luego mostraremos los resultados obtenidos que muestran la eficacia del método de estabilización empleado.

4.1. Aspectos Númericos

En esta sección mostraremos cuales son las matrices que intervienen en la resolución numérica y como se calculan. Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de Ω, consideremos los siguientes subespacios:

$$\mathbf{P}_1 = \{\mathbf{v} \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \ v_i|_K \in \mathcal{P}_1(K), i = 1, 2, \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$
$$P_1 = \{v \in C(\overline{\Omega}) : \ v|_K \in \mathcal{P}_1(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Sea $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solución del problema estabilizado (3.7) y llamemos $n = dim(\mathbf{V}_h)$ y $m = \dim(Q_h)$.

Como utilizaremos aproximaciones nodales, podemos escribir a $\mathbf{u}_h$ y p_h como

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{n} (u_1)_i(\phi_i, 0) + \sum_{i=1}^{n} (u_2)_i(0, \phi_i),$$
$$p_h = \sum_{j=1}^{m} p_j\phi_j,$$

donde las las ϕ_i son las clásicas bases de Lagrange. Sea $K \in T_h$ un elemento, que en nuestro caso será un triángulo, denotamos por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) los vértices de K. Definimos las bases en cada elemento tal que

$$\phi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Por lo visto en el Capítulo 3, se sabemos que $(\mathbf{u}_h, p_h)$ es solución de un problema de la forma

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + s_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) - s_p(p_h, q_h) & = g \qquad\quad \forall\, q_h \in Q_h. \end{cases}$$

Este problema es equivalente a resolver el sistema

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2n+m \times 2n+m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+m \times 1}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n+m \times 1}$ definidos de la siguiente manera:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -S_p \end{pmatrix}$$

Aqui las submatrices se construyen utilizando cada operador. La matriz $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ se define a partir de los operadores $a(\cdot,\cdot)$ y $s_{\mathbf{u}}(\cdot,\cdot)$. Considerando que $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ y que cada bloque de $n \times n$ se calcula como

$$A_{11}^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \nabla \times (\phi_i, 0) \cdot \nabla \times (\phi_j, 0) + c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} (\nabla \cdot (\phi_i, 0))(\nabla \cdot (\phi_j, 0)) \right)$$
$$A_{12}^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \nabla \times (\phi_i, 0) \cdot \nabla \times (0, \phi_j) + c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} (\nabla \cdot (\phi_i, 0))(\nabla \cdot (0, \phi_j)) \right)$$
$$A_{21}^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \nabla \times (0, \phi_i) \cdot \nabla \times (\phi_j, 0) + c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} (\nabla \cdot (0, \phi_i))(\nabla \cdot (\phi_j, 0)) \right)$$
$$A_{22}^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \nabla \times (0, \phi_i) \cdot \nabla \times (0, \phi_j) + c_{\mathbf{u}} \int_K \frac{h_K^2}{\ell^2} (\nabla \cdot (0, \phi_i))(\nabla \cdot (0, \phi_j)) \right).$$

La matriz $B \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ se define a partir del operador $b(\cdot,\cdot)$. Considerando que $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ y cada bloque de $n \times m$ se calcula como

$$B_1^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \phi_j \cdot (\phi_i, 0),$$
$$B_2^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_\langle} \int_K \nabla \phi_j \cdot (0, \phi_i).$$

Por último la matriz $S_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se define a través del operador $s_p(\cdot,\cdot)$ y se calcula como

$$S_p^{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \ell^2 \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j.$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, el lado derecho del sistema al que llamamos $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n+m\times 1}$ se define como $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ con

$$\begin{aligned} b_{1,i} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K f_1 \cdot \phi_i, \qquad 1 \leq i \leq n \\ b_{2,i} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K f_2 \cdot \phi_i, \qquad 1 \leq i \leq n \\ b_{3,i} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K g \cdot \phi_i \qquad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

.

donde en el sistema estudiado en el Capitulo 3 se considero $g = 0$.

Finalmente el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+m\times 1}$, que es lo que estamos buscando, está formando por los valores en los nodos de las funciones aproximantes $\mathbf{u}_h$ y p_h.

En los ejemplos que se mostrarán en la siguiente sección utilizaremos regla de integración númerica como es la de baricentro, la cual es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1, para aproximar las integrales en cada triángulo K en el cálculo de las matrices B, determinada por

$$\int_K f(x)dx \simeq |K| f(\eta),$$

donde η es el baricentro del triangulo K.

Por otro lado, para aproximar las integrales involucradas en el cálculo del vector $\mathbf{b}$ y de los errores, utilizaremos la regla de cuadratura que utiliza los puntos medios de cada lado del triangulo, la cual es exacta para polinomios de grado menor o igual a 2 y está determinada por

$$\int_K f(x)dx \simeq \frac{|K|}{3} \left(f(a_{12}) + f(a_{23}) + f(a_{31}) \right),$$

donde a_{12}, a_{23} y a_{31} son los puntos medios de los lados del triangulo K.

4.2. Ejemplos Numéricos

En esta sección expondremos los resultados obtenidos donde, para cada uno de los ejemplos, calcularemos el error en norma L^2 y H_0^1 para la p_h, en norma L^2 y $H_0(\mathbf{curl})$ para la $\mathbf{u}_h$ y el orden de convergencia para cada una.

En cada uno de ellos se tomaron como parámetros $\ell = 1$ y $c_{\mathbf{u}} = 1$. La función implementada en Matlab (`maxwell2D(N).m`) toma como argumento el valor que determina la cantidad de subdivisiones de los intervalos de tal forma que $h = \frac{1}{N}$.

Cada problema se resuelve con el método de estabilización propuesto en esta tesis y a su vez si considerar esta estabilización y se muestra la performance de ambos métodos para el campo $\mathbf{u}$ y la función p.

Por otro lado si consideramos que $\mathbf{e_u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ y $e_p = p - p_h$ es el error cometido para $\mathbf{u}$ y p respectivamente, en cada caso calcularemos $\|\mathbf{e_u}\|$, $\|\nabla \times \mathbf{e_u}\|$, $\|e_p\|$ y $\|\nabla e_p\|$ para distintos valores de N. Esto además nos permitirá conocer el orden de convergencia en cada ejemplo.

Recordemos que para estimar el orden de convergencia, si suponemos que E es el error cometido para alguna de las normas y α es el orden de convergencia. Teniendo en cuenta que $E \sim h^\alpha C$, y aplicando log de ambos lados se obtiene $\log(E) = \alpha \log(h) + \log(C)$. La estimación de α se puede hacer gracias al comando `polyfit` de Matlab. Usando como E el vector de los distintos errores para distintos valores de h. En los ejemplos consideraremos $h = \left[\frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}, \frac{1}{80}\right]$.

Ejemplo 1

En este primer ejemplo, consideramos como dominio a $\Omega_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \backslash [0, 1] \times [-1, 0]$ y mallas uniformes como se muestra en la figura 4.1.

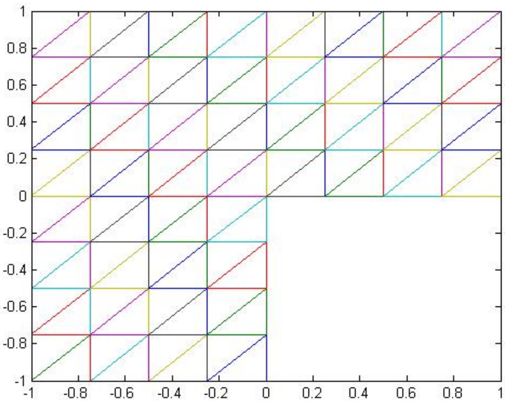

Figura 4.1: Malla para el dominio Ω_1

Las funciones $\mathbf{f}$ y g son aquellas que resultan de considerar como soluciones exactas a:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \left(y(1-y^2)(1-x^2)^2, -x(1-x^2)(1-y^2)^2\right) \\
p &= 0.
\end{aligned}
$$

Este caso corresponde a lo visto en el desarrollo de la tesis, es decir, que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

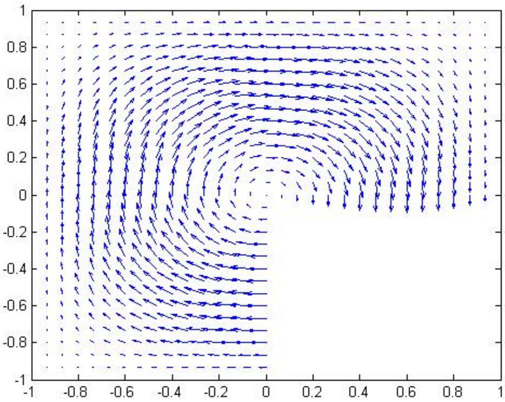

Figura 4.2: Campo **u** para el ejemplo 1.

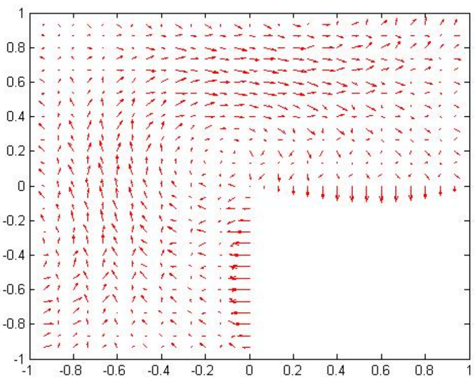

Figura 4.3: $\mathbf{u}_h$ inestable para el ejemplo 1.

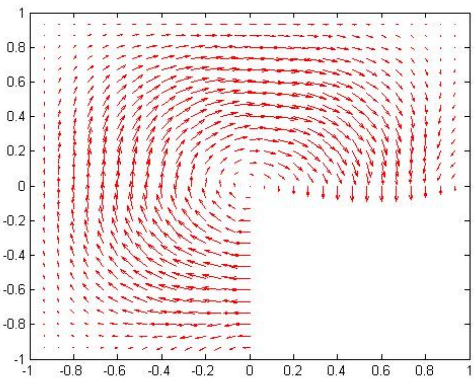

Figura 4.4: $\mathbf{u}_h$ estable para el ejemplo 1.

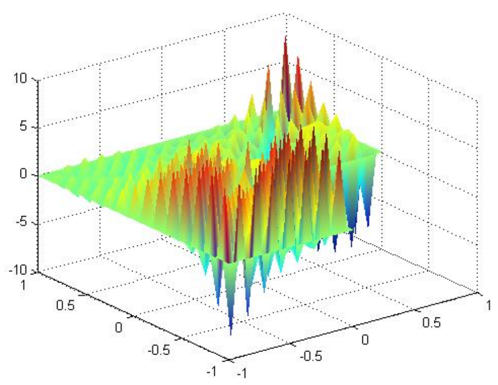

Figura 4.5: p_h inestable para el ejemplo 1.

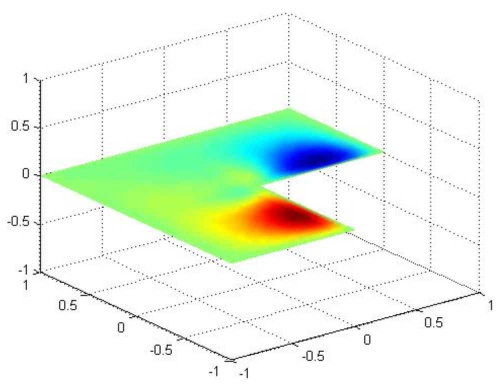

Figura 4.6: p_h estable para el ejemplo 1.

En la tabla 4.1 se muestra el resultado de los errores mencionados anteriormente para diferentes valores de N.

N	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla\times\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
20	0.0012	0.0115	4.82e-05	9.65e-04
40	3.38e-04	0.0063	5.99e-06	2.39e-04
60	1.58e-04	0.0047	1.79e-06	1.07e-04
80	9.10e-05	0.0038	7.54e-07	6.03e-05

Cuadro 4.1: Errores para el ejemplo 1.

	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla\times\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
α	1.87	0.8	2.99	2.18

Cuadro 4.2: Orden para el ejemplo 1.

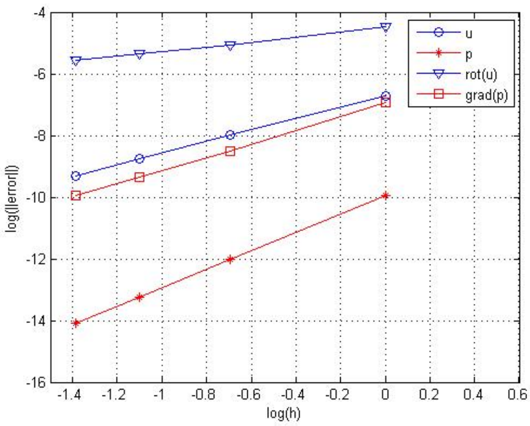

Figura 4.7: Orden para el ejemplo 1.

En los siguientes dos ejemplos expondremos casos donde p no es identicamente nula y repetimos el análisis hecho en el Ejemplo 1 para los resultados obtenidos.

Ejemplo 2

En este segundo ejemplo, volveremos a considerar como dominio a Ω_1 y las funciones $\mathbf{f}$ y g son aquellas para las cuales la solución del problema está dada por:

$$\mathbf{u} = (\sin(\pi x)\sin(\pi y), 0)$$
$$p = \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Al igual que en el Ejemplo 1 comparamos ambos métodos, es decir sin aplicar la estabilización y luego aplicando el método propuesto en este trabajo.

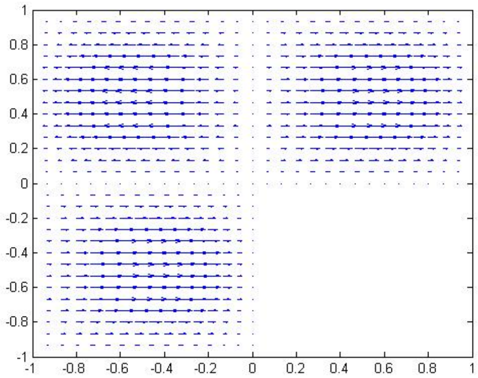

Figura 4.8: Campo **u** para el ejemplo 2

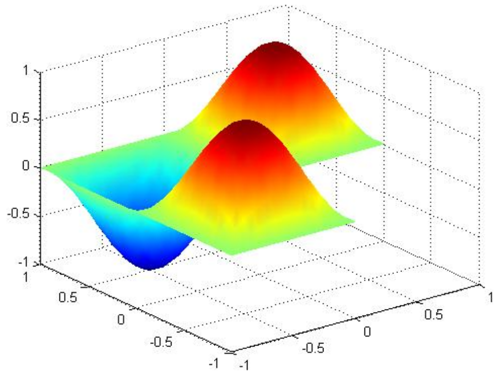

Figura 4.9: Función p para el ejemplo 2

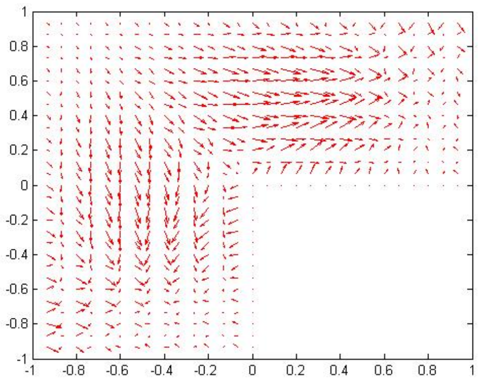

Figura 4.10: $\mathbf{u}_h$ inestable para el ejemplo 2.

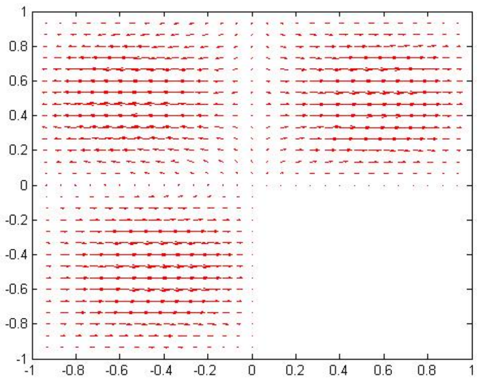

Figura 4.11: $\mathbf{u}_h$ estable para el ejemplo 2.

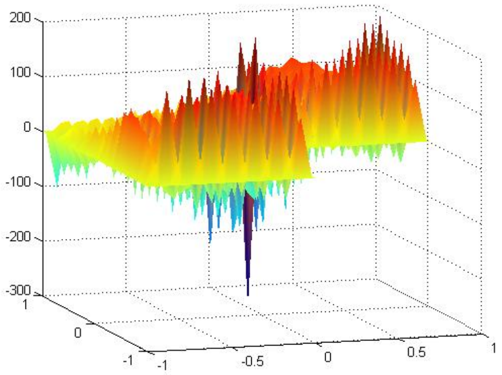

Figura 4.12: p_h inestable para el ejemplo 2.

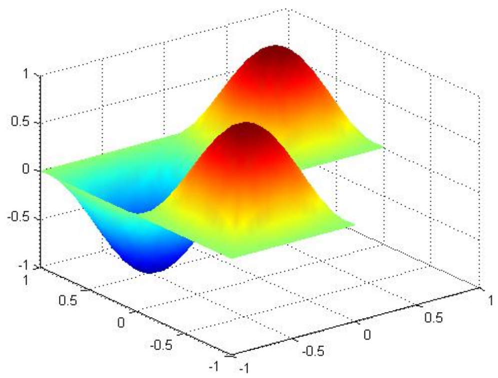

Figura 4.13: p_h estable para el ejemplo 2.

N	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla\times\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
20	0.0076	0.3845	0.0062	0.7470
40	0.0018	0.1863	0.0015	0.3722
60	7.53e-04	0.1223	6.90e-04	0.2487
80	4.14e-04	0.0905	3.85e-04	0.1856

Cuadro 4.3: Errores para el ejemplo 2.

	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla\times\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
α	2.0953	1.0429	1.9971	1.0034

Cuadro 4.4: Orden para el ejemplo 2.

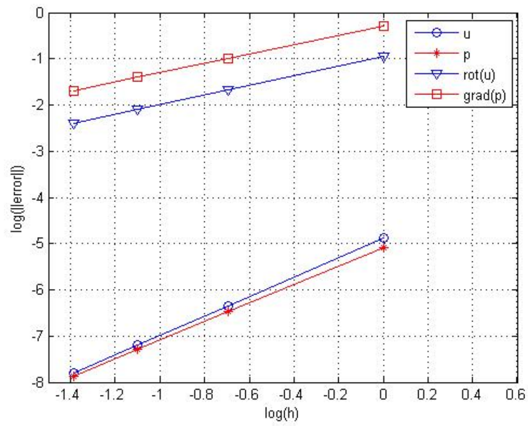

Figura 4.14: Orden para el ejemplo 2

Ejemplo 3

Por último, consideramos como dominio a $\Omega_2 = [-1,1]\times[-1,1]$ y mallas uniformes como se muestra en la figura 4.15.

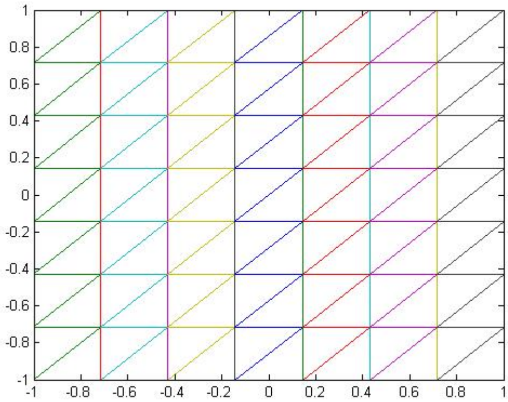

Figura 4.15: Malla para el dominio Ω_2

Las funciones **f** y g son aquellas que resultan de considerar como soluciones exactas a:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= ((1-x^2)(1-y^2), \sin(\pi x)\sin(\pi y)) \\
p &= (1-x^2)(1-y^2).
\end{aligned}
$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, resolvemos el problema con el método estabilizado propuesto en este trabajo y sin considerar la estabilización, y comparamos su desempeño.

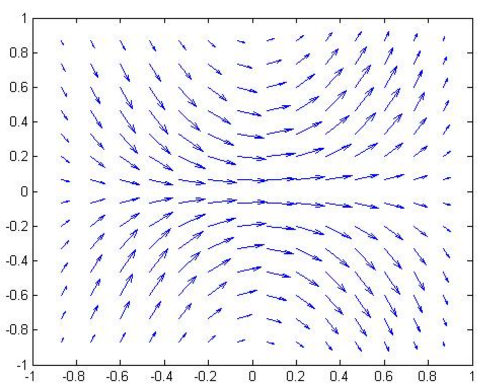

Figura 4.16: Campo **u** para el ejemplo 3

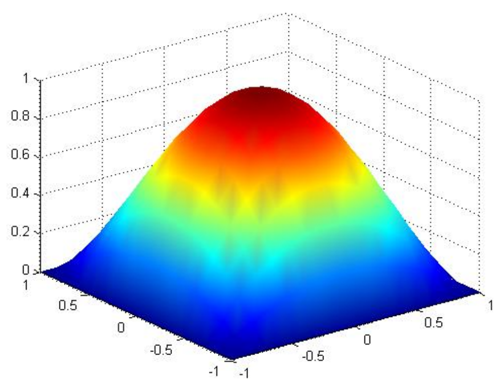

Figura 4.17: Función p para el ejemplo 3

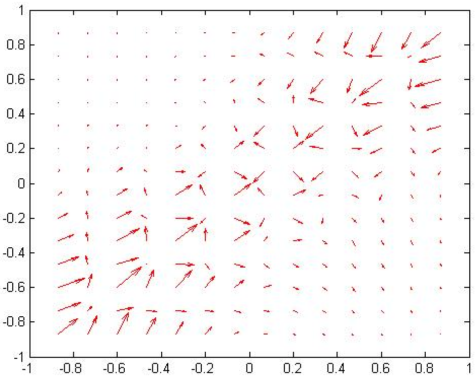

Figura 4.18: $\mathbf{u}_h$ inestable para el ejemplo 3.

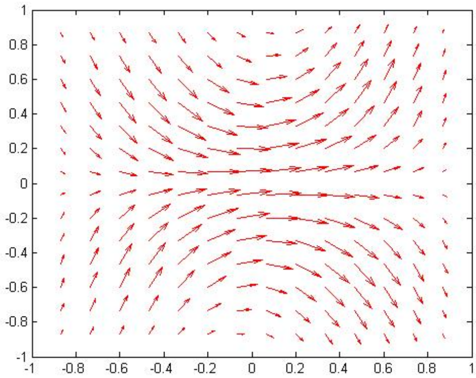

Figura 4.19: $\mathbf{u}_h$ estable para el ejemplo 3.

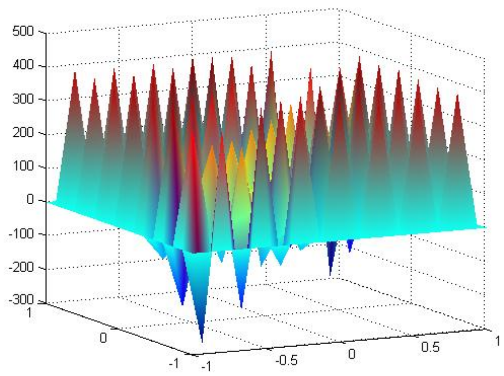

Figura 4.20: p_h inestable para el ejemplo 3.

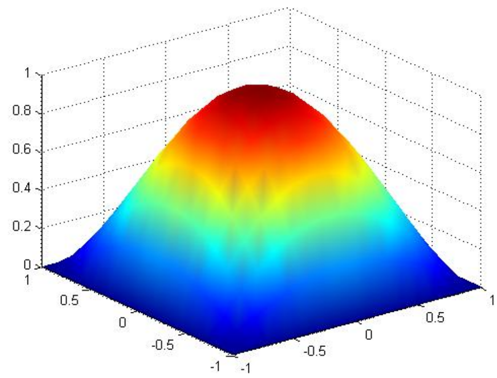

Figura 4.21: p_h estable para el ejemplo 3.

N	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla \times \mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
20	0.0297	0.4976	0.0101	0.4241
40	0.0085	0.3496	0.0027	0.2213
60	0.0038	0.2328	0.0012	0.1494
80	0.0021	0.1751	6.98e-04	0.1131

Cuadro 4.5: Errores ejemplo 3.

	$\|\|\mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|\nabla \times \mathbf{e_u}\|\|$	$\|\|e_p\|\|$	$\|\|\nabla e_p\|\|$
α	1.9074	0.9977	1.9299	0.953

Cuadro 4.6: Orden para el ejemplo 3.

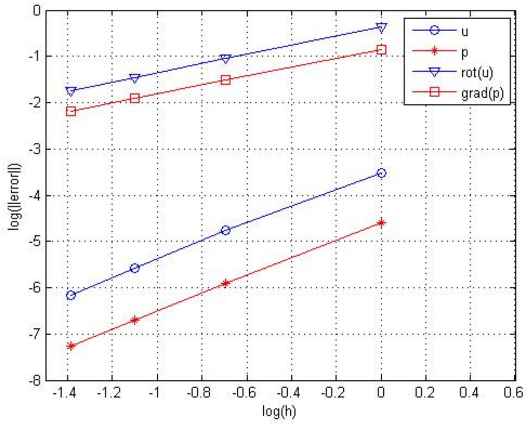

Figura 4.22: Orden para el ejemplo 3

Bibliografía

[1] AMROUCHE C., BERNARDI C., DAUGE M., & GIRAULT V., *Vector potentials in threedimensional non-smooth domains, Math. Methods Appl. Sci., 21 (1998), pp. 823–864.*

[2] ARNOLD N., *Complejos diferenciales y Estabilidad Numérica, La Gaceta de la RSME, Vol. 8.2 335-360 (2005).*

[3] ASSOUS F., CIARLET P., LABRUNIE S. & SEGRÉ J. *Numerical solution to the timedependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains: The singular complement method, J. Comput. Phys., 191 (2003), pp. 147–176.*

[4] BABUSKA I. & AZIZ A. *Survey lectures on the mathematical foundation of the finite element method. In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, pp. 1-359. Academic Press, New York, 1972.*

[5] BADIA S. & CODINA R. *A nodal-based finite element aproximation of the maxwell problem suitable for singular solutions. Siam J. Numer. Anal. Vol. 50, No. 2, pp. 398-417 (2012)*

[6] BADIA S. & CODINA R. *Unified stabilized finite element formulations for the Stokes and the Darcy problems, SIAM J. Numer. Anal., 47 (2009), pp. 1977–2000.*

[7] BOFFI D., BREZZI F., DEMKOWICZ L., DURÁN R. G., FALK R. & FORTIN M.*Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications, Lectures Notes in Mathematics vol. 1939, 2008.*

[8] BRENNER S. & SCOTT R. *The Mathematical Theory of Finite Element Theory. Springer. (2008)*

[9] BRENNER S., CUI J., NAN Z. & SUNG Y. *Hodge Decomposition for divergence-free vector fields and two-dimensional Maxwell's equations, Mathematics of computation, Volume 81, Number 278, April 2012, Pages 643–659*

[10] BREZZI F. & FORTIN M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.*

[11] CIARLET P. *Augmented formulations for solving Maxwell equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 194 (2005), pp. 559–586.*

[12] CODINA, R. *A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190 (2001), pp. 2681–2706.*

[13] COSTABEL M. & DAUGE M. *Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains, Numer. Math., 93 (2002), pp. 239-277*

[14] COSTABEL M. & DAUGE M. *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains, Arch. Ration. Mech. Anal., 151 (2000), pp. 221–276*

[15] COSTABEL M. *A Coercive Bilinear Form for Maxwell's Equations. Journal of mathematical analysis and applications 157, pp. 527-541. (1991)*

[16] DING Z., *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), pp. 591–600.*

[17] DUAN H. Y., JIA H., LIN P. & TAN R.C.E. *The local L^2 projected C^0 finite element method for Maxwell problem, SIAM J. Numer. Anal., 47 (2009), pp. 1274–1303.*

[18] ERN A. & GUERMOND J. *Theory and Practice of Finite Elements. Springer. (2004)*

[19] GIRAULT V. & RAVIART P.A., *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.*

[20] HAZARD C. *Numerical Simulation of corner singularities: a paradox in Maxwell-like problems. C. R. Mecanique 330, pp. 57-68. (2002)*

[21] HAZARD C. & LENOIR M. *On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations, SIAM J. Math. Anal., 6 (1996), pp. 1597-1630, 27.*

[22] HIPTMAIR R. *Finite elements in computational electromagnetism, Acta Numer., 11 (2003), pp. 237-339*

[23] HUGHES T.J.R. *Multiscale phenomena: Green's function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 127 (1995), pp. 387–401.*

[24] JIANG B., WU J. & POVINELLI L.A. *The origin of spurious solutions in computational electromagnetics, J. Comput. Phys., 125 (1996), pp. 104–123.*

[25] JIN J. *The Finite Element Method in Electromagnetics, Wiley, New York, 1993.*

[26] KREINER J. *Generación de mallas de elementos finitos en 3D y aplicaciones a problemas elípticos. (2008)*

[27] MONK P. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations, Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.*

[28] NECAS J. *Sur une methode pour resoudre les equations aux derivees partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1962) 305-326.*

[29] NICAISE S. *Edge Elements on anisotropic meshes and approximation of the Maxwell equations, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2001), pp. 784-816*

[30] SCHOTZAU D. *Mixed finite element methods for stationary incompressible magnetohydrodynamics, Numer. Math., 96 (2004), pp. 771–800.*

[31] WEBER C. *A local compactness theorem for Maxwell's equations, Math. Meth. in Appl. Sc. 2 (1980), pp 12-25*