



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de Morse y el Teorema de h-cobordismo

Bruno Staffa

Director: Gabriel Minian

Fecha de presentación: 16 de julio de 2019

Agradecimientos

A mis padres, por su amor y apoyo incondicional, por la enorme formación humana y académica que me dieron, optando siempre por la educación pública, gratuita y de calidad, por darme la posibilidad de estudiar la carrera que elegí en la Universidad de Buenos Aires y por estar siempre más que presentes.

A mi hermano Luca, también por apoyarme siempre y por compartir muchos lindos momentos y risas.

A mi familia en general: a mis abuelos, tíos, tíos abuelos y primos por todo su afecto, contención y apoyo, por estar siempre pendientes de mí a pesar de vivir lejos y por todos los buenos momentos que hemos compartido. En particular, a mis tías Rosana y Silvina, a mi tío Claudio y a mi abuelo Luis.

A Nahuel, por acompañarme durante todo el desarrollo de esta tesis, por alentarme siempre a avanzar, a no bajar los brazos y a cumplir mis sueños. También por todo el amor y la comprensión, y por los buenos momentos juntos.

A Gabriel, por dirigirme en esta tesis, por todo lo que me enseñaste sobre topología y geometría como director y como profesor, y lo que aportaste también en otros aspectos de mi formación como matemático. También te quiero agradecer por tu gran ayuda para encontrar un buen lugar donde hacer el doctorado, junto a Alicia Dickenstein y Fernando Cukierman, quienes también me recomendaron.

A Jonathan Barmak y Gabriel Larotonda, por aceptar ser jurados de esta tesis y por todo lo que me aportaron como profesores.

A todos los docentes que tuve a lo largo de la carrera, tanto profesores como jefes de trabajos prácticos, ayudantes de primera y de segunda; quienes aportaron mucho a mi formación como matemático e hicieron de mi paso por Exactas una experiencia hermosa. Entre ellos quiero destacar a dos que además son grandes amigos: Matías Saucedo, quien además de Álgebra I, II y III me enseñó antes mucha matemática para las olimpiadas; y Nacho Darago, con quien también compartimos muchas experiencias olímpicas y quien me introdujo junto a Fernando Cukierman en la Geometría diferencial.

A todos mis amigos de la facu y compañeros de cursada: Pablito, Martín, Daro, Gonza, Uli, Tano, Mati Sempe, Juan, Santi, Jaquie, Henry, Pela, Juani, Sergio, Juampi, Mariano, Dante y Alejo, con quienes pude hablar y también aprender mucho sobre matemática, así como hacer de la carrera una muy linda experiencia a nivel humano.

A Gastón, con quien siempre charlamos sobre temas en la intersección entre la matemática y la física, teniendo esa pasión en común así como una muy linda y franca amistad. Gracias por ser alguien con quien siempre puedo contar.

A Pola, que también es alguien con quien siempre puedo contar y con quien compartimos también el gusto por la matemática, buenas charlas y muy lindos momentos.

A Fran, por la gran amistad de tantos años que compartimos, por la cercanía, el apoyo y las charlas sobre política.

A todos mis amigos de OMA, con los que compartí hermosos momentos en mi adolescencia, cuando se fue gestando mi pasión por la matemática; y también estando en la facultad, durante mis participaciones como ex olímpico. De ellos también aprendí un montón y me motivaron a seguir esta carrera. Nombro a algunos: Prillo, Iván, Caro González, Ale, Caro Lang, Nico y Fede Cogorno, Nacho Bombau, Azul, Mariano Bonifacio, Lucía González, Mariano Juncal, Ariel, Melanie, Carla, Diamo, Marchi, Gasti, Julián Ferrés, Licha; pero son muchas y muchos más. También quiero nombrar a Kevin, con quien además compartimos algunas cursadas al principio de la carrera y es alguien con el que siempre puedo contar para una buena charla.

Junto con Ariel, quiero agradecer al resto de la familia Zylber: a Karina, Enrique y Natalí, que me recibieron en su casa siempre que tuve que venir a algún entrenamiento o competencia en el marco de la OMA, permitiéndome así conocer durante mi adolescencia la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA y encariñarme con su ambiente, su gente y su excelente nivel académico.

A Patricia y Flora, por organizar con mucha fuerza y entusiasmo la Olimpiada Matemática Argentina, que año a año ayuda a despertar vocaciones científicas en jóvenes de todo el país.

A Viviana Gancedo, mi maestra de quinto grado quien me introdujo en la Olimpiada Matemática Ñandú, alentando a todos sus alumnos a participar.

A David, por toda tu ayuda con las figuras de la tesis, que pude hacer usando el programa Ipe gracias a que vos mismo me lo recomendaste; así como por tu interés en el contenido de este trabajo.

A todos los que nombré y los que no nombré, pero me ayudaron y acompañaron durante estos años, muchas gracias!

Introducción

La Conjetura de Poincaré, enunciada a principios del siglo XX por el matemático francés Henri Poincaré, afirma que toda variedad cerrada, simplemente conexa de dimensión 3 es homeomorfa a la esfera S^3 . A partir del momento en que fue propuesta, esta conjetura se convirtió en un problema central de la matemática, captando la atención de un grupo importante de geómetras y topólogos a lo largo del siglo XX. En ese período, se han enunciado generalizaciones de la conjetura y se ha intentado abordarla con diferentes estrategias y enfoques, lo cual motivó grandes desarrollos teóricos en topología y geometría diferencial; gran parte de los cuales no condujeron a una demostración de este hecho pero permitieron resolver otras preguntas abiertas así como hicieron surgir muchas nuevas, y abrieron fructíferas líneas de investigación. Así, tras sucesivos intentos fallidos; en los albores del siglo XXI Grigori Perelman presentó una prueba de la conjetura. Su demostración seguía la propuesta que previamente hizo Richard Hamilton de usar el flujo de Ricci para atacar el problema.

La Conjetura generalizada de Poincaré es, como su nombre lo indica, una de las generalizaciones del problema propuesto por Poincaré a principios del siglo pasado; y es lo que motiva en gran medida el Teorema de h -cobordismo, que es el principal resultado que estudiaremos en esta tesis. Para enunciar dicha conjetura, debemos definir antes un concepto. Una variedad cerrada M de dimensión n es una *homology sphere* si tiene la misma homología que S^n , es decir, si

$$H_q(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ o } n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La Conjetura generalizada de Poincaré dice que si M es una *homology sphere* y es simplemente conexa, entonces M es homeomorfa a S^n . Notemos que si tomamos dimensión $n = 3$, este enunciado es equivalente a la Conjetura de Poincaré. Hay otra formulación de la conjetura generalizada, en términos de *homotopy spheres* (que son variedades cerradas de dimensión n homotópicamente equivalentes a S^n): si M es una *homotopy sphere* entonces es homeomorfa a una esfera. Se puede probar que ambas formulaciones son equivalentes, usando dos teoremas fundamentales de la teoría de homotopía: el de Whitehead y el de Hurewicz.

A principios de la década de 1960, Stephen Smale publicó un paper titulado *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four* ([Sma61a]), en el

cual da una prueba de la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión $n \geq 5$. En esa época, otros matemáticos (por ejemplo Milnor, Kervaire, Mazur y Wallace) estaban trabajando en temas de topología diferencial relacionados con la conjetura (como teoría de cobordismos, teoría de Morse y cirugía). Según describe Hirsch en el apartado *The work of Stephen Smale in differential topology* de [Sma00], la topología diferencial no estaba muy desarrollada por esos tiempos. Sí había resultados teóricos profundos en topología algebraica, en particular en torno a la teoría de homotopía, en la cual se habían hecho muchos avances recientemente. Haciendo uso de la teoría de cobordismos, cirugía, teoría de Morse y sistemas dinámicos (algunos de estos últimos probados por el propio Smale), así como de las herramientas de teoría de homotopía, Smale desarrolló su demostración.

Por aquel entonces, ya se había formulado el Teorema de h -cobordismo, aunque aún no se conocía ninguna prueba. Podemos enunciar dicho resultado de la siguiente manera. Una terna (W, V, V') de variedades compactas es una tríada si V y V' son subvariedades abiertas y cerradas de ∂W (el borde de W) y $V \cup V' = \partial W$. En tal caso, (W, V, V') se dice un cobordismo entre V y V' ; y se dice un h -cobordismo si además V y V' son retractos por deformación de W . La noción de h -cobordismo relaciona los conceptos de cobordismo y homotopía. El Teorema de h -cobordismo dice que si (W, V, V') es un h -cobordismo en el que las 3 variedades involucradas son simplemente conexas y $\dim(W) \geq 6$, entonces existe un difeomorfismo $\varphi : W \rightarrow V \times [0, 1]$ tal que $\varphi(V) = V \times \{0\}$ y $\varphi(V') = V \times \{1\}$ (siendo (W, V, V') lo que se conoce como un cobordismo trivial). En particular, V es difeomorfa a V' . Cabe destacar que uno puede preguntarse si el teorema sigue siendo válido incluso si (W, V, V') no son simplemente conexas o si se quita la restricción $\dim(W) \geq 6$; esas dos hipótesis surgieron a partir de la demostración de Smale (que no es válida si no se satisfacen). Un hecho que ya se conocía antes de que se publicara [Sma61a] es que en caso de valer el Teorema de h -cobordismo en dimensión n (con el enunciado que damos, pero sin pedir $n \geq 6$), sería también válida la Conjetura generalizada de Poincaré en esa dimensión. Esto se refleja en el paper [Mil59] de John W. Milnor. En la página 33 plantea una serie de problemas que quedaban abiertos en relación a lo desarrollado en el artículo; en particular en el Problema 5 se pregunta si dos variedades h -cobordantes deben ser necesariamente difeomorfas, y luego argumenta que una respuesta afirmativa a dicha pregunta implicaría la Conjetura generalizada de Poincaré. No obstante, no fue esa la estrategia que Smale utilizó en el paper [Sma61a], sino que ocurrió lo inverso: primero probó la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión ≥ 5 en 1961, y un año después presentó el artículo *On the structure of manifolds* ([Sma62]), donde probó h -cobordismo para $\dim(W) \geq 6$ usando muchas de las técnicas que desarrolló para la conjetura de Poincaré (aunque introduciendo ciertas modificaciones, particularmente en la manera de cancelar manijas). En 1965, John W. Milnor publica su libro *Lectures on the h -cobordism theorem* ([Mil65]) escrito en base a las notas de las clases que dio en el seminario de topología diferencial en la Universidad de Princeton, en 1963. En dichos encuentros, se trabajó sobre la

demostración del Teorema de h -cobordismo dada por Smale, pero con un enfoque centrado en la teoría de Morse sobre tríadas (a diferencia del de Smale, centrado en adjunción de manijas). Es la demostración dada en [Mil65] la que guió principalmente el transcurso de esta tesis, con el objetivo primero de entenderla en profundidad, para luego poder exponerla desde un enfoque propio, enfatizando y/o profundizando más en los aspectos que consideramos más relevantes o menos claros de la misma. La tesis está organizada de la siguiente manera.

En el **Capítulo 1** se tratan aspectos básicos sobre fibrados vectoriales y cohomología que son luego utilizados en distintas partes de la tesis, y también se desarrolla en profundidad el isomorfismo de Thom. El motivo que nos llevó a tratar dicho resultado es que se utiliza para calcular el morfismo de borde en el complejo de Morse, definido en el **Capítulo 3**. Este aspecto es muy brevemente mencionado en [Mil65, p. 68-69] y entenderlo más en profundidad nos pareció importante ya que juega un rol clave a la hora de cancelar puntos críticos (precisamente en el Segundo Teorema de Cancelación, desarrollado en la segunda sección del **Capítulo 3**). Por otro lado, el isomorfismo de Thom es un resultado importante en sí mismo, al ser un invariante que mide ciertas obstrucciones topológicas. Una aplicación que tiene es la existencia de las clases de Stiefel-Whitney de un fibrado, que dan cotas inferiores para los enteros k tales que el plano proyectivo real \mathbb{P}^n puede ser inmerso en \mathbb{R}^{n+k} y también pueden utilizarse para decidir, dada una variedad cerrada M , si es el borde de una variedad con borde y compacta N (que es un resultado de Pontrjagin del estilo del problema de Plateau, ver [MS74, Thm. 4.9]).

A la hora de estudiar el isomorfismo de Thom, nos encontramos con dos versiones: una para fibrados sobre variedades diferenciables y en términos de cohomología de de Rham (desarrollada en [BT82]); y la otra para fibrados sobre espacios topológicos y en términos de cohomología singular (desarrollada en [MS74]). Decidimos desarrollar la primera versión en la **Parte I** del capítulo, y la segunda en la **Parte II**, siguiendo las referencias recién nombradas. El motivo de incluir ambos enfoques es el siguiente. Por un lado, el abordaje dado en [BT82] con cohomología de de Rham resulta un tanto más geométrico e intuitivo; al contar con la integración a lo largo de la fibra como herramienta para construir el inverso del isomorfismo de Thom y permitir luego reconstruir la otra versión (en principio, un poco más oscura) con lo que sabemos de la primera y las dualidades entre ambos tipos de cohomología. Así, por ejemplo, el rol que en la primera versión juega el producto wedge lo jugará en la segunda el producto cup, habrá en cada contexto una noción de generador de orientación de cada fibra, y esto permitirá, a través de la caracterización que se da a la clase y al isomorfismo de Thom en la **Parte I**, deducir el enunciado de la versión del teorema para cohomología singular. En ambos casos, se utiliza en la demostración el argumento de Mayer-Vietoris; aunque varía la forma de pasar de espacios con un cubrimiento “bueno” finito (donde “cubrimiento bueno” es definido en la **Parte I**, y en la **Parte II** significa “cubrimiento por abiertos trivializantes”) a espacios arbitrarios, utilizándose en la primera versión un argumento con funciones propias sobre variedades que reduce

todo a un cubrimiento bueno con 2 abiertos, y en la segunda se intenta obtener la cohomología de los espacios involucrados como límite de la cohomología de sus subespacios compactos. La importancia de tener la versión para cohomología singular y no quedarnos sólo con la formulación para cohomología de Rham radica en la comodidad de trabajar con generadores de orientación con coeficientes en \mathbb{Z} , en la compatibilidad que debe haber con los números de intersección de variedades (que son números enteros) que aparecen al estudiar el morfismo de borde en el complejo de Morse y en que al trabajar con las desigualdades de Morse, nos va a interesar la parte de torsión de ciertos grupos de homología, la cual se pierde si trabajamos sobre \mathbb{R} . Al finalizar el capítulo, se da una conexión entre estos temas y la teoría de Morse, probando dos lemas que servirán para calcular el morfismo de borde del complejo de Morse (como se mencionó antes); siendo el primero de ellos enunciado en [Mil65] (no así el segundo) y ambos utilizados (sin prueba) en dicho libro; de modo que presentaremos una demostración propia de los mismos.

En los capítulos 2 y 3 se aborda la mayor parte de los temas discutidos en [Mil65] para probar el Teorema de h -cobordismo. En el **Capítulo 2** se tratan esencialmente los temas de los primeros 4 capítulos de ese libro. Se comienza con las definiciones básicas de tríada, cobordismo, función de Morse sobre una tríada y campo tipo gradiente asociado, probándose en la **Sección 2.2** un resultado relativamente sencillo pero muy importante: si (W, V, V') admite una función de Morse sin puntos críticos, entonces es un cobordismo trivial. Este resultado resume la estrategia de [Mil65] para probar h -cobordismo: ver que si (W, V, V') es un h -cobordismo, entonces admite una función de Morse sin puntos críticos. Para llevar adelante este propósito, la idea es partir de alguna función de Morse f_1 en (W, V, V') para ir cambiándola por otras funciones de Morse f_2, f_3, \dots que tengan cada vez menos puntos críticos, a través de la cancelación de distintos pares de ellos entre sí. Esto se realiza en varios pasos.

En primer lugar, debemos poder entender los cobordismos más sencillos posibles luego de los triviales, que son los llamados “elementales”: aquellos que tienen sólo un punto crítico. De eso nos ocupamos en la **Sección 2.3**. Allí presentamos la definición de cirugía y adjunción de manijas, dando dos versiones: la de [Ran03], que resulta quizás más clara a la hora de visualizar el efecto geométrico de una cirugía; y la de [Mil65], que es la más cómoda para trabajar posteriormente, sobre todo al construir las variedades L_k . Presentamos una demostración propia de la equivalencia entre ambas versiones, utilizando push-out’s y nociones de topología general. Luego en la **Sección 2.3.2** hacemos la construcción de la traza de una cirugía $\omega(V, \varphi)$, probando que nos da un cobordismo entre V y $\chi(V, \varphi)$; construimos las esferas y discos izquierdos y derechos de un punto crítico asociados a un par (f, ξ) (función de Morse - campo tipo gradiente), y con eso el embedding característico izquierdo φ_L ; para probar un resultado central (**Teorema 2.6**) que nos dice que si (W, V, V') es un cobordismo elemental, entonces $(W, V, V') \cong (\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$. Este resultado establece la dualidad entre el enfoque con tríadas y teoría de Morse que utiliza Milnor en [Mil65], y el enfoque con adjunción de manijas y *handlebodies* de Smale

en sus papers [Sma61a] y [Sma62]. Si bien no utilizaremos el segundo enfoque en esta tesis, el **Teorema 2.6** nos permite probar que en un cobordismo elemental (W, V, V') , $V \cup D_L \subseteq W$ es retracto por deformación fuerte (**Teorema 2.7**). Esta será nuestra herramienta para calcular $H_*(W, V)$ y construir el complejo de Morse asociado a una tríada y un par (f, ξ) (función de Morse, campo tipo gradiente) en ella.

Los conceptos y resultados anteriores se trasladan a los “cobordismos de índice k ”, que son aquellos que admiten una función de Morse f con un único nivel crítico, y todos sus puntos críticos de índice k . Estos serán los ladrillos con los que podremos construir cualquier cobordismo, de modo que el segundo paso apuntará en la dirección de descomponer a toda tríada como composición de cobordismos de índice k (que son “más sencillos” y entendemos mejor, por los resultados del primer paso). Para eso, probamos en la **Sección 2.4** que toda tríada admite una función de Morse “buena” o autoindexante, que es una tal que para cada punto crítico p se verifique $f(p) = \text{ind}(p)$. Este es un teorema que, así como aparece en [Mil65], es también utilizado por Smale tanto en su primera demostración de la Conjetura generalizada de Poincaré como en la del Teorema de h -cobordismo (habiéndolo probado en su paper [Sma61b]).

Lo que se necesitará en tercer lugar son resultados que den condiciones suficientes para poder cancelar puntos críticos. Los dos más importantes en este sentido son el Primer y Segundo teorema de cancelación, que son enunciados en la **Sección 3.1** y desarrollados en los capítulos 5 y 6 de [Mil65]. La demostración de ambos teoremas es formidable y profundamente geométrica, utilizándose desde herramientas de geometría y topología diferencial clásicas como isotopías, los teoremas de Whitney, transversalidad y números de intersección; pasando por teoría de Morse y geometría Riemanniana; hasta argumentos de topología algebraica (que proveen aplicaciones continuas, las cuales luego son suavizadas por los Teoremas de Whitney para emplearlas en el contexto diferenciable en el que estamos trabajando). Decidimos no explayarnos en este aspecto ya que está muy bien desarrollado en [Mil65], y hubiera hecho demasiado extensa esta exposición. En conjunto, estos resultados permiten cancelar puntos críticos en las dimensiones intermedias (es decir, de índice $2 \leq k \leq n - 2$); existiendo otros dos teoremas de cancelación para índices 0 y 1, los cuales son enunciados sin demostración en el **Capítulo 3** y están detalladamente expuestos en [Mil65].

Con lo anterior, si estamos bajo las hipótesis de h -cobordismo y tomamos una función autoindexante; podremos cancelar todos los puntos críticos de índices 0, 1, $n - 1$ y n ; y lo que restará será construir un invariante que nos garantice que siempre que tengamos puntos críticos, habrá dos de ellos que estén bajo las hipótesis del Segundo Teorema de Cancelación y por lo tanto puedan ser cancelados entre sí. Tal invariante es la homología de Morse, que se construye a partir de la descomposición $c = c_0 \cdot c_1 \cdots c_n$ del cobordismo $c = (W, V, V')$ como composición de cobordismos $c_k = (M_k, V_k, V'_k)$ de índice k . Dicho complejo es (C_*, d) donde $C_k = H_k(M_k, V_k)$

es el generado por la clase de los discos izquierdos en c_k por el **Corolario 2.3** y el morfismo de borde en las bases de los discos viene dado por los números de intersección entre las esferas izquierdas y derechas correspondientes. Como la homología de Morse resulta ser isomorfa a la singular, bajo nuestras hipótesis el complejo de Morse es acíclico. Utilizando esto y el Basis theorem, se demuestra que siempre que haya puntos críticos, dos de ellos podrán separarse del resto de modo que queden bajo las hipótesis del Segundo teorema de cancelación; lo cual permite concluir la demostración de h -cobordismo. Todo esto se desarrolla en la **Sección 3.2**.

Luego de esto, en la **Sección 3.3** se presentan dos aplicaciones del Teorema de h -cobordismo: la caracterización del n -disco en dimensión $n \geq 6$ y la Conjetura generalizada de Poinaré en dimensión $n \geq 6$ (que se demuestra utilizando la caracterización del disco). Finalmente, se cierra la tesis con una generalización de h -cobordismo en el caso de que $H_*(W, V) \neq 0$, preguntándose (manteniendo las demás hipótesis sobre la tríada) cuál es la mínima cantidad de puntos críticos que puede tener una función de Morse f en (W, V, V') . ¿Puede esto caracterizarse en términos de la homología relativa $H_*(W, V)$, que pareciera ser la obstrucción para cancelar puntos críticos? La respuesta es afirmativa, y tiene que ver con las desigualdades de Morse. El resultado concreto (**Teorema 3.12**) dice que en toda tríada de variedades simplemente conexas de dimensión ≥ 6 , existe una función de Morse que alcanza la igualdad en las desigualdades de Morse. Damos una demostración propia de este hecho, analizando luego cómo extender estos resultados de tríadas a variedades sin borde. Estos teoremas fueron probados por Smale, y son mencionados en su paper [Sma63].

Índice general

1. Cohomología, fibrados y el Isomorfismo de Thom	1
1.1. Parte I	1
1.1.1. Fibrados vectoriales	1
1.1.2. Cohomología de de Rham	3
1.1.3. Argumento de Mayer-Vietoris	6
1.1.4. Isomorfismo de Thom, versión 1	8
1.2. Parte II	14
1.2.1. Cohomología singular	15
1.2.2. Productos cup y cap	19
1.2.3. Producto cross	21
1.2.4. Orientación y (co)homología	22
1.2.5. Isomorfismo de Thom, versión 2	25
1.2.6. Conexión con la teoría de Morse	30
2. Teoría de Morse, cobordismos y adjunción de manijas	37
2.1. Tríadas, cobordismos y funciones de Morse	37
2.2. Campos tipo gradiente	43
2.3. Cobordismos elementales y adjunción de manijas	49
2.3.1. Cirugía	49
2.3.2. Traza de una cirugía y cobordismos elementales	55
2.3.3. Homología relativa	65
2.4. Funciones autoindexantes	68
3. El Teorema de h-cobordismo	75
3.1. Enunciado del teorema y esquema de la demostración	75
3.2. Cancelación en las dimensiones intermedias	79
3.3. Aplicaciones del Teorema de h-cobordismo	94
3.4. Desigualdades de Morse	97
3.4.1. Para tríadas	97
3.4.2. Para variedades cerradas	100
Bibliografía	103

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Cohomología, fibrados y el Isomorfismo de Thom

1.1. Parte I

En esta parte del capítulo, desarrollaremos la maquinaria necesaria para probar el Isomorfismo de Thom enunciado en términos de la cohomología de de Rham. Así, hablaremos brevemente sobre fibrados vectoriales para dar luego las nociones básicas en relación a dicha cohomología. A continuación presentaremos el argumento de Mayer-Vietoris, que sirve para probar resultados globales sobre la cohomología de una variedad a partir de su validez a nivel local y será utilizado en la demostración del Isomorfismo de Thom, que es el resultado central y el que concluye esta parte del capítulo.

1.1.1. Fibrados vectoriales

En este apartado, vamos a basarnos en [MS74], donde se trabaja con fibrados vectoriales sobre espacios topológicos. Otra referencia posible es [BT82], donde se estudian fibrados suaves sobre variedades diferenciables, siendo las construcciones totalmente análogas. Comenzamos definiendo la noción de fibrado vectorial como se hace en [MS74].

Definición 1.1. *Dado un espacio topológico B , que será el “espacio base”, y un número natural n ; un fibrado vectorial de dimensión n sobre B consiste en*

1. *Un espacio topológico E , llamado “espacio total”.*
2. *Una función continua $\pi : E \rightarrow B$ denominada proyección.*
3. *Para cada $b \in B$, una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n para la fibra $\pi^{-1}(b)$.*

CAPÍTULO 1. COHOMOLOGÍA, FIBRADOS Y EL ISOMORFISMO DE THOM

De modo que se cumpla la siguiente restricción: para cada $b \in B$, debe existir un entorno abierto $U \subseteq B$ y un homeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tales que conmute el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & \swarrow p_{r_1} & \\ U & & \end{array}$$

Y además sea $\Phi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales para todo $x \in U$. Un par (U, Φ) como el recién descrito es una trivialización local del fibrado E . Si existe una trivialización local con $U = B$, decimos que el fibrado es trivial.

Dado $b \in B$, la fibra de b es el espacio vectorial $\pi^{-1}(b)$. Si B es una variedad diferenciable, el concepto de fibrado vectorial suave (o diferenciable, o fibrado vectorial a secas) sobre B se define de manera totalmente análoga, pero pidiendo que E sea también una variedad diferenciable, que la proyección $\pi : E \rightarrow B$ sea suave y que las trivializaciones locales $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ sean difeomorfismos. Veamos dos ejemplos de fibrados vectoriales suaves:

1. Dada una variedad diferenciable M , podemos considerar el fibrado tangente $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p(M)\}$ con la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$ y las siguientes trivializaciones: dado $p \in M$ y una carta (U, φ) en p , consideramos $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) = \{(q, v) : q \in U, v \in T_q M\}$ y el difeomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ dado por $\tilde{\varphi}(q, v) = (q, a_1(q, v), \dots, a_n(q, v))$ donde $v = \sum_{i=1}^n a_i(q, v) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ (es decir, la segunda componente viene dada por las coordenadas de v en la base de los ganchos). El par $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ induce una carta y es a su vez una trivialización de TM .
2. De forma similar, se construye el fibrado cotangente $TM^* = \bigcup_{p \in M} T_p^* M^*$, reemplazando la base de los ganchos $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}\}$ por su base dual $\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_n\}$.

Definición 1.2. Dados dos fibrados vectoriales $E \xrightarrow{\pi} B$ y $E' \xrightarrow{\pi'} B$ sobre el mismo espacio base B (no necesariamente de la misma dimensión), un morfismo de fibrados vectoriales entre ellos es una función continua $T : E \rightarrow E'$ que manda fibras en fibras (es decir, $\pi' \circ T = \pi$) y tal que $T : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi'^{-1}(x)$ sea lineal para todo $x \in B$.

Definición 1.3. Una sección de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$ es una función continua $s : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id_B$. Una sección local consiste en un par (U, s) donde $U \subseteq B$ es un abierto y $s : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ es una sección del fibrado $\pi^{-1}(U)$.

A partir del concepto de orientación para espacios vectoriales, queremos definir el de orientación para fibrados. Dar una orientación en un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$

será dar una orientación a cada fibra $\pi^{-1}(b)$ que varíe en forma continua, en el siguiente sentido: para cada $b \in B$, debe existir una trivialización $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ alrededor de b tal que la restricción $\Phi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ sea un isomorfismo orientado (dando a \mathbb{R}^n la orientación usual) para cada $x \in U$. Una tal trivialización se dice una trivialización orientada. No es difícil ver que esto último es equivalente a dar para cada $b \in B$ un entorno abierto U y secciones locales s_1, \dots, s_n definidas allí, de modo que $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ sea una base orientada de $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in U$.

Diremos que un fibrado vectorial es orientable si admite alguna orientación. A modo de ejemplo, una variedad diferenciable M es orientable si y sólo si su fibrado tangente TM lo es.

1.1.2. Cohomología de de Rham

Sea M una variedad diferenciable. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ notamos $\Omega^k(M)$ al \mathbb{R} -espacio vectorial formado por las k -formas en M , es decir, por las secciones $\omega : M \rightarrow \Lambda_k(TM^*)$ de la k -ésima potencia exterior del fibrado cotangente de M (ver [War83, Chap. 2]). Definimos $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$, que tiene estructura de \mathbb{R} -álgebra junto con el producto wedge $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$. Los espacios de k -formas, con el diferencial exterior constituyen complejo de de Rham

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

Donde $n = \dim(M)$. Podemos definir $Z^k(M) = \ker[d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)]$ que será el espacio de las k -formas cerradas en M ; y $B^k(M) = \text{Im}[d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)]$ que será el espacio de las k -formas exactas. El k -ésimo grupo de cohomología del complejo de de Rham será $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ (el cociente entre las k -formas cerradas y las exactas), el cual denominaremos k -ésimo grupo de cohomología de de Rham de M . Para $k < 0$, podemos definir $\Omega^k(M) = 0$ y por ende tener definido $H^k(M)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, siendo $H^k(M) = 0$ para todo $k < 0$. Tanto estas construcciones como las que haremos en lo que resta del presente apartado pueden encontrarse en [War83] y en [Lee00].

Notando $H^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M)$, tenemos que $(H^*(M), \wedge)$ es un álgebra graduada. Si $f : M \rightarrow N$ es una función \mathcal{C}^∞ entre variedades diferenciables, induce un morfismo de complejos $f^* : (\Omega^*(N), d) \rightarrow (\Omega^*(M), d)$ que se esquematiza a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(N) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Donde $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ viene dado por el pull-back de k -formas por f . En consecuencia, se induce para cada k un morfismo en las cohomologías $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$. De hecho, por la compatibilidad del pull-back con el producto wedge, se induce un morfismo $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ de \mathbb{R} -álgebras. La asignación $f \mapsto f^*$ es funtorial, esto es, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ y además $id_* = id$.

CAPÍTULO 1. COHOMOLOGÍA, FIBRADOS Y EL ISOMORFISMO DE THOM

Un resultado fundamental (ver por ejemplo [Lee00, Prop. 11.5]) es que si $f, g : M \rightarrow N$ son dos funciones suaves tales que existe una homotopía (no necesariamente suave) entre ellas, entonces f^* y g^* inducen los mismos morfismos en cohomología. En particular, si $f : M \rightarrow N$ es una equivalencia homotópica entonces $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ es un isomorfismo.

Dado un cubrimiento por abiertos $\{U, V\}$ de M , tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{i} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Donde $i(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ y $j(\alpha, \beta) = \alpha|_{U \cap V} - \beta|_{U \cap V}$. La exactitud se prueba fácilmente, salvo quizás por la suryectividad de j . Para ese paso, tomamos $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$. Entonces dada $\omega \in \Omega^*(U \cap V)$ podemos considerar la forma $(\alpha, \beta) = (\rho_V \omega, -\rho_U \omega) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ que claramente verifica $j(\alpha, \beta) = \omega$. A partir de esto, tenemos una sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{i} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Donde el morfismo de conexión $\partial : H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M)$ viene dado por $\partial([\omega]) = [d\rho_V \wedge \omega]$. La sucesión exacta larga anterior es la sucesión de Mayer-Vietoris para el cubrimiento $\{U, V\}$.

La sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta muy útil para calcular la cohomología de una variedad, descomponiéndola en partes “más simples” cuya cohomología conocemos de antemano. A modo de ejemplo, calculemos la cohomología de \mathbb{S}^n . Para esto, vamos a utilizar el hecho de que como $\mathbb{R}^n \simeq *$ entonces:

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Para $n = 0$, como $S^0 = \{-1, 1\}$ es unión disjunta de dos variedades difeomorfas al punto,

$$H^q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Para $n = 1$, tomamos dos puntos N y S en \mathbb{S}^1 (que serán el polo norte y el polo sur, respectivamente) y consideramos el cubrimiento por abiertos $\{U, V\}$ de S^1 con $U = S^1 \setminus \{N\}$ y $V = S^1 \setminus \{S\}$. Como $U, V \cong \mathbb{R}$ y $U \cap V \simeq S^0$ ya que se retrae por deformación fuerte al ecuador, y de forma diferenciable; la sucesión de Mayer-Vietoris para el cubrimiento elegido nos da una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \xrightarrow{i} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{j} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^1(S^1) \longrightarrow 0$$

De la cual podemos deducir que $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ (usando que para toda variedad diferenciable M , $H^0(M)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial cuya dimensión coincide con la cantidad de componentes conexas de M ; y que la suma alternada de las dimensiones en una sucesión exacta finita es 0). Al tener dimensión 1, resulta ser

$$H^q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Vale en general que

$$H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0, n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Para todo $n \geq 1$. Esto se demuestra por inducción. Acabamos de probar el caso base. Para el paso inductivo, partimos de $n \geq 2$ y tomamos exactamente el mismo cubrimiento que antes dado por $U = S^n \setminus \{N\}$ y $V = S^n \setminus \{S\}$. La sucesión de Mayer-Vietoris asociada a este cubrimiento nos da una sucesión exacta corta como en el caso $n = 1$, de la cual deducimos en este caso que $H^1(S^n) = 0$ al ser S^{n-1} arcoconexa. Como $H^q(U) \oplus H^q(V) = 0$ para todo $q \geq 1$, el morfismo de borde induce un isomorfismo $\tilde{\partial} : H^q(S^{n-1}) \rightarrow H^{q+1}(S^n)$ para cada $q \geq 1$, de donde se obtiene lo deseado.

Podemos hacer construcciones análogas a las que venimos haciendo en este apartado, pero considerando únicamente las formas con soporte compacto (en lugar de los espacios $\Omega^k(M)$ formados por todas las k -formas). Con ese objetivo, se define para cada $k \geq 0$

$$\Omega_c^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{sop}(\omega) \text{ es compacto}\}$$

Es fácil ver que $(\Omega_c^*(M), d)$ es un subcomplejo de $(\Omega^*(M), d)$. Los grupos de cohomología asociados a ese subcompejo son los grupos de cohomología con soporte compacto $\{H_c^k(M)\}_{k \geq 0}$. Al igual que con la cohomología de de Rham usual, asignarle a cada variedad su k -ésimo grupo de cohomología con soporte compacto (o su álgebra graduada $H_c^*(M) := \bigoplus_{k \geq 0} H_c^k(M)$) nos da un funtor contravariante, pero aquí la categoría de la que partimos deben ser las variedades diferenciables con las funciones suaves propias (ya que el pull-back de una forma con soporte compacto por una función que no es propia no necesariamente tiene soporte compacto). Por otro lado, si $i : U \rightarrow V$ es una inclusión entre abiertos de M , entonces tenemos un morfismo $i_! : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(V)$ que manda a cada $\omega \in \Omega_c^*(U)$ a su extensión por 0 al resto de V , el cual nos da de hecho un morfismo de complejos, y por ende induce morfismos en la cohomología con soporte compacto.

La cohomología con soporte compacto, a diferencia de la de de Rham, no es un invariante homotópico, dado que las homotopías no preservarán en general la compacidad del soporte de una forma. Dado un cubrimiento por abiertos $\{U, V\}$, tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{i_!} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_!} \Omega_c^*(M) \longrightarrow 0$$

Donde los morfismos vienen dados por $i_!(\omega) = (i_!\omega, i_!\omega)$ y $j_!(\alpha, \beta) = i_!\alpha - i_!\beta$. Al igual que para la cohomología de de Rham, para probar la suryectividad de $j_!$

debemos recurrir a multiplicar adecuadamente por elementos de una partición de la unidad $\{\rho_U, \rho_V\}$ asociada a $\{U, V\}$. Pero en este caso, debemos tomar $(\alpha, \beta) = (\rho_U \omega, -\rho_V \omega) \in \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$ para que $j_1(\alpha, \beta) = \omega$. A partir de esto, obtenemos la sucesión de Mayer-Vietoris con soporte compacto

$$\dots \longrightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{i} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{j} H_c^k(M) \xrightarrow{\partial} H_c^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Donde el morfismo de borde viene dado por $\partial([\omega]) = [d\rho_U \wedge \omega]$.

La dualidad de Poincaré nos permite relacionar la cohomología de de Rham con la de soporte compacto.

Teorema 1.1 (Dualidad de Poincaré). *Sea M una variedad diferenciable orientable de dimensión n . Entonces $H^k(M) \cong H_c^{n-k}(M)^*$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Más precisamente, el teorema nos dice lo siguiente. Para cada $0 \leq k \leq n$, tenemos un pairing $H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$ (que está bien definido precisamente porque M es orientable y por el Teorema de Stokes). Dicho pairing induce un morfismo $H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$, dado por $[\omega] \mapsto \int_M [\omega] \wedge [\cdot]$. La dualidad de Poincaré nos dice que dicho morfismo es un isomorfismo. A partir de esto, obtenemos un corolario muy útil:

Corolario 1.1. *Sea M una variedad conexa y orientada de dimensión n . Entonces la integración $\int_M : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ es un isomorfismo.*

La validez del corolario se debe a que, por dualidad de Poincaré, $H_c^n(M)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 1; y a que el morfismo integración es un epimorfismo (lo cual puede mostrarse construyéndose una n -forma en M que integre 1, usando por ejemplo funciones bump). Una forma de probar la dualidad de Poincaré es usando el argumento de Mayer-Vietoris (que será descrito en el siguiente apartado) como se detalla en [BT82, §5]. Presentaremos una formulación de este resultado en términos de homología singular cuando hablemos de producto cap. En [Mil65, Thm. 7.5] se prueba otra versión del teorema, en este caso para tríadas y en términos de homología singular, utilizando homología de Morse (ver **Capítulo 3** de esta tesis).

A partir del corolario, dada una variedad conexa y orientada M de dimensión n decimos que una clase de cohomología $[\omega] \in H_c^n(M)$ es un generador de orientación de M si $\int_M \omega = 1$. Notemos que fija la orientación, existe un único generador de orientación en $H_c^n(M)$; y que al invertir la orientación se invierte el generador.

1.1.3. Argumento de Mayer-Vietoris

Vamos a describir y ejemplificar un método que sirve para “pasar de lo local a lo global”, es decir obtener resultados globales concernientes a la homología o cohomología una variedad a partir de resultados locales. Más precisamente, dicho método, conocido como “argumento de Mayer-Vietoris”, nos servirá para probar que una variedad cumple una cierta propiedad P, de manera constructiva, partiendo de que los abiertos de M difeomorfos a \mathbb{R}^n la cumplen, y obteniendo abiertos de M

cada vez más grandes que cumplen P; hasta llegar a deducir que la variedad misma lo verifica. Vamos a seguir lo desarrollado en [BT82, Chap. I §5]. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.4. *Un cubrimiento por abiertos $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de una variedad M de dimensión n se dice bueno si para cada colección finita de índices $i_1, \dots, i_m \in I$ se verifica que $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_m}$ es difeomorfo a \mathbb{R}^n o vacío.*

Vamos a probar que toda variedad diferenciable admite un cubrimiento bueno. Para ello, tomamos una métrica Riemanniana g en M . Un subconjunto $U \subseteq M$ se dice geodésicamente convexo si dados $q, q' \in U$ existe una única geodésica minimizante γ entre q y q' , y verifica $Im(\gamma) \subseteq U$. De acuerdo a [Spi99, p. 363], dado un punto $p \in M$ existe $\varepsilon_p > 0$ tal que toda bola geodésica de radio ε con $\varepsilon \leq \varepsilon_p$ es geodésicamente convexa. Achicando ε_p si es necesario, podemos asegurarnos de que $B(p, \varepsilon_p)$ sea un entorno totalmente normal de p (es decir, existe $\delta_p > 0$ tal que $B(p, \varepsilon_p) \subseteq B(q, \delta_p)$ para todo $q \in B(p, \varepsilon_p)$, ver [Lee97, Lemma 5.12]). Notando entonces $U_p = B(p, \varepsilon_p)$, si consideramos $\mathfrak{U} = \{U_p\}_{p \in M}$ tendremos que \mathfrak{U} es un cubrimiento bueno. En efecto, dados $p_1, \dots, p_m \in M$ se sigue de la definición que $U = U_{p_1} \cap \dots \cap U_{p_m}$ es geodésicamente convexo, y si tomamos $q \in U$, por estar en U_p para $p = p_1$ tenemos que $U \subseteq U_p \subseteq B(q, \delta_p)$ y por lo tanto considerando la carta $(B(q, \delta_p), \exp^{-1})$ tenemos que U es difeomorfo a un abierto de $T_q M$, que resulta ser estrellado en 0 por el hecho de que U es geodésicamente convexo y por la forma que tienen las geodésicas en la carta correspondiente a un entorno normal. Como los abiertos estrellados son difeomorfos a \mathbb{R}^n , sigue lo deseado.

Observación 1.1. *Si tomamos en la construcción anterior $\mathfrak{B} = \{B(p, \varepsilon) : p \in M, \varepsilon \leq \varepsilon_p\}$ tenemos que \mathfrak{B} es un cubrimiento bueno y además es base.*

Sabiendo esto, podemos probar el siguiente resultado usando el argumento de Mayer-Vietoris:

Proposición 1.1. *Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n . Entonces sus grupos de homología singular sobre \mathbb{Z} son todos finitamente generados.*

Demostración. La idea será probar que la proposición P dada por “ U tiene todos sus grupos de homología finitamente generados” es válida en abiertos cada vez más grandes de M . Si $U \subseteq M$ es un abierto difeomorfo a \mathbb{R}^n , es claro que vale. Supongamos que $U, V \subseteq M$ son abiertos tales que P vale en U , V y $U \cap V$. Veamos que vale en $U \cup V$. Por Mayer-Vietoris, existe una sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow H_k(U \cap V) \longrightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{r} H_k(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Tenemos que $\ker(\partial) = Im(r)$ es finitamente generado, y también lo es $Im(\partial) \subseteq H_{k-1}(U \cap V)$ por ser submódulo de un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado. Si $a_1, \dots, a_r \in H_k(U \cup V)$ son tales que $\{\partial a_1, \dots, \partial a_r\}$ es un conjunto de generadores de $Im(\partial)$, entonces $\ker(\partial) + \langle a_1, \dots, a_r \rangle = H_k(U \cup V)$ y por lo tanto $H_k(U \cup V)$ es finitamente generado. Como vale para todo $k \geq 0$, concluimos que $U \cup V$ cumple P.

Veamos ahora que si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ es un cubrimiento por abiertos de M finito tal que P vale en toda intersección finita de elementos de \mathfrak{U} , entonces P vale en $\bigcup_{i=1}^m U_i$. Lo haremos por inducción en m . Para $m = 1$ es trivial. Supongamos que es válido para m . Tomemos $m + 1$ abiertos tales que todas sus intersecciones finitas cumplen P . Notemos $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$ y $V = U_{m+1}$. Como $U \cap V = \bigcup_{i=1}^m U_i \cap U_{m+1}$ tenemos que U y $U \cap V$ son unión de m abiertos tales que (por hipótesis) todas sus intersecciones finitas cumplen P . Por hipótesis inductiva entonces, U y $U \cap V$ cumplen P y por lo tanto al cumplirla también V , por lo antes visto $U \cup V = \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$ cumple P , lo cual prueba el paso inductivo.

Como M es compacta, su cubrimiento bueno admite un subcubrimiento finito $\mathfrak{U}' = \{U_1, \dots, U_m\}$ que también es bueno, y como todas las intersecciones finitas de elementos de \mathfrak{U}' son difeomorfos a \mathbb{R}^n , cumplen P ; y entonces por lo visto en el párrafo anterior $M = \bigcup_{i=1}^m U_i$ cumplirá P , como queremos. \square

En la demostración anterior se ve cómo es la dinámica del argumento de Mayer-Vietoris. Queremos probar que se cumple una cierta propiedad P sobre una variedad M (a la cual quizás debemos pedirle ciertos requisitos, como en el caso de recién que sea compacta). Comenzamos probando que P vale en sus abiertos difeomorfos a \mathbb{R}^n . Luego vemos que si U, V y $U \cap V$ cumplen P , entonces también lo cumple $U \cup V$, utilizando aquí alguna versión de la sucesión de Mayer-Vietoris. A partir de lo anterior, por inducción probamos luego que si U_1, \dots, U_m son tales que todas sus intersecciones finitas cumplen P , entonces $\bigcup_{i=1}^m U_i$ también lo cumple. Esto en particular nos dice que si M admite un cubrimiento bueno finito, entonces cumplirá P . En caso de que asumamos que M tiene un cubrimiento bueno finito (por ejemplo, si es compacta) esto nos permitirá concluir lo deseado. Cuando no es así, hay que utilizar un argumento adicional que desarrollaremos en el próximo apartado para probar el Isomorfismo de Thom, y para el cual nos servirá la observación hecha previamente de que toda variedad M admite un cubrimiento bueno \mathfrak{B} que también es base.

1.1.4. Isomorfismo de Thom, versión 1

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial de dimensión n sobre una variedad M de dimensión m . Supongamos que queremos calcular la cohomología de E . ¿Podrá expresarse en términos de la de M ?

Sea $i : M \rightarrow E$ la sección nula. Como $E \xrightarrow{\pi} M$ es una equivalencia homotópica suave (al ser la sección nula $\text{Im}(i) \subseteq E$ un retracts por deformación fuerte), tenemos que $H^*(E) \cong H^*(M)$ donde el isomorfismo viene dado por i^* y la inversa es π^* . No podemos proceder del mismo modo con la cohomología de soporte compacto, puesto que no es un invariante homotópico. Sin embargo, haciendo uso de la dualidad de Poincaré podemos llegar a conclusiones similares, del siguiente modo. Si N es una variedad diferenciable de dimensión r , orientable y de tipo finito (es decir, admite un cubrimiento bueno finito), el pairing que da lugar a la dualidad

de Poincaré induce también un isomorfismo $H_c^q(N) \cong H^{r-q}(N)^*$ para cada $q \geq 0$ (ver [BT82, Chap. 1 §5]). Por lo tanto, si asumimos que M y E son de tipo finito y orientables, tendremos que

$$H_c^*(E) \cong H^{m+n-*}(E)^* \cong H^{m+n-*}(M)^* \cong H_c^{*-n}(M)$$

Si bien esto nos da un isomorfismo $\rho : H_c^*(E) \cong H_c^{*-n}(M)$, no podemos expresar con una fórmula concreta cuánto vale $\rho([\omega])$ para cualquier $[\omega] \in H_c^*(E)$. En efecto, a través de los isomorfismos, $[\omega]$ hace el siguiente recorrido:

$$[\omega] \mapsto \int_E \cdot \wedge [\omega] \mapsto \int_E \pi^*(\cdot) \wedge [\omega] \in H^{m+n-*}(M)^*$$

Pero no sabemos cómo expresar la imagen $\rho([\omega]) \in H_c^{*-n}(M)$ de la funcional $\int_E \pi^*(\cdot) \wedge [\omega]$ en términos de $[\omega]$; lo único que sabemos es que $\rho([\omega])$ es la única clase en $H_c^{*-n}(M)$ que cumple

$$\int_E \pi^*([\alpha]) \wedge [\omega] = \int_M [\alpha] \wedge \rho([\omega])$$

Para toda $[\alpha] \in H^{m+n-*}(M)$. Lo que haremos entonces es definir otro tipo de cohomología con soporte compacto para E , en el que valga un isomorfismo como el anterior pero sin pedir que las variedades involucradas sean de tipo finito y pudiendo dar una construcción más explícita de ρ ; aprovechando la estructura de fibrado de E sobre M , y no únicamente la estructura de variedad, como venimos haciendo hasta aquí. Vamos a seguir las ideas de [BT82, Chap. 1 §6], pero modificando algunos detalles y presentándolas desde el punto de vista de quien escribe. Comenzamos con una definición.

Definición 1.5. Sea $\omega \in \Omega^k(E)$ una k -forma. Decimos que ω tiene soporte compacto en la dirección vertical si para todo $K \subseteq M$ compacto, $\text{sop}(\omega) \cap \pi^{-1}(K)$ es compacto. Notamos $\Omega_{cv}^k(E) \subseteq \Omega^k(E)$ al subespacio formado por las k -formas en E con soporte compacto en la dirección vertical.

Notemos que $\Omega_c^k(E) \subseteq \Omega_{cv}^k(E)$ y que si M es compacta ambos conjuntos coinciden. Por otro lado, si $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$, como para cada $x \in M$ se verifica que $\text{sop}(\omega|_{\pi^{-1}(x)}) \subseteq \text{sop}(\omega) \cap \pi^{-1}(x)$ es cerrado, deducimos que $\omega|_{\pi^{-1}(x)}$ tiene soporte compacto. Es decir que si bien las ω de soporte compacto vertical no tienen por qué tener soporte compacto, sí lo tienen sus restricciones a cada fibra de E .

Como $d(\Omega_{cv}^k(E)) \subseteq \Omega_{cv}^{k+1}(E)$ dado que $\text{sop}(d\omega) \subseteq \text{sop}(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^k(E)$, deducimos que $(\Omega_{cv}^*(E), d)$ es un complejo y notamos $H_{cv}^*(E)$ a su cohomología, que es la cohomología con soporte compacto vertical.

De aquí en más, supondremos que E es un fibrado orientado sobre M . Vamos a definir morfismos $\pi_* : \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow \Omega^{*-n}(M)$ dados por integrar a lo largo de la fibra. Tomamos $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una trivialización orientada de E , con $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ atlas de M siendo $\psi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$. Entonces tenemos una carta $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n \cong$

CAPÍTULO 1. COHOMOLOGÍA, FIBRADOS Y EL ISOMORFISMO DE THOM

$V_\alpha \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n$ donde $(x_1, \dots, x_m) \in V_\alpha$ son coordenadas de U_α y $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ son coordenadas de las fibras. Dados $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq m$, $J = \{j_1, \dots, j_s\}$ con $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq m$ e $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ dos listas ordenadas (si $r = 0$ o $s = 0$, la respectiva lista es vacía), vamos a notar $d\psi_J = d\psi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{j_s}$ y $dt_I = dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r}$ (valiendo la forma correspondiente 1 cuando $I = \emptyset$ o $J = \emptyset$). Entonces si $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$, $\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ se escribe en estas coordenadas como $\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \sum_{I,J} f_{I,J}(x,t) d\psi_J \wedge dt_I$ para únicas funciones $f_{I,J} \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha \times \mathbb{R}^n)$, donde I, J se mueven sobre todos los pares tales que $\#I + \#J = r + s = k$. Mirando todo en coordenadas, vamos a definir

$$\pi_*(f(x,t)d\psi_J \wedge dt_I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \#I < n \\ d\psi_J \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) dt_1 \dots dt_n & \text{si } \#I = n \end{cases}$$

Y extendemos luego por linealidad, definiendo así $\pi_*(\omega)|_{U_\alpha}$ para toda $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$. Notemos que lo anterior está bien definido puesto que para cada x fijo, $f(x,t)$ tiene soporte compacto como función de t y por ende es integrable sobre \mathbb{R}^n . Lo que hace π_* sobre las formas de la base es entonces mandarlas a 0 cuando no contienen al factor $dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$, y cuando contienen a dicho factor, cambia la parte $f(x,t)dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ por su integral a lo largo de la fibra. Se puede ver que bajo esta definición, dados dos abiertos trivializantes U_α, U_β ; $\pi_*(\omega)|_{U_\alpha}$ coincide con $\pi_*(\omega)|_{U_\beta}$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, dándonos así una forma bien definida $\pi_*(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$ y obteniendo por ende un morfismo $\pi_* : \Omega_{cv}^k(E) \rightarrow \Omega^{k-n}(M)$ bien definido.

Además, π_* conmuta con el diferencial exterior (ver [BT82, Prop 6.14.1]), es decir que tenemos un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_{cv}^k(E) & \xrightarrow{d} & \Omega_{cv}^{k+1}(E) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^{k-n}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1-n}(M) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

Lo cual induce morfismos en las cohomologías $\pi_* : H_{cv}^k(E) \rightarrow H^{k-n}(M)$. Antes de estudiar estos morfismos, probaremos algunos resultados.

Proposición 1.2. *Sea E un fibrado orientado sobre una variedad orientada M . Sea $\omega \in \Omega_c^{m+n}(E)$. Entonces si damos a E la orientación producto entre la de M y la de sus fibras, vale que*

$$\int_E \omega = \int_M \pi_* \omega$$

Demostración. Usando particiones de la unidad, podemos ver que alcanza con probar el resultado para formas con soporte compacto en alguna de las restricciones $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Pero entonces, si $\omega = f(x,t)d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_m \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ con $f : V_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suave y de soporte compacto, por el Teorema de Fubini tendremos que

$$\int_{E|_{U_\alpha}} \omega = \int_{V_\alpha \times \mathbb{R}^n} f(x,t) dx_1 \dots dx_m dt_1 \dots dt_n = \int_{V_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) dt_1 \dots dt_n \right) dx_1 \dots dx_m$$

$$= \int_{U_\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \dots dt_n \right) d\psi_1 \wedge \dots \wedge d\psi_n = \int_{U_\alpha} \pi_* \omega$$

□

Proposición 1.3 (Fórmulas de proyección). *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado orientado, τ una forma en M y $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$. Entonces:*

1. $\pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_*\omega$
2. Supongamos que además M está orientada y $\tau \in \Omega_c^{m+n-k}(M)$. Entonces

$$\int_E \pi^*\tau \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_*\omega$$

Demostración. 1. Basta con verificar el resultado localmente. En coordenadas locales podemos escribir $\tau = \sum_L g_L(x) d\psi_L$ y $\omega = \sum_{I,J} f_{I,J}(x, t) d\psi_J \wedge dt_I$, de modo que $\pi^*\tau \wedge \omega = \sum_{I,J,L} g_L(x) f_{I,J}(x, t) d\psi_L \wedge d\psi_J \wedge dt_I$. Por linealidad y la definición de π_* , será entonces

$$\pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) = \sum_{J,L} d\psi_L \wedge d\psi_J g_L(x) \int_{\mathbb{R}^n} f_{I_0,J}(x, t) dt_1 \dots dt_n$$

Donde $I_0 = \{1, \dots, n\}$, puesto que π_* se anula en los términos en los que $I \neq I_0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) &= \sum_L g_L(x) d\psi_L \wedge \left(\sum_J d\psi_J \int_{\mathbb{R}^n} f_{I_0,J}(x, t) dt_1 \dots dt_n \right) \\ \pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) &= \tau \wedge \pi_*\omega \end{aligned}$$

Sobre cada U_α , como queríamos.

2. Como $\text{sop}(\pi^*\tau \wedge \omega) \subseteq \text{sop}(\omega) \cap \pi^{-1}(\text{sop}(\tau))$, τ tiene soporte compacto y ω tiene soporte compacto en la dirección vertical, $\pi^*\tau \wedge \omega$ tiene soporte compacto. Al ser una $m+n$ -forma en E , podemos utilizar entonces la **Proposición 1.2** y concluir que

$$\int_E \pi^*\tau \wedge \omega = \int_M \pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) = \int_M \tau \wedge \pi_*\omega$$

Apelando al primer inciso de esta proposición.

□

Observación 1.2. *Notemos que por el ítem 2 de la proposición anterior, $\rho := \pi_*$ verifica la igualdad que enunciarnos al principio de este apartado*

$$\int_E \pi^*([\alpha]) \wedge [\omega] = \int_M [\alpha] \wedge \rho([\omega])$$

Pero ahora tenemos la ventaja de que ρ puede ser construido de manera explícita, integrando a lo largo de la fibra.

CAPÍTULO 1. COHOMOLOGÍA, FIBRADOS Y EL ISOMORFISMO DE THOM

Estamos en condiciones ahora de enunciar el resultado más importante de esta sección.

Teorema 1.2 (Isomorfismo de Thom, versión 1). *Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial orientado de dimensión n . Entonces $\pi_* : H_{cv}^k(E) \rightarrow H^{k-n}(M)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Vamos a utilizar el argumento de Mayer-Vietoris. Para eso, tomamos una trivialización orientada $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ de modo tal que $\{U_\alpha\}_\alpha$ sea un cubrimiento bueno de M y base para su topología. Lo primero que queremos probar es que $E|_{U_\alpha}$ cumple el Teorema para cualquier α . Al ser el fibrado $E|_{U_\alpha}$ trivial, nos alcanza con probar el siguiente lema:

Lema 1.1 (Lema de Poincaré para soportes compactos verticales). *Dada una variedad diferencial M , la integración a lo largo de la fibra nos da un isomorfismo $\pi_* : H_{cv}^k(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{k-n}(M)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.*

La demostración del hecho anterior es análoga a la del Lema de Poincaré para cohomología con soporte compacto, que está detallada en [BT82, p. 37].

Supongamos ahora que el Teorema vale en $E|_U$, $E|_V$ y $E|_{U \cap V}$. Tomemos $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partición de la unidad de $U \cup V$ subordinada a $\{U, V\}$, y notemos $\tilde{\rho}_W = \rho_W \circ \pi = \pi^* \rho_W$ para $W = U, V$. Tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \xrightarrow{i} \Omega_{cv}^*(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^*(E|_V) \xrightarrow{j} \Omega_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \longrightarrow 0$$

Donde $i(\omega) = (\omega|_{E|_U}, \omega|_{E|_V})$ y $j(\alpha, \beta) = \alpha|_{E|_{U \cap V}} - \beta|_{E|_{U \cap V}}$. La buena definición de de los morfismos involucrados en la sucesión anterior se debe a que la restricción de formas con soporte compacto vertical tiene soporte compacto vertical. La exactitud se prueba de manera análoga a lo hecho con la sucesión

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{i} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Pero verificando siempre que las formas que uno está manipulando tengan soporte compacto en la dirección vertical. A partir de las sucesiones exactas largas asociadas a los complejos anteriores, podemos definir un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{cv}^{k-1}(E|_{U \cap V}) & \xrightarrow{\partial} & H_{cv}^k(E|_{U \cup V}) & \xrightarrow{i} & H_{cv}^k(E|_U) \oplus H_{cv}^k(E|_V) & \xrightarrow{j} & H_{cv}^k(E|_{U \cap V}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{k-1-n}(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^{k-n}(U \cup V) & \xrightarrow{i} & H^{k-n}(U) \oplus H^{k-n}(V) & \xrightarrow{j} & H^{k-n}(U \cap V) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Veamos que es conmutativo. El segundo y tercer cuadrado lo son porque π_* conmuta con las restricciones a abiertos. En el caso del primero, tomando $[\omega] \in H_{cv}^{k-1}(E)$, tenemos a partir de la definición de los morfismos de borde:

$$\pi_* \partial([\omega]) = \pi_*([d\tilde{\rho}_V \wedge \omega]) = [\pi_*(\pi^* d\rho_V \wedge \omega)] = [d\rho_V \wedge \pi_* \omega] = \partial \pi_*([\omega])$$

Usando primera identidad de proyección. En consecuencia, como por hipótesis todos los π_* del diagrama que salen de $H_{cv}^*(E|_{U \cap V})$ o de $H_{cv}^*(E|_U) \oplus H_{cv}^*(E|_V)$ son isomorfismos, usando el Lema de los 5 obtenemos que $\pi_* : H_{cv}^k(E|_{U \cup V}) \rightarrow H^{k-n}(U \cup V)$

V) también es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y por lo tanto el teorema es válido para $E|_{U \cup V}$.

Por el argumento inductivo utilizado en la **Sección 1.1.3**, si tenemos una colección finita de abiertos $\{U_1, \dots, U_m\}$ de M tales que para todo $U = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}$ que se obtiene como intersección de finitos de ellos el fibrado $E|_U$ verifica el teorema, entonces $E|_{U_1 \cup \dots \cup U_m}$ también lo verifica. En caso de que M admita un cubrimiento bueno finito (por ejemplo, si es compacta) esto completa la demostración. Pero el teorema sigue siendo válido aún si esto no ocurre.

Para demostrarlo, comenzamos observando que si $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ se escribe como unión disjunta de subvariedades abiertas (debiendo ser I a lo sumo numerable ya que M tiene base numerable) y $E|_{M_i}$ verifica el teorema para todo $i \in I$, entonces E lo verifica. Esto se debe a que para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} H_{cv}^{k+n}(E|_{M_i}) & \xrightarrow{\cong} & H_{cv}^{k+n}(E) \\ \downarrow \prod_{i \in I} \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ \prod_{i \in I} H^k(M_i) & \xrightarrow{\cong} & H^k(M) \end{array}$$

Apelamos ahora a un argumento que se utiliza en [Lee00, p. 301] para demostrar el Teorema de de Rham (precisamente a través del argumento de Mayer-Vietoris). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y propia, como la construida en [Lee00, p. 137]. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, definimos dos subespacios de M :

$$\begin{aligned} A_m &= \{p \in M : m \leq f(p) \leq m + 1\} \\ B_m &= \{p \in M : m - \frac{1}{2} < f(p) < m + 1 + \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Tomemos $m \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis $A_m = f^{-1}([m, m + 1])$ es compacto. Tomamos finitos abiertos de la base buena $\{U_\alpha\}_\alpha$ tales que cubran a A_m y estén todos ellos contenidos en B_m , y notamos C_m a la unión de esos finitos abiertos. Entonces $A_m \subseteq C_m \subseteq B_m$. Como C_m admite por su definición un cubrimiento bueno finito, el fibrado $E|_{C_m}$ sobre C_m cumple el teorema. Además, si $a \geq 2$ como $B_m = f^{-1}(m - \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2})$ y $B_{m+a} = f^{-1}(m+a - \frac{1}{2}, m+a + \frac{3}{2}) \subseteq f^{-1}(m + \frac{3}{2}, +\infty)$ deducimos que $B_m \cap B_{m+a} = \emptyset$. Por ende, $\{C_m\}_{m \text{ impar}}$ es una colección de abiertos disjuntos, y lo mismo ocurre con $\{C_m\}_{m \text{ par}}$. En consecuencia si $U = \bigcup_{m \text{ impar}} C_m$ y $V = \bigcup_{m \text{ par}} C_m$, tenemos que $E|_U$ y $E|_V$ verifican el teorema. Como $U \cap V = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} C_m \cap C_{m+1}$, dicha unión es disjunta y cada $C_m \cap C_{m+1}$ admite un cubrimiento bueno finito, deducimos que $E|_{U \cap V}$ también lo verifica. Dado que $U \cup V = M$, concluimos finalmente que el fibrado E sobre M cumple el teorema, como queríamos. \square

Sabemos entonces que $\pi_* : H_{cv}^{k+n}(E) \rightarrow H^k(M)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$. Dicho morfismo es nulo para $k < 0$, de modo que nos concentramos en el caso $k \geq 0$. Definimos para tales k el isomorfismo de Thom $\mathcal{T} : H^k(M) \rightarrow H_{cv}^{n+k}(E)$ como $\mathcal{T} = \pi_*^{-1}$.

Sea $\Phi := \mathcal{T}(1) \in H_{cv}^n(E)$, donde $1 \in H^0(M)$ es la clase de la 0-forma que vale constantemente 1 en M . Llamamos a Φ la clase de Thom del fibrado E . Utilizando la fórmula de proyección (que vale también a nivel clases de cohomología puesto

que los operadores involucrados conmutan con el diferencial exterior), tenemos que dada $\omega \in H^k(M)$ con $k \geq 0$, $\pi_*(\pi^*\omega \wedge \Phi) = \omega \wedge \pi_*\Phi = \omega \wedge 1 = \omega$, de donde aplicando el isomorfismo de Thom a los dos extremos de la igualdad obtenemos que $\mathcal{T}(\omega) = \pi^*\omega \wedge \Phi$.

Sea $p \in M$, notamos $F = \pi^{-1}(p)$ la cual está orientada de acuerdo a la orientación de E . Usando la definición del morfismo π_* y el hecho de que $\pi_*\Phi = 1$, tenemos que $\int_F \Phi|_F = 1$ para cada fibra F . Esto nos dice que $\Phi|_F \in H_c^n(F)$ es el generador de orientación de $H_c^n(F)$, lo cual nos da la siguiente caracterización de la clase de Thom de un fibrado:

Proposición 1.4. *La clase de Thom de un fibrado vectorial orientado de rango n está unívocamente caracterizada como la única clase $\Phi \in H_{cv}^n(E)$ que se restringe al generador de orientación de $H_c^n(F)$ en cada fibra F .*

En efecto, si tenemos $\Phi' \in H_{cv}^n(E)$ que se restringe al generador de $H_c^n(F)$ para cada fibra F , como $\pi_* : \Omega_{cv}^n(E) \rightarrow \Omega^0(M)$ está dado por $\pi_*\omega|_q = \int_{\pi^{-1}(q)} \omega|_{\pi^{-1}(q)}$, tendremos que $\pi_*(\Phi') = 1$ y como π_* es un isomorfismo será $\Phi' = \Phi$, como queremos.

1.2. Parte II

En la Parte I estuvimos trabajando con cohomología de de Rham y probamos el Isomorfismo de Thom en esos términos. Sin embargo, en los capítulos siguientes trabajaremos siempre con homología singular con coeficientes en \mathbb{Z} . Uno de los motivos por los cuales necesitamos trabajar sobre \mathbb{Z} es que la parte de torsión de los grupos de homología nos va a dar información importante: va a ser crucial a la hora de establecer las desigualdades de Morse en el **Capítulo 3**, así como para los distintos resultados vinculados con homología de Morse; y dicha parte no existe si tomamos los coeficientes sobre un cuerpo, como ocurre con la cohomología de de Rham (donde el cuerpo es \mathbb{R}). El motivo por el cual se expuso la primera parte a pesar de que no trabajaremos con cohomología de de Rham es que motiva en gran medida las construcciones necesarias para enunciar el teorema en términos de cohomología singular, así como su enunciado y su demostración; echando bastante luz en esos aspectos. Veremos que podemos establecer varias analogías entre las dos versiones. Por ejemplo, es posible pensar al producto cup como una versión para la cohomología singular del producto wedge, y lo mismo ocurre con las distintas construcciones e ideas que aparecerán en las demostraciones vinculadas a la versión 2 del Isomorfismo de Thom. Lo desarrollado en la versión 1 resulta para quien escribe tal vez más claro y más intuitivo que lo presentado en la segunda versión, en gran parte quizás porque se cuenta con la integración como mecanismo para construir explícitamente la inversa del Isomorfismo de Thom. Usando cohomología singular, si bien perdemos la integración, ganamos generalidad en la clase de fibrados donde vale el Teorema (no sólo sobre variedades, sino también sobre espacios topológicos) y sobre todo (a fin de lo que nos interesa en esta tesis, donde siempre trabajamos con

variedades) logramos que el anillo sobre el que tomamos coeficientes pueda ser cualquier anillo conmutativo con unidad, teniendo así la posibilidad de trabajar sobre \mathbb{Z} y sacar información también de las partes de torsión.

El esquema de esta segunda parte del capítulo será el siguiente. Comenzamos definiendo y nombrando los resultados fundamentales sobre cohomología singular. A continuación definimos los productos cup, cap y cross. A partir de eso construiremos lo que será la clase de Thom en un fibrado trivial $X \times \mathbb{R}^n$. Luego hablaremos de orientación de variedades en términos de homología y cohomología singular, en particular de orientación de fibrados en estos términos. Con todo esto nos abocaremos a probar la versión 2 del Isomorfismo de Thom. Teniendo estos resultados, desarrollamos en el último apartado de esta sección las nociones básicas en relación a transversalidad, número de intersección y entornos tubulares; que junto con lo expuesto a esa altura permitirán probar el [Mil65, Lemma 6.3], el cual será fundamental en el **Capítulo 3** para describir el morfismo de borde en el complejo de Morse, y para demostrar el Basis Theorem. Dicho apartado establece entonces una conexión entre las nociones sobre cohomología, fibrados y el isomorfismo de Thom que nos ocupan durante la mayor parte de este capítulo; y la Teoría de Morse, que juega un rol central en el resto de la tesis.

1.2.1. Cohomología singular

En este apartado daremos una breve exposición sobre los fundamentos de la cohomología singular, enfatizando en las herramientas y teoremas que aparecerán posteriormente en el tratamiento de la versión 2 del Isomorfismo de Thom. Nos basaremos en [Vic94] y [MS74, Appx. A], donde se puede encontrar más detalles así como algunas demostraciones que omitiremos. Todos los resultados sobre cohomología singular mencionados la presente sección tendrán su análogo en términos de homología singular, que omitiremos enunciar y demostrar en la mayoría de los casos (a pesar de que posiblemente luego los utilicemos) para no volver la exposición tediosa. Dichos resultados pueden encontrarse bien detallados en [Vic94].

Fijamos R un anillo conmutativo con unidad. Sea X un espacio topológico. Denotaremos $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 \forall i \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ al n -simplex standard. Un n -simplex en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Para cada $n \geq 0$ definimos el n -ésimo grupo de cadenas singulares $C_n(X; R)$ como el R -módulo libre generado por los n -símplices singulares en X (es decir, una base de $C_n(X; R)$ es $\{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \text{ continuas}\}$).

Tenemos un operador $d_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$ dado por $d_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^i$, donde $\sigma^i = \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es la cara i -ésima de σ (aquí v_0, \dots, v_n son los vértices del n -simplex standard y $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ denota el $n-1$ -simplex generado por los vértices $v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ en ese orden). En general notaremos a d_n simplemente como d , deduciéndose por contexto el subíndice que le corresponde. Es fácil chequear que $d^2 = 0$, de modo que $(C_*(X; R), d)$ es un complejo de cadenas. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$

definimos $Z_n(X; R) = \ker(d_n)$ al R -módulo formado por los n -ciclos y $B_n(X; R) = \text{Im}(d_{n+1})$ al formado por los n -bordes. Entonces $H_n(X; R) = Z_n(X; R)/B_n(X; R)$ es el n -ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en R , y se obtiene de tomar homología al complejo $(C_*(X; R), d)$.

La construcción dual a la que acabamos de hacer es la que da origen a la cohomología singular. El n -ésimo grupo de cocadenas singulares con coeficientes en R es $C^n(X; R) := C_n(X; R)^* = \text{hom}_R(C_n(X; R), R)$. Como $C_n(X; R)$ es libre con base $\{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \text{ continuas}\}$, tener una cocadena $c \in C^n(X; R)$ es lo mismo que tener una función $c : \{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \text{ continuas}\} \rightarrow R$ que a cada n -simplex en X le asigna un elemento del anillo R .

A partir de $d_{n+1} : C_{n+1}(X; R) \rightarrow C_n(X; R)$, para cada $n \geq 0$ definimos un morfismo $\delta^n := d_{n+1}^t : C^n(X; R) \rightarrow C^{n+1}(X; R)$ que notamos genéricamente δ , resultando ser $(C^*(X; R), \delta)$ un complejo de cocadenas de R -módulos. Al igual que como hicimos antes, podemos tomar cohomología a este complejo. Así, si $Z^n(X; R) = \ker(\delta^n)$ y $B^n(X; R) = \text{Im}(\delta^{n-1})$, vamos a definir $H^n(X; R) = Z^n(X; R)/B^n(X; R)$ como el n -ésimo grupo de cohomología singular de X con coeficientes en R , el cual se obtiene de tomar cohomología al complejo de cocadenas $(C^*(X; R), \delta)$. Dado un cociclo $c \in Z^n(X; R)$ notaremos $[c] \in H^n(X; R)$ a su clase de cohomología.

Dadas $c \in C^n(X; R)$ y $\sigma \in C_n(X; R)$ notaremos $\langle c, \sigma \rangle = c(\sigma)$, lo cual induce un pairing $\langle, \rangle : C^n(X; R) \otimes C_n(X; R) \rightarrow R$ dado por la evaluación. Por definición, tenemos que $\langle \delta c, \sigma \rangle = \langle c, d\sigma \rangle$ actuando d como el adjunto de δ , de modo que el paring pasa a las homología $H^n(X; R) \otimes H_n(X; R) \rightarrow R$, $([c], [\sigma]) \mapsto \langle [c], [\sigma] \rangle := \langle c, \sigma \rangle$.

Vamos ahora a extender la noción de cohomología singular a pares topológicos. Omitiremos de aquí en más en la notación para módulos de cadenas, cocadenas, homología y cohomología al anillo R (escribiendo por ejemplo $H^n(X)$ en lugar de $H^n(X; R)$) dando por sobreentendido el anillo en el cual estamos trabajando, salvo cuando esto pudiera producir confusión. Un par topológico (X, A) consiste en un espacio topológico X y un subespacio $A \subseteq X$. Diremos que una cocadena $c \in C^n(X)$ es relativa a A si $\langle c, \sigma \rangle = 0$ para todo $\sigma \in C_n(A) \subseteq C_n(X)$. Definimos entonces $C^n(X, A)$ como el submódulo de $C^n(X)$ formado por todas las cocadenas relativas a A . Es fácil ver que $C^n(X, A) \cong C_n(X, A)^*$ bajo la definición usual de cadenas relativas a A : $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$.

Notemos que si $c \in C^n(X, A)$ y $\sigma \in C_{n+1}(A)$ entonces $\langle \delta c, \sigma \rangle = \langle c, d\sigma \rangle = 0$ ya que $d\sigma \in C_n(A)$. Esto nos dice que $\delta C^n(X, A) \subseteq C^{n+1}(X, A)$ y por lo tanto $(C^*(X, A), \delta)$ es un complejo de cocadenas. Podemos definir entonces $H^n(X, A)$ como el n -ésimo grupo de cohomología singular del par (X, A) (o de cohomología de X relativa a A) con coeficientes en R , tomando cohomología a dicho complejo al igual que en los casos anteriores.

Dados (X, A) e (Y, B) dos pares topológicos, un morfismo de pares es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Los pares topológicos junto con los morfismos de pares forman una categoría. Dado $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ morfismo de pares induce un morfismo de complejos $f^* : C^*(Y, B) \rightarrow C^*(X, A)$ de la siguiente

te manera. Si $c \in C^n(Y, B)$ y $\sigma \in C_n(X, A)$ definimos $\langle f^*c, \sigma \rangle := \langle c, f_*\sigma \rangle$ donde $f_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ viene dada por $f_*\sigma = f \circ \sigma$ si σ es un n -simplex en X y se extiende luego por linealidad. Se puede ver que f^* conmuta con los diferenciales a partir de que es la adjunta de f_* bajo el pairing \langle, \rangle y de que $f_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ es morfismo de complejos. Si $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ es otro morfismo de pares, entonces se verifica $(g \circ f)^* = f^*g^*$, de modo que al ser también $id^* = id$ deducimos que $*$ es un funtor contravariante. Como tomar cohomología es también functorial, de la categoría de complejos de cocadenas sobre R en la de R -módulos, deducimos que cada morfismo de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce morfismos $f^* : H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X, A)$ functorialmente, de forma contravariante.

Vamos a relacionar ahora a $H^*(X, A)$ con $H^*(X)$ y $H^*(A)$.

Proposición 1.5. *Sea (X, A) un par topológico. Entonces existe una sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \longrightarrow C^*(X, A) \xrightarrow{i} C^*(X) \xrightarrow{j} C^*(A) \longrightarrow 0$$

Donde i viene dada por la inclusión y $j(c) = c|_{C_*(A)} : C_*(A) \rightarrow R$. Ésta induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \longrightarrow H^k(X, A) \xrightarrow{i} H^k(X) \xrightarrow{j} H^k(A) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

Donde el morfismo de conexión $\Delta : H^k(A) \rightarrow H^{k+1}(X, A)$ viene dado de la siguiente manera. Tomamos $j' : C^k(A) \rightarrow C^k(X)$ dada por $\langle j'(c), \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle$ si $\sigma \in C_k(A)$ y $\langle j'(c), \sigma \rangle = 0$ si $\text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$. Dada $c \in Z^k(A)$, vamos a tener entonces que $\Delta([c]) = [\delta j'(c)] \in H^{k+1}(X, A)$.

La exactitud de la sucesión de complejos de cocadenas recién presentada se verifica utilizando la definición de los objetos involucrados; e implica junto al Lema de la serpiente la existencia de la sucesión exacta larga en cohomología así como la forma del morfismo de conexión recién expuesta.

Un resultado fundacional es que si $f, g : X \rightarrow Y$ son dos funciones homotópicas, entonces inducen los mismos morfismos a nivel homología, esto es $f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ (y lo mismo ocurre en cohomología). Existe una versión análoga para morfismos de pares. Dos morfismos $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ se dicen homotópicos si existe un tercer morfismo $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Dicho de otro modo, si existe una homotopía $F : f \simeq g$ tal que $F(A \times I) \subseteq B$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3. *Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ morfismos de pares homotópicos. Entonces $f^* = g^* : H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X, A)$.*

Un resultado muy útil para trabajar con cohomología relativa es Escisión:

Teorema 1.4 (Escisión). *Sea (X, A) un par topológico. Sea $Z \subseteq X$ subespacio tal que $\bar{Z} \subseteq A^0$. Entonces el morfismo de pares $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ dado por la inclusión induce un isomorfismo $i^* : H^*(X, A) \rightarrow H^*(X \setminus Z, A \setminus Z)$.*

Demostración. Ver [Vic94, Thm. 3.12]. □

Una terna de espacios topológicos (X, A, B) consiste de un espacio topológico X y dos subespacios A, B tales que $B \subseteq A \subseteq X$.

Proposición 1.6. *Sea (X, A, B) una terna de espacios topológicos. Entonces existe una sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \longrightarrow C^*(X, A) \xrightarrow{i} C^*(X, B) \xrightarrow{j} C^*(A, B) \longrightarrow 0$$

Que viene dada por las inclusiones $(A, B) \xrightarrow{j} (X, B) \xrightarrow{i} (X, A)$. Esto da origen a una sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \longrightarrow H^k(X, A) \xrightarrow{i} H^k(X, B) \xrightarrow{j} H^k(A, B) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

Si definimos $j' : C^k(A, B) \rightarrow C^k(X, B)$ extendiendo por 0 en los símlices que no caen en A como hicimos en la Proposición 1.5, tendremos nuevamente que dado $c \in Z^k(A, B)$ es $\Delta([c]) = [\delta j'(c)] \in H^{k+1}(X, A)$.

Dado $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X , definimos $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ como el R -módulo libre generado por los n -símlices en X tales que su imagen cae en U_i para algún $i \in I$. La inclusión nos da un morfismo de complejos de cadenas $C_*^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$, el cual es de hecho una equivalencia homotópica (ver [Vic94, Thm. 1.14]). A partir de esto, obtenemos en forma inmediata que i_* induce isomorfismos en homología. Pero por otro lado, dualizando tenemos un morfismo de complejos de cocadenas $i^* : C^*(X) \rightarrow C_{\mathfrak{U}}^*(X) := C_*^{\mathfrak{U}}(X)^*$ que resulta ser también una equivalencia homotópica e induce por lo tanto isomorfismos a nivel cohomología. Podemos sintetizar todo esto en el enunciado del siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sea \mathfrak{U} un cubrimiento por abiertos de X . Entonces $i_* : H_k^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow H_k(X)$ es un isomorfismo para cada $k \in \mathbb{N}_0$, así como también lo es $i^* : H^k(X) \rightarrow H_{\mathfrak{U}}^k(X)$.*

Cerramos esta sección enunciando un resultado importante, que relaciona la homología y la cohomología con coeficientes en un anillo R . Dado un par topológico (X, A) podemos definir un pairing $H^n(X, A) \times H_n(X, A) \rightarrow R$ dado por $\langle c, \sigma \rangle = \langle c', \sigma' \rangle$ para cualesquiera $c' \in Z^n(X, A)$ y $\sigma' \in Z_n(X, A)$ tales que $c = [c']$ y $\sigma = [\sigma']$. Esto induce un morfismo $k : H^n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)^*$ dado por $k(c)(\sigma) = \langle c, \sigma \rangle$. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.6. *Sea X un espacio topológico y supongamos que $H_{n-1}(X; R)$ es libre, tomando coeficientes sobre un dominio de ideales principales R . Entonces $k : H^n(X; R) \rightarrow \text{hom}_R(H_n(X; R), R)$ es un isomorfismo. Vale un resultado análogo para pares (X, A) .*

Este resultado se encuentra así formulado en [MS74, Thm. A.1], pero es de hecho consecuencia de un resultado más general: el Teorema de coeficientes universales

para cohomología, que dice que si tomamos coeficientes sobre un dominio de ideales principales R , entonces $H^n(X; R)$ está determinado por una sucesión exacta que se parte, dada por:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X; R), R) \longrightarrow H^n(X; R) \xrightarrow{k} \text{hom}(H_n(X, R), R) \longrightarrow 0$$

Para una prueba, nos remitimos a [Hat02, Thm. 3.2].

1.2.2. Productos cup y cap

En este apartado y en el próximo seguiremos mayormente el Apéndice A del libro [MS74], y suponemos fijo el anillo R en el que tomamos coeficientes.

Queremos definir una operación $C^m(X) \times C^n(X) \rightarrow C^{m+n}(X)$ entre cocadenas que imite en algún sentido al producto wedge de formas diferenciales. Dadas $c \in C^m(X)$ y $d \in C^n(X)$, definimos la cocadena $c \smile d \in C^{m+n}(X)$ dada por $c \smile d(\sigma) = c(\sigma|_{[v_0, v_1, \dots, v_m]})d(\sigma|_{[v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+n}]})$ para cada símplex $\sigma : \Delta^{m+n} \rightarrow X$. Consideremos la siguiente definición:

Definición 1.6. *Sea σ un n -símplex en un espacio topológico X y sea $j : 0 \leq j \leq n$ un entero. La j -ésima cara frontal de σ se define como $\sigma_F^j = \sigma|_{[v_0, \dots, v_j]}$. La j -ésima cara posterior de σ se define como $\sigma_P^j = \sigma|_{[v_{n-j}, v_{n-j+1}, \dots, v_n]}$.*

En términos de esta definición, $c \smile d(\sigma) = c(\sigma_F^m)d(\sigma_P^n)$.

Esto nos da una operación bilineal $\smile : C^m(X) \times C^n(X) \rightarrow C^{m+n}(X)$ para cada $m, n \in \mathbb{N}_0$, conocida como producto cup. A partir de la asociatividad de dicha operación, podemos ver que $C^*(X) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(X)$ tiene una estructura de R -álgebra graduada con el producto cup extendido por linealidad, cuyo neutro es la cocadena $1 \in C^0(X)$ que vale constantemente 1 en todos los 0-símplices. Vamos a denotar alternativamente $c \smile d = c \cdot d$ al producto cup entre dos cocadenas c y d .

Se puede verificar que dadas dos cocadenas $c \in C^m(X)$ y $d \in C^n(X)$ vale que $\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^m c \smile \delta d$, siendo esta una identidad análoga a la regla de Leibniz para el diferencial exterior del producto wedge de dos formas en una variedad diferenciable. De aquí se puede deducir que si c y d son cociclos, también lo es $c \smile d$ y entonces tomando representantes podemos definir una operación $H^m(X) \times H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X)$ para $m, n \geq 0$ dada por $([c], [d]) \mapsto [c \smile d]$. Con esto podemos hacer de $H^*(X) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X)$ una R -álgebra asociativa y graduada.

Nos interesará definir operaciones entre grupos de cohomología relativa a través del producto cup. Para eso, comencemos observando que si $c \in C^m(X, A)$ y $d \in C^n(X)$ entonces $c \smile d \in C^{m+n}(X, A)$; lo cual nos permite definir una aplicación bilineal $H^m(X, A) \times H^n(X, A) \rightarrow H^{m+n}(X, A)$ de manera análoga a lo que hicimos en el párrafo anterior. Lo que vamos a ver es que si $c \in H^m(X, A)$, $d \in H^n(X, B)$ y A, B son abiertos relativos a $A \cup B$ entonces podemos ver a $c \smile d$ como un elemento de $H^{m+n}(X, A \cup B)$.

Con ese propósito, dado un espacio topológico X y dos subespacios $A, B \subseteq X$ definimos $\hat{C}^k(X; A, B) := C^k(X, A) \cap C^k(X, B)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Es claro que

$(\hat{C}^*(X; A, B), \delta)$ es un subcomplejo de $(C^*(X), \delta)$, cuya cohomología en el lugar k notaremos $H^k(X; A, B)$. Observemos que si $c \in C^m(X, A)$ y $d \in C^n(X, B)$ entonces $c \smile d \in \hat{C}^{m+n}(X; A, B)$, de modo que a nivel cohomología el producto cup nos da un morfismo $H^m(X, A) \otimes H^n(X, B) \rightarrow \hat{H}^{m+n}(X; A, B)$. Lo que vamos a querer entonces es construir un isomorfismo $H^k(X; A, B) \cong H^k(X, A \cup B)$ para cada $k \geq 0$. Para eso, consideramos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C^*(X, A \cup B) \xrightarrow{i} \hat{C}^*(X; A, B) \xrightarrow{j} \hat{C}^*(A \cup B; A, B) \longrightarrow 0$$

Donde i viene dada por la inclusión y j por la restricción a $C_*(A \cup B)$. Usando el **Teorema 1.5** para el cubrimiento $\mathfrak{U} = \{A, B\}$ del espacio topológico $A \cup B$, se prueba que el complejo $\hat{C}^*(A \cup B; A, B)$ es acíclico. A partir de esto y de la sucesión exacta recién presentada, deducimos que $i : H^k(X, A \cup B) \rightarrow H^k(X; A, B)$ es un isomorfismo para todo $k \geq 0$, permitiéndonos definir $\smile : H^m(X, A) \otimes H^n(X, B) \rightarrow H^{m+n}(X, A \cup B)$.

Vamos a definir ahora el producto cap. Nos basaremos en [Hat02] ya que venimos utilizando su convención de signos, distinta de la de [MS74]. Sea X un espacio topológico y sean $0 \leq m \leq n$ dos números enteros. Tenemos una operación $\frown : C_n(X) \otimes C^m(X) \rightarrow C_{n-m}(X)$ definida del siguiente modo: si $c \in C^m(X)$ es una cocadena y $\sigma \in C_n(X)$ es un n -simplex entonces $\sigma \frown c = \langle c, \sigma_F^m \rangle \sigma_P^{n-m}$ extendiéndose a las restantes cadenas por linealidad. Dadas una cadena $\tau \in C_n(X)$ y una cocadena $c \in C^m(X)$, $\tau \frown c$ puede ser caracterizada como la única $n - m$ -cadena en X tal que

$$\langle c', \tau \frown c \rangle = \langle c \smile c', \tau \rangle$$

Para toda $c' \in C^{n-m}(X)$. A partir de esto y usando que una cadena $\mu \in C_l(X)$ es nula si y sólo si para toda cocadena $a \in C^l(X)$ vale que $\langle a, \mu \rangle = 0$, se pueden probar las identidades

1. $\tau \frown (c \smile c') = (\tau \frown c) \frown c'$
2. $\tau \frown 1 = \tau$
3. $d(\tau \frown c) = (-1)^{|c|}(d\tau \frown c - \tau \frown \delta c)$

A partir de la última propiedad, deducimos que tenemos una operación bien definida $\frown : H_n(X) \otimes H^m(X) \rightarrow H_{n-m}(X)$ dada por $[\tau] \frown [c] = [\tau \frown c]$.

Una aplicación del producto cap es la dualidad de Poincaré (en su versión con homología singular). Sea M una variedad cerrada y orientada (nos restringimos al caso compacto por simplicidad, pero el teorema vale con igual generalidad en variedades no compactas, tomando cohomología con soporte compacto; al igual que en la versión en términos de cohomología de de Rham). Consideramos $\eta_M \in H_n(M)$ al generador de orientación de M (que será definido en la **Sección 1.2.4**).

Teorema 1.7 (Dualidad de Poincaré). *La aplicación $c \mapsto \eta_M \frown c$ define isomorfismos $H^i(X) \rightarrow H_{n-i}(X)$ para todo $0 \leq i \leq n$.*

En [MS74, Appx. A] y [Hat02, Thm. 3.30] se presentan demostraciones del **Teorema 1.7**, utilizando ambos argumentos de tipo Mayer-Vietoris. El producto cap también nos servirá para extender la demostración del Isomorfismo de Thom (versión 2) a anillos arbitrarios, y para enunciar una versión en términos de homología, como veremos en la **Sección 1.2.5**.

1.2.3. Producto cross

El objetivo de esta sección es definir el producto cross $\times : H^m(X, A) \times H^n(Y, B) \rightarrow H^{m+n}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ entre clases de cohomología relativa, que nos servirá luego para construir una clase fundamental $e^n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ para cada $n \geq 1$ (notamos aquí $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) tal que se tenga un isomorfismo

$$\begin{aligned} H^m(X) &\rightarrow H^{m+n}(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) \\ a &\mapsto a \times e^n \end{aligned}$$

El cual nos permitirá probar el Isomorfismo de Thom en caso de que el fibrado $E \xrightarrow{\pi} X$ sea trivial, como veremos más adelante.

Sean (X, A) e (Y, B) dos pares topológicos, con $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subespacios abiertos. Consideramos los morfismos de pares $\pi_1 : (X \times Y, A \times Y) \rightarrow (X, A)$ y $\pi_2 : (X \times Y, X \times B) \rightarrow (Y, B)$ dados por las proyecciones en la primer y segunda coordenada respetivamente. Si $a \in H^m(X, A)$ y $b \in H^n(Y, B)$ definimos su producto cross $a \times b := \pi_1^* a \sim \pi_2^* b$ que pertenece a $H^{m+n}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ por lo visto en la sección anterior. Notamos $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$. El producto cross nos define entonces una operación

$$\times : H^m(X, A) \times H^n(Y, B) \rightarrow H^{m+n}((X, A) \times (Y, B))$$

De manera similar, podemos definir el producto cross entre dos cocadenas singulares. Dadas $a \in C^m(X, A)$ y $b \in C^n(Y, B)$ definimos como antes $a \times b := \pi_1^* a \sim \pi_2^* b \in \hat{C}^{m+n}(X \times Y; A \times Y, X \times B)$. Vale la relación esperada con el producto cross anterior: si $a \in Z^n(X, A)$ y $b \in Z^m(Y, B)$ entonces $[a] \times [b] = [a \times b]$.

Vale que $[(X, A) \times (Y, B)] \times (Z, C) = (X, A) \times [(Y, B) \times (Z, C)]$ y además si $a \in H^m(X, A)$, $b \in H^n(Y, B)$, $c \in H^p(Z, C)$ entonces $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Utilizando lo anterior, en [MS74, p. 265] se elige un elemento específico $e = e^1 \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$ y luego se define inductivamente $e^n = e^{n-1} \times e \in H^n((\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}_0^{n-1}) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$. No detallaremos cómo se hace esa elección, puesto que no nos interesa cuáles son los elementos e^n en sí, sino que verifican lo siguiente:

Teorema 1.8. *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subespacio abierto. Entonces la aplicación $H^m(X, A) \rightarrow H^{m+n}((X, A) \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n))$ dada por $a \mapsto a \times e^n$ define un isomorfismo para cada $m \geq 0$.*

La demostración utiliza las propiedades ya enunciadas de los productos cup, cap y cross, junto a algunos argumentos de álgebra homológica; y puede verse en [MS74, Thm. A.5].

1.2.4. Orientación y (co)homología

Recordemos que por lo visto en la **Parte I** de este capítulo, cada orientación de \mathbb{R}^n determina un generador de $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ (aquella clase $[\omega]$ tal que para la correspondiente orientación verifique $\int_M \omega = 1$). Nuestro objetivo ahora es hacer una construcción análoga en términos de homología singular, con coeficientes en un anillo arbitrario R (que suponemos fijo por ahora y omitimos en la notación). Supongamos que tenemos una orientación fija en \mathbb{R}^n . Sea $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ un n -simplex linealmente embebido en \mathbb{R}^n con baricentro en 0 , es decir: v_0, \dots, v_n son $n+1$ puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^n tales que $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i = 0$, y $\sigma = \{\sum_{i=0}^n t_i v_i : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$. Decimos que σ es un simplex orientado si $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ es base orientada de \mathbb{R}^n . En caso de no aclararse, los símlices que aparezcan de aquí en más se asumirán centrados en 0 y linealmente embebidos. Lo que queremos es que la clase de un n -simplex orientado σ sea el generador de algún grupo homología, con el objetivo de identificar las orientaciones de \mathbb{R}^n con los generadores de ese grupo, al igual que como lo hicimos antes con la cohomología de soporte compacto.

Como $H_n(\mathbb{R}^n) = 0$, no nos servirá el grupo $H_n(\mathbb{R}^n)$ para nuestro propósito. Sin embargo, podemos considerar $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \cong R$ que contiene a $[\bar{\sigma}]$ dado que $\partial\sigma \in C_{n-1}(\mathbb{R}_0^n)$. De la sucesión exacta larga del par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ tenemos que para cada $n \geq 2$ la aplicación $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathbb{R}_0^n)$ es un isomorfismo. Dado σ un n -simplex, tenemos que $\partial\sigma \subseteq \mathbb{R}_0^n$ es retracto por deformación fuerte y que $[\partial\sigma] \in H_{n-1}(\partial\sigma)$ es un generador; de donde $[\bar{\sigma}] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ es generador al ser $\partial([\bar{\sigma}]) = [\partial\sigma]$. Si σ es además orientado, decimos que $[\bar{\sigma}]$ es el generador de orientación de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$. Si $n = 1$ se puede arribar a la misma definición analizando con cuidado la sucesión exacta larga del par $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$.

Tenemos que ver que lo anterior está bien definido, es decir que si σ y τ son dos símlices orientados en \mathbb{R}^n con baricentro en 0 entonces $[\bar{\sigma}] = [\bar{\tau}]$. El tratamiento que estamos haciendo de este tema está basado en [MS74, §9] donde no se aborda este aspecto (la buena definición), así que presentaremos una demostración propia. La estrategia será usar el siguiente resultado:

Lema 1.2. *Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo orientado tal que $h(0) = 0$. Entonces el morfismo $h_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ inducido por h en homología es la identidad.*

El lema anterior es consecuencia de otro que enunciamos a continuación, cuya demostración es idéntica a la del [Mil65, Lemma 5.7] ignorando la condición de transversalidad allí presentada.

Lema 1.3. *Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo orientado tal que $h(0) = 0$. Entonces existe una isotopía $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

1. $H_0 = h$ y $H_1 = id$.
2. $H(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

La isotopía H del **Lema 1.3** nos da una homotopía entre los morfismos de pares $id, h : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$, de modo que $h_* = id_* = id : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$. A partir de esto, si tomamos $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ y $\tau = [w_0, \dots, w_n]$ dos n -símplices orientados, linealmente embebidos en \mathbb{R}^n y con baricentro en 0, entonces la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(v_i - v_0) = w_i - w_0$ para todo $1 \leq i \leq n$ (y trivialmente para $i = 0$) es un isomorfismo lineal orientado tal que $Tv_i = w_i$ para todo $0 \leq i \leq n$ (usando la condición de que el baricentro de ambos símplices es 0). Luego, T está bajo las hipótesis del **Lema 1.2** y así $[\bar{\sigma}] = T_*([\bar{\sigma}]) = [\bar{T} \circ \bar{\sigma}] = [\bar{\tau}]$ en $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$, como queríamos.

Notemos η al (bien definido) generador de orientación de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$. De lo anterior se desprende que si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo orientado tal que $h(0) = 0$, entonces $h_*(\eta) = \eta$. Esto a su vez sirve para probar que si tomamos un n -simplex σ linealmente embebido y orientado, tal que $0 \in \overset{\circ}{\sigma}$ sin necesariamente ser su baricentro, entonces $[\bar{\sigma}] = \eta$ (construyéndonos un difeomorfismo apropiado en \mathbb{R}^n que fije el 0 y mande σ en otro simplex orientado y embebido τ que tenga al 0 como baricentro). Con estas dos herramientas, se puede ver la equivalencia entre la noción usual de orientación en variedades (dar una base orientada a cada tangente, que varíe suavemente) y la noción en términos de homología que presentaremos a continuación.

Si $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ es un n -simplex linealmente embebido con baricentro en 0 no orientado (es decir, $\{v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$ no es base orientada de \mathbb{R}^n de acuerdo a la orientación prefijada), entonces $\tau = [v_0, \dots, v_{n-2}, v_n, v_{n-1}]$ es un n -simplex orientado y $[\sigma] = -[\tau] = -\eta$. Es decir que si σ y τ linealmente embebidos tienen la misma orientación, sus clases de homología relativa coinciden; y si no una es la opuesta de la otra. Por lo tanto, cada orientación determina un generador de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ (como R -módulo libre de rango 1) y el generador correspondiente a cada una de ellas es el opuesto del que corresponde a la orientación opuesta, exactamente con lo que sucedía en la cohomología con soporte compacto. Si $R = \mathbb{Z}$ podemos decir incluso algo más: como los únicos dos generadores de \mathbb{Z} como \mathbb{Z} -módulo son 1 y -1 , y dado σ un n -simplex linealmente embebido en \mathbb{R}^n y con baricentro en 0 $[\bar{\sigma}]$, $-[\bar{\sigma}]$ son dos generadores distintos de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \cong \mathbb{Z}$, concluimos que son los únicos generadores. Es decir que dar una orientación es equivalente a elegir un generador del \mathbb{Z} -módulo $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$: una vez elegido un tal generador η , deberá ser $\eta = \pm[\bar{\sigma}]$ de modo que el signo determinará si σ es orientado o no, y eso a su vez determinará la orientación el espacio.

A partir de esto, podemos definir orientación en una variedad en términos de homología. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , $x \in M$. Si tomamos una carta (U, φ) en x con $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$, tenemos que por Escisión $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$. Por lo tanto, diremos que dar una orientación en x es dar un generador $\eta_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ (tomando coeficientes en \mathbb{Z}). Por lo antes discutido, una vez que damos una orientación en x estamos definiendo una orientación para el abierto U antes mencionado. Esto nos lleva a una noción de

orientación que será equivalente a la usual, pero formulada en términos de homología. Dar una orientación en M será elegir una orientación η_x para cada $x \in M$, que varíe de forma continua en el siguiente sentido: para cada $x \in M$ existe un entorno compacto N y una clase $\eta_N \in H_n(M, M \setminus N)$ tal que $\rho_y(\eta_N) = \mu_y$ para todo $y \in N$ (donde $\rho_y : H_n(M, M \setminus N) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\})$ viene dado por la identidad como morfismo de pares).

Dada una variedad orientada M y un subespacio compacto $K \subseteq M$, existe una única clase $\eta_K \in H_n(M, M \setminus K)$ tal que $\rho_y(\eta_K) = \mu_y$ para todo $y \in K$ (este es precisamente el [MS74, Thm. A.8]). En consecuencia, si M es además compacta podemos tomar $K = M$ y deducir que existe una única clase $\eta_M \in H_n(M)$ tal que $\rho_y(\eta_M) = \eta_y$ para todo $y \in M$. Tal η_M es la clase de homología fundamental de la variedad. En estos términos, si M es cerrada, conexa y orientable; elegir una orientación equivale a elegir un generador de $H_n(M)$ (que será la clase de homología fundamental de M , también llamado generador de orientación de M). Cuando no sea conexa, habrá que elegir un generador por cada componente conexa, al igual que con la definición de orientación usual.

Valen consideraciones similares para una variedad orientada con borde M , pero restringiéndonos a los puntos $x \in M \setminus \partial M$. En este caso, dado un subespacio compacto $K \subseteq M$ existe una única clase $\eta_K \in H_n(M, (M \setminus K) \cup \partial M)$ tal que $\rho_x(\eta_K) = \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ para todo $x \in K \setminus \partial M$. En particular, si M es compacta, hay una única clase de homología fundamental $\eta_M \in H_n(M, \partial M)$ tal que $\rho_x(\eta_M) = \eta_x$ para todo $x \in M \setminus \partial M$ (ver [MS74, p. 274]). Muchas veces notaremos $[M] = \eta_M$. Las definiciones correspondientes a variedades con y sin borde son compatibles, en el sentido de que si $\partial : H_n(M, \partial M) \rightarrow H_{n-1}(\partial M)$ es el inducido por la sucesión del par $(M, \partial M)$ entonces $\partial([M]) = [\partial M]$.

Supongamos ahora que tenemos un fibrado orientado $E \xrightarrow{\pi} X$. Dado un anillo conmutativo con unidad R , la orientación de cada fibra $F = \pi^{-1}(x)$ determina por lo antes visto un generador η_F de $H_n(F, F_0)$ con coeficientes en R , donde $F_0 = F \setminus \{0\}$. Supongamos por un momento que R es un DIP (dominio de ideales principales). Entonces como $H_{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) = 0$, por el **Teorema 1.6** tenemos que $k : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)^*$ dado por $c \mapsto \langle c, \cdot \rangle$ es un isomorfismo. En consecuencia, podemos definir $\mu_F \in H^n(F, F_0)$ como la única clase tal que $k(\mu_F)(\eta_F) = 1$.

La definición anterior puede extenderse a anillos que no sean necesariamente dominios de ideales principales. Para ello, podemos considerar la clase $\mu_F^{\mathbb{Z}}$ definida recién con coeficientes en \mathbb{Z} y tomando el único morfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow R$ para un R conmutativo con unidad arbitrario definir $\mu_F^R := \phi^*(\mu_F^{\mathbb{Z}})$ como la imagen de $\mu_F^{\mathbb{Z}}$ bajo el morfismo inducido $\phi^* : H^n(F, F_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(F, F_0; R)$. De la definición y el hecho de que $\eta_F^R = \phi_*(\eta_F^{\mathbb{Z}})$ se deduce que $k(\mu_F^R)(\eta_F^R) = 1$ sobre cualquier anillo R y por ende esta definición extiende a la anterior cuando R es un DIP. Veamos que μ_F^R es generador de $H^n(F, F_0; R)$ (el cual es libre y de rango 1) independientemente de si R es un DIP o no. Esto se debe a esta sencilla observación: si $\beta_F \in H^n(F, F_0; R)$ es un generador y $\mu_F^R = \lambda\beta_F$, entonces $\langle \mu_F^R, \eta_F^R \rangle = \lambda \langle \beta_F, \eta_F^R \rangle = 1$ de donde $\lambda \in R$ es

una unidad, y por ende μ_F^R es también generador.

Diremos que μ_F es el generador de orientación de $H^n(F, F_0)$, el cual jugará un rol análogo a lo que ocurría en la **Parte I** de este capítulo (en aquel caso se trataba de la clase de una forma que integraba 1 sobre la fibra).

1.2.5. Isomorfismo de Thom, versión 2

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar una versión del Isomorfismo de Thom en términos de cohomología singular. Como ya adelantamos, los grupos de cohomología relativa $H^n(F, F_0)$ cumplirán el rol que en la primera versión cumplía $H_c^n(F)$, y cada $\mu_F \in H^n(F, F_0)$ cumplirá el rol del generador de orientación $[\omega] \in H_c^n(F)$ tal que $\int_M \omega = 1$. Si bien aquí no tenemos la integración a lo largo de la fibra como para construir explícitamente la inversa π_* del isomorfismo de Thom, recordemos que hemos caracterizado a la clase de Thom como la única clase que se restringe al generador de orientación en cada fibra F del fibrado; y al Isomorfismo de Thom como “hacer producto wedge con la clase de Thom”. Aplicando la dualidad con la cohomología singular, se obtiene el enunciado del siguiente teorema (donde notamos $E_0 = E \setminus i(M)$ con $i : M \rightarrow E$ la sección nula).

Teorema 1.9 (Isomorfismo de Thom, versión 2). *Sea X un espacio topológico, $\pi : E \rightarrow X$ un fibrado vectorial orientado de rango n . Entonces existe una y sólo una clase $\mu \in H^n(E, E_0)$ cuya restricción a $H^n(F, F_0)$ es μ_F para cada fibra F (tomando los coeficientes sobre un anillo conmutativo con unidad R a elección). Más aún, la aplicación $a \mapsto \pi^*a \smile \mu$ nos da un isomorfismo $\mathcal{T} : H^m(X) \rightarrow H^{m+n}(E, E_0)$ para todo $m \geq 0$ y $H^i(E, E_0) = 0$ para todo $0 \leq i < n$.*

Demostración. Separando a X en sus componentes arcoconexas, es inmediato ver que alcanzará con probar el teorema para espacios base arcoconexos, así que X se asumirá arcoconexo a lo largo de toda la demostración. Vamos a asumir además en la mayor parte de la demostración que el anillo R es un DIP (o incluso un cuerpo en ciertas partes, lo cual será oportunamente detallado) ya que lo necesitaremos para poder hacer ciertas manipulaciones algebraicas; y podremos luego extender nuestros resultados a los restantes anillos conmutativos usando el mapping cone de un complejo libre. La demostración seguirá las ideas de [MS74, Chap. 10] aunque presentadas muchas veces de otra manera e intentando clarificar y/o explayarse más sobre ciertos detalles. Se usará un argumento de tipo Mayer-Vietoris y estará dividida en varios pasos.

Paso 1. Supongamos que el fibrado es trivial, con el espacio base X arcoconexo; y sea $\Phi : E \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ una trivialización. Fijamos en \mathbb{R}^n la orientación canónica (es decir, aquella en la que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base orientada), induciendo así una orientación en $X \times \mathbb{R}^n$. Utilizando un argumento de conexión, se deduce que Φ preserva orientación en todo punto o la invierte en todo punto. Componiendo de ser necesario con un isomorfismo $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ que invierta orientación, podemos suponer

que $\Phi : E \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ es isomorfismo orientado. Dado que tales morfismos mandan generadores de orientación en generadores de orientación, nos alcanzará con ver que $X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} X$ con la orientación antes definida cumple el teorema.

Consideremos la proyección $\tau : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que restringida a cada fibra nos da un isomorfismo orientado. Luego si $\mu_1 \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ es el generador de orientación y notamos $\mu := \tau^*(\mu_1)$ es inmediato que μ se restringe al generador de orientación de cada fibra. Sabemos por otra parte por el **Teorema 1.8** que la aplicación $H^0(X) \xrightarrow{\times e^n} H^n(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n)$ es un isomorfismo, de modo que $H^n(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n)$ es libre de rango 1 con generador τ^*e^n . Como para cada fibra F del fibrado $i^* : H^n(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) \rightarrow H^n(F, F_0)$ manda $\mu \mapsto \mu_F$, i^* es un epimorfismo de R -módulos libres de rango 1. Al ser R un *DIP*, i^* debe ser un isomorfismo; lo cual prueba la unicidad de μ y también que es generador de $H^n(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n)$.

Por lo tanto existe $\lambda \in R$ una unidad tal que $\mu = \lambda\tau^*e^n$, lo cual junto al **Teorema 1.8** nos permite deducir que la aplicación $\mathcal{S} : H^m(X) \rightarrow H^{m+n}(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n)$ dada por $a \mapsto \pi^*a \smile \mu$ es un isomorfismo.

Veamos ahora que $H^i(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) = 0$ para todo $0 \leq i < n$. Comenzamos analizando el caso $i = 0$. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) \xrightarrow{i^*} H^0(X \times \mathbb{R}^n) \xrightarrow{j^*} H^0(X \times \mathbb{R}_0^n)$$

Para $n \geq 2$, como \mathbb{R}^n y \mathbb{R}_0^n son arcoconexos y también lo es X , el morfismo j^* inducido por la inclusión resulta ser un isomorfismo; y en consecuencia $H^0(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) = 0$. Omitimos el caso $n = 1$.

A partir de esto, vamos a probar por inducción en $n \in \mathbb{N}$ que $H^i(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) = 0$ para todo $0 \leq i < n$. Ya tenemos el caso base $n = 1$. Supongamos que vale para n . Por el **Teorema 1.8**,

$$H^i(X \times \mathbb{R}^n, X \times \mathbb{R}_0^n) \xrightarrow{\times e} H^{i+1}(X \times \mathbb{R}^{n+1}, X \times \mathbb{R}_0^{n+1})$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$. Usando la hipótesis inductiva, esto implica que $H^i(X \times \mathbb{R}^{n+1}, X \times \mathbb{R}_0^{n+1}) = 0$ para todo $1 \leq i < n + 1$. Como vimos al principio que también $H^0(X \times \mathbb{R}^{n+1}, X \times \mathbb{R}_0^{n+1}) = 0$, vale el paso inductivo.

Paso 2. Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento por abiertos de X , y supongamos que el teorema vale en E^U , E^V y $E^{U \cap V}$ (donde dado $W \subseteq X$ notamos $E^W = E|_W$). Por Mayer-Vietoris, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^n(E, E_0) \xrightarrow{\alpha} H^n(E^U, E_0^U) \oplus H^n(E^V, E_0^V) \xrightarrow{\beta} H^n(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V})$$

Al ser por hipótesis $H^{n-1}(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V}) = 0$. Sean $\mu_1 \in H^n(E^U, E_0^U)$, $\mu_2 \in H^n(E^V, E_0^V)$ y $\mu_3 \in H^n(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V})$ las clases de Thom de los fibrados E^U , E^V y $E^{U \cap V}$ respectivamente. Entonces como las restricciones a $E^{U \cap V}$ de μ_1 y μ_2 son ambas iguales a μ_3 , resulta que $\beta(\mu_1, \mu_2) = 0$ y por ende al ser α un monomorfismo existe una única $\mu \in H^n(E, E_0)$ tal que $\alpha(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, resultando ser μ la única clase que se restringe al generador de cada fibra.

Para probar que la aplicación $a \mapsto \pi^*a \smile \mu$ nos da un isomorfismo $H^m(X) \rightarrow$

$H^{m+n}(E, E_0)$ para todo $m \geq 0$, considereramos el siguiente morfismo de sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccc} H^{m-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^m(X) & \longrightarrow & H^m(U) \oplus H^m(V) & \longrightarrow & H^m(U \cap V) \\ \downarrow \sim_{\mu_3} & & \downarrow \sim_{\mu} & & \downarrow \sim_{\mu_1 \oplus \sim_{\mu_2}} & & \downarrow \sim_{\mu_3} \\ H^{m+n-1}(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V}) & \longrightarrow & H^{m+n}(E, E_0) & \longrightarrow & H^{m+n}(E^U, E_0^U) \oplus H^{m+n}(E^V, E_0^V) & \longrightarrow & H^{m+n}(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V}) \end{array}$$

Por el Lema de los 5 tendremos que $H^m(X) \xrightarrow{\sim_{\mu}} H^{m+n}(E, E_0)$ es un isomorfismo para todo $m \geq 0$. Por último, dado $0 \leq i < n$, de la exactitud de

$$H^{i-1}(E^{U \cap V}, E_0^{U \cap V}) \longrightarrow H^i(E, E_0) \longrightarrow H^i(E^U, E_0^U) \oplus H^i(E^V, E_0^V)$$

y de nuestra hipótesis, deducimos que $H^i(E, E_0) = 0$.

Paso 3. Supongamos que X admite un cubrimiento finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tal que para todo $W = \cap_{j=1}^r U_{i_j}$ que se obtiene intersecando a algunos de los elementos de \mathfrak{U} el fibrado E^W verifica el Teorema. Entonces por inducción en k (tal como hicimos en la **Parte I** del capítulo) se puede probar que el fibrado E también cumple el Teorema. En particular, si X es compacto, podemos encontrar un cubrimiento finito \mathfrak{U} de X donde cada abierto de U es tal que E^U es trivial; de donde para todo W que se obtiene intersecando algunos de los elementos de \mathfrak{U} el fibrado E^W cumplirá el teorema (por ser trivial) y por ende el fibrado E sobre X lo cumplirá.

Paso 4. Queremos pasar ahora de los subespacios compactos a todo el espacio X . Para eso, la idea será ver la (co)homología de un espacio como el límite de las (co)homologías de sus subespacios compactos. Fijemos $j \geq 0$. Sea $\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C \text{ es compacto}\}$. \mathcal{C} tiene estructura de conjunto dirigido, con el orden dado por la inclusión (al ser la unión de dos subespacios compactos un subespacio compacto). Dados $C, C' \in \mathcal{C}$ tales que $C \leq C'$, tenemos un morfismo natural $\rho_{CC'} : H_j(C) \rightarrow H_j(C')$ inducido por la inclusión. Esto nos da un sistema dirigido $\{H_j(C), \rho_{CC'}\}$ sobre \mathcal{C} . Utilizando que toda cadena en X lo es en algún subespacio compacto $C \subseteq X$, se puede probar que

$$\varinjlim H_j(C) \cong H_j(X)$$

Lo cual es válido tomando coeficientes sobre un anillo arbitrario R . De manera similar, considerando el sistema dirigido $\{H_j(E^C, E_0^C), \rho_{CC'}\}$ (donde notamos de igual modo $\rho_{CC'}$ a los morfismos en homología inducidos por las inclusiones $(E^C, E_0^C) \rightarrow (E^{C'}, E_0^{C'})$ para cada $C \leq C'$), y usando esta vez que toda cadena singular en E es cadena singular en E^C para algún subespacio $C \subseteq X$ compacto, se demuestra que tomando coeficientes sobre cualquier anillo

$$\varinjlim H_j(E^C, E_0^C) \cong H_j(E, E_0)$$

Dualizando obtenemos que

$$\varprojlim \text{hom}_R(H_j(C), R) \cong \text{hom}_R(H_j(X), R)$$

Y el resultado análogo

$$\varprojlim \text{hom}_R(H_j(E^C, E_0^C), R) \cong \text{hom}_R(H_j(E, E_0), R)$$

La intención de dualizar es obtener un resultado similar para cohomología. Para eso, vamos a pedir por ahora que R sea un cuerpo, para luego extender los resultados obtenidos a anillos arbitrarios. Esto nos garantiza que el morfismo $k : H^j(Y) \rightarrow$

$\text{hom}_R(H_j(Y), R)$ dado por $c \mapsto \langle c, \cdot \rangle$ sea un isomorfismo para todo espacio topológico Y (por el **Teorema 1.6**), lo cual induce un isomorfismo entre los sistemas inversos $\{H^j(C), \varphi_{CC'}\}$ y $\{\text{hom}_R(H_j(C), R), \rho_{CC'}^t\}$ siendo $\varphi_{CC'} : H^j(C') \rightarrow H^j(C)$ el inducido por la inclusión para cada $C \leq C'$. Esto, junto con el isomorfismo $k : H^j(X) \rightarrow \text{hom}_R(H_j(X), R)$, lo antes observado y la propiedad universal del límite inverso nos da un isomorfismo $\varprojlim H^j(C) \cong H^j(X)$. De manera análoga, $\varprojlim H^j(E^C, E_0^C) \cong H^j(E, E_0)$.

Teniendo esto y tomando $j = n$, la clase de Thom para el fibrado E será la única clase $\mu \in H^n(E, E_0)$ que se restringe a la clase de Thom $\mu_C \in H^n(E^C, E_0^C)$ para cada subespacio compacto $C \subseteq X$, teniendo la existencia y unicidad garantizadas.

Dado $m \geq 0$, el morfismo entre los sistemas dirigidos $\{H^m(C), \varphi_{CC'}\}$ y $\{H^{m+n}(E^C, E_0^C), \varphi_{CC'}\}$ dado por los isomorfismos $H^m(C) \xrightarrow{\sim \mu_C} H^{m+n}(E^C, E_0^C)$ cumple que para cada $C \in \mathcal{C}$ conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} H^m(C) & \xleftarrow{\varphi_C} & H^m(X) \\ \downarrow \sim \mu_C & & \downarrow \sim \mu \\ H^{m+n}(E^C, E_0^C) & \xleftarrow{\varphi_C} & H^{m+n}(E, E_0) \end{array}$$

Siendo entonces $\sim \mu$ un isomorfismo por la propiedad universal del colímite. Por último, dado $0 \leq i < n$, como sabemos que $H^i(E, E_0) = \varprojlim H^i(E^C, E_0^C)$ y que $H^i(E^C, E_0^C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$ por lo probado en los pasos anteriores, deducimos que $H^i(E, E_0) = 0$. Esto completa la demostración del teorema en el caso de que R sea un cuerpo. Veamos ahora cómo extenderla.

Siguiendo los pasos 1, 2 y 3 de esta demostración se puede probar que $H_i(E^C, E_0^C; R) = 0$ para todo $0 \leq i \leq r$ y todo $C \in \mathcal{C}$, tomando coeficientes en un anillo R arbitrario (para el caso $E = X \times \mathbb{R}^n$ puede usarse la fórmula de Künneth en lugar del argumento inductivo usado mediante el producto cross), de donde se deduce tomando límite directo que $H_i(E, E_0; R) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$. Así, si tomamos $R = \mathbb{Z}$, como $H_{n-1}(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0$ tendremos que $k : H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(E, E_0; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ es un isomorfismo y lo mismo ocurrirá para todos los E^C , de modo que podemos concluir igual que antes que $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) = \varprojlim H^n(E^C, E_0^C; \mathbb{Z})$, y de aquí deducir la existencia y unicidad de la clase de Thom $\mu^{\mathbb{Z}}$ de E con coeficientes en \mathbb{Z} . La imagen μ^R de $\mu^{\mathbb{Z}}$ en $H^n(E, E_0; R)$ se restringirá al generador de orientación μ_F^R de cada fibra (dado que la restricción a las fibras conmuta con los morfismos $\phi^* : H^n(\cdot; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\cdot; R)$ inducidos por el único morfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow R$), tomando coeficientes en un R arbitrario. Vamos a probar que los morfismos $\mathcal{T} : H^m(X; R) \xrightarrow{\sim \mu^R} H^{m+n}(E, E_0; R)$ son isomorfismos para todo $m \geq 0$. Para ello, necesitamos una pequeña construcción algebraica y un lema técnico al respecto.

Definición 1.7. *Un complejo libre sobre \mathbb{Z} es un complejo de cadenas de \mathbb{Z} -módulos (C_*, d) tal que C_k es un \mathbb{Z} -módulo libre para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Dado un anillo conmutativo con unidad R , si definimos $C_k^R = C_k \otimes_{\mathbb{Z}} R$ y $d^R = d \otimes id$ obtenemos un complejo de cadenas (C_*^R, d^R) sobre el anillo R . Para cada $k \in \mathbb{Z}$, vamos a notar $H_k(C_*; R)$ al k -ésimo R -módulo de homología de (C_*^R, d^R) (y usaremos la notación $H^k(C_*; R)$ para la cohomología de su complejo dual).

Notemos que si $f : (C_*, d) \rightarrow (\tilde{C}_*, \tilde{d})$ es morfismo de complejos de \mathbb{Z} -módulos; tensorizando con R se obtienen morfismos de complejos de R -módulos $f : (C_*^R, d^R) \rightarrow (\tilde{C}_*^R, \tilde{d}^R)$ y por lo tanto morfismos entre las homologías $f_* : H_*(C_*; R) \rightarrow H_*(\tilde{C}_*; R)$ (y las cohomologías, respectivamente). Tenemos el siguiente lema:

Lema 1.4. *Sea $f : (C_*; d) \rightarrow (\tilde{C}_*; \tilde{d})$ un morfismo entre dos complejos libres sobre \mathbb{Z} . Si f induce isomorfismos en cohomología*

$$f^* : H^k(C_*; R) \rightarrow H^k(\tilde{C}_*; R)$$

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ siempre que el anillo R de coeficientes es un cuerpo, entonces f induce isomorfismos en homología y cohomología con coeficientes en cualquier anillo R .

La demostración del lema utiliza la construcción del mapping cone de un complejo libre, y se puede encontrar en [MS74, Lemma 10.6]. Vamos a usarlo para extender el **Teorema 1.9** a anillos arbitrarios. La idea será obtener el morfismo de Thom $\mathcal{T} : H^m(X; R) \rightarrow H^{m+n}(E, E_0; R)$ dado por $c \mapsto c \smile \mu^R$ como el inducido por un morfismo $f : C_{*+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow C_*(X; \mathbb{Z})$ de complejos libres sobre \mathbb{Z} .

Fijamos por el momento el anillo R y lo omitimos en la notación. Tomemos un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} X$ de rango n . Sea $\mu \in Z^n(E, E_0) \subseteq C^n(E)$ un representante clase de Thom del fibrado con coeficientes en R . Consideremos el siguiente diagrama:

$$C_{m+n}(E) \xrightarrow{\smile \mu} C_m(E) \xrightarrow{\pi_*} C_m(X)$$

Como el primer morfismo se anula en $C_{m+n}(E_0)$, induce una aplicación $\varphi : C_{m+n}(E, E_0) \rightarrow C_m(E)$ que nos permite definir

$$f_m : C_{m+n}(E, E_0) \xrightarrow{\varphi} C_m(E) \xrightarrow{\pi_*} C_m(X)$$

como la composición $f_m = \pi_* \circ \varphi$. Dualizando obtenemos

$$f_m^t : C^m(X) \xrightarrow{\pi^*} C^m(E) \xrightarrow{\varphi^t} C^{m+n}(E, E_0)$$

Notemos que $\varphi^t(c)(\bar{\sigma}) = c(\varphi(\bar{\sigma})) = \langle c, \sigma \frown \mu \rangle = \langle \mu \smile c, \sigma \rangle$ para todas $c \in C^m(E)$ y $\bar{\sigma} \in C_{m+n}(E, E_0)$, de modo que $\varphi^t(c) = \mu \smile c$. Por lo tanto, los morfismos inducidos por f en cohomología verifican $(f_m^t)^*([c]) = [f_m^t(c)] = [\varphi^t(\pi^*c)] = [\mu \smile c] = (-1)^{mn} \mathcal{T}([c])$ para toda $[c] \in H^m(X)$ (usando que $e \smile e' = (-1)^{|e||e'|} e' \smile e$ para todas e, e' clases de cohomología), es decir que $(f_m^t)^* = (-1)^{mn} \mathcal{T}$.

Como para cada anillo R el morfismo $f : C_{*+n}(E, E_0; R) \rightarrow C_*(X; R)$ es el inducido por $f : C_{*+n}(E, E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow C_*(X; \mathbb{Z})$ tensorizando por R ; deducimos que este último es un morfismo de complejos libres sobre \mathbb{Z} tal que los morfismos inducidos $f^* : H^m(X; R) \rightarrow H^{m+n}(E, E_0; R)$ verifican $f^* = (-1)^{mn} \mathcal{T}$. Por lo tanto, f induce isomorfismos en cohomología siempre que R sea un cuerpo; y en consecuencia por

el **Lema 1.4** el morfismo de Thom es un isomorfismo tomando coeficientes sobre cualquier anillo y además $H^i(E, E_0; R) = 0$ para todo $0 \leq i < n$ y todo R .

Vamos a ver ahora la unicidad de la clase de Thom sobre R . Tomemos una fibra F de nuestro fibrado y sea $i : (F, F_0) \rightarrow (E, E_0)$ el morfismo de pares dado por la inclusión. Tenemos que los morfismos $H^0(X; R) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^n(E, E_0; R) \xrightarrow{i^*} H^n(F, F_0; R)$ mandan $1 \mapsto \mu^R \mapsto \mu_F^R$. Como \mathcal{T} es un isomorfismo, usando la hipótesis de arcoconexión vemos que $\mu^R \in H^n(E, E_0; R)$ es generador de ese R -módulo libre de rango 1. Como $\mu_F \in H^n(F, F_0; R)$ también es generador, deducimos que i^* es un isomorfismo, de donde sale la unicidad de la clase de Thom. \square

1.2.6. Conexión con la teoría de Morse

En este apartado, presentaremos algunos resultados que se utilizarán posteriormente en el **Capítulo 3** y establecen una conexión entre los resultados sobre cohomología, fibrados y el isomorfismo de Thom que venimos tratando en este capítulo y las ideas de teoría de Morse que aparecerán en el resto de la tesis. En particular, probaremos dos lemas (**Lema 1.5** y **Lema 1.6**) que utilizaremos para calcular el morfismo de borde del complejo de Morse (en el **Lema 3.1**) y aparecerán también en la demostración del Basis Theorem (en el **Lema 3.2**), siendo esta la motivación principal por la que se ha escrito este capítulo: lograr entender esos dos resultados en profundidad.

A partir de la demostración de la sección anterior, deducimos que si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial orientado de dimensión r , M es un espacio arcoconexo y $\mu \in H^r(E, E_0)$ es la clase de Thom del fibrado, tomando coeficientes en \mathbb{Z} tenemos un isomorfismo $\psi : H_r(E, E_0) \rightarrow H_0(M)$ dado por $\psi(\tau) = \langle \mu, \tau \rangle \alpha$ donde $\alpha \in H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ es el generador canónico, que consiste en la clase de un punto. Nos interesará caracterizar la clase $\psi^{-1}(\alpha) \in H_r(E, E_0)$.

Dada una fibra $F = \pi^{-1}(x)$, consideremos el generador de orientación $\eta_F \in H_r(E, E_0)$, y notemos $i : (F, F_0) \rightarrow (E, E_0)$ a la inclusión, entonces $\psi(i_*\eta_F) = \langle \mu, i_*\eta_F \rangle \alpha = \langle i^*\mu, \eta_F \rangle \alpha = \langle \mu_F, \eta_F \rangle \alpha = \alpha$ de donde $\eta := \psi^{-1}(\alpha) = i_*\eta_F$ para cualquier fibra F del fibrado, cumpliendo la propiedad dual a la de la clase de Thom μ .

Vamos a dar algunas definiciones y resultados que nos permitirán probar los dos lemas antes mencionados.

Definición 1.8 (Transversalidad). *Sea V una variedad diferencial, M y M' dos subvariedades. Decimos que dichas subvariedades se intersecan transversalmente (o que son transversales) si para cada punto $p \in M \cap M'$ se verifica $T_p M + T_p M' = T_p V$. La notación $M \pitchfork M'$ indica que M interseca transversalmente a M' .*

Teorema 1.10. *Si $M \pitchfork M'$, entonces $M \cap M'$ es una subvariedad regular de M y de M' (y por lo tanto de V) cuya codimensión en V verifica $\text{codim}(M \cap M') =$*

$\text{codim}(M) + \text{codim}(M')$.

Este resultado se demuestra en [GP74, p. 30]. Sean entonces V una variedad diferencial, M y M' subvariedades transversales tales que $\dim(M) = r$, $\dim(M') = s$ y $\dim(V) = r + s$. Entonces, $M \cap M'$ será una variedad de dimensión 0, es decir, un conjunto discreto y a lo sumo numerable. Supongamos que dicho conjunto es finito (lo cual estará garantizado si M o M' es compacta). Supongamos además que M está orientada y que el fibrado normal $\nu(M')$ a M' también lo está. Sea $M \cap M' = \{p_1, \dots, p_l\}$.

Definición 1.9. *Sea $1 \leq i \leq l$ y $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ una base orientada de $T_{p_i}M$. El número de intersección de M y M' en p_i será $+1$ si $\{[\xi_1], \dots, [\xi_r]\}$ representa una base orientada de $N_{p_i}M' = T_{p_i}V/T_{p_i}M'$, y será -1 en caso contrario. El número de intersección $M' \cdot M$ entre M y M' es la suma de los números de intersección en cada p_i .*

Notemos que si la variedad ambiente V está orientada, dar una orientación de $\nu(M')$ es equivalente a orientar TM' , donde la correspondencia es la que sigue: si tomamos una base orientada $\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}$ de T_pM' , diremos que $\{[\xi_1], \dots, [\xi_r]\}$ es base orientada de N_pM' si y sólo si $\{\zeta_1, \dots, \zeta_s, \xi_1, \dots, \xi_r\}$ es base orientada de T_pV . En este contexto, el número de intersección en cada p_i se obtendrá de verificar si las bases orientadas $\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}$ de $T_{p_i}M'$ y $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ de $T_{p_i}M$ forman una base orientada $\{\zeta_1, \dots, \zeta_s, \xi_1, \dots, \xi_r\}$ de $T_{p_i}V$. Enunciamos ahora un resultado de geometría Riemanniana que necesitaremos, precedido por una definición, extraídos ambos de [Spi99, p.346].

Definición 1.10. *Sea V una variedad diferencial y $M \subseteq V$ una subvariedad. Un fibrado $\pi : U \rightarrow M$ donde U es un abierto de V que contiene a M se dice un entorno tubular de M si la sección nula $s : M \rightarrow U$ viene dada por la inclusión de M en U .*

Teorema 1.11 (Entorno tubular). *Sea V una variedad diferencial y $M \subseteq V$ una subvariedad compacta. Entonces M admite un entorno tubular $\pi : U \rightarrow M$ en V que es isomorfo al fibrado normal $\nu(M)$.*

Sean entonces V una variedad, M y M' dos subvariedades que cumplen las propiedades necesarias para poder trabajar en el contexto anterior: se intersecan transversalmente, son compactas y conexas, M está orientada así como también $\nu(M')$ y las dimensiones son $\dim(M) = r$, $\dim(M') = s$ y $\dim(V) = r + s$. Sea $M \cap M' = \{p_1, \dots, p_l\}$. Sea $\pi : U \rightarrow M'$ un entorno tubular de M' . Al ser M' conexa, por lo discutido previamente existe una clase fundamental $\eta \in H_r(U, U \setminus M') \cong \mathbb{Z}$ que genera dicho grupo abeliano, y tal que $\psi(\eta) = \alpha$ con α el generador canónico de $H_0(M')$. Por escisión, la inclusión de pares nos da un isomorfismo $i_U : H_r(U, U \setminus M') \cong H_r(V, V \setminus M')$ de donde $i_U(\eta)$ es un generador de $H_r(V, V \setminus M')$. Veremos que dicho generador no depende del entorno tubular elegido U . Para eso, probamos la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Sea $\pi : U \rightarrow M'$ un entorno tubular de M' . Sea D un disco abierto, orientado y de dimensión r embebido en U , que interseca a M' de manera transversal en un único punto p , de modo que $M' \cdot D = +1$. Notamos $j : (D, D \setminus \{p\}) \rightarrow (U, U \setminus M')$ a la inclusión de pares. Entonces el generador de orientación $[D] \in H_r(D, D \setminus \{p\})$ de D verifica $\eta = j_*([D]) \in H_r(U, U \setminus M')$.*

Demostración. Tomemos una trivialización orientada (A, Φ) de U alrededor de p , con $A \subseteq M'$ difeomorfo a \mathbb{R}^s (vía $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $\varphi(p) = 0$). Tenemos entonces un difeomorfismo $\Phi' : \pi^{-1}(A) \xrightarrow{\Phi} A \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\varphi \times id} \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ que resulta ser un isomorfismo de fibrados orientados, dándole al fibrado $E = \mathbb{R}^{s+r} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{R}^s = B$ la orientación inducida en cada fibra $F = \pi^{-1}(x)$ por la base $\{(x, e_1), (x, e_2), \dots, (x, e_r)\}$. Podemos suponer que $\bar{D} \subseteq U$ (ya que el generador de orientación $[D]$ tiene como representante a un simplex orientado σ centrado en p tan pequeño como uno quiera, pudiendo elegirlo de modo que su clase sea a su vez generador de orientación de un disco más pequeño D_1 tal que $\bar{D}_1 \subseteq U$). Consideramos el disco $D' = \Phi'(D)$, que intersecará a $\mathbb{R}^s \times \{0\}$ únicamente en 0, de forma transversal y con número de intersección $+1$. La situación se esquematiza en la **Figura 1.1**, donde en color negro y en la dirección vertical se marcan las fibras orientadas de $\pi : E \rightarrow B$.

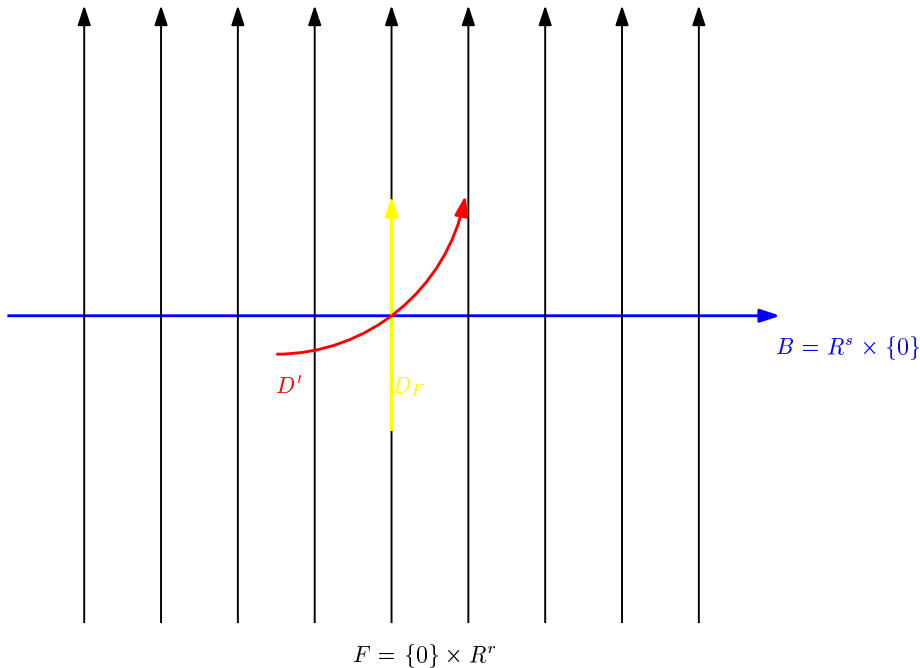


Figura 1.1

Queremos probar que si $j' : (D', D' \setminus \{0\}) \rightarrow (E, E_0)$ es la inclusión, entonces $j'([D']) = \eta'$ siendo $\eta' \in H_r(E, E_0)$ el generador de orientación. Pero sabemos que si $F = \pi^{-1}(0)$, η'_F es el generador de orientación de F e $i' : (F, F_0) \rightarrow (E, E_0)$ es

la inclusión, entonces $i'_*(\eta'_F) = \eta'$. En consecuencia, si tomamos un disco D_F en F , orientado y centrado en 0 como el de la **Figura 1.1**, nos alcanzaría con ver que $i'_*([D_F]) = j'_*([D'])$. Si bien D' no tiene por qué coincidir con D_F (que sería el caso más sencillo), pareciera que es posible deformar continuamente D' en D_F “proyectando en la dirección vertical”. Veamos que esto es efectivamente posible. La estrategia será ver a D' como el gráfico de una función diferenciable, cuyo dominio sea un disco abierto centrado en 0 en la fibra F .

Como D' interseca a $\mathbb{R}^s \times \{0\}$ transversalmente y con número de intersección +1, existe una base orientada $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ de T_0D' tal que $[\xi_i] = [(0, e_i)]$ para todo $1 \leq i \leq r$. Por lo tanto, existen vectores $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^s$ tales que $\xi_i = (u_i, e_i)$. Si consideramos la función diferenciable $\tau : \mathbb{R}^{s+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$ dada por $\tau(x_1, \dots, x_{r+s}) = (x_{s+1}, \dots, x_{r+s})$ tendremos que $\tau_*(T_0D') = T_0\mathbb{R}^r$ y como $\dim(D') = r$, por el Teorema de la Función Inversa $\tau|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}^r$ es un difeomorfismo en un entorno de 0. Achicamos nuevamente D' como para que quede contenido en el abierto en el que τ es un difeomorfismo, y además sea $\tau(D') = B(0, \delta) = \mathring{D}_\delta^r \subseteq \mathbb{R}^r$ para algún $\delta > 0$. Tenemos entonces un difeomorfismo orientado $\tau : D' \rightarrow \mathring{D}_\delta^r$, cuyo inverso será $\rho(x) = (g(x), x)$ para una cierta función diferenciable $g : \mathring{D}_\delta^r \rightarrow \mathbb{R}^s$. Tenemos entonces una homotopía $H : \mathring{D}_\delta^r \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{r+s}$ dada por $H(x, t) = (tg(x), x)$, que de hecho es homotopía entre los morfismos de pares $H_0, H_1 : (\mathring{D}_\delta^r, \mathring{D}_\delta^r \setminus \{0\}) \rightarrow (E, E_0)$. Así, $(H_0)_*(\mathring{D}_\delta^r) = (H_1)_*(\mathring{D}_\delta^r)$ pero como $H_0 : \mathring{D}_\delta^r \rightarrow \{0\} \times \mathring{D}_\delta^r$ (cumpliendo el codominio el rol de D_F) y $H_1 : \mathring{D}_\delta^r \rightarrow D'$ son difeomorfismos orientados, deducimos que $j'_*([D']) = i'_*(\eta'_F) = \eta'$. \square

Como consecuencia de la proposición anterior, si tenemos dos entornos tubulares U, U' distintos de M' y tomamos un disco D abierto, orientado y embebido en $U \cap U'$, el cual interseque a M' sólo en un punto p y con número de intersección +1, se tendrá que si k, k' son las inclusiones de D en U y U' respectivamente, entonces $i_U(\eta_U) = i_U(k_*([D])) = i_{U'}(k'_*([D])) = i_{U'}(\eta_{U'})$, como queríamos. Dada la independencia del entorno tubular, notaremos como η tanto a $i_U(\eta_U)$ como a $\eta_{U'}$ para cualquier entorno tubular $\pi : U \rightarrow M'$. Estamos en condiciones de enunciar el primero de los lemas preanunciados.

Lema 1.5. *En la secuencia*

$$H_r(M) \xrightarrow{g} H_r(V) \xrightarrow{g'} H_r(V, V \setminus M')$$

Donde g y g' vienen inducidos por las inclusiones $M \longrightarrow V \longrightarrow (V, V \setminus M')$, se tiene que $g' \circ g([M]) = (M' \cdot M)\eta$.

Demostración. Sea $M \cap M' = \{p_1, \dots, p_l\}$. Fijemos un entorno tubular $\pi : U \rightarrow M'$ de M' en V . Tomemos alrededor de cada p_i un disco abierto D_i de dimensión r embebido en M , de modo que los discos D_1, \dots, D_l sean disjuntos y estén todos contenidos en el entorno tubular U . Les damos a dichos discos la orientación que heredan como subvariedades abiertas de M . Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_r(M) & \xrightarrow{g' \circ g} & H_r(V, V \setminus M') \\
 \downarrow \alpha & \nearrow \gamma & \uparrow j \\
 H_r(M, M \setminus M \cap M') & \xrightarrow{\beta} & \bigoplus_{i=1}^l H_r(D_i, D_i \setminus \{p_i\})
 \end{array}$$

Donde α y γ vienen dados por la inclusión, β por escindir el cerrado $M \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i$ y j por los morfismos $j_i : H_r(D_i, D_i \setminus \{p_i\}) \rightarrow H_r(V, V \setminus M')$ inducidos por las respectivas inclusiones de pares. Es claro por la definición de generador de orientación que $\beta \circ \alpha([M]) = ([D_1], \dots, [D_l])$. Además, por lo visto en la **Proposición 1.7**, $j_i([D_i]) = \eta$ si $M' \cdot D_i = +1$ y $-\eta$ en caso contrario, es decir que $j_i([D_i]) = (M' \cdot D_i)\eta$ para todo $1 \leq i \leq l$. En consecuencia, obtenemos que $g' \circ g([M]) = j([D_1], \dots, [D_l]) = \sum_{i=1}^l j_i([D_i]) = \sum_{i=1}^l (M' \cdot D_i)\eta = (M' \cdot M)\eta$, como queríamos. \square

Vamos ahora a explicar brevemente cómo se pueden extender los resultados de esta sección a variedades con borde. Las nociones de transversalidad y número de intersección se extienden en forma inmediata. Respecto a existencia del entorno tubular hay que tener un poco más de cuidado, dado que hay que imponer ciertas restricciones a las variedades y subvariedades involucradas. Para ser más precisos, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.11. *Sea W una variedad con borde de dimensión n . $M \subseteq W$ se dice una subvariedad buena (neat submanifold) si tiene una estructura de variedad con borde de dimensión m , con la topología subespacio de W ; $M \subseteq W$ es cerrado y se cumple que:*

1. $M \cap \partial W = \partial M$.
2. Para cada $p \in \overset{\circ}{M}$ existe una carta (U, φ) de W adaptada a M en el sentido usual, y para cada $p \in \partial M$ existe una carta (U, φ) de W en p tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}_+^n$ y $U \cap M = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^m \times \{0\})$ (donde $\mathbb{R}_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0\}$ para cada $k \geq 1$).

Si $M \subseteq W$ es subvariedad buena, un entorno tubular U de M se dice bueno (neat) si $U \cap \partial W$ es entorno tubular de ∂M en ∂W . Vale la siguiente versión del Teorema del entorno tubular para subvariedades buenas, extraída de [Kos93, Thm. 4.2].

Teorema 1.12. *Si M es una subvariedad buena de W , entonces admite un entorno tubular bueno.*

Si tenemos entonces una variedad con borde W , y una subvariedad buena M' compacta, conexa, de dimensión r y con su fibrado normal orientado; podemos definir un generador de orientación $\eta \in H_r(W, W \setminus M')$ que es la imagen del generador de orientación $\eta_U \in H_r(U, U \setminus M')$ por la inclusión, para cualquier entorno tubular bueno $\pi : U \rightarrow M'$. Vale el resultado análogo a la **Proposición 1.7**, es decir: dado

un disco abierto D de dimensión r embebido en W , orientado y tal que interseca a M' una única vez y de manera transversal en un punto p , siendo $M' \cdot D = 1$, se tiene que $\eta = j_*([D])$, donde $j : (D, D \setminus \{p\}) \rightarrow (W, W \setminus M')$ viene dado por la inclusión. Si D fuera un disco cerrado cumpliendo todas las condiciones anteriores, por la definición de generador de orientación para variedades con borde se tiene que si $j' : (D, \partial D) \rightarrow (W, W \setminus M')$ es la inclusión de pares, entonces $j'_*([D]) = j_*([\overset{\circ}{D}]) = \eta$. Con todo esto se puede ver que vale también una versión relativa del **Lema 1.5** que enunciamos a continuación.

Lema 1.6. *Sea (W, V, V') una tríada, sean M y M' dos subvariedades buenas, compactas y conexas de W tales que:*

1. $M \pitchfork M'$ siendo $\dim(M) = r$, $\dim(M') = s$ y $\dim(W) = r + s$.
2. M está orientada, y el fibrado normal a M' como subvariedad de W también está orientado.
3. $\partial M \subseteq V$, $\partial M' \subseteq V'$.

Entonces en la secuencia

$$H_r(M, \partial M) \xrightarrow{g} H_r(W, V) \xrightarrow{g'} H_r(W, W \setminus M')$$

Donde g y g' vienen dadas por las inclusiones de pares correspondientes, se tiene que $g' \circ g([M]) = (M' \cdot M)\eta$.

Demostración. La demostración es análoga a la del **Lema 1.5**. Aprovechando que $M \cap M' = \{p_1, \dots, p_l\} \subseteq \overset{\circ}{M}$, podemos tomar como en aquel caso discos disjuntos D_1, \dots, D_l embebidos en M alrededor de cada p_i que cumplan la propiedad de intersecar a M' de manera transversal y únicamente en p_i . Luego la prueba sigue exactamente igual cambiando $H_r(M)$ por $H_r(M, \partial M)$ y $H_r(V, V \setminus M')$ por $H_r(W, W \setminus M')$; y usando la observación que hicimos previamente sobre la validez de la **Proposición 1.7** en este contexto. □

Capítulo 2

Teoría de Morse, cobordismos y adjunción de manijas

En el presente capítulo desarrollaremos los resultados centrales sobre tríadas, cobordismos y teoría de Morse que son objeto de estudio de esta tesis. Nos basaremos en los primeros cuatro capítulos de [Mil65].

2.1. Tríadas, cobordismos y funciones de Morse

Comenzamos definiendo el concepto de tríada y el de cobordismo.

Definición 2.1. *Decimos que (W, V, V') es una tríada de variedades diferenciables (o tríada a secas) si W es una variedad compacta y ∂W es unión disjunta de dos subvariedades V y V' que son abiertas y cerradas en ∂W .*

Definición 2.2. *Dadas dos variedades cerradas M y M' , un cobordismo de M a M' es una 5-upla $(W, V, V'; h, h')$ donde (W, V, V') es una tríada y $h : M \rightarrow V$, $h' : M' \rightarrow V'$ son difeomorfismos. Dos variedades M y M' se dicen cobordantes si existe un cobordismo de M a M' .*

Ejemplos:

1. Si consideramos el cilindro $C = S^1 \times I$, la tríada $(C, S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\})$ nos da un cobordismo entre S^1 y S^1 como se ve en la **Figura 2.1**, precisamente: $(C, S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\}; h, h')$ con $h(x) = (x, 0)$ y $h'(x) = (x, 1)$. Más en general, dada M una variedad cerrada cualquiera la tríada $(M \times I, M \times \{0\}, M \times \{1\})$ nos da un cobordismo entre M y M , siendo toda variedad cerrada cobordante consigo misma.
2. El “pantalón” P nos da un cobordismo entre $S^1 \sqcup S^1$ y S^1 , como se ve también en la **Figura 2.1**.

3. En la **Figura 2.2** se muestran un cobordismo entre S^1 y S^1 y otro entre $S^1 \sqcup S^1$ y S^1 distintos a los presentados previamente, que se obtienen a partir de subvariedades con borde del toro con dos manijas.
4. Dada una variedad compacta M y con borde, tenemos una tríada $(M, \partial M, \emptyset)$ que nos da un cobordismo entre ∂M y \emptyset (notemos que en la definición no se pide que las componentes del borde V y V' sean no vacías). Del mismo modo, si M es cerrada entonces $(M, \emptyset, \emptyset)$ es una tríada, que nos da un cobordismo entre \emptyset y \emptyset .

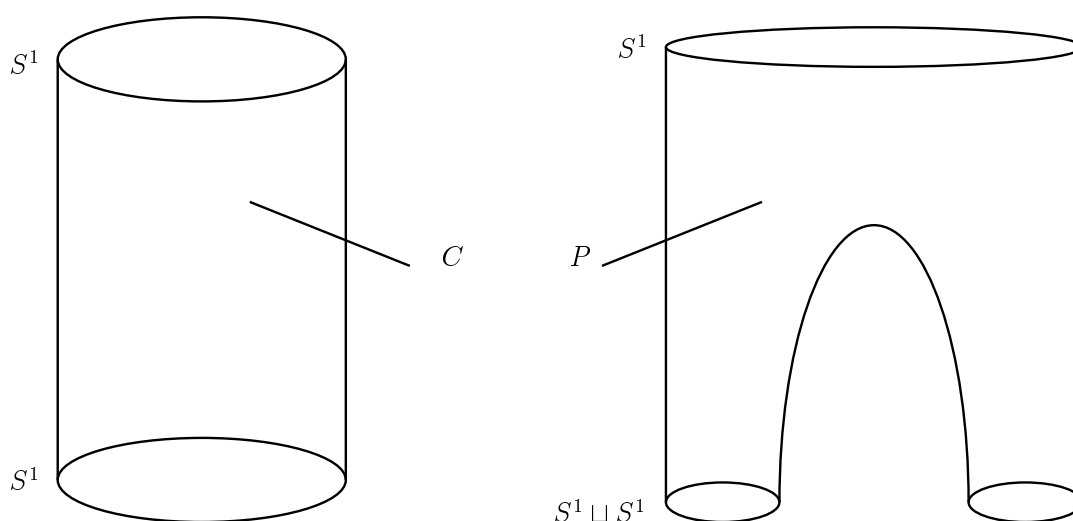


Figura 2.1

Notemos que si (W, V, V') es una tríada entonces $(W, V, V'; id, id)$ es un cobordismo entre V y V' , y así V y V' son cobordantes. Por simplicidad notaremos (W, V, V') a dicho cobordismo. Recíprocamente, un cobordismo $(W, V, V'; h, h')$ entre M y M' será notado muchas veces por simplicidad como (W, V, V') o (W, M, M') omitiendo las identificaciones necesarias; de modo que no haremos mucha distinción de aquí en más entre los conceptos de tríada y cobordismo.

Definición 2.3. *La traza de una tríada (o cobordismo) (W, V, V') es la variedad con borde W .*

Definición 2.4. *Decimos que una tríada (W, V, V') tiene dimensión n si $\dim(W) = n$*

Definición 2.5. *Decimos que dos tríadas (W_1, V_1, V'_1) y (W_2, V_2, V'_2) son difeomorfas si existe un difeomorfismo $h : W_1 \rightarrow W_2$ tal que $h(V_1) = V_2$ y $h(V'_1) = V'_2$.*

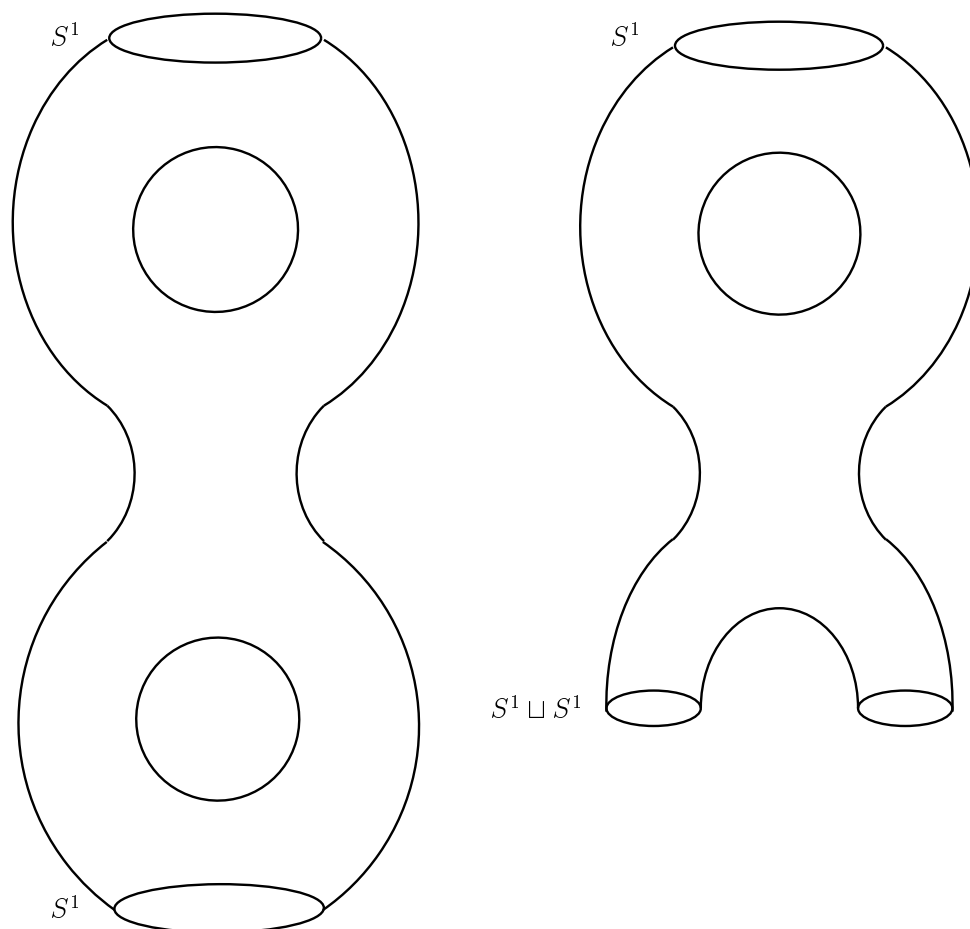


Figura 2.2

El objetivo ahora será definir lo que es una función de Morse en una tríada. Para eso comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 2.6. Sea W una variedad con borde y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto $p \in W$ se dice punto regular si $d_p f \neq 0$. En caso de que $d_p f = 0$ decimos que p es punto crítico de f . En relación con estas nociones, decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f , y que $a \in \mathbb{R}$ es un valor crítico si existe algún punto crítico p tal que $f(p) = a$. Notemos que si $f^{-1}(a) = \emptyset$ entonces a es valor regular.

Si p es punto regular de f y $p \in \overset{\circ}{W} = W \setminus \partial W$, por el Teorema del rango existe una carta (U, φ) en p con $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi(p) = 0$ tal que $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) + x_1$ (se puede probar un resultado muy similar para puntos regulares en el borde de una función diferenciable f en una tríada, lo cual definiremos en breve). Lo que vamos a querer es imponer una condición sobre cada punto crítico q que nos permita controlar la forma de f alrededor de q , es decir, tener una forma local canónica similar a la recién mencionada para puntos regulares. Para eso, necesitaremos definir la noción de punto crítico no degenerado.

Definición 2.7. Sea W una variedad, $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in W$ un punto crítico de f . Decimos que p es no degenerado si existe una carta (U, x) en p en la cual se verifica que $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}|_p) \neq 0$.

Tratemos de entender un poco esta definición, para luego probar que la noción de punto crítico no degenerado está bien definida (puesto que para establecerla recurrimos a la elección de una carta). La motivación detrás de estos conceptos está en el desarrollo en serie de Taylor, con lo cual empezaremos analizando qué pasa en \mathbb{R}^n . Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Podemos considerar desarrollo de Taylor a orden 2 de f alrededor de 0

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla_0 f, x \rangle + \langle x, H_0 f x \rangle + R_2(x)$$

Donde para cada $p \in \mathbb{R}^n$ $H_p(f) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}|_p)_{i,j}$ es la matriz Hessiana de f en p . Si 0 es un punto crítico, entonces $\nabla_0 f = 0$ y por lo tanto el polinomio de Taylor de f de segundo orden es $T_2(x) = f(0) + \langle x, H_0 f x \rangle$. Si definimos para cada p la forma bilineal simétrica $H_p f(x, y) = \langle x, H_p f y \rangle$ (que será el Hessiano de f en p), tendremos por el Teorema del índice para formas bilineales simétricas que existe para cada $p \in \mathbb{R}^n$ una base \mathcal{B}_p tal que la matriz de $H_p(f)$ en esa base sea una matriz por bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} -Id_r & 0 & 0 \\ 0 & Id_s & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r-s} \end{pmatrix}$$

Donde $r, s \in \mathbb{N}_0$ son tales que $r + s \leq n$. Más aún, el Teorema nos dice que si \mathcal{B}'_p es otra base donde la matriz de la forma bilineal tiene la pinta anterior, con bloques en la diagonal de tamaños r', s' y $n - r' - s'$ respectivamente entonces $r = r'$ y $s = s'$. El invariante r (que sería el número de -1 's en la diagonal en cualquier representación canónica de la forma bilineal) se denomina el índice de la forma bilineal. La noción que tendremos de que el punto crítico 0 sea no degenerado es que la forma bilineal $H_0 f$ sea no degenerada (es decir, que dado $x \neq 0$ exista y tal que $H_0 f(x, y) \neq 0$), o equivalentemente que la matriz $H_0 f$ sea inversible. Notemos que esto es equivalente a pedir, haciendo el cambio de coordenadas correspondiente, que

$$T_2(x) = f(0) - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Es decir, que todas las variables aparezcan en el término cuadrático del desarrollo de Taylor de f en 0.

La manera de extender estas nociones a variedades es definir, dado un punto crítico $p \in W$, una forma bilineal simétrica en $T_p W$ que será el Hessiano de f en p , de la siguiente manera. Dados $v, w \in T_p W$ tomamos dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(W)$ tales que $X_p = v$ e $Y_p = w$ y definimos $H_p f(v, w) = X_p(Y(f))$. Debemos ver que está bien definido. Notemos que $X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y]_p(f) = d_p f([X, Y]_p) = 0$. Así, si

tomamos otros dos campos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(W)$ tales que $\tilde{X}_p = v$ y $\tilde{Y}_p = w$ tendremos que $X_p(Y(f)) = \tilde{X}_p(Y(f)) = Y_p(\tilde{X}(f)) = \tilde{Y}_p(\tilde{X}(f))$ teniendo así una buena definición. También se desprende de aquí que $H_p f(v, w) = H_p f(w, v)$ para todos $v, w \in T_p W$ y es rutinario chequear la bilinealidad.

Podemos con esto dar una nueva definición de punto crítico no degenerado: es aquel tal que $H_p f$ es no degenerado. Si tomamos una carta (U, x) en p y consideramos la base de los ganchos $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, entonces la matriz de $H_p f$ en la base \mathcal{B} es $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$, lo cual nos dice que ambas definiciones son equivalentes, que es lo que necesitamos ya que la segunda definición no depende de cartas. Lo hasta ahora discutido motiva la siguiente definición.

Definición 2.8. *Sea $p \in W$ un punto crítico no degenerado de una función suave f . Definimos el índice de p como el índice de la forma bilineal simétrica $H_p(f)$, y lo notamos $\text{ind}(p)$.*

Enunciaremos ahora un resultado que nos dice que si p es punto crítico no degenerado, entonces en algún sentido f coincide localmente con su polinomio de Taylor de orden 2; teniendo una expresión local canónica para f , que es lo que buscábamos.

Lema 2.1 (Morse). *Si p es un punto crítico no degenerado de f de índice k , entonces existe una carta (U, φ) tal que en esas coordenadas*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

Una demostración puede verse en [Mil63, Lemma 2.2]. Con esto podemos definir qué es una función de Morse.

Definición 2.9. *Una función diferenciable (o suave) en una tríada (W, V, V') es una función diferenciable $f : W \rightarrow [a, b]$ para algún intervalo compacto $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que*

1. $f^{-1}(a) = V, f^{-1}(b) = V'$
2. *Todos los puntos críticos de f están en $\overset{\circ}{W}$.*

Definición 2.10. *Una función de Morse f en (W, V, V') es una función suave tal que todos sus puntos críticos son no degenerados.*

Como consecuencia del Lema de Morse, los puntos críticos de una función f en una tríada (W, V, V') son aislados. Al ser W compacta, deducimos que sólo hay finitos de ellos.

Para dar un ejemplo de una función de Morse, consideremos el toro T embebido en \mathbb{R}^3 de modo que el plano $z = 0$ sea tangente a uno de sus puntos P , como se muestra en la **Figura 2.4**. Si $i : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el embedding dado por la inclusión y $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la tercera coordenada $\pi(x, y, z) = z$, consideramos la

función suave $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = \pi \circ i$, que sería la función altura con respecto al plano $z = 0$. Si pensamos al toro como una superficie de revolución, obtenemos una parametrización de la forma $T(\theta, \varphi) = (r \cos \theta, (r \sin \theta - R) \sin \varphi, (r \sin \theta - R) \cos \varphi + R + r)$ donde $r \in \mathbb{R}_+$ representa el radio del círculo pequeño que es rotado (siendo $r = \frac{PQ}{2} = \frac{RS}{2}$) y $R > r$ es la distancia del centro O del toro al centro de cada uno de los círculos pequeños (es decir, $R = OQ + r$, ver **Figura 2.4**). Utilizando las cartas inducidas por esta parametrización y analizando $f \circ T(\theta, \varphi) = (r \sin \theta - R) \cos \varphi + R + r$, se puede ver que f tiene exactamente 4 puntos críticos, que se corresponden con los puntos P , Q , R y S marcados en la **Figura 2.4** y de hecho analizando el Hessiano se puede deducir que los índices de estos últimos son 0, 1, 1 y 2 respectivamente

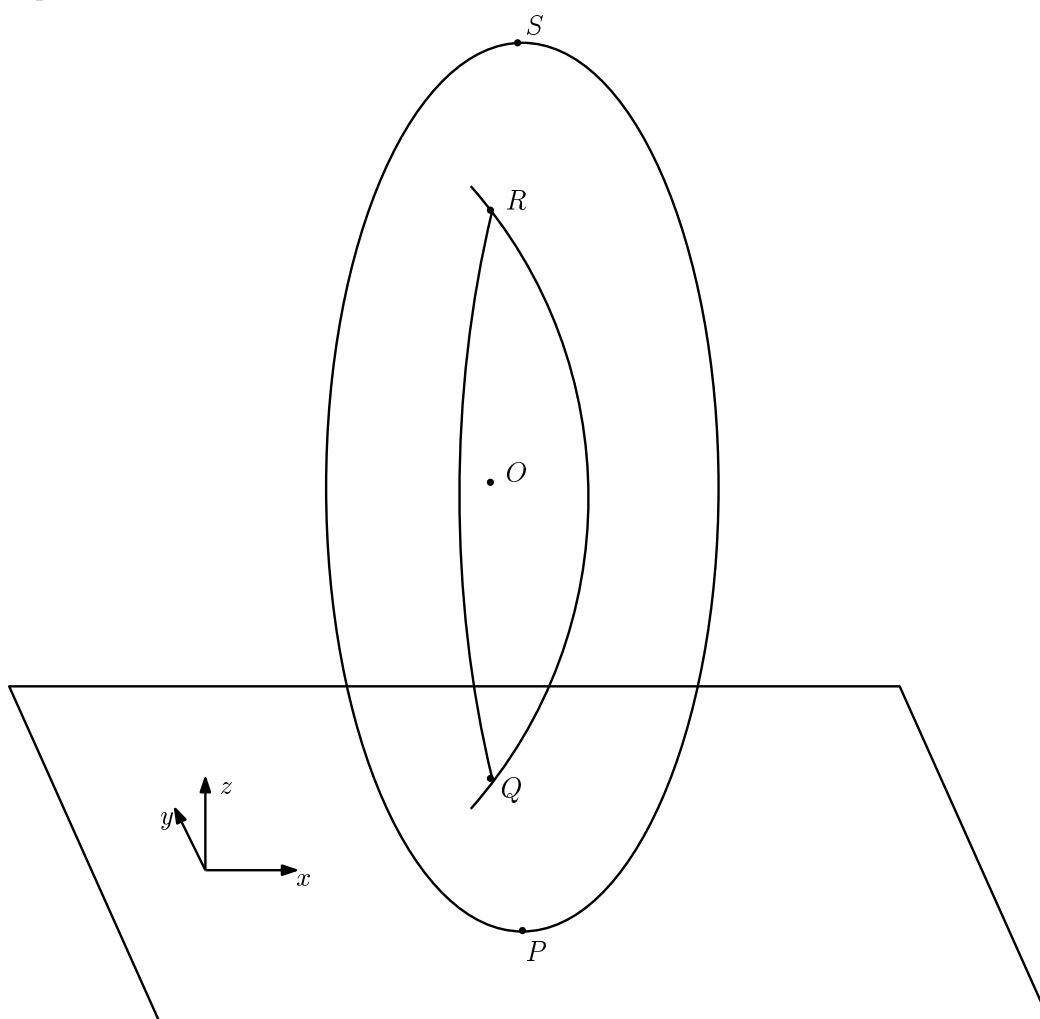


Figura 2.3

Teniendo ya la noción de función de Morse en una tríada, y la forma local que tales funciones tienen alrededor de puntos regulares y de puntos críticos en \mathring{W} , veamos la forma que tienen alrededor de los puntos del borde (que son regulares por

definición). Para eso fijamos antes una notación. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, y para cada $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto alrededor de 0 definimos $U^+ = U \cap \mathbb{H}^n$ y $U^- = U \cap -\mathbb{H}^n$.

Lema 2.2. *Sea f una función diferenciable en una tríada (W, V, V') y $p \in V$. Entonces existe una carta adaptada (U_1, φ) en p y un abierto U_2 alrededor de 0 en \mathbb{R}^n tales que $\varphi : U_1 \rightarrow U_2^+$ es un difeomorfismo, $\varphi(0) = 0$ y la función $f \circ \varphi^{-1} : U_2^+ \rightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función suave $F : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x_1, \dots, x_n) = f(p) + x_1$. Vale una versión análoga si $p \in V'$ pero cambiando U_2^+ por U_2^- .*

Este hecho puede demostrarse tomando una carta en p adaptada al borde y siguiendo los pasos de la prueba del Teorema del Rango presentada en [Lee00, Thm. 5.13], pero verificando que los cambios de cartas que aparecen dejen fijo el semiplano \mathbb{H}^n .

Vamos a dar ahora un resultado que nos garantiza la existencia de funciones de Morse, lo cual es indispensable para todo el desarrollo que haremos posteriormente.

Teorema 2.1. *Toda tríada de variedades diferenciables (W, V, V') posee alguna función de Morse.*

Nos remitimos a [Mil65, Thm. 2.5] para una prueba de este resultado. Se termina demostrando allí un resultado más fuerte: se le puede dar una topología a $\mathcal{C}^\infty(W, V, V') = \{f : (W, V, V') \rightarrow \mathbb{R} \text{ suaves}\}$ (la topología \mathcal{C}^2 , que se construye tomando en cartas los supremos de los módulos de la función y sus derivadas hasta segundo orden) tal que las funciones de Morse formen un abierto denso allí, de modo que una función diferenciable genérica es de Morse. A raíz de este resultado, podemos formular la siguiente definición.

Definición 2.11. *El número de Morse μ de una tríada (W, V, V') es el mínimo sobre todas las funciones de Morse f en (W, V, V') del número de puntos críticos de f .*

2.2. Campos tipo gradiente

Definición 2.12. *Sea f una función de Morse en una tríada (W, V, V') de dimensión n . Decimos que $\xi \in \mathfrak{X}(W)$ es un campo tipo gradiente para f si*

1. $\xi_p(f) > 0$ para todo punto regular p de f .
2. Dado un punto crítico p de f , si $\text{ind}(p) = k$ existen coordenadas $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ en un entorno U de p tales que en las mismas

$$f(x, y) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 = f(p) - |x|^2 + |y|^2$$

$$Y \xi(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (-x, y)$$

La noción está inspirada en la de campo gradiente $\nabla f \in \mathfrak{X}(W)$ que podemos definir si tomamos una métrica Riemanniana g en W . En efecto, es claro que $\nabla_p f(f) = d_p f(\nabla_p f) = \langle \nabla_p f, \nabla_p f \rangle = \|\nabla_p f\|^2 > 0$ si p es un punto regular. Y en caso de que f fuera la función $f(x, y) = c - |x|^2 + |y|^2$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} (es decir, que fuera igual a su forma local de acuerdo al Lema de Morse), entonces tomando la métrica euclídea sería $\nabla_{(x,y)} f = 2(-x, y)$ que difiere sólo en la constante 2 de lo pedido para campos tipo gradiente. Sin embargo, no siempre que tomemos una métrica Riemanniana g el campo $\xi = \nabla f$ será tipo gradiente salvo constantes, ya que para que funcione el razonamiento que acabamos de hacer necesitaríamos que la carta (U, φ) en la cual f tiene la forma deseada $f(x, y) = f(p) - |x|^2 + |y|^2$ nos de una isometría $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ entre (U, g) y V con la métrica usual. Por ese motivo vamos a elegir la noción de campo tipo gradiente, que además de garantizarnos el pimer punto de la definición nos da una forma canónica en cartas para f y para ξ alrededor de los puntos críticos, en forma simultánea; la cual será de mucha utilidad.

Observación 2.1. *A pesar de las dificultades recién explicadas, es posible trabajar con campos gradiente en vez de campos tipo gradiente. En ese caso, el rol que en esta exposición cumplirán los pares (f, ξ) (constituidos por una función de Morse f y un campo tipo gradiente para la misma) lo cumplirán los pares (f, g) (constituidos por una función de Morse y una métrica Riemanniana para la variedad W , dado que dicha métrica es en definitiva lo que determina el campo gradiente); y en lugar de ir modificando el campo gradiente como tendremos que hacer varias veces, lo que se modificará es la métrica, pudiendo lograr así expresiones locales más razonables. Pero hemos optado aquí por hacer toda la presentación utilizando campos tipo gradiente, siguiendo a [Mil65].*

Nos ocupamos ahora de la existencia de campos tipo gradiente.

Lema 2.3. *Para toda función de Morse f en una tríada (W, V, V') existe un campo tipo gradiente ξ .*

Demostración. Sean p_1, \dots, p_r los puntos críticos de f . Tomemos para cada $1 \leq i \leq r$ un abierto V_i tales que $p_i \in V_i \subseteq W$, que V_1, \dots, V_r sean disjuntos y que existan cartas (V_i, φ_i) tales que $f \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = f(p_i) - |x|^2 + |y|^2$ de acuerdo al Lema de Morse. Tomamos abiertos U_i tales que $p_i \in U_i \subseteq \bar{U}_i \subseteq V_i$ y notamos $W' = W \setminus \cup_{i=1}^r \bar{U}_i$. En cada U_i tenemos el campo ξ_i que en coordenadas es $\xi_i(x, y) = (-x, y)$. Para cada punto $p \in W'$, podemos encontrarnos una carta (V_p, φ_p) con $V_p \subseteq W'$ tal que en las coordenadas que induce, f tiene la forma $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Tomamos en ese abierto el campo ξ_p dado por $\xi_p = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Tomando un subcubrimiento finito de $\mathfrak{U} = \{V_p\}_{p \in W'} \cup \{V_i\}_{i \leq r}$ e indexando a los abiertos de $\{V_p\}_{p \in W'}$ que participan como V_{r+1}, \dots, V_{r+s} y a sus respectivos campos como $\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+s}$; podemos considerarnos una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i \leq r+s}$ subordinada a $\{V_i\}_{i \leq r+s}$. Entonces el campo $\xi = \sum_{i=1}^{r+s} \rho_i \xi_i \in \mathfrak{X}(W)$ cumple que $\xi|_{U_i} = \xi_i$ para cada $1 \leq i \leq r$ y que $\xi_p(f) > 0$ para todo punto regular p al ser $(\xi_i)_p(f) > 0$ para todo i tal que $p \in V_i$ si p es punto regular. Con esto concluimos que ξ es campo tipo gradiente para f . \square

La idea de la Teoría de Morse es hacer uso de las funciones de Morse para reconstruir la forma (la topología y la estructura diferenciable) de una variedad. La regularidad que se le pide a una función suave para ser de Morse es justamente la necesaria para poder llevar adelante este propósito. Intentaremos explicar esto a través de un ejemplo: el toro con la función altura.

En términos generales, dada f de Morse en una tríada (W, V, V') vamos a notar para cada $a \in \mathbb{R}$, $W_a = f^{-1}(-\infty, a]$ y $V_a = f^{-1}(a)$. La idea será ir viendo cómo cambian V_a y W_a a medida que crece $a \in \mathbb{R}$ y así ir reconstruyendo la forma de la variedad. Considerando el caso del toro, de acuerdo a la **Figura 2.3** vemos que para $a < 0$ tanto V_a como W_a son vacías. Si $0 < a < f(Q)$ se tiene que V_a es una circunferencia S^1 y W_a es un disco. Para $f(Q) < a < f(R)$ tenemos que W_a es un cilindro curvado y V_a es difeomorfa a $S^1 \sqcup S^1$. Para $f(R) < a < f(S)$ tenemos que W_a es difeomorfa a un toro al cual se le removió un disco abierto, y V_a es difeomorfa a S^1 . Para $a > f(S)$ tenemos que W_a es difeomorfa al toro y $V_a = \emptyset$. Ilustramos lo recién descrito en la siguiente figura.

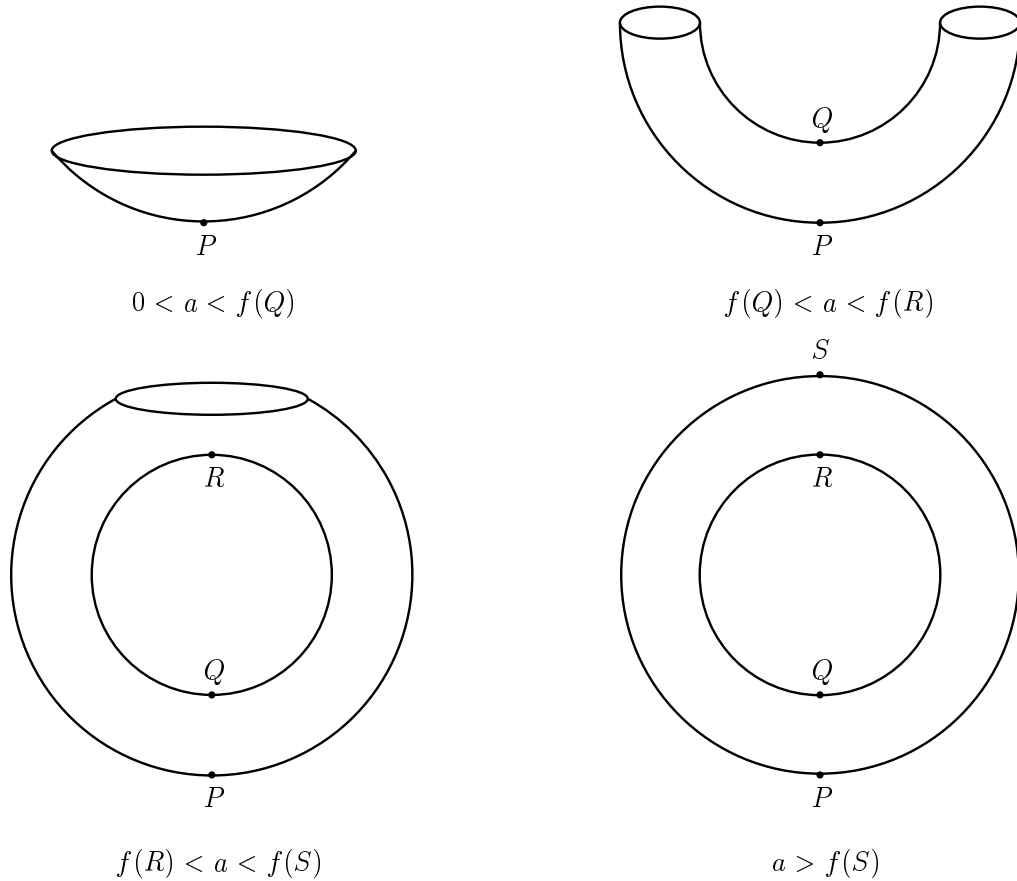


Figura 2.4

Los únicos $a \in \mathbb{R}$ para los cuales no se analizó W_a y V_a son los valores críticos $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$ y $f(S)$. Esto se debe a que la preimagen de un valor crítico no

necesariamente es una subvariedad regular (en nuestro caso por ejemplo, $f^{-1}(f(Q))$ y $f^{-1}(f(R))$ son homeomorfos a $S^1 \vee S^1$, y no tienen estructura de subvariedad). Notemos además que en todos los intervalos analizados de la forma (c, d) , que son intervalos sin puntos críticos $((-\infty, f(P)), (f(P), f(Q)), (f(Q), f(R)), (f(R), f(S))$ y $(f(S), +\infty)$ para ser precisos), se tiene que dados $a, a' \in (c, d)$ es $V_a \cong V_{a'}$ y $W_a \cong W_{a'}$ (donde \cong denota la relación “ser difeomorfo a”), y que además si $a < a'$ entonces W_a es retracto por deformación fuerte de $W_{a'}$. Por otro lado, cada vez que pasamos por un punto crítico se produce un “salto” en cuanto a la clase (módulo difeomorfismo) de V_a y de W_a , e incluso de su tipo homotópico.

Un objetivo crucial para lo que resta del capítulo será entender esta dinámica para cualquier función de Morse f en una tríada. Es decir, primero probar que si un intervalo (c, d) no contiene valores críticos de f entonces $V_a \cong V_{a'}$, $W_a \cong W_{a'}$ y $W_a \subseteq W_{a'}$ es retracto por deformación fuerte para todos $a, a' \in (c, d)$ tales que $a < a'$. Y luego, tratar de entender cómo cambian $V_{a'}$ respecto de V_a , y $W_{a'}$ respecto de W_a cuando existe un único valor crítico b entre a y a' (es decir, $a < b < a'$ y no existe ningún valor crítico $b' \neq b$ tal que $a < b' < a'$). En todo esto será crucial el concepto de campo tipo gradiente así como el de adjunción de manijas, que se presentará en las secciones subsiguientes.

Para abordar los interrogantes recién planteados, comenzamos con una definición y un resultado.

Definición 2.13. *Decimos que (W, V, V') es un cobordismo producto (o cobordismo trivial) si existe un difeomorfismo $h : (W, V, V') \rightarrow (V \times [0, 1], V \times \{0\}, V \times \{1\})$.*

Teorema 2.2. *Sea (W, V, V') una tríada que admite una función de Morse sin puntos críticos. Entonces (W, V, V') es un cobordismo producto.*

Demostración. Tomemos $f : (W, V, V') \rightarrow [0, 1]$ una función de Morse que no tenga puntos críticos, y ξ un campo tipo gradiente para f . Como $\xi(f) > 0$ en toda W , cambiando ξ por $\frac{\xi}{\xi(f)}$ podemos suponer que $\xi(f) = 1$ en todo punto $p \in W$. Vamos a probar una serie de cosas respecto al flujo Γ de ξ :

1. En primer lugar, que para cada punto $p \in \overset{\circ}{W}$ existe un entorno abierto $p \in U_p \subseteq \overset{\circ}{W}$ y un número real positivo ε_p tal que Γ está definido en $U_p \times (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$. Esto sale de una aplicación directa del Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Veremos luego que esto mismo vale para puntos $p \in V$ (respectivamente $p \in V'$) pero tomando $U_p \subseteq W$ y estando Γ definido en $U_p \times [0, \varepsilon_p)$ (respectivamente en $U_p \times (-\varepsilon_p, 0]$).
3. A partir de los puntos anteriores, existirá una curva integral maximal $\gamma(t) = \Gamma(p, t)$ a ξ por cada punto $p \in W$ definida en un cierto intervalo I_p . Notemos que $\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = d_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t)) = d_{\gamma(t)} f(\xi_{\gamma(t)}) = \xi_{\gamma(t)}(f) = 1$, de donde $f \circ \gamma(t) =$

$f(p) + t$ y como $Im(f) = [0, 1]$ concluimos que $I_p \subseteq [-f(p), 1 - f(p)]$. Vamos a probar que de hecho $I_p = [-f(p), 1 - f(p)]$ viendo que las trayectorias integrales a ξ van desde V hasta V' (es decir, están definidas en intervalos maximales de la forma $I_p = [a_p, b_p]$ con $\gamma(a_p) \in V = f^{-1}(0)$ y $\gamma(b_p) \in V' = f^{-1}(1)$, incrementándose el valor de f a lo largo de γ bajo la relación $f \circ \gamma(t) = f(p) + t$, lo cual fuerza a que $[a_p, b_p] = [-f(p), 1 - f(p)]$).

Demostremos entonces los puntos 2 y 3. Dado un punto $p \in V$ por el **Lema 2.2** podemos escoger una carta adaptada (U_p, φ) y un abierto $0 \in U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\varphi(U_p) = U_1^+$ tal que $f \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi_*\xi$ se extienden a una función \hat{f} y un campo $\hat{\xi}$ en U_1 , respectivamente tales que $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = x_1$ y $\hat{\xi}(\hat{f}) = 1$ allí. En consecuencia, será $\hat{\xi} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y por lo tanto, dada una curva integral de $\hat{\xi}$ de la forma $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ será $\gamma_1(t) = \gamma_1(0) + t$ una función creciente. Esto nos dice que las curvas integrales a $\hat{\xi}$ que pasan por U_1^+ son la imagen bajo φ de curvas integrales a ξ . Por lo tanto, si tomamos $\varepsilon_p > 0$ y $0 \in U_2 \subseteq U_1$ tales que para todo $x \in U_2$ el flujo $\hat{\Gamma}$ de $\hat{\xi}$ esté definido en $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$, tendremos que $\Gamma(q, \cdot)$ estará definido en $[0, \varepsilon_p)$ para todo $q \in U'_p = \varphi^{-1}(U_2)$. Usando el mismo argumento en V' , tenemos que el flujo está definido en un intervalo alrededor de cada punto (abierto o semiabierto según la ubicación del punto) y que por lo tanto existe para cada $q \in W$ una curva integral maximal, con dominio $I_q \subseteq [-f(q), 1 - f(q)]$.

Por otro lado, volviendo a $p \in V$; si $q \in U''_p := U'_p \cap f^{-1}[0, \varepsilon_p)$ entonces $\hat{\Gamma}(\varphi(q), \cdot)$ está definido en $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ y como $\hat{f} \circ \hat{\Gamma}(\varphi(q), t) = f(q) + t$ deducimos que un tramo de esta curva integral se corresponde a uno de $\Gamma(q, \cdot)$ que conecta a q con V . Es decir que si $q \in U''_p$ entonces la curva integral por q parte desde V . Uniendo los U_p obtenemos un entorno U_0 de V cuyos puntos cumplen la condición recién nombrada.

Probemos ahora que todas las trayectorias de ξ van desde V hacia V' . Veremos que comienzan en V , de manera totalmente análoga se demuestra que terminan en V' . Acabamos de ver que existe un entorno U_0 de V tal que las trayectorias de todos sus puntos parten desde V . Sea $K = W \setminus U_0$. Usando el hecho de que cada punto $p \in K$ tiene un entorno U_p tal que $\Gamma(p, \cdot)$ está definido en $(-\varepsilon_p, 0]$ y la compacidad de K , deducimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que el flujo de todo punto de K está definido en $(-\varepsilon, 0]$. Supongamos entonces que la curva integral γ de un punto q no comenzara en V . Entonces debería ser $Im(\gamma) \subseteq K$ (pues los puntos de U_0 fluyen desde V), y por lo tanto el dominio de γ no estaría acotado inferiormente (puesto que desde los puntos de K siempre podemos fluir t para $t \in (-\varepsilon, 0]$). Pero como ya vimos, $Dom(\gamma) = I_q \subseteq [-f(q), 1 - f(q)]$ y es entonces acotado, lo cual es absurdo. El absurdo provino de suponer que existía un punto $q \in W$ cuya curva integral no partiera desde V .

Tenemos entonces todas las curvas integrales de ξ van desde V hacia V' . De aquí sale que $\Gamma : V \times [0, 1] \rightarrow W$ es biyectiva, y es un difeomorfismo local por el Teorema de la Función Inversa (al ser $\Gamma : V \times \{t\} \rightarrow f^{-1}(t)$ un difeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$ y ser $d\Gamma_{(p,t)}(\frac{d}{dt}|_{(p,t)}) = \xi_{\Gamma(p,t)}$ el cual es transversal a $f^{-1}(t)$). En

consecuencia, Γ nos da un difeomorfismo tal que $\Gamma(V \times \{0\}) = V$ y $\Gamma(V \times \{1\}) = V'$; y el cobordismo (W, V, V') es trivial. \square

Observación 2.2. *Si en el teorema anterior tomamos un campo tipo gradiente ξ cualquiera, como las trayectorias de ξ son una reparametrización de las de $\xi' = \frac{\xi}{\xi(f)}$, resultará también que todas las curvas integrales de ξ van desde V hacia V' .*

Notemos que como corolario del **Teorema 2.2**, si tenemos una función de Morse $f : (W, V, V') \rightarrow \mathbb{R}$ y no contiene valores críticos en un intervalo $[a, b]$, considerando la tríada $(f^{-1}[a, b], f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ tenemos que es un cobordismo producto, y en consecuencia $f^{-1}(c) \cong f^{-1}(a)$ para todo $c \in [a, b]$ y se puede construir un difeomorfismo $f^{-1}((-\infty, c]) \rightarrow f^{-1}((-\infty, d])$ para todo par $c, d \in (a, b]$ usando las trayectorias de un campo tipo gradiente ξ tal que $\xi(f) = 1$ en $f^{-1}([a, b])$. También se pueden construir retracciones por deformación fuerte $r : f^{-1}((-\infty, d]) \rightarrow f^{-1}((-\infty, c])$ para $c < d$ utilizando que el cilindro $f^{-1}(c) \times [c, d]$ se retrae a $f^{-1}(c) \times \{0\}$.

Otro corolario importante que se obtiene es el siguiente:

Teorema 2.3 (Collar Neighborhood Theorem). *Sea W una variedad compacta con borde. Entonces existe un entorno de ∂W difeomorfo a $W \times [0, 1)$.*

La demostración puede encontrarse en [Mil65, p. 23], así como el enunciado y la prueba del Bicollaring Theorem. Ambos resultados valen también sin la hipótesis de compacidad, y permiten probar el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sean (W_1, V_1, V'_1) y (W_2, V_2, V'_2) dos tríadas y $h : V'_1 \rightarrow V_2$ un difeomorfismo. Entonces existe una estructura diferenciable \mathcal{S} para $W_1 \cup_h W_2 = W_1 \sqcup W_2 / p \sim h(p)$ tal que las inclusiones $i : W_1 \hookrightarrow W_1 \cup_h W_2$ y $j : W_2 \hookrightarrow W_1 \cup_h W_2$ sean embeddings. Además, \mathcal{S} es única salvo difeomorfismos que dejen fijos $i(V_1)$, $i(V'_1) = j(V_2)$ y $j(V'_2)$.*

Sean $c_1 = (W_1, V_1, V'_1)$ y $c_2 = (W_2, V_2, V'_2)$ dos tríadas bajo las hipótesis del Teorema. Definimos su composición $c_1 \cdot c_2$ como la tríada $(W_1 \cup_h W_2, V_1, V'_2)$, la cual es única salvo difeomorfismo. Se puede probar también que si existen funciones de Morse $f_1 : c_1 \rightarrow [0, 1]$ y $f_2 : c_2 \rightarrow [1, 2]$, y campos tipo gradiente ξ_1, ξ_2 para f_1, f_2 respectivamente tales que $\xi_i(f_i) = 1$ en un entorno de V'_1 para $i = 1$ y de V_2 para $i = 2$; entonces existe una única estructura diferenciable para $W_1 \cup_h W_2$ tal que se cumplen las condiciones del **Teorema 2.4** pero además la función f dada por $f|_{W_1} = f_1$, $f|_{W_2} = f_2$ es de Morse en $(W_1 \cup_h W_2, V_1, V'_2)$ y admite un campo tipo gradiente ξ tal que $\xi|_{W_1} = \xi_1$ y $\xi|_{W_2} = \xi_2$.

Notemos que tomando $V_1 = V'_2 = \emptyset$, obtenemos que dadas dos variedades con borde M y N , y un difeomorfismo $h : \partial M \rightarrow \partial N$, existe una única estructura diferenciable \mathcal{S} en $M \cup_h N$ compatible con las estructuras de M y N , salvo difeomorfismo que deje fijo a $i(\partial M) = j(\partial N)$.

2.3. Cobordismos elementales y adjunción de manijas

Definición 2.14. Decimos que (W, V, V') es un cobordismo elemental si admite una función de Morse con un único punto crítico.

Basándonos en el ejemplo del toro, lo que vamos a querer hacer dada una tríada (W, V, V') y una función de Morse $f : (W, V, V') \rightarrow [a, b]$ es descomponer al cobordismo (W, V, V') en varios cobordismos (W_i, V_i, V'_i) de la forma $(f^{-1}([a_i, b_i]), f^{-1}(a_i), f^{-1}(b_i))$ tales que f tenga exactamente un punto crítico en cada W_i , ubicado en $f^{-1}(a_i, b_i)$; siendo así los (W_i, V_i, V'_i) cobordismos elementales. A partir de esto, si entendemos las funciones de Morse con un único punto crítico (es decir, cómo evolucionan W_a y V_a en tales funciones), podremos entender funciones de Morse arbitrarias en una tríada; y así poder recuperar en el caso general la forma de la variedad W a través de una función de Morse f . Por eso, vamos a concentrarnos en esta sección en entender los cobordismos elementales.

2.3.1. Cirugía

Comenzamos definiendo un concepto que nos ayudará a entender los cobordismos elementales y juega un rol muy importante en topología en altas dimensiones.

Definición 2.15 (Cirugía, adjunción de manijas). Sea V una variedad diferencial de dimensión $n - 1$. Supongamos que tenemos un embedding $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow V$ para algún $0 \leq k \leq n$. Entonces $V_\varphi = V \setminus \varphi(S^{k-1} \times D^{n-k})$ es una variedad con borde $\varphi(S^{k-1} \times S^{n-k-1})$. Como el borde de $D^k \times S^{n-k-1}$ es $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ podemos considerar la variedad $\chi(V, \varphi) = V_\varphi \cup_\varphi D^k \times S^{n-k-1}$ que se obtiene pegando V_φ y $D^k \times S^{n-k-1}$ por su borde vía φ . El embedding φ se denomina embedding característico. Decimos que una variedad V' se obtiene de V aplicando cirugía de tipo $(k, n - k)$ (o adjuntando una k -manija) si existe un embedding característico $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow V$ tal que $\chi(V, \varphi) \cong V'$.

A partir de la definición, si tenemos un embedding característico $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow V$, entonces $\chi(V, \varphi)$ se obtiene de V removiéndole el producto de un disco con una esfera $\varphi(S^{k-1} \times D^{n-k})$ y pegándole la variedad dual $D^k \times S^{n-k-1}$ por su borde. Veamos algunos ejemplos para entender el efecto geométrico de una cirugía:

1. Si tomamos $V = S^1$, $k = 1$ y un embedding $\varphi : S^0 \times D^1 \rightarrow S^1$ que mande $\{1\} \times D^1 \mapsto b$ y $\{-1\} \times D^1 \mapsto d$, como muestra la **Figura 2.5**, obtenemos que $\chi(S^1, \varphi) \cong S^1 \sqcup S^1$.
2. Si V es una variedad de dimensión 2 y le aplicamos cirugía de tipo $(1, 2)$, estaremos removiendo el interior de dos discos embebidos vía $\varphi : S^0 \times D^2 \rightarrow V$ y pegando por su borde un cilindro $D^1 \times S^1$, lo cual consiste en “pegar una

manija” (de ahí el nombre de este procedimiento) como se ve en la **Figura 2.6**. Si aplicamos esto a $V = S^2$, obtenemos una variedad difeomorfa al toro T , tal como se puede ver en la **Figura 2.7**. Iterando esta construcción, se pueden obtener las superficies cerradas orientables de género g , o toros con g -manijas.

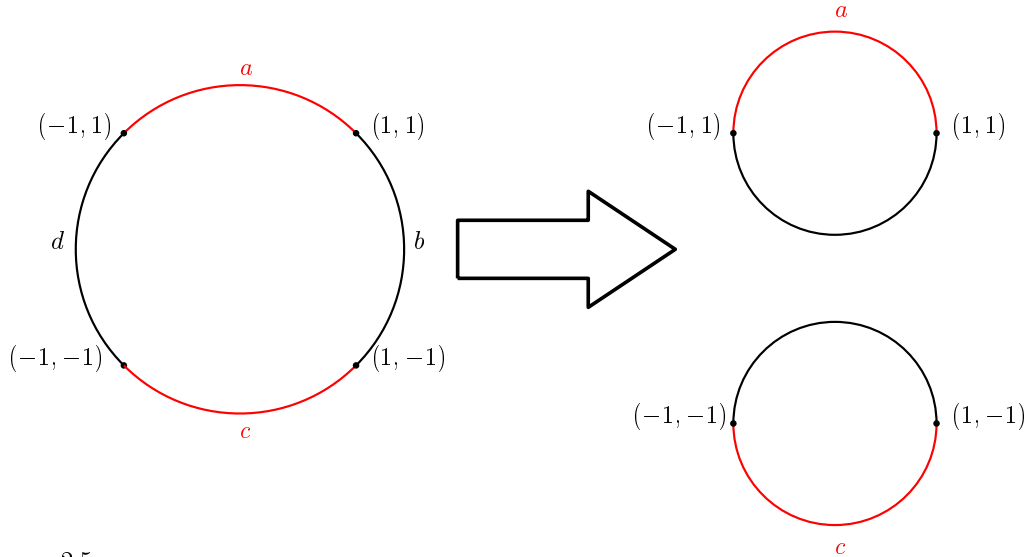


Figura 2.5

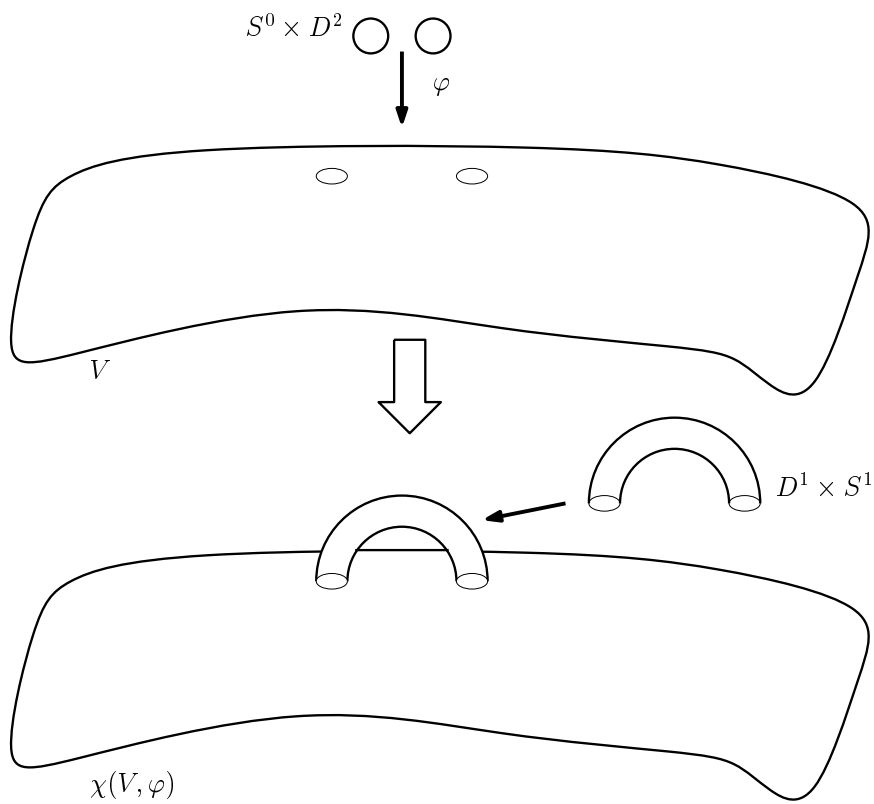


Figura 2.6

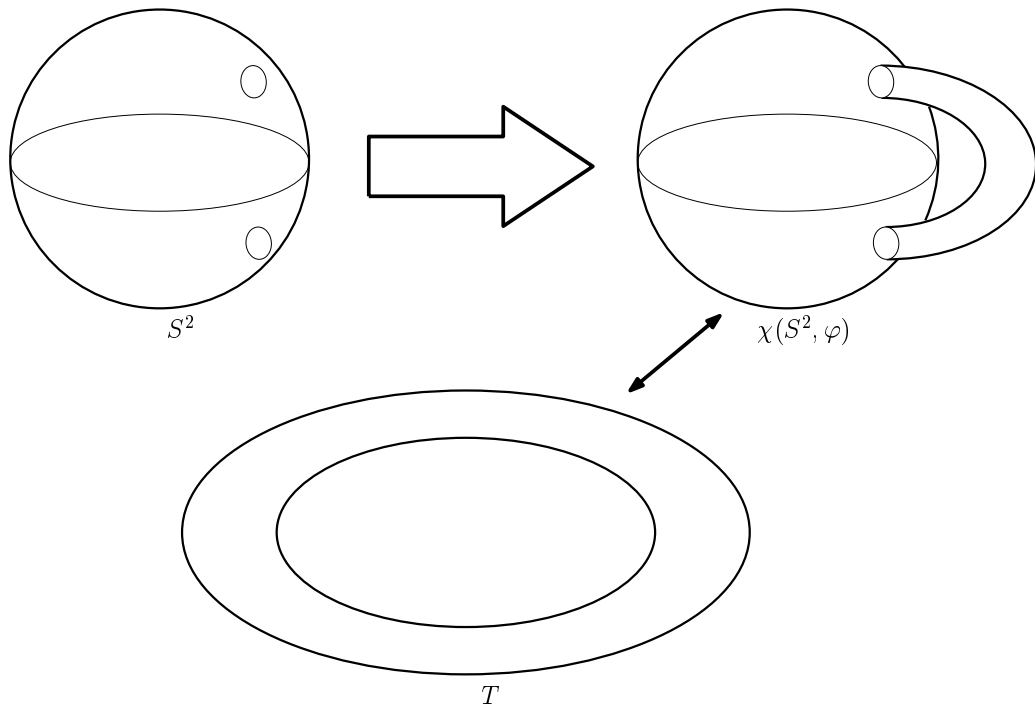


Figura 2.7

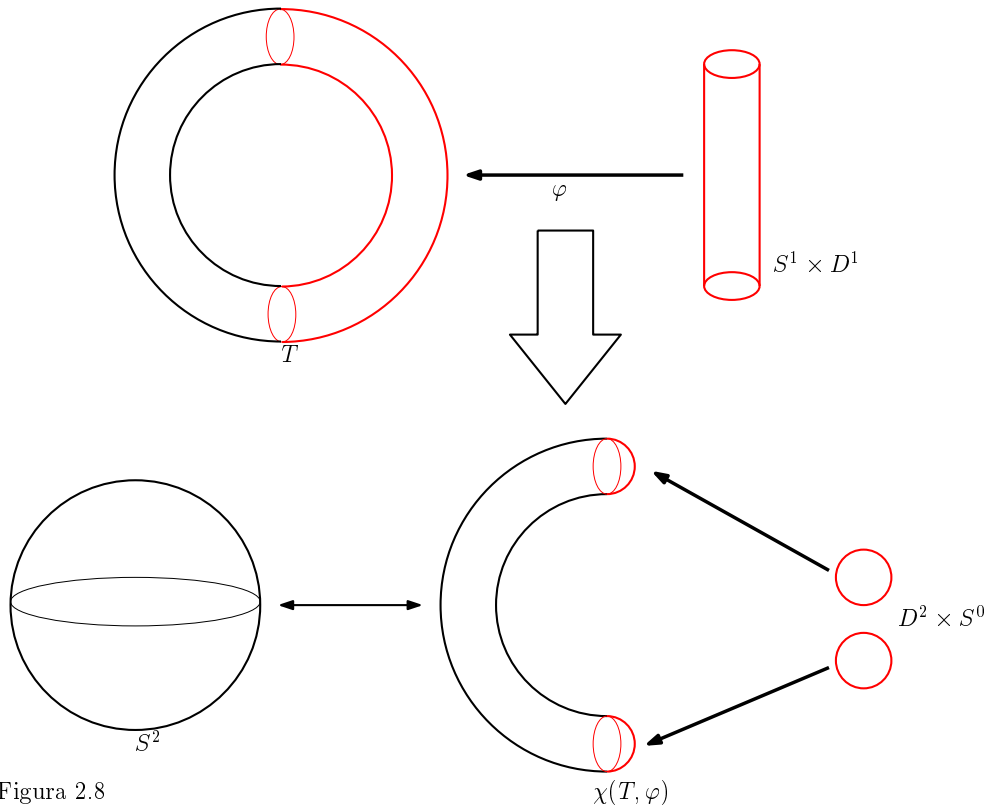


Figura 2.8

3. Notemos que si al toro T le aplicamos cirugía de tipo $(2, 1)$ a través del cilindro

embebido $\varphi : S^1 \times D^1 \rightarrow T$ como “medio toro” (ver **Figura 2.7**), al remover el interior de dicho cilindro y pegar por el borde dos discos disjuntos obtenemos una superficie difeomorfa a S^2 . Es decir que aplicar cirugía de tipo $(2, 1)$ pareciera ser la operación inversa de aplicar cirugía de tipo $(1, 2)$. Observaremos a continuación que este fenómeno ocurre en general.

4. Dada una variedad V de dimensión $n - 1$, el efecto de aplicar una cirugía de tipo $(0, n)$ es $V \sqcup S^{n-1}$. Para poder aplicar cirugía de tipo $(n, 0)$, V debe tener una esfera embebida $S \cong S^{n-1}$ (que será una componente conexa de V al ser abierta y cerrada) y el efecto de dicha cirugía es la variedad $V \setminus S^n$.

Observación 2.3. *Sea V una variedad de dimensión $n - 1$, $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k}$ un embedding característico y $V' = \chi(V, \varphi)$ la variedad que se obtiene de V aplicando cirugía de tipo $(k, n - k)$. Por definición de cirugía, V' tiene embebida una copia de $D^k \times S^{n-k-1}$, lo cual induce (permutando las variables) un embedding $\bar{\varphi} : S^{n-k-1} \times D^k \rightarrow V'$ de modo que podemos aplicar cirugía de tipo $(n - k, k)$ y obtener una variedad $V'' = \chi(V', \bar{\varphi})$. Notemos que como $\bar{\varphi}(x, y) = \varphi(y, x)$ para cada par $(x, y) \in S^{n-k-1} \times S^{k-1}$, estamos pegando $D^{n-k} \times S^{k-1} \cong S^{k-1} \times D^{n-k}$ bajo el mismo difeomorfismo con el que lo removimos inicialmente (habiendo removido previamente la copia de $D^k \times S^{n-k-1}$ que se pegó en la primera cirugía), con lo cual $V'' \cong V$.*

La definición de cirugía que venimos utilizando está basada en [Ran03] y es muy útil a la hora de ver geoméricamente el efecto de una cirugía. Sin embargo, de aquí en adelante utilizaremos otra definición dada en [Mil65] que será más conveniente para las construcciones y demostraciones que haremos luego. Dado un disco D centrado en 0 en \mathbb{R}^j (abierto o cerrado), vamos a notar $D_0 = D \setminus \{0\}$.

Definición 2.16. *Sea V una variedad diferencial de dimensión $n - 1$, $0 \leq k \leq n$ un entero y $\varphi : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$ un embedding. Consideramos el espacio topológico $\chi'(V, \varphi)$ que se obtiene a través del push out*

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} \times \mathring{D}_0^{n-k} & \xrightarrow{\varphi} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \bar{\rho} \\ \mathring{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \chi'(V, \varphi) \end{array}$$

Donde si identificamos $\mathring{D}_0^{n-k} \cong (0, 1) \times S^{n-k-1}$ y $\mathring{D}_0^k \cong (0, 1) \times S^{k-1}$ entonces $\rho(u, \theta v) = (\theta u, v)$ para todos $\theta \in (0, 1)$, $u \in S^{k-1}$ y $v \in S^{n-k-1}$; resultando ser ρ un embedding. Entonces $\chi'(V, \varphi)$ admite una única estructura de variedad diferenciable tal que $\bar{\rho}, \bar{\varphi}$ sean embeddings. Decimos que V' se obtiene de V aplicando cirugía de tipo $(k, n - k)$ si $V' \cong \chi'(V, \varphi)$ para algún embedding característico $\varphi : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$.

Nuestro objetivo ahora será probar que efectivamente existe y es única dicha estructura diferenciable, y que una variedad V' se obtiene de otra variedad V aplicando

2.3. COBORDISMOS ELEMENTALES Y ADJUNCIÓN DE MANIJAS

cirugía de tipo $(k, n - k)$ según la **Definición 2.15** si y sólo si se obtiene mediante dicha operación de acuerdo a la **Definición 2.16**. Para eso, vamos a necesitar un lema sobre push out's.

Lema 2.4. Sean A, X, Y espacios topológicos, $f : A \rightarrow X$ y $g : A \rightarrow Y$ dos funciones subsespacio. Sea $C \subseteq A$ tal que $B = f(C)$ es abierto en X y $\overline{B} \subseteq f(A)$. Consideremos los push out

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \setminus C & \xrightarrow{f_1} & X \setminus B \\ \downarrow g_1 & & \downarrow \bar{g}_1 \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}_1} & Z_2 \end{array}$$

Donde f_1, g_1 vienen dadas por las restricciones de f y g a $A \setminus C$ respectivamente. Entonces Z_1 es homeomorfo a Z_2 .

Demostración. Sea $j : X \setminus B \rightarrow X$ la inclusión. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A \setminus C & \xrightarrow{f_1} & X \setminus B & & \\ \downarrow g_1 & & \downarrow \bar{g}_1 & \searrow j & \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}_1} & Z_2 & & X \\ & \searrow \bar{f} & \downarrow \alpha & \swarrow \bar{g} & \\ & & Z_1 & & \end{array}$$

Como $\bar{g} \circ j \circ f_1 = \bar{f} \circ g_1$, por la propiedad universal del push out existe una única función continua $\alpha : Z_2 \rightarrow Z_1$ que hace conmutar el diagrama anterior. Para ir en el otro sentido, necesitaremos definir $h : X \rightarrow Z_2$ tal que en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z_1 \\ & \searrow \bar{f}_1 & \downarrow \beta \\ & & Z_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & Z_1 \\ & \searrow \bar{f}_1 & \downarrow \beta \\ & & Z_2 \end{array}} \right\} h$$

Sea $h \circ f = \bar{f}_1 \circ g$. Lo que haremos es definir $h|_{X \setminus B} = \bar{g}_1$ y forzados por la condición de conmutatividad $h|_{\overline{B}}(x) = \bar{f}_1 \circ g \circ f^{-1}(x)$ usando que $\overline{B} \subseteq f(A)$. Por la conmutatividad de los primeros diagramas se puede ver que las dos funciones recién definidas coinciden en $(X \setminus B) \cap \overline{B} = \partial B$, y al ser continuas y ser $\{X \setminus B, \overline{B}\}$ un cubrimiento de X por finitos subespacios cerrados, deducimos que h está bien definida y es continua. Además por cómo la definimos $h \circ f = \bar{f}_1 \circ g$, con lo que existe una única función continua $\beta : Z_1 \rightarrow Z_2$ que hace conmutar el diagrama anterior.

Usando la conmutatividad de los diagramas anteriores y el hecho de que $\bar{f}(Y) \cup \bar{g}(X) = Z_1$ y $\bar{f}_1(Y) \cup \bar{g}_1(X \setminus B) = Z_2$ se prueba que $\alpha \circ \beta = id_{Z_1}$ y $\beta \circ \alpha = id_{Z_2}$, siendo así $\beta : Z_1 \rightarrow Z_2$ un homeomorfismo. \square

Consideremos un embedding característico $\varphi : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$ de acuerdo a la **Definición 2.16**. Usando los lemas, vamos a probar que $\chi'(V, \varphi) \cong \chi(V, \tilde{\varphi})$ (en principio homeomorfas, y luego difeomorfas) donde $\tilde{\varphi}$ se obtiene de φ restringiéndose a $S^{k-1} \times \underline{D}^{n-k}$, siendo $\underline{D}^j := \{x \in \mathbb{R}^j : |x| \leq \frac{1}{2}\}$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$ (es decir que nos estaríamos restringiendo al producto de la esfera por el disco cerrado de radio $\frac{1}{2}$). La idea va a ser entonces partiendo de un push out donde se identifican abiertos de los espacios involucrados (vía un difeomorfismo) ir removiendo abiertos en esas identificaciones para pasar a tener uno en el que las identificaciones estén sólo en el borde.

Como $\rho(S^{k-1} \times \{x \in \mathbb{R}^{n-k} : \frac{1}{2} < |x| < 1\})$ es abierto en $\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$ y su clausura está contenida en $Im(\rho)$, por el **Lema 2.4** tenemos un homeomorfismo entre $\chi'(V, \varphi)$ y Z_1 , donde Z_1 viene dado por el segundo push out que se presenta a continuación.

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} \times \mathring{D}_0^{n-k} & \xrightarrow{\varphi} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) & S^{k-1} \times \underline{D}_0^{n-k} & \xrightarrow{\varphi_1} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \bar{\rho} & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \bar{\rho}_1 \\ \mathring{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \chi'(V, \varphi) & \underline{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & Z_1 \end{array}$$

Por otra parte, como $\varphi_1(S^{k-1} \times \mathring{D}_0^{n-k})$ es un subespacio abierto de $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\})$ cuya clausura es precisamente $Im(\varphi_1)$, aplicando nuevamente el **Lema 2.4** obtenemos un homeomorfismo $Z_1 \cong Z_2$, donde Z_2 se obtiene en el push out del cuadrado derecho del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{k_1} & S^{k-1} \times \underline{S}^{n-k-1} & \xrightarrow{\varphi_2} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) \\ \downarrow i & & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \bar{\rho}_2 \\ D^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{k_2} & \underline{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & Z_2 \end{array}$$

Donde notamos $\underline{S}^j = \{x \in \mathbb{R}^{j+1} : |x| = \frac{1}{2}\}$, $k_1(x, y) = (x, \frac{y}{2})$, $k_2(x, y) = (\frac{x}{2}, y)$ e $i : S^{k-1} \times S^{n-k-1} \rightarrow D^k \times S^{n-k-1}$ a la inclusión, resultando ser el primer cuadrado conmutativo por la definición de $\rho(u, \theta v) = (\theta u, v)$. Al ser k_1, k_2 homeomorfismos, deducimos que el cuadrado grande es un push out también. Pero si tomamos el embedding $\tilde{\varphi} : S^{k-1} \times \underline{D}^{n-k} \xrightarrow{k_3} S^{k-1} \times \underline{D}^{n-k} \xrightarrow{\varphi} V$ donde $k_3(x, y) = (x, \frac{y}{2})$ es una extensión de k_1 , al ser $\varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) = \tilde{\varphi}(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k})$ tenemos un push out

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & V \setminus \tilde{\varphi}(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{\rho}_2 \\ D^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Z_2 \end{array}$$

Con lo cual concluimos que Z_2 es homeomorfo a $\chi(V, \tilde{\varphi})$. De aquí se obtiene que $\chi'(V, \varphi)$ es Hausdorff y con base numerable, al ser homeomorfo a la variedad $\chi(V, \tilde{\varphi})$, lo cual en principio no era obvio ya que se obtiene pegando variedades por abiertos.

En el diagrama que define a $\chi'(V, \varphi)$ se puede ver fácilmente (usando que φ es

embedding y por lo tanto abierta) que $\bar{\rho}$ y $\bar{\varphi}$ son subespacio abierto. Como $\{\bar{\varphi}(\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}), \bar{\rho}(V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}))\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\chi'(V, \varphi)$, podemos dar un atlas para este espacio empujando las cartas de $\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$ y $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\})$ vía $\bar{\varphi}$ y $\bar{\rho}$ respectivamente. Es inmediato que la estructura diferenciable dada por este atlas es la única que hace que $\bar{\rho}$ y $\bar{\varphi}$ sean embeddings.

Por otra parte, a partir del **Lema 2.4**, tenemos un homeomorfismo $\delta : \chi(V, \tilde{\varphi}) \rightarrow \chi'(V, \varphi)$ dado por las inclusiones

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{k-1} \times \underline{S}^{n-k-1} & \xrightarrow{\varphi_2} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) & & \\
 \downarrow \rho_2 & & \downarrow \bar{\rho}_2 & \searrow & \\
 \underline{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} & \chi(V, \tilde{\varphi}) & & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \\
 \downarrow & & \downarrow \delta & \swarrow & \\
 \mathring{D}^k \times S^{n-k-1} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \chi'(V, \varphi) & &
 \end{array}$$

Como las inclusiones de $\underline{D}^k \times S^{n-k-1}$ y $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k})$ en $\chi'(V, \varphi)$ vía el homeomorfismo δ son embeddings, si copiamos la estructura diferenciable de $\chi'(V, \varphi)$ en $\chi(V, \tilde{\varphi})$ vía δ^{-1} (dándonos una estructura \mathcal{S}' allí posiblemente distinta de la original \mathcal{S}) tendremos que por el **Teorema 2.4** las dos estructuras son difeomorfas, y en consecuencia si $h : (\chi(V, \tilde{\varphi}), \mathcal{S}') \rightarrow (\chi(V, \tilde{\varphi}), \mathcal{S})$ es un difeomorfismo entre ellas, será $h \circ \delta^{-1} : \chi'(V, \varphi) \rightarrow (\chi(V, \tilde{\varphi}), \mathcal{S})$ un difeomorfismo. De aquí concluimos que si V' se obtiene de V haciendo cirugía de acuerdo a la **Definición 2.16**, entonces también se obtiene de acuerdo a la **Definición 2.15**.

Recíprocamente, si tenemos un embedding característico $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow V$, podemos extenderlo a $\tilde{\varphi} : S^{k-1} \times 2\mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$ (esto puede probarse usando el argumento expuesto en [Mil65, Cor. 3.6]) y por lo argumentado hasta aquí resultará que $\chi(V, \varphi)$ es difeomorfa a $\chi'(V, \tilde{\varphi})$, resultando ambos tipos de cirugía equivalentes. Utilizaremos de aquí en adelante la **Definición 2.16** y notaremos $\chi(V, \varphi)$ al efecto de aplicar cirugía a la variedad V .

2.3.2. Traza de una cirugía y cobordismos elementales

Lo que vamos a hacer ahora es relacionar adjunción de manijas con cobordismos elementales. Más precisamente, vamos a probar que dadas V, V' variedades de dimensión $(n - 1)$ son equivalentes:

1. Existe una tríada (W, V, V') y una función de Morse f allí con un único punto crítico de índice k .
2. V' se obtiene de V aplicando cirugía de tipo $(k, n - k)$

El primer paso para eso es demostrar el siguiente teorema ([Mil65, Thm. 3.12]):

Teorema 2.5. *Si $V' \cong \chi(V, \varphi)$ se puede obtener de V vía cirugía de tipo $(k, n - k)$, entonces existe un cobordismo elemental (W, V, V') y una función de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente un punto crítico, de índice k .*

Demostración. Queremos construir una variedad W que “conecte” a V y V' como componentes disjuntas de su borde. Dado que tanto V como V' contienen a una subvariedad difeomorfa a $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k})$, es razonable pedir que la “parte” de W que conecta a dichas subvariedades sea (salvo difeomorfismo) $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) \times I$. La otra “parte” debería consistir en un cobordismo entre $S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}$ y $\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$ (bajo la misma definición de cobordismo con la que venimos trabajando pero omitiendo el requisito de que las variedades involucradas sean compactas). Como la tríada (W, V, V') debe admitir una función de Morse con exactamente un punto crítico y de índice k y el cobordismo que estamos construyendo es trivial en la parte $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}) \times I$, concluimos que tal punto crítico debería estar en la parte correspondiente al cobordismo entre $S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}$ y $\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$. Por lo tanto, intentaremos primero construirnos un cobordismo entre esas dos variedades que admita una función de Morse con exactamente un punto crítico de índice k .

Para eso, lo que vamos a utilizar es la forma local de una función de Morse alrededor de un punto crítico de índice k . Sabemos que en tal contexto existen coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ de modo que la forma local de f es $f(x, y) = c - |x|^2 + |y|^2$. Supongamos que $c = 0$, y estudiemos un poco las curvas de nivel de f como función de Morse en \mathbb{R}^n . Dado un número real $a \neq 0$, como es valor regular de f , $f^{-1}(a)$ es subvariedad regular de \mathbb{R}^n de codimensión 1, dada por la ecuación $-|x|^2 + |y|^2 = a$. Tomando $a = -1$ se obtiene la ecuación

$$|x|^2 - |y|^2 = 1$$

De modo que si $(x, y) \in f^{-1}(-1)$, $(|x|, |y|)$ está en la hipérbola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$, la cual sabemos que admite una parametrización $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto (\cosh \theta, \sinh \theta)$. En consecuencia, todo punto $(x, y) \in f^{-1}(-1)$ se escribe como $(x, y) = (\cosh \theta u, \sinh \theta v)$ para ciertos $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $u \in S^{k-1}$ y $v \in S^{n-k-1}$ (de hecho hay unicidad salvo que $y = 0$, caso en el cual $(x, 0)$ se corresponde a $(0, x, v)$ para cualquier $v \in S^{n-k-1}$). Para trabajar con $\theta \in [0, 1)$ (lo cual será conveniente para las construcciones posteriores), vamos a restringirnos al abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : |x||y| < \sinh(1) \cosh(1)\}$, en cuyo caso tenemos un difeomorfismo $\beta : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow f^{-1}(-1)$ dado por $\beta(u, \theta v) = (\cosh \theta u, \sinh \theta v)$, donde identificamos $[0, 1) \times S^{n-k-1}$ con \mathring{D}^{n-k} vía $(\theta, v) \mapsto \theta v$. De manera totalmente análoga, tenemos un difeomorfismo $\gamma : \mathring{D}^k \times S^{n-k-1} \rightarrow f^{-1}(1)$ dado por $\gamma(\theta u, v) = (\sinh \theta u, \cosh \theta v)$. Esto motiva que consideremos la subvariedad con borde de \mathbb{R}^n

$$L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : -1 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq 1, |x||y| < \sinh(1) \cosh(1)\}$$

Notemos que $L_k \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada pero no cerrada, y por lo tanto no es compacta. Si notamos $L_k^- = f^{-1}(-1)$ y $L_k^+ = f^{-1}(1)$ (donde estamos tomando $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n :$

$|x||y| < \sinh(1) \cosh(1)$ como dominio para f), tenemos una tríada de variedades no compactas (L_k, L_k^-, L_k^+) con $L_k^- \cong S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}$ y $L_k^+ \cong \mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$. En la **Figura 2.9** se grafica la región $L_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (la cual queda encerrada por las hipérbolas $|x||y| = \sinh(1) \cosh(1)$ marcadas en negro y $-x^2 + y^2 = \pm 1$ marcadas en rojo) representándose L_1^+, L_1^- (que son las porciones de las hipérbolas $-|x|^2 + |y|^2 = \pm 1$ delimitadas por $|x||y| = \sinh(1) \cosh(1)$) y el diagrama de flujo del campo $\xi(x, y) = (-x, y)$ tipo gradiente para f . Se ve claramente que en $U_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ las curvas integrales son hipérbolas y van desde L_1^- hacia L_1^+ , que sobre el eje x dichas trayectorias van desde ∞ hacia 0 y que sobre el eje y van desde 0 hacia $+\infty$.

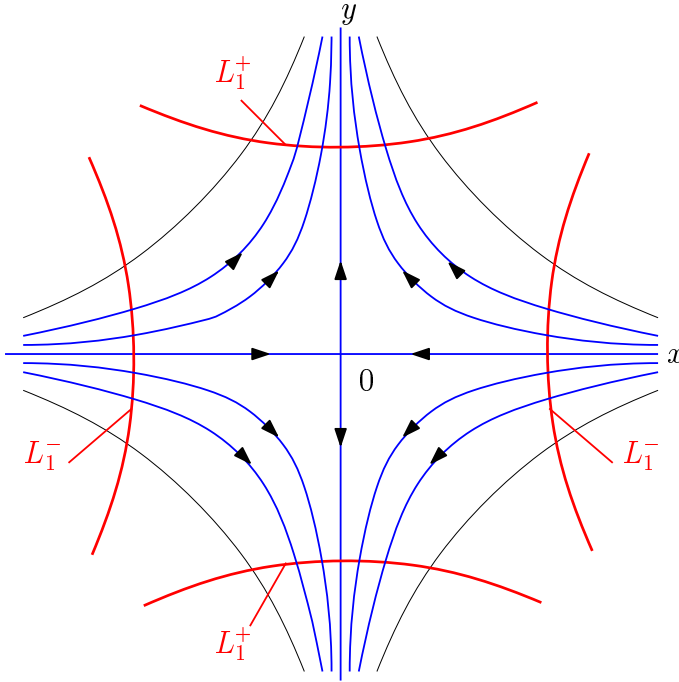


Figura 2.9

Volviendo al caso general, como (L_k, L_k^-, L_k^+) nos da efectivamente un cobordismo entre $S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k}$ y $\mathring{D}^k \times S^{n-k-1}$, lo que tendríamos que hacer es decir cómo pegar esta parte de lo que será el cobordismo final con la otra, que será $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \times [-1, 1]$. Vamos a pegarlas por los abiertos $\varphi(S^{k-1} \times \mathring{D}_0^{n-k}) \times [-1, 1]$ y $L_k \cap U_k$, donde $U_k := (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} \cup \mathbb{R}^k \times \{0\})^c$, estableciendo un difeomorfismo entre ellos. Dicho difeomorfismo se construirá identificando las curvas integrales de los campos tipo gradiente $\frac{d}{dt}$ correspondiente a la función de Morse $g : V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(q, t) = t$, y $\xi = (-x, y)$ correspondiente a la función f en L_k ; identificando entre sí puntos al mismo nivel para f y g respectivamente. Escribamos esto formalmente.

Consideramos el flujo Γ de ξ en \mathbb{R}^n . Por definición, la curva integral por un punto (x, y) es $\gamma(t) = (e^{-t}x, e^ty)$ y tiene como dominio todo \mathbb{R} . Además, es claro que curvas en U_k permanecen siempre allí. Como $f \circ \gamma(t) = -e^{-2t}|x|^2 + e^{2t}|y|^2$ tiende a $+\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y a $-\infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$ para $(x, y) \in U_k$, deducimos

que $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva. Dado $(x, y) \in L_k \cap U_k$, si tomamos t_0 y t_1 tales que $f \circ \gamma(t_0) = -1$ y $f \circ \gamma(t_1) = 1$ tenemos que $f \circ \gamma(t) \in L_k \cap U_k$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Por lo tanto, las curvas integrales a ξ en $L_k \cap U_k$ van todas desde L_k^- hasta L_k^+ , como se ve gráficamente en la **Figura 2.9**. Podemos definir una función $s : L_k \cap U_k \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea la única que verifique $f \circ \Gamma(x, s(x, t)) = t$, la cual será diferenciable por el Teorema de la Función Implícita. Esto nos da un difeomorfismo $\delta : f^{-1}(-1) \cap U_k \times [-1, 1] \rightarrow L_k \cap U_k$ dado por $\delta(x, t) = \Gamma(x, s(x, t))$, cuya inversa es $\rho(y) = (\Gamma(y, s(y, -1)), f(y))$. Tenemos entonces dos difeomorfismos

$$S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}_0^{n-k} \times [-1, 1] \xrightarrow{\beta \times id} f^{-1}(-1) \cap U_k \times [-1, 1] \xrightarrow{\delta} L_k \cap U_k$$

Cuya composición nos da $\Phi : S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}_0^{n-k} \times [-1, 1] \rightarrow L_k \cap U_k$, de modo que tenemos un push out

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} \times \overset{\circ}{D}_0^{n-k} \times [-1, 1] & \xrightarrow{\varphi \times id} & V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \times [-1, 1] \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \overline{\Phi} \\ L_k & \xrightarrow{\overline{\varphi \times id}} & \omega(V, \varphi) \end{array}$$

Podemos darle a $\omega(V, \varphi)$ una estructura de variedad de modo que $\overline{\varphi \times id}$, $\overline{\Phi}$ sean embeddings, la cual es única. La demostración sigue los mismos pasos que hicimos con la **Definición 2.16** de cirugía, debiendo usarse también el siguiente lema para probar que $\omega(V, \varphi)$ es Hausdorff (el cual se puede encontrar en [Bro06, Prop. 4.6.5]).

Lema 2.5. Sean A, X, Y tres espacios topológicos, $f : A \rightarrow Y$ una función continua, $i : A \rightarrow X$ subespacio cerrado. Consideramos el espacio de adjunción

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_f Y \end{array}$$

Si se verifican:

1. X e Y son Hausdorff .
2. Para todo $x \in X \setminus A$, existe U abierto de X tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus A$ (lo cual se cumple por ejemplo si X es regular).
3. $A \subseteq X$ es retracto de entorno.

Entonces $X \cup_f Y$ es Hausdorff .

Si notamos $\omega(V, \varphi)^- = \overline{\Phi(V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \times \{-1\})} \cup \overline{\varphi \times id}(L_k^-)$ y $\omega(V, \varphi)^+ = \overline{\Phi(V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \{0\}) \times \{1\})} \cup \overline{\varphi \times id}(L_k^+)$, se puede ver a partir de todo lo anterior que $(\omega(V, \varphi), \omega(V, \varphi)^-, \omega(V, \varphi)^+)$ es una tríada que nos da un cobordismo elemental entre V y $\chi(V, \varphi)$, admitiendo una función de Morse $\tilde{f} : \omega(V, \varphi) \rightarrow [-1, 1]$ tal que $\tilde{f} \circ \overline{\varphi \times id} = f$ y $\tilde{f} \circ \overline{\Phi} = g$. Algunos detalles son explicados en [Mil65, p. 31].

□

Para probar el otro sentido de la equivalencia entre los puntos 1. y 2. más arriba, estudiaremos algunos aspectos de los cobordismos elementales, centrándonos en cómo son las trayectorias de un campo tipo gradiente allí.

Sea (W, V, V') una tríada, $f : W \rightarrow [a, b]$ una función de Morse con un único punto crítico p de índice k , ξ un campo tipo gradiente para f y Γ el flujo de ξ . Cuando no tenemos puntos críticos, por el **Teorema 2.2** todas las curvas integrales de ξ van desde V hasta V' . Sin embargo, esto ya no ocurre cuando tenemos puntos críticos. En efecto, si tomamos una carta (U, ψ) con $\psi(U) = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\psi(p) = 0$ tal que $f \circ \psi^{-1}(x, y) = c - |x|^2 + |y|^2$ y $\psi_*\xi(x, y) = (-x, y)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cap B(0, r)$ (y siendo $c = f(p)$); sabemos que la curva integral γ por el punto $\psi^{-1}(x, y)$ verifica $\psi \circ \gamma(t) = (e^{-t}x, e^ty)$. En consecuencia, si $y = 0$ será $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$ y si $x = 0$ será $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = p$, de donde en tales casos las curvas integrales no van de V a V' . Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 2.17. *Sea f una función de Morse en una tríada (W, V, V') y p un punto crítico tal que $f(p) = c$. Sea $c' < c$ un punto en la imagen de f tal que no hay valores críticos en $[c', c)$. Definimos el disco izquierdo de p a nivel c' como*

$$D_L(p) = \{q \in W : \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(q, t) = p, f(q) \geq c'\}$$

Del mismo modo, definimos la esfera izquierda a nivel c' como

$$S_L(p) = \{q \in W : \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(q, t) = p, f(q) = c'\}$$

Definición 2.18. *Sea f una función de Morse en una tríada (W, V, V') y p un punto crítico tal que $f(p) = c$. Sea $c' > c$ un punto en la imagen de f tal que no hay valores críticos en $(c, c']$. Definimos el disco derecho de p a nivel c' como*

$$D_R(p) = \{q \in W : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma(q, t) = p, f(q) \leq c'\}$$

Del mismo modo, definimos la esfera derecha a nivel c' como

$$S_R(p) = \{q \in W : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma(q, t) = p, f(q) = c'\}$$

Para entender mejor estas definiciones, vamos a dar un ejemplo extraído de [Mil65, Fig. 3.2] e ilustrado en la **Figura 2.10**. Consideramos el “pantalón” P que es la traza del cobordismo $(P, S^1 \sqcup S^1, S^1)$ con la función de Morse altura, que se obtiene de considerar la porción del toro $f^{-1}([R+r, 2R+r])$ representado en la **Figura 2.3**. Reescalamos la función f de modo que su imagen sea $[0, 1]$. Notemos (P, P_1, P_2) a la tríada subyacente. Si notamos p al único punto crítico, que tiene índice 1, resulta que precisamente hay dos trayectorias no constantes que convergen a p cuando $t \rightarrow +\infty$, dándonos su unión junto al punto p el conjunto $D_L(p)$ (a nivel 0) marcado en la figura que efectivamente resulta ser un disco de dimensión 1; y también hay exactamente dos trayectorias no constantes que tienden a p cuando

$t \rightarrow -\infty$, cuya unión junto al punto p nos da $D_R(p)$ (a nivel 1), el cual es un disco de dimensión 1 embebido en P . f tiene un máximo sobre $D_L(p)$ en p y un mínimo restringida a $D_R(p)$ en p , correspondiéndose dichas trayectorias con la calidad de punto silla de p . La esfera $S_L(p) \cong S^0$ consiste en los dos puntos $\{q_1, q_2\}$ marcados en la figura, que se corresponden a la intersección entre $D_L(p)$ y $P_1 \cong S^1 \sqcup S^1$. Del mismo modo, la esfera $S_R(p)$ consiste en el par de puntos $\{r_1, r_2\}$ que se obtiene intersecando $D_R(p)$ con $P_2 \cong S^1$.

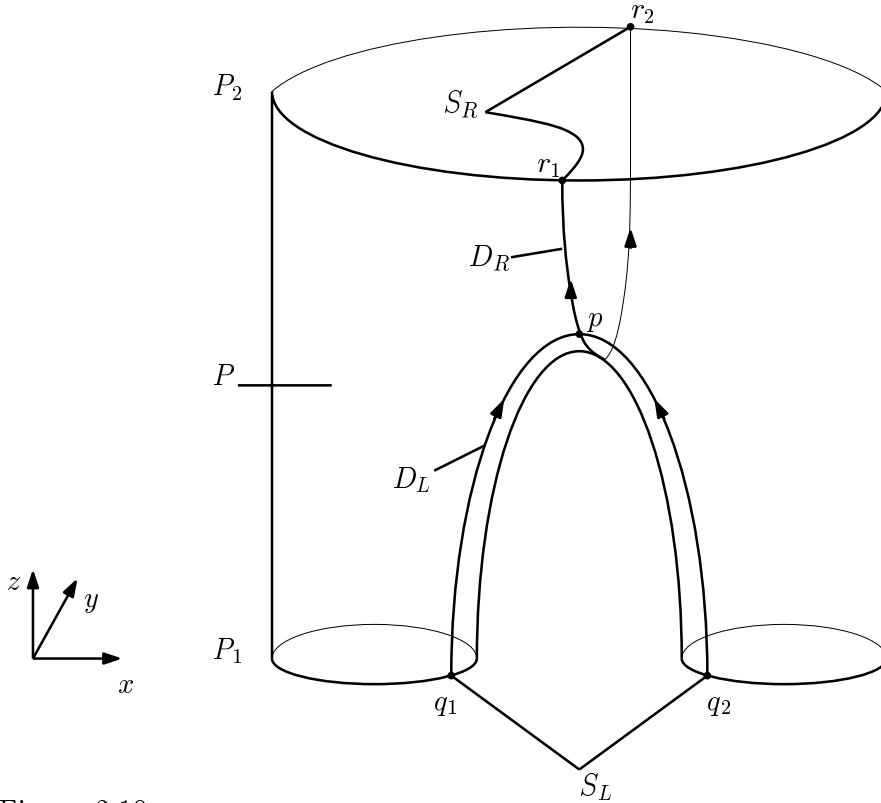


Figura 2.10

Vamos a ver que no sólo en este ejemplo sino en general, las esferas y discos izquierdos y derechos son subvariedades de W difeomorfas a esferas y discos, respectivamente. Comenzamos por $D_L(p)$ y $S_L(p)$. Vamos a aprovechar la información local sobre f en p para caracterizar $D_L(p)$ y $S_L(p)$ a niveles c' cercanos a p . Si definimos $L_k^\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : c - \varepsilon^2 \leq \hat{f}(x, y) \leq c + \varepsilon^2, |x||y| < \varepsilon^2 \sinh(1) \cosh(1)\} = \varepsilon L_k$ (siendo $\hat{f}(x, y) = c - |x|^2 + |y|^2$) como L_k es acotado, existirá $\delta > 0$ tal que $L_k^\delta \subseteq B(0, r)$. Así, en la **Figura 2.11** esquematizamos $B(0, r)$ y un L_1^δ tal que $L_1^\delta \subseteq B(0, r)$ en dimensión 2, así como las curvas integrales del campo tipo gradiente $\hat{\xi} = (-x, y)$ para \hat{f} , y marcamos $D_R(p)$ y $D_L(p)$ a niveles $c + \delta^2$ y $c - \delta^2$ (en colores violeta y negro) respectivamente para ilustrar la demostración en curso. Si tomamos un nivel $c' \in \mathbb{R}$ tal que $c - r^2 < c' < c$, nos aseguramos de que $f^{-1}(c')$ corte a U y entonces podemos usar la información local. Notemos que en U , las trayectorias que convergen a p cuando $t \rightarrow +\infty$ son las que pasan por puntos de la forma $\psi^{-1}(x, 0)$, al tener la

curva integral por $q = \psi^{-1}(x, y)$ la ecuación $\gamma(t) = \psi^{-1}(e^{-t}x, e^ty)$. Sea $0 < \varepsilon < r$ tal que $c' = c - \varepsilon^2$. Por lo antes observado, $D_L(p) \cap U = \psi^{-1}(D_\varepsilon^k \times \{0\})$, veamos que en efecto es una igualdad. Si $q \in D_L(p)$ y γ es la curva integral maximal por q , existirá $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in U$ para todo $t \geq t_0$, siendo $\psi \circ \gamma(t_0) = (x, 0)$ para cierto $x \in \overset{\circ}{D}_r^k$. Por lo tanto, será $\gamma(t + t_0) = \psi^{-1}(e^{-t}x, 0) = \tilde{\gamma}(t)$ para $t \in I_q = (-\ln(\frac{r}{|x|}), +\infty)$ (que es el intervalo maximal para el cual $\tilde{\gamma}(t) \in U$), con lo cual $Im(f \circ \gamma) \supseteq (c - r^2, c)$. En particular, existe $t_1 \in I_q$ tal que $c - r^2 < f \circ \gamma(t_1) < c - \varepsilon^2 = c'$, siendo $f \circ \gamma(t) < c'$ para todo $t \leq t_1$. Por ende, debe ser $t_1 < 0$ ya que $f \circ \gamma(0) = f(q) \geq c'$, de donde en particular $0 \in I_q$ y $q = \gamma(0) \in U$. Esto nos dice que $D_L(p) \subseteq U$ y por lo tanto que $D_L(p) = \psi^{-1}(D_\varepsilon^k \times \{0\})$. De este modo, para estos valores de c' efectivamente $D_L(p)$ es difeomorfo a D^k y $S_L(p) = D_L(p) \cap f^{-1}(c') = \psi^{-1}(S_\varepsilon^{k-1} \times \{0\}) = \partial D_L(p)$ es su borde, y por lo tanto difeomorfa a S^{k-1} ; estando toda la información contenida en la carta (U, φ) como se representa en la **Figura 2.11**.

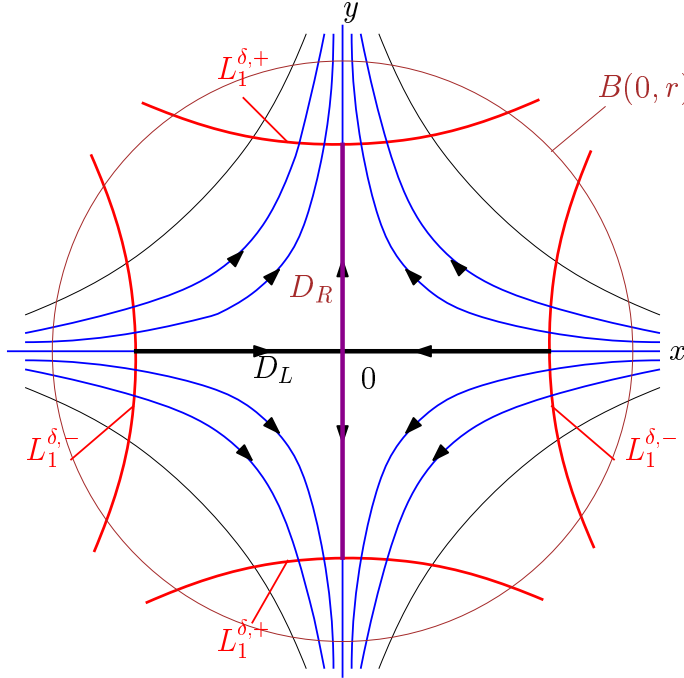


Figura 2.11

Supongamos que $c' \leq c - r^2$ y notemos $D_L(p)$, $S_L(p)$ a la esfera y disco izquierdos a nivel c' . Sea c'' tal que $c'' > c - r^2$, y notemos $D'_L(p)$, $S'_L(p)$ a la esfera y disco izquierdos a nivel c'' . Dado $q \in D_L(p) \setminus D'_L(p)$, como $f \circ \Gamma(q, t) > c''$ para t suficientemente grande existirá un único $t_q \in \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(q, t_q) \in S'_L(p)$. Por lo tanto, ajustando ξ de ser necesario para que $\xi(f) = 1$ en $f^{-1}([c', c''])$ tenemos que $D_L(p) = D'_L(p) \cup_{S'_L(p)} \Gamma(S'_L(p) \times [c' - c'', 0])$ con lo cual $D_L(p)$ es efectivamente un disco de dimensión k y nuevamente $S_L(p) = \Gamma(S'_L(p) \times \{c' - c''\}) = \partial D_L(p) \cong S^{k-1}$.

De forma análoga, si tomamos $0 < \varepsilon < r$ tendremos que el disco derecho de p a nivel $c' = c + \varepsilon^2$ será $\psi^{-1}(\{0\} \times D_\varepsilon^{n-k})$ y la esfera derecha a ese nivel será $\psi^{-1}(\{0\} \times S_\varepsilon^{n-k-1})$. A niveles $c' \geq c + r^2$, $D_R(p)$ también es difeomorfo a D^{n-k} y se

obtiene a través del flujo de los puntos de $D_R(p)$ a nivel c'' para cualquier $c < c'' < c + r^2$. Por lo tanto, siempre $S_R(p) = \partial D_R(p)$, $D_R(p) \cong D^{n-k}$ y $S_R(p) \cong S^{n-k-1}$.

De aquí en más, cuando nos refiramos a una esfera izquierda (respectivamente, derecha) o disco izquierdo (respectivamente, derecho) correspondiente a una función de Morse $f : (W, V, V') \rightarrow [a, b]$ con un único punto crítico y un campo tipo gradiente asociado ξ y no aclaremos a qué nivel estamos tomando la esfera o disco, se asumirá que trabajamos a nivel a (respectivamente, b). Usando la monotonía de $f \circ \Gamma(q, t)$ como función de t , la forma de f y de ξ cerca de p junto a las observaciones ya realizadas y el **Teorema 2.2**, se puede probar que si $q \notin D_L(p)$ entonces la curva integral por q llega hasta V' ; y del mismo modo si $q \notin D_R(p)$ dicha trayectoria parte desde V . En particular, si $q \notin D_L(p) \cup D_R(p)$ entonces la curva integral por q va desde V a V' (y vale la recíproca). Esto nos establece un difeomorfismo (siguiendo las curvas integrales) entre $V \setminus S_L(p)$ y $V' \setminus S_R(p)$, con lo cual V' se obtiene de V removiendo una esfera de dimensión $k - 1$ y agregando una de dimensión $n - k - 1$, tal como ocurría cuando uno aplicaba cirugía.

Sabiendo esto, ya podemos aproximarnos a formular la recíproca del **Teorema 2.5**. Teniendo a nivel a una esfera embebida $S_L(p)$, la idea va a ser construirnos un embedding $\varphi_L : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$ tal que $S_L = \varphi_L(S^{k-1} \times \{0\})$. Para eso, miramos lo que pasa cerca del punto crítico (es decir, en U) donde conocemos en coordenadas cómo se comportan los discos y esferas. Sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $L_k^\varepsilon \subseteq B(0, r) = \varphi(U)$, y por lo analizado en la prueba del **Teorema 2.5** tendremos que $(L_k^\varepsilon, L_k^{\varepsilon,-}, L_k^{\varepsilon,+})$ es una tríada de variedades no compactas (donde $L_k^{\varepsilon,\pm} = \hat{f}^{-1}(c \pm \varepsilon^2)$) y existe un difeomorfismo $\beta : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow L_k^{\varepsilon,-}$ dado por $\beta(u, \theta v) = (\varepsilon \cosh \theta u, \varepsilon \sinh \theta v)$. Tenemos entonces un embedding $\varphi'_L = \psi^{-1} \circ \beta : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow f^{-1}(c - \varepsilon^2)$. Si componemos ese embedding con el difeomorfismo entre $f^{-1}(a) = V$ y $f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ dado por el flujo de ξ , obtenemos un embedding $\varphi_L : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$ tal que $\varphi_L(S^{k-1} \times \{0\}) = S_L(p)$ ya que $\varphi'_L(S^{k-1} \times \{0\})$ es la esfera izquierda a nivel $c - \varepsilon^2$. φ_L se denomina el embedding característico correspondiente a la esfera $S_L(p)$ (sugerentemente igual que en adjunción de manijas). Podemos entonces formular el siguiente resultado:

Teorema 2.6. *Sea (W, V, V') un cobordismo elemental, con embedding característico $\varphi_L : S^{k-1} \times \mathring{D}^{n-k} \rightarrow V$. Entonces (W, V, V') es difeomorfa a la tríada $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$ como en la construcción que hicimos de φ_L . Como $(W, V, V') \cong (W_\varepsilon, V_{-\varepsilon}, V_\varepsilon)$ donde $W_\varepsilon = f^{-1}([c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2])$, $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ y $V_\varepsilon = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$; y $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L)) \cong (\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi'_L), V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi'_L))$, nos alcanzará con ver que $(W_\varepsilon, V_{-\varepsilon}, V_\varepsilon) \cong (\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi'_L), V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi'_L))$.

Notemos que $U' = \psi^{-1}(L_k^\varepsilon) \subseteq W_\varepsilon$ es un abierto alrededor de p que contiene a $D_L(p') \cup D_R(p')$. Definimos entonces $h : U' \rightarrow L_k$ como $h(x) = \varepsilon^{-1}\psi(x)$, siendo h un embedding. En $W_\varepsilon \setminus D'_L(p) \cup D'_R(p)$, sabemos que las curvas integrales parten todas desde $V_{-\varepsilon} \setminus S'_L(p)$, de donde tenemos una función diferenciable $\pi : W_\varepsilon \setminus D'_L(p) \cup$

$D'_R(p) \rightarrow V_{-\varepsilon} \setminus S'_L(p)$ que dado q en su dominio lo envía al único punto $\pi(q)$ en la curva integral por q tal que $f \circ \pi(q) = c - \varepsilon^2$. Con esto definimos un difeomorfismo $h : W_\varepsilon \setminus D'_L(p) \cup D'_R(p) \rightarrow V_{-\varepsilon} \setminus S'_L(p) \times [-1, 1]$ como $h(q) = (\pi(q), \frac{f(q)-c}{\varepsilon^2})$. Utilizando que en los dos abiertos en los que está definida, h manda curvas integrales en curvas integrales y puntos a nivel d de f en puntos a nivel $\frac{d-c}{\varepsilon^2}$ de \tilde{f} se prueba que $h : W_\varepsilon \rightarrow \omega(V_{-\varepsilon}, \varphi'_L)$ está bien definida, y nos da un difeomorfismo entre las tríadas deseadas. \square

Para ejemplificar lo recién demostrado, podemos considerar nuevamente el pantalón P . El embedding característico $\varphi_L : S^0 \times \overset{\circ}{D}^1 \rightarrow P_1$ consistirá en embeber dos intervalos abiertos disjuntos, uno alrededor de q_1 y el otro alrededor de q_2 . Usando la otra definición de cirugía, vemos que $\chi(P_1, \varphi_L)$ será difeomorfa a la variedad que se obtiene quitándole a P_1 un intervalo abierto alrededor de q_1 y otro alrededor de q_2 , para luego pegar por su borde a otros dos intervalos de modo que “conecten” las dos componentes conexas de $P_1 \setminus \text{Im}(\varphi_L) \cong D^1 \sqcup D^1$, como se muestra en la **Figura 2.12**. Dicha variedad es difeomorfa a S^1 y por lo tanto a P_2 , verificándose $P_2 \cong \chi(P_1, \varphi)$. También se puede ver que P es difeomorfa a $\omega(P_1, \varphi_L)$.

Supongamos que tenemos una tríada (W, V, V') y una función de Morse $f' : (W, V, V') \rightarrow [a, b]$ con puntos críticos p_1, \dots, p_l . Podría ocurrir que existieran $1 \leq i < j \leq l$ tales que $f'(p_i) = f'(p_j)$. Sin embargo, modificando f' localmente cerca de cada punto crítico p_i vía funciones bump, se puede obtener una f de Morse con los mismos puntos críticos p_1, \dots, p_l y la misma imagen pero tal que $f(p_i) \neq f(p_j)$ para todo $i \neq j$. A partir de esto, si reenumeramos (de ser necesario) los puntos críticos de modo que $f(p_1) < f(p_2) < \dots < f(p_l)$, notamos $c_i = f(p_i)$ para cada $1 \leq i \leq l-1$ y elegimos entre cada par de valores críticos consecutivos (c_i, c_{i+1}) un valor regular $a_i \in (c_i, c_{i+1})$, se verificará

$$a := a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \dots < a_{l-1} < c_l < a_l := b$$

Y en consecuencia si tomamos $W_i = f^{-1}([a_{i-1}, a_i])$, $V_i = f^{-1}(a_{i-1})$ y $V'_i = f^{-1}(a_i)$, tendremos que $d_i = (W_i, V_i, V'_i)$ es un cobordismo elemental para cada $1 \leq i \leq l$ (que admite como función de Morse a la restricción de f , con un único punto crítico p_i de índice k_i), y que $d = (W, V, V')$ se obtiene componiendo esos l cobordismos: $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_l$.

Corolario 2.1. *Todo cobordismo c se escribe como composición de cobordismos elementales.*

Demostración. Si $c = (W, V, V')$ nos alcanza con tomar una función de Morse f allí, y luego modificarla y proceder como en el razonamiento anterior. \square

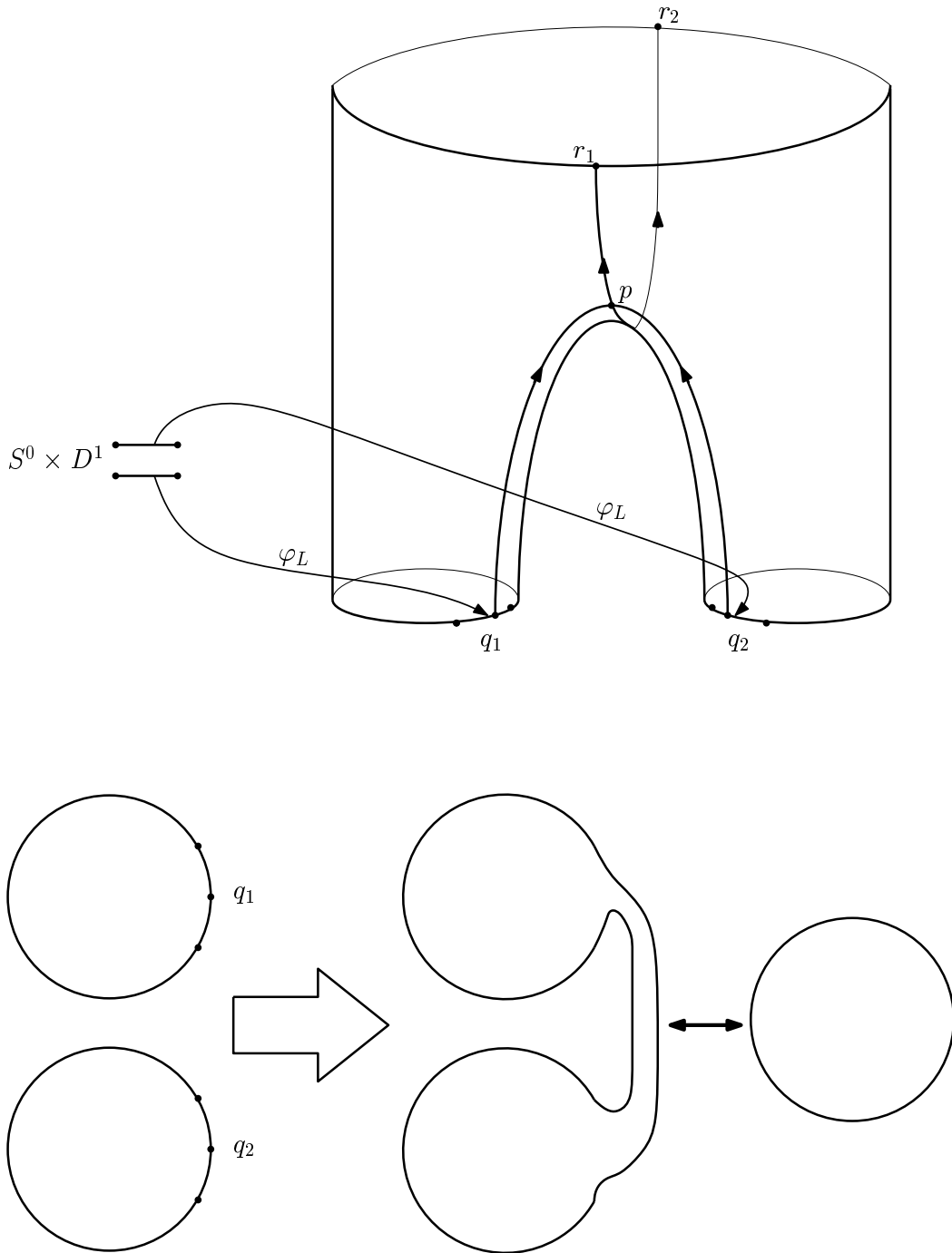


Figura 2.12

Usando que podemos descomponer un cobordismo dado $c = (W, V, V')$ en cobordismos elementales, y que sabemos cómo se comportan topológicamente dichos cobordismos; podemos entender completamente la forma de una variedad en términos de una función de Morse apropiada (es decir, que a cada nivel tenga a lo sumo un punto crítico) allí. En efecto, bajo la descomposición hecha antes y fijando un campo

tipo gradiente ξ para f ; $V_{i+1} = V'_i$ se obtiene de V_i adjuntando una k_i -manija. En consecuencia, las superficies de nivel $V_e = f^{-1}(e)$ se mantienen constantes (es decir, son difeomorfas entre sí) en los intervalos $[a, c_1)$, (c_i, c_{i+1}) para cada $1 \leq i \leq l-1$ y $(c_l, b]$ gracias al **Teorema 2.2**, y cambian del i -ésimo de estos intervalos al siguiente a través de la adjunción de una k_i -manija, para cada $i \leq l$ gracias al **Teorema 2.6**. Podemos saber también cómo evoluciona la variedad con borde $W_e = f^{-1}[a, e]$ para cada valor regular $e \in [a, b]$. W_e se mantendrá constante en los mismos intervalos que antes, y luego de pasar por el nivel c_i , W_e pasará de ser difeomorfo a $W_{a_{i-1}}$ para serlo a la traza composición $(W_{a_{i-1}}, V, V_i) \cdot (\omega(V_i, \varphi_i), V_i, \chi(V_i, \varphi_i))$, siendo $\varphi_i : S^{k_i-1} \times \mathring{D}^{n-k_i} \rightarrow V_i$ el i -ésimo embedding característico correspondiente al campo tipo gradiente ξ .

En resumen, V' se obtiene de V adjuntando una k_1 -manija, luego una k_2 -manija, ... y finalmente una k_l -manija bajo los embeddings característicos $\varphi_1, \dots, \varphi_l$; y W es la composición de las trazas de esas cirugías. A partir de todas estas observaciones y del **Teorema 2.5** obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *Dos variedades V y V' son cobordantes si y sólo si una se obtiene de la otra adjuntando manijas.*

2.3.3. Homología relativa

Vamos a enunciar ahora un Teorema que nos permitirá calcular $H_*(W, V)$ cuando (W, V, V') es un cobordismo elemental.

Teorema 2.7. *Sea (W, V, V') una tríada que posee una función de Morse f con un único punto crítico de índice k . Notamos D_L al disco izquierdo asociado a un campo tipo gradiente fijo ξ . Entonces $V \cup D_L$ es retracts por deformación fuerte de W .*

Demostración. La demostración puede verse en [Mil65, Thm. 3.14]. Presentamos un esquema de la misma. Usando el **Teorema 2.6** podemos suponer que nuestra tríada es $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$ dado que los difeomorfismos que aparecen en la demostración de dicho teorema mandan curvas integrales en curvas integrales. Fuera de L_k , la retracción consistirá en seguir el trayecto de las curvas integrales hasta llegar a V . En L_k , se harán dos retracciones. La primera llevará a todos los puntos a $C \cup L_k^- \subseteq C \cup V$, donde $C = \{(x, y) \in L_k : |y| \leq \frac{1}{10}\}$ es un entorno cilíndrico de $D_L = \{(x, y) \in L_k : y = 0\}$ contenido en L_k , descendiendo por las curvas integrales hasta tocar por primera vez $C \cup L_k^-$, como se muestra en la **Figura 2.13**. Luego se definirá una retracción por deformación fuerte de $L_k^- \cup C$ en $L_k^- \cup D_L$ “bajando verticalmente” (es decir, en la dirección del vector \vec{y}) hacia $L_k \cup D_L$, como se muestra también en la **Figura 2.13**. □

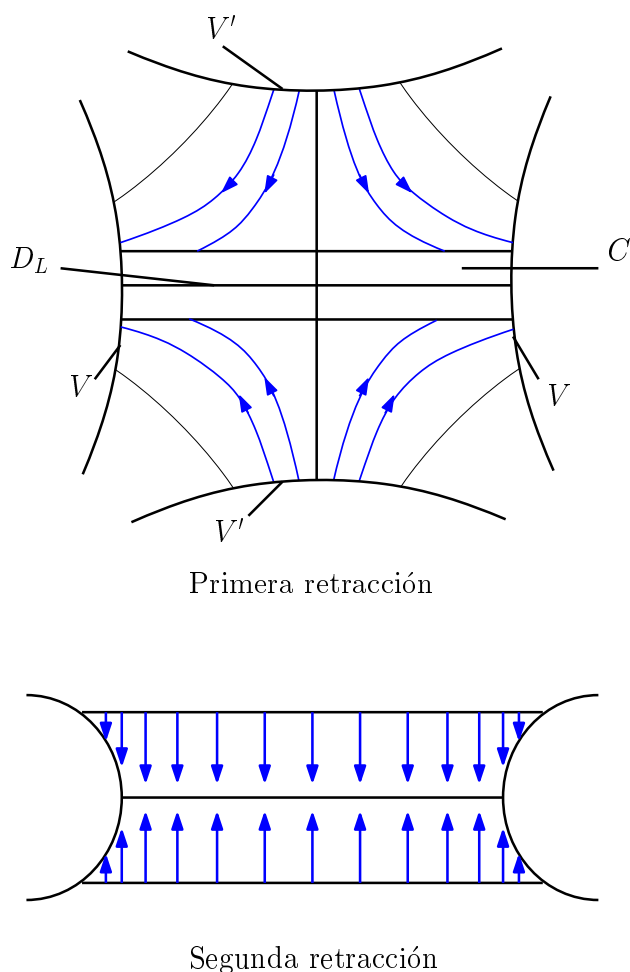


Figura 2.13

Corolario 2.3. *Bajo las hipótesis del Teorema anterior, tomando coeficientes en \mathbb{Z} tenemos que*

$$H_i(W, V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Demostración. Usando que $V \cup D_L \subseteq W$ es retracts por deformación fuerte, tenemos

$$H_i(W, V) \cong H_i(V \cup D_L, V) \cong H_i(D_L, S_L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Donde el segundo isomorfismo viene dado por escisión y por el hecho de que $S_L \subseteq V$ es retracts de entorno. En particular, obtenemos que $[D_L] \in H_k(W, V)$ es generador de ese grupo. \square

Corolario 2.4. *Si una tríada (W, V, V') admite una función de Morse con un único punto crítico de índice k , debe tener número de Morse 1 (ya que si fuera 0, $H_*(W, V) = 0$). Podemos definir además el índice de un cobordismo elemental (W, V, V') como el índice del punto crítico de cualquier $f : (W, V, V') \rightarrow \mathbb{R}$ con un sólo punto crítico que admita dicha tríada, el cual estará bien definido por cómo son los grupos de homología $H_*(W, V)$.*

En la mayor parte de esta sección estuvimos trabajando con cobordismos elementales. Es decir, las funciones de Morse que consideramos tenían un único punto crítico. Sin embargo, notemos que las definiciones de las esferas y discos que hemos dado son válidas un poco más en general, el único cuidado que debemos tener es que en el intervalo que estemos considerando haya un único valor crítico; pero podría haber varios puntos críticos que se correspondan a dicho valor.

Supongamos entonces que tenemos una tríada (W, V, V') provista de una función de Morse $f : W \rightarrow [a, b]$ con un único valor crítico $c \in (a, b)$. Sean p_1, \dots, p_l los puntos críticos de f , de índices k_1, \dots, k_l respectivamente. Fijemos un campo tipo gradiente ξ para f . Cada uno de los p_i tendrá entonces sus correspondientes discos $D_L(p_i), D_R(p_i)$ y sus esferas $S_L(p_i), S_R(p_i)$ para $i \leq i \leq l$, de acuerdo a las **Definiciones 2.17** y **2.18** respectivamente. Para cada i , sea $\varphi_i : S^{k_i-1} \times \dot{D}^{n-k_i}$ el embedding característico correspondiente a p_i .

Podemos construir una variedad $\omega(V, \varphi_1, \dots, \varphi_l)$ de manera análoga al caso $l = 1$. Comenzamos considerando la unión disjunta $V \setminus \bigcup_{i=1}^l \varphi_i(S^{k_i-1} \times \{0\}) \times [0, 1] \bigcup_{i=1}^l L_{k_i}$. Para cada $u \in S^{k_i-1}$, $v \in S^{n-k_i-1}$, $\theta \in (0, 1)$ y $c \in [0, 1]$ vamos a identificar al punto $(\varphi_i(u, \theta v), c)$ con el único punto $x \in L_{k_i}$ de la curva integral al campo $\xi_i(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_n)$ tipo gradiente para la función $f_i(x_1, \dots, x_n) = c - x_1^2 - \dots - x_{k_i}^2 + x_{k_i+1}^2 + \dots + x_n^2$ que pasa por $(\cosh \theta u, \sinh \theta v)$ tal que $f_i(x) = c$. Al igual que en el **Teorema 2.5** y el **Teorema 2.6**, la construcción anterior da lugar a un cobordismo $(\omega(V, \varphi_1, \dots, \varphi_l), V, \chi(V, \varphi_1, \dots, \varphi_l))$ que es difeomorfo a (W, V, V') (notemos que las imágenes de los embeddings característicos φ_i no se intersecan y por lo tanto $\chi(V, \varphi_1, \dots, \varphi_l)$ está bien definida, lo cual tiene como consecuencia que los L_{k_i} son abiertos disjuntos en la variedad $\omega(V, \varphi_1, \dots, \varphi_l)$).

Utilizando lo anterior, se puede demostrar de manera análoga al **Teorema 2.7** que $V \bigcup_{i=1}^l D_L(p_i)$ es retracto por deformación fuerte de W . Nos interesará en particular el caso en que todos los puntos críticos tienen igual índice.

Definición 2.19. *Decimos que (W, V, V') es un cobordismo de índice k si admite una función de Morse f con un único nivel crítico c tal que todos sus puntos críticos p_1, \dots, p_l son de índice k .*

Corolario 2.5. *Si (W, V, V') es un cobordismo de índice k , y p_1, \dots, p_l son los puntos críticos, todos al mismo nivel y de índice k , de la función de Morse f que admite por hipótesis, entonces*

$$H_i(W, V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^l & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

$\mathcal{Y} \{[D_L(p_1)], \dots, [D_L(p_l)]\}$ es una base de $H_k(W, V)$.

2.4. Funciones autoindexantes

El objetivo de esta sección será probar el siguiente Teorema:

Teorema 2.8. *Dada una función de Morse en una tríada (W, V, V') de dimensión n , existe una nueva función de Morse f allí que tiene exactamente los mismos puntos críticos que la original y con el mismo índice, y verifica además:*

1. $f(V) = -\frac{1}{2}$, $f(V') = n + \frac{1}{2}$.
2. $f(p) = \text{ind}(p)$ para cada punto crítico p .

Una tal función se llama "función autoindexante".

Para probar este teorema, deberemos ser capaces de intercambiar el orden de dos puntos críticos. Es decir, dada una función de Morse f y dos puntos críticos p y p' tales que $f(p) < f(p')$, debemos ver cuándo podemos cambiar a f por una \tilde{f} tal que $\tilde{f}(p') < \tilde{f}(p)$. El primer resultado que tenemos en ese sentido es el siguiente.

Teorema 2.9. *Sea (W, V, V') una tríada y $f : W \rightarrow [0, 1]$ una función de Morse que tiene exactamente dos puntos críticos p y p' . Supongamos que para alguna elección del campo tipo gradiente ξ para f se verifica que el subespacio compacto K_p de los puntos cuyas trayectorias van desde o hacia p no interseque al subespacio compacto $K_{p'}$ de los puntos cuyas trayectorias van desde o hacia p' . Si $a, a' \in (0, 1)$, entonces existe una nueva función de Morse g tal que:*

1. ξ es un campo tipo gradiente para g .
2. Los puntos críticos de g siguen siendo p y p' , y $g(p) = a$, $g(p') = a'$.
3. g coincide con f en un entorno de $V \cup V'$, y difiere de f en una constante tanto en un entorno U_p de p como en un entorno $U_{p'}$ de p' .

La demostración puede verse en [Mil65, Thm. 4.1]. Allí se observa que de hecho, la misma prueba sirve si tenemos dos conjuntos de puntos críticos $\{p_1, \dots, p_l\}$ a un mismo nivel crítico c y $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ a un mismo nivel crítico c' , y las trayectorias K_{p_i} , $K_{p'_j}$ son disjuntas dos a dos; siendo posible aquí también construir una nueva función de Morse g con los mismos puntos críticos que f tal que $g(p_i) = a$ para todo $1 \leq i \leq l$, $g(p'_j) = a'$ para todo $1 \leq j \leq r$ y tal que se cumplan también los otros dos ítems del teorema anterior.

Vamos entonces a concentrarnos en cómo construir un campo tipo gradiente de modo que los subespacios K_p correspondientes a los distintos puntos críticos sean disjuntos dos a dos. Si estamos en la situación anterior (es decir, dos niveles críticos

c y c' a los que corresponden los conjuntos de puntos críticos $\{p_1, \dots, p_l\}$ y $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ respectivamente), es claro que K_{p_i} y K_{p_j} son disjuntas para todo $i \neq j$, puesto que ninguna trayectoria puede ir desde p_i hacia p_j , ya que ambos están al mismo nivel para f (y f es creciente a lo largo de las trayectorias). Por los mismos motivos, $K_{p'_i}$ es disjunta de $K_{p'_j}$ para todo $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c < c'$. Por la monotonía de f a lo largo de las curvas integrales de ξ , $K_{p_i} \cap K_{p'_j} \neq \emptyset$ si y sólo si existe una trayectoria que va desde p_i hacia p'_j , lo cual ocurre si y sólo si $S_R(p_i)$ interseca a $S_L(p'_j)$ a todo nivel $d \in (c, c')$. En consecuencia, si fijamos $d \in (c, c')$ y logramos cambiar el campo tipo gradiente ξ de modo que las esferas $\{S_R(p_i)\}_{1 \leq i \leq l}$ sean disjuntas con las esferas $\{S_L(p'_j)\}_{1 \leq j \leq r}$ a nivel d , obtendremos un campo tipo gradiente para el cual los K_p son todos disjuntos.

Trabajaremos de aquí en más, por simplicidad, en el caso en que tenemos dos puntos críticos p y p' (es decir, $l = r = 1$), el caso general será totalmente análogo reemplazando siempre $S_R(p)$ por $\bigcup_{i=1}^l S_R(p_i)$ y $S_L(p')$ por $\bigcup_{j=1}^r S_L(p'_j)$. Notemos $V'' = f^{-1}(d)$. Nuestro objetivo será “separar” $S_R(p)$ de $S_L(p')$, deformando a $S_R(p)$ diferenciablemente dentro de V hasta transformarla en otra esfera embebida que sea disjunta con $S_L(p')$. Esto será posible si hay suficiente espacio en la variedad ambiente V'' , lo cual se traduce en la condición

$$\dim(S_R(p)) + \dim(S_L(p')) < \dim(V'')$$

Que es equivalente a las condiciones

$$(n - k - 1) + (k' - 1) \leq n - 2$$

$$k' \leq k$$

Si $k = \text{ind}(p)$ y $k' = \text{ind}(p')$. Para ser precisos, vamos a probar que bajo esa condición ($k' \leq k$) existe una isotopía $H : V \times [0, 1] \rightarrow V$ tal que $H_0 = \text{id}_V$ y $H_1(S_R(p))$ es disjunta de $S_L(p')$. Probaremos algo un poco más general, que también nos servirá posteriormente cuando necesitemos intersección transversal entre las esferas. Damos antes una definición que necesitaremos.

Definición 2.20. *Sea V una variedad de dimensión n , $M \subseteq V$ una subvariedad de codimensión s . Un entorno producto para M en V es un abierto $U \supseteq M$ de V , tal que es difeomorfo a $M \times \mathbb{R}^s$ de modo que M se corresponda a $M \times \{0\}$.*

Proposición 2.1. *Sean M y N dos subvariedades de una variedad V . Si M es compacta y tiene un entorno producto, entonces existe un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ isotópico a la identidad, tal que $h(M)$ interseca transversalmente a N .*

En el caso en que $k \leq k'$, como $\dim(S_R(p)) + \dim(S_L(p')) < \dim(V'')$, que la intersección entre $h(S_R(p)) = H_1(S_R(p))$ (llamando H a la isotopía entre id y h) y $S_L(p')$ sea transversal significa que es vacía. Como $S_R(p)$ tiene un entorno producto, dado por el embedding característico $\varphi_R : S^{n-k-1} \times \mathring{D}^k \rightarrow V''$ (que es el embedding

característico de la tríada “dada vuelta” $(f^{-1}(-\infty, d], V'', V)$ correspondiente a la función de Morse $-f$ y el campo tipo gradiente $-\xi$, V'' , $S_R(p)$ y $S_L(p')$ están en las hipótesis de la proposición, de donde tendremos lo deseado si la demostramos. Concentrémosnos entonces en su prueba.

Demostración. Sea $n = \dim(V)$, $s = \text{codim}(M)$, U un entorno producto de M y $k : M \times \mathbb{R}^s \rightarrow U$ el difeomorfismo asociado, verificándose $k(M \times \{0\}) = M$. Sea $N' = N \cap U$. Nuestra idea será construir una isotopía que lleve M a $k(M \times \{x_0\})$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^s$ tal que $k(M \times \{x_0\})$ interseque transversalmente a N . Notemos que $k(M \times \{x\})$ no interseca en forma transversal a N si y sólo si existe $p = k(q, x) \in N'$ para algún $q \in M$ tal que $T_p N' + T_p k(M \times \{x\}) \neq T_p V$. Si consideramos la función diferenciable $\tau := \pi \circ k^{-1}|_{N'} : N' \rightarrow \mathbb{R}^s$ donde $\pi : M \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ es la proyección en la segunda coordenada, tenemos que lo anterior es equivalente a que $k_*^{-1} T_p N' + T_{(q,x)}(M \times \{x\}) \neq T_{(q,x)}(M \times \mathbb{R}^s) \cong T_q M \oplus T_x \mathbb{R}^s$, lo cual a su vez equivale a que $\pi_* \circ k_*^{-1} T_p N' \neq \mathbb{R}^s$, es decir, a que $d_p \tau$ no sea un epimorfismo. Por lo tanto, si la intersección no es transversal entonces $p \in N'$ es punto crítico de τ y $x \in \mathbb{R}^s$ es valor crítico. Por el Teorema de Sard, el conjunto de los valores críticos de τ tiene medida 0 en \mathbb{R}^s , resultando que $k(M \times \{x\}) \pitchfork N$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^s$. Tomemos $x_0 \in \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$ tal que esto ocurra.

Para construir la isotopía que deseamos, nos armaremos un campo $\zeta \in \mathfrak{X}(V)$ tal que su flujo a tiempo 1 lleve M a $k(M \times \{x_0\})$. Con ese propósito, definimos primero un campo ν en \mathbb{R}^s tal que $\nu(x) = x_0$ si $|x| \leq |x_0|$ y $\nu(x) = 0$ si $|x| \geq 2|x_0|$. Consideramos el campo $(0, \nu)$ en $M \times \mathbb{R}^s$ que induce vía k un campo ζ en U . Notemos que $\{p \in U : \zeta(p) \neq 0\} \subseteq k(M \times \overline{B}(0, 2|x_0|))$ el cual es compacto al serlo M . Por lo tanto, si extendemos a ζ como 0 en $V \setminus U$ obtenemos un campo suave $\zeta \in \mathfrak{X}(V)$ con soporte compacto, siendo así completo. Si $\psi : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ es el flujo de ζ , es claro que $\psi(p, 1) = k(p, x_0)$ para todo $p \in M$ y por lo tanto $\psi(\cdot, 1) : V \rightarrow V$ es un difeomorfismo isotópico a la identidad que lleva M a $k(M \times \{x_0\})$, como queríamos. \square

Teniendo ya una isotopía $H : V'' \times [0, 1] \rightarrow V''$ tal que $H_1(S_R(p))$ no interseca a $S_L(p')$, lo que vamos a hacer es modificar el campo tipo gradiente ξ de f de modo que $S_L(p')$ no cambie y la nueva esfera derecha a nivel d sea $H_1(S_R(p))$. Para eso, enunciaremos el siguiente lema, que será muy útil en la estrategia de ir modificando y mejorando el par (f, ξ) (función de Morse y campo tipo gradiente asociado) que será usada tanto durante el resto de la tesis como en las partes de [Mil65] que no se desarrollan aquí para no extenderse excesivamente (nos referimos fundamentalmente al Primer y Segundo Teorema de Cancelación). El mismo está enunciado en [Mil65, Lemma 4.7].

Lema 2.6. *Sea (W, V, V') una tríada provista de una función de Morse f y un campo tipo gradiente ξ . Sea $V_b = f^{-1}(b)$ un nivel no crítico y $h : V_b \rightarrow V_b$ un difeomorfismo isotópico a la identidad. Si tenemos $a < b$ tal que $f^{-1}([a, b])$ no contiene puntos críticos, entonces se puede construir un nuevo campo tipo gradiente ξ' para f tal que*

1. ξ' coincide con ξ fuera de $f^{-1}(a, b)$.
2. Si $\varphi, \varphi' : f^{-1}(a) \rightarrow V_b$ son los difeomorfismos que se obtienen siguiendo las trayectorias de ξ y ξ' respectivamente, entonces $\varphi' = h \circ \varphi$.

Notemos que, en la situación que nos interesa, si primamos a las esferas correspondientes a ξ' entonces $S'_R(p) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(S_R(p)) = H_1(S_R(p))$ ya que como los flujos llevan esferas en esferas, la esfera a derecha a nivel a (tanto para ξ como para ξ' puesto que ambos coinciden en $f^{-1}((-\infty, a])$) es $\varphi^{-1}(S_R(p))$, y la nueva esfera a nivel b se consigue trasladándola vía el flujo de ξ' . Por otro lado, como $\xi = \xi'$ en $f^{-1}[b, +\infty)$, $S'_L(p') = S_L(p')$. Demostremos entonces el lema.

Demostración. Consideremos la tríada $(f^{-1}([a, b]), V_a, V_b)$ con $V_a = f^{-1}(a)$ la cual admite a f como función de Morse sin puntos críticos, y campo tipo gradiente ξ . Notando $\hat{\xi} = (b - a)\frac{\xi}{\xi(f)}$ en $f^{-1}([a, b])$, por el **Teorema 2.2** el flujo de $\hat{\xi}$ induce un difeomorfismo $\hat{\Gamma} : V_a \times [0, 1] \rightarrow f^{-1}([a, b])$ tal que $f \circ \hat{\Gamma}(p, t) = a + t(b - a)$ y $\hat{\Gamma}_*(\frac{d}{dt}) = \hat{\xi}$. Sea $g = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi : V_a \rightarrow V_a$ donde $\varphi : V_a \rightarrow V_b$ se obtiene siguiendo las curvas integrales de ξ (que coinciden con las de $\hat{\xi}$). Entonces podemos construirnos a partir de la isotopía H entre id y h otra isotopía $G : V_a \times [0, 1] \rightarrow V_a$ entre id y g dada por $G(x, t) = \varphi^{-1} \circ H(\varphi(x), t)$. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función diferenciable y monótona tal que $\alpha(t) = 0$ en $[0, \delta]$ y $\alpha(t) = 1$ en $(1 - \delta, 1]$ para algún $\delta > 0$. Tenemos un difeomorfismo $\psi : V_a \times [0, 1] \rightarrow V_a \times [0, 1]$ dado por $\psi(x, t) = (G(x, \alpha(t)), t)$. Si consideramos el campo $\zeta = (\hat{\Gamma} \circ \psi)_*(\frac{d}{dt})$, tendremos que coincide con $\hat{\xi}$ en un entorno de $V_a \cup V_b$ ya que $\psi_*(\frac{d}{dt}) = \frac{d}{dt}$ en $V_a \times ([0, \delta] \cup (1 - \delta, 1])$. En consecuencia, el campo $\xi' = \frac{\xi(f)}{b-a}\zeta$ coincide con ξ cerca de $V_a \cup V_b$ y entonces extendiéndolo como ξ al resto de W obtenemos un nuevo campo en W . Veamos que ξ' es tipo gradiente para f , para eso alcanzará con ver que $\zeta(f) > 0$ en $f^{-1}([a, b])$. Pero si $p = \hat{\Gamma} \circ \psi(x, t)$, entonces $\zeta_p(f) = \psi_*(\frac{d}{dt})_{\psi(x,t)}(f \circ \hat{\Gamma}) = \frac{d}{dt} f \circ \hat{\Gamma} \circ \psi(x, t) = \frac{d}{dt} f \circ \hat{\Gamma}(G(x, \alpha(t)), t) = \frac{d}{dt} a + t(b - a) = b - a > 0$ usando que $f \circ \hat{\Gamma}(x, t) = a + t(b - a)$. Si seguimos el flujo $\theta : V_a \times [0, 1] \rightarrow f^{-1}([a, b])$ de ζ , con la notación del lema tendremos que $\varphi'(x) = \theta(x, 1) = \hat{\Gamma} \circ \psi(x, 1) = \hat{\Gamma}(G(x, \alpha(1)), 1) = \varphi(G_1(x)) = \varphi \circ g(x)$ dado que el difeomorfismo $\hat{\Gamma} \circ \psi$ manda las curvas integrales de $\frac{d}{dt}$ en las de su push forward $(\hat{\Gamma} \circ \psi)_*(\frac{d}{dt}) = \zeta$ y que G y $\hat{\Gamma}$ son la identidad en $V_a \times \{0\}$. De la definición de g sale que $\varphi' = h \circ \varphi$, verificando ξ' todas las propiedades deseadas. \square

A partir de la **Proposición 2.1** y del **Lema 2.6** tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.6. *Sea (W, V, V') una tríada, f una función de Morse, ξ un campo tipo gradiente para f . Supongamos que f tiene exactamente dos niveles críticos $c < c'$, que se corresponden con los conjuntos de puntos críticos $\{p_1, \dots, p_l\}$ de índice k y $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ de índice k' respectivamente. Sea $b \in \mathbb{R}$ un nivel intermedio entre c y c' , y U un entorno de $f^{-1}(b)$. Entonces se puede cambiar a ξ por un nuevo campo tipo gradiente ξ' para f que coincida con ξ fuera de U de modo que las esferas correspondientes a ese campo verifiquen $S_R(p_i) \pitchfork S_L(p_j)$ para todo par i, j .*

Por lo que antes observamos, si $k' \leq k$ en el corolario anterior, la condición de transversalidad se traduce en que las esferas sean disjuntas. Así, apelando también al **Teorema 2.9** obtenemos lo que sigue.

Corolario 2.7. *Sea (W, V, V') una tríada, f una función de Morse, ξ un campo tipo gradiente para f . Supongamos que f tiene exactamente dos niveles críticos c y c' , que se corresponden con los conjuntos de puntos críticos $\{p_1, \dots, p_l\}$ de índice k y $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ de índice k' respectivamente. Supongamos que $k' \leq k$ y $c' \leq c$. Entonces cambiando ξ para que las esferas no se intersequen entre sí de ser necesario, dados $(a, a') \in (0, 1)$ existe una función de Morse g en nuestra tríada tal que*

1. ξ es un campo tipo gradiente para g .
2. Los puntos críticos de g siguen siendo los mismos que los de f , siendo $g(p_i) = a$ para todo $1 \leq i \leq l$ y $g(p'_j) = a'$ para todo $1 \leq j \leq r$.
3. g coincide con f en un entorno de $V \cup V'$ y difiere de f en una constante en un entorno U_p de cada punto crítico p .

Es importante mencionar que, así como usaremos el **Corolario 2.7** para demostrar el **Teorema 2.8**, el **Corolario 2.6** nos será muy útil posteriormente para garantizarnos la transversalidad de esferas izquierdas y derechas que necesitaremos a la hora de definir Homología de Morse. Y del mismo modo, muchas veces en la demostración del Teorema de h-cobordismo se utiliza en forma aislada el **Lema 2.6** para alterar el campo tipo gradiente vía isotopías con propósitos distintos a garantizar la transversalidad de las esferas, con lo cual cada uno de estos tres resultados tiene una relevancia y una utilidad individual, por eso nos hemos detenido en motivarlos y nos explayamos en su demostración.

Teniendo el **Corolario 2.7**, la demostración del Teorema de la Función Autoindexante (**2.8**) es la que sigue. Sea $f : W \rightarrow [a, b]$ la función de Morse de la que partimos. Primero, tomamos una f que tenga los mismos puntos críticos que la original y de igual índice, pero tal que $f(p) \neq f(q)$ para todo par de puntos críticos $p \neq q$. Tenemos entonces l puntos críticos p_1, \dots, p_l tales que $f(p_1) < f(p_2) < \dots < f(p_l)$. Luego, vamos intercambiando las posiciones relativas de los puntos críticos (respecto del valor de f), a través del siguiente algoritmo. En el primer paso, tomamos un punto crítico p'_1 de índice mínimo k entre los p_j , y utilizando el Corolario varias veces (tantas como la cantidad de puntos críticos en los que f toma un valor menor que en p'_1) alteramos f para que el valor que toma en p'_1 sea el mínimo de los que toma en el conjunto de los puntos críticos. Luego, tomamos b un valor regular tal que el único punto crítico en W_b sea p'_1 ; y si $V'' = f^{-1}(b)$ nos restringimos a la tríada $(W_2, V_2, V'_2) = (W, V'', V)$. Con esa nueva tríada y con la función de Morse f modificada que teníamos (ahora con $l - 1$ puntos críticos) volvemos a empezar con el algoritmo, “llevando hacia abajo” un nuevo punto crítico p'_2 que minimiza el índice entre los de W_2 . Y así sucesivamente. Con esto, obtendremos una nueva función de

Morse f con los mismos puntos críticos pero numerados como p'_1, \dots, p'_l de modo que $\text{ind}(p'_1) \leq \text{ind}(p'_2) \leq \dots \leq \text{ind}(p'_l)$ y $f(p'_1) < f(p'_2) < \dots < f(p'_l)$. Alineando entre sí a los puntos de igual índice vía el **Corolario 2.7** y componiendo con un difeomorfismo $\alpha : [a, b] \rightarrow [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ adecuado, obtenemos una función autoindexante.

Capítulo 3

El Teorema de h -cobordismo

A partir de lo discutido en el **Capítulo 2**, estamos en condiciones de enunciar el resultado sobre el que trata esta tesis: el Teorema de h -cobordismo, así como de presentar un esquema de su demostración (lo cual haremos en la primera sección) y desarrollar una parte de su prueba (lo cual será hecho en la segunda). Se darán posteriormente las aplicaciones clásicas del teorema: la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión ≥ 6 y la caracterización del n -disco también para $n \geq 6$. Finalmente, se cerrará el capítulo analizando una generalización en cierto sentido del Teorema de h -cobordismo cuando $H_*(W, V) \neq 0$, a través de las desigualdades de Morse.

3.1. Enunciado del teorema y esquema de la demostración

Una tríada (W, V, V') se dice un h -cobordismo si tanto V como V' son retractos por deformación de W . En ese caso decimos que V y V' son h -cobordantes. Notemos que si V y V' son h -cobordantes entonces tienen el mismo tipo homotópico. Una pregunta natural que podemos formularnos es: podremos decir algo más fuerte? Dado que W , V y V' no son sólo espacios topológicos (o CW -complejos) sino que tienen estructura de variedad diferenciable, resultará ser que de hecho V y V' son homeomorfas, o incluso difeomorfas?

El Teorema de h -cobordismo da una respuesta a ese interrogante: nos dice que si (W, V, V') es un h -cobordismo, y además W , V y V' son simplemente conexas y $\dim(W) \geq 6$ entonces (W, V, V') es un cobordismo trivial (es decir que $(W, V, V') \cong (V \times [0, 1], V \times \{0\}, V \times \{1\})$) y por lo tanto V es difeomorfa a V' .

Vamos a formular una versión equivalente del teorema en el cual reemplacemos la hipótesis de ser un h -cobordismo por otra que sea más fácil de verificar (o al menos, que sea en apariencia más débil y más verificable). Es evidente que si (W, V, V') es un h -cobordismo, entonces $H_*(W, V) = H_*(W, V') = 0$ (tomaremos siempre homología

con coeficientes en \mathbb{Z}). Pero de hecho, también vale la recíproca: si $H_*(W, V) = H_*(W, V') = 0$, como V es simplemente conexa y no vacía, y el par (W, V) es 1-conexo y $H_*(W, V) = 0$; por el Teorema de Hurewicz (versión relativa) vale que $\pi_i(W, V) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. En consecuencia, al ser V un subcomplejo del CW -complejo W y ser la inclusión una equivalencia homotópica débil, por el Teorema de Whitehead $V \subseteq W$ es retracto por deformación. Análogamente, $V' \subseteq W$ es retracto por deformación. En consecuencia, una tríada (W, V, V') de variedades simplemente conexas es un h -cobordismo si y sólo si $H_*(W, V) = H_*(W, V') = 0$. Más aún: si pedimos solamente que $H_*(W, V) = 0$, entonces por Dualidad de Poincaré para tríadas (resultado que puede hallarse en [Mil65, Thm. 7.5] y es un corolario de la equivalencia entre la homología de Morse y la singular, lo cual será explicado en la siguiente sección) tendremos que $H^*(W, V') = 0$ y entonces por el Teorema de coeficientes universales $H_*(W, V') = 0$. A partir de esto, llegamos a la conclusión que si W, V y V' son simplemente conexas, (W, V, V') es un h -cobordismo si y sólo si $H_*(W, V) = 0$, lo cual también es equivalente por los mismos motivos a que $H_*(W, V') = 0$ (es decir, la simetría en el rol que juegan V y V' dentro de la tríada se ve también reflejada, como es esperable, en la simetría respecto a la condición de tener homología relativa nula). Con esto en mente, damos la siguiente formulación equivalente del teorema, que será con la que trabajaremos de aquí en más:

Teorema 3.1 (h -cobordismo). *Sea (W, V, V') una tríada donde W, V, V' son variedades simplemente conexas y $\dim(W) \geq 6$. Supongamos que $H_*(W, V) = 0$. Entonces (W, V, V') es un cobordismo producto.*

Vamos a esquematizar a continuación los pasos de la prueba de este resultado, de acuerdo a [Mil65]. Varios hechos que necesitaremos fueron desarrollados en los capítulos anteriores, y demostraremos en la sección siguiente uno de los citados pasos; mientras que para los restantes nos referiremos directamente a [Mil65], debido a varios motivos. El primero de ellos es que este paso es considerado central en la prueba, crucial para entenderla y conectar las distintas partes de la misma. Por otra parte, aparecen allí casi todas las ideas importantes de [Mil65], desde las más geométricas como modificar los campos tipo gradiente vía isotopías hasta las más algebraicas como el uso de técnicas homológicas; y hay una ida y vuelta entre estas dos vertientes. Además, se hará énfasis en algunos detalles de la demostración que no aparecen en el libro y ayudan a entenderla con mayor profundidad. Por último, entender bien ese apartado conduce también a otras aplicaciones que luego vamos a detallar.

La primer idea de la demostración es usar el hecho de que si (W, V, V') admite una función de Morse sin puntos críticos, entonces es difeomorfa a la tríada $(V \times [0, 1], V \times \{0\}, V \times \{1\})$. Luego lo que queremos hacer es construir una tal función.

Para eso, usamos que toda tríada admite una función de Morse. Más precisamente, nos interesará partir de una función autoindexante tal como nos provee el **Teorema 2.8**. La idea va a ser ir “cancelando” entre sí puntos críticos, es decir, ir

3.1. ENUNCIADO DEL TEOREMA Y ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

obteniendo funciones de Morse con una cantidad cada vez menor de puntos críticos hasta llegar a una que no tenga ninguno. Para ello, utilizaremos los dos siguientes teoremas cuya demostración se omite pero puede encontrarse en [Mil65]:

Teorema 3.2 (Primer Teorema de Cancelación). *Supongamos que tenemos una tríada (W, V, V') y una función de Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ con exactamente dos puntos críticos p y p' tales que $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Supongamos además que existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{ind}(p) = k$ e $\text{ind}(p') = k + 1$. Sea ξ un campo tipo gradiente para f . Notemos S_R a la esfera derecha de p y S'_L a la esfera izquierda de p' a nivel $\frac{1}{2}$ asociadas a ξ . Supongamos además que S_R y S'_L se cortan de manera transversal en un único punto. Notemos T a la única trayectoria de p a p' integral al campo ξ . Luego dado cualquier entorno abierto U de T , podemos encontrar un campo nunca nulo ξ' en W que coincida con ξ fuera de U cuyas curvas integrales vayan todas de V a V' . Más aún, podemos definir una función de Morse f' para la tríada (W, V, V') sin puntos críticos para la cual ξ' sea un campo tipo gradiente, y que coincida con f en un entorno de $V \cup V'$.*

Teorema 3.3 (Segundo Teorema de Cancelación). *Sea (W, V, V') una tríada de variedades simplemente conexas con $\dim(W) = n \geq 6$. Supongamos que admite una función de Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ con exactamente dos puntos críticos p y p' tales que $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Supongamos además que existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{ind}(p) = k$ e $\text{ind}(p') = k + 1$. Sea ξ un campo tipo gradiente para f . Notemos S_R a la esfera derecha de p y S'_L a la esfera izquierda de p' a nivel $\frac{1}{2}$ asociadas a ξ . Supongamos que hemos orientado al fibrado tangente de S'_L y al normal de S_R de manera tal que $S_R \cdot S'_L = \pm 1$. Si $2 \leq k \leq n - 3$ entonces la tríada admite una función de Morse sin puntos críticos. Más precisamente, se puede alterar el campo tipo gradiente ξ únicamente en un entorno de $f^{-1}(\frac{1}{2})$ de modo que (f, ξ') estén bajo las hipótesis del Primer Teorema de Cancelación.*

Contando con estos dos teoremas, la idea para cancelar los puntos críticos será la siguiente. Tomamos una función autoindexante en $c = (W, V, V')$ de acuerdo al **Teorema 2.8**. Sea $c = c_0 \cdot c_1 \cdots c_n$ donde cada cobordismo $c_i = (f^{-1}[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}], f^{-1}(i - \frac{1}{2}), f^{-1}(i + \frac{1}{2}))$ tiene sólo puntos críticos de índice i y todos al mismo nivel. Definimos $W_k = c_0 \cdots c_k = f^{-1}[-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ para cada $0 \leq k \leq n$ y $W_{-1} = V$. Supongamos que ya orientamos los fibrados tangentes de todas las esferas izquierdas, y los fibrados normales de todas las esferas derechas correspondientes a los puntos críticos adecuadamente (lo cual será precisado en la sección posterior). Si tenemos dos puntos críticos $p \in c_k$ y $p' \in c_{k+1}$ tales que $S_R(p) \cdot S'_L(p') = \pm 1$ a nivel $k + \frac{1}{2}$, entonces por el **Teorema 2.9** podemos cambiar la función de Morse f por una f' con los mismos puntos críticos para la cual ξ sigue siendo campo tipo gradiente (es decir, no alteramos las trayectorias) pero tales que $k < f'(p) < k + \frac{1}{2} < f'(p') < k + 1$ siendo $f'(q) = f(q)$ para todo q punto crítico de f distinto de p y p' . En consecuencia, podemos descomponer al cobordismo $c = c_k \cdot c_{k+1}$ en $c = c'_k \cdot d \cdot c'_{k+1}$ donde d tiene como únicos puntos críticos a p y p' , y c'_k y c'_{k+1} tienen un punto

crítico menos que c_k y c_{k+1} respectivamente. Luego, si el cobordismo d cumple las restantes hipótesis del **Teorema 3.2** o **Teorema 3.3**, será trivial; y podremos obtener entonces en (W, V, V') una función de Morse con dos puntos críticos menos. Vamos a probar que bajo ciertas condiciones, este argumento se puede repetir hasta no tener ningún punto crítico. Enunciaremos precisamente el resultado en cuestión, cuya demostración será detallada posteriormente:

Teorema 3.4 (Cancelación en las dimensiones intermedias). *Sea (W, V, V') una tríada de variedades simplemente conexas con $\dim(W) = n \geq 6$ y $H_*(W, V) = 0$. Supongamos que admite una función de Morse f tal que no tiene puntos críticos de índices $0, 1, n - 1$ o n . Entonces (W, V, V') es un cobordismo producto.*

Notemos que el teorema anterior es casi idéntico al de h -cobordismo salvo porque asume la existencia de una función de Morse sin puntos críticos de índice $0, 1, n - 1, n$. De modo que lo único que nos faltaría para terminar de establecer el resultado que deseamos es ver que podemos eliminar ese tipo de puntos críticos. Para eso, tenemos los siguientes dos teoremas (demostrados en [Mil65], capítulo 8):

Teorema 3.5. *Sea (W, V, V') una tríada tal que $H_0(W, V) = 0$, provista de una función de Morse. Entonces los puntos críticos de índice 0 pueden ser cancelados contra un igual número de puntos críticos de índice 1.*

Teorema 3.6. *Sea (W, V, V') una tríada de dimensión $n \geq 5$ tal que W, V son simplemente conexas. Supongamos que tenemos allí una función de Morse sin puntos críticos de índice 0. Entonces, por cada punto crítico de índice 1 se puede insertar un par de puntos críticos auxiliares de índices 2 y 3 y luego cancelar el punto crítico de índice 1 con su correspondiente de índice 2. De este modo, cambiamos cada punto crítico de índice 1 por un punto crítico de índice 3.*

A partir de los dos resultados anteriores, es claro que bajo las hipótesis del Teorema de h -cobordismo podemos primero eliminar los puntos críticos de índice 0 y luego estar bajo las hipótesis del **Teorema 3.6** para eliminar los de índice 1; agregando sólo puntos de índice 3. Del mismo modo pero “dando vuelta la tríada”, es decir, mirando (W, V', V) (cuyos puntos críticos de índice k son los de índice $n - k$ de (W, V, V')), se prueba que es posible cancelar todos los puntos críticos de índice n y $n - 1$ creando a lo sumo puntos nuevos de índice $n - 3$. Entonces, lo que haremos es primero cancelar los de índice 0 y 1, creando a lo sumo nuevos puntos críticos de índice 3; y luego modificaremos la función de Morse f obtenida que no tiene puntos críticos de índice 0, 1 eliminando los de índice $n, n - 1$ a cambio de agregar posiblemente puntos de índice $n - 3$, esto es, sin agregar ninguno de índice 0, 1 porque $n - 3 > 1$. Estaremos entonces bajo las hipótesis del **Teorema 3.4**, con lo que llegaremos a la conclusión de que (W, V, V') es un cobordismo producto, como queríamos.

3.2. Cancelación en las dimensiones intermedias

El objetivo de esta sección es probar el **Teorema 3.4**. Comenzamos, como dijimos antes, con una función autoindexante f en (W, V, V') , la cual nos lleva a una descomposición $W = c_0 \cdots c_n$ donde cada c_k es un cobordismo de índice k .

Dado que vamos a utilizar fuertemente el **Teorema 3.3**, comenzamos fijando las orientaciones necesarias. Dado $0 \leq k \leq n - 1$ sea $M_k = f^{-1}([k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}])$, $V_k = f^{-1}(k - \frac{1}{2})$ y $V'_k = f^{-1}(k + \frac{1}{2})$. Para cada punto crítico p , nos interesa orientar su esfera izquierda $S_L(p)$ a nivel $k - \frac{1}{2}$ (donde $k = f(p) = \text{ind}(p)$) y el fibrado normal a su esfera derecha como subvariedad de V'_k , al cual denotamos $\nu S_R(p)$; para poder aplicar los argumentos descriptos en la sección anterior a cualquiera de los cobordismos $c_k \cdot c_{k+1}$ con $0 \leq k \leq n - 1$. Así, fijo el punto crítico p de índice k toda la información que necesitamos para orientar sus esferas está contenida en la tríada $c_k = (M_k, V_k, V'_k)$. Luego, alcanza con analizar el caso de un cobordismo $c = (M, V, V')$ junto con una función de Morse $f : M \rightarrow [0, 1]$ tal que todos sus puntos críticos están a nivel $\frac{1}{2}$ y son de índice k , para algún $k \in \mathbb{N}_0$ fijo.

Bajo esas condiciones, tomaremos la esfera $S_L(p)$ y el disco $D_L(p)$ a nivel 0; y la esfera $S_R(p)$ y el disco $D_R(p)$ a nivel 1. Veamos que si damos una orientación a cada disco, éstas inducen una en cada esfera. Para los izquierdos, esto se debe a que $\partial D_L(p) = S_L(p)$. Para los derechos, mirando los morfismos de fibrados sobre $S_R(p)$

$$TV \xrightarrow{i} TW \xrightarrow{\pi} TW/TD_R(p)$$

Dados por la inclusión y la proyección al cociente, resulta que $\pi \circ i$ induce un isomorfismo entre $\nu S_R(p) = TV/TS_R(p)$ y la restricción de $\nu D_R(p)$ a $S_R(p)$. En consecuencia, cada orientación de $\nu D_R(p)$ induce una de $\nu S_R(p)$; y será suficiente con orientar a $D_L(p)$ y $\nu D_R(p)$. Para eso, elegimos una orientación arbitraria para $D_L(p)$ y aprovechando que interseca a $D_R(p)$ de manera transversal y únicamente en p ; damos a $\nu D_R(p)$ la orientación tal que $D_R(p) \cdot D_L(p) = +1$. De esta manera, una vez elegidas orientaciones de los discos izquierdos; quedan determinadas las de los discos derechos, las esferas izquierdas y los fibrados normales a las esferas derechas.

Lo que nos interesa ahora es empezar a cancelar puntos críticos de la forma preanunciada en la sección previa; es decir: tomar $p \in c_k$, $p' \in c_{k+1}$ y cancelarlos de alguna manera. Para eso, lo que vamos a querer es construir algún objeto (algebraico) que relacione los puntos críticos de índice k con los de $k - 1$ para cada $1 \leq k \leq n$. Antes que nada, recordemos que a partir del **Corolario 2.5** sabemos que $H_k(M_k, V_k)$ tiene como base a $\{[D_L(p_1^k)], \dots, [D_L(p_{m_k}^k)]\}$ siendo $p_1^k, \dots, p_{m_k}^k$ los puntos críticos de c_k .

Si notamos W_k a la traza del cobordismo $c_0 \cdots c_k$, por Escisión y usando que V_k tiene un entorno sin puntos críticos en W ; tendemos que $H_*(W_k, W_{k-1}) \cong H_*(M_k, V_k)$ donde el isomorfismo viene dado por la inclusión $i : (M_k, V_k) \hookrightarrow (W_k, W_{k-1})$. Por lo tanto, una base de $C_k := H_k(W_k, W_{k-1})$ seguirá siendo la base de los discos orientados $\{[D_L(p_1^k)], \dots, [D_L(p_{m_k}^k)]\}$. Es decir que el grupo de homología relativa C_k recién definido a nivel k mide exactamente la cantidad de

puntos críticos de índice k ; es el grupo abeliano libre generado por esos puntos críticos. Resulta natural entonces querer construir un morfismo de grupos abelianos entre C_k y C_{k-1} que establecería la “relación” entre los puntos críticos de índice k y los de $k-1$ que estamos buscando. Pero $C_k = H_k(W_k, W_{k-1})$ y $C_{k-1} = H_{k-1}(W_{k-1}, W_{k-2})$, de modo que podemos obtener el morfismo deseado mirando la sucesión exacta larga en homología de la terna (W_k, W_{k-1}, W_{k-2}) .

$$\dots \longrightarrow H_j(W_k, W_{k-2}) \longrightarrow H_j(W_k, W_{k-1}) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(W_{k-1}, W_{k-2}) \longrightarrow H_{j-1}(W_k, W_{k-2}) \longrightarrow \dots$$

Y tomando $j = k$. Como además vale que si $[\bar{\sigma}] \in H_k(W_k, W_{k-1})$ con $\sigma : \Delta^k \rightarrow W_k$ un k -simplex singular, entonces $\partial_k([\bar{\sigma}]) = [\bar{\partial\sigma}]$; tenemos que (C_*, ∂) es un complejo de cadenas. (C_*, ∂) es el complejo de Morse de (W, V, V') asociado a la función autoindexante f y el campo tipo gradiente prefijado ξ .

Teniendo dicho complejo y una base asignada a cada C_k (la de los discos izquierdos orientados), resulta natural preguntarse cuál es la matriz de ∂_k en esas bases para cada k . La respuesta se deduce de la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Sean (W, V, V') y (W', V', V'') dos tríadas, y supongamos que tenemos una función de Morse f en $(W \cup W', V, V'')$ cuyos puntos críticos son q_1, \dots, q_l de índice k y al mismo nivel en W y q'_1, \dots, q'_m de índice $k+1$ y al mismo nivel en W' . Supongamos que orientamos a los discos y esferas correspondientes de la manera explicada anteriormente. Entonces el morfismo $\partial : H_{k+1}(W \cup W', W) \rightarrow H_k(W, V)$ viene dado en la base de los discos izquierdos orientados por la matriz $(a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{l \times m}$ con $a_{ij} = S_R(q_i) \cdot S_L(q'_j)$.*

Demostración. Como $\partial([D_L(q'_j)]) = [\partial D_L(q'_j)] = [S_L(q'_j)]$, dándole a $S_L(q'_j)$ la orientación inducida por la del disco $D_L(q'_j)$, nos alcanzará con probar el siguiente lema, extraído de [Mil65, Lemma 7.2].

Lema 3.1. *Sea M una subvariedad cerrada, conexa y orientada de V' , de dimensión k . Sea $h : H_k(M) \rightarrow H_k(W, V)$ el morfismo inducido por la inclusión y $[M] \in H^k(M)$ el generador de orientación. Entonces $h([M]) = \sum_{i=1}^l (S_R(q_i) \cdot M)[D_L(q_i)]$.*

Para simplificar la demostración del lema, vamos a suponer que $l = 1$; el caso general puede obtenerse razonando de manera similar y teniendo en cuenta lo explicado al final de la **Sección 2.3.3** (la caracterización de cobordismos con un único valor crítico como la traza de una cirugía con varios embeddings característicos). Notaremos entonces $q = q_1$, $D_L = D_L(q_1)$, $D_R = D_R(q_1)$ y $S_R = S_R(q_1)$. Vamos a asumir también que $M \pitchfork S_R$, pudiendo extenderse la noción de número de intersección de modo que estos resultados permanezcan válidos aunque $M \cap S_R$ no sea transversal. Queremos ver que $h([M]) = (S_R \cdot M)[D_L]$. Sea $r : W \rightarrow V \cup D_L$ la retracción del **Teorema 2.7** e $i : V \cup D_L \rightarrow W$ la inclusión. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 H_k(M) & \xrightarrow{h_0} & H_k(V', V' \setminus S_R) \\
 & & \downarrow h_1 \\
 & & H_k(W, W \setminus D_R) \\
 & & \downarrow r_* \\
 & & H_k(V \cup D_L, V \cup D_L \setminus \{q\}) \\
 & & \downarrow h_2 \\
 & & H_k(V \cup D_L, V) \\
 & & \downarrow i_* \\
 & & H_k(W, V)
 \end{array}$$

\curvearrowright h

Donde h_0 y h_1 son inducidos por la inclusión como morfismo de pares, y h_2 es el inverso del morfismo $h_3 : H_k(V \cup D_L, V) \rightarrow H_k(V \cup D_L, V \cup D_L \setminus \{q\})$ dado por la identidad como morfismo de pares (el cual es inversible al ser $V \subseteq V \cup D_L \setminus \{q\}$ retracts por deformación fuerte). Notemos $j : M \rightarrow W$ a la inclusión. Entonces, el diagrama es conmutativo ya que $h_2^{-1} \circ i_*^{-1} \circ h = h_3 \circ r_* \circ h$ y $r_* \circ h_1 \circ h_0$ vienen inducidos por el morfismo de pares $r \circ j : (M, \emptyset) \rightarrow (V \cup D_L, V \cup D_L \setminus \{q\})$. Como por el **Lema 1.5** es $h_0([M]) = (S_R \cdot M)\eta$, siendo $\eta \in H_k(V', V' \setminus S_R)$ el generador de orientación; nos alcanzará con ver que $i_* \circ h_2 \circ r_* \circ h_1(\eta) = [D_L]$ (por simplicidad, notaremos de aquí en más $[D_L]$ a la imagen de la clase de homología fundamental $[D_L] \in H_k(D_L)$ por diferentes morfismos inducidos por la inclusión).

Sea D un disco abierto de dimensión k , orientado y embebido en V' , de modo que interseque a S_R de manera transversal y en un único punto p , con número de intersección $+1$. Entonces por la **Proposición 1.7** tenemos que $k_*([D]) = \eta$ donde $k : (D, D \setminus \{p\}) \rightarrow (V', V' \setminus S_R)$ viene dado por la inclusión. Por otro lado, D también está embebido en W e interseca a D_R de manera transversal y únicamente en p , con número de intersección $+1$, con lo que por la versión de la **Proposición 1.7** para variedades con borde discutida en la **Sección 1.2.6**, $k'_*([D]) = \eta'$ donde $k' : (D, D \setminus \{p\}) \rightarrow (W, W \setminus D_R)$ es la inclusión y $\eta' \in H_k(W, W \setminus D_R)$ es el generador de orientación. De aquí concluimos que $h_1(\eta) = \eta'$. Pero como D_L es un disco cerrado embebido en W y orientado, que interseca a D_R únicamente en q y con número de intersección $+1$, tenemos que $[D_L] = \eta'$ (al ser válida la **Proposición 1.7** también para discos cerrados, como se observa en la **Sección 1.2.6**). Como $[D_L]$ queda fijo por r_* , h_2 e i_* , deducimos que $i_* \circ h_2 \circ r_* \circ h_1(\eta) = [D_L]$, como queríamos. \square

En nuestro caso será $W = M_k$ y $W' = M_{k+1}$; y el morfismo de borde $\partial : H_{k+1}(M_k \cup M_{k+1}, M_k) \rightarrow H_k(M_k, V_k)$ se corresponderá vía el isomorfismo dado por el Teorema de Escisión con $\partial_{k+1} : H_{k+1}(W_{k+1}, W_k) \rightarrow H_k(W_k, W_{k-1})$ preservando las clases de los discos izquierdos orientados. Se tiene entonces que para cada $1 \leq k \leq n$ la matriz de ∂_{k+1} en la base de los discos posee las entradas descritas en la proposi-

ción anterior. Esto justifica el nombre “complejo de Morse”, ya que tanto los C_k como el morfismo de borde quedan totalmente determinados por el par (f, ξ) . La definición del complejo en términos de los grupos de homología relativa $H_k(W_k, W_{k-1})$ y no directamente de las propiedades intrínsecas de (f, ξ) que lo terminan determinando se debe tanto a que esto nos da una prueba inmediata de que en efecto (C_*, ∂) es un complejo (mientras que ese hecho no es obvio definiendo los morfismos de borde como los dados por las matrices de los números de intersección de las esferas), y a que esto también nos permite probar en forma sencilla que la homología de Morse es equivalente a la singular, como haremos en breve. Dicho resultado nos permitirá entonces ir cambiando de un complejo de Morse a otro (modificando el par (f, ξ) convenientemente, para tener menos puntos críticos) manteniendo siempre la misma homología.

Es a partir del complejo de Morse que entran a jugar los números de intersección de las esferas: si tuviéramos un punto crítico q'_i de índice $k + 1$ y uno q_j de índice k tales que $\partial_{k+1}([D_L(q'_i)]) = [D_L(q_j)]$, obtendríamos automáticamente que $S_R(q_j) \cdot S_L(q'_i) = 1$ y entonces separando a estos dos puntos y aplicando el **Teorema 3.3** (asumiendo que se cumplen todas las hipótesis necesarias para hacer estas dos cosas) podremos cancelar entre sí a q'_i y q_j . Recíprocamente, esto esclarece por qué en [Mil65] interesa mejorar el **Teorema 3.2** (que pedía intersección transversal de las esferas en un único punto) en la versión más general del **Teorema 3.3** (donde sólo se pide que el número de intersección sea ± 1): los números de intersección aparecerían en estos morfismos.

Lo que haremos entonces es usar al complejo (C_*, ∂) para hacer siempre que podamos que el morfismo ∂ mande un disco izquierdo orientado en otro, y así ir cancelando sucesivamente los puntos críticos. Para eso, vamos a necesitar dos teoremas fundamentales, que son enunciados y demostrados a continuación.

Teorema 3.7. *La homología de Morse asociada a un par (f, ξ) es isomorfa a la homología singular, es decir: $H_k(C_*) \cong H_k(W, V)$ para todo k .*

Demostración. Fijemos $0 \leq k \leq n$. En primer lugar, veamos que $H_k(W, V)$ sólo depende de c_k, c_{k+1} y c_{k-1} . Esto se debe a que $c = (W, V, V')$ se obtiene de $c_{k-1} \cdot c_k \cdot c_{k+1}$ componiendo con una cantidad finita de cobordismos, todos ellos de índice menor a $k - 1$ o mayor a $k + 1$; y sabemos que componer con un cobordismo de índice j es homotópicamente equivalente a adjuntar un disco de dimensión j , lo cual no debería cambiar el j -ésimo grupo de homología si $j < k - 1$ o $j > k + 1$.

Lo que probaremos es precisamente que $H_k(W, V) \cong H_k(W_{k+1}, W_{k-2})$ (donde $W_{-2} = V = V_0$). Para eso, veremos primero que fijo $0 \leq k \leq n$, la inclusión induce un isomorfismo $H_k(W_{k+i}, W_{k-2}) \rightarrow H_k(W_{k+i+1}, W_{k-2})$ para cada $i \geq 1$. Esto puede verse considerando la sucesión exacta larga de la terna $(W_{k+i+1}, W_{k+i}, W_{k-2})$ y usando que por el **Corolario 2.5**:

$$H_j(W_{k+i+1}, W_{k+i}) \cong H_j(M_{k+i+1}, V_{k+i+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j = k + i + 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

3.2. CANCELACIÓN EN LAS DIMENSIONES INTERMEDIAS

En consecuencia, las inclusiones inducen isomorfismos

$$H_k(W_{k+1}, W_{k-2}) \cong H_k(W_{k+2}, W_{k-2}) \cong \dots \cong H_k(W_n, W_{k-2}) = H_k(W, W_{k-2})$$

Si notamos \overline{W}_k a la traza del cobordismo $c_k \cdot c_{k+1} \cdot \dots \cdot c_n$ para cada $k \geq 0$, tendremos que por Escisión $H_k(W, W_{k-2}) \cong H_k(\overline{W}_{k-1}, V_{k-1})$. De forma similar a lo hecho recién, se prueba que $H_k(\overline{W}_{k-1}, V_{k-1}) \cong H_k(\overline{W}_{k-2}, V_{k-2}) \cong \dots \cong H_k(\overline{W}_0, V_0) = H_k(W, V)$, llegando a lo deseado.

Luego, es suficiente probar que $H_k(C_*) \cong H_k(W_{k+1}, W_{k-2})$. Para eso, armamos el siguiente diagrama; donde la fila y la columna son exactas y provienen de las sucesiones exactas largas de las ternas (W_k, W_{k-1}, W_{k-2}) y (W_{k+1}, W_k, W_{k-1}) que es de donde salen precisamente los morfismos de borde de nuestro complejo:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_k(W_{k-1}, W_{k-2}) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & H_k(W_k, W_{k-2}) & & \\ & & \downarrow \alpha & & \\ H_{k+1}(W_{k+1}, W_k) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(W_k, W_{k-1}) & \xrightarrow{\beta} & H_k(W_{k+1}, W_{k-1}) \\ & & \downarrow \partial_k & & \\ & & H_{k-1}(W_{k-1}, W_{k-2}) & & \end{array}$$

Tenemos que $H_k(W_{k-1}, W_{k-2}) \cong H_k(M_{k-1}, V_{k-1}) = 0$ al ser $c_{k-1} = (M_{k-1}, V_{k-1}, V'_{k-1})$ un cobordismo de índice $k-1$; de donde α es monomorfismo.

Por definición, $H_k(C_*) = \ker(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1}) = \text{Im}(\alpha) / \ker(\beta)$ usando la exactitud. Como $\alpha : H_k(W_k, W_{k-2}) \rightarrow \text{Im}(\alpha)$ es un isomorfismo, tendremos que $\text{Im}(\alpha) / \ker(\beta) \cong H_k(W_k, W_{k-2}) / \alpha^{-1}(\ker(\beta)) = H_k(W_k, W_{k-2}) / \ker(\beta \circ \alpha) \cong \text{Im}(\beta \circ \alpha)$ por el Teorema de Isomorfismo. Notemos que $\beta \circ \alpha = j$ es el morfismo inducido por la inclusión $(W_k, W_{k-2}) \hookrightarrow (W_{k+1}, W_{k-1})$. Tenemos entonces que factoriza

$$H_k(W_k, W_{k-2}) \xrightarrow{\gamma} H_k(W_{k+1}, W_{k-2}) \xrightarrow{\delta} H_k(W_{k+1}, W_{k-1})$$

Es decir, $j = \delta \circ \gamma$. Vamos a probar que δ es monomorfismo y γ epimorfismo. Para ello, usamos las sucesiones exactas de (W_{k+1}, W_k, W_{k-2}) y $(W_{k+1}, W_{k-1}, W_{k-2})$, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_k(W_k, W_{k-2}) & & \\ & & \downarrow \gamma & \searrow j & \\ H_k(W_{k-1}, W_{k-2}) & \longrightarrow & H_k(W_{k+1}, W_{k-2}) & \xrightarrow{\delta} & H_k(W_{k+1}, W_{k-1}) \\ & & \downarrow & & \\ & & H_k(W_{k+1}, W_k) & & \end{array}$$

Ya vimos antes que $H_k(W_{k-1}, W_{k-2}) = 0$ y por motivos análogos $H_k(W_{k+1}, W_k) = H_k(M_{k+1}, V_{k+1}) = 0$, de donde γ es epimorfismo y δ monomorfismo. En consecuencia,

$H_k(C_*) \cong \text{Im}(j) = \delta(\gamma(H_k(W_k, W_{k-2}))) = \delta(H_k(W_{k+1}, W_{k-2})) \cong H_k(W_{k+1}, W_{k-2})$ como queríamos. \square

Teorema 3.8 (Basis Theorem). *Sea (W, V, V') una tríada de dimensión n , que admite una función de Morse f tal que todos sus puntos críticos están al mismo nivel y son de índice k . Supongamos que $2 \leq k \leq n - 2$ y que W es conexa. Sea ξ un campo tipo gradiente para f y sean q_1, \dots, q_l los puntos críticos de f . Sea $\{b_1, \dots, b_l\}$ una base cualquiera de $H_k(W, V)$. Entonces, existen una función de Morse f' y un campo tipo gradiente asociado ξ' que coinciden con f y ξ respectivamente en un entorno de $V \cup V'$ tales que f' tiene los mismos puntos críticos que f (al mismo nivel y con el mismo índice k) y eligiendo las orientaciones adecuadas $[D_L(q_i)] = b_i$ para todo $1 \leq i \leq l$.*

Demostración. Partimos de una función de Morse f y un campo tipo gradiente ξ cuyos discos izquierdos orientados determinan una base $\{a_1, \dots, a_l\}$ de $H_k(W, V)$. Sabemos que dadas dos bases de un \mathbb{Z} -módulo libre y finitamente generado como es $H_k(W, V)$, podemos obtener una de la otra aplicando finitas veces operaciones del siguiente tipo:

- (i) Permutar elementos de la base.
- (ii) Cambiar algún elemento por su opuesto.
- (iii) Cambiar $\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ por $\{c_1 + c_2, c_2, \dots, c_l\}$.

Podemos entonces obtener $B' = \{b_1, \dots, b_l\}$ de $B = \{a_1, \dots, a_l\}$ haciendo finitos pasos de tipo (i), (ii) o (iii). Por lo tanto, si probamos que podemos perturbar f y ξ bajo las restricciones del teorema (es decir, manteniendo los mismos puntos críticos, al mismo nivel y con el mismo índice, y coincidiendo el nuevo par (f, ξ) con el anterior en un entorno de $V \cup V'$) de modo que los nuevos discos obtenidos representen a una base que se obtiene de $\{a_1, \dots, a_n\}$ aplicando un paso de tipo (i), (ii) o (iii) concluiremos lo deseado. Como el paso (i) se logra meramente cambiando la enumeración de los discos, y el (ii) invirtiendo la orientación, alcanzará con ver que podemos realizar el paso (iii).

En primer lugar, recurrimos al siguiente lema.

Lema 3.2. *Sea D un disco de dimensión k orientado y embebido en $W \setminus V'$ de modo que sea una subvariedad buena (en particular, $\partial D \subseteq V$) y que interseque transversalmente a los discos derechos. Entonces $[D] = \sum_{i=1}^l (D_R(p_i) \cdot D)[D_L(p_i)]$ en $H_k(W, V)$.*

Demostración. Si $l = 1$, aplicando el **Lema 1.6** tenemos que $g' \circ g([D]) = (D_R \cdot D)\eta$ donde $H_k(D, \partial D) \xrightarrow{g} H_k(W, V) \xrightarrow{g'} H_k(W, W \setminus D_R)$ vienen dados por las inclusiones y $\eta \in H_k(W, W \setminus D_R)$ es el generador de orientación. Como por lo

3.2. CANCELACIÓN EN LAS DIMENSIONES INTERMEDIAS

discutido previamente $[D_L] = \eta \in H_k(W, W \setminus D_R)$, resulta ser $g([D]) = (D_R \cdot D)[D_L]$, dado que g' es un isomorfismo, al haber un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_k(W, V) & \xrightarrow{g'} & H_k(W, W \setminus D_R) \\ \downarrow r_* & & \downarrow r_* \\ H_k(V \cup D_L, V) & \xrightarrow{i_*} & H_k(V \cup D_L, V \cup D_L \setminus \{q\}) \end{array}$$

En el cual tanto i_* como los morfismos verticales son isomorfismos. El caso general se resuelve utilizando esto y la caracterización de cobordismos con un único valor crítico en términos de cirugía dada al final de la **Sección 2.3.3**. \square

A partir del lema, la idea de la demostración será perturbar f y ξ de modo que los nuevos discos $\{D'_L(p_i)\}_{1 \leq i \leq l}$ coincidan con los originales para $i = 2, \dots, n$ y a su vez se cumpla $D_R(p_1) \cdot D'_L(p_1) = D_R(p_2) \cdot D'_L(p_1) = 1$ y $D_R(p_i) \cdot D'_L(p_1) = 0$ para todo $3 \leq i \leq l$, obteniendo como nueva base de los discos $\{a_1 + a_2, a_2, \dots, a_n\}$.

Para eso haremos lo siguiente: como los discos correspondientes a puntos críticos distintos son disjuntos, usando el **Teorema 2.9** podemos cambiar f por f_1 de modo que admita el mismo campo tipo gradiente, coincida con f en un entorno de $V \cup V'$ y en uno de cada punto crítico p_i para $i \geq 2$, y difiera de f en una constante en un entorno de p_1 . Elegimos la constante de modo que $c' = f_1(p_1) > f(p_1) = c$ que es el nivel crítico para f , de modo que terminaremos incrementando f alrededor de p_1 y manteniéndola constante alrededor de los restantes puntos críticos, como se muestra en la **Figura 3.1** (donde los $D_L(p_i)$ son los discos izquierdos correspondientes al campo tipo gradiente ξ para las funciones de Morse f y f_1).

Tomamos $t_0 : c < t_0 < c'$ y definimos $V_0 := f_1^{-1}(t_0)$. La estrategia será cambiar ξ en un abierto a la derecha de V_0 de la pinta $f_1^{-1}(t_0, t_0 + \delta)$ con $t_0 + \delta < c' = f_1(p_1)$, y mantenerlo constante en el resto de W ; de modo que no se perturbarán $D_L(p_2), \dots, D_L(p_l)$, y que $D'_L(p_1)$ coincidirá con $D_L(p_1)$ en $f_1^{-1}[t_0 + \delta, f_1(p_1)]$ con lo que será $D_R(p_1) \cdot D'_L(p_1) = +1$ si le damos a $D'_L(p_1)$ la orientación que coincida con la de $D_L(p_1)$ en $f^{-1}[t_0 + \delta, f_1(p_1)]$. Pero queremos hacerlo de modo que $D'_L(p_1)$ corte a $D_R(p_2)$ de manera transversal y en un único punto q . Para eso vamos a querer “deformar” a $D_L(p_1)$ de manera suave hasta obtener algo como lo esquematizado en la **Figura 3.2** (notar que en realidad, la **Figura 3.1** y la **Figura 3.2**, si bien sirven para visualizar geoméricamente lo que estamos haciendo, no se corresponden totalmente con los objetos que estamos estudiando puesto que los discos allí representados no se intersecan de manera transversal).

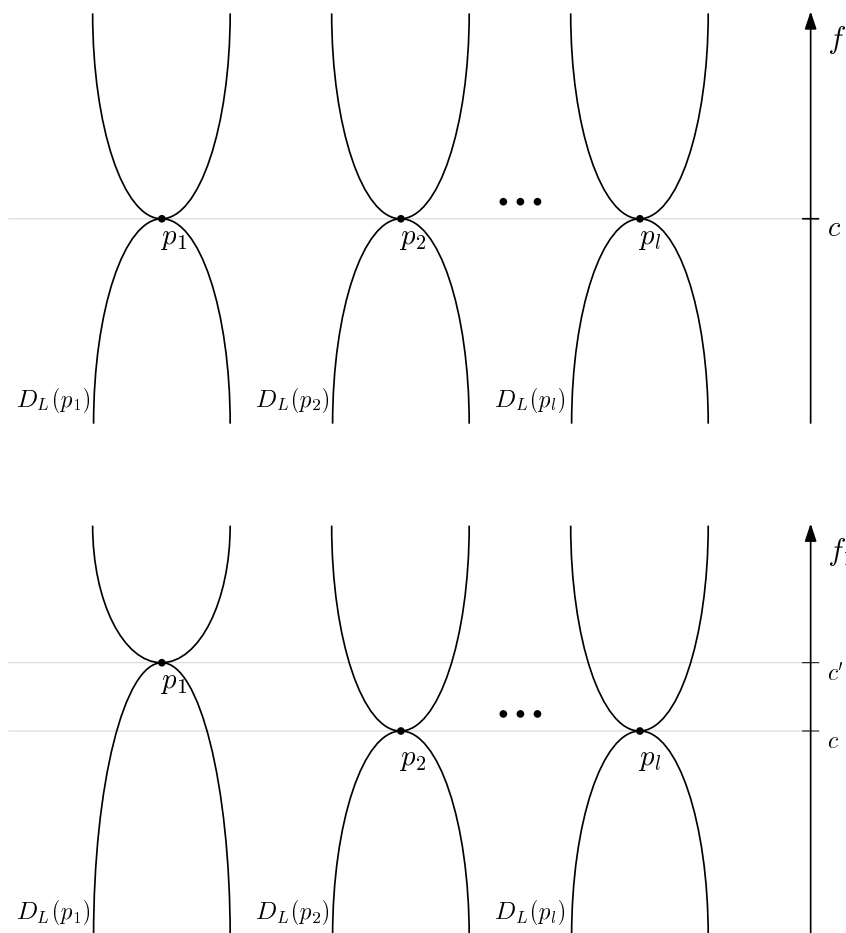


Figura 3.1

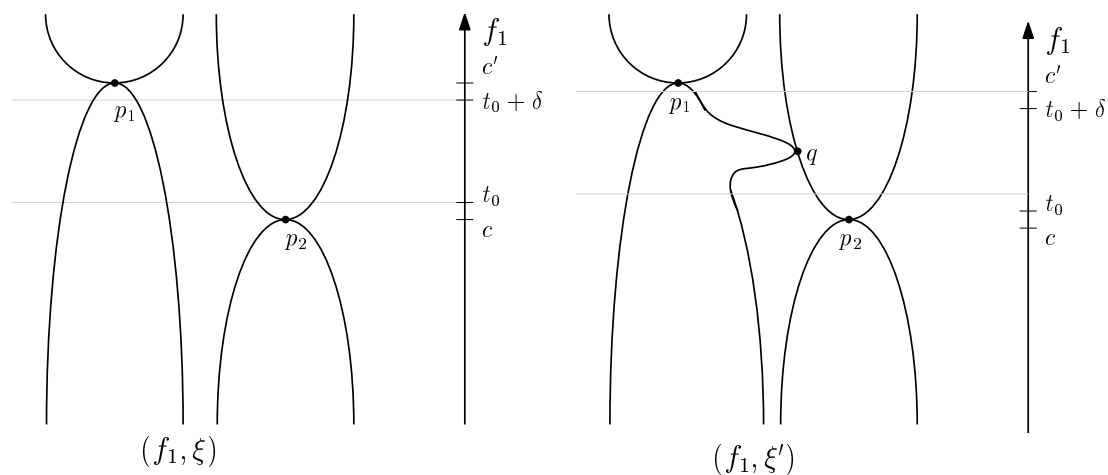


Figura 3.2

Ahora bien, contamos con una herramienta para deformar suavemente un campo tipo gradiente en el abierto sin puntos críticos $f^{-1}(t_0, t_0 + \delta)$ situado a la derecha de

$V_0 = f^{-1}(t_0)$: el **Lema 2.6** (en realidad, una versión análoga cuando $a > b$, siendo en este caso $b = t_0$ y $a = t_0 + \delta$); que dice que en estas condiciones, si tenemos un difeomorfismo $F_1 : V_0 \rightarrow V_0$ isotópico a la identidad, podemos cambiar ξ sólo en ese abierto para obtener un nuevo campo tipo gradiente ξ' para f_1 de modo que la nueva esfera izquierda $S'_L(p_1)$ a nivel V_0 sea $F_1(S_L(p_1))$ (y que la nueva esfera derecha $S'_R(p_1)$ a nivel V_0 sea igual a la anterior $S_R(p_1)$ ya que ξ no se modifica en $f_1^{-1}((-\infty, t_0])$). Más precisamente, si identificamos $f_1^{-1}([t_0, t_0 + \delta]) \cong V_0 \times [0, 1]$ (vía el flujo de ξ , correspondiéndose V_0 con $V_0 \times \{0\}$) y denotamos $S'_L{}^t$ a la imagen de la esfera izquierda de p_1 para ξ' que corresponde al nivel $V_0 \times \{t\}$ para cada $t \in [0, 1]$, resultará ser que $S'_L{}^t = F_{\omega(t)}(S_L) \times \{t\}$ donde $F : V_0 \times [0, 1] \rightarrow V_0$ es la isotopía entre $F_0 = id$ y F_1 y $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función suave y decreciente que vale 1 en $[0, \frac{1}{3}]$ y 0 en $[\frac{2}{3}, 1]$. Por lo tanto, si vamos mirando las esferas “de arriba hacia abajo” en $V_0 \times [0, 1]$, veremos que a lo largo de un intervalo de tiempo (que se correspondería con $[\frac{2}{3}, 1]$) aparece la esfera S_L , luego iremos viendo cómo se deforma S_L en $F_1(S_L)$ de manera diferenciable a través de la isotopía, y cómo finalmente la colección de esferas se estanca en $S'_L = F_1(S_L)$ (para $t \in [0, \frac{1}{3}]$). Lo que vamos a hacer entonces es construir la isotopía F de modo que $F_t(S_L)$ interseque a S_R para un único valor de $t \in (0, 1)$ (al cual notaremos t_1), en un único punto q y cumpliéndose que $T_q(F_{t_1}(S'_L))$ y $T_q(S_R)(p_2)$ estén en suma directa (para luego obtener que $D'_L(p_1) \pitchfork D'_R(p_2)$). Esto se muestra en la **Figura 3.3**, donde tomamos $t_2 \in (0, 1)$ tal que $t_2 < t_1$ para ilustrar cómo evoluciona $F_t(S_L)$, marcando las esferas correspondientes a $t = 0, t_2, t_1, 1$.

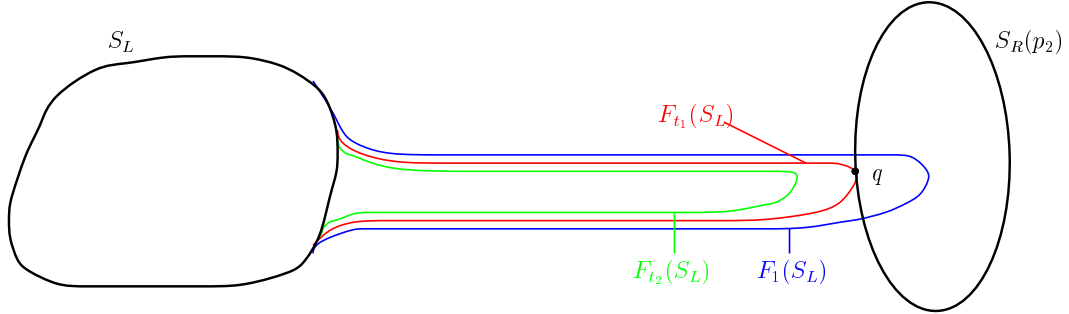


Figura 3.3

Para poder hacer lo anterior, vamos primero a definir una carta de V_0 que “conecte” a S_L y $S_R(p_2)$ y no interseque a las demás esferas; de modo de poder definir la isotopía ahí de manera conveniente extendiéndola por la identidad al resto de V_0 ; y así asegurarnos de que a pesar de la alteración que vamos a hacer al campo ξ , la nueva esfera $S'_L(p_1)$ siga sin intersecar a las esferas derechas de p_3, \dots, p_l . Para eso, comenzamos probando el siguiente lema (cuya validez se afirma en en [Mil65, p. 94] sin dar una prueba).

Lema 3.3. Sean $a \in S_L(p_1)$ y $b \in S_R(p_2)$ dos puntos. Existe un embedding $\varphi_1 : (0, 3) \rightarrow V_0$ tal que $\varphi_1(0, 3)$ interseca tanto a S_L como a S_R una única vez, de manera transversal en $a = \varphi_1(1)$ y $b = \varphi_1(2)$, y $\varphi_1(0, 3) \cap (S_R(p_3) \cup \dots \cup S_R(p_l)) = \emptyset$.

Demostración. Sea $0 < \delta < \frac{1}{3}$. Tomamos primero dos curvas suaves: $\gamma : (0, 1 + \delta] \rightarrow V_0$ que corte a $S_L(p_1)$ una única vez y de manera transversal en $a = \gamma(1)$, y que no corte a $S_R(p_2) \cup \dots \cup S_R(p_l)$; y $\beta : [2 - \delta, 3) \rightarrow V_0$ que interseque una única vez y de manera transversal a $S_R(p_2)$ en $b = \beta(2)$, y que no interseque a $S_L(p_1) \cup S_R(p_3) \cup \dots \cup S_R(p_L)$. Como las esferas involucradas son disjuntas, es posible satisfacer dichas condiciones y además que $Im(\gamma) \cap Im(\beta) = \emptyset$. Notamos $c = \gamma(1 + \delta)$ y $d = \beta(2 - \delta)$. Como V_0 es conexo (al serlo W y usando que $2 \leq k \leq n - 2$ y la retracción del **Teorema 2.7**), y $X_0 = S_L(p_1) \cup (\cup_{i=1}^l S_R(p_i))$ es unión de subvariedades de codimensión ≥ 2 , tenemos que $V'_0 = V_0 \setminus X_0$ es una subvariedad conexa de X_0 y por lo tanto existe $\eta : [1 + \delta, 2 - \delta] \rightarrow V'_0$ continua tal que $\eta(1 + \delta) = c$ y $\eta(2 - \delta) = d$. Concatenando $\gamma * \eta * \beta$ obtenemos una curva continua $\rho : (0, 3) \rightarrow V_0$. Lo que haremos ahora es mejorar la regularidad de ρ .

Para eso miramos $\rho|_{(1,2)} = \theta$. Tenemos que si $A = (1, 1 + \delta] \cup [2 - \delta, 2) \subseteq (1, 2)$, entonces A es subespacio cerrado y $\theta|_A$ es diferenciable. Vamos a aplicar los Teoremas de aproximación de Whitney, cuyos enunciados están en [Mil65, Lemma 6.11] y [Mil65, Lemma 6.12]. Las respectivas demostraciones pueden encontrarse en [Lee00, Thm. 6.19] y [Whi36]. A partir de eso, existe $\theta' : (1, 2) \rightarrow V'_0$ diferenciable, homotópicamente equivalente a θ y tal que $\theta'|_A = \theta|_A$. Como θ' es un embedding en A , y $\dim(V'_0) = n - 1 \geq 3 = 2 \dim((1, 2)) + 1$, existe un embedding $\theta'' : (1, 2) \rightarrow V'_0$ que coincide con θ' en A y es homotópicamente equivalente a θ' . Podemos definir entonces $\varphi_1 : (0, 3) \rightarrow V_0$ como

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \rho(t) & \text{si } t \in (0, 1 + \delta) \cup (2 - \delta, 3) \\ \theta''(t) & \text{si } t \in (1, 2) \end{cases}$$

Obteniendo una función diferenciable, y con diferencial inyectivo. Por construcción, φ_1 cumple todas las condiciones del lema excepto quizás ser una función subespacio (para que sea embedding). Para cumplir dicha condición, veamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que φ_1 es inyectiva en $(1 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$. Por cómo construimos φ_1 , basta que lo sea en $(1 - \varepsilon, 2)$ y en $(1, 2 + \varepsilon)$. Probaremos entonces que existe $\varepsilon > 0$ tal que φ_1 es inyectiva en $(1 - \varepsilon, 2)$, el argumento para el intervalo $(1, 2 + \varepsilon)$ será totalmente análogo.

Supongamos que no existiera un $\varepsilon > 0$ con la propiedad deseada. Luego, podríamos construir dos sucesiones: $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$ y $(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (1, 2)^{\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 1$ y $\varphi_1(t_k) = \varphi_1(s_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como el intervalo $[1, 2]$ es compacto, podemos extraer una subsucesión $(s_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ convergente a cierto punto $s \in [1, 2]$. Pero entonces, tomando límite tendremos que

$$a = \varphi_1(1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_1(t_{k_l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_1(s_{k_l}) = \varphi_1(s)$$

Y como φ_1 es inyectiva en $[1, 2]$ será $s = 1$. Esto nos dirá que dado cualquier entorno de 1 en $(0, 2)$, existirán dos puntos $t_{k_l} < 1 < s_{k_l}$ distintos allí tales que

3.2. CANCELACIÓN EN LAS DIMENSIONES INTERMEDIAS

$\varphi_1(t_{k_i}) = \varphi_1(s_{k_i})$. Esto contradice el hecho de que existe un entorno de 1 donde φ_1 es inyectiva, al ser $\varphi_1'(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, 3)$.

En consecuencia, a partir de los razonamientos anteriores vemos que existirá $\varepsilon > 0$ tal que φ_1 es inyectiva en $(1-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, y achicándolo un poco tendremos un $\varepsilon > 0$ tal que la inyectividad se verifica en el intervalo compacto $[1-\varepsilon, 2+\varepsilon]$. En consecuencia, $\varphi_1 : [1-\varepsilon, 2+\varepsilon] \rightarrow V_0$ es un homeomorfismo con su imagen (al ser continua, biyectiva, tener dominio compacto y codominio Hausdorff). En particular también lo es $\varphi_1 : (1-\varepsilon, 2+\varepsilon) \rightarrow V_0$ y como ya vimos que esta función es además diferenciable y con diferencial inyectivo, resulta ser un embedding. Reescalando adecuadamente el intervalo $(1-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ en $(0, 3)$ obtenemos el resultado deseado. \square

Para construir entonces la carta de V_0 deseada, comenzamos eligiendo puntos $a \in S_L(p_1)$ y $b \in S_R(p_2)$ y armándonos un camino embebido $\varphi_1 : (0, 3) \rightarrow V_0$ de acuerdo al **Lema 3.2**, el cual “conectará” a las dos esferas. La existencia de la carta deseada viene dada por el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [Mil65, Lemma 7.7].

Lema 3.4. *Existe un embedding $\varphi : (0, 3) \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ tal que*

1. $\varphi(s, 0, 0) = \varphi_1(s)$ para todo $s \in (0, 3)$
2. $\varphi^{-1}(S_L(p_1)) = \{1\} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ y $\varphi^{-1}(S_R(p_2)) = \{2\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$.
3. La imagen de φ no corta a las otras esferas. Más aún, φ puede ser elegido de modo tal que mande $\{1\} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ en $S_L(p_1)$ preservando orientación y de modo tal que $\varphi((0, 3) \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\})$ interseque a $S_R(p_2)$ en $\varphi(2, 0, 0) = b$ con número de intersección $+1$.

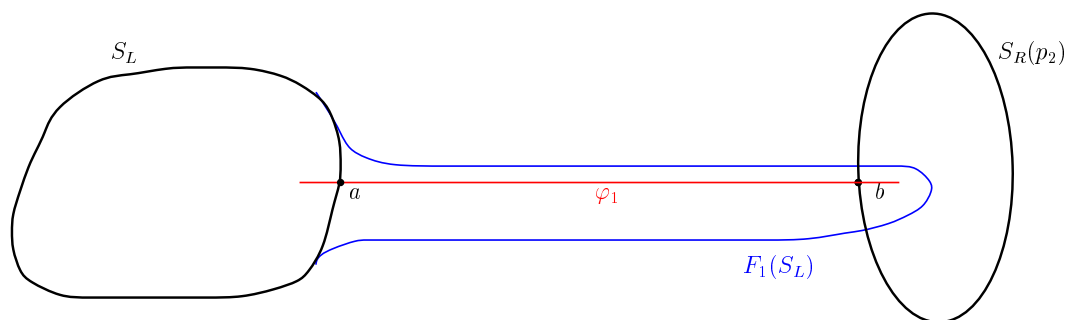


Figura 3.4

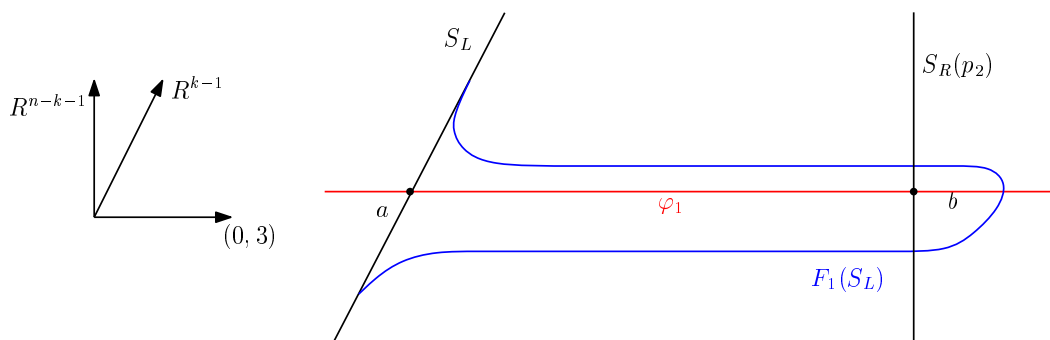


Figura 3.5

En la **Figura 3.4** y en la **Figura 3.5** se representan los embeddings de los dos lemas recién tratados, las esferas S_L y $S_R(p_2)$ y la deformación de S_L que queremos lograr vía la isotopía F . Por cuestiones técnicas, nos resultará conveniente que $\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$. Para obtener eso, simplemente precomponemos con $\psi \times \text{id} \times \text{id}$ donde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 3)$ es un difeomorfismo tal que $\psi|_{(1-\delta, 2+\delta)} = \text{id}$ para algún $0 < \delta < 1$; y obtenemos un nuevo embedding φ que cumple las mismas condiciones que el del **Lema 3.3** cambiando $(0, 3)$ por \mathbb{R} . Pasamos ahora a construir F . Para eso, vamos a definir una isotopía H en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ de modo que exista un compacto fijo $K \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ tal que H_t sea la identidad fuera de K para todo $t \in [0, 1]$; lo cual nos permitirá obtener vía φ una isotopía en el abierto $\text{Im}(\varphi) \subseteq V_0$ que puede extenderse por la identidad al resto de V_0 precisamente por coincidir con ella fuera de un compacto.

Como queremos que H deforme a S_L de acuerdo a la **Figura 3.5**, si miramos $H_1(1, x, 0)$ para $x \in \mathbb{R}^{k-1}$ observaremos que la primer coordenada es una función no negativa de x que es mayor a 2 en una bola abierta alrededor del origen e igual a 1 fuera de una bola más grande; y que otras dos coordenadas son $(x, 0)$. Por lo tanto una función posible es $H_1(1, x, 0) = (\alpha(|x|^2), x, 0)$ donde $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{5}{2}]$ cumple lo siguiente: existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(u) = 1$ para $u \geq 2\varepsilon$ y $\alpha(u) = \frac{5}{2}$ para $u \leq \varepsilon$. Como queremos que H_1 sea la identidad fuera de un compacto, vamos a pedirle que deforme a las curvas $\{s\} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ de acuerdo a la **Figura 3.6**.

Así, podemos proponer como ecuación para la imagen estas curvas algo de la forma $H_1(s, x, 0) = (s + (\alpha(|x|^2) - 1)\rho(s), x, 0)$ donde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es una función \mathcal{C}^∞ que vale 0 fuera de un intervalo $(1-\eta, 1+\eta)$ para $\eta > 0$, es monótona creciente en $(1-\eta, 1]$, monótona decreciente en $[1, 1+\eta)$ y $\rho(1) = 1$. Lo que estamos haciendo en la primer coordenada es perturbar a la identidad s con un factor aditivo $\alpha(|x|^2) - 1$ (el mismo que sumamos para $s = 1$) pero modulando su amplitud con $\rho(s)$ de modo que el factor desaparezca conforme s se aleja de 1 y sea idénticamente $\alpha(|x|^2) - 1$ para $s = 1$. A partir de lo anterior, es razonable proponer $H_t(s, x, y) = (s + t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)\rho(s), x, y)$ que claramente extiende al H_1 antes definido. Veamos que si $|\rho'(s)| < \frac{2}{3}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ (lo cual puede satisfacerse tomando por ejemplo $\eta = 2$ y eligiendo ρ adecuadamente), la fórmula anterior define una isotopía.

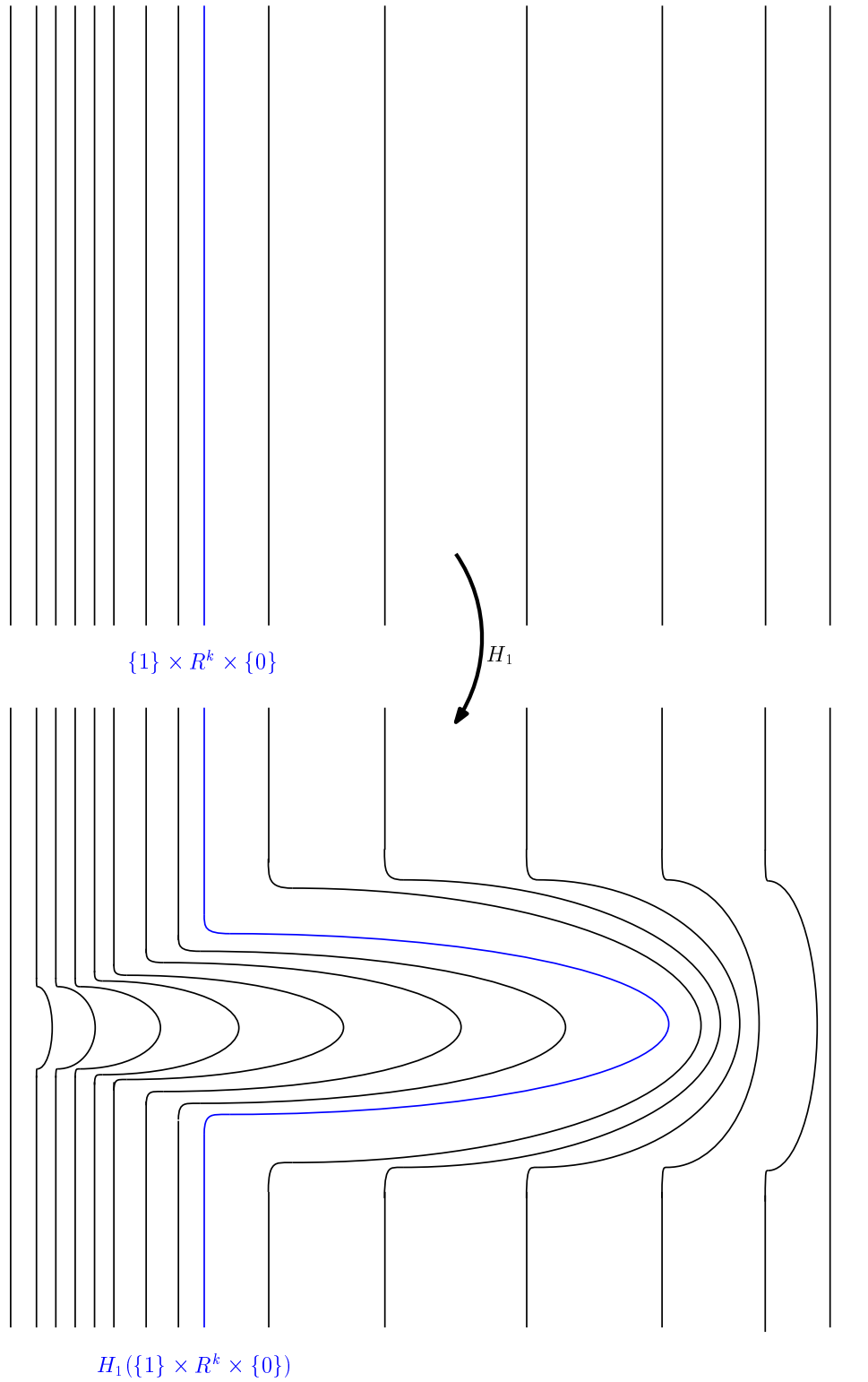


Figura 3.6

Notamos $l(t, s, x, y) = s + t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)\rho(s)$, vamos a ver que $\frac{\partial l}{\partial s}(t, s, x, y) > 0$

para todo $(t, s, x, y) \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que $\frac{\partial l}{\partial s}(t, s, x, y) = 1 + t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)\rho'(s)$. Si $t = 0$ o $\alpha(|x|^2 + |y|^2) = 1$ entonces $\frac{\partial l}{\partial s}(t, s, x, y) = 1$, verificándose lo deseado; y en cualquier otro caso es equivalente a probar que $\rho'(s) > -\frac{1}{t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)}$, lo cual valdrá si $|\rho'(s)| < \frac{1}{t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)}$. Pero sabemos que $\frac{1}{t(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)} \geq \frac{1}{\frac{3}{2}t} = \frac{2}{3t} \geq \frac{2}{3}$ de modo que lo deseado sigue de que $|\rho'(s)| < \frac{2}{3} \forall s$. En consecuencia, fijos t, x, y tenemos que $l(t, \cdot, x, y)$ es una función estrictamente creciente, que tiende a $\pm\infty$ cuando $s \rightarrow \pm\infty$ respectivamente (al ser $(\alpha(|x|^2 + |y|^2) - 1)\rho(s) = 0$ para $|s - 1| > \eta$), de modo que es biyectiva. De aquí se puede deducir fácilmente que H_t es biyectiva para todo $t \in [0, 1]$. Pero además H_t es un difeomorfismo local para cada t , al ser su diferencial la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial s}(t, s, x, y) & * & * \\ 0 & Id_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & Id_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

Que es inversible ya que $\frac{\partial l}{\partial s}(t, s, x, y) > 0$. Esto prueba que H es una isotopía. Además si $K = [1 - \eta, 1 + \eta] \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1} : |x|^2 + |y|^2 \leq 2\varepsilon\}$, K es compacto y es fácil chequear que si $(s, x, y) \notin K$ entonces $H_t(s, x, y) = (s, x, y)$. Además tenemos que $H_t(1, x, 0) = (1 + t(\alpha(|x|^2) - 1), x, 0)$.

Si miramos la isotopía F en V_0 construida a partir de H , tendremos que si $F_t(p) = q$ con $p \in S_L$ y $q \in S_R$ deberá ser $p, q \in Im(\varphi)$ con $p = \varphi(1, x, 0)$ y $q = \varphi(2, 0, y)$ de modo que $(2, 0, y) = H_t(1, x, 0) = (1 + t(\alpha(|x|^2) - 1), x, 0)$ debiendo ser $x = 0$, $y = 0$ y $2 = 1 + \frac{3}{2}t$ de modo que $t = \frac{2}{3}$. Esto nos dice que D'_L y D_R se intersecan en un único punto en $f_1^{-1}([t_0, t_0 + \delta])$. Miremos qué ocurre en (c, t_0) , para eso tomamos s en ese intervalo. Como $f_1^{-1}([s, t_0])$ no contiene puntos críticos, sabemos que existe un difeomorfismo $\psi : V_0 \times [-1, 0] \rightarrow f_1^{-1}([s, t_0])$ que manda $V_0 \times \{0\}$ en V_0 y las curvas integrales de ξ' en las de $\frac{d}{dt}$. Por lo tanto, la imagen bajo ψ^{-1} de la esfera izquierda de p_1 a nivel $f_1(\psi(V_0 \times \{t\}))$ con $t \in [0, 1]$ será $F_1(S_L) \times \{t\}$ y la de la esfera derecha será $S_R \times \{t\}$, de modo que no se intersecarán. Así, $D'_L(p_1)$ y $D_R(p_2)$ se intersecan en un único punto.

Veamos que la intersección es transversal, con número de intersección $+1$. Sea $\kappa : [0, 1] \times V_0 \rightarrow f_1^{-1}([t_0, t_0 + \delta])$ el difeomorfismo dado por seguir el flujo de ξ . Consideremos la carta de $(0, 1) \times V_0$ cuya inversa es $\phi : (0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1} \rightarrow (0, 1) \times V_0$ dada por $\phi(t, s, x, y) = (t, \varphi(s, x, y))$. En esta carta tenemos que el disco D_L se corresponde con $(0, 1) \times \{1\} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ y el disco D_R con $(0, 1) \times \{2\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ (haciendo las identificaciones inducidas por κ). Como sabemos que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k-1}}\}$ se corresponde vía la carta con una base orientada de S_L y el campo $\frac{d}{dt}$ a lo largo de $S_L = \partial D_L$ apunta hacia adentro, deducimos que una base orientada de D_L en esta carta es $\{-\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k-1}}\}$. Como $\phi^{-1}(D_L)$ y $\phi^{-1}(D'_L)$ coinciden como variedades orientadas en $[\frac{2}{3}, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, deducimos que $\mu : (0, 1) \times \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \phi^{-1}(D'_L)$ definida como $\mu(t, x) = (t, H_{\omega(t)}(1, x, 0))$ es una parametrización de D'_L que invierte orientación (al invertirla en los puntos (t, x) con $t > \frac{2}{3}$, porción en la que

μ parametriza tanto a D'_L como a D_L). Por otro lado, de acuerdo al **Lema 3.4** la orientación de $\nu(\{2\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k-1})$ en \mathbb{R}^{n-1} inducida por la de $\nu(S_R)$ vía φ coincide con la canónica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$. Como vimos anteriormente, la orientación de $\nu(S_R)$ surge de restringir la de $\nu(D_R)$, de modo que una base orientada de $\nu(D_R)$ en $Im(\phi)$ será la dada por $\{[\frac{d}{ds}], [\frac{\partial}{\partial x_1}], \dots, [\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}]\}$.

Vamos a ver que las bases orientadas de D'_L y $\nu(D_R)$ en $q = D'_L \cap D_R$ coinciden. Como que D'_L viene dado en esta carta por la parametrización $\mu(t, x) = (t, 1 + \omega(t)(\alpha(|x|^2) - 1), x, 0)$, y para $|x|^2 < \varepsilon$ es $\omega(|x|^2) = \frac{5}{2}$, obtenemos que:

$$d\mu\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2}\omega'\left(\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & Id_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De modo que la base orientada de $\phi^{-1}(D'_L)$ en su punto de intersección con $\varphi^{-1}(D_R)$ sería $\{-\frac{d}{dt} - a\frac{d}{ds}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{k-1}}\}$ donde $a = \frac{3}{2}\omega'\left(\frac{2}{3}\right) < 0$. La base que induce de $\nu(D_R)$ en ese punto será entonces $\{-[\frac{d}{dt}] - a[\frac{d}{ds}], [\frac{\partial}{\partial x_1}], \dots, [\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}]\}$ que define la misma orientación que $\{[\frac{d}{ds}], [\frac{\partial}{\partial x_1}], \dots, [\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}]\}$ ya que $\frac{d}{dt} \in TD_R$ y $-a > 0$. Como esta es en efecto una base orientada de $\nu(D_R)$ por lo antes visto, deducimos que $D_R \cdot D'_L = +1$.

Hemos probado entonces que el campo tipo gradiente ξ' para f_1 cumple las condiciones necesarias respecto a las intersecciones entre los discos. Como $S'_L(p_1), S_R(p_2), \dots, S_R(p_l)$ son disjuntas entre sí, podemos aplicar el **Teorema 2.9** y obtener una nueva función de Morse f' tal que tenga los mismos puntos críticos que f_1 , todos a nivel c y de índice k , que coincida con f_1 en un entorno de $V \cup V'$ y que admita a ξ' como campo tipo gradiente. El par (f', ξ') cumple con todas las propiedades deseadas. □

Vamos ahora a demostrar el **Teorema 3.4**. Consideremos el conjunto \mathcal{A} de las funciones autoindexantes en (W, V, V') que no tienen puntos críticos de índice 0, 1, $n-1$, n . Combinando nuestra hipótesis con el **Teorema 2.8** tenemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Vamos a probar que dada $f \in \mathcal{A}$ que tenga al menos un punto crítico, se puede obtener $f' \in \mathcal{A}$ con dos puntos críticos menos.

Tomamos entonces $f \in \mathcal{A}$ que tenga puntos críticos, y un campo tipo gradiente ξ para f . Damos orientaciones a los discos y esferas respecto de ξ como se describió anteriormente, y consideramos el complejo de Morse (C_*, ∂) asociado a (f, ξ) . Como $H_*(W, V) = 0$, por el **Teorema 3.7** dicho complejo es acíclico, obteniendo así una sucesión exacta

$$0 \xrightarrow{\partial} C_{n-2} \xrightarrow{\partial} C_{n-3} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_3 \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} 0$$

Tomamos el menor $k : C_k \neq 0$. Sea $\{z_1, \dots, z_l\}$ base de C_k , con $l \geq 1$. Como $\partial_{k+1} : C_{k+1} \rightarrow C_k$ es epimorfismo, podemos elegir $b_1, \dots, b_l \in C_{k+1}$ tales que $\partial_{k+1}(b_i) = z_i$ para todo $1 \leq i \leq l$. Como $\ker(\partial_{k+1}) \subseteq C_{k+1}$ es libre (al serlo

C_{k+1}) elegimos una base $\{z'_1, \dots, z'_m\}$ de dicho \mathbb{Z} -módulo. Entonces $\{b_1, \dots, b_l, z'_1, \dots, z'_l\}$ es base de C_{k+1} . Por el Basis Theorem, podemos perturbar a (f, ξ) únicamente en $c_k \cdot c_{k+1}$ para obtener un nuevo par (f', ξ') tal que las bases de los discos orientados sean $\{[D_L(p_1)], \dots, [D_L(p_l)]\} = \{z_1, \dots, z_l\}$ y $\{[D_L(p'_1)], \dots, [D_L(p'_{l+m})]\} = \{b_1, \dots, b_l, z'_1, \dots, z'_m\}$, donde p_1, \dots, p_l son los puntos críticos de índice k y p'_1, \dots, p'_{l+m} son los de índice $k+1$. Además nos aseguramos de que $f' \in \mathcal{A}$. Pero entonces como $\partial_{k+1}([D_L(p'_1)]) = [D_L(p_1)]$, por la **Proposición 3.1** tenemos que $S_R(p_1) \cdot S_L(p'_1) = +1$.

Como en c_k y c_{k+1} todos los puntos críticos están al mismo nivel (k y $k+1$ respectivamente), usando el **Teorema 2.9** podemos alterar la función de Morse sólo en $c_k \cdot c_{k+1}$ de modo que obtengamos una función f'' que admite a ξ' como campo tipo gradiente, tal que $k < f''(p_1) < k + \frac{1}{2} < f''(p'_1) < k+1$ y tanto los restantes puntos críticos como el valor de f'' en ellos sea el mismo que en el caso de f' . Si tomamos $t_1 \in (k, f''(p_1))$ y $t_2 \in (f''(p'_1), k+1)$, tenemos que el par (f'', ξ') en la tríada $((f'')^{-1}([t_1, t_2]), (f'')^{-1}(t_1), (f'')^{-1}(t_2))$ está bajo las hipótesis del **Teorema 3.3** al ser las variedades involucradas simplemente conexas, y entonces usando también el **Teorema 3.2** vemos que podemos cambiar (f'', ξ') en $(f'')^{-1}([t_1, t_2])$ dejándolos como antes cerca del borde y eliminando los dos puntos críticos p_1 y p'_1 que teníamos; y así obtener (f''', ξ'') en (W, V, V') que tiene los mismos puntos críticos que f excepto por p_1 y p'_1 que fueron eliminados. Así, $f''' \in \mathcal{A}$ y tiene dos puntos críticos menos que f . En consecuencia, si tomamos algún elemento de \mathcal{A} con la mínima cantidad de puntos críticos posibles, no debe tener ninguno; lo cual completa la demostración del **Teorema 3.4**.

3.3. Aplicaciones del Teorema de h-cobordismo

Vamos a presentar ahora dos aplicaciones del Teorema de h -cobordismo. La primera es una caracterización del n -disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ para cada $n \geq 6$. La segunda es la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión ≥ 6 , cuya demostración se debe a Stephen Smale, quien como mencionamos en la **Introducción** dio una primera prueba en [Sma61a] para dimensión $n \geq 5$ y posteriormente probó el Teorema de h -cobordismo utilizando métodos similares (ver [Sma62]); el cual a su vez provee una demostración distinta de la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión $n \geq 6$ a la que dio Smale en un principio, que es la que expondremos a continuación, basándonos en [Mil65].

Teorema 3.9 (Caracterización del n -disco). *Sea W una variedad compacta simplemente conexa de dimensión $n \geq 6$, con borde simplemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. W es difeomorfa a D^n .
2. W es homeomorfa a D^n .

3. W es contráctil.

4. W tiene la homología de un punto (con coeficientes en \mathbb{Z}).

Demostración. Es claro que $1. \implies 2. \implies 3. \implies 4.$ de modo que nos concentramos en probar $4. \implies 1.$ Tomemos un disco D de dimensión n embebido en $W \setminus \partial W$. Notamos $S = \partial D$. Tenemos una tríada $(W \setminus \overset{\circ}{D}, S, \partial W)$ de variedades simplemente conexas, tal que $H_*(W \setminus \overset{\circ}{D}, S) \cong H_*(W, D) = 0$ por Escisión y por la sucesión exacta larga del par de variedades acíclicas (W, D) . Entonces, por el Teorema de h-cobordismo $(W \setminus \overset{\circ}{D}, S, \partial W)$ es un cobordismo producto. Sea $\psi_1 : D \rightarrow D^n$ el difeomorfismo dado por el embedding que define a D . Sea $\alpha : W \setminus \overset{\circ}{D} \rightarrow S \times [0, 1]$ el difeomorfismo dado por el **Teorema 2.2**, $g : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ dada por $g(t) = t + 1$, y $\beta : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\beta(x, t) = tx$. Notaremos $D_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 2\}$ y $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Tenemos entonces un difeomorfismo $\psi_2 : W \setminus \overset{\circ}{D} \xrightarrow{\alpha} S \times [0, 1] \xrightarrow{\psi_1|_{S \times g}} S^{n-1} \times [1, 2] \xrightarrow{\beta} C^n$. Como ψ_1 y ψ_2 se pegan bien, y lo mismo ocurre con sus inversas; inducen un homeomorfismo $\psi : W \rightarrow D_2^n$. Notamos \mathcal{S} a la estructura diferencial usual de D_2^n y \mathcal{S}' a la inducida por el homeomorfismo ψ empujando la de W . Entonces las inclusiones $i_1 = \psi \circ \psi_1^{-1} : D^n \rightarrow (D_2^n, \mathcal{S}')$ e $i_2 = \psi \circ \psi_2^{-1} : C^n \rightarrow (D_2^n, \mathcal{S}')$ son embeddings, de modo que por el **Teorema 2.4** existe un difeomorfismo $\rho : (D_2^n, \mathcal{S}') \rightarrow (D_2^n, \mathcal{S})$ que deja fijos a S^n y ∂D_2^n . En particular, $\rho \circ \psi : W \rightarrow (D_2^n, \mathcal{S})$ es un difeomorfismo, y entonces efectivamente $W \cong D^n$. \square

Observación 3.1. *El cuidado que se tiene en la demostración previa respecto a la estructura diferenciable de D_2^n se debe a que un mismo espacio topológico (Hausdorff, con base numerable) puede admitir varias estructuras diferenciables que no son difeomorfas entre sí. En efecto, Milnor probó en [Mil56] que existen variedades de dimensión 7 que son homeomorfas a S^7 pero no difeomorfas a S^7 , las cuales se denominan esferas exóticas. En consecuencia, cuando pegamos variedades por el borde, si bien en algunos casos puede resultar sencillo probar que la variedad obtenida es homeomorfa a otra conocida (por ejemplo a un disco como en el caso anterior, o a una esfera), esto no implica automáticamente que tales variedades sean difeomorfas. Esto volverá a aparecer en el siguiente resultado.*

Teorema 3.10 (Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión ≥ 6). *Sea M es una variedad cerrada, simplemente conexa de dimensión $n \geq 6$ que tiene la homología de S^n (con coeficientes en \mathbb{Z}). Entonces M es homeomorfa a S^n .*

Demostración. Tomemos un n -disco D embebido en M . Entonces la variedad $M \setminus \overset{\circ}{D}$ es compacta, simplemente conexa y con borde simplemente conexo $\partial D \cong S^{n-1}$. Además, usando Dualidad de Poincaré para la tríada $(M \setminus \overset{\circ}{D}, \emptyset, \partial D)$ (ver [Mil65, Thm. 7.5]), $H_i(M \setminus \overset{\circ}{D}) \cong H^{n-i}(M \setminus \overset{\circ}{D}, \partial D) \cong H^{n-i}(M, D)$ por Escisión, de modo que

$$H_i(M \setminus \overset{\circ}{D}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

En consecuencia, $M \setminus \mathring{D}$ está en las hipótesis del **Teorema 3.9** y por lo tanto es difeomorfa al disco D^n . Así, usando el **Teorema 2.4** podemos ver que $M = M \setminus \mathring{D} \cup D$ es difeomorfa a la unión de dos n -discos $D_1 \cup_h D_2$ pegados a través de un difeomorfismo $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$. Una tal variedad es una “twisted sphere”. Nos alcanzará con ver entonces que toda twisted sphere de dimensión n es homeomorfa a S^n .

Para eso, consideramos un homeomorfismo g_1 entre D_1 y el hemisferio sur de $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Pensaremos a D_2 como el cono de su borde ∂D_2 , es decir $D_2 \cong \partial D_2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (y, 0) \forall x, y \in \partial D_2$, lo cual nos permite escribir a todo punto $z \in D_2$ como $z = tx$ para $t \in [0, 1]$ y $x \in \partial D_2$. Definimos $g : D_1 \cup_h D_2 \rightarrow S^n$ como

$$g(u) = \begin{cases} g_1(u) & \text{si } u \in D_1 \\ \sin(\frac{\pi t}{2})g_1(h^{-1}(x)) + \cos(\frac{\pi t}{2})e_{n+1} & \text{si } u = tx \in D_2 \end{cases}$$

Donde $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como g es una función continua y biyectiva, cuyo dominio es compacto y su codominio Hausdorff, deducimos que g es un homeomorfismo. □

Notemos que la función $g : M = D_1 \cup_h D_2 \rightarrow S^n$ de la demostración anterior no tiene por qué ser diferenciable, a pesar de serlo en las subvariedades con borde D_1 y D_2 de M (más allá de que se pegue continuamente, podría no hacerlo de manera suave; como ocurre con la función $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ respecto a las subvariedades con borde \mathbb{R}_+ y \mathbb{R}_-). De hecho, no será siempre posible construir un difeomorfismo $g : M \rightarrow S^n$ ya que si M es una esfera exótica, estará bajo las hipótesis del **Teorema 3.10** pero no será difeomorfa a S^n . La clave está en el difeomorfismo de pegado $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$: si h fuera la identidad, entonces por el **Teorema 2.4** obtendríamos que la variedad $D_1 \cup_h D_2$ es difeomorfa a la esfera S^n ; pero para otros difeomorfismos no podemos asegurar nada. Notemos que esto justifica por qué la Conjetura generalizada de Poincaré enuncia que si M cumple las hipótesis correspondientes, entonces es **homeomorfa** (y **no difeomorfa**) a S^n : al ser las hipótesis de índole topológico, cualquier esfera exótica va a cumplirlas, sin ser difeomorfa a S^n .

Para cerrar esta sección, hacemos un comentario respecto a la diferencia entre la demostración que acabamos de dar de la Conjetura generalizada de Poincaré y la que dio Smale en [Sma61a]. La estrategia en esta última es probar que S^n ($n \geq 5$) admite una función de Morse con sólo 2 puntos críticos, y de ahí concluir que es una *twisted sphere* y por lo tanto homeomorfa a S^n (como recién vimos). Al igual que en su posterior demostración de h -cobordismo, hace uso de teoría de Morse, funciones autoindexantes y adjunción de manijas; la diferencia principal es cómo cancela los puntos críticos. En la exposición que dimos, se utilizaron el Primer y Segundo teorema de cancelación, que dependen fundamentalmente de los números de intersección

entre las esferas izquierdas y derechas de los puntos que queremos cancelar; y luego se utilizó la homología de Morse para ver que efectivamente siempre que haya puntos críticos se podrán aplicar los teoremas de cancelación. Lo que hizo Smale en [Sma61a], en cambio, fue probar que si M es una variedad cerrada de dimensión n , $(m-1)$ -conexa con $n \geq 2m$ y $(n, m) \neq (4, 2)$; existe una función autoindexante en M sin puntos críticos de índice k , para todo k tal que $0 < k < m$ y $n - m < k < n$ (ver [Sma61a, Thm. C]); haciendo aquí uso de la teoría de homotopía para cancelar esferas embebidas (así como nosotros cancelamos generadores C_k contra generadores de C_{k-1}) y así ir reduciendo el número de manijas en la representación de M como *handlebody*. Notemos además que si bien h -cobordismo implica la Conjetura generalizada de Poincaré en dimensión ≥ 6 , no nos permite probarla en dimensión 5; donde es necesario recurrir a argumentos de teoría de homotopía para cancelar los puntos críticos que hace falta.

3.4. Desigualdades de Morse

El objetivo de la presente sección será establecer cotas inferiores para la cantidad de puntos críticos de una función de Morse, tanto sobre una tríada como sobre una variedad cerrada; y dar condiciones suficientes para alcanzar la igualdad en tales estimaciones. Dichos resultados aparecen mencionados en [Sma63], desarrollándose aquí una demostración propia a partir de las ideas de la demostración del Teorema de h -cobordismo.

3.4.1. Para tríadas

En la **Sección 3.2** probamos el Teorema de cancelación en las dimensiones intermedias, obteniendo para una tríada (W, V, V') de variedades que verifican una serie de hipótesis (entre las cuales se encuentra que $H_*(W, V) = 0$) una función de Morse sin puntos críticos. Lo que intentaremos hacer en la presente sección es generalizar un poco el resultado anterior. Precisamente, intentaremos responder a la pregunta de cuál es la mínima cantidad de puntos críticos que puede admitir una función de Morse sobre una tríada (W, V, V') . Lo que confirmaremos aquí (que puede sospecharse a partir del caso en que $H_*(W, V) = 0$) es que la obstrucción para cancelar puntos críticos son precisamente los grupos de homología $H_*(W, V)$, y veremos que la cantidad de puntos críticos de cada índice para una función de Morse óptima (en el sentido de que minimiza el número total de estos) queda unívocamente determinada por $H_*(W, V)$.

Por el Teorema de estructura para módulos finitamente generados sobre un DIP, sabemos que para cada $0 \leq k \leq n$ existen únicos $r_k, \tau_k \in \mathbb{N}_0$ y en caso de que $\tau_k \neq 0$ únicos números naturales (todos ellos mayores a uno) $m_1^k, \dots, m_{\tau_k}^k$ tales que $m_1^k | m_2^k | \dots | m_{\tau_k}^k$ y se verifica $H_k(W, V) \cong \mathbb{Z}^{r_k} \oplus \mathbb{Z}/m_1^k \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_{\tau_k}^k \mathbb{Z}$. Dado el \mathbb{Z} -módulo finitamente generado $H_k(W, V)$, vamos a definir su rango como el entero r_k

y su rango de torsión como el entero τ_k , ambos no negativos.

Dada una función de Morse en (W, V, V') notamos m_k a la cantidad de puntos críticos de índice k que tiene, para cada $0 \leq k \leq n$. Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *(Desigualdades de Morse) Sea (W, V, V') una tríada de dimensión n provista de una función de Morse f . Entonces $m_k \geq r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$.*

Demostración. Por el **Teorema 2.8** podemos suponer que f es autoindexante. Tomamos un campo tipo gradiente para f y consideramos el complejo de Morse (C_*, ∂) asociado a (f, ξ) . Sabemos que cada C_k ($0 \leq k \leq n$) es libre con $\text{rg}(C_k) = m_k$ (donde dado un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado M , $\text{rg}(M)$ denota su rango) al ser una posible base la de los discos izquierdos; y que $H_*(C_*) \cong H_*(W, V)$.

Fijemos un k . Tenemos que $\text{Im}(\partial_{k+1}) \subseteq \ker(\partial_k)$ son submódulos de C_k sobre \mathbb{Z} , de modo que ambos son libres. Notemos $i_k = \text{rg}(\text{Im}(\partial_{k+1}))$ y $l_k = \text{rg}(\ker(\partial_k))$. Por el Teorema de estructura, existe una base $\{z_1^k, \dots, z_{l_k}^k\}$ de $\ker(\partial_k)$ y números naturales $a_1^k | a_2^k | \dots | a_{i_k}^k$ tales que $\{a_1^k z_1^k, \dots, a_{i_k}^k z_{i_k}^k\}$ es base de $\text{Im}(\partial_{k+1})$. En consecuencia,

$$H_k(C_*) \cong \mathbb{Z}^{l_k - i_k} \oplus \bigoplus_{j=1}^{i_k} \mathbb{Z}/a_j^k \mathbb{Z}$$

Si descartamos los términos nulos del segundo sumando (es decir, aquellos donde $a_j^k = 1$) obtenemos la representación de $H_k(C_*)$ como suma directa de la parte libre y la parte de torsión expresada en términos de sus factores elementales. De la unicidad de esa representación se deduce que $l_k - i_k = r_k$ y $i_k \geq \tau_k$. Esto a su vez implica que $l_k \geq r_k + \tau_k$.

Aplicando lo anterior para $k-1$, tenemos que $\{a_1^{k-1} z_1^{k-1}, \dots, a_{i_{k-1}}^{k-1} z_{i_{k-1}}^{k-1}\}$ es base de $\text{Im}(\partial_k)$. Por ende, existen elementos $b_1^k, \dots, b_{i_{k-1}}^k$ tales que $\partial_k(b_j^k) = a_j^{k-1} z_j^{k-1}$ y es fácil ver que $\{z_1^k, \dots, z_{l_k}^k, b_1^k, \dots, b_{i_{k-1}}^k\}$ es base de C_k . Tenemos entonces que $m_k = l_k + i_{k-1}$ y como $i_{k-1} \geq \tau_{k-1}$ por lo visto en el párrafo anterior, resulta $m_k \geq r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$. \square

Vamos a ver ahora que pidiendo ciertas condiciones a (W, V, V') (casi idénticas las hipótesis del Teorema de h -cobordismo) podemos hallar una función de Morse f donde se alcance la igualdad en el Teorema anterior.

Teorema 3.12. *Sea (W, V, V') una tríada de variedades simplemente conexas, con $\dim(W) \geq 6$. Supongamos que $H_0(W, V) = H_n(W, V) = 0$. Entonces existe una función de Morse f en (W, V, V') tal que $m_k = r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Observación 3.2. *La hipótesis que en realidad necesitamos para demostrar el Teorema es que $H_0(W, V) = H_0(W, V') = 0$, para poder usar el Teorema 3.5 y el Teorema 3.6. Por Dualidad de Poincaré para tríadas, esta es equivalente a la que pedimos en el enunciado del teorema ($H_0(W, V) = H_n(W, V) = 0$); que a su vez es equivalente a pedir que V y V' sean no vacías.*

Observación 3.3. *Notemos que el Teorema 3.12 realmente generaliza al Teorema de h -cobordismo, puesto que si estuviéramos bajo las hipótesis de este último, estaríamos bajo las del Teorema 3.10 y entonces podríamos concluir que la tríada en cuestión admite una función de Morse sin puntos críticos.*

Demostración. La prueba será muy similar a la de Cancelación en las dimensiones intermedias. Como estamos bajo las hipótesis del **Teorema 3.5** y del **Teorema 3.6**, existe una función de Morse para la tríada que no tiene puntos críticos de índice 0, 1, $n - 1$, n . Usando el **Teorema 2.8** podemos pedir también que dicha función sea autoindexante. Tal como hicimos en la **Sección 3.2**, definimos

$$\mathcal{A} = \{f \text{ autoindexante en } (W, V, V') : f \text{ no tiene p. c. de índice } 0, 1, n - 1, n\}$$

Vamos a probar que si $f \in \mathcal{A}$ es tal que alguna de las desigualdades de Morse es estricta, entonces podemos obtener una $f' \in \mathcal{A}$ con dos puntos críticos menos, cancelando entre sí dos de los de f .

Supongamos que estamos en esa situación. Tomemos el mínimo k tal que $m_k > r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$. Como $m_0 = m_1 = m_{n-1} = m_n = 0$ y las cantidades involucradas en las desigualdades de Morse son todas no negativas, deducimos que hay igualdad a nivel 0, 1, $n - 1$, n . En consecuencia $2 \leq k \leq n - 2$. Vamos a usar las notaciones y construcciones de la demostración anterior. Dado que hay igualdad a nivel $k - 1$, de acuerdo a la prueba del **Teorema 3.11** debe ser $i_{k-1} = \tau_{k-1}$. En consecuencia, para que la desigualdad sea estricta a nivel k debe ser $l_k > r_k + \tau_k$ puesto que $l_k + i_{k-1} = m_k$. De aquí deducimos que $i_k > \tau_k$. Esto quiere decir que alguno de los a_k^j debe ser 1, y por la relación de divisibilidad que cumplen deducimos que $a_1^k = 1$. Esto nos dice entonces que $\partial_{k+1}(b_1^{k+1}) = z_1^k$. Por el Basis Theorem, podemos alterar la función de Morse f sólo en $c_k \cdot c_{k+1}$ y otorgarle un campo tipo gradiente y una orientación a los discos apropiadas, manteniendo los puntos críticos y sus índices pero de modo que las bases de los discos izquierdos orientados sean $\{z_1^{k+1}, \dots, z_{l_{k+1}}^{k+1}, b_1^{k+1}, \dots, b_{i_k}^{k+1}\}$ a nivel $k + 1$ y $\{z_1^k, \dots, z_{l_k}^k, b_1^k, \dots, b_{i_{k-1}}^k\}$ a nivel k . Tendremos entonces que $\partial_{k+1}([D'_j]) = [D_1]$ para $j = l_{k+1} + 1$ (usando la notación de la **Proposición 3.1**). En consecuencia, podemos incrementar el valor de f en un entorno del primer punto crítico a nivel k (que notamos p) y disminuirlo alrededor del j -ésimo a nivel $k + 1$ (que notamos p'), para obtener $c_k \cdot c_{k+1} = c'_k \cdot d \cdot c'_{k+1}$ donde c'_k, c'_{k+1} tienen un punto crítico menos que c_k, c_{k+1} y d tiene sólo a los puntos p, p' como críticos. Al igual que al final de la **Sección 3.2**, el cobordismo d estará bajo las hipótesis del Segundo Teorema de Cancelación, y por lo tanto podremos obtener en (W, V, V') una función de Morse con dos puntos críticos menos.

En consecuencia, si tomamos alguna $f \in \mathcal{A}$ que minimice la cantidad de puntos críticos entre las funciones allí (la cual existirá), f debe verificar igualdad en todas las desigualdades de Morse, lo cual completa la demostración. □

3.4.2. Para variedades cerradas

El objetivo del presente apartado es establecer versiones para variedades cerradas de lo visto en la sección anterior para tríadas. Notemos que en el tratamiento del **Teorema 3.11** no utilizamos en ningún momento que V o V' fueran no vacías. Por lo tanto, las desigualdades de Morse siguen verificándose en la tríada $(M, \emptyset, \emptyset)$ para cualquier variedad cerrada M . Esto es, dada una función de Morse en una tal variedad, si m_k es la cantidad de puntos críticos de índice k para cada $0 \leq k \leq n$ entonces siempre se verifica $m_k \geq r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$ donde r_k y τ_k son el rango y rango de torsión respectivamente de $H_k(M)$. Cabe preguntarse entonces si, agregando ciertas hipótesis adicionales, existirá una función de Morse f en la que ninguna de las desigualdades sea estricta. La respuesta, al igual que en el caso de tríadas, es afirmativa.

Teorema 3.13. *Sea M una variedad cerrada y simplemente conexa, $\dim(M) \geq 6$. Entonces M admite una función de Morse tal que $m_k = r_k + \tau_k + \tau_{k-1}$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Observación 3.4. *La tríada $(M, \emptyset, \emptyset)$ no está en las hipótesis del Teorema 3.12 al ser $H_0(M, \emptyset) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $n = \dim(M)$. La idea será primero construir una función de Morse $f : M \rightarrow [0, 3]$ suryectiva, con un único punto crítico p de índice n tal que $f(p) = 3$ y un único punto crítico p' de índice 0 tal que $f(p') = 0$, y que verifique que p es el único punto crítico en $f^{-1}([2, 3]) = D_1$ y p' es el único en $f^{-1}([0, 1]) = D_2$. Pedimos además que D_1 y D_2 sean difeomorfos al disco cerrado de dimensión n . Notamos en ese caso $S_1 = f^{-1}(2) = \partial D_1$, $S_2 = f^{-1}(1) = \partial D_2$ y $W = f^{-1}([1, 2])$. Probaremos que (W, S_2, S_1) es una tríada de variedades simplemente conexas y no vacías, la cual admite a f como función de Morse. Podremos entonces usando la demostración del **Teorema 3.12** cambiar a f por una f' sin alterarla en un entorno de $S_1 \cup S_2$ y obteniendo así una función de Morse en M que alcanzará la igualdad para las desigualdades de Morse en dicha variedad.

Comenzamos entonces construyendo la función f . Partimos de una $f : M \rightarrow [0, 1]$ de Morse arbitraria en la tríada $(M, \emptyset, \emptyset)$ (en particular tendremos $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = \emptyset$). Sean p_1, \dots, p_l los puntos de M donde f alcanza su máximo $a \in (0, 1)$, debiendo ser puntos críticos de índice n . Queremos modificar f para que el máximo absoluto se alcance en único punto. Si $l = 1$, no hace falta hacer nada; así que supongamos que $l \geq 2$. Tomamos $0 < b < a$ tal que los únicos puntos críticos en $f^{-1}([b, a])$ sean p_1, \dots, p_l . Entonces, $(f^{-1}([b, a]), f^{-1}(b), \emptyset)$ es una tríada de dimensión n que admite a f como función de Morse. Elijamos un campo tipo gradiente ξ para la misma. Entonces las trayectorias de ξ que van desde y hacia cada punto crítico son disjuntas (sólo hay trayectorias que van “hacia” ellos al ser máximos, y son disjuntas por la unicidad del límite), de modo que podemos aplicar el **Teorema 2.9** a los conjuntos de puntos $\{p_1\}$ y $\{p_2, \dots, p_l\}$ que efectivamente están al mismo

nivel; así que si elegimos $a' \in (b, a)$ podemos obtener una nueva función de Morse f' que coincida con f en un entorno de $f^{-1}(b)$ y tal que $f'(p_1) = a$, $f'(p_i) = a'$ para todo $2 \leq i \leq l$. Esta función preserva además los índices de los puntos críticos. Extendiendo f' al resto de M como f , obtenemos una nueva función allí que tiene los mismos puntos críticos de cada índice. En particular, por construcción el máximo absoluto sólo se alcanza en p_1 . De manera análoga podemos modificar a f si hace falta sólo en $f^{-1}([c, d])$ donde $c = \min\{f(q) : q \in M\}$ y $f^{-1}([c, d])$ sólo contiene puntos críticos de índice 0, para obtener una función donde también el mínimo absoluto se alcanza en un sólo punto.

Por comodidad, seguimos llamando f a tal función, y p y p' a los únicos puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo absoluto, respectivamente. Tomamos alrededor de p y de p' dos cartas (U, φ) y (V, ψ) respectivamente tales que $\varphi(p) = \psi(p') = 0$ y $\varphi(U), \psi(V)$ sean discos abiertos D'_1, D'_2 de \mathbb{R}^n respectivamente, centrados en 0. Pedimos además que $f \circ \varphi^{-1}(x) = a - x_1^2 - \dots - x_n^2$ para $x \in D'_1$ y $f \circ \psi^{-1}(x) = c + x_1^2 + \dots + x_n^2$ para $x \in D'_2$, de acuerdo al Lema de Morse. Elegimos $\delta > 0$ tal que $f^{-1}([a - \delta^2, a]) \subseteq D'_1$ y $f^{-1}([c, c + \delta^2]) \subseteq D'_2$, lo cual es posible por la compacidad de M . Tenemos entonces que $f^{-1}([a - \delta^2, a]) = \varphi^{-1}(\overline{B}(0, \delta))$ y $f^{-1}(a - \delta^2) = \varphi^{-1}(S_\delta)$ donde $S_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \delta\}$. Del mismo modo $f^{-1}([c, c + \delta^2]) = \psi^{-1}(\overline{B}(0, \delta))$ y $f^{-1}(c + \delta^2) = \psi^{-1}(S_\delta)$. Por lo tanto, si reescalamos $[c, a]$ en $[0, 3]$ adecuadamente obtenemos una función de Morse como deseamos.

Es claro que (W, S_2, S_1) es una tríada de variedades simplemente conexas de dimensión $n \geq 6$, con $S_2, S_1 \neq \emptyset$, de modo que estamos bajo las hipótesis del **Teorema 3.12**, y entonces partiendo de la función de Morse f podemos ir eliminando sucesivamente puntos críticos en W hasta que tengamos una f' en la que $m_k = r'_k + \tau'_k + \tau'_{k-1}$ para todo $0 \leq k \leq n$, donde $r'_k = \text{rg}(H_k(W, S_2))$ y τ'_k es el rango de torsión de $H_k(W, S_2)$. Extendiendo a f' por f en $D_1 \cup D_2$, obtenemos una función de Morse f'' en M que tiene un punto crítico de índice 0, uno de índice n , ninguno de índices $1, n - 1$ y en los restantes niveles verifica $m_k = r'_k + \tau'_k + \tau'_{k-1}$. Entonces para lograr nuestro objetivo nos alcanzaría con ver que $H_k(W, S_1) \cong H_k(M)$ para todo $1 \leq k \leq n - 2$.

Pero las funciones f'' y f' nos dan las descomposiciones $M = c_0 \cdot c_1 \cdots c_{n-1} \cdot c_n$ y $W = c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-3} \cdot c_{n-1}$ siendo cada c_j un cobordismo de índice j . Y por lo visto en la demostración del **Teorema 3.7**, dada una tríada (W, V, V') y una tal descomposición, $H_k(W, V)$ sólo depende de $c_{k-1} \cdot c_k \cdot c_{k+1}$; de donde concluimos que $H_k(M) \cong H_k(W, S_1)$ para todo $2 \leq k \leq n - 2$. \square

Bibliografía

- [Bro06] R. Brown, *Topology and grupoids*, BookSurge PLC, 2006.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1982.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall, 1974.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [Kos93] A. Kosinski, *Differential manifolds*, Academic Press, 1993.
- [Lee97] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1997.
- [Lee00] ———, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate texts in mathematics, Springer, 2000.
- [Mil56] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64** (1956), no. 2, 399–405.
- [Mil59] ———, *Differentiable manifolds which are homotopy spheres*, Notas no publicadas, Princeton University (1959).
- [Mil63] ———, *Morse theory*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1963.
- [Mil65] ———, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, 1965.
- [MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [Ran03] A. Ranicki, *Algebraic and geometric surgery*, Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, 2003.
- [Sma61a] S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4*, Ann. of Math. **74** (1961), no. 2, 391–406.

- [Sma61b] _____, *On gradient dynamical systems*, Ann. of Math. **74** (1961), no. 1, 199–206.
- [Sma62] _____, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399.
- [Sma63] _____, *A survey on some recent developments in differential topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), no. 2, 131–145.
- [Sma00] _____, *The collected papers of Stephen Smale. Volume 1*, Singapore University Press, 2000.
- [Spi99] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Volume 1*, Publish or perish, 1999.
- [Vic94] J. W. Vick, *Homology theory. An introduction to algebraic topology*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1994.
- [War83] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1983.
- [Whi36] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), 645–680.