UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

MODELOS DE SEGREGACIÓN DE SCHELLING

Victoria Eugenia Arcón Carballo

Directora: Inés Caridi
Codirector: Juan Pablo Pinasco

Marzo 2020

Gracias a Inés y a Juan Pablo,
a los jurados,

y a quien busque su nombre en esta página.

Índice general

Introducción **6**

1. Modelos de Schelling **8**
1.1. El modelo de proximidad unidimensional 9
1.2. El modelo de proximidad bidimensional 10
1.3. El modelo de vecindad acotada 12
1.4. Variantes de los modelos de segregación de Schelling 13

2. Resultados teóricos para el modelo de proximidad **16**
2.1. El caso unidimensional 16
2.1.1. Preliminares 16
2.1.2. Una cota para la longitud promedio de un run o cluster 18
2.2. El caso bidimensional 26
2.2.1. Preliminares 26
2.2.2. La función de Lyapunov 28
2.2.3. El Laplaciano del grafo y el problema variacional no homogéneo . 31

3. Simulaciones del modelo bidimensional **34**
3.1. Modelo 34
3.2. Simulaciones 35
3.2.1. Mudanzas como costos 36
3.2.2. El rol de las ubicaciones vacías en las configuraciones finales 41

4. Variante del modelo con ubicaciones inaccesibles **59**
4.1. El nuevo modelo 61
4.2. Simulaciones 62
4.2.1. Los costos sociales y por población 63
4.2.2. El rol de los vacíos accesibles 63
4.2.3. Las ubicaciones inaccesibles como fronteras 65

Conclusiones **69**

Apéndice **71**

Bibliografía **75**

Introducción

Esta tesis se enmarca en el área del modelado social mediante el uso de modelos basados en agentes y estudia el fenómeno de la segregación residencial. Entendemos segregación residencial como la concentración de los individuos por etnia, nacionalidad y/o grupo socio-económico en diferentes áreas de una misma ciudad. Se trata de una problemática presente en muchos entornos urbanos que suele estar asociada a la marginación económica y social, dadas las desigualdades de acceso que crea. En este sentido, resulta relevante comprender dicho proceso en profundidad e, idealmente, contar con algún tipo de modelo que apunte a entender los patrones en que los individuos quedan separados espacialmente podría ayudar a atenuar sus impactos negativos.

Se trabaja a partir de uno de los modelos de segregación propuesto por Thomas Schelling hace aproximadamente 50 años. Este modelo se basa en la idea de que la preferencia de los individuos por habitar una zona determinada está vinculada con la composición de los habitantes de dicha área y en que esta parcialidad, incluso sin ser fuertemente discriminatoria, constituye un elemento importante del proceso de segregación. En términos muy sencillos, en el modelo existen agentes de dos tipos que están distribuidos en el territorio y, de acuerdo a su preferencia por estar rodeados de vecinos de su mismo tipo, los agentes se van mudando siguiendo una dinámica. En los estados finales alcanzados se observan clusters que agrupan agentes por tipo. Este modelo ha sido ampliamente estudiado desde diversas áreas del conocimiento y muchas variantes han sido formuladas al modificar parcialmente las reglas o parámetros que lo definen.

Esta tesis propone, por un lado, una revisión de los trabajos de Schelling y de algunos estudios posteriores del modelo, destacando los análisis matemáticos que se han hecho. Por otro, estudia la presencia de regiones que cumplen el rol de "frontera" entre los clusters de distinto tipo y que posibilitan la coexistencia local de las dos poblaciones, y formula una variante del modelo en la que se intenta, de manera preliminar, determinar si es posible incidir en los patrones finales alcanzados; específicamente en la localización espacial de dichas regiones de frontera.

Para ello, en primera instancia estudiamos el caso del modelo de proximidad bidimensional en su formulación original observando el rol de las ubicaciones vacías en las configuraciones finales alcanzadas y, en particular, la manera en que la existencia de fronteras formadas por lugares vacíos del territorio depende de los parámetros. En una segunda instancia, motivados por ejemplos de ciudades de Estados Unidos en las que áreas bien definidas del territorio tales como rutas, vías del ferrocarril, ríos, etc. impactan

en los patrones de segregación presentes, proponemos la variante del modelo que incorpora lugares inaccesibles. Se trata de observar si la presencia de estas regiones inaccesibles prefijadas afecta a la localización de las fronteras exhibidas en las configuraciones finales.

La tesis se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se describen los modelos de segregación planteados por Schelling en su formulación original y se revisan trabajos posteriores que dan cuenta de la amplitud de enfoques utilizados para estudiarlo.

En el Capítulo 2 se desarrollan en detalle dos marcos teóricos que presentan resultados rigurosos para los estados finales de modelos del tipo Schelling.

El Capítulo 3 trata del análisis del modelo de Schelling bidimensional en su versión original a partir de simulaciones implementadas para distintas instancias y enfocado en estudiar el rol de las ubicaciones vacías en las configuraciones finales.

Finalmente, en el Capítulo 4 se motiva y define la variante del modelo que incluye regiones inaccesibles y se muestran los resultados preliminares obtenidos.

Capítulo 1

Modelos de segregación de Schelling

El economista Thomas Schelling repasa en [30] el contexto que dio origen a sus modelos de segregación. Él relata cómo en la década de 1960 estaba buscando la manera de enseñarle a sus estudiantes que las interacciones entre personas pueden dar lugar a resultados colectivos que no se corresponden de manera evidente con un deseo, intención o consenso de dichos individuos. Sin encontrar material que lo satisficiera, decidió trabajar él mismo en uno y tomó como punto de partida un fenómeno social que venía observando. Había notado que debido a ciertas preferencias de las personas por compartir con individuos afines una vecindad, un club, una mesa, etc., emergían patrones espaciales o de asociación en los que los individuos quedaban agrupados por edad, sexo, religión, ingreso económico o la categoría que correspondiera. Intentando modelar este comportamiento, inicialmente dibujó cruces y círculos en línea sobre un papel y luego, con una colección de monedas de cobre y zinc sobre un tablero de ajedrez, hizo los primeros ensayos de los que serían sus modelos de segregación que finalmente plasmó en los trabajos de 1969 [28] y 1971 [29]. En ellos analiza y toma como principal referencia el caso de la segregación residencial de la población blanca y negra en ciudades de Estados Unidos y propone dos modelos basados en agentes: el modelo de proximidad y el de vecindad acotada.

De manera simplificada, en estos modelos los agentes pertenecen a dos tipos o clases evidentemente distinguibles, representando una clasificación binaria y total de la población (étnica, religiosa, por ingreso, por idioma, etc.). En un primer momento los agentes de ambos tipos están distribuidos al azar en el territorio, aunque cada individuo tiene una preferencia respecto a la composición de la vecindad a la que pertenece, vinculada a la proporción de agentes de cada tipo presente. Durante la dinámica, los agentes que no están satisfechos en su vecindad se mudan a otra que sí se ajuste a sus preferencias. Como resultado de la interacción se alcanzan configuraciones finales que reflejan agrupamientos de agentes de un mismo tipo y que se intentan caracterizar como patrones de segregación e integración.

Thomas Schelling observó los estados finales para distintas combinaciones de paráme-

tros y reglas de los modelos propuestos y logró mostrar cómo actitudes individuales no organizadas y levemente discriminatorias pueden traducirse en resultados colectivos altamente segregados. En este sentido, sus modelos aportaron a una nueva perspectiva desde la cual entender la segregación residencial, que no se sujeta exclusivamente en acciones fuertemente discriminatorias, ya sean colectivas o descentralizadas [8], y sumaron al debate sobre el rol que cumple el esquema de preferencias de los individuos en el proceso de segregación residencial [12] [22]. Al mismo tiempo, sus trabajos fueron pioneros en el área de los modelos basados en agentes y constituyen un ejemplo paradigmático de sistema complejo en el que a partir de la interacción de los individuos surgen propiedades colectivas que no pueden anticiparse fácilmente a partir del comportamiento individual [4].

En este capítulo se hará una revisión del modelo de proximidad para el caso unidimensional y bidimensional según lo planteado por Schelling en [28],[29] y se mencionarán algunas variantes y análisis del modelo que enmarcan el trabajo desarrollado en esta tesis.

1.1. El modelo de proximidad unidimensional

En el modelo unidimensional el territorio o espacio habitable está representado por un segmento de longitud N. Quedan definidas N ubicaciones que en todo momento están ocupadas por alguno de los N agentes del sistema. Cada agente pude pertenecer a dos tipos que se distinguen con un símbolo, etiqueta o color: x $(rojo)$ ó o $(negro)$ y, por lo tanto, cada estado del sistema es un elemento en $\{x, o\}^N$.

La vecindad de cada agente está definida por los H agentes más cercanos, considerándose las ubicaciones a derecha e izquierda. Por practicidad se eligen valores pares de $H = 2w$ y se toman w vecinos a cada lado. Los agentes próximos a los extremos del segmento tienen vecindades más pequeñas que el resto: los w vecinos en sentido hacia el centro y los que quedan en sentido al extremo. A esto se lo denomina condiciones de contorno abiertas. Cabe aclarar que en otras versiones del modelo se definen condiciones de contorno periódicas, de manera tal que el espacio habitable es un anillo y todas las vecindades son del mismo tamaño, se analizará un caso con esta condición en el capítulo 2.

La preferencia o tolerancia por habitar en una vecindad es la misma para todos los agentes y se expresa como $T \in [0, 1]$, es la proporción mínima requerida de agentes vecinos del mismo tipo. De esta manera para $T = 0.4$, por ejemplo, un agente x estará satisfecho si al menos el 0.4 de sus vecinos son también de tipo x. Se asume que los agentes conocen en todo momento la cantidad de individuos de cada tipo presentes en su vecindad. A continuación se muestra un ejemplo de configuración inicial posible:

$$o\ \underline{x}\ o\ o\ o\ \underline{x}\ x\ \underline{o}\ \underline{x}\ o\ \underline{o}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{o}\ \underline{o}\ x\ x\ x\ \underline{o}\ x\ x\ \underline{o}\ x\ \underline{x}\ \underline{o}\ \underline{o}\ \underline{x}\ \underline{x}\ o\ o$$

Figura 1.1: Configuración inicial del modelo de proximidad unidimensional para $N = 30$ y 15 agentes de cada tipo. Para $w = 2$ y $T = 0.5$, se subrayan los agentes insatisfechos.

Además, se definen las reglas que regulan la dinámica del movimiento. Por un lado,

el orden en que se eligen los agentes insatisfechos (pudiendo ser al azar, de izquierda a derecha, etc.) y por otro, el movimiento permitido. Para esto último, Schelling determina que el agente insatisfecho se mueva a la ubicación más cercana que lo deje feliz, insertándose entre otros dos agentes y provocando los desplazamientos necesarios para que la ubicación que dejó libre sea ocupada (manteniendo la secuencia de los agentes).

Si se eligen agentes insatisfechos de izquierda a derecha y se hacen las mudanzas siguiendo la regla anterior, en el ejemplo de la Figura 1.1 se alcanza la siguiente configuración final:

$$o\ o\ o\ o\ x\ x\ x\ x\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ x\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ x\ x$$

Figura 1.2: Configuración final del modelo de proximidad unidimensional de la Figura 1.1 ($N = 30$, $w = 2$ y $T = 0.5$). Todos los agentes están satisfechos.

En la Figura 1.2 puede observarse un patrón de clusters o ghettos alternados, el mayor de ellos de tamaño 9 corresponde a agentes del tipo x. Aunque para $T = 0.5$ los agentes admiten vecindades mixtas, la integración ocurre únicamente en vecindades que se encuentran en los bordes de dichos clusters, pero no al interior. Schelling muestra que en configuraciones finales para valores de N mayores y/o tamaños de poblaciones más desparejos, la presencia de vecindades no mixtas es aún mas evidente pues los clusters que se forman son más grandes. En el capítulo 2 se mostrará un resultado teórico que aproxima el tamaño promedio de los clusters para una variante de este modelo.

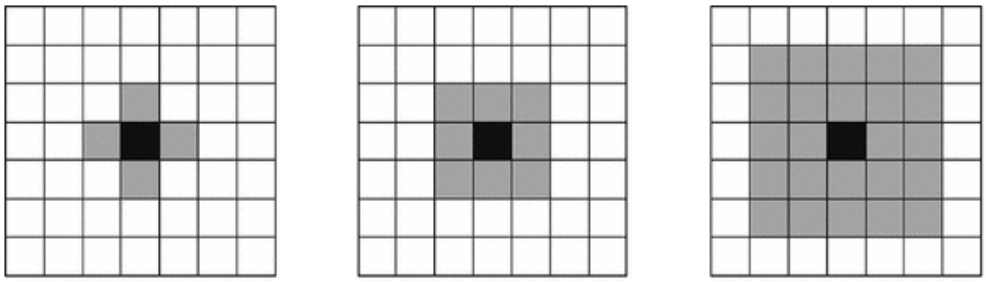
Además, exhibe ejemplos como el de la Figura 1.1 variando el tamaño de las vecindades ($w = 8$, $w = 6$), los valores de tolerancia T y la relación entre los tamaños de las poblaciones. Sin entrar en formalizaciones rigurosas, describe algunas tendencias observadas y, finalmente, introduce la versión bidimensional que analiza con más detalle.

1.2. El modelo de proximidad bidimensional

Para el caso bidimensional el territorio o espacio habitable es representado por una cuadrícula rectangular de lados a y b, con $a \times b$ ubicaciones. Los dos tipos de agentes están identificados con los colores *rojo* y *negro* para ser consistentes con la notación que usaremos en el resto del trabajo. La tolerancia o preferencia de los agentes, $T \in [0, 1]$, es la misma de antes; es decir, un umbral mínimo para la proporción de agentes vecinos del mismo tipo.

La vecindad de cada agente está definida, dada su ubicación, por los H casilleros más cercanos. Schelling estudia en particular el caso de $H = 8$, eligiendo las ubicaciones adyacentes por lados o por vértices, llamada vecindad de Moore. Usando condiciones de contorno abiertas, las ubicaciones que están sobre los lados de la cuadrícula poseen 5 vecinos mientras que las de las esquinas, 3. En versiones del modelo en que se eligen condiciones de contorno periódicas, el espacio habitable se identifica con un *toro* y todas las vecindades son del mismo tamaño, se analizarán variantes con esta condición en los capítulos 2 y 4 de esta tesis.

Para $H > 8$ puede adaptarse la definición de vecindad pensando en la distancia l_∞: dada una distancia $d \in \mathbb{N}$, la vecindad de Moore asociada es de tamaño $H = (2d+1)^2 - 1$. En el caso estudiado, para H=8, se consideran los casilleros que están a distancia $d = 1$. Otra alternativa es considerar únicamente las ubicaciones adyacentes por lados para $H = 4$, la vecindad de Von Neumann.

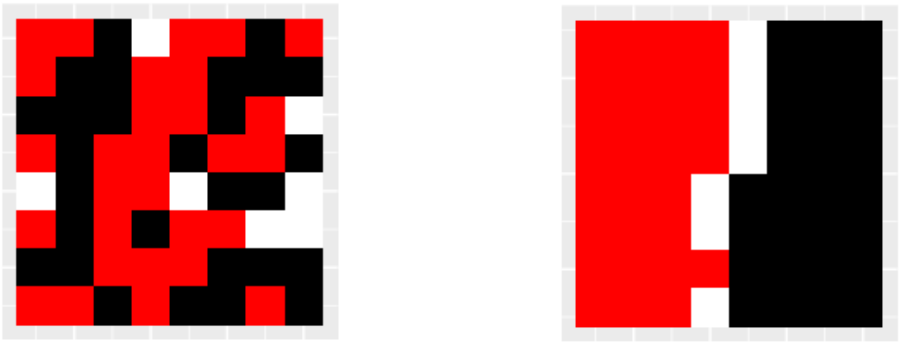


(a) Vecindad de Von Neumann para $H = 4$

(b) Vecindad de Moore para $H = 8$

(c) Vecindad de Moore para $H = 24$

La dinámica del modelo es similar a la del caso unidimensional, reformulándose la regla que define el movimiento permitido. Dado que en dos dimensiones no queda claro qué significaría insertarse entre otros agentes, Schelling propone trabajar con un modelo que contemple ubicaciones vacías. De este modo, un agente insatisfecho se muda a una ubicación vacía que lo deje conforme (no necesariamente la más cercana, sino que se elige al azar entre las disponibles) y al mudarse, deja vacía su ubicación anterior. La densidad de espacios vacíos se mantiene constante y es un nuevo parámetro del modelo. En la configuración inicial los dos tipos de agentes y las ubicaciones vacías se distribuyen al azar en la cuadrícula.



(a) Configuración inicial

(b) Configuración final

Figura 1.4: Configuraciones inicial y final del modelo de proximidad bidimensional. La cuadrícula es cuadrada de lado 8, con 29 agentes rojos, 28 agentes negros y 7 ubicaciones vacías. La tolerancia es $T = 0.7$.

Schelling estudia configuraciones finales para distintos valores de T y distintas rela-

ciones de tamaño de las poblaciones y define dos magnitudes para caracterizar el grado de segregación de una configuración final: la proporción promedio de agentes vecinos del mismo tipo (para cada una de las poblaciones) y la proporción de agentes sin vecinos de otro tipo respecto del total de agentes. Propone, además, definiciones alternativas para la tolerancia T. Una es la proporción máxima tolerada de agentes vecinos de distinto tipo y otra, que denomina "integracionista", definida a partir de dos valores que funcionan como cota inferior y superior para la proporción de agentes del mismo tipo. En todas las variantes los resultados impactan al evidenciar la vinculación no trivial entre el comportamiento individual y los estados agregados alcanzados.

El propio Schelling advierte sobre la simplicidad de su modelo que no contempla acciones discriminatorias organizadas, ni las inducidas por motivos económicos y tampoco admite que los agentes anticipen los movimientos de otros. Lejos de pretender quitarle relevancia a estos eventos como elementos del proceso de segregación, aclara que sus modelos no pretenden ser realistas sino servir como herramienta para entender, en particular, el impacto de las acciones individuales desorganizadas en los estados agregados alcanzados y deja abierta la puerta para la exploración de nuevas modificaciones, interpretaciones y adaptaciones.

> " This is not to claim that the organized discrimination or the economically induced segregation is less powerful, or less important, or less a matter of social concern, than the segregation that results from individual action. Indeed, aside from the question of which mechanism may account for the greater part of observed separation by color, the organized segregation involves civil rights; and the economically determined segregation raises questions of social equity. (...) It is not easy, though, to draw the lines separating 'individually motivated' segregation, the more organized kind, and the economically induced kind.(...)They are furthermore not the only mechanisms of segregation. (...) and have to be separately understood. This paper, then, is about those mechanisms that translate unorganized individual behavior into collective results. "[29, p. 144-145]

1.3. El modelo de vecindad acotada

Incluimos una breve descripción de este modelo por completitud de la revisión de los artículos [28] y [29] que hacemos en este capítulo. Sin embargo, no es un modelo con el que trabajemos en esta tesis.

En el modelo de vecindad acotada, la vecindad está predefinida y es la misma para todos los agentes: cada agente puede estar dentro o fuera de una vecindad y no hay posiciones individuales dentro de ella. En este contexto la residencia puede ser interpretada como la pertenencia a un trabajo, universidad, iglesia, partido político, club, etc. En el modelo hay *una* vecindad acotada preferida por todos los agentes y cada agente pertenecerá a dicha vecindad siempre que la proporción de agentes del otro tipo no exceda determinado valor. Es decir, cada agente tiene su propio valor de tolerancia en términos

de cota superior para la proporción de agentes del otro tipo y no hay cota inferior. A diferencia del modelo de proximidad aquí hay heterogeneidad en las tolerancias, se trabaja con una distribución de valores de tolerancia entre los individuos de cada una de las poblaciones. En la dinámica se asume que los agentes entran y salen de la vecindad: los agentes insatisfechos con la proporción se van y los agentes satisfechos con la proporción entran o permanecen. Todos los agentes conocen en todo momento la proporción de agentes de cada tipo de la vecindad acotada preferida, aunque no se consideran las intenciones del resto ni se proyectan a futuro. Se asume, además, que entre dos agentes insatisfechos el más insatisfecho se va primero y, por lo tanto, los agentes de cada tipo que están dentro de la vecindad son en todo momento más tolerantes que quienes están afuera. A partir del modelo, se analiza el proceso por el cual dicha vecindad preferida se va ocupando o permanece ocupada por agentes de uno u otro tipo o por una mezcla de ambos y se determinan, a partir del análisis de gráficos, equilibrios estables para la composición de la vecindad. Los datos iniciales son la frecuencia de distribución acumulada de las tolerancias de cada tipo de agentes y el tamaño de cada una de las poblaciones.

1.4. Variantes de los modelos de segregación de Schelling

El articulo [29] de 1971 es uno de los más citados del Journal of Mathematical Sociology y en especial, la cantidad de citas aumentó aceleradamente desde 2005. Antes, contaba con 700 citas aproximadamente y luego alcanzó unas 5000, [32]. Esto se debe, por un lado, a la expansión de los modelos basados en agentes como herramienta de investigación y a los avances en el acceso y en la capacidad computacional que facilitaron la implementación de diversas variantes del modelo [10] [16], y por otro lado, a que Schelling recibió el Premio Nobel ese año por este modelo. El interés proviene de diversas áreas que comprenden la sociología, economía, física, matemática y computación, ubicando al modelo de segregación de Schelling en el campo de la interdisciplina. La literatura es numerosa y con enfoques y metodologías múltiples. Las variantes incluyen cambios en la definición de la satisfacción de los agentes, diferentes reglas para el movimiento permitido (hacia ubicaciones vacías, intercambio de ubicaciones entre un par de agentes insatisfechos, intercambio con agentes que están fuera del espacio habitable, etc.), más de dos tipos de agentes, variaciones en el tamaño de las vecindades, parámetros del modelo fijados a partir datos provenientes de la realidad, entre otras.

En sociología, a fines de las década de 1980, se dio un debate sobre las causas y alcances de la segregación residencial entre la población blanca y negra en ciudades de EE.UU., fundamentalmente motivado por comprender la persistencia de la segregación ante la ausencia de políticas discriminadoras en el mercado o planificación inmobiliaria (Fair Housing Act 1968, EqualCredit Opportunity Act 1974) y ante un paulatino cambio de paradigma social hacia la integración [5] [13]. Como parte de la revisión de los factores que impactan en el fenómeno y para servir de argumento en sus posturas, el modelo de Schelling fue revisitado y se contrastaron premisas y resultados del modelo con información proveniente de encuestas y censos. En [6] se comparan los esquemas de preferencia propuestos por Schelling en su modelo de vecindad acotada con datos rele-

vados de distintas ciudades de EE.UU.; los esquemas reales son menos regulares que los del modelo original pero el tipo de curva y la brecha entre ambos tipos de poblaciones (blancos y negros) es acertada y crucial para lograr la segregación. Más adelante, en [7], se usan datos sobre las preferencias por la composición de una vecindad ideal de personas correspondientes a cuatro grupos étnicos (blancos, negros, hispanos y asiáticos) de Los Ángeles para fijar valores en las tolerancias empleadas en las simulaciones de una versión del modelo que incluye agentes de tres grupos étnicos y distintos niveles socio-económicos. En [1] se utilizan datos del censo de 1995 para trabajar con ubicaciones y vecindades definidas a partir de un cubrimiento de Voronoi hecho sobre las capas GIS de calles y edificios que contienen atributos familiares e individuales en un modelo de proximidad aplicado al caso de la segregación religiosa y por ingreso en la región de Yaffo, en Tel Aviv.

Desde una mirada económica, el principal aporte consiste en reemplazar la *satisfacción* del modelo original que toma únicamente dos valores posibles (satisfecho o no satisfecho) según el umbral definido por la tolerancia T, por una función *utilidad* continua que los agentes, en la dinámica, buscan maximizar. Muchos de estos trabajos utilizan herramientas de la teoría de juegos evolutivos, siguiendo las relaciones establecidas por primera vez por Young en [36]. En algunos casos, se definen sistemas perturbados donde los agentes no son completamente racionales y eligen, con alguna probabilidad, estrategias que empeoran su utilidad [37][20]. En [25] se definen utilidades lineales a trozos a partir de la proporción de ubicaciones vecinas que contienen un agente del tipo opuesto y, siguiendo la dinámica de la mejor respuesta, se muestra cómo, incluso para agentes que prefieren estrictamente vecindades integradas, se pueden alcanzar estados finales segregados. Por su parte, en [18] se revisa el modelo de vecindad acotada para dos poblaciones homogéneas con utilidades en forma de "pico" y encuentran soluciones analíticas bajo ciertas condiciones de existencia de una función potencial que caracteriza a la configuración global y se maximiza en el estado estacionario.

Otros autores, además, incorporan a la definición de utilidad factores económicos. En [37] se plantea el modelo como un juego espacial y la utilidad considera el ingreso de los agentes (que es el mismo para todos) y un precio de la vivienda definido por una suerte de ley de oferta-demanda del mercado inmobiliario, relacionada en el modelo con la proporción de espacios vacíos disponibles en la vecindad de dicha ubicación. Se analiza el caso en que una población tiene preferencia por individuos afines y la otra es neutral y se muestra que esta ley del mercado es determinante para causar la segregación en las configuraciones estocásticamente estables. Por otra parte, en [7] la utilidad incluye un valor que representa la calidad de la vivienda; ésta es inicialmente asignada, se mantiene fija y se relaciona con la idea de centralidad dentro de una ciudad. Además, se contempla el ingreso de los agentes que pertenecen a grupos socio-económicos distintos (en dos categorías: ingresos bajos y altos). En [24] la utilidad de cada agente se interpreta como una función de oferta que realiza el agente por ocupar determinada ubicación vacía y que depende de la composición de la vecindad. En cada paso temporal se produce un recambio de agentes y los lotes vacíos se asignan al agente que haga la mejor oferta. Se muestra mediante simulaciones que la segregación ocurre aunque se tengan preferencias por la

integración y que políticas públicas (asignación aleatoria de agentes a lotes, subsidios minoritarios y pagos secundarios de asociaciones de vecino) promueven la integración.

Desde una analogía con sistemas físicos, otros tipos de análisis son posibles. En [35] los agentes son pensados como partículas y la utilidad se interpreta como la energía interna; los agentes-partículas se mueven minimizando su energía interna. Según las reglas del movimiento permitidas, se alude a la dinámica de líquidos o sólidos y se caracterizan las formas de los bordes de los clusters de las configuraciones finales. En [34] se muestran los paralelismos entre el modelo de Schelling y el de Ising [33] y se propone la variante que introduce al modelo de Schelling el equivalente a la temperatura en Ising. Se muestra, estudiando transiciones de fase para el caso bidimensional, que introduciendo la temperatura en la decisión de los agentes, el efecto de segregación puede desaparecer de una manera bastante abrupta. En [9] se retoman las dinámicas estudiadas por [35] (referidas ahora como modelo restringido -sólidos- y sin restricciones -líquidos-) para el caso de una y dos dimensiones y se estudian analítica y numéricamente propiedades estáticas y dinámicas caracterizando los estados del sistema a partir de la proporción de agentes insatisfechos y de la de agentes vecinos de tipo opuesto. Por otra parte, usando analogías con los sistemas de espines que siguen la dinámica de Blume-Emery-Griffiths para temperatura cero, en [14] se presenta una variante del modelo de una ciudad abierta donde se permiten movimientos de intercambios con agentes que están fuera de la cuadrícula. Los autores incluyen gráficos de las diferentes fases presentes en las configuraciones finales obtenidas al variar la densidad de los espacios vacíos. En [20] se propone otra variante que también puede interpretarse como un caso de migración, pues existe una fracción fija f de agentes que pueden cambiar de tipo (un agente tipo A que cambia a tipo B, se interpreta como un agente A que sale de la ciudad mientras que un agente B entra). Conviven dos dinámicas: movilidad espacial y movilidad de tipos. Usando herramientas de física estadística, se muestran fases y transiciones en las configuraciones alcanzadas al variar la densidad de espacios vacíos y la tolerancia para distintos valores de f.

Las investigaciones referidas en esta sección presentan diversos abordajes con los que se vienen estudiando los modelos de segregación de Schelling. El estado del arte evidencia que es difícil probar o definir de manera precisa el fenómeno de segregación observado cualitativamente en las simulaciones y esta dificultad radica en el hecho de que la dinámica puede converger a una amplia variedad de estados. Distinguimos en este contexto dos artículos que proponen, desde un enfoque matemático, el análisis riguroso de los estados finales de modelos de proximidad de Schelling; uno del caso unidimensional [2] y otro del caso bidimensional [26]. Ambos se describirán en detalle en el capítulo siguiente.

Capítulo 2

Resultados teóricos para el modelo de proximidad

En este capítulo se incluye la revisión de los principales resultados teóricos y teoremas propuestos en [2] y [26] para modelos de proximidad de Schelling.

2.1. El caso unidimensional

En [2] se propone un análisis para estimar el tamaño promedio del cluster de agentes del mismo tipo para la configuración final del modelo de proximidad de Schelling de una dimensión con condiciones de borde periódicas, tolerancia $T = 1/2$ y poblaciones equilibradas. Se muestra que el tamaño promedio del cluster es independiente del tamaño del espacio habitable y que es un polinomio del tamaño de la vecindad con que se trabaja.

2.1.1. Preliminares

Se define un modelo de proximidad de Schelling unidemensional con los siguientes parámetros:

- El espacio habitable está representado por un anillo de N nodos o ubicaciones, es decir, con condiciones de contorno periódicas.
- N representa la cantidad de agentes del sistema pues cada ubicación está ocupada por exactamente un agente.
- Los agentes de cada tipo están identificados con las etiquetas x y o y la probabilidad de pertenecer a cada tipo es $R = 1/2$. Inicialmente los agentes de ambos tipos se distribuyen aleatoriamente en el anillo.
- La vecindad de cada agente está formada por los $H = 2w+1$ agentes más cercanos incluyéndose a sí mismo. Es decir, se consideran como vecinas las w ubicaciones a izquierda, las w a derecha y la propia. En adelante nos referiremos al parámetro w como el tamaño de *ventana* del modelo.

- La preferencia o tolerancia $T = 1/2$ es la misma para todos los agentes y representa la proporción mínima de agentes vecinos del mismo tipo necesaria para estar satisfecho. Notar que para el valor de T fijado un agente está satisfecho si pertenece al tipo mayoritario de su vecindad.

- En la dinámica se elige un par de agentes al azar. Si dichos agentes son de distinto tipo y ambos están insatisfechos en su vecindad, intercambian sus ubicaciones. La dinámica sigue hasta que el sistema se estabilice.

En adelante se dirá que las ubicaciones o nodos están etiquetados con el tipo de agente y el intercambio de ubicaciones de un par de agentes será referido como un intercambio entre las etiquetas de dichos nodos. Los tipos de agentes x y o se tratan como tipos "opuestos".

Definición 2.1.1.

- Un **bloque** es una secuencia de ubicaciones adyacentes.

- Un **run** es un bloque de ubicaciones idénticamente etiquetadas.

- Un **firewall** es un run de al menos $w + 1$ nodos. Dependiendo del tipo de agentes involucrados se tratará de un **x-firewall** o un **o-firewall**

La definición del firewall cobra sentido si se tiene en cuenta que, de acuerdo al valor de tolerancia con que se trabaja y la definición de vecindad elegida, todos los agentes que pertenecen a un firewall están satisfechos. De esta manera, siguiendo las reglas del modelo, una vez formado un firewall ninguno de los agentes que lo integra se mudará y dicha configuración permanece fija por el resto de la dinámica.

Proposición 2.1.1. Se considera la dinámica antes descripta con tamaño de ventana w sobre un anillo de N nodos y $R = T = 1/2$. Para w fijo, la probabilidad de que el proceso converja a una configuración fija donde no hay más intercambios posibles tiende a 1 cuando $N \to \infty$.

Demostración. Se considera el conjunto $S_0(t)$ formado por los agentes que pertenecen a algún firewall a tiempo t y sea $S_1(t)$ su complemento. Notar que si el cardinal de $S_0(t)$ es igual a N, entonces el proceso alcanzó una configuración fija.

Dado un tiempo t, suponemos entonces que $\#(S_0(t)) \neq N$ y, por lo tanto, $S_1(t) \neq \emptyset$. Suponemos además que $S_0(t) \neq \emptyset$. Luego, existe un agente $a \in S_1(t)$ y un agente $b \in S_0(t)$ tales que son adyacentes (basta tomar b en el extremo del firewall al que pertenece) y tienen etiquetas opuestas (si no, a formaría parte de dicho firewall). Sin pérdida de generalidad se asume que: a es de tipo x, b es de tipo o y b se ubica inmediatamente a la derecha de a. Dado que a posee w vecinos a su derecha que son de tipo o, debe ocurrir que al menos uno de sus w vecinos a la izquierda sea de tipo o pues $a \in S_1(t)$ y el agente a está insatisfecho.

Si no existe ningún agente de tipo o insatisfecho, la configuración está fija; si no, debe haber algún agente de tipo o insatisfecho con quien a podría intercambiar lugares

y, de esta manera, $\#S_0(t)$ tiene una probabilidad positiva de crecer. Por lo tanto, hemos definido, bajo el supuesto de que exista al menos un firewall, una función potencial que toma valores enteros entre 0 y N y que siempre tiene probabilidad positiva de aumentar, a menos que la configuración ya esté fija.

Faltaría ver que $P(\{\#S_0(0) = 0\}) \to 0$ cuando $N \to \infty$. Dada una partición del anillo en $N/(w+1)$ bloques, cada uno tiene probabilidad 2^{-w} de ser un firewall independientemente de lo que ocurra con los otros. Por lo tanto, la probabilidad de que ninguno sea un firewall es $(1-2^{-w})^{N/w+1} \to 0$ cuando $N \to \infty$. □

Los firewalls son, por lo tanto, configuraciones estables, segregadas, que garantizan la eventual terminación del proceso.

2.1.2. Una cota para la longitud promedio de un run o cluster

Los firewalls en sí mismos no son lo suficientemente frecuentes en la configuración inicial para que la lógica anterior se siga de manera directa. El argumento propuesto consiste en definir otra estructura, llamada *firewall incubator*, que sí ocurre con frecuencia en la configuración inicial y tiene una probabilidad suficientemente alta de convertirse en un firewall durante el proceso. Un *firewall incubator* es una región con sustancialmente más ubicaciones de un tipo que de otro. En tales regiones, los agentes minoritarios no están satisfechos y se irán mudando a menos que los vecindarios cercanos hayan desarrollado un sesgo opuesto. Se utilizan paseos aleatorios para argumentar que todos los agentes de la minoría se mudan antes de que esto suceda, por lo que la región se convierte en un firewall.

Para analizar la formación de firewalls, es útil asignar los valores $+1$ y -1 a las ubicaciones etiquetadas con x y o respectivamente.

Definición 2.1.2. Se define el **x-bias** del nodo i a tiempo t como la suma de los signos de la vecindad del nodo i y lo denotamos $\beta_t(i)$. Se escribirá directamente $\beta(i)$ cuando el tiempo t al que se refiere quede claro por el contexto.

Notar que los x-bias sirven para expresar de manera directa la satisfacción de un agente: un agente x está satisfecho si y solo si $\beta(i) > 0$ y un agente o está satisfecho si y solo si $\beta(i) < 0$. Cabe aclarar que dado que el x-bias es la suma de una cantidad impar de signos, $2w+1$, una de estas dos desigualdades estrictas siempre se cumple.

Definición 2.1.3. Un **firewall incubator** es un bloque F formado por tres bloques consecutivos D_L, I, D_R (llamados *defensor izquierdo*, *interno* y *defensor derecho* respectivamente) tales que:

1. D_L y D_R tienen exactamente $w+1$ nodos,
2. $\beta_0(i) > \sqrt{w}$ para todo $i \in F$,
3. El mínimo del x-bias en D_L se alcanza en el extremo izquierdo, y el mínimo del x-bias en D_R se alcanza en el extremo derecho.

Los bloques de longitud w inmediatamente a la izquierda y a la derecha de F se denotan como A_L, A_R y se llaman *atacante izquierdo* y *atacante derecho.*

Un ejemplo de un firewall incubator se incluye en la Figura 2.1.

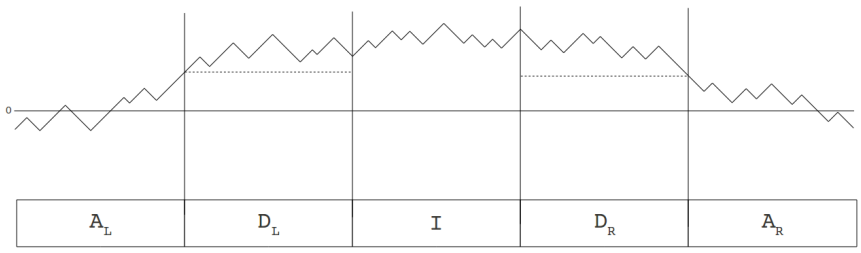


Figura 2.1: Un firewall incubator, rodeado por sus atacantes izquierdo y derecho. La altura indica el x-bias de cada ubicación.

Se busca probar que los firewall incubators son frecuentes en las configuraciones iniciales y para tal fin se introduce la siguiente notación. Dada B una secuencia cualquiera en $\{x, o\}^k$, y $0 \leq j \leq k$, utilizamos:

- $\chi_j(B)$ para denotar la suma de los primeros j signos asociados a los nodos de B. En particular se usa $\chi(B) = \chi_k(B)$ para denotar la suma de todos los signos de los nodos de B
- $\chi_{-j}(B) = \chi(B) - \chi_{k-j}(B)$ para denotar la suma de los j signos finales de B.

Definición 2.1.4. Un bloque $B \in \{x, o\}^w$ es **x-promoting** si:

$\chi(B) \geq 5\sqrt{w}$,

$\chi_j(B) > -2\sqrt{w}$ para todo $j = 1, \ldots, w$,

$\chi_{-j}(B) > -2\sqrt{w}$ para todo $j = 1, \ldots, w$.

Lema 2.1.1. La probabilidad de que una secuencia uniformemente aleatoria $B \in \{x, o\}^w$ sea x-promoting es $\Omega(1)$.

Demostración. Sea $B \in \{x, o\}^w$ y sea $0 < k < w$. Se consideran los eventos:

$$\mathcal{E}_k^L = \{\exists\, j :\ \chi_j(B) \leq -k\},$$
$$\mathcal{E}_k^R = \{\exists\, j :\ \chi_{-j}(B) \leq -k\}.$$

Se va a usar aquí el principio de reflexión para paseos aleatorios: se identifica la secuencia de signos $B \in \{1, -1\}^w$ con un camino aleatorio que parte del origen y consiste en una poligonal con vértices $(j, \chi_j(B))$ hasta el punto $(w, \chi(B))$. Considerando el esquema siguiente,

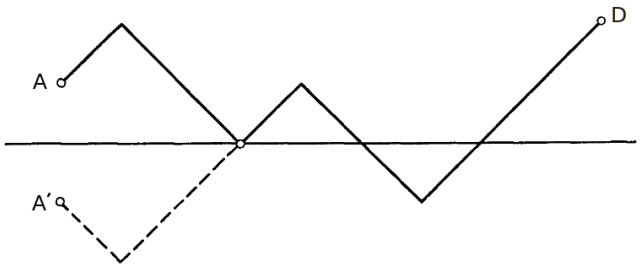


Figura 2.2: Esquema del principio de reflexión.

el principio de reflexión establece que la cantidad de caminos de un punto A a D que tocan o cruzan el eje x equivale a la cantidad de caminos que existen entre $A^{'}$ y D. En el contexto de esta demostración, se usa una reflexión sobre $y = -k$ para afirmar que: $P(\mathcal{E}_k^L) = P(\chi(B) \leq -k) + P(\chi(B) < -k)$.

Por simetría vale que $P(\chi(B) < -k) = P(\chi(B) > k)$ y, por lo tanto, aplicando la desigualdad de Markov:

$$P(\mathcal{E}_k^L) \;=\; P(\chi(B) \leq -k) + P(\chi(B) > k) \;\leq\; P(\chi(B)^2 \geq k^2) \;\leq\; \frac{E(\chi(B)^2)}{k^2} \;=\; \frac{w}{k^2}.$$

Por otra parte, para $b > 0$ vale que $P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) < b) \;\geq\; P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) \geq b)$ y entonces:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_k^L) &= P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) < b)\; P(\chi(B) < b) \;+\; P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) \geq b)\; P(\chi(B) \geq b) \\ &\geq P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) \geq b). \end{aligned}$$

Luego, por transitividad:

$$P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) \geq b) \;\leq\; P(\mathcal{E}_k^L) \;\leq\; \frac{w}{k^2} \;\; \forall\, b, k > 0.$$

Como $\chi(B)$ es la suma de w signos, por el Teorema Central del Límite

$$\lim_{w \to \infty} P(\chi(B) \geq 5\sqrt{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_5^\infty e^{-x^2/2}\, dx$$

y por lo tanto existe una constante c_0 tal que $P(\chi(B) \geq 5\sqrt{w}) > 2c_0$ para todo $w > 25$. La restricción sobre w es necesaria para que $w \geq 5\sqrt{w}$.

En particular se toma $b = 5\sqrt{w}$ y $k = 2\sqrt{w}$:

$$\begin{aligned} P(B \text{ es } x\text{-promoting}) &= P\left(\chi(B) \geq b \wedge (\mathcal{E}_k^L)^c \wedge (\mathcal{E}_k^R)^c\right) \\ &= P\left((\mathcal{E}_k^L)^c \wedge (\mathcal{E}_k^R)^c \mid \chi(B) \geq b\right)\; P(\chi(B) \geq b) \\ &\geq \left[1 - 2\, P(\mathcal{E}_k^L \mid \chi(B) \geq b)\right] \cdot\; P(\chi(B) \geq b) \\ &\geq \left[1 - 2\left(\frac{w}{k^2}\right)\right] 2c_0 \\ &= c_0. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.2. Sea r un entero tal que $6 \leq r \leq \frac{N}{w} - 2$. Para cualquier secuencia de rw nodos consecutivos, la probabilidad de que un $\{x, o\}$-etiquetado uniformemente aleatorio de dichos nodos contenga un firewall incubator que comience entre los primeros w nodos de la izquierda y termine entre los últimos w nodos de la derecha es al menos c^r, donde $c > 0$ es una constante independiente de r, w, N.

Demostración. Sea $B \in \{x, o\}^{rw}$ con $6 \leq r \leq \frac{N}{w} - 2$. Sea $B_1, \ldots, B_r$ una partición de B en r bloques consecutivos de tamaño w. Sean B_0 y B_{r+1} los bloques formados por los w nodos inmediatamente anteriores a B_1 y los w nodos inmediatamente posteriores a B_r respectivamente. Sea λ_{00} el $\{x, o\}$-etiquetado de los bloques $B_0, B_1, \ldots, B_r, B_{r+1}$. Se consideran los etiquetados $\lambda_{10}, \lambda_{01}, \lambda_{11}$ definidos a partir de λ_{00} que consisten en invertir el orden de las etiquetas asignadas a los primeros $4w$ nodos, a los últimos $4w$ nodos o a ambos conjuntos de nodos, respectivamente.

Por el lema anterior vale que la probabilidad de que los $r + 2$ bloques del etiquetado λ_{00} sean todos x-promoting es al menos c_0^{r+2}. Notar que si esto ocurre para λ_{00}, también es válido para los otros etiquetados considerados pues invertir el orden de las etiquetas preserva la cualidad de ser x-promoting. Más aún, por simetría, todos los etiquetados del conjunto $\{\lambda_{00}, \lambda_{10}, \lambda_{01}, \lambda_{11}\}$ son equiprobables dado dicho evento.

Bastaría ver entonces que al menos uno de estos cuatro etiquetados contiene un firewall incubator que comienza en B_1 y termina en B_r condicionando a que todos los bloques sean x-promoting, pues valdría que:

$$P(\lambda_{00} \text{ cumple la propiedad}) \geq \frac{1}{4} c_0^{r+2} \geq c^r.$$

Sea i un nodo perteneciente al bloque central de tres bloques x-promoting consecutivos B', B'', B''' y sea j la posición relativa de dicho nodo dentro del bloque B''; se cumple que:

$$\beta_0(i) = \chi_{-j-1}(B') \, + \, \chi(B'') \, + \, \chi_j(B''') > -2\sqrt{w} + 5\sqrt{w} - 2\sqrt{w} = \sqrt{w}$$

por la definición de bloque x-promoting. En particular, bajo la suposición de que todos los bloques que constituyen los etiquetados $\{\lambda_{00}, \lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11}\}$ son x-promoting se tiene que $\beta_0(i) > \sqrt{w} \;\; \forall i \in B_1 \cup \ldots \cup B_r$ para cualquiera de los etiquetados. Faltaría ver que se alcanzan los mínimos del x-bias en los extremos. Notar que si i es un nodo perteneciente a $B_1 \cup B_2$, todos sus nodos vecinos pertenecen a $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Por lo tanto, cuando se invierte el orden de las etiquetas de dichos $4w$ nodos, la secuencia resultante de los sesgos de los nodos de $B_1 \cup B_2$ también resulta invertida. Ocurre lo mismo para los nodos de $B_{r-1} \cup B_r$.

Así, para $M_1 = \arg\min\{\beta_0(i) : i \in B_1 \cup B_2\}$ y $M_r = \arg\min\{\beta_0(i) : i \in B_{r-1} \cup B_r\}$ debe valer para alguno de los cuatro etiquetados del conjunto $\{\lambda_{00}, \lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11}\}$ simultáneamente que $M_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ y $M_r \cap B_r \neq \emptyset$. En tal caso, por construcción, el bloque de nodos que comienza en $M_1 \cap B_1$ y termina en $M_r \cap B_r$ es un x-firewall incubator. $\square$

El trabajo se centra ahora en analizar la interacción entre los bloques atacante y defensor del firewall incubator. En cada iteración de la dinámica del sistema se propone un intercambio de dos nodos; este intercambio puede contribuir a la formación de un firewall si involucra a un agente o moviéndose fuera de dicho defensor o bien obstaculizarlo si involucra un x moviéndose fuera del bloque atacante. Es necesario demostrar que los movimientos "buenos", en sentido de favorecer a la formación de un firewall, suceden con suficiente frecuencia y al principio del proceso.

Definición 2.1.5. El **tiempo de satisfacción** del nodo i, llamado t_i^* se define como el primer tiempo en que el nodo i-ésimo es seleccionado para participar de un intercambio con otro agente de tipo opuesto que está insatisfecho. Si tal momento no existe se dice que $t_i^* = \infty$. Un nodo i se dice **impaciente** a tiempo t si está insatisfecho y $t < t_i^*$.

Definición 2.1.6. Para un firewall incubator $F = D_L \cup I \cup D_R$ con correspondientes bloques atacantes A_L y A_R se define:

> Un **atacante** izquierdo es un agente de tipo x que pertenece a A_L en la configuración inicial.
>
> Un **defensor** izquierdo es un agente de tipo o que pertenece a D_L en la configuración inicial.
>
> Un **combatiente** es un atacante izquierdo o un defensor izquierdo.

Definiciones análogas se hacen para el caso derecho. Además la cantidad de atacantes izquierdos y la cantidad de defensores izquierdos se denotan con a_L, d_L respectivamente. Para los combatientes derechos se definen a_R, d_R de manera análoga.

Definición 2.1.7. La **transcripción izquierda** (derecha) es la secuencia de signos asociada a los combatientes izquierdos (derechos) obtenida al listarlos en orden decreciente según su tiempo de satisfacción.

Si existe un tiempo t_0 tal que ningún individuo de F es impaciente, cualquier secuencia de signos obtenida de la transcripción izquierda (derecha) al permutar los signos asociados a los agentes cuyo tiempo de satisfacción es mayor a t_0, manteniendo el resto fijo, se llama **pseudo-transcripción izquierda** (derecha).

Proposición 2.1.3. Supongamos que F es un x-firewall incubator y que existen pseudo-transcripciones izquierdas y derechas con todas sus sumas parciales no negativas. Entonces, F se convierte en un x-firewall.

Demostración. La demostración se hace por el absurdo. Sea t_0 el primer momento en que ningún nodo de F es impaciente. Se supone que F no es un x-firewall en $t = t_0$ y sea $j \in F$ un nodo ocupado por un agente o. Se puede afirmar que existe un tiempo $t_1 \leq t_0$ tal que el nodo j está ocupado por un agente o satisfecho:

- Dado que j no está impaciente en t_0 puede ocurrir que j esté satisfecho, en cuyo caso $t_1 = t_0$.

- La otra posibilidad es que el tiempo de satisfacción de j haya sido anterior a t_0. Si $t_j^* < t_0$ y el agente o del nodo j nunca se mudó, basta tomar $t_1 = t_j^*$ y si por el contrario $t_j^* < t_0$ y el agente o del nodo j no es el ocupante original, puede tomarse t_1 como el tiempo inmediatamente siguiente al que se mudó hacia el nodo j.

Se considera i el primer nodo de F que desarrolla un x-bias negativo y sea t el tiempo en que esto ocurre. Notar que $t \leq t_1$ puesto que $\beta_{t_1}(j) < 0$.

Hasta el momento t, los x-bias de los nodos en F son positivos y, por lo tanto, los únicos intercambios en F involucran a agentes de tipo o que se mudan fuera. Dado que el x-bias de los nodos del bloque I está determinado por las etiquetas de los nodos de $D_L \cup I \cup D_R = F$, su x-bias no puede disminuir con las mudanzas consideradas y se concluye que el primer nodo de F en desarrollar un x-bias negativo no puede pertenecer a I, sino que debe estar en D_L o D_R. Sin pérdida de generalidad, se supone $i \in D_L$.

Sea i_{min} el nodo que está en el extremo izquierdo de D_L. Por definición de firewall incubator vale que $\beta_0(i_{min}) \leq \beta_0(i)$. Como la vecindad de i_{min} esta definida por los nodos de $A_L \cup D_L$, la desigualdad anterior puede reescribirse como:

$$\underbrace{a_L}_{\#\{x \in A_L\}} - \underbrace{(w - a_L)}_{\#\{o \in A_L\}} + \underbrace{w + 1 - d_L}_{\#\{x \in D_L\}} - \underbrace{d_L}_{\#\{o \in D_L\}} = 2(a_L - d_L) + 1 \leq \beta_0(i).$$

Por otra parte, se define a_L^t como la cantidad de atacantes izquierdos con tiempo de satisfacción menor a t y d_L^t como la cantidad de defensores izquierdos con tiempo de satisfacción menor a t. Si se tiene en cuenta que hasta tiempo t los intercambios que disminuyen el x-bias del nodo i corresponden a atacantes izquierdos x que dejan A_L mientras que los intercambios que involucran a defensores izquierdos aumentan su x-bias, vale que:

$$\begin{aligned} \beta_t(i) &\geq \beta_0(i) + 2d_L^t - 2a_L^t \\ &\geq 2(a_L - d_L) + 1 + 2d_L^t - 2a_L^t \\ &> 2[(a_L - a_L^t) - (d_L - d_L^t)]. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Notar que $a_L - a_L^t$ es la cantidad de atacantes cuyo tiempo de satisfacción es mayor a t y, de manera similar, $d_L - d_L^t$ es la cantidad de defensores con tiempo de satisfacción mayor que t. Por lo tanto, el lado derecho de (2.1.1) representa el doble de k-ésima suma parcial de la transcripción izquierda siendo $k = (a_L - a_L^t) + (d_L - d_L^t)$ el número de individuos cuyo tiempo de satisfacción es posterior a t.

Como $t < t_0$, por definición de pseudo-trancripción izquierda esto coincide con la k-ésima suma parcial de la pseudo-transcripción izquierda. La suposición de que el nodo i desarrolla un x-bias negativo en tiempo t contradice la hipótesis de que las pseudo-transcripciones tienen sumas parciales no negativas. □

Lema 2.1.2 (Ballot Theorem)**.** Se considera el conjunto que consta de p copias de $+1$ y q copias de -1 y sea $x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}$ un ordenamiento uniformemente aleatorio

de los elementos de dicho conjunto. La probabilidad de que todas las sumas parciales $x_1 + \ldots + x_j$ para $1 \leq j \leq p+q$ sean estrictamente positivas es igual a máx $\left\{0, \dfrac{p-q}{p+q}\right\}$.

Demostración. Si $p \leq q$ el lema se cumple trivialmente dado que la probabilidad equivale a cero. Para $p > q$ el lema puede plantearse en el contexto de paseos aleatorios como la probabilidad de que un paseo aleatorio que comienza en $(0,0)$ y termina en el $(p+q, p-q)$ no haya cruzado nunca el eje x. En dicho contexto, sea el evento $\mathcal{A} := \{\text{no corta el eje } x\}$. Usando el principio de reflexión vale que:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}) &= 1 - [\ P(\mathcal{A}^c \cap \{x_1 = 1\}) + P(\mathcal{A}^c \cap \{x_1 = -1\})\ ] \\ &= 1 - 2\ P(\mathcal{A}^c \cap \{x_1 = -1\}) \\ &= 1 - 2\ \underbrace{P(\mathcal{A}^c \mid x_1 = -1)}_{1}\ \underbrace{P(x_1 = -1)}_{\frac{q}{p+q}} \\ &= \frac{p-q}{p+q}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.4. Sea B un bloque aleatorio de longitud $6w$, entonces con probabilidad $\Omega(1/w)$, B contiene un firewall incubator y tiene pseudo-transcripciones izquierda y derecha con sumas parciales no negativas.

Veamos la idea detrás de la demostración de esta proposición, aunque no la haremos en detalle.

Por la proposición 2.1.2 se sabe que B contiene un firewall incubator con probabilidad estrictamente positiva. Faltaría ver qué ocurre con las pseudo-transcripciones; sin pérdida de generalidad se analiza el caso izquierdo.

Si se asume que la pseudo-transcripción izquierda es una permutación uniformemente aleatoria de a_L copias de $+1$ y d_L copias de -1, puede aplicarse el lema 2.1.2 que asegura que las sumas parciales son no negativas con probabilidad máx $\left\{0, \dfrac{a_L - d_L}{a_L + d_L}\right\}$. En tal caso, se podrá acotar la probabilidad.

Se considera como antes i_{min} el nodo que está en el extremo izquierdo de D_L y teniendo en cuenta la definición de firewall incubator se sabe que $\beta_0(i_{min}) = 2(a_L - d_L) + 1 > \sqrt{w}$ y, por lo tanto, $a_L - d_L > \sqrt{w}$. Además, $a_L + d_L \leq 2w + 1$ pues los tamaños de A_L y D_L son w y $w+1$ respectivamente. Combinando ambas desigualdades se tiene que $\dfrac{a_L - d_L}{a_L + d_L} = \Omega(1/\sqrt{w})$.

Por la independencia de las sumas parciales de las pseudo-transcripciones izquierda y derecha se tiene que la probabilidad es $\Omega(1/w)$. Esto completaría la prueba, pero desafortunadamente las transcripciones no son permutaciones uniformemente aleatorias: surge un sesgo cuando el número de agentes insatisfechos de cada tipo no es exactamente igual. Si, por ejemplo, en algún momento de la dinámica hay más agentes insatisfechos

de tipo o que de tipo x, es más probable que el tiempo de satisfacción de un atacante x ocurra antes que el de un defensor o.

En el artículo original puede verse en detalle cómo se trabaja para sortear esta dificultad, aunque no lo incluimos en esta revisión por tratarse de un tecnicismo que no aporta cualitativamente a los resultados mostrados. En lineas generales la manera de abordarlo consiste en corregir artificialmente en cada paso temporal el desequilibrio entre la cantidad de agentes insatisfechos de cada tipo. Suponiendo que hay m agentes insatisfechos extra del tipo x, se eligen aleatoriamente m agentes insatisfechos de este tipo y se los denomina *censurados*. Se llaman *intercambios censurados* a los que involucran este tipo de agentes (en realidad, por un detalle de la prueba se censuran también los intercambios entre un par de agentes que son combatientes de F). Condicionando a que no se permitan intercambios censurados, se tienen permutaciones uniformes al azar. Siempre que el desequilibrio sea pequeño, la probabilidad de que un intercambio propuesto sea censurado también es pequeña y por tiempo suficiente esto se cumple. Existe un tiempo t_0 a partir del cual las diferencias entre las cantidades de agentes insatisfechos de cada tipo dejan de ser pequeñas, pero se muestra que con probabilidad $1 - o(1)$ ningún individuo de F es impaciente a tiempo t_0. De esta manera, se puede obtener una pseudo-transcripción permutando aleatoriamente aquellos combatientes que tienen tiempos de satisfacción posteriores a t_0 y dado que no se produjeron intercambios censurados antes de t_0 dicha pseudo-transcripción es uniformemente aleatoria y puede usarse lo anterior para completar la prueba.

Teorema 2.1.1. Se considera el proceso de segregación con ventana w sobre un anillo de N nodos cuya configuración inicial tiene una distribución uniformemente aleatoria. Luego, existe una función $N_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo w y para todo $N \geq N_0(w)$ con probabilidad $1 - o(1)$, el proceso alcanza una configuración fija en la que no hay más intercambios posibles, luego de finitos pasos. Además, la longitud del run en dicha configuración final es, en promedio, $O(w^2)$. De hecho, la distribución de longitudes cumple que para todo $\lambda > 0$, la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar pertenezca a un run de longitud mayor a λw^2 está acotada por arriba por c^λ.

Demostración. En la Proposición 2.1.1 se ha probado que la probabilidad de alcanzar una configuración fija es alta. Se verá cómo puede acotarse la longitud de los runs en dicha configuración.

Sea a un nodo cualquiera de la configuración final y sea M el tamaño del run al que pertenece. Sin pérdida de generalidad, se supone que a es de tipo o. Si se recorren bloques disjuntos de longitud $6w$ en el sentido de las agujas del reloj, cada uno tiene probabilidad $\Omega(1/w)$ de contener un x-firewall por la Proposición 2.1.4. En particular, si se consideran los $\lambda w/6$ bloques disjuntos de longitud $6w$ se tiene que la probabilidad de que $M > \lambda w^2$ está acotada superiormente por la probabilidad de que ninguno de dichos

bloques contenga un x-firewall. Por lo tanto, para una constante $c < 1$ adecuada:

$$\begin{aligned} P(M > \lambda w^2) &= P(M > \frac{\lambda w}{6} 6w) \\ &\leq \left(1 - \frac{k}{w}\right)^{\frac{\lambda w}{6}} \\ &< c^{\lambda} \quad \text{para todo } w. \end{aligned}$$

Por simetría vale lo mismo en dirección contraria a las agujas del reloj y queda así demostrado el teorema. □

Notar que en algún sentido la demostración del teorema acota la esperanza de la longitud M por la de una variable aleatoria que cuenta la cantidad de bloques de longitud $6w$ que se deben recorrer hasta encontrar un firewall del tipo opuesto al de a. Dicha variable aleatoria sigue una distribución geométrica con $p > k/w$ para algún k. Luego, $E(M) < 1/p\ 6w\ < w/k\ 6w$.

Mencionamos, finalmente, que en [21] se mejora la cota $\Omega(1/w)$ para lograr ajustar la longitud promedio del run a $O(w)$ aunque dicho artículo está aún en preparación.

2.2. El caso bidimensional

En esta segunda parte se hará una revisión de algunos de los resultados probados en [26] donde se estudia la evolución de un modelo de proximidad de Schelling bidimensional con argumentos de sistemas dinámicos. En particular, se caracterizan los estados finales y se describen ciertas propiedades geométricas de dichos estados a partir de la introducción de una función de Lyapunov para el sistema. Dicha función se vincula con el operador Laplaciano del grafo inducido por el modelo, y se muestra que los estados de equilibrio son los que minimizan un problema variacional, no homogéneo, y no lineal para dicho Laplaciano.

2.2.1. Preliminares

Se detallan a continuación las reglas del modelo bidimensional de Schelling con que se trabaja, así como algunas notaciones y definiciones.

- El espacio habitable está representado por una cuadrícula cuadrada de lado N del toro, es decir, con condiciones de contorno periódicas.
- N^2 representa la cantidad de agentes del sistema pues cada ubicación está ocupada por exactamente un agente.
- Los agentes de cada tipo están identificados con las etiquetas $+1$ y -1. Por comodidad en la notación se usan directamente las asignaciones numéricas para identificar a cada tipo de agente.

- La vecindad de cada agente está formada por los $H = 4$ casilleros adyacentes por los lados; es decir, se considera la vecindad de Von Neumann.
- La satisfacción de cada agente se define como la cantidad de agentes vecinos de su mismo tipo y por lo tanto toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Notar que en este caso la satisfacción puede tomar cinco valores en lugar de tomar dos, como en el modelo original de Schelling donde T representa un umbral de tolerancia.
- En la dinámica se eligen dos agentes de tipos opuestos siguiendo alguna regla predefinida. Dichos agentes intercambian ubicaciones si ambos aumentan su satisfacción con el intercambio propuesto. Es decir, si la proporción de vecinos de su mismo tipo es mayor en la ubicación de destino que en su ubicación actual. La dinámica sigue hasta que el sistema se estabilice.

Dentro de este esquema, la cuadrícula es llamada Λ_N y cada estado del sistema puede caracterizarse a partir de una función *estado* o *configuración* $x : \Lambda_N \to \{-1, 1\}$ que asigna a cada ubicación una etiqueta -1 o $+1$. En particular, el conjunto de todos los estados posibles se denota como:

$$\mathcal{H}_N = \{x : \Lambda_N \to \{-1, 1\}\}.$$

Además, x_t representa el estado del sistema a tiempo t y, en particular x_0 es la configuración inicial. Para describir la evolución temporal se analiza de qué manera se pasa de un estado $x_t \in \mathcal{H}_N$ al $x_{t+1} \in \mathcal{H}_N$.

Supongamos que en el paso temporal t se eligen las ubicaciones $v \in \Lambda_N$ etiquetada con un $+1$ y $w \in \Lambda_N$ etiquetada con un -1. Se nota con $\#(+1)_v$ la cantidad de vecinos de tipo $+1$ de la ubicación v y análogamente se usa $\#(-1)_v$ para la cantidad de vecinos de v de tipo -1. La misma notación vale para la ubicación w. Luego,

$$\begin{gathered}\#(+1)_v,\ \#(-1)_v,\ \#(+1)_w,\ \#(-1)_w \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \#(+1)_v + \#(-1)_v = 4 \\ \#(+1)_w + \#(-1)_w = 4.\end{gathered}$$

Recordamos que se producirá el intercambio si ambos agentes aumentan su satisfacción, más precisamente si:

$$\#(+1)_w > \#(+1)_v \ \text{ o equivalentemente } \ \#(-1)_v > \#(-1)_w.$$

Bajo estas hipótesis ocurre que

$$\begin{aligned}x_{t+1}(v) &= -1 \\ x_{t+1}(w) &= 1 \\ x_{t+1}(z) &= x_t(z) \quad \forall z \neq v, w\end{aligned}$$

y si no, vale que $x_{t+1} \equiv x_t$.

Mediante este procedimiento puede definirse la evolución temporal del sistema $\{x_t\}_{t\geq 0}$ a partir de un estado inicial x_0, que dependerá de la elección del par de ubicaciones que se haga en cada paso. Se define además el *proceso acelerado* $\{x'_k\}_{k\geq 0}$ que consiste en descartar las tiras de estados consecutivos idénticos.

Finalmente, se define la configuración límite o *estado de equilibrio* del sistema a partir de una configuración inicial x_0 como sus puntos fijos; es decir, aquella configuración tal que existe $\tilde{t} > 0$ con $x_t = x_{\tilde{t}}$ para $t \geq \tilde{t}$.

Se observa, además, que en la evolución del sistema se conserva la cantidad total de $+1's$ y $-1's$. En particular, pensando en plantear un problema variacional para el Laplaciano del grafo, se define la primera integral de la evolución temporal como el promedio de la diferencia entre la cantidad total de $+1's$ y de $-1's$ que también debe conservarse:

$$I(x) \equiv \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} x(v).$$

2.2.2. La función de Lyapunov

Se construye una función de Lyapunov para el sistema; es decir, una función L no negativa de tipo energía que decrece sobre las trayectorias. De hecho, se trabaja con una función estrictamente decreciente para el proceso acelerado $L : \{-1, 1\}^{\Lambda_N} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} L(x'_{t+1}) < L(x'_t) \quad & \forall t \geq 0 \qquad \text{si } x'_t \text{ no es una configuración límite} \\ L(x'_k) = L(x'_t) \quad & \forall k \geq t \qquad \text{caso contrario.} \end{aligned}$$

Definición 2.2.1. Dado un estado x del sistema se define la **satisfacción promedio de la ubicación** $v \in \Lambda_N$ como :

$$S(x; v) = x(v) \cdot \frac{1}{4} \sum_{\substack{(i,j) \in \{(-1,0),\\ (1,0),(0,1),(0,-1)\}}} x(v + (i, j)).$$

Cabe aclarar que dadas las condiciones de contorno periódicas, los índices que identifican a las ubicaciones se consideran módulo N. Notar que $S(x; v)$ es la diferencia entre la cantidad de vecinos de v que poseen su misma etiqueta y los que no, normalizada por la cantidad de vecinos. De esta manera, $-1 \leq S(x; v) \leq 1$ y el máximo valor se alcanza cuando todos los vecinos de v son de su mismo tipo; mientras que el mínimo corresponde al caso en que todos sus vecinos son del tipo opuesto.

Definición 2.2.2. Dado un estado x del sistema, se define la **satisfacción promedio del estado** $x \in \mathcal{H}_N$ como:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} S(x; v) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} \frac{1}{4} \sum_{\substack{(i,j) \in \{(-1,0),\\ (1,0),(0,1),(0,-1)\}}} x(v) \cdot x(v + (i, j)). \end{aligned}$$

Se observa que S toma valores en el intervalo $[-1, 1]$ y, por lo tanto, en particular vale que $S + 1$ define una función no negativa.

Teorema 2.2.1. La satisfacción promedio S es una función creciente del sistema y es estrictamente creciente hasta alcanzar la configuración de equilibrio para el caso acelerado. En particular, $\mathbf{L \equiv 1 - S}$ **es una función de Lyapunov**.

Demostración. Basta recordar cómo se había definido la evolución temporal del sistema para el caso acelerado: se pasa del estado x_t al x_{t+1} cuando dos nodos $v, w \in \Lambda_N$ intercambian etiquetas y aumentan su satisfacción.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_t(v) = +1$ y $x_t(w) = -1$. Considerando que al restar las satisfacciones promedio de cada estado, los únicos términos que varían son los que involucran a vecinos de v y de w, vale que:

$$\begin{aligned} N^2\ [S(x_{t+1}) - S(x_t)] =& \frac{1}{2}[\#(-1)_v - \#(+1)_v + \#(+1)_w - \#(-1)_w] \\ & - \frac{1}{2}[\#(+1)_v - \#(-1)_v + \#(-1)_w - \#(+1)_w] = \\ =& \underbrace{\#(-1)_v - \#(-1)_w}_{>0} + \underbrace{\#(+1)_w - \#(+1)_v}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple pues ambos agentes aumentan su satisfacción con el intercambio propuesto. Esto muestra que $L \equiv 1 - S$ es estrictamente decreciente y no negativa pues $-1 \leq S(x) \leq 1$. □

La siguiente proposición da una caracterización geométrica de la función de Lyapunov L.

Proposición 2.2.1. Para un estado x del sistema, la función de Lyapunov cumple que:

$$L(x) = \frac{P(x)}{N^2}$$

donde $P(x)$ denota el perímetro o contorno de la frontera que separa agentes vecinos de distinto tipo en el estado x.

Demostración. Notar que el contorno de la frontera está formado por segmentos de línea horizontales y verticales que separan ubicaciones vecinas etiquetadas con $+1$ y con -1. Cada ubicación, entonces, puede aportar al perímetro de la frontera total cero, uno, dos, tres o cuatro de estos segmentos. Si se recorre cada ubicación $v \in \Lambda_N$ se tiene que:

$$2\ P(x) = \sum_{v \in \Lambda_N} \sum_{\substack{(i,j)\ \in\ \{(-1,0),\\ (1,0),(0,1),(0,-1)\}}} \frac{1 - x(v) \cdot x(v + (i,j))}{2} \tag{2.2.1}$$

pues la suma interior es exactamente la cantidad de segmentos de frontera que rodea a cada $v \in \Lambda_N$. Al sumar sobre todas las ubicaciones $v \in \Lambda_N$ cada segmento de frontera se cuenta dos veces y así es que se obtiene el doble de $P(x)$. De la definición de $S(x)$ se sigue que la derecha de la igualdad (2.2.1) equivale a $2N^2(1 - S(x)) = 2N^2 L(x)$. Por transitividad y un simple despeje se obtiene la expresión deseada. □

Corolario 2.2.1. La función de Lyapunov L da una cota para el tiempo estimado requerido para alcanzar el estado de equilibrio en el sistema acelerado. Más precisamente, existe $\tilde{t} \leq 4N^2$ y un estado de equilibrio x'_* tales que el sistema acelerado alcanza su equilibrio en $\tilde{t}$ pasos, i.e. $x'_{\tilde{t}} = x'_*$.

Demostración. Basta recordar que $L(x')$ define una función no negativa estrictamente decreciente para el proceso acelerado que toma valores en $(1/N^2)\mathbb{N}$. Luego, $\tilde{t} \leq N^2 L(x'_0) = P(x'_0) \leq 4N^2$. □

Se define una L^1- métrica sobre $\mathbb{R}^{\Lambda_N}$ como :

$$d(x, y) = \sum_{v \in \Lambda_N} |x(v) - y(v)| \quad x, y \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}$$

Esto induce una métrica en $\mathcal{H}_N$ que toma valores en $2\mathbb{Z}^+$. Se considera la vecindad del estado x como el entorno $U(x) = \{y \in \mathcal{H}_N : d(x, y) \leq 4\}$ que corresponde a los estados que se pueden alcanzar desde x por un solo intercambio de etiquetas entre un par de agentes. Esto permite cuantificar la noción de cercanía entre dos estados del sistema.

Definición 2.2.3. Dado un estado $x \in \mathcal{H}_N$,

> x es un **mínimo local** de la función de Lyapunov L si para cualquier $y \in U(x)$ se tiene que $L(y) \geq L(x)$.
>
> x es un **mínimo global** de la función de Lyapunov L si $L(y) \geq L(x)$ para todo $y \in \mathcal{H}_N$.

Definiciones análogas se hacen para el máximo local y el máximo global.

Las siguientes proposiciones (2.2.2, 2.2.3) y el corolario 2.2.2 se siguen de manera inmediata de la proposición 2.2.1.

Corolario 2.2.2. Si un estado x es un mínimo local (global) de L entonces x es un mínimo local (global) de P.

Proposición 2.2.2 (Principio de minimización del contorno)**.** Los estados de equilibrio del sistema son mínimos locales de la función de Lyapunov L y son, por lo tanto, configuraciones que minimizan localmente el perímetro o contorno de la frontera.

Definición 2.2.4. Sea $C \subset \Lambda_N$ una colección de ubicaciones,

> Se dirá que C es una **isla** si todas las ubicaciones en C tienen la misma etiqueta, el borde de C consiste en una componente que es una curva simplemente conexa sobre el toro y todas las ubicaciones del complemento de C a lo largo del borde tienen la etiqueta opuesta.

Se dirá que C es una **tira** si todas las ubicaciones en C tienen la misma etiqueta, el borde de C consiste en dos componentes donde cada una es una curva cerrada que gira una vez alrededor del toro y todas las ubicaciones del complemento de C a lo largo del borde tienen la etiqueta opuesta.

Proposición 2.2.3. Los mínimos globales de L contienen una única isla o una única tira.

Demostración. Si se asume por contradicción que el mínimo global de L posee más de una isla o tira, se puede considerar una nueva configuración en la que uno de esos dominios se traslada hasta superponerse con el otro en al menos un segmento del contorno del borde. De esta manera, se obtiene una configuración con menor perímetro P y menor cantidad de componentes.

De manera inductiva puede verse cómo los mínimos globales de L son configuraciones que contienen a lo sumo una tira o una isla. □

En el trabajo original los autores profundizan en la caracterización geométrica de los mínimos globales mostrando que esencialmente éstos consisten en cuadrados, complementos de cuadrados o tiras que atraviesan el toro. Por otra parte, dan una condición necesaria y suficiente para los mínimos locales de L vinculada con el tipo de borde de las regiones: en general, salvo un caso excepcional, no se admite que exista una ubicación para la cual tres de los cuatros segmentos que la rodean sean parte del contorno de la frontera. Puede leerse el detalle en los Teoremas 2 y 3 de [26]. Continuamos con los resultados vinculados con la formulación del problema variacional.

2.2.3. El Laplaciano del grafo y el problema variacional no homogéneo

Se considera el grafo finito con vértices en Λ_N y aristas que conectan un par de vértices vecinos acorde a la definición de vecindad con que se viene trabajando. Se define el operador Laplaciano del grafo, $\Delta : \mathbb{R}^{\Lambda_N} \to \mathbb{R}^{\Lambda_N}$, que actuará sobre el espacio de estados del sistema $\mathcal{H}_N$ de la siguiente manera: dado $x \in \mathbb{R}^{\Lambda_N}$,

$$(-\Delta x)(v) = x(v) - \frac{1}{4} \sum_{\substack{(i,j) \in \{(-1,0),\\ (1,0),(0,1),(0,-1)\}}} x(v + (i,j)).$$

Es decir, el Laplaciano del estado x en el vértice v equivale al promedio del valor de x en los vecinos de v menos el valor de x en v.

Además, se denota con $\langle f, g\rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} f(v) \cdot g(v)$ el producto interno para dos funciones f, $g : \mathbb{R}^{\Lambda_N} \to \mathbb{R}^{\Lambda_N}$ que induce induce la norma $||f||^2 = \langle f, f\rangle$.

Proposición 2.2.4. El estado de equilibrio x'_* para el proceso acelerado con condición inicial x_0 es un mínimo local para el problema variacional

$$\inf_{\substack{x:\Lambda_N \to \{-1,1\} \\ I(x)=a}} \langle -\Delta x, x\rangle \qquad \text{donde } a = I(x_0) \tag{V}$$

y dado que $||x||^2 = 1$ para todo $x \in \mathcal{H}_N$ el problema (V) es equivalente a:

$$\inf_{\substack{x:\Lambda_N \to \{-1,1\} \\ I(x)=a}} \frac{\langle -\Delta x, x\rangle}{||x||^2}. \tag{V*}$$

Demostración. Para cada $x \in \mathcal{H}_N$ y $v \in \Lambda_N$ vale que

$$-\Delta x(v) \cdot x(v) = x(v)^2 - S(x;v) = 1 - S(x;v)$$

y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta x, x\rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} -\Delta x(v) \cdot x(v) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{v \in \Lambda_N} 1 - S(x;v) \\ &= 1 - S(x) = L(x).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad anterior, basta usar la proposición 2.2.2 para afirmar que el estado de equilibrio x'_* es un mínimo local del problema variacional (V) y, equivalentemente, de (V*). La demostración queda terminada. □

Corolario 2.2.3. Los siguientes problemas variacionales tienen los mismos minimizadores:

$$\inf_{\substack{x:\Lambda_N \to \{-1,1\} \\ I(x)=a}} \frac{\langle -\Delta x, x\rangle}{||x||^2} = \frac{1}{N^2} \inf_{\substack{x:\Lambda_N \to \{-1,1\} \\ I(x)=a}} P(x).$$

En el caso en que $a = 0$, la expresión de la izquierda del corolario anterior se asemeja al cociente variacional Rayleigh-Ritz para el primer autovalor del Laplaciano del grafo. Sin embargo, el mínimo se toma sobre $x : \Lambda_N \to \{-1, 1\}$ en lugar de $x : \Lambda_N \to \mathbb{R}$ y esta diferencia es esencial pues hace que nuestro problema variacional sea no lineal.

La siguiente proposición muestra los valores mínimos alcanzados para el caso $x : \Lambda_N \to \mathbb{R}$ con condiciones homogéneas y no-homogéneas.

Proposición 2.2.5. Los mínimos globales alcanzan el valor:

(1)
$$\inf_{\substack{x:\Lambda_N \to \mathbb{R} \\ I(x)=0}} \frac{\langle -\Delta x, x\rangle}{||x||^2} = \lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right),$$

donde λ_1 es el primer autovalor distinto de cero para el operador Laplaciano del grafo.

El espectro del Laplaciano $-\Delta : \mathbb{R}^{\Lambda_N} \to \mathbb{R}^{\Lambda_N}$ consiste en:

$$\lambda_{p,q} = 1 - \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) + cos\left(\frac{2\pi q}{N}\right)\right],$$

(2)
$$\inf_{\substack{x:\Lambda_N\to\mathbb{R}\\ I(x)=a}} \frac{\langle -\Delta x, x\rangle}{||x||^2} = (1-a^2)\lambda_1 = (1-a^2)\left(1-\frac{1}{2}\left(1+cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right)\right).$$

Demostración. Se puede ver fácilmente que las funciones $\chi_{p,q}(m,n) = e^{2\pi i(pm+qn)/N}$ donde $v=(m,n)\in\Lambda_N$ forman, para $0\le p,q\le N-1$, una base ortonormal de autofunciones del operador $-\Delta$:

$$\begin{aligned}
-\Delta\chi_{p,q}(m,n) &= \chi_{p,q}(m,n) - \frac{1}{4}\sum_{\substack{(i,j)\ \in\ \{(-1,0),\\ (1,0),(0,1),(0,-1)\}}} \chi_{p,q}((m,n)+(i,j)) \\
&= \left[1-\frac{1}{4}(e^{2\pi ip/N}+e^{-2\pi ip/N}+e^{2\pi iq/N}+e^{-2\pi iq/N})\right]\chi_{p,q}(m,n) \\
&= \underbrace{\left[1-\frac{1}{4}(2cos(2\pi p/N)+2cos(2\pi q/N))\right]}_{\lambda_{p,q}}\chi_{p,q}(m,n).
\end{aligned}$$

Luego, para una combinación lineal $x=\sum_{p,q} c_{p,q}\chi_{p,q}$ vale que

$$\langle -\Delta x, x\rangle = \sum_{p,q}\lambda_{p,q}|c_{p,q}|^2.$$

Se sigue entonces que $\langle -\Delta x, x\rangle \ge \lambda_{1,0}|c_{1,0}|^2+\lambda_{0,1}|c_{0,1}|^2 = \lambda_1(|c_{1,0}|^2+|c_{0,1}|^2)$.

En particular, vale la igualdad si $x=a+b\chi_{0,1}+c\chi_{1,0}$ y el resultado se sigue pues $1=||x||^2=a^2+|b|^2+|c|^2=a^2+|c_{0,1}|^2+|c_{1,0}|^2$ y, por lo tanto, $\lambda_1(|c_{0,1}|^2+|c_{1,0}|^2)=\lambda_1(1-a^2)$. □

Es importante aclarar que el problema variacional que aquí se plantea no es válido para el modelo de Schelling original considerando la modificación que se introdujo en la definición de satisfacción de los agentes del sistema. En la formulación original los agentes están satisfechos una vez que alcanzan una proporción T de agentes vecinos del mismo tipo y no continúan "maximizando"su satisfacción. En términos de la función de Lyapunov definida esto se traduce en que los estados de equilibrio de la dinámica original se alcancen antes de llegar a los mínimos locales de L.

Capítulo 3

Simulaciones del modelo bidimensional

3.1. Modelo

Se trabaja con un modelo de proximidad de Schelling bidimensional sobre una cuadrícula que posee ubicaciones vacías. Los parámetros y reglas del modelo son:

- El espacio habitable es una cuadrícula cuadrada de lado L con condiciones de contorno abiertas. Quedan definidas L^2 ubicaciones.
- $\rho \in (0, 1)$ es la densidad de espacios vacíos.
- N es la cantidad total de agentes y queda definida por $N = (1 - \rho) \times L^2$.
- Los agentes de cada tipo están identificados con un color: *rojo* o *negro*, y R es la proporción de agentes rojos respecto del total de agentes. Inicialmente los agentes de ambos tipos se distribuyen aleatoriamente en la cuadrícula.
- La vecindad de cada agente está formada por los $H = 8$ casilleros adyacentes por vértices o por lados, es decir, la vecindad de Moore. Dado que se consideran condiciones de contorno abiertas, la definición de vecindad se adapta para las ubicaciones que están sobre los bordes: las ubicaciones de las esquinas tienen tres casilleros vecinos, mientras que las ubicaciones que están sobre los lados tienen cinco.
- La preferencia o tolerancia es la misma para todos los agentes, está expresada como $T \in [0, 1]$ y es un umbral para la proporción de agentes vecinos del mismo tipo, respecto del total de vecinos: un agente está satisfecho en su vecindad si la proporción de vecinos de su mismo tipo es mayor a T.
- En la dinámica un agente insatisfecho elegido al azar se muda hacia una ubicación que lo satisfaga, también elegida aleatoriamente. En caso de no existir tal ubicación, el agente insatisfecho se muda hacia una ubicación cualquiera. Las mudanzas

continúan hasta que la cantidad de agentes insatisfechos sea cero o el proceso se estabilice.

Notar que dada la existencia de ubicaciones vacías es necesario distinguir el parámetro que refiere al tamaño de la cuadrícula, L, de aquél que representa la cantidad de agentes del sistema, N; y que un estado del sistema pertenece a $\{-1, 0, 1\}^{L^2}$ donde el 0 identifica a una ubicación vacía.

3.2. Simulaciones

En esta tesis se fijó $L = 50$ y el criterio de estabilidad elegido es que durante las últimas 700 mudanzas realizadas, la proporción de agentes insatisfechos del sistema sea menor al 0.01. Se definió además una cantidad máxima de iteraciones permitidas igual a 700000. En el Apéndice puede verse el pseudocódigo para entender detalles del algoritmo.

El dominio de parámetros estudiado es:

$$T \in \{0.4,\ 0.45,\ 0.5,\ 0.55,\ 0.6,\ 0.65,\ 0.7,\ 0.75,\ 0.8\}$$

$$R \in \{0.05,\ 0.1,\ 0.15,\ 0.2,\ 0.25,\ 0.3,\ 0.35,\ 0.4,\ 0.45,\ 0.5\}$$

Los rangos elegidos para los parámetros no contemplan instancias extremas en las que la dinámica se vuelve trivial. En particular para R, la cota superior considerada es 0.5 dada la simetría que existe entre la población roja y negra. En cuanto al parámetro de densidad de ubicaciones vacías se hizo un estudio preliminar para fijar un dominio adecuado.

Dominio de ρ: análisis previo

Resulta sustancial para el análisis definir un rango de valores para ρ que no excluya casos de interés y que sea útil para hacer comparaciones entre distintas instancias del modelo. La densidad de espacios vacíos afecta de manera directa la disponibilidad de ubicaciones que podrían satisfacer las preferencias de los agentes y, en consecuencia, para ρ suficientemente chico el criterio de corte o estabilidad elegido en la implementación podría ser inalcanzable o requerir más iteraciones que las consideradas. Se trata de un criterio exigente pero que nos garantiza "buenas" configuraciones finales. Por esta razón, se hizo un estudio preliminar para $0.01 \leq \rho \leq 0.9$ con paso de tamaño 0.01 y se distinguió, para cada combinación fija de los parámetros T y R, el valor de ρ a partir del cual se obtuvo la convergencia del total de realizaciones simuladas. Es decir, se considera el máximo ρ para el cual existe al menos una simulación que no haya convergido y definimos como ρ_0 la densidad inmediatamente siguiente, sumándole 0.01.

En adelante, cuando se analicen resultados se tendrá en cuenta esta información (Figura 3.1) para definir la cota inferior de la densidad de ubicaciones vacías. Por ejemplo, si se intenta comparar comportamientos entre todas las instancias simuladas, se usará 0.21 como cota inferior; pero el rango de ρ podría ampliarse si se estudian sólo algunas

regiones de los dominios de los parámetros. El estudio de los casos que no se ajustan a este criterio queda fuera de los alcances de este trabajo.

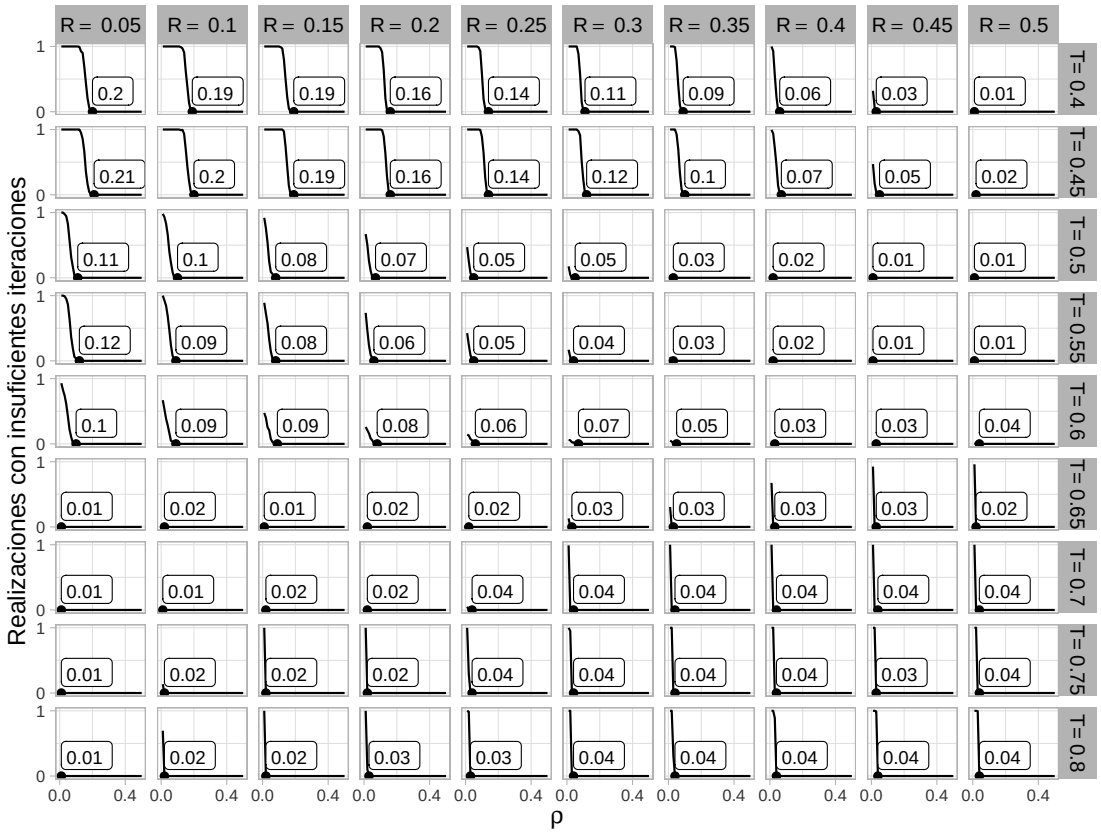


Figura 3.1: Proporción de realizaciones simuladas que no convergieron. Se muestran sobre el gráfico los valores de ρ_0 correspondientes.

Resultados

Habiendo dejado claras las reglas del modelo y los dominios de los parámetros T, R y ρ con los que trabajamos, se presentan a continuación resultados que ilustran distintos aspectos del modelo. Para cada condición de los parámetros se consideraron 200 realizaciones independientes con diferentes configuraciones iniciales. En adelante, los valores medios (notados con una barra sobre la magnitud a la que refieren, e.g. $\bar{x}$) y desvíos corresponden a los calculados sobre dichas realizaciones.

3.2.1. Mudanzas como costos

En los diversos contextos de aplicación o referencias del modelo de Schelling, cabe suponer que cada mudanza representa un costo para el agente involucrado. Si bien en

nuestra implementación no se penalizan los movimientos ni se definen reglas que los traten como tales, es posible darle este sentido a la interpretación y análisis de los resultados.

Costo social o comunitario

Definimos M como el cociente entre la cantidad total de mudanzas realizadas y la cantidad de agentes del sistema. Dicha magnitud representa las mudanzas per cápita y se interpreta como un índice del costo social global o comunitario necesario para alcanzar la configuración final.

Es interesante el comportamiento de M en relación a las distintas tolerancias y tamaños de las poblaciones. Se incluyen en la Tabla 3.1 los valores y parámetros correspondientes a estos costos medios máximos (máx($\bar{M}$)) y mínimos (mín($\bar{M}$)) para cada tolerancia T y $0.21 \leq \rho \leq 0.9$.

	máx($\bar{M}$)			**mín($\bar{M}$)**		
$\boldsymbol{T}$	valor	R	ρ	valor	R	ρ
0.40	7.152	0.05	0.21	0.061	0.05	0.43
0.45	5.567	0.05	0.21	0.063	0.05	0.44
0.50	1.171	0.05	0.21	0.083	0.05	0.49
0.55	1.176	0.05	0.21	0.083	0.05	0.50
0.60	1.017	0.05	0.21	0.086	0.05	0.52
0.65	1.030	0.05	0.21	0.087	0.05	0.52
0.70	0.738	0.50	0.21	0.111	0.05	0.56
0.75	0.988	0.50	0.21	0.131	0.05	0.60
0.80	1.500	0.50	0.21	0.138	0.05	0.61

Tabla 3.1: Valores máximos y mínimos del costo social medio.

Es inmediato observar que el mayor costo social medio se encuentra en $T = 0.4$ con un valor cercano a 7 para $R = 0.05$. Este resultado pueden ir en contra de la intuición que vincularía los mayores costos a la comunidad más intolerante; la razón de dicho comportamiento quedará clara cuando se analicen los costos de cada población por separado en el apartado siguiente.

Además, para distintos valores de tolerancia T, el costo social máximo se alcanza en distintos valores de R: si $0.4 \leq T \leq 0.65$ lo hace en $R = 0.05$ y si $0.7 \leq T \leq 0.8$, en $R = 0.5$. Dicho coloquialmente, para comunidades más tolerantes los costos sociales son mayores cuando hay una pronunciada disparidad entre los tamaños de las poblaciones roja y negra ($R = 0.05$); mientras que para las comunidades menos tolerantes los mayores costos sociales están asociados a tamaños equilibrados ($R = 0.5$).

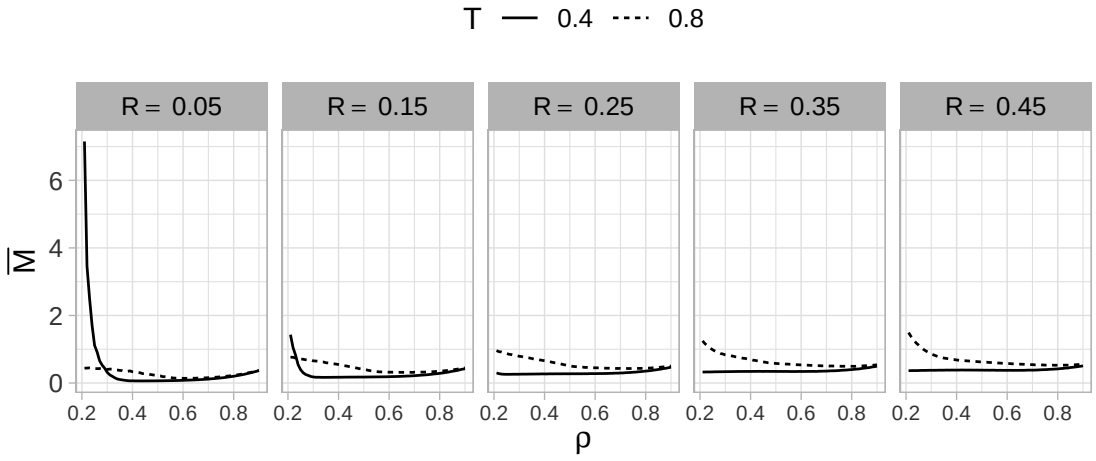


Figura 3.2: Costos sociales medios para dos valores de tolerancia ($T = 0.4$ y $T = 0.8$) y $0.21 \leq \rho \leq 0.9$.

Se muestra en la Figura 3.2 la relación entre $\bar{M}$ y ρ; el comportamiento general es que el costo social decrece al aumentar la densidad de ubicaciones vacías. Se observa, sin embargo, un leve crecimiento en la curva a partir de determinado valor de ρ que no se debe a un aumento en la cantidad total de mudanzas, sino a la relación entre la variación de ésta y la de la cantidad de agentes. En estos puntos donde la curva comienza a ser creciente se alcanzan, para todos los valores de T, los costos sociales mínimos; en $R = 0.05$ y valores de ρ que varían entre 0.43 y 0.61 (Tabla 3.1).

Costo por población

Para comprender un poco mejor el costo social o comunitario, se distinguen las mudanzas realizadas por cada una de las dos poblaciones. Se define M_r como el cociente entre la cantidad de mudanzas realizadas por agentes rojos y la cantidad total de agentes rojos y M_b como el cociente análogo para la población negra. Se interpretan estas magnitudes como costos per cápita por población y dado el dominio del parámetro R, M_r representa el costo de la población minoritaria. Además, la diferencia entre dichas magnitudes puede interpretarse como un índice de desigualdad. En la Figura 3.3 se muestran los costos para $\rho = 0.20$, en función de R, para distintas tolerancias.

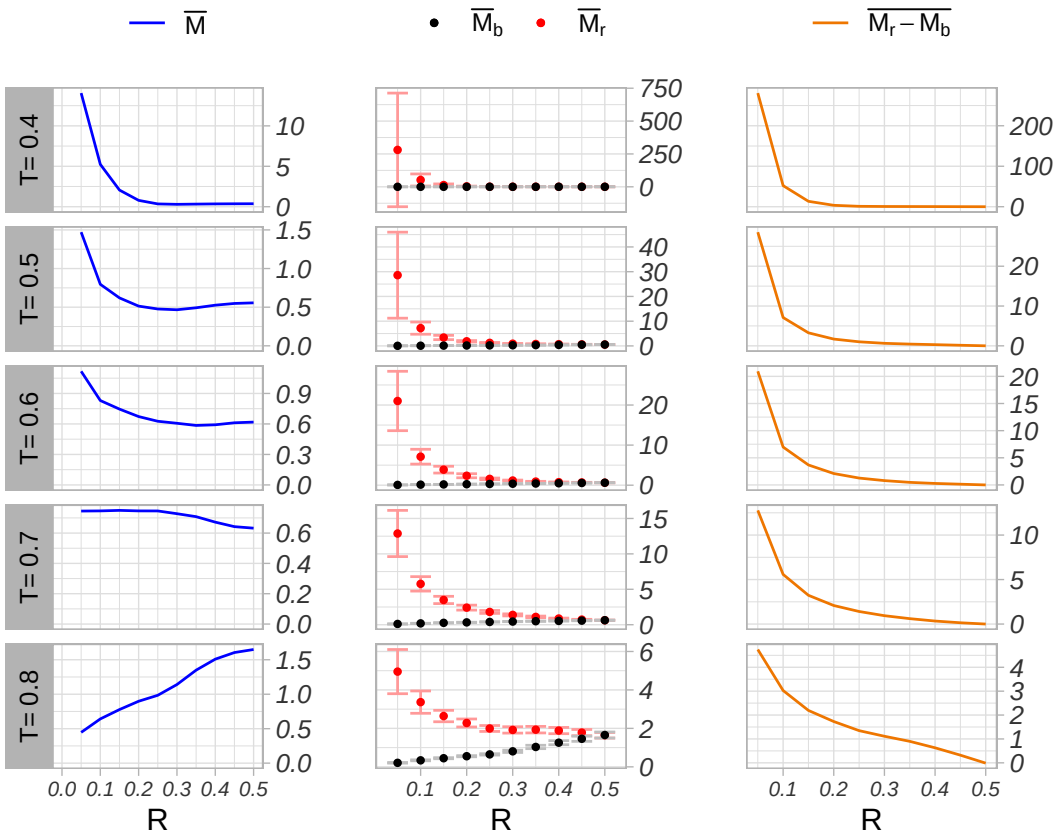


Figura 3.3: Comparación de los costos sociales medios y los costos por población medios para $\rho = 0.20$ y $T = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$.

Como es esperable, los costos de la población minoritaria superan a los de la mayoría en todos los casos y su diferencia es decreciente en R. Se observa además que dicha diferencia varía de magnitud significativamente para las distintas tolerancias T; basta ver en la tercera columna de la Figura 3.3 cómo, para $T = 0.4$, llega a ser mayor a 100 mientras que para $T = 0.8$ no supera el valor de 6. Queda en evidencia la razón por la cual los costos sociales son mayores para comunidades más tolerantes y poblaciones no equilibradas: la población minoritaria tiene costos medios tan elevados que, incluso representando un bajo porcentaje de la población total, sus mudanzas impactan en el costo social per cápita M, elevándolo. Lo que está ocurriendo es que, para T bajos, los agentes pertenecientes a una mayoría abrumadora están fácilmente satisfechos con el lugar que habitan y no se mudan o lo hacen muy poco durante la dinámica. La población minoritaria, en consecuencia, tiene dificultades para encontrar vecindades con suficientes espacios vacíos donde congregarse y de ahí que sus costos se eleven. Debe tenerse en cuenta que la distribución inicial de las ubicaciones vacías es al azar y esto

cumple un rol determinante para que dicho fenómeno ocurra.

Para completar, en la Figura 3.4 se muestran los costos medios por población para $T = 0.65$ con sus desvíos y distintos valores de ρ; el tipo de curvas que se obtienen para otras tolerancias T son similares a este caso, variando fundamentalmente la escala.

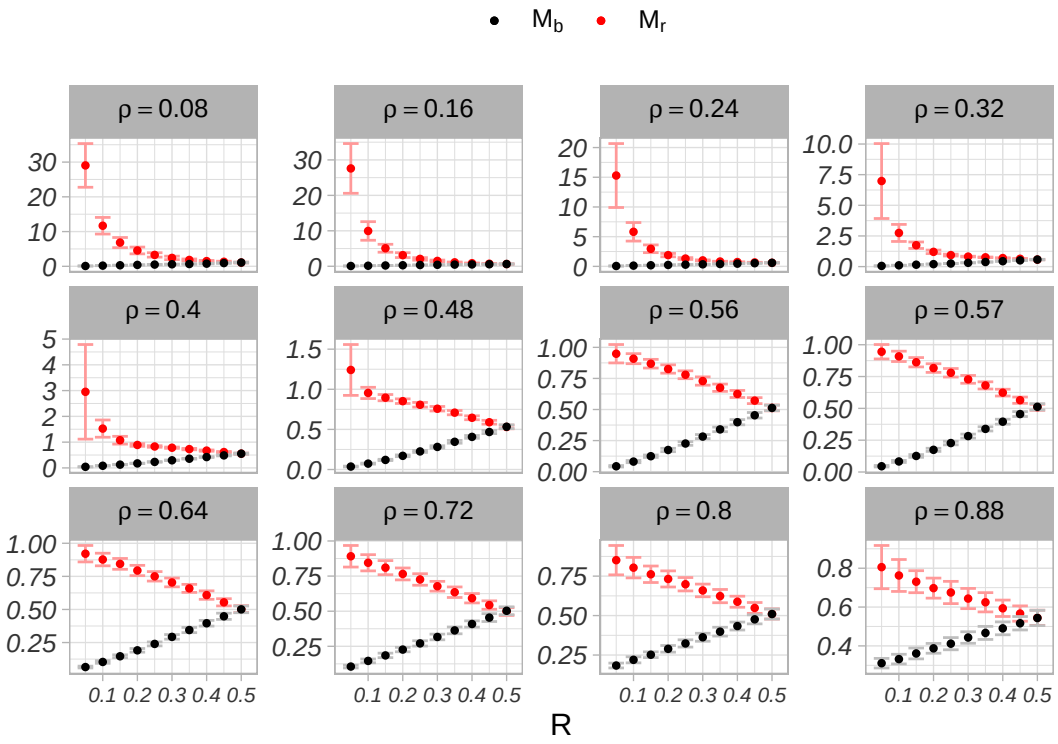


Figura 3.4: Costos medios y desvíos por población para $T = 0.65$.

Finalmente, en el Tabla 3.2 se muestran los valores medios (con sus desvíos) y los máximos correspondientes a las diferencias de los costos entre las poblaciones de cada tipo y puede verse cómo los costos se reparten más equitativamente entre las poblaciones si los niveles de discriminación son más estrictos ($T = 0.8$). Es decir, altos valores de T representan un escenario más equitativo en términos de minimizar la diferencia de los costos promedio por población.

Se podría continuar el análisis identificando la distribución de los costos a nivel individual y/o estableciendo índices de desigualdad más descriptivos y precisos. Sin embargo, escapa al foco de esta tesis que se vincula más estrechamente con otras características del modelo.

	$\overline{M_r - M_b}$		
T	media	desvío	máximo
0.40	1.156	6.697	142.723
0.45	1.031	5.433	110.893
0.50	0.716	1.632	22.587
0.55	0.720	1.664	22.672
0.60	0.806	1.748	18.926
0.65	0.825	1.822	19.134
0.70	0.770	1.426	12.543
0.75	0.650	0.937	7.389
0.80	0.601	0.752	4.612

Tabla 3.2: Diferencias medias de los costos por población para las distintas tolerancias.

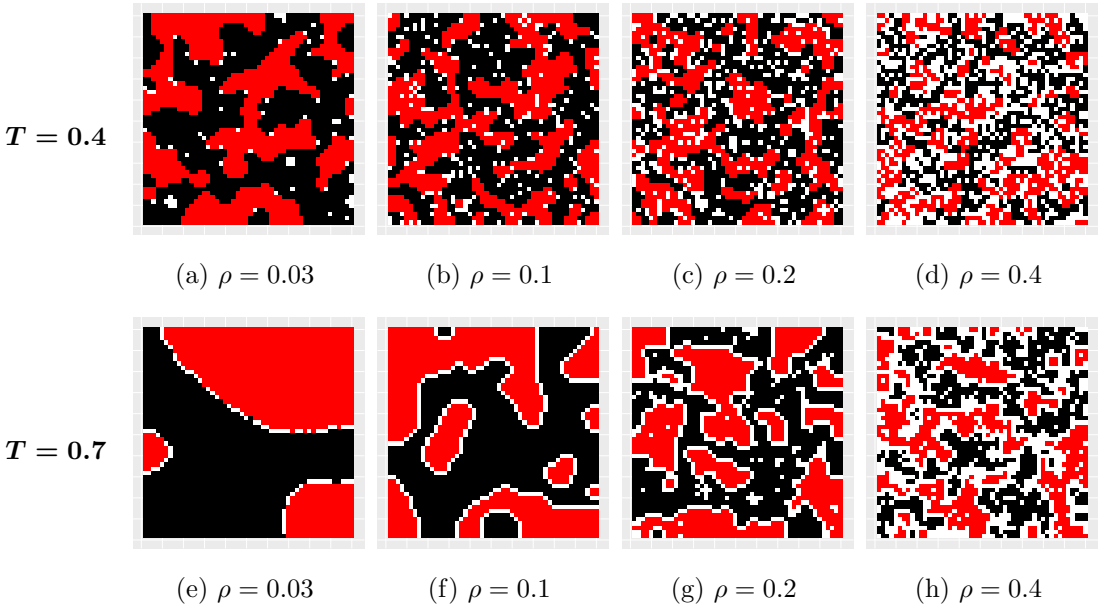
3.2.2. El rol de las ubicaciones vacías en las configuraciones finales

En la sección anterior se muestran resultados vinculados a ciertos aspectos de la dinámica del sistema pero nada hemos dicho aún sobre los estados finales alcanzados.

Un enfoque frecuentemente utilizado para la caracterización de las configuraciones finales en modelos del tipo de proximidad de Schelling consiste en definir una o varias medidas de segregación sobre estas configuraciones que permitan además distinguir fases del sistema. Se citan a continuación algunos trabajos relevantes.

En [25] utilizan seis medidas distintas de segregación. Se retoman las dos definidas por el propio Schelling en [29] (nombradas como *share* y *ghetto rate*) y se incluyen otras vinculadas al número de clusters, a la relación entre las distancias mínimas entre dos agentes del mismo y de distinto tipo; a los desvíos de cada vecindad de una composición 50/50 y a la cantidad de cambios en los tipos de los agentes que se producen al recorrer cada vecindad. Por su parte, en [15] se toma una idea de la teoría de percolación y se trabaja con la medida s: un promedio pesado del tamaño de los clusters normalizado por el tamaño maximal. En [20], la segregación se mide a partir de la *contact density*, definida como el promedio sobre todas las ubicaciones ocupadas del cociente entre la cantidad de vecinos del tipo opuesto y el total de vecinos. Se normaliza dicha magnitud por 1/2 para que sea cercana a 1 cuando se trate del caso bien integrado y 0 para el extremo completamente segregado.

En esta tesis se proponen herramientas que apuntan a caracterizar las configuraciones finales atendiendo específicamente al rol que cumplen las ubicaciones vacías.



(a) $\rho = 0.03$ (b) $\rho = 0.1$ (c) $\rho = 0.2$ (d) $\rho = 0.4$

(e) $\rho = 0.03$ (f) $\rho = 0.1$ (g) $\rho = 0.2$ (h) $\rho = 0.4$

Figura 3.5: Configuraciones finales para $R = 0.45$. En (a)(b)(c)(d) la tolerancia es $T = 0.4$ y en (e)(f)(g)(h) la tolerancia es $T = 0.7$.

En los mapas finales de la Figura 3.5 correspondientes a la tolerancia $T = 0.7$ se ve cómo las ubicaciones vacías demarcan los límites entre las regiones que ocupa cada población: constituyen una zona "neutral" que se interpone entre agentes de distinto tipo y hacen posible que los umbrales de satisfacción sean alcanzados por aquellos agentes que están sobre los bordes de los clusters. Además, para los valores de ρ mayores ($\rho = 0.2, 0.4$), existen ubicaciones vacías no sólo en los bordes sino también en el interior de los clusters. Por el contrario, al observar los mapas finales correspondientes a $T = 0.4$ no se percibe una tendencia tan evidente respecto al lugar donde quedan localizadas las ubicaciones vacías para ninguno de los valores de ρ. Estas observaciones motivan las siguientes definiciones:

Definición 3.2.1. Una ubicación vacía se considera **ganada por la población *c*** si todos sus vecinos son agentes de tipo c. Si la ubicación vacía no tiene agentes vecinos diremos que es **ganada por vacíos**. Para cada configuración final se considera:

$$W_r := \frac{\#\{\text{ubicaciones ganadas por la población roja}\}}{\#\{\text{ubicaciones vacías}\}}$$

$$W_b := \frac{\#\{\text{ubicaciones ganadas por la población negra}\}}{\#\{\text{ubicaciones vacías}\}}$$

$$W_e := \frac{\#\{\text{ubicaciones ganadas por vacíos}\}}{\#\{\text{ubicaciones vacías}\}}$$

Notar que los denominadores son conocidos y equivalen a $\rho \times L^2$. La idea detrás de estas definiciones es poder distinguir en los mapas finales aquellas ubicaciones vacías que al tener vecinos de un único tipo pueden considerarse como parte del territorio dominado por la población de ese tipo. De hecho, una ubicación vacía ganada por la población c satisface las preferencias de los agentes del tipo c para cualquiera de los valores de T, puesto que la proporción de vecinos de dicho tipo respecto del total de vecinos equivale a 1. De esta manera y siguiendo las reglas del modelo, una ubicación ganada por la población c puede ser ocupada únicamente por agentes de tipo c. Si bien en el modelo implementado la cantidad de agentes de cada tipo es invariante, se podrían interpretar los índices W_r y W_b como indicadores de parte de la capacidad que posee el sistema para alojar nuevos agentes rojos y negros respectivamente. Las ubicaciones ganadas por vacíos son regiones que localmente no quedan bajo la influencia de ninguna de las poblaciones.

Para el caso de las ubicaciones vacías que tienen agentes vecinos de ambos tipos, se define:

Definición 3.2.2. Una ubicación es considerada **frontera** si se cumple simultáneamente que:

i) la cantidad de agentes *rojos* en su vecindad es > 0.

ii) la cantidad de agentes *negros* en su vecindad es > 0.

iii) puede trazarse una línea recta que separe a los agentes vecinos por tipo, a uno y otro lado de la línea, en al menos una de las cuatro direcciones posibles: horizontal, vertical, diagonal creciente, diagonal decreciente.

Definición 3.2.3. Para cada configuración final se define el *índice de frontera de las ubicaciones vacías* como:

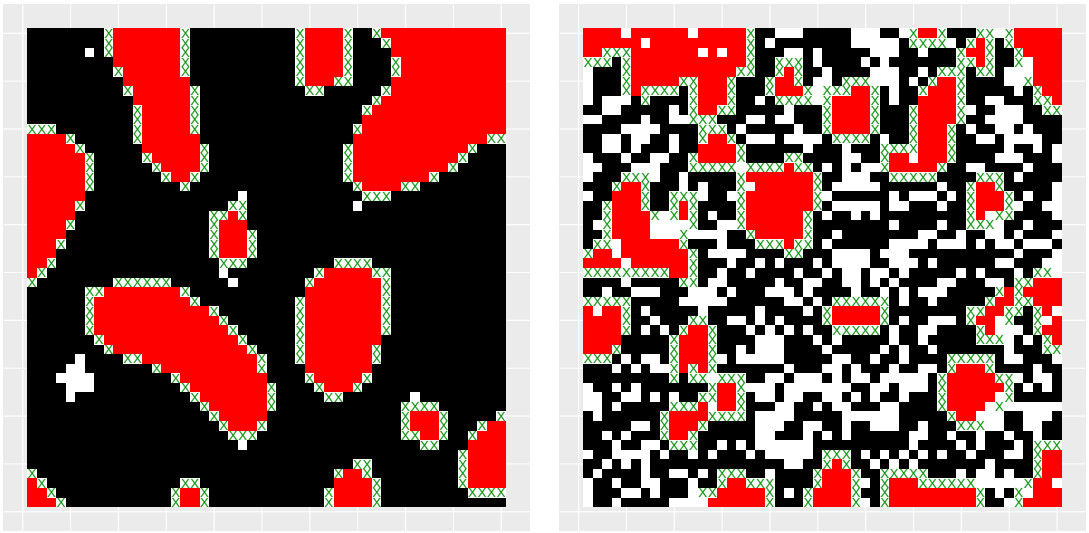
$$B_e := \frac{\#\{\text{ubicaciones vacías fronteras}\}}{\#\{\text{ubicaciones vacías}\}}$$

Cabe aclarar que para casi todas las instancias vale que

$$W_r \; + \; W_b \; + \; W_e \; + \; B_e \; \approx 1. \tag{3.2.1}$$

Esta aproximación es razonablemente buena siempre que $T \geq 0.5$. Para las tolerancias menores ($T = 0.4, 0.45$) existen regiones de parámetros donde la suma de las cuatro magnitudes se aleja del valor 1: para densidades de vacíos bajas la suma decrece y alcanza un valor mínimo de 0.85 para $T = 0.4$ y de 0.9 para $T = 0.45$.

En la Figura 3.6 se muestran a modo de ejemplo dos configuraciones finales correspondientes a $T = 0.6$ donde se señalan mediante cruces aquellas ubicaciones que son frontera y los valores de los cuatro índices correspondientes.



(a) $\rho = 0.09$. (b) $\rho = 0.39$

Figura 3.6: Configuraciones finales para $T = 0.6$ y $R = 0.3$; se señalan con una cruz las ubicaciones vacías frontera. Los valores de los índices son:
(a) $B_e = 0.98$, $W_b = 0.02$, $W_r = 0$, $W_e = 0$
(b) $B_e \approx 0.39$, $W_b \approx 0.57$, $W_r \approx 0.03$ y $W_e \approx 0.01$.

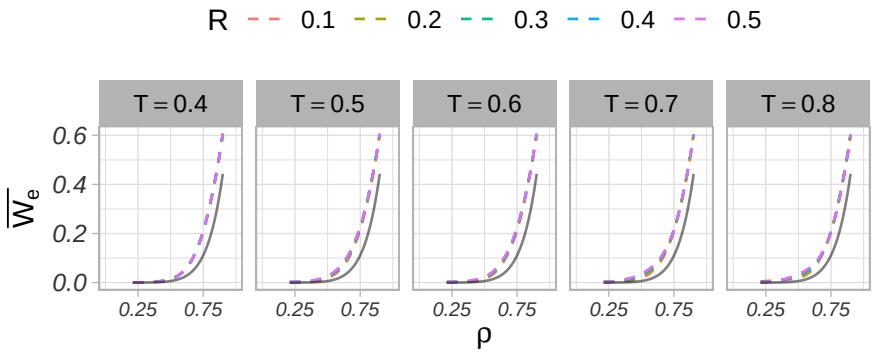
A partir de esta categorización de las ubicaciones vacías y de los índices definidos, se analizaron las configuraciones finales.

W_e: ubicaciones vacías ganadas por vacíos

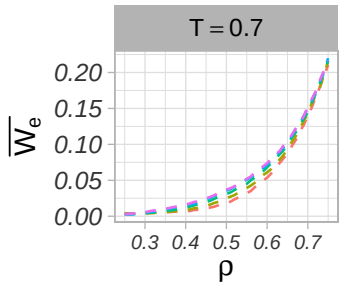
Cabe hacer una primera observación acerca de W_e y es que su dependencia respecto de los parámetros T y R es despreciable, tal como se muestra en la Figura 3.7. Por el contrario, si se tiene en cuenta que $\bar{W}_e$ aproxima la probabilidad de que en una configuración final una ubicación vacía no posea agentes vecinos; es esperable que su valor aumente al crecer ρ. Más aún, se puede comparar la magnitud $\bar{W}_e$ con

$$p := \frac{4}{L^2}\rho^3 + \frac{4(L-2)}{L^2}\rho^5 + \frac{(L-2)^2}{L^2}\rho^8,$$

una cota superior para dicha probabilidad correspondiente a una configuración distribuida al azar en el sistema. En la Figura 3.7 (a) se grafica p para $L = 50$ con una línea continua y se muestra cómo, al quedar por debajo de la curva de $\bar{W}_e$, la probabilidad de que un vacío no posea agentes vecinos aumenta luego de la dinámica.



(a)



(b)

Figura 3.7:
(a) Comparación entre $\bar{W}_e$ y la cota para la probabilidad de que una ubicación vacía no tenga agentes vecinos en una configuración distribuida al azar.
(b) Detalle para $T = 0.7$ donde puede apreciarse cierta variación de $\bar{W}_e$ para los distintos valores de R.

Los índices W_r, W_b y B_e

Nos centramos entonces en estudiar el comportamiento de los índices W_r, W_b y B_e. Se muestra en la Figura 3.8 la relación entre sus medias; estas curvas sintetizan gran parte de los resultados que se incluyen en esta sección y constituyen los elementos a partir de lo cuales caracterizamos las configuraciones finales.

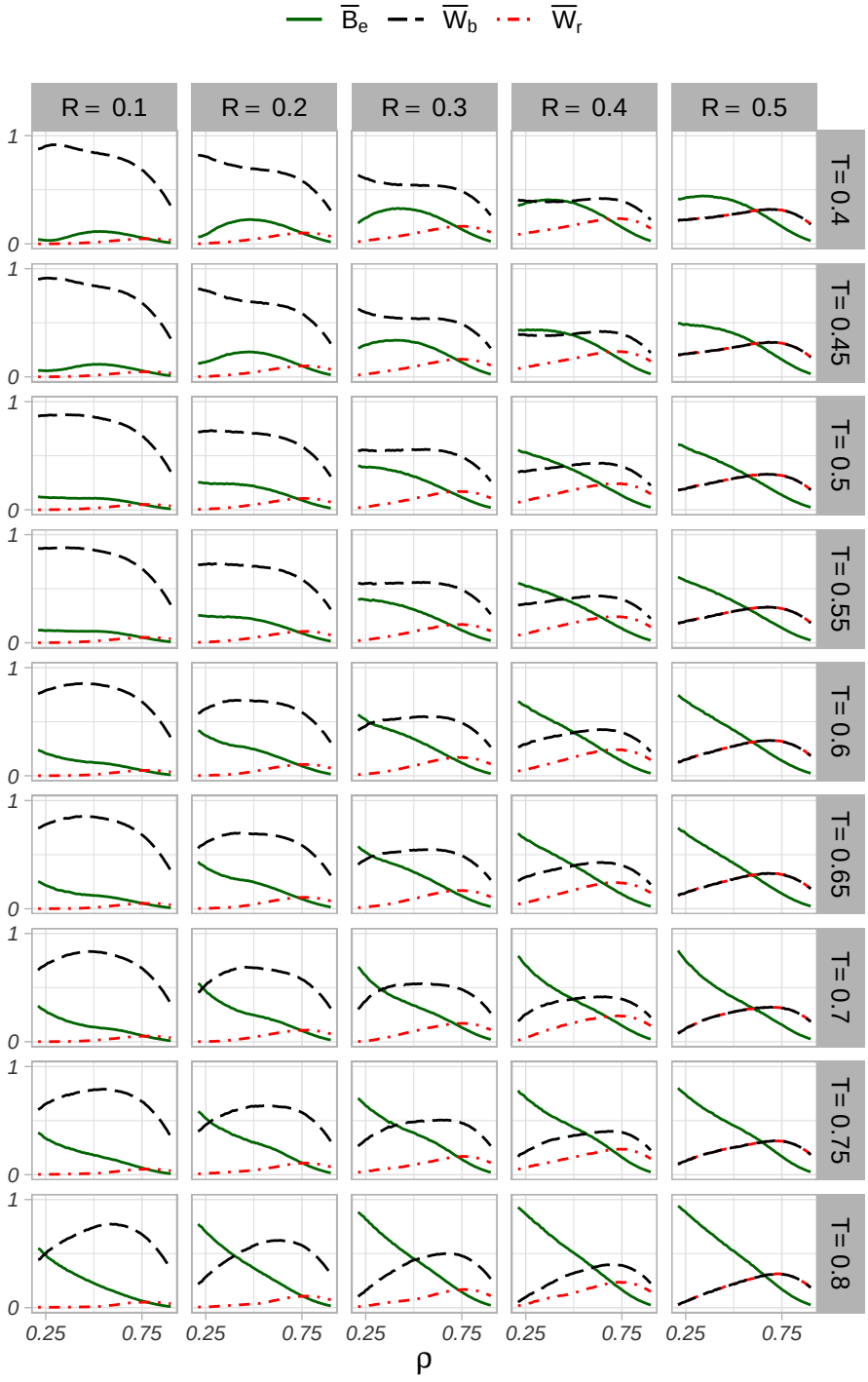


Figura 3.8: Valores de $\bar{B}_e$, $\bar{W}_b$ y $\bar{W}_r$ para $0.21 \leq \rho \leq 0.9$

W_r: vacíos ganados por la población minoritaria

Si se compara el comportamiento de $\bar{W}_r$ para las distintas tolerancias observamos que las curvas son muy parecidas, principalmente para los valores de R más bajos. En particular, el valor máximo alcanzado para cada valor de R no se modifica significativamente al variar el parámetro T y corresponde en todos los casos a densidades de vacíos que están entre 0.68 y 0.78. Es decir que la proporción máxima de ubicaciones vacías ganadas por la población minoritaria es independiente de la tolerancia de los agentes del sistema (Figura 3.9).

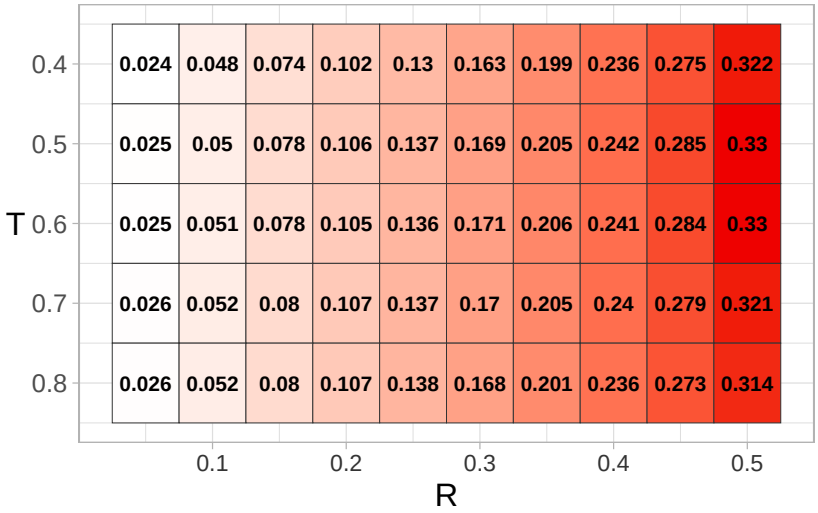


Figura 3.9: Valores correspondientes a máx($\bar{W}_r$) para $0.21 \leq \rho \leq 0.9$.

(a) $T = 0.4$ (b) $T = 0.65$ (c) $T = 0.8$

Figura 3.10: Mapas finales para $\rho = 0.28$ y $R = 0.3$. Los valores de los índices que corresponden a cada tolerancia son:
(a) $W_r = 0.024,\ W_b = 0.616,\ B_e = 0.264$
(b) $W_r = 0.019,\ W_b = 0.45\ ,\ B_e = 0.53$
(c) $W_r = 0.023,\ W_b = 0.25\ ,\ B_e = 0.723.$

En la Figura 3.10 se muestran mapas de configuraciones finales para distintos valores de T donde el valor de la magnitud W_r tiene muy poca variación. Sin embargo, los valores de los índices W_b y B_e presentan mayor sensibilidad a los cambios en la tolerancia.

W_b: vacíos ganados por la población mayoritaria

En cuanto a la población mayoritaria notamos que es capaz de ganar ubicaciones vacías en las configuraciones finales para casi todas las instancias del modelo. Incluimos en la Figura 3.11 los valores medios mínimos de W_b correspondientes a cada par (T, R) para $T = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.8.

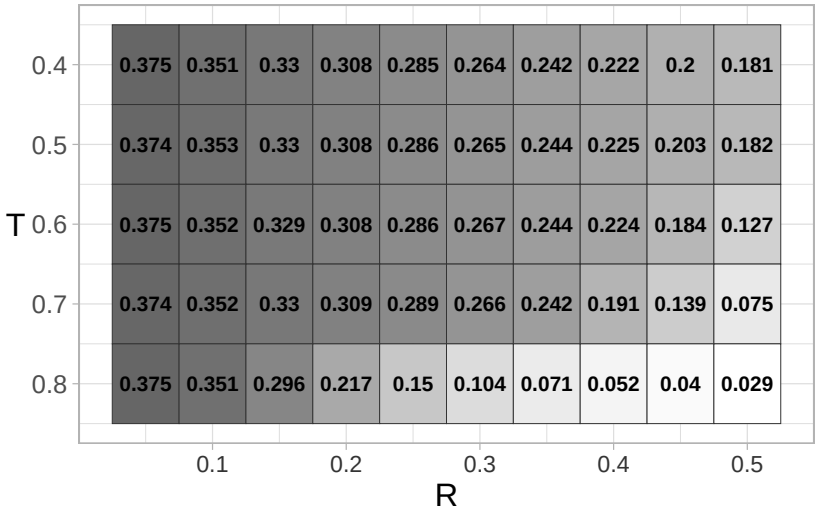


Figura 3.11: Valores correspondientes al mín($\bar{W}_b$) para $0.21 \leq \rho \leq 0.9$.

Se observa en esta figura (Figura 3.11) cómo efectivamente los mínimos de $\bar{W}_b$ se encuentran lejos del cero para la gran mayoría de los casos y que los escenarios más desfavorables para la población mayoritaria en términos de proporción de vacíos ganados en configuraciones finales corresponden a los valores de T más estrictos. Además, la manera en que el mín($\bar{W}_b$) decrece como función de R no es igual para todas las tolerancias: dicho decrecimiento es más pronunciado para las tolerancias mayores. Este cambio que se percibe para los sistemas con agentes más exigentes se vincula con lo que ocurre con el valor de B_e en esta región de parámetros y se analiza en una apartado que trata la relación entre W_b y B_e.

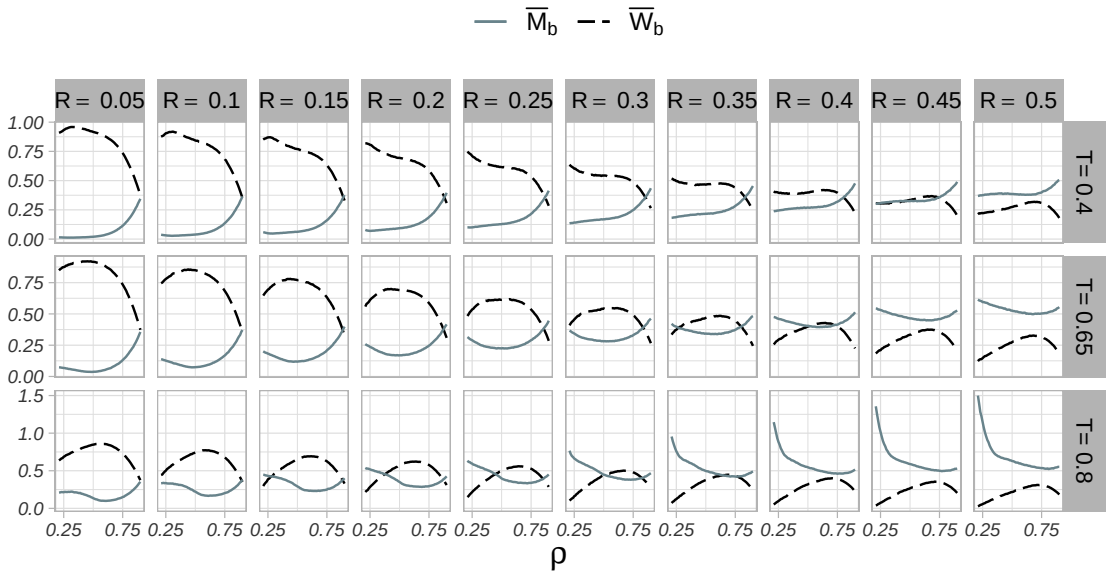


Figura 3.12: Comparación entre $\bar{W}_b$ y $\bar{M}_b$.

Por otro lado, en la Figura 3.12 se muestra el detalle de las curvas correspondientes a $\bar{W}_b$ para $T = 0.4, 0.65, 0.8$ y su comparación con los costos de la población mayoritaria, $\bar{M}_b$. En cada gráfico de dicha figura se observa que los mínimos costos están asociados a los máximos valores de $\bar{W}_b$ y que dicho índice de ubicaciones vacías ganadas disminuye cuando los costos aumentan.

Los índices W_r y W_b: comparación

Resulta intuitivo que la magnitud $\bar{W}_b$ asociada a las ubicaciones vacías ganadas por la población mayoritaria (para $R < 0.5$) supere a $\bar{W}_r$ y que, teniendo en cuenta la simetría que existe entre ambos tipos de población, los valores de $\bar{W}_b$ y $\bar{W}_r$ se acerquen a medida que R crece hasta llegar a coincidir para $R = 0.5$; tal como muestra la Figura 3.8. Para ayudar a interpretar las diferencias en los comportamientos observados entre ambas magnitudes, definimos un valor de referencia para la densidad de vacíos vinculado con la proporción final de agentes insatisfechos I. Nos interesa distinguir los casos donde $I = 0$; es decir, donde el total de los agentes está satisfecho al terminar la simulación. Calculamos la media $\bar{I}$ para cada combinación de parámetros y definimos para cada par (T, R):

$$\rho_{\text{máx}}^{\text{T,R}} := \max_{\rho}\{\bar{I} > 0\}$$

En adelante, para simplificar la notación, se escribirá directamente $\rho_{\text{máx}}$. Se incluye en la Figura 3.13 el detalle de las curvas de $\bar{W}_r$ y $\bar{W}_b$ con los valores de $\rho_{\text{máx}}$ correspondientes para el caso en que $T = 0.65$, aunque el resultado es análogo para el resto de las tolerancias.

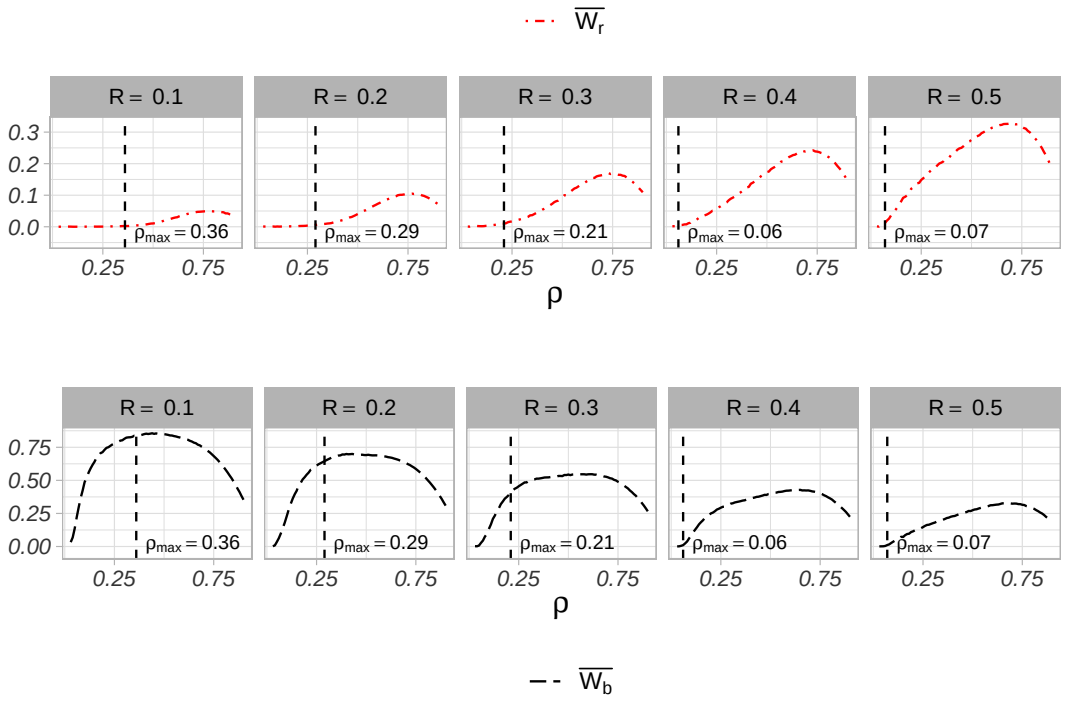


Figura 3.13: Valores de $\bar{W}_r$ y $\bar{W}_b$ para $T = 0.65$, $0.03 \leq \rho \leq 0.9$.

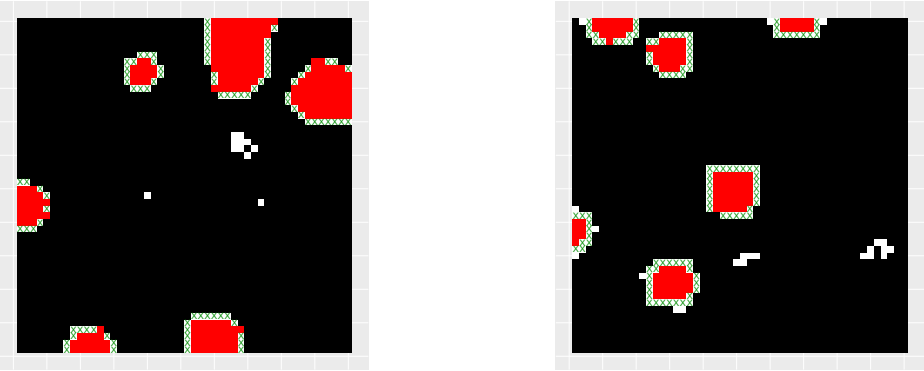
La caída que se observa en las curvas de $\bar{W}_r$ y $\bar{W}_b$ para valores de ρ altos se vincula con la relación establecida en (3.2.1) y el crecimiento de $\bar{W}_e$ representado en la Figura 3.7. En estas instancias de altas densidades de espacios vacíos, un aumento en el valor de ρ se traduce en las configuraciones finales en un aumento en la frecuencia de las ubicaciones ganadas por vacíos y una consecuente disminución de la proporción de vacíos ganados por cualquiera de las dos poblaciones.

En cuanto a W_r, por su parte, se observa que el valor medio es cercano o igual a cero para valores de ρ bajos y, si se considera el valor de referencia $\rho_{\text{máx}}$, la magnitud tiene un marcado crecimiento una vez superado dicho umbral. Es decir, la proporción de ubicaciones vacías ganadas por la población roja aumenta considerablemente cuando la satisfacción del total de los agentes se alcanza. Para W_b el comportamiento es distinto: existen algunas escasas instancias con $\bar{W}_b$ cercano a cero pero en general la población negra gana ubicaciones vacías en las configuraciones finales.

Para comprender la relación entre el crecimiento de W_r y el valor del $\rho_{\text{máx}}$ basta recordar que las ubicaciones ganadas por la población roja satisfacen las preferencias de los agentes rojos y, por lo tanto, la ausencia de agentes insatisfechos de este tipo posibilita que ubicaciones vacías ganadas por la población roja se mantengan desocupadas en las configuraciones finales. Cabe aclarar que en la definición del $\rho_{\text{máx}}$ se involucra la proporción final de agentes insatisfechos I que no distingue entre tipos de agentes, pero

para $R << 0.5$ dichos insatisfechos corresponden a la minoría roja y, por lo tanto, no se percibe la misma relación entre el $\rho_{\text{máx}}$ y el crecimiento de $\bar{W}_b$ para dichos valores de R.

Al analizar algunos de los mapas correspondientes a las densidades de vacíos que se encuentran por debajo del valor de $\rho_{\text{máx}}$ correspondiente se ve en concreto cómo para determinadas configuraciones finales existen ubicaciones vacías ganadas por la población mayoritaria que no pueden ser aprovechadas por la minoría para lograr que parte de sus agentes insatisfechos alcance el umbral de satisfacción. La Figura 3.14 muestra un ejemplos de esta situación.



(a) $T = 0.65, \rho = 0.04, R = 0.1$ (b) $T = 0.75, \rho = 0.05, R = 0.05$

Figura 3.14: (a) $B_e = 0.89$, $W_b = 0.11$ y hay 8 agentes rojos insatisfechos. (b) $B_e = 0.824$, $W_b = 0.176$ y hay 4 agentes rojos insatisfechos.

Ganancia promedio por población

Finalmente, para cuantificar la desigualdad vinculada a la capacidad de los agentes de cada una de las poblaciones de ganar ubicaciones vacías en las configuraciones finales, se define la *ganancia promedio* de cada población como el territorio de vacíos ganado per cápita:

$$G_r := \frac{\#\{\text{ubicaciones ganadas por la población roja}\}}{\#\{\text{agentes rojos}\}}$$

$$G_b := \frac{\#\{\text{ubicaciones ganadas por la población negra}\}}{\#\{\text{agentes negros}\}}$$

Se incluyen en la Tabla 3.3 los valores medios (con sus desvíos) y máximos correspondientes a la diferencia de estas magnitudes. Los valores máximos son similares para los distintos casos estudiados, pero en promedio la diferencia es mayor en las comunidades más tolerantes.

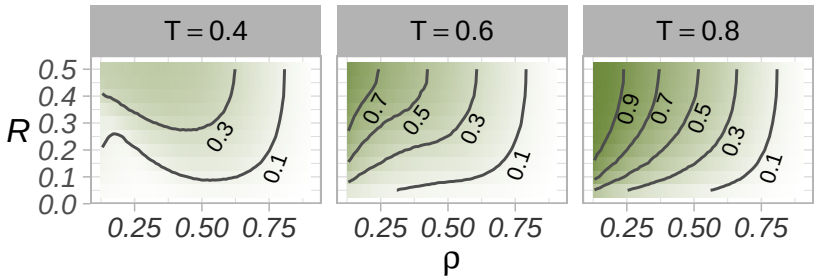
	$\overline{G_b - G_r}$		
T	media	desvío	máximo
0.40	0.4140	0.2811	1.0490
0.45	0.4147	0.2812	1.0442
0.50	0.3887	0.2724	1.0478
0.55	0.3891	0.2729	1.0372
0.60	0.3889	0.2783	1.0687
0.65	0.3889	0.2791	1.0586
0.70	0.3629	0.2646	1.0208
0.75	0.3397	0.2630	1.0317
0.80	0.3221	0.2715	1.0476

Tabla 3.3: Diferencias entre ganancias promedio de cada población.

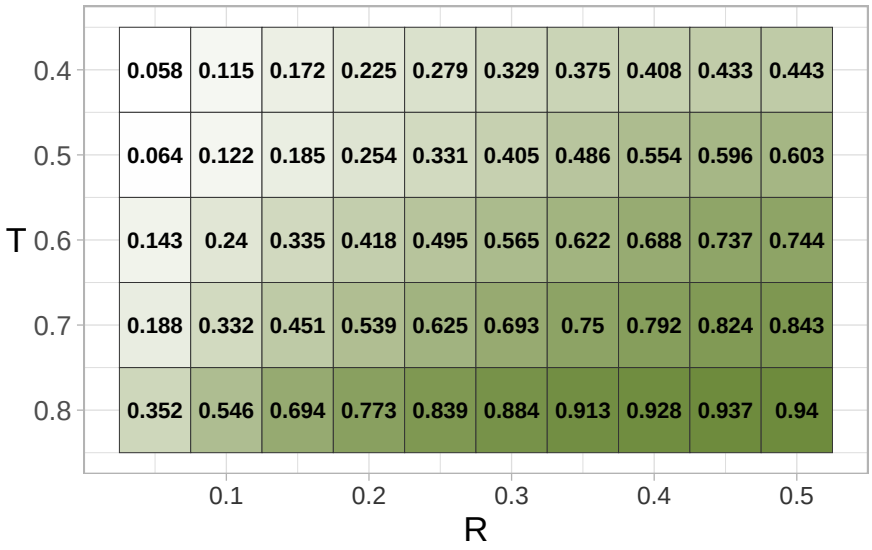
B_e: ubicaciones vacías como frontera

Nuestro interés particular al analizar el índice de frontera B_e está en comprender en qué medida las ubicaciones vacías están separando a los agentes por tipo en las configuraciones finales para los distintos parámetros del modelo y especialmente en relación a T.

En principio, los resultados que se observan en la Figura 3.8 para el índice de frontera son acordes a las expectativas: el valor de $\bar{B}_e$ crece con T y con R. Es decir, mayores índices de frontera corresponden a comunidades más intolerantes y/o a tamaños de poblaciones equilibrados. En la Figura 3.15 se presentan los mismos resultados para las tolerancias $T = 0.4, 0.6, 0.8$ mediante curvas de nivel de $\bar{B}_e$ y se muestran los valores máximos alcanzados por el índice de frontera medio para cada par (T, R) con $T = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$.



(a) Curvas de nivel para $\bar{B}_e$ y $T = 0.4, 0.6, 0.8$.



(b) Valores correspondientes al $max(\bar{B}_e)$ para $0.21 \leq \rho \leq 0.9$.

Figura 3.15

Es fácil notar que para tolerancias más bajas, existe una mayor cantidad de distribuciones posibles para agentes satisfechos en vecindades mixtas que no poseen ubicaciones vacías. Por ejemplo, la Figura 3.16 muestra dos casos en donde la proporción de vecinos del mismo tipo respecto del total de vecinos en las vecindades mixtas equivale a $5/8 = 0.625$ y , por lo tanto, dichas distribuciones satisfacen a los agentes para $T \leq 0.6$. En este sentido se espera que el índice de frontera sea menor al disminuir el parámetro T y que incluso se pueda observar en ciertos mapas finales la presencia de segregación sin que las ubicaciones vacías estén cumpliendo el rol de frontera, tal como ocurre en el mapa (a) de la Figura 3.10 para $T = 0.4$.

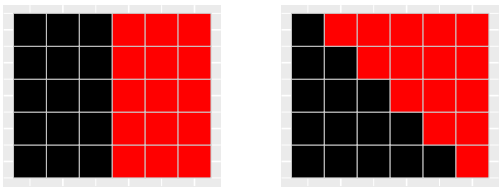


Figura 3.16: Configuraciones con vecindades mixtas que satisfacen a los agentes para $T \leq 0.6$.

Relación entre B_e y W_b

Por otra parte, si se tiene en cuenta la relación establecida en (3.2.1) para los cuatro índices definidos y el comportamiento de W_e expuesto en la Figura 3.7, es inmediato que $W_r + W_b + B_e \approx 1 - W_e$ toma un valor casi constante para cada valor de ρ fijo. Se observa para todos los ρ estudiados que ante la variación del parámetro R, el aumento de la magnitud B_e trae aparejado una disminución de W_b pero no de W_r (Figura 3.17). Es decir, para una densidad de ubicaciones vacías fija, el territorio de vacíos ganado por la población mayoritaria se reduce cuando los tamaños de ambas poblaciones son más cercanos y se requieren mayores fronteras de vacíos para lograr la satisfacción de los agentes. El impacto sobre el valor W_b es mayor para las tolerancias más estrictas puesto que B_e alcanza valores más altos y esto explica el comportamiento observado para el mín$(\bar{W}_b)$ en la Figura 3.11.

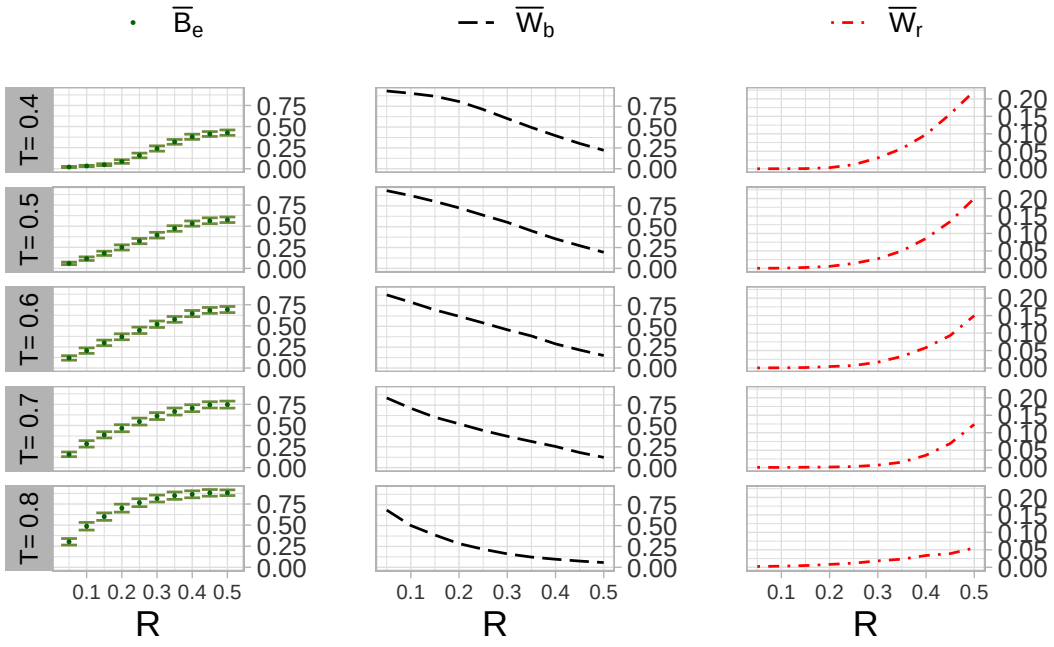


Figura 3.17: Valores de $\bar{B}_e$, $\bar{W}_b$ y $\bar{W}_r$ para $\rho = 0.25$. La suma de $W_r + W_b + B_e \approx 0.98$

Relación entre B_e y una configuración al azar

Finalmente notamos que las curvas de $\bar{B}_e$ en la Figura 3.8 son cualitativamente distintas para las diferentes tolerancias: la monotonía decreciente de $\bar{B}_e$ como función de ρ no es válida para $T = 0.4$ ni para $T = 0.45$ pero sí para el resto de los valores. En particular, observamos las densidades de ρ que maximizan $\bar{B}_e$ para cada par (T, R) e incluimos algunos ejemplos en la Figura 3.18.

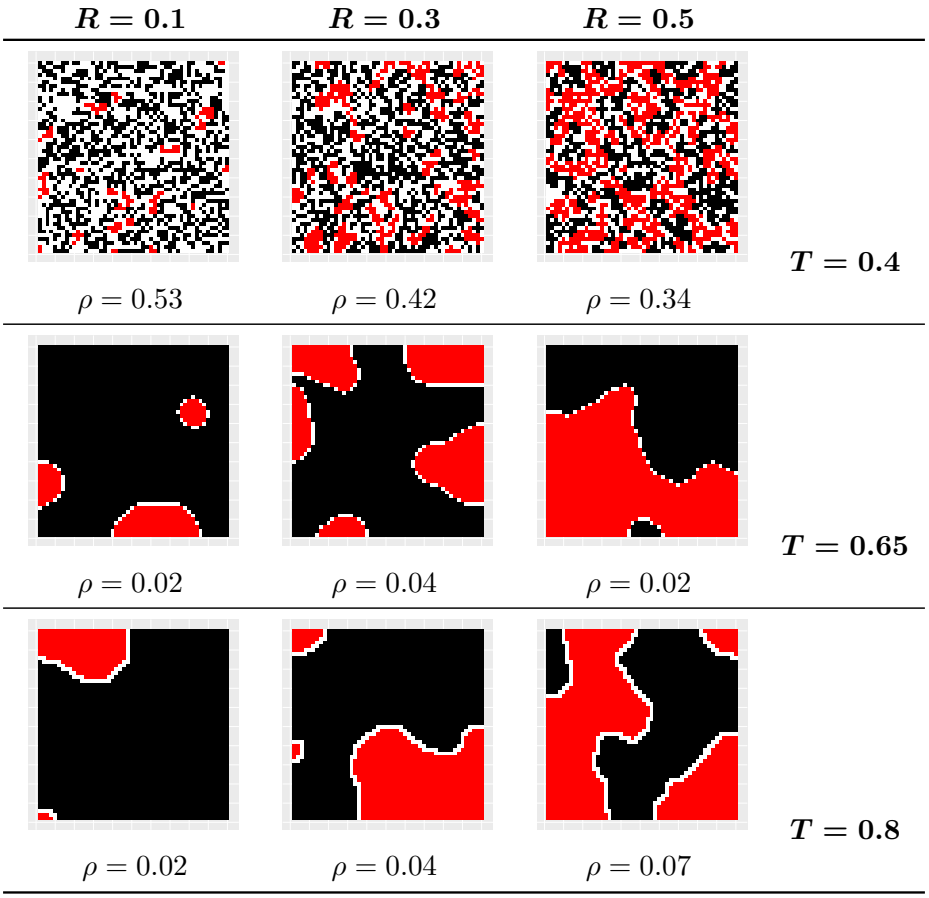


Figura 3.18: Mapas finales correspondientes al $max(\bar{B_e})$ para $\rho_0(T, R) \leq \rho \leq 0.9$

Al observar estas configuraciones finales que maximizan el índice de frontera para cada (T, R), resulta evidente que para $T = 0.4$ el índice de frontera se está maximizando sin que se perciba en las configuraciones finales ningún patrón en la localización de las ubicaciones vacías; mientras que para $T = 0.65$ y 0.8, la formación de fronteras de vacíos es muy clara. Esto motiva que se intente comparar los resultados correspondientes a B_e para las tolerancias más bajas con el valor esperado de dicho índice en una configuración distribuida al azar.

Calculamos el valor esperado de B_e para una configuración aleatoria con parámetros (L, ρ, R) como la probabilidad de que una ubicación vacía l de dicha configuración cumpla con la definición de frontera. Se asume que l es una ubicación interior de la cuadrícula pues se desestiman los casos de los bordes o esquinas por ser eventos de baja probabilidad para $L = 50$. Sean r y b las variables que representan la cantidad de agentes rojos y la cantidad de agentes negros presentes en la vecindad de l, respectivamente. Es claro que

para $0 \leq i \leq 8$ y $0 \leq j \leq 8 - i$:

$$P(\{r = i, b = j\}) = \frac{\binom{(1-\rho)L^2R}{i} \times \binom{(1-\rho)L^2(1-R)}{j} \times \binom{\rho L^2 - 1}{8-i-j}}{\binom{L^2-1}{8}} \tag{3.2.2}$$

Además, como la definición de frontera depende fuertemente de la manera en que se ordenan dentro la vecindad de l los tipos de agentes, revisamos de manera exhaustiva mediante un breve algoritmo de fuerza bruta las permutaciones correspondientes a cada par de valores (r, b) fijo para determinar en cuántas de ellas la ubicación l es frontera. En realidad, no es necesario analizar todos los casos puesto que existen valores de (r, b) para los cuales l no es frontera trivialmente.

> Si $r = 0$ ó $b = 0$ ó $r = 8$ ó $b = 8$, la ubicación l no posee vecinos de ambos tipos y, por lo tanto, no es frontera.
>
> Si $6 \leq r \leq 7$ ó $6 \leq b \leq 7$ y la ubicación l posee vecinos de ambos tipos, no es posible separar por tipo a los vecinos de l en dos regiones disjuntas de tres ubicaciones cada una y, por lo tanto, l no es frontera.

Para los valores restantes se usa la simetría que existe en la definición de frontera para ambos tipos de agentes y se revisan únicamente las permutaciones correspondientes a trece pares (r, b) con $1 \leq i \leq 5$, $i \leq j \leq 5$ y $i + j \leq 8$. Se obtienen como resultado los valores de la probabilidad condicional $P(\{l\, sea\, frontera\} \mid \{r = i, b = j\})$ que se vuelcan en la tabla siguiente:

		r								
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	5/7	5/7	22/35	13/35	1/7	0	0	-
	2	0	5/7	18/35	3/7	2/7	1/7	0	-	-
	3	0	22/35	3/7	3/10	1/5	1/7	-	-	-
b	**4**	0	13/35	2/7	1/5	4/35	-	-	-	-
	5	0	1/7	1/7	1/7	-	-	-	-	-
	6	0	0	0	-	-	-	-	-	-
	7	0	0	-	-	-	-	-	-	-
	8	0	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.4: Valores de $P(\{l\, sea\, frontera\} \mid \{r = i, b = j\})$ para l una ubicación vacía interior de una configuración distribuida al azar, r cantidad de vecinos rojos y b cantidad de vecinos negros.

Finalmente se calcula el valor esperado de B_e para una configuración al azar de parámetros (L, ρ, R) como

$$P(\{l\, sea\, frontera\} = \sum_{i=0}^{8} \sum_{j=0}^{8-i} P(\{l\, sea\, frontera\} \mid \{r = i, b = j\})\ P(\{r = i, b = j\}),$$

donde se reemplaza en cada término el primer factor con la información de la Tabla 3.4 y el segundo de acuerdo a la expresión (3.2.2). Llamamos B_e^{rand} a dicho valor y lo calculamos para $L = 50$ y los valores de ρ y R utilizados en las simulaciones; los resultados para $R = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ se muestran en la Figura 3.19.

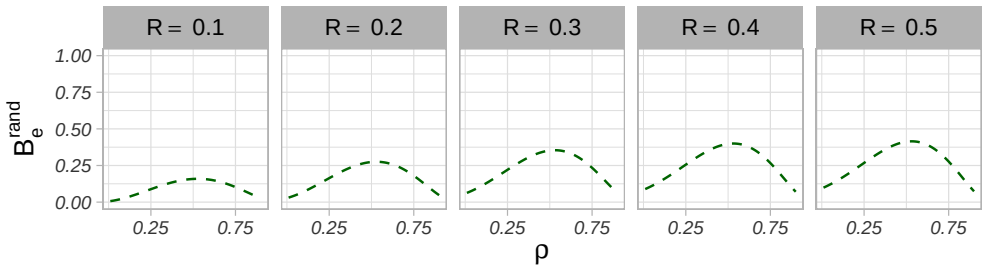


Figura 3.19: Valores de B_e^{rand}, el índice de frontera esperado para una configuración distribuida al azar.

En la Figura 3.20 comparamos el valor de B_e^{rand} con lo obtenido a partir de las simulaciones del modelo para $T = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ y 0.8. Vemos que la curva de B_e^{rand} se asemeja a los resultados obtenidos para $\bar{B}_e$ en las configuraciones finales simuladas para $T = 0.4, 0.45$, en particular cuando los tamaños de las poblaciones no están equilibrados. Por el contrario, la monotonía decreciente observada en $\bar{B}_e$ para el resto de las tolerancias indica que para valores de ρ bajos los índices de frontera obtenidos en las simulaciones superan a los del caso al azar y la diferencia entre ambos valores, acorde a lo estudiado para B_e, crece con R y con T.

Por otra parte, para valores de ρ altos, la curva de $\bar{B}_e$ está levemente por debajo de B_e^{rand} en todos los casos. Si se recuerda los resultados que habíamos obtenido para el índice W_e, podemos afirmar que en dichas instancias, la frecuencia de las ubicaciones vacías rodeadas de vacíos es mayor a la de una distribución aleatoria, mientras que la frecuencia de los vacíos que cumplen el rol de frontera es menor. Esto es válido para todas las tolerancias.

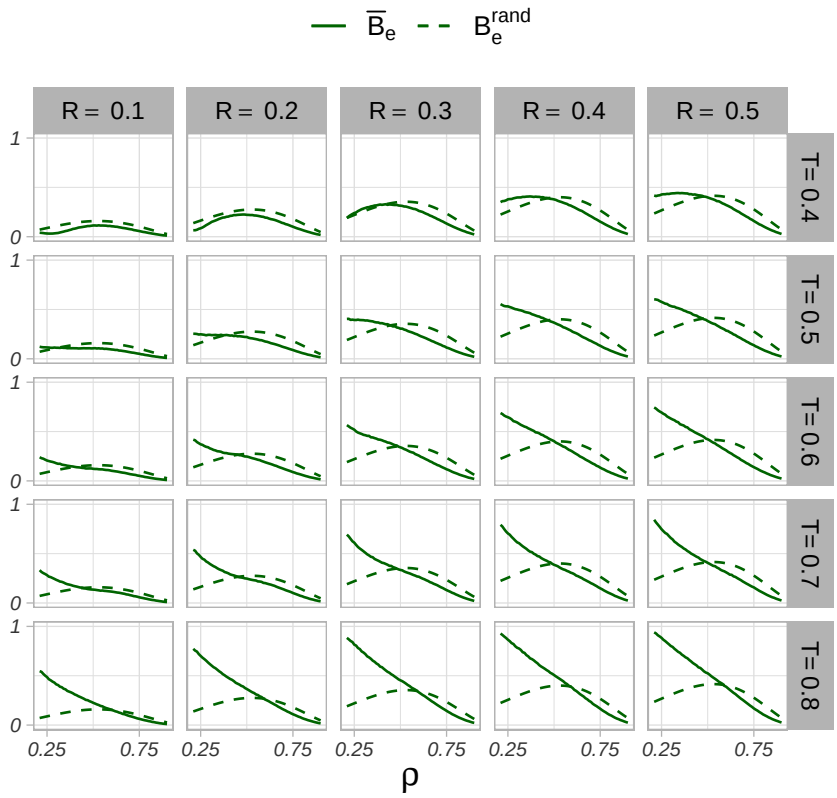


Figura 3.20: Comparación de los valores de $\bar{B}_e$ y B_e^{rand}

Capítulo 4

Variante del modelo de proximidad con ubicaciones inaccesibles

En el capítulo anterior analizamos en qué medida las ubicaciones vacías funcionan como frontera entre las poblaciones en las configuraciones finales alcanzadas por el modelo de proximidad de Schelling bidimensional. Recurrimos a los *mapas de puntos raciales* que presentan información georreferenciada de los distintos grupos étnicos que habitan el territorio de Estados Unidos (basada en datos provenientes del censo nacional del 2010) [3] donde se ve que algo similar ocurre en ciudades con altos niveles de segregación: regiones vacías del territorio separan a los distintos grupos étnicos (Figura 4.1).

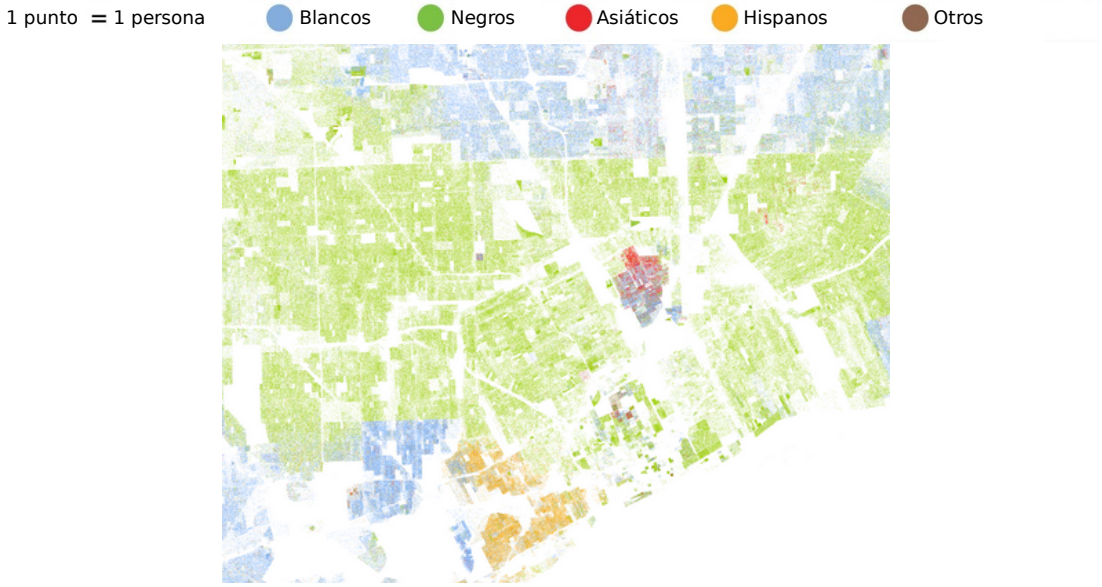
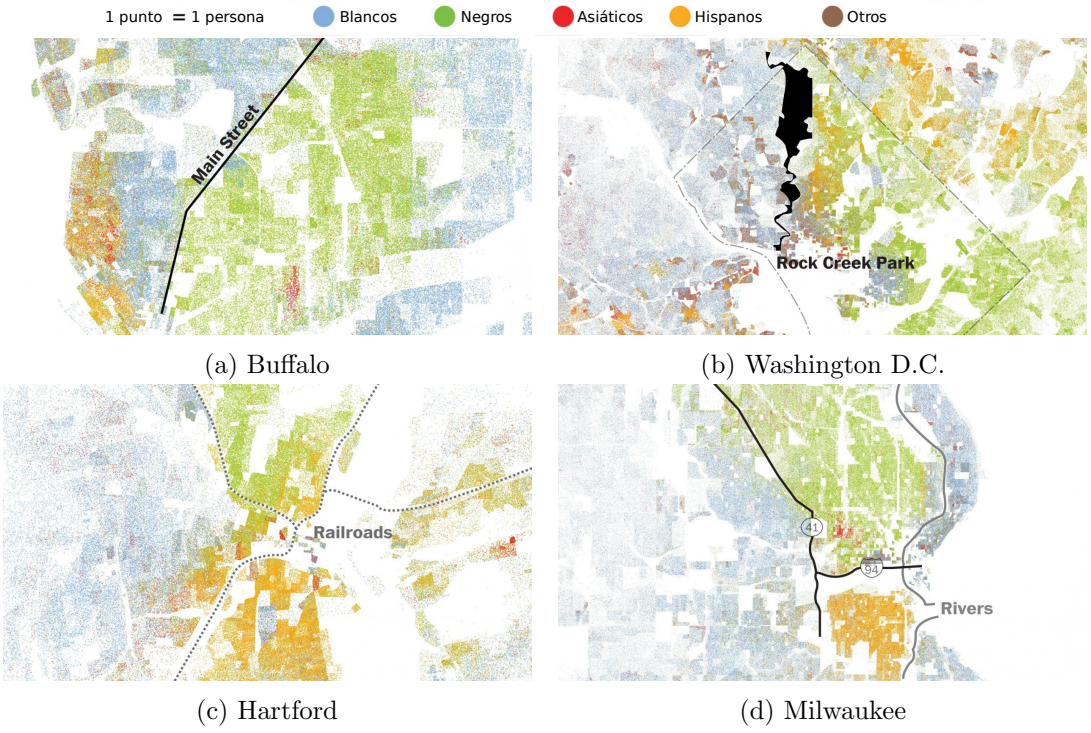


Figura 4.1: Mapa de puntos raciales de la ciudad de Detroit, EE.UU.[3]

Sin embargo, un nuevo aporte surge del análisis de estos mapas y es que usualmente, las ubicaciones vacías que cumplen el rol de fronteras coinciden con una ruta, un río, un ferrocarril, un parque, una avenida, etc. Es decir, la infraestructura urbana o las barreras naturales, que representan en el territorio zonas fijas que no pueden ocuparse y que suelen ser difíciles de cruzar, demarcan límites entre poblaciones y, en algunas ocasiones, contienen su expansión o las aíslan [19].



(a) Buffalo

(b) Washington D.C.

(c) Hartford

(d) Milwaukee

Figura 4.2: Mapas de puntos raciales para cuatro ciudades de EE.UU. donde la infraestructura urbana o los accidentes naturales marcan límites entre las distintas etnias: (a) la calle principal, (b) el parque Rock Creek, (c) las vías del tren y (d) rutas y ríos.

Desde las ciencias sociales se han analizado procesos que vinculan ciertas políticas de planificación urbana con los patrones de segregación existentes y sus consecuentes disparidades en el acceso a lugares de trabajo, salud, educación, transporte o servicios públicos o privados. Por ejemplo, en [17] se analiza cómo el trazado de la avenida Troost en la ciudad Kansas impactó en la segregación racial del sistema escolar entre los establecimientos del lado Este y Oeste de dicha avenida. Similar es el impacto de la Kensington Expressway en la ciudad de Buffalo sobre la segregación residencial, estudiado en [11]. En [31] se muestra a partir del análisis de datos censales cómo el trazado de la autopista interestatal de la Federal Highway Act de 1956 definió líneas de segregación racial. En [27] se tratan, para diferentes áreas de EE.UU., los efectos que el trazado de autopistas significaron para las poblaciones minoritarias y de bajos ingresos, que sin contar con

movilidad propia, quedan aisladas o con una capacidad restringida de acceso a oportunidades sociales y económicas.

Más allá de las características particulares de cada situación, estos autores coinciden en señalar que determinados elementos de la infraestructura urbana de ciudades de EE.UU. sirvieron para iniciar o profundizar patrones espaciales de segregación étnica, principalmente desde que las formas abiertas discriminación fueron prohibidas con el avance en la legislación de derechos civiles (The Civil Rights Act de 1964; The Fair Housing Act de 1968; EqualCredit Opportunity Act 1974). Anteriormente la segregación espacial se apoyaba en ordenanzas de zonificación, llamadas *red lining* [23], y en frecuentes pactos restrictivos del mercado inmobiliario que legalmente prohibían a las etnias no blancas poseer, arrendar u ocupar ciertas propiedades [19].

Proponemos en este capítulo una variante del modelo de proximidad de Schelling bidimensional en el cual asignamos a determinadas ubicaciones de la cuadrícula una característica similar a aquellas que se observan como divisoras de las poblaciones en los mapas de la Figura 4.2: no pueden ser ocupadas. Estudiamos de manera preliminar cómo dichas ubicaciones impactan en el patrón de segregación final alcanzado.

4.1. El nuevo modelo

En esta variante del modelo de proximidad incorporamos una clase de ubicaciones que llamamos *inaccesibles*. Se trata de ubicaciones que no pueden ser ocupadas por los agentes del sistema en ningún momento y cuya localización dentro de la cuadrícula se define al inicio y se mantiene fija a lo largo de toda la dinámica. Parte del interés de definir esta variante radica en observar en qué medida dichas ubicaciones inaccesibles cumplen el rol de frontera en las configuraciones finales, permitiendo anticipar, en mayor o menor medida, la localización de parte de los bordes de los clusters.

Es necesario redefinir algunos de los parámetros en este modelo respecto a los que se usaron en el capítulo 3.

Condiciones de contorno periódicas

En esta variante el espacio habitable está representado por una cuadrícula cuadrada de lado L con condiciones de contorno periódicas. Así, todas las vecindades son de tamaño $H = 8$ siguiendo la definición de Moore.

Por un lado, ante la existencia de ubicaciones inaccesibles resulta mejor trabajar con condiciones de contorno periódicas para eliminar cualquier posible sesgo vinculado a la posición relativa de los lugares inaccesibles respecto al borde de la cuadrícula.

Por otro, en general vale que vecindades más pequeñas pueden resultar más "atractivas"para los agentes del sistema puesto que se requiere menor cantidad de vecinos del mismo tipo para alcanzar los umbrales de satisfacción. La existencia de ubicaciones inaccesibles no modifica los tamaños de las vecindades pero impacta en el modelo como si lo hiciera: la presencia de una ubicación inaccesible en cierta vecindad reduce el número máximo de vecinos posibles. En este contexto, las condiciones de contorno

periódicas posibilitan además aislar tal efecto asociándolo exclusivamente a la presencia de las ubicaciones inaccesibles, y no a la existencia de contornos abiertos, facilitándose así la interpretación de los resultados.

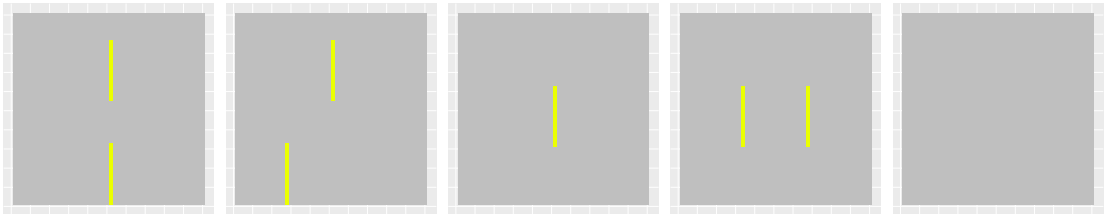
La densidad de ubicaciones vacías

Dado que las ubicaciones inaccesibles constituyen un subconjunto de las ubicaciones vacías, el parámetro ρ continúa representando la densidad de las ubicaciones vacías en general, sean accesibles o no para los agentes del modelo. Así, inicialmente se define el conjunto de las k ubicaciones inaccesibles y los $N = (1-\rho) \times L^2$ agentes de ambos tipos se distribuyen aleatoriamente en las $L^2 - k$ ubicaciones restantes. Se observa que k debe cumplir que $k/(\rho L^2) < 1$.

El resto de los parámetros y reglas del modelo se mantienen con las mismas definiciones que en la sección 3.1.

4.2. Simulaciones

Estudiamos el nuevo modelo mediante simulaciones para $L = 50$, $R = 0.3$ y $T \in \{0.4, 0.6, 0.8\}$ para cuatro conjuntos de ubicaciones inaccesibles distintos y un quinto caso que corresponde al conjunto vacío (sin ubicaciones inaccesibles). Estos conjuntos definen líneas rectas de longitud 16 que se ubican en distintas áreas de la cuadrícula. En la Figura 4.3 pueden verse las disposiciones asociadas a cada caso. Notar que en $(A), (B)$ y (D) existen 32 ubicaciones inaccesibles en total, mientras que en (D) únicamente 16.



(A) (B) (C) (D) (E)

Figura 4.3: Localización de los conjuntos de ubicaciones inaccesibles considerados.

Para ρ se define el dominio como en la sección 3.2 obteniéndose un valor de ρ_0 para cada tolerancia T que es el máximo de los obtenidos para cada conjunto de inaccesibles considerado. Se tiene que: ${\rho_0}^{T=0.4} = 0.13$, ${\rho_0}^{T=0.6} = 0.1$, ${\rho_0}^{T=0.8} = 0.06$. Para cada uno de los conjuntos de inaccesibles y combinaciones de parámetros se simularon 200 realizaciones independientes para diferentes condiciones iniciales.

Resultados

Los resultados que incluimos en esta tesis se centran en el caso $T = 0.6$, aunque se hacen comparaciones con otras tolerancias exploradas cuando es pertinente.

4.2.1. Los costos sociales y por población

Al comparar los costos sociales para los distintos conjuntos, se percibe un leve aumento en los costos sociales medios $\bar{M}$ en las disposiciones $(A), (B), (C)$ y (D) respecto de los valores correspondientes a la configuración sin inaccesibles. Se trata de variaciones pequeñas que para ningún valor de T llega a significar más de una mudanza extra per cápita.

Si se observan además los costos por población, la agentes minoritarios son los más afectados por la presencia de ubicaciones inaccesibles: las diferencias entre los valores de $\bar{M}_r$ obtenidos para casos con inaccesibles respecto de las disposición (E) llegan a ser cinco veces mayores que las diferencias observadas para $\bar{M}_b$. En la Figura 4.4 se muestran los valores de los costos medios y sus desvíos en función de ρ para cada disposición de ubicaciones inaccesibles estudiada y $T = 0.6$.

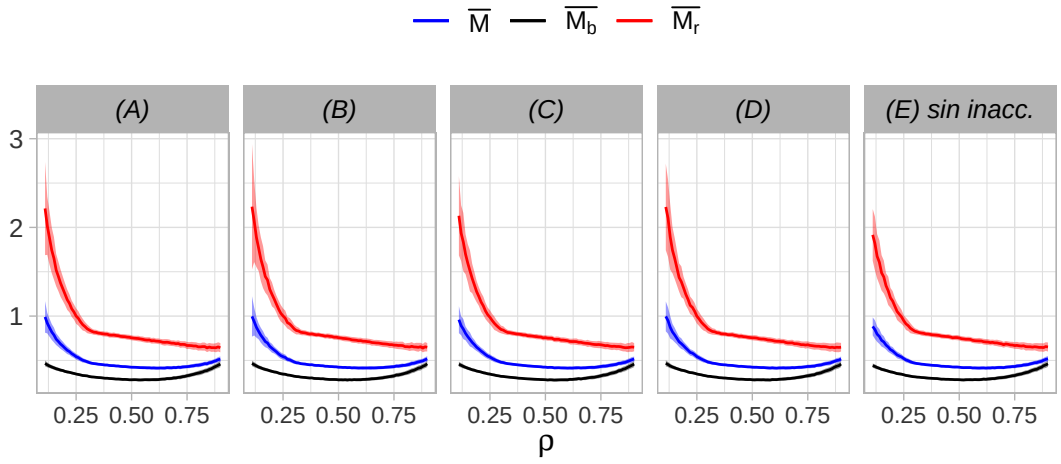


Figura 4.4: Costos medios sociales y por población (con sus desvíos) para los distintos conjuntos de inaccesibles y $T = 0.6, R = 0.3, 0.1 \leq \rho \leq 0.9$.

4.2.2. El rol de los vacíos accesibles

Para estudiar el rol que cumplen en las configuraciones finales las ubicaciones vacías que sí son accesibles para los agentes del sistema generalizamos las definiciones de los índices W_r, W_b, W_e y B_e (Definiciones 3.2.1 y 3.2.3). Basta adaptar para esta variante

del modelo los denominadores de dichos índices reemplazándolos por

$$\#\{\text{ubicaciones vacías}\} - \#\{\text{ubicaciones inaccesibles}\}$$

y se obtiene en cada caso la proporción de vacíos accesibles que cumple cada rol determinado. Así, el caso que corresponde a $\#\{\text{ubicaciones inaccesibles}\} = 0$ coincide con la definición que se venía usando.

En la Figura 4.5 se muestran las curvas de los valores medios de los cuatro índices en función de ρ para los conjuntos de inaccesibles de (D) y (E), el resto de los conjuntos presentan comportamientos muy similares. Se incluye, además, un detalle de los valores de $\bar{B}_e$ para todas las disposiciones de inaccesibles estudiadas y densidades de vacíos bajas $(0.1 \leq \rho \leq 0.3)$. Observamos que los resultados obtenidos para (D) y (E) para los cuatro índices son muy similares aunque en el detalle de $\bar{B}_e$ sí se percibe un mayor índice de frontera medio para los casos en que existen ubicaciones inaccesibles.

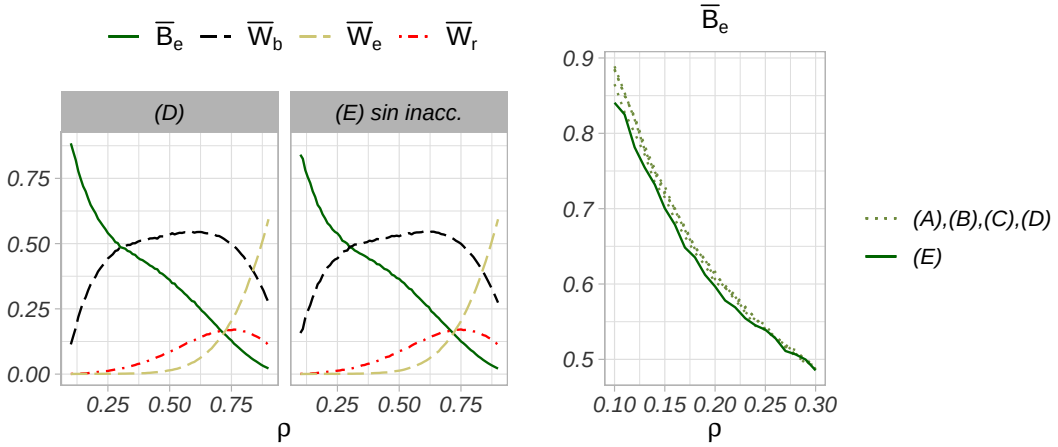


Figura 4.5: Valores de $\bar{B}_e$, $\bar{W}_b$, $\bar{W}_e$ y $\bar{W}_r$ para $T = 0.6$ para $\rho \geq 0.1$.

En la Figura 4.6 se comparan ejemplos de configuraciones finales para casos con y sin inaccesibles para los mismos valores de ρ. Se observa cómo el índice B_e es levemente mayor en los ejemplos con ubicaciones inaccesibles, tal como observamos en el detalle de $\bar{B}_e$ de la Figura 4.5. Cabe aclarar que si bien se trata de configuraciones que corresponden a densidades menores al $\rho_0 = 0.1$, cumplen con la condición de que el total de los agentes está satisfecho.

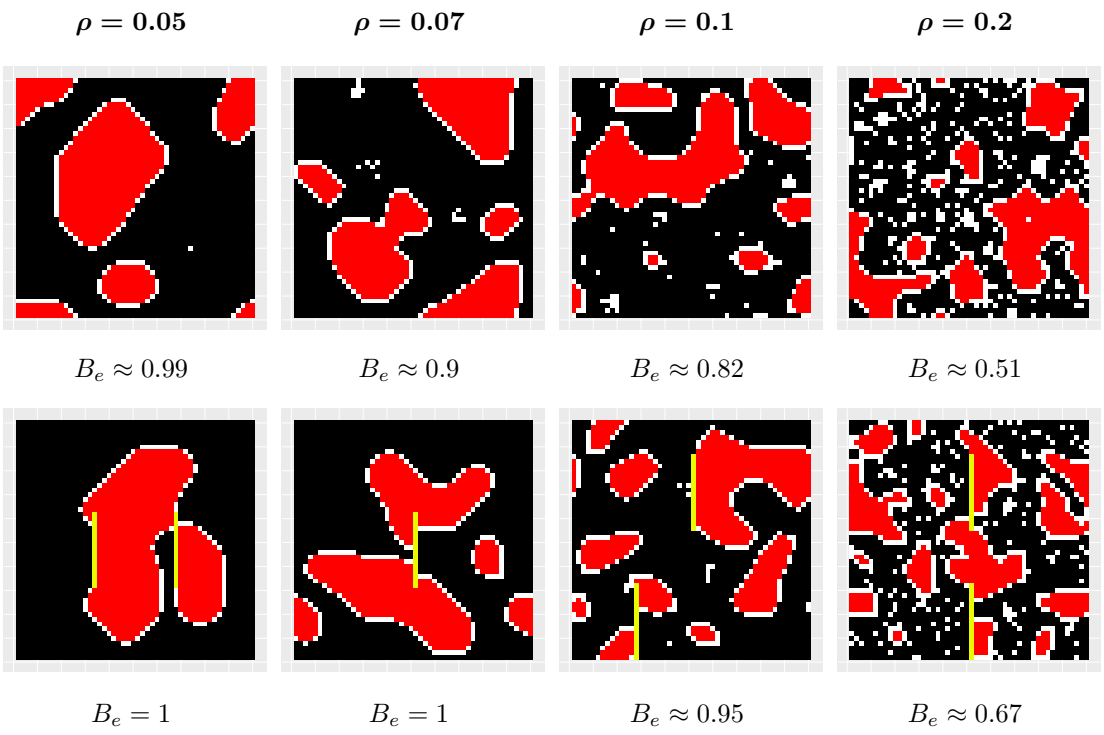


Figura 4.6: Configuraciones finales para distintos conjuntos de ubicaciones inaccesibles y $\rho = 0.05, 0.07, 0.1, 0.2$.

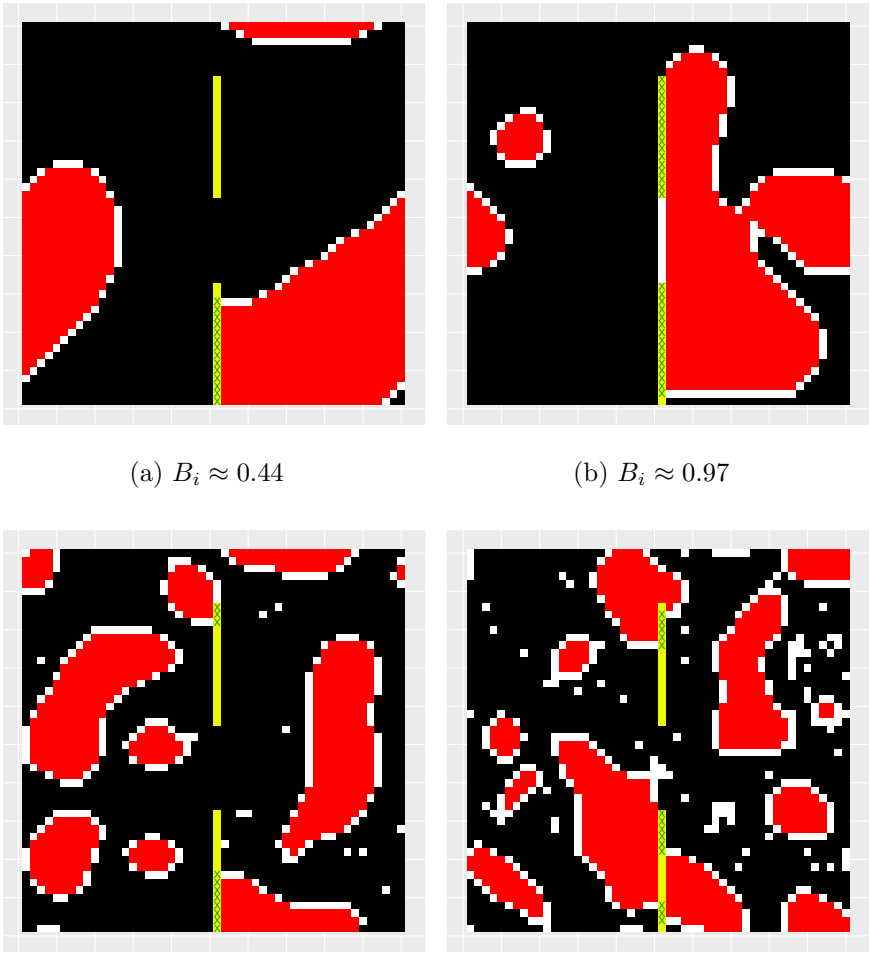
4.2.3. Las ubicaciones inaccesibles como fronteras

Hasta aquí no se han mostrado cambios significativos en los costos necesarios para alcanzar las configuraciones finales ni en el rol de los vacíos accesibles respecto a lo observado para el modelo sin inaccesibles. Sin embargo, la Figura 4.6 da la pauta de que, al menos para algunas instancias del modelo, parte de las ubicaciones inaccesibles quedan localizadas en los bordes de los clusters cumpliendo el rol de frontera. Aunque este fenómeno no aporte cambios sustanciales en el patrón de segregación alcanzado (como el tamaño o la cantidad de clusters), sí representa una localización particular de algunas de las fronteras presentes en la configuración final, y consecuentemente de algunos clusters. Resulta relevante entonces cuantificar en qué medida esto ocurre y para tal fin, definimos:

Definición 4.2.1. Para cada configuración final se define el *índice de frontera de las ubicaciones inaccesibles* como:

$$B_i := \frac{\#\{\text{ubicaciones inaccesibles frontera}\}}{\#\{\text{ubicaciones inaccesibles}\}}$$

En la Figura 4.7 se muestran configuraciones finales que corresponden al conjunto de inaccesibles del caso (A) con sus valores de B_i y se marcan sobre el gráfico con una cruz aquellas ubicaciones inaccesibles que están cumpliendo el rol de frontera.



(a) $B_i \approx 0.44$ (b) $B_i \approx 0.97$

(c) $B_i \approx 0.44$ (d) $B_i \approx 0.34$

Figura 4.7: Configuraciones finales para $T = 0.6$ y $R = 0.3$ y el conjunto de inaccesibles (A); se señalan con una cruz las ubicaciones inaccesibles frontera. Las densidades de vacíos son: (a) $\rho = 0.04$, (b) $\rho = 0.06$, (c)$\rho = 0.1$ y (d) $\rho = 0.14$.

Estudiamos los valores medios de la magnitud B_i y sus desvíos para los distintos parámetros. Incluimos los resultados obtenidos para $T = 0.6$ y $T = 0.4$ y el conjunto (D) en la Figura 4.8, cuyos valores se asemejan a los de $(A), (B)$ y (C). Se incluyen además en dicho gráfico las curvas de $\bar{B}_e$ con sus desvíos.

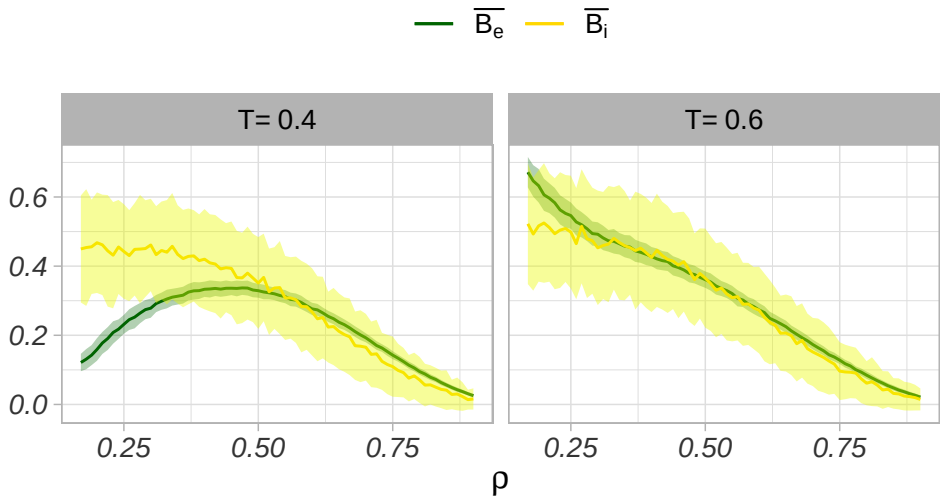


Figura 4.8: Valores de $\bar{B}_i$ y $\bar{B}_e$ para $R = 0.3$ y $0.13 \leq \rho \leq 0.9$

Por un lado, se observa en la Figura 4.8 para ambas tolerancias que el desvío de la magnitud B_i es mucho mayor que el de B_e (para $T = 0.4$ el desvío promedio de B_i es de 0.12 y el máximo es de 0.17, y para $T = 0.6$ lo valores son de 0.13 y 0.26 respectivamente). Este resultado es coherente con lo advertido a primera vista en las configuraciones finales pues se alcanzaron una amplia variedad de estados finales donde las ubicaciones inaccesibles cumplen el rol de frontera en mayor o menor medida. Además, las curvas de $\bar{B}_i$ correspondientes a cada tolerancia son muy parecidas entre sí. Es decir que, en promedio, la proporción de ubicaciones inaccesibles que cumplen el rol de frontera en las configuraciones finales se modifica levemente al variar la tolerancia de los agentes del sistema. Con esto se estaría tentado de afirmar que el impacto o relevancia que tiene la presencia de ubicaciones inaccesibles en la formación de fronteras es independiente de T, pero es necesario considerar qué ocurre respecto al total de las fronteras existentes y por eso comparamos con el comportamiento de los vacíos accesibles.

Notamos que en instancias donde el valor de $\bar{B}_i$ supera al de $\bar{B}_e$ se tiene que, en promedio, las ubicaciones inaccesibles cumplen el rol de frontera en mayor medida que los vacíos accesibles. En otros términos, son instancias en que la probabilidad de que una ubicación inaccesible sea frontera en la configuración final es mayor que la probabilidad de que un vacío accesible lo sea. Cuando esto ocurre, podemos concluir que la presencia de ubicaciones inaccesibles está introduciendo un sesgo respecto a la localización de parte de las fronteras de los clusters y afirmar que, en algún sentido, eligiendo a priori el conjunto de ubicaciones inaccesibles se logra anticipar la localización de ciertas fronteras en el caso promedio. Según la Figura 4.8 notamos que dicha situación corresponde a $T = 0.4$ y $\rho \leq 0.5$; mientras que para $T = 0.6$, esto no ocurre para ninguna densidad de ubicaciones vacías. Aclaramos, como es de esperar de acuerdo a los estudiado previamente, que

tampoco sucede para ninguna densidad de vacíos en el caso $T = 0.8$.

Por otra parte, se define para cada configuración final la frontera total como $F = \#\{\text{ubicaciones frontera}\}$ y se muestran en la Figura 4.9 los valores medios y desvíos para dicha magnitud para $T = 0.4$ y las disposiciones (D) y (E). Notamos cómo se tiene una mayor longitud de frontera promedio para el caso con inaccesibles aunque los desvíos presentes en (D) y (E) son similares.

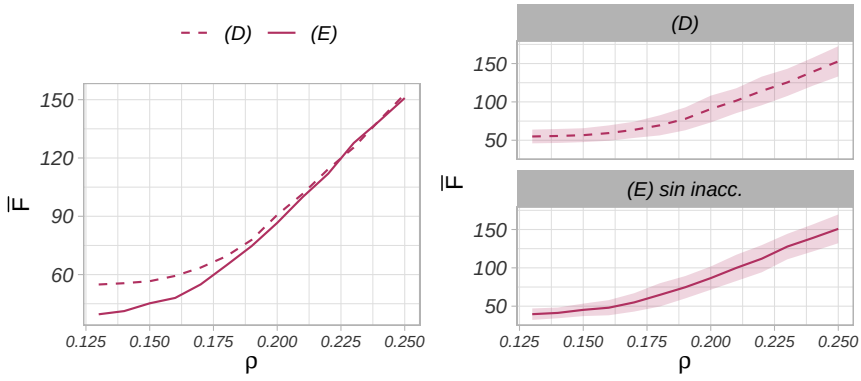
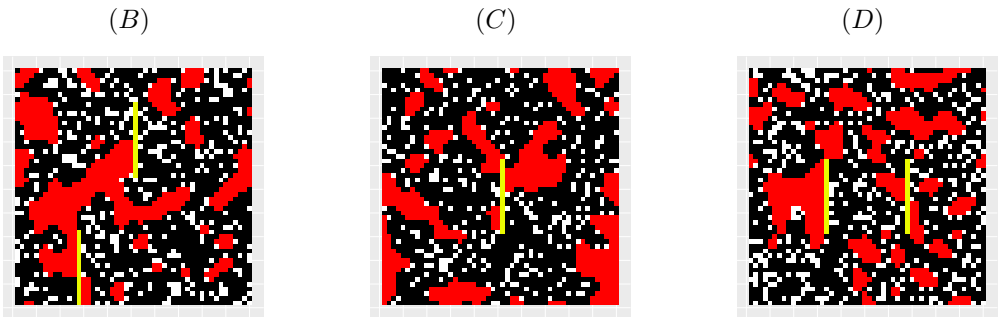


Figura 4.9: Longitud de la frontera total para $T = 0.4$ y $0.13 \leq \rho \leq 0.25$.

Para completar, incluimos ejemplos de configuraciones finales para la tolerancia $T = 0.4$ y distintos conjuntos de inaccesibles donde se ve en concreto cómo las ubicaciones inaccesibles están separando las poblaciones. Recordemos además que en el capítulo anterior habíamos mostrado que la localización de las ubicaciones vacías era, para este valor de tolerancia, análogo al de una distribución al azar, hecho que deja de ser válido para los vacíos inaccesibles en esta variante del modelo.



$F = 23, B_e \approx 0.12$
$\rho = 0.16$

$F = 14, B_e \approx 0.09$
$\rho = 0.13$

$F = 25, B_e \approx 0.12$
$\rho = 0.18$

Figura 4.10: Configuraciones finales para $T = 0.4$ y los conjuntos de inaccesibles $(B), (C)$ y (D).

Conclusiones

En la formulación original del modelo de proximidad de Schelling bidimensional observamos los costos, en términos de cantidad de mudanzas per cápita, para alcanzar estados finales de bajísima o nula proporción de agentes insatisfechos y, fundamentalmente, caracterizamos los roles de las ubicaciones vacías en las configuraciones finales alcanzadas.

Hemos visto que los costos tienen un mayor impacto en la población minoritaria para los valores de tolerancia T más bajos y que, por el contrario, la proporción de ubicaciones vacías ganadas por esta población en las configuraciones finales no presenta grandes variaciones al modificar la tolerancia de los agentes. En cambio, la proporción de vacíos ganados por la población mayoritaria sí se ve reducida cuando aumenta la presencia de fronteras de vacíos entre clusters para casos con agentes que poseen preferencias más estrictas. En particular, la formación de dichas fronteras de vacíos se vincula estrechamente con el valor del parámetro de tolerancia y llega a ser imperceptible para los valores de T más bajos.

Este último resultado se vincula con el efecto que tiene incluir ubicaciones inaccesibles sobre el proceso de formación de fronteras en la variante propuesta en esta tesis. Concretamente, mostramos de manera preliminar que en esta variante del modelo, la capacidad que se tiene de influir en la localización de las fronteras de los clusters de las configuraciones finales depende fuertemente de la tolerancia de los agentes y, en segunda instancia, de la disponibilidad de vacíos accesibles. Los resultados muestran que una mayor incidencia es posible cuando los agentes poseen preferencias menos exigentes y además es baja la proporción de vacíos.

A futuro, se planea profundizar el estudio de la nueva variante y evaluar alguna de las siguientes modificaciones:

- estudiar otros tipos de conjuntos de ubicaciones inaccesibles con configuraciones iniciales que sigan alguna distribución particular en relación a los inaccesibles presentes,
- incluir en la dinámica algún tipo de penalización para los agentes que al mudarse crucen ubicaciones inaccesibles,
- definir la satisfacción de los agentes de manera tal que no sólo se considere la composición de su vecindad local sino además el tipo de agentes presente en regiones

más amplias delimitadas por inaccesibles (esto último toma aspectos del modelo de vecindad acotada).

Finalmente, aclaramos que los modelos aquí estudiados no se proponen como modelos de segregación residencial que apunten a hacer predicciones realistas sobre casos particulares. Por el contrario, se trata de herramientas útiles para el estudio del fenómeno, y que pueden ayudar a formular preguntas inspiradas tanto en la problemática concreta, como aquellas más abstractas que surgen de la comprensión del comportamiento del sistema que se define.

Apéndice

Se presenta una versión en pseudocódigo simplificada del algoritmo implementado en C. Aclaramos algunas notaciones que se usan:

- l representa una ubicación de la cuadrícula.
- $vecindad(l)$ refiere al conjunto de las ubicaciones vecinas de l.
- $ocupante(l)$ se refiere al estado de la ubicación l:

$$ocupante(l) = \begin{cases} -1 & \text{si la ubicación } l \text{ está ocupada por un agente negro} \\ 0 & \text{si la ubicación } l \text{ está vacía} \\ 1 & \text{si la ubicación } l \text{ está ocupada por un agente rojo} \end{cases}$$

- Para comprender la idea de la dinámica implementada se trabaja con tres conjuntos:
  - el conjunto $insatisfechos$ que contiene las ubicaciones ocupadas por un agente insatisfecho,
  - el conjunto $ubic_disponibles_R$ que contiene las ubicaciones vacías accesibles que satisfacen las preferencias de un agente del tipo $rojo$,
  - el conjunto $ubic_disponibles_N$ que contiene las ubicaciones vacías accesibles que satisfacen las preferencias de un agente del tipo $negro$.

Algoritmo 1: Simulación del modelo de Schelling

Parámetros:

L: lado de la cuadrícula cuadrada,

T: tolerancia de los agentes,

ρ: densidad de ubicaciones vacías,

R: proporción de agentes rojos,

$cant_estab, prop_estab$: variables del criterio de estabilidad[1].

max_iter: cantidad máxima de iteraciones permitidas.

Algoritmo `Schelling()`

```
inicializa_vecindad()
inicializa_ocupante()
inicializa_conjuntos()

iter ← 0
estabilidad ← 0

mientras insatisfechos ≠ ∅ y estabilidad ≤ cant_estab y
iter ≤ max_iter hacer
    // Se elige un agente insatisfecho al azar y se muda
    ubic_origen ← elegir_al_azar(insatisfechos)
    mudar_agente(ubic_origen)

    // Se actualiza la variable del criterio de estabilidad
    si #(insatisfechos) < prop_estab × (1 − ρ)L² entonces
        estabilidad ← estabilidad + 1
    en otro caso
        estabilidad ← 0
    iter ← iter + 1
imprimir_salida()
```

[1]El criterio de estabilidad considerado requiere una proporción de agentes insatisfechos menor a $prop_estab$ durante las últimas $cant_estab$ iteraciones. En este trabajo se usaron los siguientes valores:

$$cant_estab = 700,$$
$$prop_estab = 0.01.$$

Además, se tomó $max_iter = 700000$.

A continuación se detallan algunos de los procedimientos que poseen detalles que pueden resultar de interés:

Procedimiento inicializa ocupante ()

Procedimiento `inicializa_ocupante()`

```
// Se arma una lista con (1 − ρ) × L² × R copias de +1 y (1 − ρ) × L² × (1 − R)
   copias de −1 mezcladas
agentes ← [(+1)^((1−ρ)×L²×R), (−1)^((1−ρ)×L²×(1−R))]
agentes ← mezclar(agentes)

// Inicialmente las L² ubicaciones están vacías
para i ← 1 a L² hacer
    ocupante(i) ← 0

// Se localiza a los agentes en las ubicaciones
para i en agentes hacer
    ubic ← elegir_al_azar(1, ..., L²)
    mientras ocupante(ubic) ≠ 0 hacer
        ubic ← elegir_al_azar(1, ..., L²)
    ocupante(ubic) ← i
```

Procedimiento mudar agente(l)

Entrada: l es la ubicación origen del agente que se muda

Procedimiento `mudar_agente(`l`)`

```
// Se define una ubicación destino vacía cualquiera
ubic_destino ← elegir_al_azar(1, ..., L²)
mientras ocupante(ubic_destino) ≠ 0 hacer
    ubic_destino ← elegir_al_azar(1, ..., L²)

// Se mejora la ubicación destino de ser posible
si ocupante(l) = 1 y ubic_disponibles_R ≠ ∅ entonces
    ubic_destino ← elegir_al_azar(ubic_disponibles_R)
si ocupante(l) = −1 y ubic_disponibles_N ≠ ∅ entonces
    ubic_destino ← elegir_al_azar(ubic_disponibles_N)

// Se muda el agente de la ubicación l
ocupante(ubic_destino) ← ocupante(l)
ocupante(l) ← 0

// Se actualizan los conjuntos insatisfechos , ubic_disponibles_R y
   ubic_disponibles_N de acuerdo a la mudanza realizada
actualiza_conjuntos(l,ubic_destino)
```

Los procedimientos de inicialización y actualización de los conjuntos $insatisfechos$, $ubic_disponibles_R$, $ubic_disponibles_N$ no se incluyen en este apéndice. Básicamente se trata de procedimientos que clasifican las ubicaciones usando la función $satisface(l, c)$ que devuelve un 1 en caso de que la ubicación l satisfaga las preferencias de una agente de tipo c y un 0 en caso contrario. Cuando se trata de la inicialización se clasifican las L^2 ubicaciones considerando la distribución inicial de los agentes. Cuando en cambio se trata de la actualización que se realiza luego de cada iteración, se revisan únicamente las ubicaciones involucradas en la mudanza realizada (la ubicación de origen y sus vecinas y la ubicación de destino y sus vecinas).

Se incluye el pseudocódigo de la función $satisface(l, c)$ donde queda explícito el uso del parámetro T.

Función satisface(l,c)

Entrada: l ubicación de la cuadrícula, c tipo de agente.
Salida: booleano(la ubicación l satisface a un agente de tipo c).

```
Función satisface(l,c)
    vecinos ← 0
    vecinos_iguales ← 0
    para i en vecindad(l) hacer
        si ocupante(i) ≠ 0 entonces
            vecinos ← vecinos + 1
            si ocupante(i) = c entonces
                vecinos_iguales ← vecinos_iguales + 1
    si vecinos_iguales > T × vecinos entonces
        resultado ← 1
    en otro caso
        resultado ← 0
    devolver resultado
```

Finalmente aclaramos que para la variante del modelo propuesta en el capítulo 4 el código es muy similar, usando en el procedimiento $inicializa_ocupante()$ el valor 2 para identificar aquellas ubicaciones fijas inaccesibles y adaptando la definición de $vecindad(l)$ para que cumpla con las condiciones de contorno periódicas.

Bibliografía

[1] I. Benenson, E. Hatna, and E. Or. From schelling to spatially explicit modeling of urban ethnic and economic residential dynamics. *Sociological Methods & Research 37*, 04 2009.

[2] C. Brandt, N. Immorlica, G. Kamath, and R. Kleinberg. An analysis of one-dimensional schelling segregation. *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 03 2012.

[3] D. Cable. *Racial Dot Map.* Weldon Cooper Center for Public Service, Rector and Visitors of the University of Virginia, 2013.

[4] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 81:591–646, May 2009.

[5] W. Clark. Residential segregation in american cities: A review and interpretation. *Population Research and Policy Review*, 5(2):95–127, 1986.

[6] W. Clark. Residential preferences and neighborhood racial segregation: A test of the schelling segregation model. *Demography*, 28:1–19, 03 1991.

[7] W. Clark and M. Fossett. Understanding the social context of the schelling segregation model. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 105:4109–14, 04 2008.

[8] D. Cutler, E. Glaeser, and J. Vigdor. The rise and decline of the american ghetto. *Journal of Political Economy*, 107(3):455–506, 1999.

[9] L. Dall'Asta, C. Castellano, and M. Marsili. Statistical physics of the schelling model of segregation. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(07):L07002, jul 2008.

[10] J. Epstein and R. Axtell. *Growing Artificial Societies: Social science from the bottom up.* MIT Press, Cambridge, EEUU, 1996.

[11] W. Fox. *Segregation Along Highway Lines: How the Kensington Expressway Reshaped Buffalo, New York.* University at Buffalo, New York., 2017.

[12] G. Galster. Assessing the causes of racial segregation: A methodological critique. *Journal of Urban Affairs*, 10(4):395–407, 1988.

[13] G. Galster. Residential segregation in American cities: A contrary review. *Population Research and Policy Review*, 7(2):93–112, May 1988.

[14] L. Gauvin, J.-P. Nadal, and J. Vannimenus. Schelling segregation in an open city: A kinetically constrained blume-emery-griffiths spin-1 system. *Phys. Rev. E*, 81:066120, Jun 2010.

[15] L. Gauvin, J. Vannimenus, and J.-P. Nadal. Phase diagram of a schelling segregation model. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 70, 03 2009.

[16] R. Gaylord and L. d'Andria. *Simulating Society: A Mathematica Toolkit for Modeling Socioeconomic Behavior*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[17] K. Gotham. Missed opportunities, enduring legacies: School segregation and desegregation in kansas city, missouri. *The Pursuit of Racial and Ethnic Equality in American Public Schools: Mendez, Brown, and Beyond*, pages 221–245, 01 2014.

[18] S. Grauwin, F. Goffette-Nagot, and P. Jensen. Dynamic models of residential ségrégation: An analytical solution. *Groupe d'Analyse et de Theorie Economique (GATE), Centre national de la recherche scientifique (CNRS), Universite Lyon 2, Ecole Normale Superieure, Working Papers*, 96, 07 2012.

[19] S. Green, M. A. Turner, and R. Gourevitch. Racial residential segregation and neighborhood disparities. *Washington, DC: US Partnership on Mobility from Poverty*, 2017.

[20] A. Hazan and J. Randon-Furling. A schelling model with switching agents: Decreasing segregation via random allocation and social mobility. *The European Physical Journal B*, 86, 12 2012.

[21] N. Immorlica, G. Kamath, and R. Kleinberg. Asymptotically tight bounds for segregation in one dimension. en preparación. 2015.

[22] D. Massey and N. Denton. Trends in the residential segregation of blacks, hispanics, and asians: 1970-1980. *American Sociological Review*, 52(6):802–825, 1987.

[23] R. Mitchell and J. Franco. Holc "redlining" maps: The persistent structure of segregation and economic inequality. *National Community Reinvestment Coalition Report*, 2018.

[24] A. O'Sullivan. Schelling's model revisited: Residential sorting with competitive bidding for land. *Regional Science and Urban Economics*, 39:397–408, 07 2009.

[25] R. Pancs and N. Vriend. Schelling's spatial proximity model of segregation revisited. *Journal of Public Economics*, 91:1–24, 01 2007.

[26] M. Pollicott and H. Weiss. The dynamics of schelling-type segregation models and a nonlinear graph laplacian variational problem. *Advances in Applied Mathematics*, 27:17–40, 07 2001.

[27] T. W. Sanchez, R. Stolz, and J.Ma. Moving to equity: Addressing inequitable effects of transportation policies on minorities. *Cambridge, MA: The Civil Rights Project at Harvard University.*, 01 2003.

[28] T. C. Schelling. Models of segregation. *American Economic Review, Papers and Proceedings 59*, pages 488–493, 1969.

[29] T. C. Schelling. Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 1:143–186, 1971.

[30] T. C. Schelling. Some fun, thirty-five years ago. *Handbook of Computational Economics, Elseiver*, pages 1639–1644, 2006.

[31] B. Sherman. *Racial Bias and Interstate Highway Planning: A Mixed Methods Approach.* CUREJ: College Undergraduate Research Electronic Journal, University of Pennsylvania, 2014.

[32] J. Skvoretz. Introduction to special edition on "ethnic preferences, social distance dynamics, and residential segregation: Theoretical explanations using simulation analysis" by mark fossett. *Journal of Mathematical Sociology*, 30:181–184, 07 2006.

[33] D. Stauffer. Social applications of two-dimensional ising models. *American Journal of Physics*, 76, 06 2007.

[34] D. Stauffer and S. Solomon. Ising, schelling and self-organising segregation. *European Physical Journal B*, 57, 01 2007.

[35] D. Vinković and A. Kirman. A physical analogue of the schelling model. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103:19261–5, 01 2007.

[36] H. Young. *Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions.* Princeton University Press, 1998.

[37] J. Zhang. A dynamic model of residential segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 28, 05 2004.