



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Técnicas cuantitativas en el análisis de rectificabilidad

Ian Fleschler

Director: Ezequiel Rela

Co-Director: Pablo Shmerkin

Fecha de Presentación
19 de agosto de 2020

Índice general

1. Introducción	7
2. Teoría de la Medida	17
2.1. Medidas de Radon	17
2.2. Medidas y dimensión de Hausdorff	20
2.3. Propiedades de las medidas de Hausdorff	22
2.4. Convergencia débil de Medidas de Radon	26
2.5. Densidades	27
3. Conjuntos cerrados y algunas nociones de convergencia	29
3.1. Topología Attouch-Wets y distancia de Hausdorff	29
3.2. Los coeficientes $\beta_{\infty, E}^d$	37
3.3. Abierto 2-sided corkscrew	45
4. Funciones analíticas reales en varias variables	55
4.1. Funciones analíticas reales en varias variables	55
4.2. Variedades analíticas reales	58
4.3. Funciones holomorfas en varias variables	60
5. Conjuntos rectificables	65
5.1. Conjuntos rectificables	65
5.2. Funciones Lipschitz	66
5.3. Rectificabilidad vía control sobre conos	68
6. Tangentes, ε^2 y β_{∞}^2	73
6.1. Introducción	73
6.2. Lema de funciones cuadráticas	80
6.3. Estructura de la demostración	83
6.4. Un resultado de convergencia	89
A. Un resultado sobre funciones analíticas reales	105
Índice de figuras	115
Bibliografía	117

Agradecimientos

Aprovecho la excusa de mi tesis para agradecer a todos los que me vienen apoyando en mis proyectos y que me acompañan siempre con buena onda. En muchos casos (o casi siempre últimamente) mis proyectos son extremadamente intensos y aún así tengo un increíble apoyo todo el tiempo. No espero de ninguna manera que estos agradecimientos sean exhaustivos.

A mis padres por acompañarme siempre, cada uno a su manera. A mamá le tengo que agradecer que sepa desde chico que se puede vivir haciendo ciencia y por transmitirme su cultura familiar de perseverancia. A papá que siempre me reciba con comida rica hecha con cariño. Le agradezco mucho a mis abuelos, a los que espero ansiosamente para compartir una merienda en mi casa ni bien se acabe esta pandemia. También le agradezco al resto de mi familia.

A las instituciones educativas en las que me formé: Escuela Scholem Aleijem, a nivel Jardín y Primario, a la Escuela Técnica ORT en nivel secundario y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA a nivel universitario. A la Universidad de Princeton por las oportunidades que tendré en el programa de doctorado que comenzaré este año.

A mis directores, Ezequiel Rela y Pablo Shmerkin por guiarme en este proyecto. En la primera conversación que tuve con Ezequiel quería que me cuente un poco más sobre la optativa de Teoría Geométrica de la Medida que iba a dictar y lo primero que le dije al introducirme fue “Me interesa la Teoría Geométrica de la Medida” (de forma superficial y con muy poca idea en el momento). Tengo que agradecerle muchísimo a él de que sea una frase que pueda seguir diciendo y ahora con mucha mayor intensidad. A Pablo por el maravilloso tiempo que pasé trabajando de forma guiada por él durante mi estadía en la Universidad de Cambridge (le agradezco infinitamente a Peter Varju por hacerlo posible). Por introducirme al mundo de la rectificabilidad cuantitativa.

A Julián Fernandez Bonder y Guillermo Henry por aceptar ser jurados de esta tesis.

A Gabriel Minian por su influencia a lo largo de mi carrera. Todos los cuatrimestres de mi carrera cursé una materia con él. Gabriel me transmitió que se puede hacer matemática seria sacándole información intuitiva a dibujitos. La intuición geométrica que tengo y me da alegría constante, se la debo en gran parte a él.

A todos los profesores del DM con los que pude interactuar en muchas ocasiones (entre ellas, muchas charlas de pasillo). Especialmente a: Ines Armendariz, Gabriela Armentano, Jonathan Barmak, Alicia Dickenstein, Daniel Galicer, Julián Fernandez Bonder, Gabriel Larotonda, Miguel Walsh.

Agradezco infinitamente a Patricia Fauring y a Flora Gutierrez por darme la posibilidad de participar en numerosas olimpiadas, en las que me formé matemáticamente y me hice muchos amigos. También le agradezco mucho a Verónica Sunkel. A toda la gente que forma parte de la OMA. A todos los amigos que me hice tanto en la Argentina como en el exterior al competir en olimpiadas nacionales e internacionales.

A mis entrenadores de olimpiadas a lo largo de los años, que me presentaron desafíos, me ayudaron a organizarme al momento de rendir y me apoyaron todo el tiempo: Lucas Andisco, Gonzalo Chebi, Nicolás Cogorno, Matías Saucedo y Melanie Sclar. Le agradezco a Mauro Rey que también me acompañó a lo largo de mis años de olimpiadas.

A Patricia Gurfinkel por acompañarme tanto ella en forma personal, como en nombre de la escuela ORT institucionalmente.

A mis amigos de olimpiadas con los que sigo en contacto: Alberto Acosta Reche, Agustín Barreto, Lucas Brugevin, Lucía Busolini, Mateo Carranza Velez, Nicolás Cassia, Ezequiel Cribioli, Carla Crucianelli, Lucas de Amorin, Lautaro Decara, Bruno Di Sanzo, Agustín Marchionna, Julián Masliah, Alejo Navarro Goldaraz, Nahuel Nostrala Hatz, Carlos Soto. A mis amigos de la facultad Guido Arnone, Martín Blufstein, Juan Pablo de Rasis, Leonardo Lanciano, Leopoldo Lerena, Gonzalo Saravia Vitolo, Sofia Valiño, Damian Yjilioff. A mi amigo Tomas Baril con el que compartí distintas etapas de mi vida. Además les agradezco a Pablo Blanc, Nacho Darago, Charly Di Fiore, Martin Mereb, Bruno Staffa. También les agradezco a mis amigos del coro de la facultad.

Les agradezco a todos los que me dieron experiencias de docencia. A mis alumnos de olimpiadas Franco Bongiovanni, Santiago Cubino y Camila García. También a mis alumnos de Análisis II y al equipo con el que compartí la docencia, en especial a Nicolás Sirolli y a Sebastián Velazquez.

Muchas gracias.

Capítulo 1

Introducción

¿Podemos cuantificar la existencia de tangentes a una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 de forma geométrica? En esta tesis daremos una respuesta a esta pregunta.

Cuando hablamos de una curva en \mathbb{R}^2 en su forma más general estamos pensando en una curva simple que es la imagen continua e inyectiva de un intervalo en \mathbb{R}^2 . Una curva simple y cerrada o una curva de Jordan es la imagen de una función continua e inyectiva de S^1 en \mathbb{R}^2 . Típicamente si tenemos una curva podemos preguntarnos si es suave, si admite una tangente en un punto y si tiene longitud finita.

Repasamos un poco sobre estas cuestiones. Decimos que una curva es suave si admite una parametrización C^1 que tiene una inversa sobre la curva que es C^1 en un entorno de la curva. Decimos que una curva admite una tangente en $x \in \Gamma$ con dirección u , si para todo $a \in (0, 1)$ existe un real positivo $r(a)$ tal que si $y \in \Gamma$ con $\|y - x\| < r(a)$ entonces $|(y - x) \cdot u| \leq a\|y - x\|$. Esto último es decir que en la curva entra en conos de apertura arbitrariamente pequeña. Por último si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización de una curva C , definimos

$$\text{Long}(C) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^n \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \right\}$$

donde $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1\}$ es una partición finita de $[0, 1]$. Decimos que la curva es de longitud finita o que es una curva rectificable si la longitud que definimos recién es finita. Esto equivale a que admita una parametrización Lipschitz.

Más en general que la medida de longitud, se puede definir una medida que extiende la medida de longitud pero que esta definida sobre todos los conjuntos. Es decir, una medida que sobre las curvas coincide con la medida de longitud (siendo posiblemente ∞) y le asigna una medida a todo el resto de los conjuntos de \mathbb{R}^n . Esta medida se conoce como la medida de Hausdorff de exponente 1 y se denota \mathcal{H}^1 .

En dimensiones superiores $n \geq 3$ se puede hacer una construcción similar a la de la \mathcal{H}^1 para definir las medidas \mathcal{H}^d con $0 \leq d \leq n$. Esta construcción también tiene sentido para dimensiones no necesariamente enteras. Para exponentes enteros serán una extensión de la medida de volumen para subvariedades C^1 de \mathbb{R}^n . También se pueden pensar como la extensión correcta de la medida de Lebesgue de los planos d -dimensionales a todo \mathbb{R}^n .

Decimos que un conjunto E es d -rectificable si existen $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones Lipschitz tales que $\mathcal{H}^d(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^d)) = 0$. Dicho en palabras, un conjunto es d -rectificable si (*salvo medida \mathcal{H}^d cero*) está contenido dentro de la unión numerable de imágenes Lipschitz de dimensión d .

Para una curva de Jordan Γ vamos a definir la cantidad

$$\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) = \frac{1}{r} \inf_{\substack{L \text{ recta} \\ L \cap B(x, r) \neq \emptyset}} \sup_{y \in \Gamma \cap B(x, r)} \text{dist}(y, L) \quad (1.1)$$

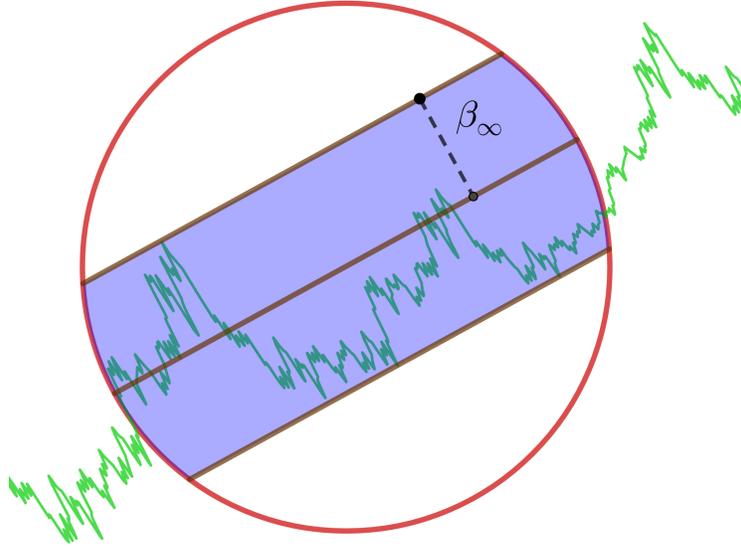


Figura 1.1: $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$

La cantidad (1.1) representa cuán pequeño podemos tomar el ancho de una franja para cubrir la curva en la bola $B(x, r)$. Como lo que nos interesa medir debe servirnos multiescala debemos normalizar apropiadamente. Cuanto más pequeño sea este coeficiente β_{∞} más finita será la franja en la bola y más se parecerá la curva a una recta. En el dibujo vemos la franja marcada en azul, a la curva en verde y a la circunferencia sobre la que estamos observando en rojo.

Definimos luego la siguiente cantidad asociada a la β_∞ :

$$\beta_\infty(x)^2 = \int_0^1 \beta_{\infty,\Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r}$$

La pregunta que nos haremos será para que puntos de la curva serán finitos la función cuadrática que definimos recién y de otra que definiremos pronto. Que la integral sea finita es una forma de medir que los coeficientes deben estar decayendo cuando hacemos decrecer el radio. El factor $\frac{1}{r}$ en la integral provoca una explosión en el cero. Para que la integral sea finita debería haber coeficientes pequeños que estén decayendo rápido para que eviten la explosión de $\frac{1}{r}$. Esto será pedir de una forma cuantitativa que tengamos una oscilación controlada cerca del punto.

La razón por la que consideramos las integrales de la forma $\frac{dr}{r}$ es que satisfacen cierta invarianza por dilataciones:

$$\int_0^a f(r) \frac{dr}{r} = \int_0^{\lambda a} f\left(\frac{r}{\lambda}\right) \frac{dr}{r}.$$

Esto nos permite “hacer zoom” sin cambiar la integral. Nosotros lo queremos usar para medir la existencia de rectas tangentes. La cuestión de que una curva de Jordan admita o no una recta tangente es local. Es decir, podría haber oscilación a escalas grandes de la curva y aún así que la curva admita una recta tangente en cierto punto. Esto es coherente desde la perspectiva de los coeficientes, ya que su finitud no depende de a que escala sucede el decaimiento.

En 1990 Jones introdujo estos coeficientes β_∞ y demostró que dado un conjunto E compacto en \mathbb{R}^2 , E esta contenido en una curva de longitud finita si y solo si para todo $x \in E$ vale que

$$\int_0^1 \beta_{\infty,E}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty. \tag{1.2}$$

En su enunciado original el utiliza una versión discreta de los β_∞ que es comparable a la recién definida. En su demostración inicial utiliza argumentos de análisis complejo. Okikolu en 1992 demuestra el resultado en \mathbb{R}^n . Sus argumentos dan una cota fina para la longitud de la curva más corta que lo contiene. Los resultados que describimos recién se conocen como el Analyst Traveling Salesman Theorem. Estos demuestran que si sobre un conjunto E cerrado tenemos que para todo $x \in E$ vale la condición (6.1) entonces E es un conjunto 1- rectificable.

En el área de teoría geométrica de la medida la rectificabilidad es un concepto clave. Es un problema importante dar caracterizaciones alternativas de rectificabilidad, entre ellas las caracterizaciones cuantitativas. En su libro “Singular Sets and Rectifiable Sets in \mathbb{R}^n ” [DS91], Guy David y Stephen Semmes introducen el concepto de uniform rectifiability. Esta clase de conjuntos satisfacen, como lo dice su nombre, una condición uniforme, sobre gráficos Lipschitz que lo aproximen. En ese libro demuestran una serie de equivalencias a ser uniformemente rectificable, entre ellas, finitud de ciertas integrales singulares y control muy fino sobre una variante L^p de los coeficientes β_∞ recién

mencionados. La caracterización de los conjuntos uniformemente rectificables mediante la finitud de ciertas integrales singulares muestra que estos objetos son fundamentales en el análisis armónico. Este trabajo de David-Semmes impacta en el área y motiva las caracterizaciones cuantitativas tanto de los conjuntos rectificables como de los uniformemente rectificables (para los que típicamente se piden condiciones muchísimo más finas). En la sección de problemas abiertos de ese trabajo, los autores incluyen una conjetura de Lennart Carleson. Se definen los coeficientes $\varepsilon(x, r)$ de la siguiente manera: si x es un punto de la curva éstos miden la oscilación de la curva en la bola $B(x, r)$ mediante información disponible de observar la cascara de esta bola. La pregunta es si un control del tipo de función cuadrática del que teníamos para β_∞ implica que el conjunto donde tenemos tal control es 1-rectificable. En el paper “A proof of Carleson’s ε^2 -conjecture” [JTV] de Benjamin Jaye, Xavier Tolsa y Michele Villa, los autores demuestran la conjetura.

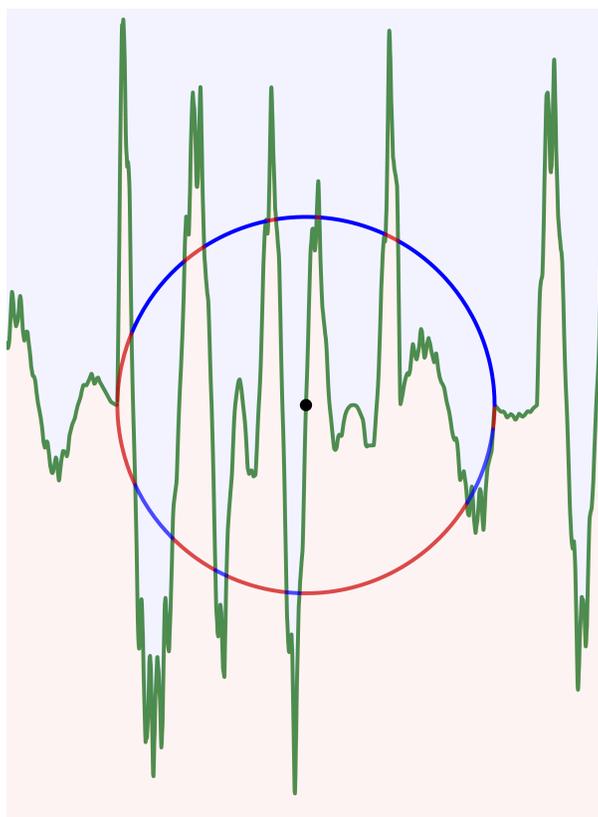


Figura 1.2: $\varepsilon(x, r)$

La idea para definir $\varepsilon(x, r)$ es observar que pasa en la cascara de la bola $\partial B(x, r)$. Recordamos que las curvas de Jordan dividen al plano en dos componentes conexas una interior a la curva y otra exterior a esta. Si Γ es una curva de Jordan llamaremos Ω^+ y Ω^- a las dos componentes abiertas conexas en las que queda dividido $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Lo que haremos será observar como queda dividido $\partial B(x, r)$ por Ω^+ y Ω^- . Los conjuntos $\partial B(x, r) \cap \Omega^+$ y $\partial B(x, r) \cap \Omega^-$ serán abiertos de $\partial B(x, r)$ y luego una unión numerable de arcos abiertos de circunferencia. Definimos $I^+(x, r)$ como la componente conexa de $\partial B(x, r) \cap \Omega^+$ de mayor longitud. Puede ser vacía y pueden haber múltiples que cumplan eso. Definimos $I^-(x, r)$ análogamente.

En la Figura 1.2 podemos ver cómo la curva corta a la circunferencia, dividiéndola en arcos abiertos azules que están en Ω^+ y en arcos abiertos rojos que están en Ω^- .

Ahora definimos

$$\varepsilon(x, r) = \frac{1}{r} \max \{ |\pi r - \text{Long}(I^+(x, r))|, |\pi r - \text{Long}(I^-(x, r))| \}.$$

Lo que estamos haciendo acá es comparar la longitud del arco contra la longitud de media circunferencia. Al igual que antes para que podamos hacer análisis multiescala tenemos que normalizar todo apropiadamente. Si el coeficiente $\varepsilon(x, r)$ es pequeño, entonces la cascara de la bola debe tener una componente del lado positivo y una componente del lado negativo, cada una de las dos componentes pareciéndose a media circunferencia. Entonces cuanto más pequeño sea este coeficiente ε menos oscilación podrá tener la curva sobre la bola.

Al igual que con el β_∞ , le asociaremos a ε la función cuadrática:

$$\mathcal{E}(x)^2 = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

La discusión de este teorema es el objetivo principal de la tesis, para el cual prepararemos toda la teoría.

Teorema 6.1.1. *Es equivalente (salvo medida \mathcal{H}^1 cero) que en un punto la curva admita una tangente en x , que $\beta_\infty(x)$ sea finito y que $\mathcal{E}(x)$ sea finito.*

Hablar de medida \mathcal{H}^1 cero sobre la curva es una condición extremadamente fina en este contexto ya que típicamente una curva de Jordan no tiene porque tener medida \mathcal{H}^1 finita o incluso σ -finita. Más aún, puede tener dimensión de Hausdorff más grande que 1.

Lo que más nos interesará en esta tesis será que la finitud de $\mathcal{E}(x)$ implica que la curva admita una tangente en x . De este resultado se deduce que ese conjunto es rectificable, demostrando la conjetura de Lennart Carleson. En el paper “A proof of Carleson’s ε^2 -conjecture” se presenta también una demostración para otros conjuntos menos generales que los de Jordan en un sentido pero para los que la demostración requiere notablemente menor trabajo técnico. Los conjuntos que estudiaremos serán el borde de un dominio abierto 2-sided corkscrew. Se suelen utilizar estos conjuntos para el estudio de la Harmonic Measure. Estos conjuntos nos dan una descomposición del espacio en dos abiertos Ω^+ , Ω^- , y un borde común entre ellos Γ , al igual que las curvas de Jordan. La ventaja de estos conjuntos es que poseen una condición cuantitativa de ser abiertos que nos permite utilizar sin complejidad técnica argumentos de límite sobre

conjuntos. En esta tesis se avanza en la dirección de obtener un teorema análogo en dimensiones superiores probando algunos resultados parciales intermedios en el contexto de \mathbb{R}^n , con $n \geq 3$.

La prueba de este resultado se basa en dos lemas. Daremos una idea de la estructura sin meternos en detalle. La explicación más precisa estará en la tesis.

Lema Principal 1 - 6.3.2. *Sea μ una medida soportada en la curva Γ tal que para toda bola $B(x, r)$, $\mu(B(x, r)) \leq r$. Supongamos además que tenemos una bola B centrada en la curva, tal que $\mu(B) \geq \theta r$ con θ fijo en $(0, 1)$.*

Fijado $\varepsilon > 0$, si tenemos un control lo suficientemente fino para $\varepsilon(x, r)$ y de una versión suavizada de $\varepsilon(x, r)$ en los puntos del soporte de la medida, entonces

$$\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \varepsilon.$$

Esto es decir que en lugares de densidad y buen control de la oscilación vía (esencialmente) acotaciones uniformes de $\varepsilon(x, r)$ para $x \in \text{supp}(\mu)$ nos da un control en flatness directo en la bola original de tipo acotación en β_{∞} . La condición de $\mu(B(x, r)) \leq r$ uno la tiene que pensar como una condición de normalización. Pedir una condición de densidad suele ser natural porque para que la medida pueda dar información sobre el comportamiento en la bola debemos tener controlado en algún sentido que es lo que está viendo.

Lema Principal 2 - 6.3.3. *Tenemos una bola B_0 , una medida soportada en la curva Γ , y una medida que cumple $\mu(B(x, r)) \leq r$. Sean $c_0 \in (0, 1)$, $\theta > 0$ y $\varepsilon > 0$. Si además la medida cumple que*

1. $\mu(B_0) \geq c_0 r$
2. $\beta_{\infty}(B) \leq \varepsilon$ siempre que $\mu(B) \geq \theta r(B)$ y B sea una bola centrada en la curva Γ .
3. Un control de tipo función cuadrática para una variante suave de los coeficientes $\varepsilon(x, r)$.

Con ciertas condiciones sobre la dependencia entre las constantes, existe un gráfico Lipschitz Λ tal que $\mu(\Lambda) \geq \frac{1}{2}\mu(B_0)$.

Describimos brevemente como se conectan los dos lemas. Queremos ver que el conjunto donde la función cuadrática $\mathcal{E}(x)$ es finita y la curva no admite tangente tiene medida \mathcal{H}^1 cero. Con argumentos estándar del área podemos conseguir un subconjunto F de medida \mathcal{H}^1 finita con control uniforme sobre las funciones cuadráticas que nos interesan. Sobre ese conjunto podremos aplicar el Lema 1 considerando la restricción de la medida de Hausdorff al conjunto. Esto nos permitirá conseguir una bola $B_0 \subseteq F$ donde valgan las hipótesis del Lema 2. Acá la segunda condición del lema la tenemos por una aplicación del Lema 1, ya que tenemos control uniforme en B_0 por tener tal control en F . Lo que tendremos finalmente es que un gráfico Lipschitz Λ que interseca

a F con medida positiva. Como las funciones Lipschitz son diferenciables a.e., tendremos que el gráfico Lipschitz admite tangentes \mathcal{H}^1 a.e. . La recta tangente al gráfico Lipschitz Λ en un punto de densidad de la curva Γ será tangente a Γ lo cual será un absurdo porque en el conjunto que estábamos estudiando la curva no admitía una recta tangente en esos puntos. La última afirmación sale del control que tenemos para los β_∞ en lugares de densidad.

Veremos ahora la rectificabilidad del conjunto donde $\mathcal{E}(x)$ es finita. Esto sale de que salvo medida \mathcal{H}^1 cero en todos esos puntos la curva admite una recta tangente. Estas rectas serán lo que llamamos recta tangente aproximada y permitirán construir las curvas Lipschitz que le dan estructura de conjunto rectificable.

Outline

En el Capitulo 2 se puede encontrar una introducción a la teoría de la medida. Trabajaremos con una clase de medidas general que son las de Radon. Estas tienen una noción de convergencia, conocida como la convergencia débil de medidas que posee propiedades útiles de compacidad. Las medidas más fundamentales en el área son las medidas de Hausdorff, esta familia de medidas está indexada por números reales. Nosotros usaremos las medidas de Hausdorff indexadas por números enteros que son una extensión natural de la medida de volumen sobre variedades C^1 y tienen la ventaja de estar definidas sobre todos los conjuntos. Introduciremos la noción de densidad respecto a una medida de Hausdorff y sus propiedades más usadas. La noción de densidad mide en un sentido de teoría de la medida cuán llena está una bola con puntos de un conjunto.

En el Capitulo 3 hablaremos sobre convergencia de conjuntos cerrados. La noción de convergencia más clásica es la convergencia en la distancia de Hausdorff. Nosotros utilizaremos una versión local de esta que se conoce como convergencia en la topología de Attouch-Wets. En esta noción local los conjuntos $A_j = \{0\} \cup \{j\}$ en \mathbb{R} convergen al conjunto $A_\infty = \{0\}$, pero en la noción original no convergían a ningún conjunto. La ventaja que presenta la noción local es que permite este “escape de masa” al infinito. Discutiremos el buen comportamiento del coeficiente β_∞ con respecto a la convergencia en la topología de Attouch-Wets. Aprovecharemos la ocasión para hablar de cómo metrizar la Grassmanniana, el conjunto de planos de dimensión d en \mathbb{R}^n que pasan por el origen y cómo esto se puede utilizar como noción de ángulo entre dos planos. Introduciremos los abiertos 2-sided c -corkscrew. Estos conjuntos satisfacen una condición cuantitativa de ser abiertos que esencialmente significa que el borde puede poseer pinches hacia adentro o hacia afuera pero que deben tener un tamaño relativo acotado de forma uniforme a lo largo del conjunto. Estos conjuntos poseen propiedades útiles de compacidad respecto a la convergencia en la topología de Attouch-Wets que las explotaremos al momento de obtener las acotaciones del Lema principal 1.

En el Capitulo 4 será de funciones analíticas reales en varias variables. Introduciremos a estas funciones ya que nos interesará explotar la rigidez de el conjunto de sus ceros, las variedades analíticas reales. Introduciremos también la teoría de funciones holomorfas complejas en varias variables que utilizaremos más tarde para probar que una función vital a nuestro análisis es analítica real construyéndole una extensión holomorfa compleja.

En el Capitulo 5 introduciremos a los conjuntos rectificables motivándolos como la clase adecuada en un sentido de teoría de la medida que extiende a las subvariedades C^1 . Estos conjuntos son una unión numerable de imágenes Lipschitz más posiblemente un conjunto de medida de Hausdorff d - dimensional cero. Mencionaremos algunos resultados de funciones Lipschitz que dicen que esta es una clase de funciones flexibles sobre las que trabajar. Las funciones Lipschitz son diferenciables para casi todo punto, son estables bajo la convergencia puntual y se pueden extender de un subconjunto a todo el espacio sin tener que cambiar su constante de Lipschitz. Definiremos el plano tangente de forma geométrica. Más precisamente, un plano es tangente a un conjunto en un punto x si para todo cono centrado en x a alguna escala lo suficientemente pequeña el conjunto entra adentro del cono. Veremos un lema elemental en el que se puede concluir rectificabilidad teniendo control uniforme sobre conos. Extensiones de esta idea permiten concluir rectificabilidad en contextos mucho más generales. Una aplicación será que el subconjunto de puntos donde un conjunto admite un plano tangente es rectificable. Por último demostraremos un resultado de densidades y de existencia de tangentes respecto a los gráficos Lipschitz.

El Capitulo 6 está dedicado a dar la prueba del resultado principal de este trabajo. Empezamos comparando los coeficientes $\varepsilon(x, r)$ y $\beta_\infty(x, r)$ incluyendo algunos ejemplos para mostrar que tener control de tamaño para $\beta_\infty(x, r)$ nos dará control sobre $\varepsilon(x, r)$. Incluimos la versión n -dimensional del Lema principal 1 con la correspondiente versión de $\varepsilon(x, r)$. Con estas herramientas daremos la prueba del Teorema principal suponiendo válida una versión del Lema principal 2 en dimensiones superiores.

En el Apéndice haremos las cuentas específicas de porque la función más importante del trabajo es analítica real. Le construiremos una extensión holomorfa compleja cuidadosamente. Para eso necesitaremos en este contexto extender una convolución de \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n . Veremos que la convolución es holomorfa viendo que es continua, existen sus derivadas parciales y la convolución satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Para eso veremos que la derivada de la convolución es la convolución de la derivada en este contexto en el que la convolución esta definida en todo \mathbb{C}^n . Una vez probado todo esto podremos concluir que la función que nos interesa posee una extensión a \mathbb{C}^n que es limite uniforme sobre compactos de funciones holomorfas complejas definidas en todo \mathbb{C}^n .

Capítulo 2

Teoría de la Medida

En este capítulo hablaremos algunas cuestiones generales de medidas. Incluimos acá algunas propiedades bien conocidas de medidas de Radon, de las medidas de Hausdorff y de la dimensión de Hausdorff. Las pruebas pueden encontrarse en muchos libros del área, tales como [Mat95], [Sim14], [EG15] o [Fal86]. Se podrán encontrar en este capítulo las definiciones de los objetos, las propiedades principales y algunas de sus demostraciones.

2.1. Medidas de Radon

Vamos a definir la clase de medidas con la que estaremos trabajando. Decimos que μ es una medida exterior (o simplemente medida) si es una función de subconjuntos de \mathbb{R}^n en $[0, \infty]$ que cumple:

1. La medida del conjunto vacío es cero. Es decir,

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

2. Es monótona: si A y B son subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que $A \subseteq B$ entonces

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

3. Es subaditiva: dados numerables subconjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ contenidos en \mathbb{R}^n , vale

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Definición 2.1.1. Decimos que un conjunto E es μ medible (o medible a secas dando por sobreentendida la medida) si para todo conjunto A vale la condición de Caratheodory:

$$\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = \mu(A).$$

La familia de conjuntos μ medibles es una σ -álgebra. Esto último es que contienen al vacío, están cerradas por complemento y por unión numerable.

Definición 2.1.2. Recordamos que los conjuntos borelianos son la menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos abiertos y a los conjuntos cerrados. Decimos que una medida es de Borel si los conjuntos borelianos son medibles. Una medida es Borel regular si dado un conjunto A existe un conjunto boreliano E tal que $A \subseteq E$ y $\mu(A) = \mu(E)$. Finalmente decimos que una medida es de Radon si es Borel regular y es finita sobre compactos.

En general las medidas de Radon presentan la siguiente propiedad de regularidad.

Proposición 2.1.3. Si μ es una medida de Radon entonces para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\mu(E) = \{\inf \mu(A) : A \supseteq E, \text{ con } A \text{ abierto}\}.$$

Si E es μ -medible, tenemos que

$$\mu(E) = \{\sup \mu(C) : C \subseteq E, \text{ con } C \text{ cerrado}\}.$$

Una cuestión sencilla que cumplen estas medidas es que están cerradas por restricción.

Proposición 2.1.4. Si A es μ -medible donde μ es una medida Borel regular y $\mu(A) < \infty$, entonces la medida $\mu|_A$ definida por

$$\mu|_A(E) := \mu(A \cap E)$$

es una medida de Radon. Esta medida se llama la restricción. Si μ es de Radon la hipótesis de que A tenga medida finita se puede quitar.

Repasamos algunas cuestiones básicas de medidas con las que el lector seguramente estará familiarizado.

Definición 2.1.5. Sea E un conjunto medible. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ decimos que es medible si para todo $t \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in E : f(x) > t\}$ son medibles.

En general decimos que una propiedad P es cierta para casi todo punto en E o a.e. (almost everywhere) en E si

$$\mu(\{x \in E : x \text{ no satisface } P\}) = 0.$$

Definición 2.1.6. Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, μ medible. Decimos que una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es μ simple si es medible y su imagen es contable.

Dada una función simple $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ decimos definimos su integral respecto a μ como

$$\int_E f d\mu := \sum_{t \in f(E)} t \mu(x \in E : f(x) = t),$$

con la convención de $0 \cdot \infty = 0$. Si f es no negativa y medible, definimos

$$\int_E f d\mu := \inf \left\{ \int_E g d\mu : g \geq f \mu - a.e. \right\}$$

donde g varía entre las funciones simples $g : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f es medible y alguna de las integrales

$$\int_E f^+ d\mu \quad \text{o} \quad \int_E f^- d\mu$$

es finita (donde $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$), definimos

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Si ambas son finitas decimos que f es μ -integrable.

Los teoremas usuales de convergencia siguen valiendo en este setting más general. En los próximos teoremas E denotará un conjunto medible en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1.7 (Convergencia Monótona). *Si $f_k : E \rightarrow [0, \infty]$ es una sucesión creciente de funciones μ -medibles no negativas, tales que $f_k \leq f_{k+1} \mu$ a.e. en E entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k d\mu.$$

Teorema 2.1.8 (Lema de Fatou). *Si $f_k : E \rightarrow [0, \infty]$ es una sucesión de funciones μ -medibles, entonces*

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

Teorema 2.1.9 (Teorema de Convergencia Mayorada). *Si $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones μ -medibles tales que convergen puntualmente a una función f sobre E , μ a.e., y si existe una función integrable g tal que $|f_k| \leq g$, μ a.e., entonces*

$$\int_E f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

Teorema 2.1.10 (Egoroff). *Sea f_n una sucesión de funciones μ -medibles que convergen puntualmente sobre un conjunto E de medida finita a f . Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $F \subseteq E$ con $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ y f_n converge uniformemente a f sobre F .*

El mismo teorema es cierto si los naturales se cambian por los reales. Es decir, si $\{f_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ son funciones medibles que convergen puntualmente sobre E a una función f cuando r tiende a cero. Más explícitamente

$$\forall x \in E \quad \lim_{r \rightarrow 0} f_r(x) = f(x).$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $F \subseteq E$ con $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ y f_r converge uniformemente a f sobre E cuando r tiende a cero. Más explícitamente

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in F} |f_r(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Nosotros trabajaremos siempre con medidas Borel regular. Nuestros conjuntos (aunque no siempre lo explicitaremos) serán todos borelianos. Nuestras funciones serán todas medibles Borel. Esto último es decir, si $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que estudiamos, que $\{x \in E : f(x) > t\}$ es boreliano para todo t . Como los borelianos son todos medibles para una medida Borel regular, entonces siempre todas nuestras funciones serán μ medibles para toda medida que estudiemos.

2.2. Medidas y dimensión de Hausdorff

Las medidas de Hausdorff son medidas que tienen sentido en un espacio métrico y utilizan la métrica del espacio para estudiar su tamaño. En \mathbb{R}^n uno ya conoce a las subvariedades diferenciables y cómo cada una de estas tiene asociada una medida de volumen. Tomemos el ejemplo de curvas, superficies y sólidos en \mathbb{R}^3 . Conjuntísticamente conviven estos objetos todos juntos en nuestro espacio. Pero geoméricamente es claro que son bien distintos. El plan de esta subsección es definir las medidas de Hausdorff y el concepto relacionado de dimensión de Hausdorff que “miden” los conjuntos en un sentido analítico.

Definición 2.2.1. Dados reales $s \in [0, \infty)$ y $\delta > 0$ definimos la medida de Hausdorff- s a escala δ de un conjunto E como:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf_{\mathbf{F}} \omega_s \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam} F}{2} \right)^s \quad (2.1)$$

donde \mathbf{F} es un cubrimiento numerable de E tal que $\text{diam}(F) < \delta$ para todo conjunto en $F \in \mathbf{F}$.

Notamos que si achicamos δ habrán menos posibles cubrimientos. Esto implica que $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ será creciente respecto a $\delta \rightarrow 0$. Esto permite introducir la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Para $0 < s$ denotamos

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E). \quad (2.2)$$

Se verifica que cada \mathcal{H}^s es una medida Borel regular.

En la ecuación (2.1) introducimos la constante ω_s como una normalización de la medida. Si Γ es la función gamma de Euler definida por la expresión

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx,$$

entonces la constante ω_s puede expresarse con la fórmula

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

Nosotros usaremos las medidas de Hausdorff con exponentes enteros y ahí la normalización es para que coincida con la medida de Lebesgue.

Las medidas de Hausdorff son de Borel por un criterio de Carateodory que afirma que una medida exterior en \mathbb{R}^n , μ es de Borel si y solo si para toda pareja de conjuntos E y F con $\text{dist}(E, F) > 0$ tenemos que

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Notamos que si $s < t$ y $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Esto es equivalente a que si $\mathcal{H}^t(E) > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Se puede pensar al afirmar que un objeto mide finito para algún exponente como que la medida de exponente s lo está viendo. En esa línea, al interpretar el significado de que un objeto mida cero lo podemos pensar como que la medida no lo ve o que es muy pequeño para ésta. Por último, la cuestión de que un objeto mida infinito significará que el objeto que estamos observando es muy grande para poder ser medido adecuadamente por la medida de ese exponente.

Hacemos una comparación bruta y superficial para darle un poco más intuición a la relación entre los exponentes y si la medida es cero, positiva y finita o infinito. Si uno esta interesado en medir una partícula microscópica, una mano y un edificio, las herramientas que debe usar serán claramente distintas. El edificio y la mano serán inmensos si uno intenta utilizar la misma forma de medir que utiliza para la partícula. A la vez, la partícula será indetectable si uno utiliza la herramienta que tenia para medir la mano o el edificio. Lo mismo sucede si uno intenta medir la mano con la herramienta disponible para medir el edificio.

Luego, podemos definir la dimensión de Hausdorff como

$$\dim(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\}. \tag{2.3}$$

Todo lo descripto recién tiene sentido en un espacio métrico. Esta dimensión se obtuvo a través de usar precisamente como se adapta la métrica euclídea de \mathbb{R}^n a nuestro objeto. Esto suele dar lugar a la geometría fractal. Los conjuntos fractales son conjuntos que su dimensión de Hausdorff no coincide con su dimensión topológica.

La dimensión topológica o la dimensión de cubrimientos de Lebesgue se define a través del estudio de sus cubrimientos por abiertos. Decimos que un cubrimiento por abiertos \mathcal{D} refina a un cubrimiento \mathcal{C} si para abierto U en \mathcal{D} está contenido en un abierto V de \mathcal{C} . El orden de un cubrimiento es la mayor cantidad de abiertos con intersección no vacía. La dimensión topológica, denotada por \dim_T , es el menor entero n tal que todo cubrimiento de abiertos de nuestro conjunto admite un refinamiento de orden como mucho $n + 1$. Al hablar de la dimensión topológica de un conjunto en \mathbb{R}^n pensamos que esta dotado de la topología de subespacio.

En general se tiene que $\dim_H(E) \geq \dim_T(E)$. Pero se puede dar la desigualdad estricta en muchos casos. Muchos ejemplos típicos de conjuntos fractales, estos conjuntos donde se da la desigualdad estricta, exhiben autosimilaridad.

El conjunto más conocido que presenta autosimilaridad es el de Cantor. Empezamos con el intervalo $I_1^1 = [0, 1]$ que será el primer paso de la escala de la construcción. En la segunda escala de la construcción tenemos $I_1^2 = [0, \frac{1}{3}]$ y $I_2^2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Si en la escala k tenemos 2^{k-1} intervalos I_i^k , en la escala $k + 1$ nos quedaremos de ese intervalo con los subintervalos I_{2i-1}^{k+1} y I_{2i}^{k+1} que estarán dados por la tercera parte de la izquierda y la tercera parte de la derecha de I_i^k . Luego $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} I_i^k$.

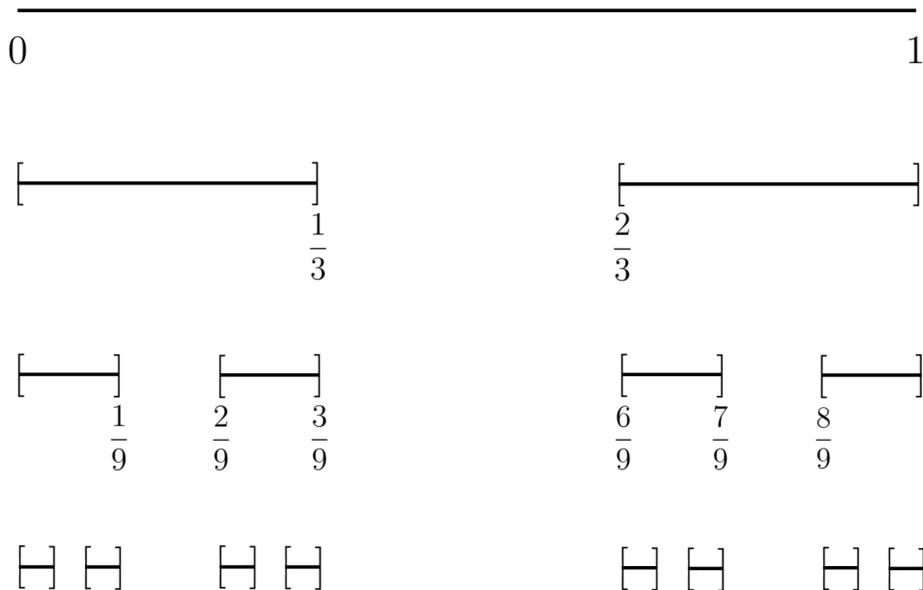


Figura 2.1: Conjunto de Cantor.

2.3. Propiedades de las medidas de Hausdorff

Recordamos primero la siguientes definiciones:

Definición 2.3.1. Decimos que $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función Lipschitz si $\forall x, y \in E$, existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

En general denotamos $\text{Lip}(f)$ como el ínfimo de todas las constantes para las que se satisface la desigualdad.

Definición 2.3.2. Decimos que M es una subvariedad C^1 de dimensión k de \mathbb{R}^n si existen abiertos $U_i \subseteq M$ para la topología de subespacio y funciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ tales que

- a) Los abiertos U_i son un cubrimiento de M . Es decir $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = M$.
- b) $\varphi(U_i)$ es un abierto de \mathbb{R}^k y φ_i es un homeomorfismo entre U_i y $\varphi(U_i)$.
- c) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es una función C^1 .

Las siguiente lista contiene las propiedades más relevantes que vamos a necesitar de las medidas de Hausdorff. Por completitud las enumeramos a continuación y haremos la prueba de algunas de estas.

1. Las medidas de Hausdorff son invariantes por traslación. Además, vale la siguiente propiedad sobre el efecto de las dilataciones: si $\lambda > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$.
2. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\dim(E) \in [0, n]$. También tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ si $s < \dim(E)$. Aunque si $s = \dim(E)$ entonces no podemos concluir nada de la medida $\mathcal{H}^s(E)$, es decir puede tomar cualquier valor en $[0, \infty]$.
3. $\mathcal{H}^0(E)$ es la medida de contar.
4. Si E es una curva \mathcal{H}^1 es la medida de longitud.
5. Para $1 \leq k \leq n - 1$ si $k \in \mathbb{N}$ y E es una subvariedad C^1 de dimensión k entonces $\mathcal{H}^k(E)$ es la medida clásica de volumen sobre la superficie.
6. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$, donde \mathcal{L}^n es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .
7. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $s > n$ entonces $\mathcal{H}^s(E) = 0$.
8. Si A es abierto en \mathbb{R}^n entonces $\dim(A) = n$.
9. Si $s \in [0, n]$ y E es un conjunto boreliano tal que $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, entonces existe K un compacto con $K \subseteq E$ tal que $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.
10. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Entonces tenemos

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq \text{Lip}(f)^s \mathcal{H}^s(E).$$

En particular $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$. También podemos tener que si f es bi-Lipschitz (un homeomorfismo donde la función y su inversa son Lipschitz) entonces vale que $\dim(f(E)) = \dim(E)$.

11. Las medidas de Hausdorff son invariantes por transformaciones ortogonales. Esto es, para toda transformación ortogonal $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y todo conjunto A tenemos que $\mathcal{H}^s(OA) = \mathcal{H}^s(A)$.

Proposición 2.3.3. Sea \mathcal{H}^s la medida de Hausdorff de exponente s definida en \mathbb{R}^n . Si $s > n$ entonces $\mathcal{H}^s \equiv 0$.

Demostración. Tomamos $Q = (0, 1)^n$. Notemos primero que $\lambda^s \mathcal{H}^s(Q) = \mathcal{H}^s(\lambda Q)$, que converge a $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ entonces veremos que $\mathcal{H}^s(Q) = 0$. Consideramos una partición de Q en k^n cubitos de diámetro $k^{-1}\sqrt{n}$:

$$\mathcal{H}_{\sqrt{n}/k}^s(Q) \leq k^n \times \omega_s((2k)^{-1}\sqrt{n})^s = \frac{\omega_s n^{s/2}}{2^s} k^{n-s}.$$

Haciendo k tender a ∞ tenemos que $\mathcal{H}^s(Q) = 0$. □

Proposición 2.3.4. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\dim(E) \in [0, n]$ y $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ si $s < \dim(E)$.

Demostración. Por la proposición anterior $\dim(E) \leq n$. Queremos ver entonces que si $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ para $s \in [0, n]$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$ para todo $t > s$. Si \mathbf{F} es un cubrimiento numerable de E con conjuntos de diámetro menor que δ entonces:

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \omega_t \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^t \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \omega_s \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^s.$$

Luego tomando ínfimo sobre los cubrimientos obtenemos

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \mathcal{H}^s(E).$$

Haciendo δ tender a cero tenemos que $\mathcal{H}^t(E) = 0$ como deseábamos. □

Proposición 2.3.5. \mathcal{H}^0 es la medida de contar.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ entonces $\mathcal{H}_\delta^0(\{x\}) = 1$ y luego $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$. Como \mathcal{H}^0 es una medida de Borel, si E es finito o contable entonces

$$\mathcal{H}^0(E) = \sum_{x \in E} \mathcal{H}^0(\{x\}) = \#(E).$$

Si E es infinito entonces existe $F \subseteq E$ numerable. Luego $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}^0(F) = \infty$. □

Proposición 2.3.6. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}_\infty^s(E) = 0$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Aquí por \mathcal{H}_∞^s denotamos el contenido de Hausdorff cuya definición es la misma que las medidas \mathcal{H}_δ^s salvo que le quitamos las restricciones del diámetro de los conjuntos.

Demostración. Si $s = 0$ lo que hicimos antes nos dio también que $\mathcal{H}_\infty^0(\{x\}) = 0$. Luego si $\mathcal{H}_\infty^0(E) = 0$ entonces debe suceder $E = \emptyset$ por monotonía.

Si $s > 0$, dado $\varepsilon > 0$ consideramos un cubrimiento \mathbf{F} tal que

$$\omega_s \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}_\infty^s(E) + \varepsilon = \varepsilon.$$

En particular debemos tener $\left(\frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^s \leq \varepsilon / \omega_s$ para todo $F \in \mathbf{F}$. Esto implica que

$$\text{diam}(F) \leq \frac{2\varepsilon^{1/s}}{\omega_s^{1/s}} = \delta(\varepsilon).$$

Como todos los conjuntos de \mathbf{F} cumplen esta desigualdad entonces debemos tener $\mathcal{H}_{\delta(\varepsilon)}^s(E) \leq \varepsilon$, ya que \mathbf{F} era una familia válida entre las que tomamos el ínfimo de la definición. Como $\delta(\varepsilon)$ tiende a cero cuando ε tiende a cero, tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = 0$. \square

Proposición 2.3.7. Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Entonces tenemos $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq \text{Lip}(f)^s \mathcal{H}^s(E)$. En particular $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$. También podemos tener que si f es bi-Lipschitz (un homeomorfismo donde la función y su inversa son Lipschitz) entonces vale que $\dim(f(E)) = \dim(E)$.

Demostración. Sabemos que tenemos $\text{diam}(f(F)) \leq \text{Lip}(f) \text{diam}(F)$. La cota en medida sale de la observación de que si \mathbf{F} es una familia que sirve para el cómputo de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ entonces la familia $\tilde{\mathbf{F}}$ dada por $f(F) : F \in \mathbf{F}$ nos sirve como competidor para el cómputo de $\mathcal{H}_{\text{Lip}(f)\delta}^s(f(E))$. Los diámetros de los conjuntos de la familia $\tilde{\mathbf{F}}$ son a lo sumo $\text{Lip}(f)\delta$ por la observación que hicimos antes. Son un cubrimiento ya que \mathbf{F} era un cubrimiento de E . Como \mathbf{F} podía ser cualquier cubrimiento entonces de las desigualdades

$$\mathcal{H}_{\text{Lip}(f)\delta}^s(f(E)) \leq \omega_s \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam}(f(F))}{2} \right)^s \leq \text{Lip}(f)^s \omega_s \sum_{F \in \mathbf{F}} \left(\frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^s,$$

tenemos que $\mathcal{H}_{\text{Lip}(f)\delta}^s(f(E)) \leq \text{Lip}(f)^s \mathcal{H}_\delta^s(E)$. Haciendo $\delta \rightarrow 0^+$ tenemos la desigualdad deseada.

Esto implicará que $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$: Si $s < \dim(E)$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = 0$ y luego $\mathcal{H}^s(f(E)) = 0$. Esto nos dice que $s \leq \dim(f(E))$. Como vale la desigualdad para todo $s < \dim(E)$, entonces $\dim(f(E)) \leq \dim(E)$.

Si f es bi-Lipschitz entonces por el mismo argumento tenemos la desigualdad para el otro lado, entonces $\dim(f(E)) = \dim(E)$. \square

2.4. Convergencia débil de Medidas de Radon

Nos interesará en general tener una noción de convergencia de medidas de Radon. Una motivación posible orientada al estudio de tangentes podría ser la siguiente: suponemos que tenemos un conjunto E que pensaremos como una superficie d -dimensional y una medida concentrada en él (i.e. $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$). Si se prefiere podría pensarse $\mu = \mathcal{H}^d|_E$ para un conjunto de medida \mathcal{H}^d σ -finita.

Dada una medida μ , definimos

$$\mu_{a,r}(A) = \mu(r(A + a))$$

Si dejamos quieto a y vamos haciendo r tender a 0 iremos viendo la estructura local del conjunto. Decimos que ν es una medida tangente a μ en a si existe una sucesión decreciente de reales r_i y una sucesión de reales positivos c_i tales que $c_i \mu_{a,r_i}$ converge débilmente (explicaremos la convergencia en breve) a ν . Los c_i son simplemente una normalización. Esta ν captura comportamiento de la medida μ cerca del punto a .

Cuando $\mu = \mathcal{H}^d|_E$, si definimos $T_{a,r}(A) = \frac{A-a}{r}$, entonces $\mu_{a,r} = \mathcal{H}^d|_{T_{a,r}(E)}$. Luego estamos “haciendo zoom” en el punto a sobre el conjunto E desde el punto de vista de la medida.

Si conseguimos una ν que sea una medida tangente en a , esto podría darnos información sobre existencia de tangentes respecto al conjunto E .

Definición 2.4.1. Dada una sucesión de medidas de Radon μ_k y una medida μ decimos que $\mu_k \rightarrow \mu$ o que μ_k converge débilmente a μ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \quad (2.4)$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (funciones continuas de soporte compacto en \mathbb{R}^n).

Incluimos en el siguiente lema algunas equivalencias al respecto.

Lema 2.4.2. *En general se tiene que son equivalentes:*

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$ para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.
2. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$ para todo K compacto y $\mu(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$ para todo U abierto.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ para todo B boreliano acotado con $\mu(\partial B) = 0$.

Vamos a necesitar un criterio de compacidad de medidas de Radon respecto a la convergencia débil.

Teorema 2.4.3. *Si μ_k es una sucesión de medidas de Radon en \mathbb{R}^n que satisfacen para todo compacto K la acotación uniforme $\sup_k \mu_k(K) < \infty$, entonces existe una subsucesión μ_{k_j} de medidas que converge débil a una medida μ de Radon.*

La demostración de los últimos dos resultados se puede encontrar en [EG15].

2.5. Densidades

Sea s un real no negativo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Definimos las s -densidades superior e inferior como:

$$\Theta^{*s}(A, a) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a, r))}{\omega_s(2r)^s},$$

$$\Theta_*^s(A, a) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a, r))}{\omega_s(2r)^s},$$

Si coinciden las densidades su valor se llama la s -densidad y se denota

$$\Theta^s(A, a) = \Theta^{*s}(A, a) = \Theta_*^s(A, a). \quad (2.5)$$

Lema 2.5.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Entonces vales las siguientes propiedades:*

1. $2^{-s} \leq \Theta^{*s}(A, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^s casi todo $x \in A$.
2. Si A es \mathcal{H}^s medible, entonces $\Theta^{*s}(A, x) = 0$ para \mathcal{H}^s casi todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

El lema recién enunciado es conocido en el área. Referimos al lector a cualquier libro de Teoría Geométrica de la Medida. Por ejemplo al capítulo 6 de [Mat95]. La estrategia de la demostración utiliza para pasar de cotas locales a cotas en medida un lema de cubrimiento de Vitali. El lector familiarizado con la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue recordará que se utiliza un lema de cubrimientos en su demostración. En la última, uno tiene cotas sobre el comportamiento de la función maximal que se traducen en cotas de integrales sobre bolas no necesariamente disjuntas. La forma de “disjuntarlas” es vía un lema de cubrimientos. Los lemas de cubrimientos aparecen de la misma manera acá.

Corolario 2.5.2. *Sean A y B conjuntos \mathcal{H}^s medibles en \mathbb{R}^n , con $B \subseteq A$ y $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Entonces para \mathcal{H}^s casi todo $x \in B$, vale que*

$$\Theta^{*s}(A, x) = \Theta^{*s}(B, x) \quad y \quad \Theta_*^s(A, x) = \Theta_*^s(B, x).$$

Demostración. Sale de aplicar el segundo ítem del Lema 2.5.1 a $A \setminus B$. □

Capítulo 3

Conjuntos cerrados y algunas nociones de convergencia

En este capítulo estudiaremos sobre nociones de convergencia de conjuntos cerrados. Una referencia posible es [Bee93] que usaremos para la demostración de la primera proposición. La mayoría de los resultados incluidos en este capítulo son demostraciones originales y por lo tanto no seguimos detalladamente ninguna referencia clásica. También estudiaremos ciertos resultados relacionados a la Grasmanniana, algunos de los cuales pueden encontrarse en [Kar17].

3.1. Topología Attouch-Wets y distancia de Hausdorff

En esta sección lo que nos interesará es desarrollar una noción de convergencia de conjuntos cerrados. El ejemplo que daremos será esencialmente el mismo que el que dimos para medidas pero acá tendrá un sabor distinto. Recordamos $T_{a,r}(x) = \frac{x-a}{r}$. Si tomamos $T_{a,r}(E)$, esto es hacer zoom en el conjunto E en el punto a y centrarlo en el origen. Cuando achicamos r estaremos viendo como se ve el conjunto a escalas más pequeñas. Si elegimos λ_n una sucesión decreciente que converge a cero, si $T_{a,\lambda_n}(E)$ converge en algún sentido a algún conjunto cuando n tiende a ∞ entonces ese conjunto puede darnos información sobre la estructura del conjunto original.

Si esta sucesión de conjuntos cerrados convergiese en algún sentido a algún conjunto cerrado entonces ese conjunto capturaría el comportamiento local cerca de ese punto. Este procedimiento de Blowup claramente es de interés porque nos interesará estudiar cuando podemos conseguir un espacio tangente y cuando no.

La topología de Attouch-Wets saldrá de emparejar conjuntos con sus funciones de distancia.

Dado un espacio métrico completo (X, d) a cada conjunto cerrado A le podemos asociar su función de distancia $d(x, A) := \text{dist}(x, A)$.

Proposición 3.1.1. *Sea A_n una familia de conjuntos cerrados de un espacio métrico completo (X, d) . Consideramos la familia de funciones $f_n := \text{dist}(\cdot, A_n)$. Si f_n converge uniformemente sobre conjuntos acotados a una función f entonces existe un conjunto cerrado A tal que $f(x) = d(x, A)$.*

La topología de Attouch-Wets se obtiene al declarar que si sucede lo recién descrito entonces A_n converge a A . Es decir si $CL(X)$ son los conjuntos cerrados de X , la topología que le daremos será la de subespacio de $C(X)$ mediante la identificación recién descrita. Notar que este espacio es un espacio métrico con la métrica d_U definida como

$$d_U(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min \left\{ 1, \sup_{d(x, x_0) < i} |f(x) - g(x)| \right\}. \quad (3.1)$$

Aquí x_0 es un punto fijo arbitrario en X y todas las métricas obtenidas a partir de distintas elecciones de x_0 resultan equivalentes.

La proposición muestra que el espacio de nuestro interés es cerrado. Luego por ser un subespacio cerrado del espacio de funciones continuas sobre X , que es un espacio métrico completo, el espacio $CL(X)$ será un espacio métrico completo.

Demostración. Definimos $A = \{x : f(x) = 0\}$. Sabemos que es cerrado porque f es continua. Queremos ver que $f(x) = d(x, A)$. Afirmando que si veo que $d(x, A) \leq f(x)$ para todo x entonces tendré que $f(x) = d(x, A)$.

Supongamos que tengo x_0 con $d(x_0, A) = f(x_0) - \varepsilon$. Luego existe $a \in A$ tal que $d(x_0, a) < d(x_0, A) + \frac{\varepsilon}{3}$. Existe n tal que

$$|f(x_0) - d(x_0, A_n)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f(a) - d(x_0, A_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $f(a) = 0$, tenemos que

$$f(x_0) < d(x_0, A) + \frac{\varepsilon}{3} < d(x, a) + d(a, A_n) + \frac{\varepsilon}{3} < d(x, a) + f(a) + \frac{2\varepsilon}{3} < d(x, A) + \varepsilon,$$

lo cual es un absurdo. Esto concluye la afirmación que hicimos. Luego basta con demostrar que $d(x, A) \leq f(x)$.

Fijamos x_0 en X con $f(x_0) = \alpha$. Luego queremos ver que $d(x_0, A) \leq f(x_0)$. Dado $\varepsilon > 0$ veremos que $d(x_0, A) \leq \alpha + 2\varepsilon$. Como f_n converge uniformemente sobre compactos entonces sobre $\overline{B}_{\alpha+2\varepsilon}(x_0)$ convergerán uniformemente a f . Luego allí f_n son uniformemente de Cauchy y podemos considerar f_{n_k} tales que si $x \in \overline{B}_{\alpha+2\varepsilon}(x_0)$ y $M, N > n_k$ entonces

$$|f_M(x) - f_N(x)| < 2^{-k-1}\varepsilon.$$

De lo anterior tenemos

$$d(x_0, A_{n_0}) \leq d(x_0, A_N) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y tomándole límite nos queda que

$$d(x_0, A_{n_0}) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

concluimos entonces que $d(x_0, A_{n_0}) \leq d(x_0, A_{n_1}) < \alpha + \varepsilon$.

Construiremos una sucesión que cumple que si $k \geq 1$, entonces $x_k \in A_{n_k}$ y comienza para $k = 0$ con el x_0 que elegimos. Esta sucesión convergerá a un elemento w de A que cumplirá $d(w, x_0) < \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon$. Fijado $x_k \in A_{n_k}$ tal que

$$d(x_k, x_0) < \alpha + \varepsilon \left(1 + \sum_{i=2}^k 2^{-i} \right) < \alpha + 2\varepsilon,$$

elegiremos $x_{k+1} \in A_{n_{k+1}}$ tal que $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k-1}\varepsilon$. Esto se puede hacer porque como $x_k \in \overline{B}_{\alpha+2\varepsilon}(x_0)$ entonces

$$d(x_k, A_{n_{k+1}}) = f_{n_{k+1}}(x_k) - f_{n_k}(x_k) < 2^{-k-1}\varepsilon.$$

Esto implica nuevamente que

$$d(x_{k+1}, x_0) < \alpha + \varepsilon \left(1 + \sum_{i=2}^k 2^{-i} \right).$$

y podemos proceder la construcción por inducción.

Como $d(x_k, x_{k+1}) \leq 2^{-k+1}\varepsilon$ entonces esta sucesión es de Cauchy en un espacio métrico completo y luego converge. Llamamos w al elemento al que converge. Tomándole límite a la cota de distancia tenemos que $d(x_0, w) < \alpha + 2\varepsilon$. Luego,

$$f(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, A_{n_k}) = 0,$$

donde en el anteúltimo paso usamos que la sucesión converge junto a que las distancias convergen uniformemente sobre la bola cerrada que estamos observando. Esto implica que $w \in A$ y luego tenemos la cota deseada. \square

En general la usaremos en \mathbb{R}^n donde la convergencia uniforme sobre acotados será uniforme sobre compactos. Esta noción de convergencia es una versión local de la convergencia dada por la distancia de Hausdorff. Por eso nos referiremos a esta convergencia como que convergen en sentido local de Hausdorff. En la bibliografía puede ser encontrado como que convergen en la topología de Attouch-Wets.

Lo que nos será útil será el siguiente resultado de compacidad.

Lema 3.1.2. *Dados E_i una sucesión de cerrados en \mathbb{R}^n con*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} d(0, E_i) < \infty,$$

existe una subsucesión E_{i_k} tal que convergen en sentido local de Hausdorff a un conjunto cerrado E no vacío en \mathbb{R}^n .

La condición

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} d(0, E_i) < \infty$$

evita el contraejemplo molesto en el que los conjuntos “se escapan al ∞ ”. Si tomamos un conjunto compacto A y definimos los conjuntos $A_j = A + v_j$ donde v_j es una sucesión de vectores en \mathbb{R}^n con $|v_j| \rightarrow \infty$, entonces “ $A_j \rightarrow \emptyset$ ” en sentido local de Hausdorff.

Demostración. Consideramos las funciones de distancia $f_i(x) = d(x, E_i)$. La condición de que

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} d(0, E_i) < \infty$$

nos permite quedarnos con una subsucesión para la que $f_i(0)$ esta uniformemente acotado. Supongamos que estamos en tal subsucesión (solo requiere renombrar los índices). Llamamos M a la cota uniforme para $f_i(0)$. Por desigualdad triangular tenemos que

$$f_i(x) \leq f_i(0) + |x| \leq M + |x|.$$

Sabemos que las funciones f_i son Lipschitz de constante 1 y luego son uniformemente equicontinuas. Si las restringimos a una bola $\overline{B}_r(0)$ allí estarán uniformemente acotadas por $M + r$. Construiremos la subsucesión mediante un argumento diagonal y el uso del teorema de Arzela Ascoli.

Llamamos f_i^0 a la sucesión f_i . Por el teorema de Arzelá Ascoli existe una subsucesión f_i^1 de f_i^0 tal que f_i^1 converge uniformemente sobre la bola $\overline{B}_1(0)$. Dada la subsucesión f_i^j que converge uniformemente en $\overline{B}_j(0)$ definimos f_i^{j+1} como una subsucesión de la anterior que converge uniformemente en $\overline{B}_{j+1}(0)$. Luego consideramos la subsucesión de f_i definida por $f_{i_k} = f_k^k$. Esta sucesión converge uniformemente sobre $\overline{B}_j(0)$ para todo j , ya que si restringimos $\{f_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ a $k > j$ esta es una subsucesión de f_i^j . Así concluimos que f_{i_k} converge uniformemente sobre compactos y luego por la proposición anterior es la función de distancia a un conjunto cerrado E . Este conjunto E es el buscado. \square

Proposición 3.1.3. *Sea E_i una sucesión de cerrados no vacíos en \mathbb{R}^n que converge en sentido local de Hausdorff a E . Existe un compacto K tal que $E \cap K = \emptyset$ si y solo si K interseca a finitos E_i .*

Demostración. Si $E \cap K = \emptyset$ entonces $f = d(\cdot, E)$ debe ser estrictamente positiva sobre K . Como K es compacto y f es continua, entonces alcanza un mínimo sobre K . Si llamamos m a ese mínimo entonces tendremos $f(x) \geq m > 0$ para todo $x \in K$. Como $f_i = d(\cdot, E_i)$ converge uniformemente sobre K a f entonces existe N tal que si $i > N$, $f_i(x) \geq \frac{m}{2} > 0$ para todo $x \in K$. Luego para todo $i > N$ E_i no interseca a K .

Si tenemos una sucesión i_k tal que $E_{i_k} \cap K \neq \emptyset$ entonces existe una sucesión de puntos $x_k \in E_{i_k} \cap K$. Como K es compacto entonces existe una subsucesión x_{k_j} que converge a un punto x en K . Como f es continua, $f(x_{k_j})$ converge a $f(x)$. Al tener además que $f_{i_{k_j}}$ converge uniformemente sobre K tenemos entonces que $0 = f_{i_{k_j}}(x_{k_j})$ converge a $f(x)$. Luego $f(x) = 0$ y de ahí que $x \in E \cap K$. \square

Corolario 3.1.4. *Sea E_i es una sucesión de conjuntos cerrados en \mathbb{R}^n tal que todos intersecan a un compacto K . Entonces existe una subsucesión E_{i_k} de conjuntos que converge a un conjunto E tal que interseca a un compacto K .*

Demostración. Basta utilizar las dos proposiciones anteriores. La condición nos dice que

$$d(0, E_i) \leq \max\{|x| : x \in K\},$$

de manera que satisfacen las hipótesis de la primera proposición. Eso nos deja tomar una subsucesión que converja. Esa subsucesión tiene intersección no vacía con K por la proposición anterior. \square

Proposición 3.1.5. *Si A_j, B_j son familias de cerrados que convergen a cerrados A y B en sentido local de Hausdorff entonces:*

1. $A_j \cup B_j$ converge en sentido local de Hausdorff $A \cup B$.
2. Si $A_j \subseteq B_j$, entonces $A \subseteq B$.

Demostración. El primer ítem sale de notar que la función de distancia de la unión de dos conjuntos es el mínimo de las funciones de distancia. Si a_j, a, b_j, b son las funciones de distancia para A_j, A, B_j, B tenemos entonces que la función de distancia para $A_j \cup B_j$ es $\min\{a_j, b_j\}$, la función de distancia para $A \cup B$ es $\min\{a, b\}$.

Como $a_j \rightarrow a$ y $b_j \rightarrow b$ uniformemente sobre compactos entonces $\min\{a_j, b_j\} \rightarrow \min\{a, b\}$ uniformemente sobre compactos.

El segundo ítem se debe a que la condición de contención implica $a_j \geq b_j$ y luego $a \geq b$. Como $a \geq b$ entonces si $a = 0$ tenemos que $b = 0$, esto implica que $A \subseteq B$. \square

Definición 3.1.6. Dados dos conjuntos A y B la distancia de Hausdorff entre A y B se define como

$$d_H(A, B) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\text{dist}(x, A) - \text{dist}(x, B)|.$$

Una sucesión E_j de conjuntos cerrados converge en la distancia de Hausdorff a un conjunto cerrado E si y solo si las funciones de distancia asociadas a E_j convergen uniformemente a la función de distancia asociada a E .

Proposición 3.1.7. *Si E y F son dos conjuntos cerrados contenidos en un cerrado A entonces*

$$d_H(E, F) = \sup_{x \in A} |\text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, F)|$$

En particular se puede tomar $A = E \cup F$ que es el cerrado más pequeño en el que pase eso.

Si A es compacto, entonces la proposición dice que la distancia de Hausdorff se puede computar localmente (recordar que en la definición de la distancia de Hausdorff permitimos que x este en \mathbb{R}^n al tomar supremo).

Demostración. Sea $d_E = \text{dist}(\cdot, E)$, $d_F = \text{dist}(\cdot, F)$. Sea

$$\alpha = \sup_{x \in A} |\text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, F)|.$$

Como E es cerrado podemos tomar $x \in E$ tal que $|p - x| = d_E(p)$. Tenemos entonces que $d_E(x) = 0$ y de ahí que $d_F(x) \leq \alpha_j$. Como F es cerrado esto significa que existe $y \in F$ tal que $|x - y| \leq \alpha$. Entonces por desigualdad triangular

$$d_F(p) \leq |p - y| \leq |p - x| + |x - y| \leq d_E(p) + \alpha$$

Lo que acabamos de demostrar era simétrico en ambos conjuntos, es decir, si intercambiamos los roles de E y F obtenemos $d_E(p) \leq d_F(p) + \alpha$. Esto demuestra que $|d_E(p) - d_F(p)| \leq \alpha$ para todo p . Entonces

$$d_H(E, F) \leq \sup_{x \in A} |\text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, F)|.$$

La otra desigualdad es trivialmente válida porque el primero es un supremo sobre un conjunto más grande. \square

Definición 3.1.8. Dados dos conjuntos cerrados no vacíos E y F definimos

$$\text{excess}(E, F) := \sup_{x \in E} d(x, F).$$

Corolario 3.1.9. *Dados dos conjuntos cerrados E y F no vacíos vale que*

$$d_H(E, F) = \max\{\text{excess}(E, F), \text{excess}(F, E)\}$$

Demostración. Usamos la Proposición 3.1.7 con $A = E \cup F$. Entonces al computar el supremo tenemos que considerar dos casos $x \in E$ y $x \in F$. Si $x \in E$:

$$\sup_{x \in E} |d(x, E) - d(x, F)| = \sup_{x \in E} d(x, F) = \text{excess}(E, F).$$

En el otro caso el supremo nos da $\text{excess}(E, F)$. De aquí se concluye la fórmula. \square

Lema 3.1.10. *Si $E_j \subseteq K$ es una familia de cerrados en \mathbb{R}^n contenidos en un compacto K , entonces $E_j \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff si y solo si $\text{dist}(\cdot, E_j) \rightarrow \text{dist}(\cdot, E)$ uniformemente sobre K . Esto es equivalente a que $E_j \rightarrow E$ en la distancia de Hausdorff.*

Demostración. Llamamos $d_j = \text{dist}(\cdot, E_j)$, $d = \text{dist}(\cdot, E)$. Si $E_j \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff entonces $d_j \rightarrow d$ uniformemente sobre compactos. Sean

$$\alpha_j = \sup_{x \in K} |\text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, E_j)|.$$

La condición de que d_j converja a d uniformemente sobre K se traduce a que $\alpha_j \rightarrow 0$.

Por la Proposición 3.1.7 tenemos que $d_H(E, E_j) = \alpha_j$ ya que todos los conjuntos están contenidos en K . Como $\alpha_j \rightarrow 0$ entonces los conjuntos E_j convergen en la distancia de Hausdorff a E y luego sus funciones de distancia convergen uniformemente. En particular convergen uniformemente sobre compactos y luego $E_j \rightarrow E$ en el sentido local de Hausdorff. \square

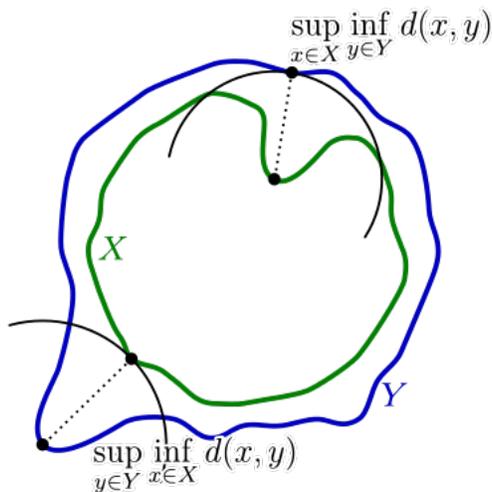


Figura 3.1: Wikipedia Hausdorff Distance.

Ejemplo 3.1.11. En la Figura 3.1 vemos marcadas dos parejas de puntos donde se alcanzan ambos excess.

Lema 3.1.12. *Sea A un conjunto compacto. Si tenemos transformaciones afines T_n que convergen a T afín entonces $T_n A$ converge a TA en la distancia de Hausdorff. Con la convergencia de transformaciones afines nos referimos a que si $T_n(x) = S_n(x) + v_n$ y $T(x) = S(x) + v$ con $S_n \rightarrow S$ transformaciones lineales inversibles en norma de operador y $v_n \rightarrow v$ vectores en norma.*

Demostración. La observación que utilizaremos es que se puede acotar la distancia de Hausdorff utilizando que $T_n(x)$ esta uniformemente cerca de $T(x)$ en n y $x \in A$. Más precisamente tenemos que

$$d(T_n(x), T(x)) = d(S_n(x) + v_n, S(x) + v) \leq |S_n(x) - S(x)| + |v_n - v| \leq \|S_n - S\| \|x\| + |v_n - v|.$$

Si definimos $\alpha = \sup\{\|x\| : x \in A\}$ entonces podemos pasar de la acotación anterior a

$$\text{excess}(T_n A, TA) \leq \sup_{x \in A} d(T_n(x), T(x)) \leq \|S_n - S\| \alpha + |v_n - v|.$$

De la misma forma $\text{excess}(TA, T_n A) \leq \|S_n - S\| \alpha + |v_n - v|$. Podemos entonces concluir $d_H(T_n A, TA) \leq \|S_n - S\| \alpha + |v_n - v|$. Como lo último tiende a cero cuando n tiende a infinito entonces $T_n A$ converge a TA en la distancia de Hausdorff. \square

La demostración anterior se puede adaptar para demostrar que si A es cerrado y $T_n \rightarrow T$ transformaciones afines, entonces $T_n A \rightarrow TA$ en sentido local de Hausdorff.

Podemos deducir del lema anterior dos corolarios inmediatos.

Corolario 3.1.13. *Si x_n son puntos en \mathbb{R}^n que convergen a x , r_n son reales positivos que convergen a un real positivo r , entonces $\overline{B(x_n, r_n)} \rightarrow \overline{B(x, r)}$ en la distancia de Hausdorff.*

Como nosotros estudiaremos las esferas también no será útil este corolario.

Corolario 3.1.14. *Si x_n son puntos en \mathbb{R}^n que convergen a x , r_n son reales positivos que convergen a un real positivo r , entonces $\partial B(x_n, r_n) \rightarrow \partial B(x, r)$ en la distancia de Hausdorff.*

Proposición 3.1.15. *Si E_j, E son cerrados tales que $E_j \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff entonces $\text{diam}(E) \leq \liminf \text{diam}(E_j)$. Si están contenidos todos adentro de un compacto K entonces $\text{diam}(E) = \lim \text{diam}(E_j)$.*

Podemos observar que la hipótesis de que estén contenidos en un compacto es necesaria ya que si $E_j = \{0\} \cup \{j\}$ y $E = \{0\}$ entonces $E_j \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff. Como $\text{diam}(E_j) = j$, entonces $\lim \text{diam}(E_j) = \infty$ y $\text{diam}(E) = 0$.

Demostración. Si tenemos x e y en E sabemos que existe $x_j \rightarrow x, y_j \rightarrow y$ con $x_j, y_j \in E_j$. Luego,

$$|x - y| \leq \liminf \text{diam}(E_j).$$

Entonces vale que

$$\text{diam}(E) \leq \liminf \text{diam}(E_j).$$

Tomamos x_j y y_j en E_j tales que $|x_j - y_j| = \text{diam}(E_j)$. Tomando una subsucesión j_k podemos conseguir que

$$\lim |x_{j_k} - y_{j_k}| = \limsup \text{diam}(E_j).$$

Luego tomando otra subsucesión y renombrando podemos conseguir que x_{j_k} y y_{j_k} converjan a x e y . Tenemos que x e y están ambos en E ya que

$$\text{dist}(x, E_{j_k}) \leq |x - x_{j_k}| \rightarrow 0$$

(y análogamente para y). Luego

$$|x - y| \geq \limsup |x_{j_k} - y_{j_k}| = \limsup \text{diam}(E_j).$$

□

A continuación incluimos un lema que en algún sentido nos dice que los soportes de las medidas tienen cierta propiedad de “semicontinuidad inferior”.

Lema 3.1.16. Sean E_j, E son cerrados tales que $E_j \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff. Sean μ_j medidas de Radon con $\text{supp}(\mu_j) \subseteq E_j$. Si la sucesión de medidas μ_j converge débilmente a μ entonces $\text{supp}(\mu) \subseteq E$.

Podemos ser aún más precisos con a que nos referimos al decir que esta propiedad refiere a una especie de semicontinuidad inferior. Por un lado, el lema esta diciendo que las cotas superiores, en un sentido de contención de conjuntos, “pasan al límite”. Por el otro lado, si tenemos $\text{supp}(\mu_{j_k}) \rightarrow F$ entonces $\text{supp}(\mu) \subseteq F$. Esto último implica que $\text{supp}(\mu)$ es un cerrado que esta contenido en la intersección de todos los límites de subsucesiones de soportes.

Demostración. Sabemos que dado un abierto U , $\mu(U) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_j(U)$. Sea

$$U_R^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E) > \frac{1}{i} \text{ y } |x| < R \right\}.$$

Entonces es un abierto de clausura compacta. Como su clausura no interseca a E , entonces intersecará a finitos E_j por el Lema 3.1.2. Luego si j es lo suficientemente grande $\mu_j(U_R^i) = 0$ ya que el abierto no interseca al soporte de μ_j . Haciendo R tender a infinito en los naturales y i tender a cero tenemos $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$. Como E es cerrado, el soporte de la medida debe estar en E . \square

3.2. Los coeficientes $\beta_{\infty, E}^d$

Definición 3.2.1. Dado un conjunto E definimos los coeficientes β_{∞}^d d -dimensionales como:

$$\beta_{\infty, E}^d(x, r) = \frac{1}{r} \inf_{\substack{P \text{ plano de dimensión } d \\ P \cap B(x, r) \neq \emptyset}} \sup_{y \in E \cap \overline{B(x, r)}} \text{dist}(y, P). \quad (3.2)$$

Más tarde obviaremos la dimensión d en la notación y trabajaremos con $d = n - 1$ porque estaremos interesados en estudiar el comportamiento de hipersuperficies.

Llamamos $Gr(d, n)$ a la variedad Grasmanniana de planos de dimensión d que pasan por el origen en \mathbb{R}^n . Esto es una variedad diferenciable de dimensión $d(n - d)$. Lo podemos ver como un espacio métrico de dos formas equivalentes.

Dados dos planos P_1 y P_2 que pasan por el origen se puede tomar:

1. La distancia de Hausdorff al restringirlos a la bola unitaria, esto es

$$d_H \left(P_1 \cap \overline{B(0, 1)}, P_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right).$$

2. Si consideramos π_1 y π_2 las proyecciones ortogonales en P_1 y P_2 entonces la distancia será $\|\pi_1 - \pi_2\|$ donde la norma es la de operadores lineales.

Ambas definiciones tienen sentido. Las dos resultan definir la misma distancia como veremos en la siguiente Proposición:

Proposición 3.2.2. *Las distancias coinciden y el espacio métrico que se obtiene al equipar a la Grasmanniana con esta distancia es compacto. En \mathbb{R}^2 si el ángulo euclídeo entre dos rectas es θ , entonces la distancia que describimos será $\cos \theta$.*

Si tomamos P_1^\perp y P_2^\perp sus complementos ortogonales, que son elementos de $Gr(n-d, n)$, la distancia entre P_1 y P_2 en $Gr(d, n)$ coincide con la distancia entre P_1^\perp y P_2^\perp en $Gr(n-d, n)$. En particular se puede entender el ángulo entre hiperplanos vía el ángulo entre sus rectas normales.

Demostración. Empezamos viendo que el espacio métrico determinado por equipar a la Grasmanniana con la primera distancia es compacto. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{d+1} = \dots = x_n = 0 \text{ y } \|x\| \leq 1\}$$

y notemos tres hechos: este conjunto es compacto, para cada plano P existe una transformación ortogonal O_P tal que $O_P(A) = P \cap \overline{B(0, 1)}$ y además el conjunto de las matrices ortogonales son un espacio métrico compacto con la norma de operador. Esto se puede ver de la siguiente forma: si miramos a las transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^{n^2} la norma de operador es una norma en \mathbb{R}^{n^2} . Todas las normas son equivalentes en \mathbb{R}^{n^2} y sus bolas son compactas. Las matrices ortogonales se caracterizan por cumplir $O^t O = Id$. Como esta condición es estable por límites entonces las matrices ortogonales son un subespacio cerrado de la bola unitaria de las matrices con la norma de operador y luego un subespacio métrico compacto.

Si tenemos una sucesión de d -planos P_n , utilizando la compacidad del espacio de las transformaciones ortogonales podemos conseguir una subsucesión P_{n_k} tal que las $O_{P_{n_k}}$ asociadas converjan a una transformación ortogonal O . Por el Lema 3.1.12 tenemos que $O_{P_{n_k}} A \rightarrow OA$ en la distancia de Hausdorff. El plano que corresponde a extender OA es entonces un límite de la subsucesión de planos P_{n_k} .

Sea $K = (P_1 \cup P_2) \cap \overline{B(0, 1)}$. Por la Proposición 3.1.7 podemos computar la primera distancia utilizando sólo al conjunto K . Esto significa que sólo usamos a elementos en $(P_1 \cup P_2) \cap \overline{B(0, 1)}$

Dado un punto x , $\pi_1(x)$ es el punto más cercano de x a P_1 y $\pi_2(x)$ es el punto más cercano de x a P_2 . Entonces si $x \in K$ sabemos que $x \in P_1$ o $x \in P_2$. Si $x \in P_2$, $\pi_1(x) = x$. Esto implica que

$$|x - \pi_1(x)| - |x - \pi_2(x)| = |\pi_1(x) - \pi_2(x)| \leq \|\pi_1 - \pi_2\|.$$

Análogamente si $x \in P_1$. Esto implica directamente que

$$d_H \left(P_1 \cap \overline{B(0, 1)}, P_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right) \leq \|\pi_1 - \pi_2\|.$$

Nos queda entonces demostrar que es cierta la desigualdad opuesta. Sabemos que la proyección ortogonal a P_1^\perp es $I - \pi_1$ y la proyección ortogonal a P_2^\perp es $I - \pi_2$. Luego

$$(I - \pi_1) - (I - \pi_2) = \pi_2 - \pi_1,$$

lo que implica que

$$\|(I - \pi_1) - (I - \pi_2)\| = \|\pi_1 - \pi_2\|.$$

Esto implica que las distancias dadas por la segunda definición coinciden entre P_1 y P_2 que entre P_1^\perp y P_2^\perp . Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \rho_1 &:= \text{excess} \left(P_1 \cap \overline{B(0,1)}, P_2 \cap \overline{B(0,1)} \right) \\ &= \sup_{x \in P_1 \cap \overline{B(0,1)}} \text{dist}(x, P_2 \cap \overline{B(0,1)}) \\ &= \sup_{x \in P_1 \cap \overline{B(0,1)}} \text{dist}(x, P_2). \end{aligned}$$

Es decir ρ_1 es la mayor distancia posible entre un punto de $P_1 \cap \overline{B(0,1)}$ a P_2 . Análogamente $\rho_2 := \text{excess} \left(P_2 \cap \overline{B(0,1)}, P_1 \cap \overline{B(0,1)} \right)$ y de la misma forma ρ_2 es la mayor distancia posible entre un punto de $P_2 \cap \overline{B(0,1)}$ a P_1 .

Como $\pi_1 x \in P_1 \cap \overline{B(0,1)}$ y $I - \pi_2$ es la diferencia entre un punto y su proyección entonces vale que

$$|(I - \pi_2)\pi_1(x)| \leq \rho_1 |\pi_1(x)|. \quad (3.3)$$

Análogamente

$$|(I - \pi_1)\pi_2(x)| \leq \rho_2 |\pi_2(x)|. \quad (3.4)$$

Tenemos entonces que

$$|\pi_1(I - \pi_2)x|^2 = \langle \pi_1(I - \pi_2)x, \pi_1(I - \pi_2)x \rangle = \langle \pi_1(I - \pi_2)x, (I - \pi_2)x \rangle.$$

En el último paso estamos usando que $\pi_1(I - \pi_2)x$ es ortogonal a $(I - \pi_1)(I - \pi_2)x$. Como $(I - \pi_2)^2 = (I - \pi_2)$ por ser proyector y además $I - \pi_2$ es autoadjunto, entonces

$$\langle \pi_1(I - \pi_2)x, (I - \pi_2)x \rangle = \langle \pi_1(I - \pi_2)x, (I - \pi_2)^2 x \rangle = \langle (I - \pi_2)\pi_1(I - \pi_2)x, (I - \pi_2)x \rangle,$$

donde en el último paso usamos que es autoadjunto. Juntando la cadena de igualdades tenemos que

$$|\pi_1(I - \pi_2)x|^2 = \langle (I - \pi_2)\pi_1(I - \pi_2)x, (I - \pi_2)x \rangle \leq |(I - \pi_2)\pi_1(I - \pi_2)x| |(I - \pi_2)x|,$$

usando al final la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Ahora usando (3.3) tenemos que

$$|\pi_1(I - \pi_2)x|^2 \leq \rho_1 |\pi_1(I - \pi_2)x| |(I - \pi_2)x|.$$

Esto implica que

$$|\pi_1(I - \pi_2)x| \leq \rho_1 |(I - \pi_2)x|.$$

Ahora usando la descomposición $\pi_1 - \pi_2 = \pi_1(I - \pi_2) - (I - \pi_1)\pi_2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |(\pi_1 - \pi_2)x|^2 &= |\pi_1(I - \pi_2)x|^2 + |(I - \pi_1)\pi_2x|^2 \\ &\leq \rho_1^2 |(I - \pi_2)x|^2 + \rho_2^2 |\pi_2x|^2 \\ &\leq \max\{\rho_1^2, \rho_2^2\} |x|^2. \end{aligned}$$

Aquí estamos usando el teorema de Pitágoras en el primer paso vía el hecho de que π_1 es un proyector ortogonal y en el último paso vía que π_2 es un proyector ortogonal. Esto concluye que

$$\|\pi_1 - \pi_2\| \leq \max\{\rho_1, \rho_2\} = d_H \left(P_1 \cap \overline{B(0, 1)}, P_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right).$$

Ahora, si L_1 y L_2 son rectas por el origen con ángulo θ , queremos calcular

$$d_H \left(L_1 \cap \overline{B(0, 1)}, L_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right).$$

Sabemos que el máximo de

$$\text{excess} \left(L_1 \cap \overline{B(0, 1)}, L_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right)$$

se alcanza en $\partial B(0, 1)$. Si se alcanzase en $x \in \partial B(0, r)$ con $r < 1$, al hacer una homotecia que mande $\partial B(0, r)$ en $\partial B(0, 1)$ se agranda la distancia $\text{dist}(x, L_2)$. Ahora, en el caso de que $x \in L_1 \cap \partial B(0, 1)$, sabemos que $\text{dist}(x, L_2) = \cos \theta$ por trigonometría básica. Esto nos dice que

$$\text{excess} \left(L_1 \cap \overline{B(0, 1)}, L_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right) = \cos \theta.$$

El resultado es analogo cambiando L_1 por L_2 . Esto nos permite concluir como deseábamos que

$$d_H \left(L_1 \cap \overline{B(0, 1)}, L_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right) = \cos \theta.$$

□

La distancia en la Grasmanniana nos permite definir la siguiente noción de ángulo:

Definición 3.2.3. Dados dos planos P_1 y P_2 , denotamos con P'_1, P'_2 a los planos que se obtienen por trasladar a P_1 y a P_2 para que pasen por el origen. El ángulo entre P_1 y P_2 se define como:

$$\angle(P_1, P_2) = d_H \left(P'_1 \cap \overline{B(0, 1)}, P'_2 \cap \overline{B(0, 1)} \right)$$

Esto funciona bien como un ángulo entre planos. Esta distancia es invariante por la acción del grupo ortogonal. Es decir, si tomamos O una transformación ortogonal, entonces $\angle(OP_1, OP_2) = \angle(P_1, P_2)$. Esto se debe a que al tomarles la distancia podemos usar en realidad la norma de operador de los proyectores. Esto se debe a que si π es la proyección ortogonal al plano P , entonces $O\pi O^{-1}$ es la proyección ortogonal al plano $O(P)$. Las transformaciones ortogonales no modifican norma de operador. Esto es una coherencia que uno esperaría para una buena noción de ángulo.

Vimos como se pueden metrizar los planos que pasan por el origen. Ahora podemos ver como metrizar los planos afines.

Dado un plano afín P de dimensión d lo podemos pensar como (x, V) donde $x \in V$ es la proyección ortogonal del origen sobre P y $V \in G(d, n)$. La pareja (x, V) determina unívocamente al plano P . Sabemos por un lado que $P = x + V$ y por el otro, la proyección ortogonal está bien definida y después obtenemos $V = P - x$. Entonces el espacio que tenemos será

$$\{(x, V) : x \in \mathbb{R}^n, V \in G(d, n), x \perp V\}.$$

Una posible forma de metrizarlo es

$$d((x_1, V_1), (x_2, V_2)) = |x_1 - x_2| + \angle(V_1, V_2). \quad (3.5)$$

Sujeto a la restricción obvia tenemos un resultado de compacidad.

Proposición 3.2.4. *Dada una sucesión de planos P_j para los que*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} d(0, P_j) < \infty,$$

existe una subsucesión $P_{j_k} \rightarrow P$ en la distancia d definida por (3.5).

Demostración. Restringiéndonos a una subsucesión suponemos que $d(0, P_j)$ está acotado en j : luego si los escribimos como (x_j, V_j) tenemos que $|x_j| = d(0, P_j)$, entonces la sucesión x_j está acotada. Consideramos una subsucesión en la que x_{j_k} converja en norma y V_{j_k} converja en ángulo. Luego si $x_{j_k} \rightarrow x$ en norma y $V_{j_k} \rightarrow V$ en ángulo, entonces $(x_{j_k}, V_{j_k}) \rightarrow (x, V)$ en la distancia (3.5). Sabemos que $\angle(V_{j_k}, V) = \angle(V_{j_k}^\perp, V^\perp)$, lo que implica que $V_{j_k}^\perp \rightarrow V^\perp$ en ángulo. Si $x = 0$, $x \perp V$ es trivialmente cierto. Si $x \neq 0$, entonces $x_{j_k} \neq 0$ si k es lo suficientemente grande y luego $x_{j_k}/|x_{j_k}| \rightarrow x/|x|$ (donde esto tiene sentido cuando se dejan de anular). Como

$$\frac{x_{j_k}}{|x_{j_k}|} \in \overline{B(0, 1)} \cap V_{j_k}^\perp$$

y $V_{j_k}^\perp \cap \overline{B(0, 1)}$ converge en la distancia de Hausdorff a $V^\perp \cap \overline{B(0, 1)}$ (ya que es la definición del ángulo), entonces

$$\frac{x}{|x|} \in V^\perp \cap \overline{B(0, 1)}.$$

□

Lema 3.2.5. *Si P_j es una sucesión de planos que converge en la distancia d definida por (3.5) a un plano P , entonces $P_j \rightarrow P$ en sentido local de Hausdorff.*

Demostración. Si convergen en la distancia d , entonces sabemos que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} d(0, P_j) < \infty$$

ya que las proyecciones ortogonales del 0 en P_j convergen a la proyección ortogonal del 0 en P . Sean V_j, V los planos P_j, P trasladados al origen y u_j, u las proyecciones ortogonales del origen en P_j, P . Como la distancia es invariante por traslación supondremos que $u = 0$ trasladando a todos los planos por $-u$. Si demostramos que la proposición es cierta en esta situación, habremos demostrado la proposición.

Consideremos

$$r > \sup_{j \in \mathbb{N}} d(0, P_j).$$

Debemos ver que las funciones de distancia $\text{dist}(x, P_j)$ convergen uniformemente sobre $\overline{B(0, r)}$ a $\text{dist}(x, P)$. Sabemos que la distancia se alcanza en la proyección ortogonal. Como $\overline{B(0, r)}$ interseca a todos los planos, entonces para todo $x \in \overline{B(0, r)}$ la distancia de x a P_j es a lo sumo r . Luego el punto más cercano de P_j para x debe estar en $\overline{B(0, 2r)}$.

Ahora si cambiamos P_j por V_j , la proyección ortogonal de $x \in \overline{B(0, r)}$ en estos planos será desplazada por u_j . Por desigualdad triangular tenemos entonces que

$$|\text{dist}(x, V_j) - \text{dist}(x, P_j)| \leq |u_j|.$$

También podemos concluir juntando las observaciones de este párrafo y del párrafo anterior que el punto más cercano de x a V_j y a V esta en $\overline{B(0, r)}$ ya que $u_j \in \overline{B(0, r)}$. Entonces sabemos que si $x \in \overline{B(0, r)}$, vale:

$$\begin{aligned} |\text{dist}(x, P_j) - \text{dist}(x, P)| &\leq |\text{dist}(x, P_j) - \text{dist}(x, V_j)| + |\text{dist}(x, V_j) - \text{dist}(x, V)| \\ &\leq |u_j| + d_H \left(V_j \cap \overline{B(0, 3r)}, V \cap \overline{B(0, 3r)} \right). \end{aligned}$$

En esta desigualdad usamos que $P = V$ por pasar por el origen y la definición de la distancia de Hausdorff junto a que el punto más cercano de x a V_j y a V esta en $\overline{B(0, 3r)}$. Sabemos que $|u_j| \rightarrow 0$ ya que $u_j \rightarrow 0$ porque $u = 0$. Nos queda ver que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_H \left(V_j \cap \overline{B(0, 3r)}, V \cap \overline{B(0, 3r)} \right) = 0.$$

Haciendo una homotecia en el origen, estamos preservando los planos V_j y nos queda que

$$d_H \left(V_j \cap \overline{B(0, 3r)}, V \cap \overline{B(0, 3r)} \right) = 3rd_H \left(V_j \cap \overline{B(0, 1)}, P \cap \overline{B(0, 1)} \right).$$

Como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_H \left(V_j \cap \overline{B(0, 1)}, P \cap \overline{B(0, 1)} \right) = 0,$$

tenemos entonces que para todo r , $\text{dist}(x, P_j)$ converge uniformemente a $\text{dist}(x, P)$ sobre $\overline{B(0, 1)}$. Esto concluye como queríamos que $P_j \rightarrow P$ en sentido local de Hausdorff cuando P pasa por el origen y luego para todo P . \square

Proposición 3.2.6. *Se alcanza el $\beta_{\infty,E}^d$. Esto es, el ínfimo en la definición es en realidad un mínimo.*

Demostración. Suponemos que $x = 0$ y $r = 1$ por comodidad. Demostraremos entonces que se alcanza el $\beta_{\infty,E}^d(0, 1)$. Consideramos P_j tal que

$$\sup_{x \in E \cap \overline{B(0,1)}} d(E, P_j) \leq \beta_{\infty,E}^d(0, 1) + 1/j.$$

Usando la Proposición 3.2.4 tenemos que existe P y una subsucesión P_{j_k} tal que $P_{j_k} \rightarrow P$ en la distancia. Por el Lema 3.2.5 sabemos que P_{j_k} converge en sentido local de Hausdorff a P . Luego $\forall x \in E \cap \overline{B(0,1)}$ tenemos que

$$\text{dist}(x, P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x, P_{j_k}) \leq \liminf_k (\beta_{\infty,E}^d(0, 1) + 1/k) = \beta_{\infty,E}^d(0, 1).$$

Como esto vale para todo $x \in E$, entonces el plano P alcanza el mínimo para el $\beta_{\infty,E}$. \square

Lema 3.2.7. *Si E_n, E son cerrados con $E_n \rightarrow E$ en sentido local de Hausdorff entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty,E_n}^d(x, r) = \beta_{\infty,E}^d(x, r).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad $x = 0$ y $r = 1$. Dado un plano P , consideramos el conjunto

$$P^\delta = \{x : x \in \overline{B(0,1)} \text{ y } d(x, P) < \delta\}.$$

Consideramos $\varepsilon > 0$ y un plano P tal que

$$\sup_{x \in E \cap \overline{B(0,1)}} |d(x, P)| < \beta_{\infty,E}^d(0, 1) + \varepsilon.$$

Veremos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty,E_n}^d(0, 1) \leq \beta_{\infty,E}^d(0, 1) + \varepsilon.$$

Sea $\delta = \beta_{\infty,E}^d(0, 1) + \varepsilon$. Si $K = \overline{B(0,1)} \setminus P^\delta$, este conjunto es compacto. Luego por la Proposición 3.1.3 tenemos que interseca a finitos E_n . Esto es, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $E_n \cap K = \emptyset$. Luego si $n \geq n_0$, vale que $\beta_{\infty,E_n}^d(0, 1) \leq \delta$, ya que $E_n \cap \overline{B(0,1)} \subseteq P^\delta$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty,E_n}^d(0, 1) \leq \beta_{\infty,E}^d(0, 1) + \varepsilon.$$

Haciendo ε tender a cero tenemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty,E_n}^d(0, 1) \leq \beta_{\infty,E}^d(0, 1).$$

Tomamos ahora una subsucesión n_k tal que $\beta_{\infty, E_{n_k}}^d(0, 1)$ converge a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty, E_n}^d(0, 1).$$

Consideramos P_n una sucesión de planos tales que

$$\sup_{x \in E_{n_k} \cap B(0, 1)} |d(x, P_{n_k})| < \beta_{\infty, E_{n_k}}^d(0, 1) + \frac{1}{n}.$$

Podemos suponer que P_{n_k} converge en la distancia afín (3.5) renombrando apropiadamente la sucesión. Entonces por el Lema 3.2.5 debe converger a un plano P , d -dimensional en sentido local de Hausdorff.

Luego las funciones de distancia a P_{n_k} deben converger uniformemente sobre $\overline{B(0, 1)}$ a la función de distancia a P . Queremos ver que la función de distancia a P está acotada por

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty, E_n}^d(0, 1).$$

Dado $x \in E \cap \overline{B(0, 1)}$, existe una sucesión $x_{n_k} \in E_{n_k}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$. Luego, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x_{n_k}, P_{n_k}) = \text{dist}(x, P).$$

Como

$$\text{dist}(x_{n_k}, P_{n_k}) \leq \beta_{\infty, E_{n_k}}^d(0, 1) + \frac{1}{k}$$

entonces

$$\text{dist}(x, P) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \beta_{\infty, E_{n_k}}^d(0, 1).$$

Como esto vale para todo $x \in E \cap \overline{B(0, 1)}$ entonces

$$\beta_{\infty, E}^d(0, 1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_{\infty, E_n}^d(0, 1).$$

Juntando las dos desigualdades tenemos la convergencia deseada. □

3.3. Abierto 2-sided corkscrew

En esta sección presentaremos las ideas necesarias para entender la clase de objetos con los que trabajaremos. Dado un abierto $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^n$, llamaremos $\Omega^- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega^+}$ y $\Gamma := \partial\Omega^+$.

Definición 3.3.1. Decimos que Ω^+ es un abierto 2-sided c -corkscrew si cumple la siguiente condición: para todo $x \in \Gamma$ y $0 < r < \text{diam}(\Omega^+)$ existen x_r^+ x_r^- tales que $B(x_r^+, cr) \subseteq B(x, r) \cap \Omega^+$ y $B(x_r^-, cr) \subseteq B(x, r) \cap \Omega^-$.

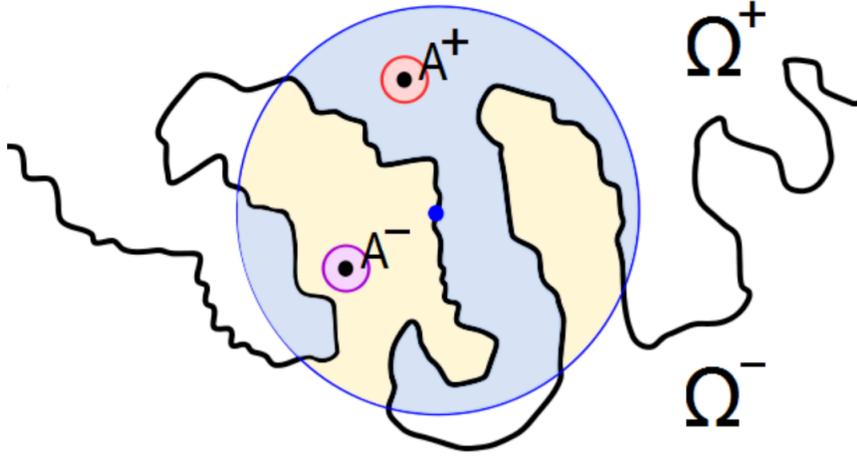


Figura 3.2: 2-sided c -corkscrew [Bad10].

Esto dice que está controlado cuánto pincha el borde. Si tuviese pedazos con forma de aguja finita, entonces cerca del extremo la condición no se satisfecería. Remarcamos que pedirle la condición de que existan puntos situados de ambos lados significa que el interior y el exterior de Ω^+ son cuantitativamente abiertos. No existirán agujas ni del lado de adentro ni del lado de afuera. En la Figura 3.3 tenemos dos ejemplos de conjuntos que no son 2-sided c -corkscrew: en la figura de la izquierda tenemos una aguja hacia afuera y en la figura de la derecha tenemos una aguja hacia adentro.

La ventaja que presentan estos conjuntos es que se comportan bien respecto a la convergencia en sentido local de Hausdorff. La condición de ser 2-sided c -corkscrew nos dice en particular que $\Gamma = \partial\Omega^-$. Si Ω^+ no fuese un 2-sided c -corkscrew y fuese simplemente un abierto entonces sigue siendo cierto $\partial\Omega^- \subseteq \Gamma$, es decir, los puntos del borde de $\Omega^- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega^+}$ son puntos de $\partial\Omega^+$. La afirmación que utiliza la estructura de un 2-sided c -corkscrew es que todos los puntos de Γ están en el borde de Ω^- .

El nombre corkscrew significa sacacorchos. La comparación que uno le puede hacer a estos conjuntos con los sacacorchos es que a lo largo del sacacorchos el metal esta uniformemente separado.

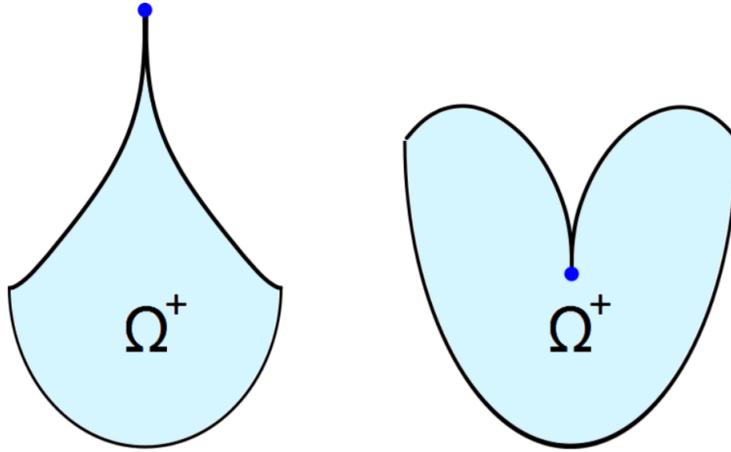


Figura 3.3: No-ejemplo de un 2-sided c -corkscrew [Bad10].



Figura 3.4: Un sacacorchos.

Ahora si $x \in \Gamma$ tenemos que x_r^- converge a x cuando $r \rightarrow 0$ y entonces $x \in \partial\Omega^-$. Esto nos dice que Ω^+ , Ω^- y Γ son regiones disjuntas que parten a \mathbb{R}^n satisfaciendo $\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma = \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega^+ = \partial\Omega^-$.

Esto nos recuerda a la descomposición de Jordan. Recordamos un poco sobre esto. En \mathbb{R}^2 o más aún en \mathbb{R}^n podemos considerar Γ la imagen de una función $\alpha : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva a \mathbb{R}^n . En \mathbb{R}^2 , Γ se dice una curva de Jordan. Más en general en \mathbb{R}^n es un teorema conocido de topología algebraica que el complemento de la imagen de una esfera tiene dos componentes conexas. Si llamamos Ω^+ a la componente conexa acotada y Ω^- a la componente conexa no acotada, estos conjuntos son abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n cuyo borde es Γ .

Aún si uno estuviese sólo interesado en estudiar curvas de Jordan, los 2-sided corkscrew revelan mucha información sobre el comportamiento de las curvas de Jordan que es utilizado fuertemente en la demostración de la conjetura ε^2 de Carleson para curvas de Jordan.

Ejemplo 3.3.2. El copo de nieve de von Koch es un ejemplo del borde de un 2-sided corkscrew. El proceso con el que se construye es reemplazar segmentos por un pinche.

Si tenemos el segmento entre $(0, 0)$ y $(1, 0)$ lo reemplazamos por la poligonal $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}, 0)$, $(1, 0)$. Esto se puede realizar sobre cualquier segmento realizando



Figura 3.5: Transformación generadora del proceso iterativo de la construcción del Snowflake.

una transformación afín que lleve el segmento entre $(0, 0)$ y $(1, 0)$ a un segmento entre p y q respetando la orientación.

En el primer paso lo hacemos sobre los lados del triángulo. En el paso siguiente repetimos el proceso de cambiar segmento por pinches. Siempre eligiendo la orientación antihoraria para que la poligonal quede hacia afuera. Como la construcción la hicimos mediante una transformación afín, los pinches nuevos tienen siempre la mismas relaciones de tamaños sobre el segmento en el que están parados.

Como los pinches son siempre del mismo tamaño relativo, entonces el abierto que se encuentra en el interior de las curvas de la figura es un 2-sided c -corkscrew para todo paso. La constante c depende del tamaño relativo del pinche que elegimos inicialmente.

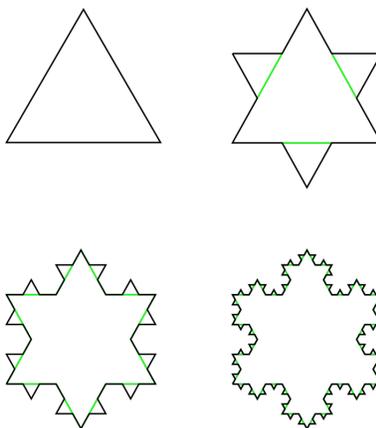


Figura 3.6: Wikipedia Koch Snowflake

El copo de nieve de von Koch se obtiene como el límite en sentido local de Hausdorff de los conjuntos que se obtienen por iterar este proceso. Como veremos en el próximo lema, la condición de ser 2-sided c -corkscrew es estable por la convergencia local de Hausdorff y luego la curva de von Koch es un 2-sided corkscrew.

La estabilidad respecto a la convergencia de Hausdorff de los 2-sided c -corkscrew permitirá familias de ejemplos fractales construidos manteniendo acotadas las relaciones relativas de tamaños.

Ejemplo 3.3.3. El brócoli romanesco de la Figura 3.7 es un 2-sided c -corkscrew si uno acota el tamaño relativo de los pedazos al realizar un proceso iterativo como el que hicimos para construir el copo de nieve de von Koch.

En estas construcciones uno puede también dejar partes en las que no continúa la construcción a ciertas escalas. Por ejemplo en la curva de von Koch, podríamos al pasar de la primera escala a la segunda no continuar la construcción en el segmento entre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}, 0)$. Si esto lo hiciésemos repetidas veces en distintas escalas, tendríamos segmentos lisos en el límite. En estos segmentos lisos tendríamos tangentes a la curva y el coeficiente $\mathcal{E}(x)$ es finito allí. Este es un ejemplo en el que tenemos a la vez pedazos con comportamiento como el de las curvas Lipschitz y pedazos con comportamiento como el de una curva fractal como lo es la curva de von Koch.



Figura 3.7: Brócoli Romanesco.

En la Figura 3.8 vemos juntos un ejemplo de una curva suave C^∞ , de una curva Lipschitz y de una curva que es el borde de un 2-sided corkscrew (el snowflake que mencionamos en el Ejemplo 3.3.2). Es útil tener presente esta intuición geométrica sobre los objetos que trabajamos.

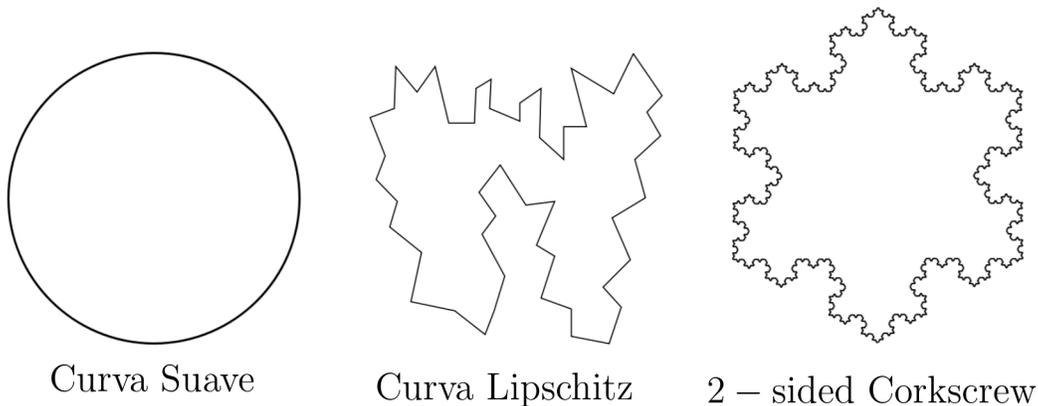


Figura 3.8: Comparación de posibles regularidades de una curva [Bad10].

Veremos ahora un lema de convergencia sobre abiertos 2-sided corkscrew.

Lema 3.3.4. *Sea Ω_j^+ una sucesión de abiertos 2-sided c -corkscrew. Denotaremos a $\Gamma_j = \Omega_j^+$ su borde y $\Omega_j^- = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_j^+$. Suponemos que $\inf \text{diam}(\Omega_j^+) > 0$ y $0 \in \Gamma_j \forall j$. Supongamos que existen conjuntos cerrados G^+ , G^- y G_0 tales que $\overline{\Omega_j^\pm} \rightarrow G^\pm$ y que $\Gamma_j \rightarrow G_0$ en sentido local de Hausdorff. Entonces:*

1. *Se cumple que $G^+ \cup G^- = \mathbb{R}^n$, $G^+ \cap G^- = G_0$. En particular $G^+ \setminus G_0$ y $G^- \setminus G_0$ son abiertos.*
2. *Si $\Omega_\infty^+ = G^- \setminus G_0$, $\Omega_\infty^- = G^+ \setminus G_0$ y $\Gamma_\infty = G_0$, entonces Ω_∞^\pm es un 2-sided c -corkscrew con Γ_∞ su borde y Ω_∞^\pm su exterior. Así tenemos que $G^\pm = \overline{\Omega_\infty^\pm}$.*
3. *Ω_∞^+ satisface lo siguiente: para toda bola B , si $\overline{B} \subseteq \Omega_\infty^+$ entonces un abierto que contiene a \overline{B} está contenido en Ω_j^+ si j es lo suficientemente grande. Análogamente si se cambia Ω_∞^+ por Ω_∞^- .*

Acá la condición $\inf \text{diam}(\Omega_j^+) > 0$ nos dice que no convergen a un punto. La condición $0 \in \Omega_j^+ \forall j$ nos dice que Γ_∞ será no vacío.

Demostración. Como $\overline{\Omega_j^+} \cup \overline{\Omega_j^-} = \mathbb{R}^n$ entonces, por la Proposición 3.1.5 sobre la convergencia de la unión, $G^+ \cup G^- = \mathbb{R}^n$.

Observamos primero que $G_0 \subseteq G^+ \cap G^-$. Esto es ver que $G_0 \subseteq G^+$ y $G_0 \subseteq G^-$. Sabemos que $\Gamma_j \subseteq \overline{\Omega_j^+}$ y luego su límite local de Hausdorff también cumplirá esta

contención. Es decir, $G_0 \subseteq G^+$. Repitiendo el argumento para G^- obtenemos que $G_0 \subseteq G^+ \cap G^-$.

Si $x \in G^+ \cap G^-$ entonces dado $\varepsilon > 0$ debe existir x_0 tal que si $j \geq j_0$ tal que

$$\text{dist}(x, \overline{\Omega_j^+}) < \varepsilon \text{ y } \text{dist}(x, \overline{\Omega_j^-}) < \varepsilon$$

Eso significa que deben existir $y_j^\pm \in \Omega_j^\pm$ con $\|x - y_j^\pm\| < \varepsilon$. Si nos fijamos el segmento $y_j^+ y_j^-$ éste debe tener un punto $z \in \Gamma_j$. Luego por convexidad de la bola de radio ε , $\|x - z\| < \varepsilon$. Esto implica que $\text{dist}(x, G_0) < \varepsilon$ y como sucede para todo ε , $x \in G_0$. Como G^\pm y G_0 son cerrados entonces $G^+ \setminus G_0$ y $G^- \setminus G_0$ son abiertos.

Notemos que $\text{diam}(G^+) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\Omega_j^+)$. Si tenemos x e y en $\overline{\Omega_\infty^+}$, entonces existen $x_j \in \Omega_j^+$ e $y_j \in \Omega_j^+$ tales que $x_j \rightarrow x$ y $y_j \rightarrow y$. Esto implica que

$$d(x, y) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_j, y_j) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(\Omega_j^+).$$

Ahora vamos por el segundo ítem. Fijamos $r \in (0, \text{diam}(G^+))$. Veremos que existen x^\pm tales que

$$B(x^\pm, cr) \subseteq \Omega_\infty^\pm \cap \overline{B(x, r)}.$$

Que esto último valga para todo r es la condición de ser 2-sided c -corkscrew. Podemos tomar $x_j \in \Gamma_j$ tales que $x_j \rightarrow x$. La desigualdad anterior implica que $r < \liminf_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(\Omega_j^+)$ y luego para k suficientemente grande vale que $r < \text{diam}(\Omega_j^+)$. Para esos k existen x_j^\pm tales que $B(x_j^\pm, cr) \subseteq \Omega_j^\pm \cap \overline{B(x_j, r)}$. Salvo tomar subsucesiones tendremos que x_j^\pm convergen a dos puntos x^\pm .

Por el Corolario de convergencia de bolas 3.1.13 tenemos que $\overline{B(x_j^\pm, cr)} \rightarrow \overline{B(x^\pm, cr)}$. Además $\overline{B(x_j, r)} \rightarrow \overline{B(x, r)}$. La primera sucesión esta contenida en la segunda. Luego, tenemos que $\overline{B(x^\pm, cr)} \subseteq \overline{B(x, r)}$. De la misma forma, como $\overline{B(x_j^\pm, cr)} \subseteq \overline{\Omega_j^\pm}$, vale que $\overline{B(x^\pm, cr)} \subseteq G^\pm$. Así tenemos que $\overline{B(x_j^\pm, cr)} \subseteq G^\pm \cap \overline{B(x, r)}$.

Como $\overline{B(x_j^\pm, cr)} \rightarrow \overline{B(x^\pm, cr)}$ y están contenidos todos en un compacto K (debido a que $x_j^\pm \rightarrow x^\pm$) entonces debemos tener que las funciones de distancia a G_0 convergen uniformemente en K . Más aún si d_k, d son las funciones de distancia a Γ_j y G_0 respectivamente, entonces

$$\tilde{d}_k^\pm(y) = d_k(y + x_j^\pm - x^\pm)$$

converge uniformemente sobre K a d porque $x_j^\pm \rightarrow x^\pm$. Sabemos que d_k es al menos $cr - |y - x_j^\pm|$ si y esta en $B(x_j^\pm, cr)$. Por lo tanto \tilde{d}_k^\pm es al menos $cr - |y - x^\pm|$ en $B(x^\pm, cr)$. Esto implica que d es al menos $cr - |y - x^\pm|$ en $B(x^\pm, cr)$, concluyendo que G_0 tiene intersección vacía con $B(x^\pm, cr)$. Luego d es estrictamente positiva en $B(x^\pm, cr)$. Esto nos dice que $B(x^\pm, cr) \subseteq \Omega_\infty^\pm \cap \overline{B(x, r)}$. De esto último se concluye que Ω_∞^+ es un abierto 2-sided corkscrew.

Vemos el último ítem. Sabemos que $\overline{\Omega_j^-} \rightarrow \overline{\Omega_\infty^-}$. Llamamos d_j, d a las funciones asociadas de distancia para estos conjuntos. Luego si $\overline{B} \subseteq \Omega_\infty^+$, sobre \overline{B} tenemos que

$d > 0$. Como \overline{B} es compacto, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $d \geq \alpha$ sobre \overline{B} . Sea R tal que $\overline{B} \subseteq B(0, R)$. Si consideramos el conjunto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) \geq \alpha \text{ y } |x| \leq R\},$$

este conjunto es compacto y contiene a \overline{B} . Tendremos entonces que $d_j \rightarrow d$ uniformemente sobre K . Entonces existe j_0 tal que si $j \geq j_0$, se tiene que

$$|d(x) - d_j(x)| < \alpha/2 \quad \forall x \in K.$$

El conjunto deseado será

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x) > \alpha \text{ y } |x| < R\}.$$

Este abierto contiene a \overline{B} y sabemos que d_j sobre U será al menos $\alpha/2 > 0$. Esto implicará que si $j \geq j_0$, $d_j(U, \Omega_\infty^-) \geq \alpha/2 > 0$. Concluimos que $U \subseteq \Omega_\infty^+$. \square

Demostremos ahora un lema de compacidad para conjuntos 2-sided c -corkscrew.

Lema 3.3.5. *Sea Ω_j^+ una sucesión de abiertos 2-sided c -corkscrew. Suponemos al igual que en el lema anterior que $\inf \text{diam}(\Omega_j^+) > 0$ y $0 \in \Gamma_j \forall j$. Existe una subsucesión j_k tal que :*

1. $\overline{\Omega_{j_k}^\pm} \rightarrow \overline{\Omega_\infty^\pm}$ y $\Gamma_{j_k} \rightarrow \Gamma_\infty$ en el sentido local de Hausdorff. Donde Ω_∞^+ es un 2-sided c -corkscrew.
2. Hay funciones $g^\pm \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^\pm} \rightarrow g^\pm \text{ débil* en } L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

con $g^\pm = 1$ en Ω_∞^\pm y $g^\pm = 0$ en Ω_∞^\mp .

Demostración. Por el lema de compacidad de la convergencia local de Hausdorff, podemos conseguir $\overline{\Omega_{j_k}^\pm} \rightarrow G^\pm$ y $\Gamma_{j_k} \rightarrow G_0$. Por el lema anterior los límites tienen la estructura deseada que proviene de la descomposición asociada a un 2-sided corkscrew.

Demostremos ahora el segundo ítem. Por el teorema de Banach-Alaoglu, la bola en un espacio dual es débil* compacta. Luego tomando subsucesiones podemos conseguir que j_k satisfaga que existan g^\pm tales que

$$\mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^\pm} \rightarrow g^\pm \text{ débil* en } L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vemos ahora que $g^+ = 1$ en Ω_∞^+ . Consideramos φ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, con $\text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega_\infty^+$. Al decir lo de recién estamos pensando que φ no es una clase de $L^1(\mathbb{R}^n)$ con identificaciones en medida cero si no que es una función. Luego

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^+} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} g^+ \varphi dx.$$

Como $\Omega_{j_k}^- \rightarrow \overline{\Omega_\infty^-}$ y $\overline{\Omega_\infty^-} \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset$ entonces por el lema de compacidad de convergencia local de Hausdorff vimos que existe k_0 tal que si $k \geq k_0$ $\overline{\Omega_{j_k}^-} \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset$.

Luego si $k \geq k_0$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^+} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx.$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^+ \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx$$

para toda φ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ soportada en Ω_∞^+ . Eso nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Omega_\infty^+} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} g^+ \mathbb{1}_{\Omega_\infty^+} \varphi dx$$

para toda φ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En particular si definimos los conjuntos

$$E_r^+ = \{x : g^+ - 1 > 0 \text{ y } |x| \leq r\} \quad \text{y} \quad E_r^- = \{x : g^+ - 1 < 0 \text{ y } |x| \leq r\},$$

para todo r estos conjuntos tienen medida finita, lo que implica que $\mathbb{1}_{E_r^\pm}$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g^+ - 1) \mathbb{1}_{E_r^\pm} dx = 0.$$

Esto implica que E_r^\pm tienen medida cero y luego E^\pm tienen medida cero. Luego $g^+ = 1$ en Ω_∞^+ (pensándola en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ estamos identificando funciones que coinciden en conjuntos de medida cero).

Ahora para ver que $g^+ = 0$ en Ω_∞^- , consideramos φ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto en Ω_∞^- . Luego existe k_0 tal que si $k \geq k_0$, entonces $\text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega_{j_k}^-$ al igual que antes. Si $k \geq k_0$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^+} \varphi dx = 0.$$

De aquí se concluye como antes $g^+ = 0$ en Ω_∞^- . Las afirmaciones para g^- son completamente análogas. \square

Incluimos ahora algunas definiciones más para presentar los objetos geométricos relevantes para lo que sigue.

Definición 3.3.6. Una pareja de conjuntos cerrados (S_1, S_2) se dicen hemiesferas complementarias, si están ambos contenidos en una misma esfera $\partial B(x, r)$ y se obtienen al cortar a la esfera en dos pedazos mediante un plano que pasa por el centro. Esta división no será estricta y la intersección del plano con la esfera pertenecerá tanto a S_1 como a S_2 .

Definición 3.3.7. Llamaremos casquete esférico a la intersección entre una esfera $\partial B(x, r)$ con una bola euclídea $B(y, s)$ donde $y \in \partial B(x, r)$.

Definición 3.3.8. Decimos que una pareja de hemiesferas complementarias (S_1, S_2) es admisible para la sucesión de 2-sided corkscrews $\{\Omega_j^\pm\}$ si existe una subsucesión de casquetes esféricos $D_{j_k}^\pm \subseteq \partial B(x_{j_k}, r_{j_k}) \cap \Omega_{j_k}^\pm$ donde $x_{j_k} \in \Gamma_{j_k}$, tales que $\overline{D_{j_k}^+} \rightarrow S_1$ y $\overline{D_{j_k}^-} \rightarrow S_2$ en sentido local de Hausdorff.

Lema 3.3.9. Si x es el centro de $S_1 \cup S_2$ y r su radio, entonces $x_{j_k} \rightarrow x$ y $r_{j_k} \rightarrow r$.

Tenemos que $x \in \Gamma_\infty$, $S_1 \subseteq \overline{\Omega_\infty^+}$ y $S_2 \subseteq \overline{\Omega_\infty^-}$. Si $D_1 = \text{int } S_1$ y $D_2 = \text{int } S_2$ en la topología de la esfera, entonces $D_1 \subseteq \Omega_\infty^+$ y $D_2 \subseteq \Omega_\infty^-$.

Además las parejas de hemiesferas admisibles son cerradas bajo la convergencia local de Hausdorff. Esto es: Si $(S_{1,i}, S_{2,i})$ son hemiesferas admisibles con $S_{1,i} \rightarrow S_1$ y $S_{2,i} \rightarrow S_2$ en sentido local de Hausdorff, entonces (S_1, S_2) es una pareja de hemiesferas admisible.

Demostración. Sea $E_k = \overline{D_{j_k}^+} \cup \overline{D_{j_k}^-}$. Usando la Proposición 3.1.5 tenemos que $E_k \rightarrow S_1 \cup S_2 = \partial B(x, r)$.

Afirmo que $\{x_{j_k}\}_k$ y $\{r_{j_k}\}_k$ están acotadas. Usamos la convergencia uniforme sobre compactos en $\overline{B(x, r)}$. Existe k_0 tal que $\text{dist}(S_1, E_k) < \frac{r}{2}$ si $k \geq k_0$.

Si tomamos $K = \overline{B(x, 2r)} \setminus B(x, \frac{3r}{2})$ entonces como $K \cap \partial B(x, r) = \emptyset$, por la Proposición 3.1.3, tenemos que interseca a finitos $\overline{D_{j_k}^+}$. Esto significa que existe k_1 tal que si $k \geq k_1$, la intersección de K con estos conjuntos es vacía.

Si $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ entonces la primera condición implica que $\overline{D_{j_k}^+} \cap B(x, \frac{3}{2}r) \neq \emptyset$. Como $\overline{D_{j_k}^+}$ es conexo y no interseca a K , entonces debe estar contenido en $B(x, \frac{3}{2}r)$.

Como

$$2r = \text{diam}(S_1) \leq \liminf \text{diam}(\overline{D_{j_k}^+}),$$

por la Proposición 3.1.15, entonces debemos tener k' tal que si $k \geq k'$ entonces

$$\text{diam}(\overline{D_{j_k}^+}) \geq \frac{3}{2}r.$$

Tomo p_k, q_k tal que $|x_k - y_k| = \text{diam}(\overline{D_{j_k}^+})$. Como $B(x, \frac{3}{2}r)$ es convexa, entonces el punto medio $m_k = \frac{p_k + q_k}{2}$ estará en esa bola. Tenemos que el segmento $x_{j_k} m_k$ es perpendicular al segmento $m_k q_k$. Esto se obtiene restringiendonos a un 2-plano en el que están x_{j_k}, p_k, q_k y notando que $x_{j_k} m_k$ es la mediatriz de p_k, q_k .

Luego por el teorema de Pitágoras tendremos que

$$\left(1 - \frac{9}{16}\right) r^2 \geq |q_k - x_{j_k}|^2 - \frac{|p_k - q_k|^2}{4} = |q_k - x_{j_k}|^2 - |m_k - q_k|^2 = |x_{j_k} - m_k|^2.$$

Luego $|x_{j_k} - m_k| \leq \frac{\sqrt{7}}{4}r < \frac{3}{4}r$. Esto implica que $x_{j_k} \in B(x, \frac{9}{4}r)$. Ahora como tenemos que $|x_{j_k} - p_k| = r_k$ y $p_k \in B(x, \frac{9}{4}r)$, entonces $r_k \leq \text{diam}(B(x, \frac{9}{4}r)) = \frac{9}{2}r$.

Supongamos que $x_{j_k} \rightarrow x'$ y $r_{j_k} \rightarrow r'$, veremos entonces que $x' = x$ y $r' = r$. Es decir que añadiendo la suposición de que estas sucesiones convergen, podemos conseguir que convergen a donde queremos.

Como tenemos que

$$\overline{D_{j_k}^+} \cup \overline{D_{j_k}^-} \subseteq \partial B(x_{j_k}, r_{j_k}) \quad \text{y} \quad \overline{D_{j_k}^+} \cup \overline{D_{j_k}^-} \rightarrow S_1 \cup S_2 = \partial B(x, r),$$

entonces $S_1 \cup S_2 \subseteq \partial B(x', r')$. Acá estamos usando que $\partial B(x_{j_k}, r_{j_k}) \rightarrow \partial B(x, r)$ (por el Corolario 3.1.14) junto a las propiedades de la convergencia local de Hausdorff de la Proposición 3.1.5. Luego $\partial B(x, r) \subseteq \partial B(x', r')$ y entonces veremos que $x = x'$ y $r = r'$. Este último hecho es intuitivamente obvio. Consideramos la recta L que pasa por x y x' suponiendo que son distintos. Ésta corta en dos puntos a ambas esferas. Sean p y q los puntos en los que corta a $\partial B(x, r)$. Como $\partial B(x', r') \subseteq \partial B(x, r)$, entonces la recta L corta a $\partial B(x', r')$ en p y q . Como la distancia entre dos puntos antipodales es el diámetro de la bola, entonces $|p - q| = 2r = 2r'$. Esto implica que $r = r'$ y $x = x'$ por ser el punto medio entre p y q .

Afirmo ahora que entonces $x_{j_k} \rightarrow x$ y $r_{j_k} \rightarrow r$. Como $\{x_{j_k}\}_k$ y $\{r_{j_k}\}_k$ son sucesiones acotadas es equivalente ver que convergen a x y a r a que estos son el único límite que admiten subsucesiones $x_{j_k} \rightarrow x$ y $r_{j_k} \rightarrow r$. Renombrando los índices esto es lo que ya vimos.

Vemos ahora la segunda afirmación. Como $x_{j_k} \rightarrow x$ entonces sabemos que $x \in \Gamma_\infty$. Como $\overline{D_{j_k}^+} \rightarrow S_1$ y $\overline{\Omega_{j_k}^+} \rightarrow \overline{\Omega_\infty^+}$, usando la propiedad de la contención de la Proposición 3.1.5, tenemos que $S_1 \subseteq \overline{\Omega_\infty^+}$. Análogamente se obtiene $S_2 \subseteq \overline{\Omega_\infty^-}$.

Por el mismo argumento que hicimos antes tenemos que x_i , los centros de $S_{1,i} \cup S_{2,i}$ y r_i , los radios de esas esferas convergen a x, r el centro y radio de $S_1 \cup S_2$. Esto implica que todos estos conjuntos están dentro de un compacto y luego podemos aplicar el Lema 3.1.10.

Para cada i sabemos que tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{D_{j_k(i)}^+} = S_{1,i} \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{D_{j_k(i)}^-} = S_{2,i}$$

para dos sucesiones de casquetes esféricos donde los límites se toman en la distancia de Hausdorff. Entonces existe m_i una sucesión que cumple lo siguiente: Es creciente, para todo i , m_i es un elemento de la sucesión $j_k(i)$ y existen casquetes esféricos $D_{m_i}^\pm \subseteq \partial B(x_{m_i}, r_{m_i}) \cap \Omega_{m_i}^\pm$ tales que

$$d_H(S_{1,i}, D_{m_i}^+) \leq \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad d_H(S_{2,i}, D_{m_i}^-) \leq \frac{1}{i}.$$

Como $S_{1,i} \rightarrow S_1$ en la distancia de Hausdorff, entonces $D_{m_i}^+ \rightarrow S_1$ en la distancia de Hausdorff. También tendremos $D_{m_i}^- \rightarrow S_2$ en la distancia de Hausdorff. Esto demuestra que (S_1, S_2) son una pareja de hemiesferas admisibles. □

Capítulo 4

Funciones analíticas reales en varias variables

Referimos al lector a los libros [Sch05] y [KP02] en los que basaremos parte de la exposición para una lectura más profunda sobre el tema. También referimos al lector al capítulo 7 del libro [SS11] sobre funciones holomorfas complejas en varias variables en lo que basaremos la sección de funciones holomorfas complejas en varias variables.

4.1. Funciones analíticas reales en varias variables

Empezamos mencionando algunos resultados sobre series en varias variables. Utilizaremos la notación multiíndice. Denotaremos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Denotamos $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ o \mathbb{C}^n . Además notaremos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$. Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y I un conjunto numerable.

Definición 4.1.1. Si $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia contable, entonces decimos que $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ es absolutamente sumable, si existe una biyección $\tau : \mathbb{N}_0 \rightarrow I$ tal que la serie $\sum_{n \geq 0} \|a_{\tau(n)}\|$ converge.

Lema 4.1.2. Sea $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia absolutamente sumable en un espacio de Banach E . Entonces se cumple lo siguiente:

1. $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ converge para toda biyección $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow I$.
2. Si $I = \mathbb{N}_0^n$, entonces el límite se puede calcular vía

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \right).$$

Como $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ no depende de la biyección φ , entonces llamaremos al límite $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$. Sea $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ una familia de números complejos. La expresión

$$\sum_{\alpha} c_\alpha (z - a)^\alpha = \sum_{\alpha} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z - a_1)^{\alpha_1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n}.$$

se llama una serie de potencias en n variables complejas z_1, \dots, z_n centrada en a .

Se llama el dominio de convergencia de la serie al interior del conjunto en \mathbb{C}^n donde la serie $(c_\alpha(z-a)^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ es absolutamente sumable. Llamamos polidisco al conjunto

$$\mathbb{P}_r(a) = \{z : |z_i - a_i| \leq r_i\} \quad \text{con} \quad r \in (\mathbb{R}^+)^n$$

Decimos que una serie de potencias absolutamente sumable en un conjunto E es absolutamente uniformemente convergente sobre E si para todo $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}_0^n$ un subconjunto finito tal que

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus F_\varepsilon} c_\alpha (z-a)^\alpha \right| < \varepsilon$$

para todo z en E .

Lema 4.1.3. *Si una serie $\sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha$ es absolutamente sumable en la clausura de un polidisco $\overline{\mathbb{P}_r(a)}$, entonces es absolutamente uniformemente convergente en $\overline{\mathbb{P}_r(a)}$.*

El siguiente lema de Abel es conocido para series complejas en una variable. Enunciamos aca una versión válida para varias variables.

Lema 4.1.4. *(Abel): Sea $(c_\alpha)_\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ es una familia de números complejos, $t \in (\mathbb{R}^+)^n$ tal que $|c_\alpha t^\alpha|$ esta acotado. Luego si $r \in (\mathbb{R}^+)^n$ es tal que $r_k < t_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, entonces la serie de potencias converge absolutamente y es absolutamente uniformemente convergente en $\overline{\mathbb{P}_r(a)}$.*

Decimos que una función definida en un abierto U , $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si para cada punto $a \in U$ existe una serie de potencias centrada en a cuyo dominio de convergencia es un entorno de a y coincide allí con f .

Una función definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real si para cada $a \in U$ existe una serie de potencias con coeficientes reales centrada en a cuyo dominio de convergencia (al ser vista en los complejos) es un entorno V de a en \mathbb{C}^n y coincide sobre $U \cap V \cap \mathbb{R}^n$ con f .

Decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, es analítica real si cada coordenada lo es. Decimos que una función es analítica real a secas si $U = \mathbb{R}^n$.

Lema 4.1.5. *Las funciones analíticas reales están cerradas por suma, multiplicación y composición. Las funciones analíticas reales son C^∞ y todas sus derivadas son funciones analíticas reales.*

El lema anterior es intuitivo ya que para funciones holomorfas complejas en una variable sabemos que el enunciado es cierto.

La siguiente caracterización de las funciones analíticas reales es conocida, sobre todo en una variable. Usaremos nuevamente la notación multiíndice, ahora para las derivadas.

Teorema 4.1.6 (Taylor). *Dada una función $f \in C^k(U)$, para U un abierto de \mathbb{R}^n y un punto $x_0 \in U$*

$$P_k(y) := \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{|\alpha|!} \partial^\alpha f(x_0) y^\alpha.$$

Dada $f \in C^\infty(U)$ las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

1. *f es analítica real en U .*
2. *Para todo $x_0 \in U$ existe un entorno de x_0 , V con $\bar{V} \subseteq U$ tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - x_0) \quad \forall x \in \bar{V}$$

donde la serie converge uniformemente.

La diferencia sutil que hay en el Teorema de Taylor es que en la definición de función analítica real se puede expresar localmente la función como una serie y lo que estamos diciendo es que esa serie se puede tomar como la serie de Taylor. Esto es por la unicidad del desarrollo en serie de potencias.

El siguiente teorema es incluso más conocido que el anterior y su demostración se puede encontrar en cualquier libro de análisis multivariable.

Teorema 4.1.7 (Resto de Taylor). *Sea $f \in C^{k+1}(U)$ donde U es un abierto convexo. Sea $x_0 \in U$ y $x \in U$. Los P_j so los mismos polinomios que en el Teorema 4.1.6.*

Definimos

$$R_k(h) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \left(\sum_{|\alpha|=k+1} \partial^\alpha f(x_0 + th) h^\alpha \right) dt.$$

Se tiene entonces

$$f(x) = \sum_{j=0}^k P_j(x - x_0) + R_k(x - x_0) \quad \forall x \in U.$$

4.2. Variedades analíticas reales

Nosotros estudiaremos al conjunto de los ceros de una función analítica real. Estos merecen nombre propio:

Definición 4.2.1. Decimos que un conjunto Z es una variedad analítica real (real analytic variety) si existe una función analítica real f tal que $Z = f^{-1}(0)$.

Presentamos dos resultados en los que sabiendo que una variedad analítica real contiene a un conjunto, entonces debe contener a un conjunto más grande.

Lema 4.2.2. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real, L es una recta y f se anula en un segmento, entonces se anula en toda la recta.

Demostración. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación afín que su imagen es L , entonces $f \circ g$ es una función analítica real que se anula en un conjunto de interior no vacío. Luego debe ser nula. Esto implica que f es nula sobre L . \square

Corolario 4.2.3. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real, P es un plano d -dimensional y f se anula en un conjunto de interior no vacío en el plano, entonces se anula en todo el plano.

Demostración. Elegimos la imagen afín de un disco sobre P . Si se anula en un entorno de x , entonces se anula en segmentos para todas las direcciones del plano (pasando por P). Utilizando el lema anterior conseguimos que se anulará en todas las rectas en el plano que pasan por P y luego se anulará en todo el plano. \square

Teorema 4.2.4 (Función Implícita). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real, con U abierto y $p \in U$. Si $f(p) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$, entonces existe un entorno U_0 de p y una función g analítica real en $U_0 \cap \mathbb{R}^{n-1}$ con

$$f^{-1}(0) \cap U_0 = (x, g(x)) : x \in U_0 \cap \mathbb{R}^{n-1}.$$

Teorema 4.2.5 (Función Inversa). Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es analítica real con $p \in U$ y Df es no singular en p , entonces existen entornos $U_0 \subseteq U$, $V_0 \subseteq V$ para los que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es un difeomorfismo analítico real entre U_0 y V_0 . Esto es, existe una función analítica real $g : V_0 \rightarrow U_0$ tal que $f|_{U_0} \circ g = Id$, $g \circ f|_{U_0} = Id$.

Definición 4.2.6. Decimos que M es una subvariedad analítica de dimensión k (analytic submanifold) de \mathbb{R}^n si existen abiertos $U_i \subseteq M$ para la topología de subespacio y funciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ tales que

- Los abiertos U_i son un cubrimiento de M . Es decir $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = M$.
- $\varphi(U_i)$ es un abierto de \mathbb{R}^k y φ_i es un homeomorfismo entre U_i y $\varphi(U_i)$.
- Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es una función analítica real.

Tenemos la mala suerte que la traducción de variety y de manifold es la misma. Por más que los nombres son desafortunados, quedará claro a que nos referimos por el contexto.

El hecho de que trabajemos sobre los reales permite que suceda que si $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq m}$ son finitas variedades analíticas reales que son los ceros de funciones analíticas reales, entonces

$$\bigcap_{1 \leq i \leq m} Z_i$$

es una variedad analítica real asociada a la función

$$f = \sum_{i=1}^m f_i^2.$$

Esto nos dice en general que no perdemos variedades analíticas reales al pedirles como requisito que sean el conjunto de ceros de una función analítica real en vez de que sean los ceros de finitas funciones analíticas reales.

Si tenemos una sucesión numerable variedades analíticas reales Z_i , que son los ceros de funciones analíticas reales f_i con muchísimo decaimiento, bajo ciertas condiciones podemos conseguir expresar $\bigcap_i Z_i$ como el conjunto de ceros de una función analítica real. Si existen reales positivos c_i tales que la $\{c_i f_i\}$ esta localmente acotada, entonces

$$f = \sum \frac{c_i^2}{2^i} f_i^2$$

en casos muy especiales como el que nos encontraremos f será analítica real. En el apéndice verificaremos que esto es cierto en el caso que nos interesa. La cuestión en nuestro caso es delicada y la vemos el Apéndice A. Entonces cuando f es analítica real tenemos que $\bigcap_i Z_i$ es la variedad analítica real dada por los ceros de f .

Teorema 4.2.7 (Whitney 1965). *Una variedad analítica real $Z \subset \mathbb{R}^n$ propia, esto es $Z \neq \mathbb{R}^n$, se puede escribir como unión de S_j con $0 \leq j \leq n-1$ donde cada S_j es una subvariedad analítica de dimensión j (submanifold). En la descomposición no pedimos que todos los niveles S_j sean no vacíos.*

Ejemplo 4.2.8. Consideremos las funciones

$$f_0 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \quad , \quad f_1 = (y-x)^2 + (z-1)^2 \quad , \quad f_2 = z - x^2 - y^2.$$

El conjunto de ceros de la primera función es un punto, el conjunto de ceros de la segunda función es una recta y el conjunto de ceros de la tercera función es un paraboloide. Estas son subvariedades analíticas reales de dimensiones 0, 1 y 2, respectivamente.

Si $f = f_0 f_1 f_2$ entonces la variedad analítica real $Z = f^{-1}(0)$ se puede escribir como la unión de

$$S_0 = \{(1, 1, 1)\} \quad , \quad S_1 = \{y = x, z = 1\} \quad , \quad S_2 = \{z = x^2 + y^2\},$$

las subvariedades determinadas por los conjuntos de ceros de f_0 , f_1 y f_2 .

4.3. Funciones holomorfas en varias variables

Recordamos que si $r = (r_1, \dots, r_n)$ con $r_i > 0$ el polidisco está definido de la siguiente manera

$$\mathbb{P}_r(z^0) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| < r_j \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Similarmente, introducimos a continuación la definición del borde del polidisco como sigue:

$$C_r(z_0) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| = r_j \forall 1 \leq j \leq n\}$$

Teorema 4.3.1. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto U de \mathbb{C}^n . Si f es una función continua las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. La función f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \forall 1 \leq j \leq n \text{ en el sentido de distribuciones,} \quad (4.1)$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \text{ donde } z_j = x_j + iy_j, \text{ con } x_j, y_j \in \mathbb{R}.$$

2. Para cada $z^0 \in U$ y $1 \leq k \leq n$, la función

$$g(z_k) = f(z_1^0, \dots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \dots, z_n^0)$$

es holomorfa en z_k (en el sentido de una variable) para z_k en un entorno de z_0 .

3. Para cada polidisco $\mathbb{P}_r(z^0)$ cuya clausura cae en U , tenemos la representación integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_r(z^0)} f(\zeta) \prod_{k=1}^n \frac{d\zeta_k}{\zeta_k - z_k}, \text{ para } z \in P_r(z^0). \quad (4.2)$$

4. La función f es analítica compleja. Es decir, para cada $z^0 \in U$ la función f tiene una serie de potencias $f(z) = \sum a_\alpha (z - z^0)^\alpha$ que converge absolutamente y uniformemente en un entorno de z^0 .

Demostración. Vemos que el primer ítem implica el segundo: Recordamos que al decir que f satisface Cauchy-Riemann en el sentido de distribuciones estamos diciendo que satisface la ecuación de Cauchy-Riemann en sentido débil. Esto es, $\forall k$ y $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right) f(x + iy) dx dy = 0,$$

donde estamos pensando que \mathbb{C}^n esta identificado con \mathbb{R}^{2n} .

Para ver porque el primer item implica el segundo, denotamos Δ al Laplaciano en \mathbb{C}^n , esto es:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right).$$

Decimos que f satisface la ecuación de Laplace en sentido débil si le pedimos que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j^2} \right) \right) f dx dy = 0.$$

Denotamos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right).$$

Como

$$\Delta = 4 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

y f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en sentido débil entonces satisface la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ en sentido débil. Por la teoría de regularidad de la ecuación de Laplace sabemos que las soluciones débiles de la ecuación de Laplace son C^∞ . En particular deben ser C^1 . Esto implica que si dado k y z^0 consideramos

$$g(z_k) = f(z_1^0, \dots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \dots, z_n^0)$$

entonces es C^1 y satisface la ecuación de Cauchy-Riemann en el sentido usual. Esto implica que es holomorfa en una variable.

Vemos que el segundo item implica el tercero: Supongamos que $z \in \mathbb{P}_r(z^0)$ con $\overline{\mathbb{P}_r(z^0)} \subseteq U$. Si vale el segundo item podemos aplicar la formula de Cauchy en una variable con z_2, z_3, \dots, z_n fijos para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}.$$

Ahora usando la formula integral de Cauchy en la segunda variable para representar $f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)$ con ζ_1, z_3, \dots, z_n fijos, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \int_{|\zeta_2 - z_2^0| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Siguiendo de la misma forma llegamos a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z^0)} f(\zeta) \prod_{k=1}^n \frac{d\zeta_k}{\zeta_k - z_k}.$$

Vemos que el tercer ítem implica el cuarto: Notamos que

$$\frac{1}{\zeta_k - z_k} = \frac{1}{\zeta_k - z_k^0 - (z_k - z_k^0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_k - z_k^0)^m}{(\zeta_k - z_k^0)^{m+1}}.$$

Esta serie converge para todo $z \in \mathbb{P}_r(z^0)$ y $\zeta \in C_r(z^0)$ ya que $|z_k - z_k^0| < |\zeta_k - z_k^0| = r_k$ para todo k . Tomamos $\mathbb{P}_r(z^0)$ con $\overline{\mathbb{P}_r(z^0)} \subseteq U$. Si reemplazamos en la fórmula integral de Cauchy 4.2 las fracciones $\frac{1}{\zeta_k - z_k}$ por su serie asociada que describimos recién, entonces tenemos que $f(z) = \sum a_\alpha (z - z^0)^\alpha$. Aquí

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_r(z^0)} f(\zeta) \prod_{k=1}^n \frac{d\zeta_k}{(z - z_k^0)^{\alpha_k + 1}}.$$

Como resultado $|a_\alpha| \leq M r^{-\alpha}$, como $r^{-\alpha} = r_1^{-\alpha_1} r_2^{-\alpha_2} \dots r_n^{-\alpha_n}$, y

$$M = \sup_{\zeta \in C_r} |f(\zeta)|.$$

Entonces la serie converge absolutamente y uniformemente si $z \in \mathbb{P}_{r'}(z^0)$ para $r'_k < r_k$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Para completar la demostración basta demostrar que el último ítem implica el primero. Si $\sum a_\alpha (z - z^0)^\alpha$ converge absolutamente para todo z en un entorno de z^0 , podemos elegir z' cerca de z^0 tal que $z'_k - z_k^0 \neq 0$ para todo k con $1 \leq k \leq n$, entonces $\sum |a_\alpha| \rho^\alpha$ converge $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_k = |z'_k - z_k^0| > 0$. Entonces $z \in \mathbb{P}_\rho(z^0)$ podemos diferenciar la serie término a término y ver que como en particular $f \in C^1$ en el polidisco y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann usuales allí. Como esto es válido para todo $z^0 \in U$, entonces f es C^1 a lo largo de U y satisface (4.1) en sentido usual. Luego se satisface el primer ítem. \square

Definición 4.3.2. Si $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida en un abierto U , continua y satisface las afirmaciones anteriores decimos que f es holomorfa o analítica compleja.

Teorema 4.3.3. Si $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones holomorfas definidas en un mismo abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ que convergen uniformemente sobre compactos a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.

Demostración. Empezamos recordando la demostración del caso conocido en una variable por completitud. Para funciones holomorfas complejas en una variable esto es una consecuencia del teorema de Morera, este dice que es lo mismo que una función sea holomorfa a que integre cero sobre triángulo. Obtenemos el resultado del Teorema en este caso ya que si las funciones convergen uniformemente sobre compactos, las integrales sobre un triángulo de f_n convergen a la integral sobre ese triángulo de f . Como las primeras son cero, la última es cero.

Para funciones holomorfas complejas en varias variables podemos usar el Teorema 4.3.1 para ver que nos alcanza con verlo en una variable. Es decir si fijamos j y z_0 sabemos que la función

$$g(z_j) := f(z_1^0, \dots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \dots, z_n^0)$$

es límite uniforme sobre compactos de las funciones

$$g_k(z_j) := f_k(z_1^0, \dots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \dots, z_n^0)$$

Usando que vale este teorema en una variable tenemos que g es holomorfa ya que g_k lo son. \square

Incluimos a continuación una observación crucial para entender qué el problema de concluir analiticidad real a partir de convergencia uniforme sobre compactos de funciones analíticas reales **NO es trivial**.

Observación 4.3.4. Este Teorema no es cierto para funciones analíticas reales. Por el teorema de Stone Weierstrass sabemos que toda función continua es límite uniforme sobre compactos de polinomios. Los polinomios son funciones analíticas reales pero las funciones continuas están lejos de ser funciones analíticas reales. El teorema de Stone Weierstrass tiene una versión de aproximación de funciones continuas sobre los complejos pero para eso es necesario utilizar polinomios en las variables z_j y \bar{z}_j . El hecho de que tengan a la variable \bar{z}_j hace que no sean holomorfas complejas. Esto muestra que el Teorema de Stone Weierstrass por un lado nos provee de numerosos contraejemplos para la versión candidata del Teorema 4.3.3 para funciones analíticas reales, pero por el otro no es un obstáculo para que valga el Teorema 4.3.3 para funciones holomorfas complejas. En nuestro caso para esquivar esta dificultad, extenderemos la función (6.8) definida en \mathbb{R}^n que nos interesará ver que es analítica real a una función definida en \mathbb{C}^n que será holomorfa compleja. En \mathbb{R}^n el hecho de ser límite uniforme sobre compactos de funciones analíticas reales no nos alcanza pero si nos alcanza que en \mathbb{C}^n eso sea cierto para sus extensiones. Es decir, sus extensiones convergerán uniformemente sobre compactos sobre \mathbb{C}^n .

Capítulo 5

Conjuntos rectificables

5.1. Conjuntos rectificables

¿Qué queremos que sea un conjunto d -rectificable? Queremos una clase de conjuntos que comparta las propiedades clásicas de las subvariedades C^1 de dimensión d embebidas en \mathbb{R}^n que puedan admitir singularidades en un conjunto de medida \mathcal{H}^d -cero. Si pensamos en la noción clásica de curva rectificable estas son curvas de longitud finita que admiten una parametrización Lipschitz. Con esta idea en mente tiene sentido aceptar a las imágenes de funciones Lipschitz de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^n como conjuntos rectificables.

¿Ante qué operaciones queremos que este cerrada nuestra clase? Si E es rectificable y difiere de F en un conjunto de medida \mathcal{H}^d -cero entonces F debería ser rectificable. También tiene sentido pedir que la clase este cerrada por uniones finitas y por tomar subconjuntos.

Consideremos el siguiente ejemplo: Dentro del disco unitario en \mathbb{R}^2 consideramos numerables circunferencias S_i de radios 2^{-i} . Definimos $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Definitivamente $\bigcup_{i=1}^k S_i$ debería ser rectificable por ser unión finita de curvas rectificables. Por la elección de los radios tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1 \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^k S_i \right) = 0.$$

Esto significa que E se aproxima en medida por esas uniones finitas. Al querer que la clase de conjuntos rectificables se comporte bien en sentidos de teoría de la medida deberíamos aceptar que E sea rectificable. Esto sería pedir que la clase de conjuntos esté cerrada bajo unión numerable. La objeción que uno podría presentar ante eso es que si tomamos como centros de los círculos S_i una numeración q_i de los racionales E sería denso en el disco. Esto desafía altamente las propiedades geométricas intuitivas que uno esperaría que tuviesen. A pesar de eso, declararemos que la clase de conjuntos rectificables es la que esta tiene a las imágenes Lipschitz y está cerrada bajo las operaciones mencionadas. A lo largo de esta tesis veremos en repetidas oportunidades que esta definición es perfectamente adecuada para nuestros propósitos.

Introducimos entonces la siguiente definición:

Definición 5.1.1. Decimos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es d -rectificable si existen funciones Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathcal{H}^d \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^d) \right) = 0.$$

Dicho en palabras, un conjunto es d -rectificable si (*salvo medida \mathcal{H}^d cero*) está contenido dentro de la unión numerable de imágenes Lipschitz de dimensión d . Es fácil ver que esta clase efectivamente está cerrada bajo las operaciones ya descritas. Voy a reservar las letras d y n para la dimensión del conjunto rectificable estudiado y la del espacio, respectivamente. Voy a tomarme la libertad de decir sólo conjunto rectificable de ahora en más y dar por sobreentendida la dimensión.

Una referencia interesante de rectificabilidad y en especial sobre el Teorema de Preiss que conecta la noción de rectificabilidad con la existencia de densidades es [DL08].

5.2. Funciones Lipschitz

¿Por qué elegimos que las funciones sean Lipschitz en la definición de conjuntos rectificables? Lo primero que es muy conveniente es que las funciones Lipschitz de la misma constante son estables bajo la convergencia puntual. Es decir, si $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una sucesión de funciones Lipschitz de constante C que converge puntualmente a f , sabemos que $\forall x, y \in E$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_n(y)| = |f(x) - f(y)|.$$

Luego como $|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Esto es que f sea Lipschitz sobre E .

Teorema 5.2.1. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función Lipschitz, entonces existe una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz tal que $g = f$ en E . De hecho se puede tomar f con $\text{Lip}(f) = \text{Lip}(g)$.

El hecho que se puede tomar $\text{Lip}(f) = \text{Lip}(g)$ se conoce como el teorema de Kirszbraun. Hacemos una demostración sin pedirle esto. La demostración esta en [Mag12].

Demostración. Si $m = 1$ definimos

$$g(x) := \inf_{y \in E} f(y) + \text{Lip}(f)|y - x|.$$

Es fácil ver que g es Lipschitz y que es una extensión de f . Si $m > 1$ usamos la definición anterior en cada componente. \square

Un resultado central sobre funciones Lipschitz y diferenciabilidad es el siguiente teorema de Rademacher.

Teorema 5.2.2 (Rademacher). *Si $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Lipschitz, entonces es diferenciable para casi todo punto $x \in E$ (respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n).*

El siguiente teorema nos da una indicación de que no están tan lejos de ser funciones C^1 las funciones Lipschitz.

Teorema 5.2.3 (Aproximación C^1). *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. Para todo ε existe una función $g \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mathcal{L}^k(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x : \nabla Df(x) \neq \nabla Dg(x) \text{ o } Df(x) \text{ no esta definido}\}) < \varepsilon.$$

Esta g se puede tomar con $\sup_{x \in E} |Dg(x)| \leq CLip(f)$ con C solo dependiendo de k y n .

Su demostración para $n = 1$ se puede encontrar en [EG15]. Para $n > 1$, basta utilizar el teorema en cada coordenada.

Un hecho sorprendente que se desprende del teorema anterior es que se puede cambiar imágenes Lipschitz por variedades C^1 . Es decir, tenemos el siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en [Sim14].

Teorema 5.2.4. *Un conjunto M es k -rectificable si y solo si existen numerables subvariedades C^1 , $\{N_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tales que $\mathcal{H}^k(M \setminus \cup_{j=1}^{\infty} N_j) = 0$.*

El teorema anterior sigue demostrando la afirmación que venimos haciendo que es que la estructura de los conjuntos rectificables imita a la estructura de las subvariedades C^1 . Aunque dándole mayor libertad a esta clase de conjuntos y haciéndola apropiada para trabajar en un sentido de teoría de la medida. La pregunta que uno se puede hacer ahora es: si uno puede tomar variedades C^1 ¿por qué nos quedamos trabajando sobre imágenes Lipschitz? Los mismos comentarios anteriores dan una explicación. Las funciones C^1 tienen mayor rigidez que las funciones Lipschitz, lo que es ventajoso al momento de querer demostrar que un conjunto es rectificable.

5.3. Rectificabilidad vía control sobre conos

Sea V un plano d dimensional que pasa por el origen. Sea $P_V : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ su proyección ortogonal. Si $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < 1$ y $0 < r < \infty$ definimos

$$X(a, V, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x - a, V^\perp) < s|x - a|\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |P_V(x - a)| < s|x - a|\}$$

y

$$X(a, r, V, s) = X(a, V, s) \cap B(a, r).$$

Estos conjuntos que definimos recién son conos. Acá s juega el rol de la apertura del cono centrado en a alrededor de V^\perp . El radio r es la escala en la que nos estamos restringiendo.

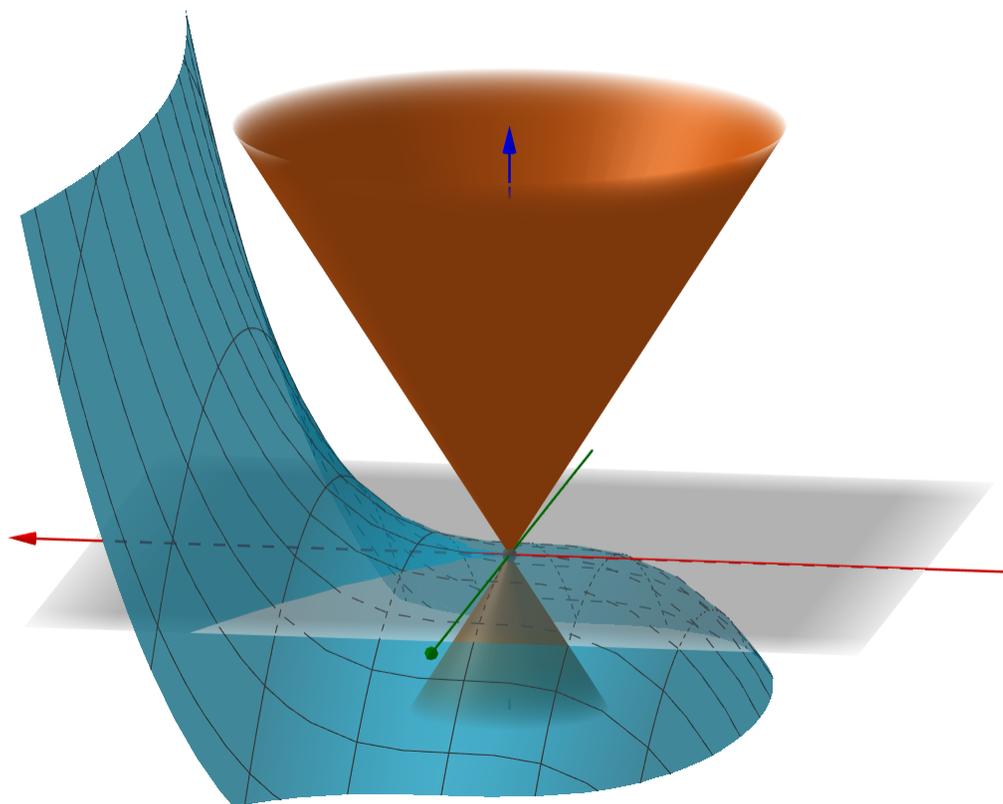


Figura 5.1: Cono y plano tangente.

En la Figura 5.1 tenemos el cono, el plano V que es tangente a una superficie en el punto. Uno puede ver como la superficie no se está metiendo en el cono.

Demostremos un lema que por más que la versión que enunciaremos es extremadamente simple, variantes más generales de esta estrategia se utilizan ampliamente al querer demostrar rectificabilidad. La idea de la demostración es muy instructiva.

Lema 5.3.1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, V un plano d dimensional, $0 < s < 1$, $0 < r < \infty$. Si

$$E \cap X(a, r, V, s) = \emptyset \quad \forall a \in E$$

entonces E es d -rectificable.

Lo que estamos diciendo es que si tenemos un control uniforme sobre que nuestro conjunto E no se mete en conos que lo alejan de V entonces el conjunto E es rectificable. Las hipótesis de este enunciado son demasiado fuertes para el caso típico pero por ejemplo se puede permitir que r , s y el plano V varíen con el punto. La versión más general se desprende de la versión que ya enuncié descomponiendo a E en numerables conjuntos donde la oscilación en r , s y V está uniformemente controlada.

Demostración. Veremos que localmente E está contenido en un gráfico Lipschitz sobre V . Más precisamente, veremos que si $F \subseteq E$ $\text{diam}(F) < r$ entonces F está contenido en un gráfico Lipschitz sobre V . Descomponiendo a E en numerables tales conjuntos F con diámetro menor a r tendremos que E es d -rectificable.

Sea $a \in F$. Si

$$|P_V(a) - P_V(b)| < s|a - b| \quad \text{y} \quad |a - b| < r,$$

entonces $b \in X(a, r, V, s)$ y luego $b \notin F$ por hipótesis. Esto implica que

$$|P_V(a) - P_V(b)| \geq s|a - b|$$

siempre que $a, b \in F$. Entonces $P_V|_F : F \rightarrow P_V(F)$ es una biyección y $f = P_V^{-1}(F)$, $\text{Lip}(f) \leq \frac{1}{s}$. Esto demuestra que F es el gráfico de f sobre $P_V(F) \subseteq V$. Como toda función Lipschitz definida en un subconjunto de \mathbb{R}^d se puede extender a una función Lipschitz en todo \mathbb{R}^d , podemos darle una estructura a E como conjunto rectificable \square

Definición 5.3.2. Dado un conjunto E decimos que E admite un plano tangente de dimensión d en un punto a si existe un d -plano V que pasa por a y para todo $0 < s < 1$ existe un real positivo $r(s)$ tal que

$$E \cap X(a, r(s), V, s) = \emptyset.$$

Teorema 5.3.3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si para \mathcal{H}^d -casi todo $x \in E$ admite un plano tangente de dimensión d , entonces E es rectificable.

Demostración. Podemos suponer que E tiene tangentes de dimensión d en todo punto tirando un subconjunto de medida cero. Para cada plano V definimos

$$E_i(V) = \{a : E \cap X(a, 1/i, V, 1/2) = \emptyset\}.$$

Estos conjuntos tienen todos un control uniforme a que escala entran en ciertos conos.

Sabemos que al variar i y V tenemos a todo E . Si V_j es una familia densa de planos en la Grasmanniana con la distancia de la que hablamos antes, entonces definimos $A_{ij} = E_i(V_j)$. Al unir A_{ij} tenemos todo E . Esto es porque si i es lo suficientemente grande, el conjunto entra en conos más pequeños. Si el cono es más pequeño podemos cambiar el plano tangente real por uno que lo aproxima, perdiendo un poco de apertura en el cono. Finalmente como cada A_{ij} es rectificable $E = \bigcup A_{ij}$ será rectificable. \square

Hacemos algunos comentarios sobre imágenes de funciones Lipschitz.

Observación 5.3.4. En lo siguiente supondremos $d \leq n$. Uno se puede preguntar, ¿cual es la diferencia entre que una función Lipschitz $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ sea diferenciable en x a que admita un plano tangente d -dimensional en $f(x)$?. Esto es una cuestión más delicada de lo que parece en general. La dificultad es que pueden suceder las siguientes dos situaciones: La primera, f puede estar “bajando de dimensión” (por ejemplo si es la proyección a un plano de dimensión menor a d) y que la aproximación lineal más correcta no tenga dimensión d . La segunda, que cerca de $f(x)$ el comportamiento del gráfico combine dos escalas distintas en el dominio (por ejemplo si existe y tal que $f(y) = f(x)$ y f no es diferenciable en y o si lo es pero los planos que mejor aproximan a f cerca de x e y son distintos).

En general la suposición que hicimos recién de que f estaba globalmente definida no es una obstrucción al análisis sobre una función f que está sólo parcialmente definida por el Teorema de extensión de funciones Lipschitz 5.2.1. Si f tiene buen comportamiento al agrandarle el dominio, tendrá buen comportamiento en su dominio original.

Sabemos por el Teorema de Rademacher 5.2.2 que para \mathcal{L}^d casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, f es diferenciable. Podemos considerar entonces la siguiente función asociada a la f que se conoce como el Jacobiano.

$$Jf(x) = \begin{cases} \sqrt{\det(Df(x)^t Df(x))} & \text{si } f \text{ es diferenciable en } x \\ \infty & \text{si no.} \end{cases}$$

El Jacobiano se puede definir sobre cualquier transformación lineal de la misma manera. Si T es una transformación lineal uno tiene la descomposición polar $T = PS$ con $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ simétrica y $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonal. También se puede calcular el Jacobiano de la transformación lineal como $\det(S)$. Es decir el Jacobiano de una transformación lineal mide el área d -dimensional de un conjunto bajo la acción de la transformación T . Luego computarle el Jacobiano al diferencial de la función nos dice como cambia el área d -dimensional infinitesimalmente.

Se tiene entonces la famosa y de vital importancia formula del área.

Teorema 5.3.5 (Formula del Área). *Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz con $1 \leq d \leq n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible \mathcal{L}^d , entonces la función de multiplicidad $M(y) = \mathcal{H}^0(E \cap \{f = y\})$ es \mathcal{H}^d medible y se tiene*

$$\int_E Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^d(y).$$

Es natural introducir la siguiente definición de punto crítico:

Definición 5.3.6. Dado $x \in \mathbb{R}^d$ y una función Lipschitz $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ decimos que x es un punto crítico de f si f no es diferenciable en x o si $Jf = 0$.

El siguiente resultado es una versión del teorema de Sard, muy conocido en la topología diferencial, para funciones Lipschitz.

Corolario 5.3.7. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz y C es el conjunto de sus puntos críticos, entonces $\mathcal{H}^d(f(C)) = 0$.

Demostración. Se obtiene aplicando la fórmula del área directamente. Por un lado el conjunto donde f no es diferenciable tiene medida \mathcal{L}^d cero. Por el otro lado la integral sobre conjunto donde $Jf(x) = 0$ es cero. Por la fórmula del área tenemos

$$0 = \int_C Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(C \cap f^{-1}\{y\})d\mathcal{H}^d(y) \geq \mathcal{H}^d(f(C)).$$

El último paso es simplemente acotar la función de multiplicidad por 1 en $f(C)$ ya que esos puntos están en la imagen. \square

También se tiene la famosa y de vital importancia fórmula de Coarea que cubre los casos $d \geq n$.

Teorema 5.3.8 (Fórmula de Coarea). Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz con $1 \leq n \leq d$ y $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible \mathcal{L}^d , entonces la función $M(y) = \mathcal{H}^{d-n}(E \cap \{f^{-1}(y)\})$ es \mathcal{L}^n medible y se tiene

$$\int_E Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{d-n}(E \cap \{f^{-1}(y)\})dy.$$

Las demostraciones de las fórmulas de área y coarea se pueden encontrar en cualquier libro del área. Por ejemplo [EG15], [Mag12] o [Sim14].

Lema 5.3.9. Si Λ es un gráfico Lipschitz de dimensión d y $F \subseteq \Lambda$ entonces para \mathcal{H}^d casi todo $x \in F$ tenemos que

1. Λ admite un plano tangente de dimensión d en x ,
2. $\Theta_*^d(F, x) = \Theta^{*d}(F, x) = 1$.

Daremos una idea de la demostración.

Demostración. Al decir un gráfico Lipschitz de dimensión d nos estamos refiriendo a que existe una función g sobre un plano por el origen V que satisface $g(y) \in V^\perp \forall y$.

$$\Lambda = \{y + g(y) : y \in V.\}$$

La podemos pensar como una imagen Lipschitz $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ vía la identificación de V con \mathbb{R}^d .

El hecho de que Λ sea un gráfico nos deja en una mejor situación que la discusión que la posterior al Teorema 5.3.3. La ventaja que encontramos es que f es bilipschitz con inversa la proyección ortogonal sobre V . Los enunciados de densidad salen de explotar este hecho. Sabemos si tomo $x \in \Lambda$ y llamo π a la proyección ortogonal sobre V , entonces

$$\mathcal{H}^d(\Lambda \cap B_r(x)) \geq \mathcal{H}^d(\pi(\Lambda \cap B_r(x))) = \mathcal{H}^d(V \cap B_r(\pi(x))) = \omega_d r^d.$$

Esto implica que siempre $\Theta_*^d(x, \Lambda) \geq 1$. Tenemos por otro lado que $\Theta^{*d}(x, \Lambda) \leq 1$, \mathcal{H}^d a.e $x \in \Lambda$ por el Lema 2.5.1.

Por el Corolario 5.3.7 sabemos que la imagen de los puntos críticos tiene medida \mathcal{H}^d cero. Luego \mathcal{H}^d casi todos los puntos en Λ son la imagen de un punto en el que f es diferenciable. Eso permite construirle el plano tangente a esos puntos.

En conclusión las dos dificultades que describimos en la discusión posterior al Teorema 5.3.3 no se encuentran presentes. La primera dificultad no se encuentra presente nunca si estamos interesados en cuestiones ciertas \mathcal{H}^d a.e. porque la imagen de los puntos críticos mide cero. La segunda dificultad no se encuentra presente aquí porque al saber que f es bilipschitz, puntos cercanos en Λ tienen que haber venido de aplicarle f a puntos cercanos.

Para obtener los resultados sobre $F \subseteq \Lambda$ en vez de sobre Λ basta usar el Corolario 2.5.2. □

Capítulo 6

Tangentes, ε^2 y β_∞^2

6.1. Introducción

Recordamos las definiciones de la introducción a la tesis. Para una curva de Jordan Γ vamos a definir la cantidad

$$\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) = \frac{1}{r} \inf_{\substack{L \text{ recta} \\ L \cap B(x, r) \neq \emptyset}} \sup_{y \in \Gamma \cap B(x, r)} \text{dist}(y, L)$$

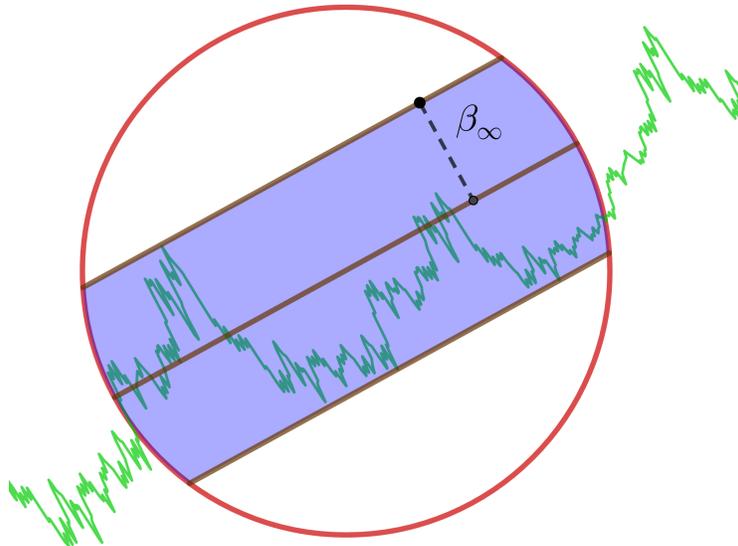


Figura 6.1: $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$

La cantidad (1.1) representa cuán pequeño podemos tomar el ancho de una franja para cubrir la curva en la bola $B(x, r)$. Como lo que nos interesa medir debe servirnos multiescala debemos normalizar apropiadamente. Cuanto más pequeño sea este coeficiente β_∞ más finita será la franja en la bola y más se parecerá la curva a una recta. En la Figura 6.1 vemos la franja marcada en azul, a la curva en verde y a la circunferencia sobre la que estamos observando en rojo.

Definimos luego la siguiente cantidad asociada a la β_∞ :

$$\beta_\infty(x)^2 = \int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r}$$

La pregunta que nos haremos será para qué puntos de la curva serán finitos la función cuadrática que definimos recién y de otra que definiremos pronto. Que la integral sea finita es una forma de medir que los coeficientes deben estar decayendo cuando hacemos decrecer el radio. El factor $\frac{1}{r}$ en la integral provoca una explosión en el cero. Para que la integral sea finita debería haber coeficientes pequeños que estén decayendo rápido para que eviten la explosión de $\frac{1}{r}$. Esto será pedir de una forma cuantitativa que tengamos una oscilación controlada cerca del punto.

La razón por la que consideramos las integrales de la forma $\frac{dr}{r}$ es que satisfacen cierta invarianza por dilataciones:

$$\int_0^a f(r) \frac{dr}{r} = \int_0^{\lambda a} f\left(\frac{r}{\lambda}\right) \frac{dr}{r}.$$

Esto nos permite “hacer zoom” sin cambiar la integral. Nosotros lo queremos usar para medir la existencia de rectas tangentes. La cuestión de que una curva de Jordan admita o no una recta tangente es local. Es decir, podría haber oscilación a escalas grandes de la curva y aún así que la curva admita una recta tangente en cierto punto. Esto es coherente desde la perspectiva de los coeficientes, ya que su finitud no depende de a qué escala sucede el decaimiento.

La idea para definir $\varepsilon(x, r)$ es observar que pasa en la cáscara de la bola $\partial B(x, r)$. Recordamos que las curvas de Jordan dividen al plano en dos componentes conexas, una interior a la curva y otra exterior a ésta. Si Γ es una curva de Jordan llamaremos Ω^+ y Ω^- a las dos componentes abiertas conexas en las que queda dividido $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Lo que haremos será observar como queda dividido $\partial B(x, r)$ por Ω^+ y Ω^- . Los conjuntos $\partial B(x, r) \cap \Omega^+$ y $\partial B(x, r) \cap \Omega^-$ serán abiertos de $\partial B(x, r)$ y luego una unión numerable de arcos abiertos de circunferencia. Definimos $I^+(x, r)$ como la componente conexa de $\partial B(x, r) \cap \Omega^+$ de mayor longitud. Puede ser vacía y pueden haber múltiples que cumplan eso. Definimos $I^-(x, r)$ análogamente.

En el la Figura 6.2 podemos cómo la curva corta a la circunferencia, dividiéndola en arcos abiertos azules que están en Ω^+ y en arcos rojos que están en Ω^- .

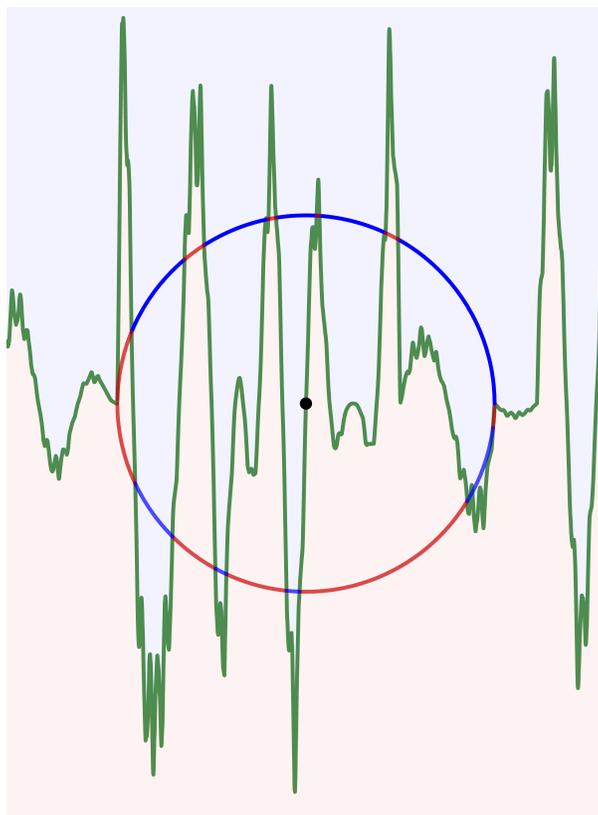


Figura 6.2: $\varepsilon(x, r)$

Ahora definimos

$$\varepsilon(x, r) = \frac{1}{r} \max \{ |\pi r - \text{Long}(I^+(x, r))|, |\pi r - \text{Long}(I^-(x, r))| \}$$

Lo que estamos haciendo acá es comparar la longitud del arco contra la longitud de media circunferencia. Al igual que antes para que podamos hacer análisis multiescala tenemos que normalizar todo apropiadamente. Si el coeficiente ε es pequeño, entonces la cascara de la bola debe tener una componente del lado positivo y una componente del lado negativo que deberán ser casi toda la circunferencia. Entonces cuanto más pequeño sea este coeficiente ε menos oscilación podrá tener la curva sobre la bola.

Al igual que con el β_∞ , le asociaremos a ε la función cuadrática:

$$\mathcal{E}(x)^2 = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

El resultado que hay entonces es que (salvo medida \mathcal{H}^1 cero): Es equivalente que en un punto la curva admita una tangente en x , que $\beta_\infty(x)$ sea finito y que $\mathcal{E}(x)$ sea finito.

Hablar de medida \mathcal{H}^1 cero sobre la curva es una condición extremadamente fina en este contexto ya que típicamente una curva de Jordan no tiene porque tener medida \mathcal{H}^1 finita o incluso σ -finita. Más aún, puede tener dimensión de Hausdorff más grande que 1.

A continuación presentamos finalmente el resultado principal de este trabajo. Todo el material desarrollado hasta ahora será usado para dar una demostración de lo que se conoce como la Conjetura ε^2 de Carleson. La prueba parcial que presentamos acá se debe a Jaye-Tolsa-Villa y aparece en [JTV]. Dicho trabajo es uno de varios de una serie de artículos en donde se ve el alcance y la utilidad de las técnicas cuantitativas en el estudio de problemas de rectificabilidad y existencia de tangentes.

Teorema 6.1.1. *Si Γ es el borde de un abierto 2-sided corkscrew en \mathbb{R}^2 entonces el conjunto de puntos donde $\mathcal{E}(x)$ es finita esta contenido (salvo medida \mathcal{H}^1 cero) en el conjunto donde la curva admite una tangente.*

Hablaremos un poco sobre esta pregunta primero. ¿Cómo se suelen relacionar el $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ y el $\varepsilon(x, r)$? Más específicamente, ¿es cierto que $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) \leq C\varepsilon(x, r)$, para alguna constante C positiva? Y la misma pregunta en la otra dirección ¿es cierto que $\varepsilon(x, r) \leq C\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$, para alguna constante C positiva?

En la Figura 6.3 vemos que la cantidad $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ controla a $\varepsilon(x, r)$. Es decir, si es cierto que $\varepsilon(x, r) \leq C\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$. Podemos considerar una recta L donde se alcanza el mínimo del β_{∞} . Como $x \in \Gamma$, entonces si trasladamos a L_0 para que pase por x tenemos una franja de tamaño $4r\beta_{\infty}(x, r)$ en la que esta contenida toda la curva en la bola. Es decir si $F = \{y : \text{dist}(y, L_0) \leq 2\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)\}$, entonces $\Gamma \cap \overline{B(x, r)} \subseteq F$. La recta L_0 es un diámetro de la bola $\overline{B(x, r)}$.

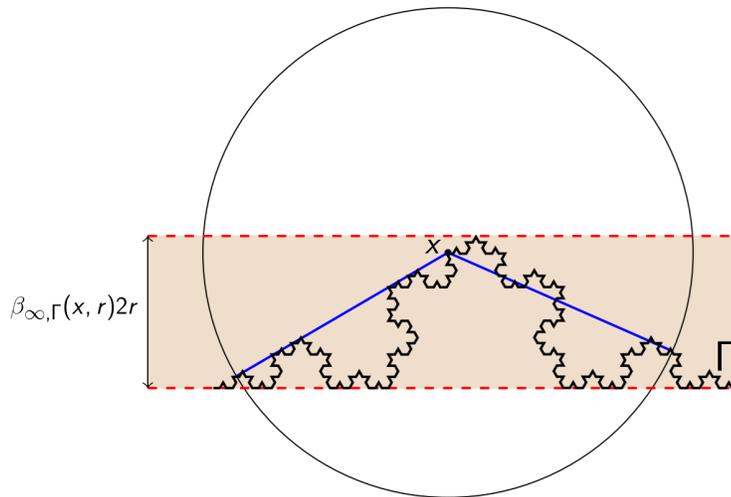


Figura 6.3: $\varepsilon(x, r) \leq C\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ [Tol20]

Como se ve en la Figura 6.3 quedan dos arcos grandes uno en cada lado. El control de tamaño que tenemos para esos arcos depende del que tenemos para $\beta_{\infty,\Gamma}(x,r)$. Si nos fijamos $\partial B(x,r) \setminus F$, este conjunto tiene dos arcos de longitud al menos $\pi r - 2\arcsin(2\beta_{\infty,\Gamma}(x,r))$. Esto implica que

$$\varepsilon(x,r) \leq 2\arcsin(2\beta_{\infty,\Gamma}(x,r)).$$

Esto último nos da $\varepsilon(x,r) \leq C\beta_{\infty,\Gamma}(x,r)$ como deseábamos.

Por otro lado, en la Figura 6.4 vemos que puede pasar que $\varepsilon(x,r) = 0$ pero $\beta_{\infty,\Gamma}(x,r) > 0$. Lo que muestra que no podemos tener una desigualdad de la forma $\beta_{\infty,\Gamma}(x,r) \leq C\varepsilon(x,r)$.

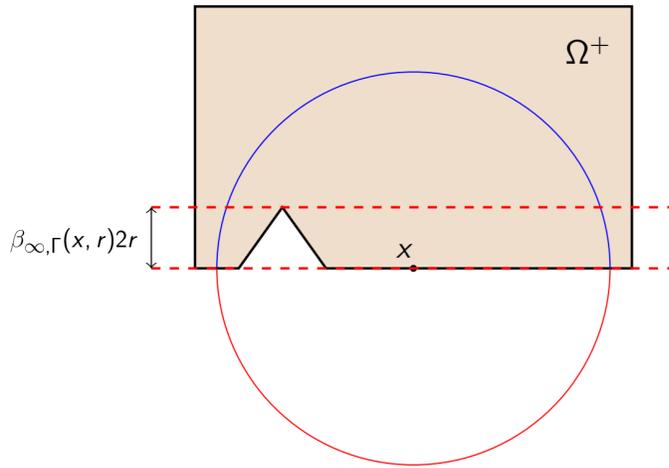


Figura 6.4: $\varepsilon(x,r) = 0$ y $\beta_{\infty,\Gamma}(x,r) > 0$ [Tol20].

Como ya mencionamos en la introducción Jones demostró en [Jon90] una versión del siguiente teorema.

Teorema 6.1.2 (Analyst Traveling Salesman). *Si E es compacto en \mathbb{R}^2 esta contenido en una curva de longitud finita si y solo si para todo $x \in E$ vale que*

$$\int_0^1 \beta_{\infty,E}(x,r)^2 \frac{dr}{r} < \infty. \quad (6.1)$$

El lector puede encontrar una demostración de este teorema en los libros [GM08] y [BP17]. En el libro [GM08] se demuestra también el siguiente Teorema:

Teorema 6.1.3. *Sea Γ una curva de Jordan. Es equivalente salvo en medida \mathcal{H}^1 cero*

1. Γ admite una recta tangente en x .

2. $\int_0^1 \beta_{\infty,E}(x,r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$

Una vez notado que $\varepsilon(x, r) \leq C\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ usando el Analyst Traveling Salesman Theorem que ya mencionamos en la introducción, tenemos que si Γ admite tangentes en un conjunto $E \subseteq \Gamma$ entonces para \mathcal{H}^1 casi todo $x \in E$

$$\int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

Esto implica directamente que

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

Estudiaremos este problema en codimensión 1 y veremos que suponiendo válido el 6.3.3 Lema 2, el teorema sigue siendo cierto en codimensión 1. Incluso si hubiese alguna obstrucción en la extensión del lema 2 a dimensiones superiores, es de interés verificar que las herramientas utilizadas a lo largo de la demostración no presentaban una obstrucción.

La triple equivalencia que anunciamos hace un rato no es cierta en dimensiones superiores. La dirección que seguro falla es que el conjunto donde una hipersuperficie admite planos tangentes tiene la función cuadrática asociada a la β_{∞} finita. Existen gráficos Lipschitz de dimensiones superiores con β_{∞}^2 no finita. Una tal construcción esta en el Paper [AS18] Ejemplo 1.16.

En dimensiones superiores si Γ es el borde de un 2-sided c -corkscrew entonces

$$\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) = \frac{1}{r} \inf_{\substack{P \text{ hiperplano} \\ P \cap B(x, r) \neq \emptyset}} \sup_{y \in \Gamma \cap \overline{B(x, r)}} \text{dist}(y, P).$$

Al momento de pensar sobre cuales deberían ser los coeficientes $\varepsilon(x, r)$ no hay una elección canónica. La elección que hago es en mirar cuan grande puede ser un casquete de esfera (que es la intersección de una bola euclídea con la esfera) a la descomposición en abiertos inducida por el 2-sided c -corkscrew. Esta elección es no trivial. La ventaja de utilizar esta familia de conjuntos es que es regular respecto al radio de la bola euclídea con el que intersecamos a la esfera.

Lo que haremos será observar cómo queda dividido $\partial B(x, r)$ por Ω^+ y Ω^- . Los conjuntos $\partial B(x, r) \cap \Omega^+$ y $\partial B(x, r) \cap \Omega^-$ serán abiertos de $\partial B(x, r)$. Para cada $x_0 \in \Omega^+ \cap \partial B(x, r)$ definimos s como

$$s := \sup\{t : B(x_0^+, t) \cap \partial B(x, r) \subseteq \Omega^+ \cap \partial B(x, r)\}$$

Ahora $a(x_0) = \mathcal{H}^{n-1}(B(x_0, s) \cap \partial B(x, r))$. Le asignaremos a la parte positiva la cantidad

$$m^+(x, r) = \sup\{a(x_0) : x_0 \in \partial B(x, r) \cap \Omega^+\}.$$

Análogamente definimos $m^-(x, r)$.

En la Figura 6.5 vemos dos casquetes en verde sobre puntos en $\partial B(x, r)$ y otro en Ω^- . Estos casquetes son algunos de los que consideramos al tomar el supremo. En gris claro están las bolas Euclídeas con las que estamos intersecando a $\partial B(x, r)$ con centro en los puntos azules.

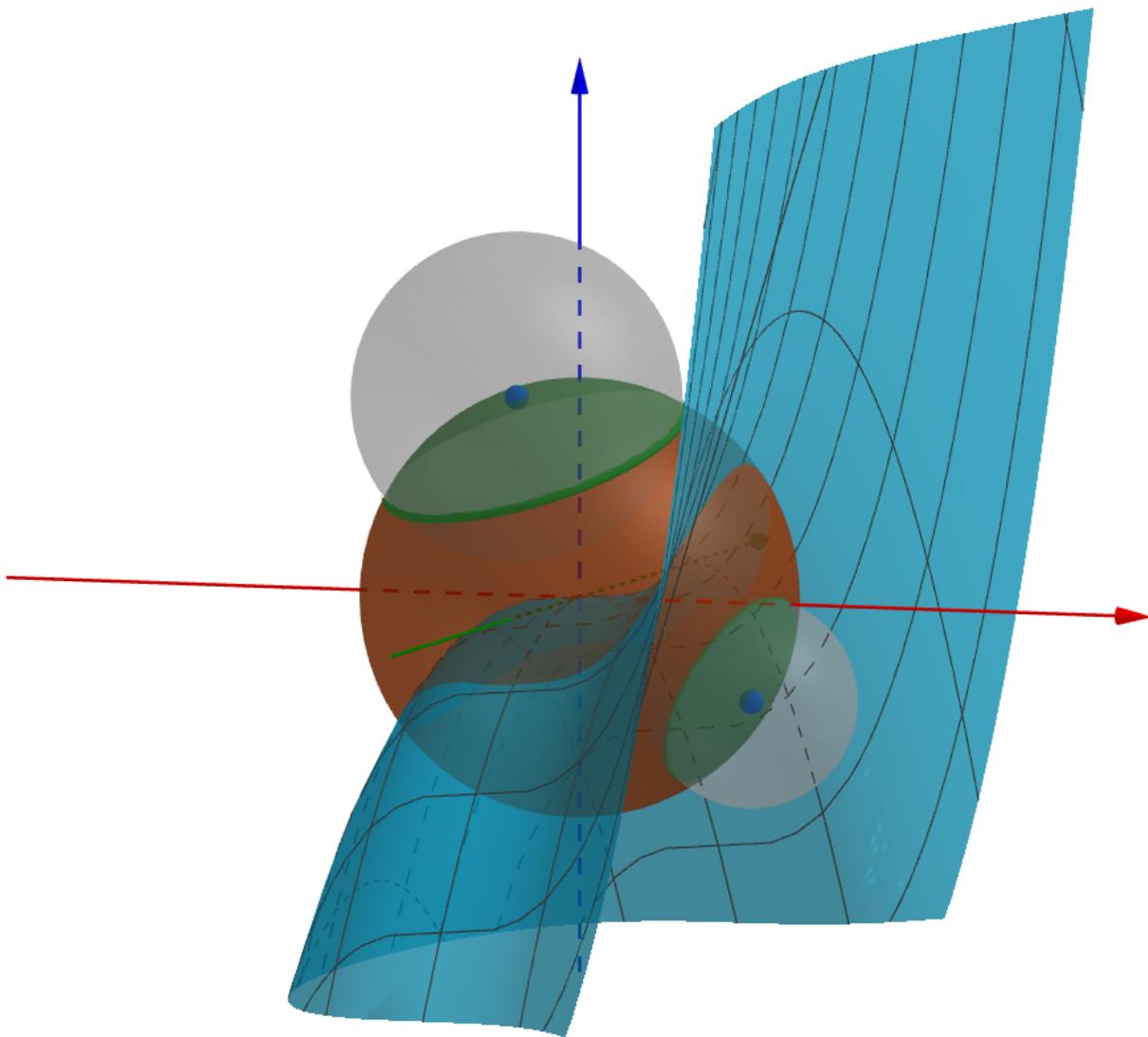


Figura 6.5: Versión de $\varepsilon(x, r)$ en \mathbb{R}^3 .

Estas cantidades representan la mayor área que podemos conseguir en un casquete que sea la intersección de la esfera con una bola euclídea para que estén adentro de las componentes conexas de $\Omega^\pm \cap \partial B(x, r)$.

Lo que estamos midiendo es cuán grande en área es el disco euclídeo en la esfera más grande contenido en Ω^\pm .

Ahora definimos

$$\varepsilon(x, r) = \frac{1}{r^{n-1}} \max \left\{ \left| \frac{n}{2} \omega_n r^{n-1} - m^+(x, r) \right|, \left| \frac{n}{2} \omega_n r^{n-1} - m^-(x, r) \right| \right\}$$

Sabemos que $\mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1}) = n\mathcal{H}^n(B(0, 1)) = n\omega_n$. Entonces $\frac{n\omega_n}{2}r^{n-1}$ es la medida de media esfera. Luego la idea es la misma acá, estamos midiendo casquetes y preguntándonos cuán lejos están de ser media esfera.

6.2. Lema de funciones cuadráticas

Definimos

$$\alpha^+(x, r) = \left| \frac{\pi^{n/2}}{2} - \frac{1}{r^n} \int_{\Omega^+} e^{-|y-x|^2/r^2} dy \right|.$$

Asociada a estos coeficientes definimos

$$\mathcal{A}(x)^2 = \int_0^1 \alpha^+(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Más en general, si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ que cumple

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^{n-1} \sqrt{\log(e+t)} < \infty,$$

definimos $\psi(x) = \varphi(|x|)$. Luego

$$a_\psi(x, r) = \left| c_\psi - \frac{1}{r^n} \int_{\Omega^+} \psi\left(\frac{y-x}{r}\right) dy \right|$$

donde

$$c_\psi = \int_{\mathbb{R}_+^n} \psi\left(\frac{y}{r}\right) dy.$$

Acá adoptamos la notación $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$. Asociada a estos coeficientes definimos

$$\mathcal{A}_\psi(x)^2 = \int_0^1 a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Sabemos que $\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|y|^2} dy$ es

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^{n-1} \times \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} dt \right) = (\sqrt{\pi})^{n-1} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi^{n/2}}{2}.$$

Esto justifica la constante en la definición de $\alpha^+(x, r)$.

Lema 6.2.1. *Existe una constante C_ψ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $R > 0$, y $M \geq 1$, tenemos:*

$$\int_0^R a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \leq C_\psi \int_0^{MR} \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} + \frac{n\omega_n}{2} \int_M^\infty \varphi(t) t^{n-1} \left(\log^+ \frac{t}{M} \right)^{1/2}.$$

Aquí usamos la notación $\log^+(x) = \log(e + x)$.

Demostración. Si ε es pequeña, entonces deben haber dos casquetes grandes del lado positivo y negativo. Luego una afirmación que se desprende de esto es que en medida $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+)$ debe parecerse a media esfera. Una cota sale de que el casquete del lado positivo tiene bastante medida y la otra que el casquete del lado negativo tiene bastante medida y está en el complemento.

El argumento que dimos recién funciona sin que necesariamente ε sea chica para controlar la medida de la parte positiva en la esfera y la de la parte negativa. Integrando en coordenadas polares en x tenemos que

$$\begin{aligned} a_\psi(x, r) &= \left| c_\psi - \frac{1}{r^n} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{s}{r}\right) \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+) \right| ds \\ &= \frac{1}{r^n} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{s}{r}\right) \left| \frac{n\omega_n}{2} - \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+) \right| ds. \end{aligned}$$

Si tomamos $D^\pm(x, s)$ casquetes en $\Omega^\pm \cap \partial B(x, s)$, entonces:

$$D^+(x, s) \subseteq \partial B(x, s) \cap \Omega^+ \subseteq \partial B(x, s) \setminus D^-(x, s),$$

y de ahí que

$$\mathcal{H}^{n-1}(D^+(x, s)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+) \leq n\omega_n - \mathcal{H}^{n-1}(D^-(x, s)).$$

Variando las elecciones de los casquetes tenemos que:

$$m^+(x, s) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+) \leq n\omega_n - m^-(x, s).$$

Este último paso se debe a que tienen que existir sucesiones de casquetes convergiendo en medida a esas cantidades y luego podemos obtener la desigualdad pasando al límite.

Restando $\frac{n\omega_n}{2}$ y acotando por $\varepsilon(x, s)$ desde arriba y abajo tenemos que

$$\left| \frac{n\omega_n}{2} - \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap \Omega^+) \right| \leq s^{n-1} \varepsilon(x, s).$$

Esto nos dice que :

$$a_\psi(x, r) \leq \frac{1}{r^n} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{s}{r}\right) \varepsilon(x, s) s^{n-1} ds. \quad (6.2)$$

Elevando al cuadrado (6.2) e integrando sobre $r \in (0, R)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^R a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^R \left(\frac{1}{r^n} \int_0^\infty \varphi \left(\frac{s}{r} \right) \varepsilon(x, s) s^{n-1} ds \right)^2 \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^R \left(\frac{1}{r^n} \int_0^\infty \varphi(t) \varepsilon(x, tr) t^{n-1} dt \right)^2 \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^R a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \right)^{1/2} &\leq \int_0^\infty \left(\varepsilon(x, tr)^2 \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \varphi(t) t^{n-1} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^{tR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2} \varphi(t) t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Para $t \geq 1$ y $M > 1$, dividimos

$$\begin{aligned} \int_0^{tR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} &\leq \int_0^{MR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} + \left(\frac{n\omega_n}{2} \right)^2 \int_{MR}^{tR} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^{MR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} + \left(\frac{n\omega_n}{2} \right)^2 \log^+ \frac{t}{M}. \end{aligned}$$

Aquí el $\left(\frac{n\omega_n}{2} \right)^2$ sale de acotar a $\varepsilon(x, r)$ por $\frac{n\omega_n}{2}$. Como la desigualdad es cierta también para todo $t \in (0, 1)$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^{tR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2} \varphi(t) t^{n-1} dt &\leq \left(\int_0^{MR} \varepsilon(x, u)^2 \frac{du}{u} \right)^{1/2} \int_0^\infty \varphi(t) t^{n-1} dt \\ &\quad + \frac{n\omega_n}{2} \int_M^\infty \varphi(t) t^{n-1} \left(\log^+ \frac{t}{M} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

De esto se concluye el lema. □

Corolario 6.2.2. *En particular si*

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty,$$

tenemos que

$$\int_0^1 a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

6.3. Estructura de la demostración

Definición 6.3.1. Decimos que μ tiene crecimiento C -polinomial de grado d , si para toda bola B tenemos que $\mu(B) \leq Cr^d$.

Lema 6.3.2. Lema principal 1:

Sea $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto 2-sided c -corkscrew, $\Gamma = \partial\Omega^+$, sea μ una medida con crecimiento 1-polinomial de grado $n - 1$ soportada en Γ . Sea B una bola centrada en Γ tal que $\mu(B) \geq c_0 r(B)^{n-1}$ para $0 < c_0 \leq C_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (dependiendo en C_0, c_0, c, ε) tal que si

$$\int_{7B} \int_0^7 (\varepsilon(x, r)^2 + \alpha^+(x, r)^2) \frac{dr}{r} d\mu(x) \leq \delta \mu(7B),$$

entonces $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \varepsilon$.

Esto es decir que en lugares de densidad y buen control de la oscilación vía (esencialmente) acotaciones uniformes de $\varepsilon(x, r)$ para $x \in \text{supp}(\mu)$ nos da un control en flatness directo en la bola original de tipo acotación en β_{∞} . La condición de $\mu(B(x, r)) \leq r^{n-1}$ uno la tiene que pensar como una condición de normalización. Esta condición de normalización no es demasiado pedir en este contexto porque utilizaremos el lema para la restricción de las medidas de Hausdorff a un conjunto. Pedir una condición de densidad suele ser natural porque para que la medida pueda dar información sobre el comportamiento en la bola debemos tener controlado en algún sentido que es lo que está viendo.

Conjetura 6.3.3. Lema principal 2:

Sea $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto 2-sided c -corkscrew, $\Gamma = \partial\Omega^+$. Sea B_0 una bola centrada en Γ y μ una medida con crecimiento 1- polinomial de grado $n - 1$ soportada en $\Gamma \cap \overline{B_0}$. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mu(B_0) \geq c_0 r^{n-1}$
2. $\beta_{\infty}(B) \leq \varepsilon$ siempre que $\mu(B) \geq \theta r(B)^{n-1}$ y B sea una bola centrada en la hipersuperficie Γ .
3. Para una función radial $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbb{1}_{B(0,1)} \leq \psi \leq \mathbb{1}_{B(0,1,1)}$, se cumple que

$$\int_0^{r(B_0)/\varepsilon} a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \leq \varepsilon \text{ para todo } x \in \text{supp}(\mu).$$

Si θ es lo suficientemente chico en términos de c_0 , y ε es lo suficientemente chico en términos de θ y c_0 , existe un un gráfico Lipschitz Λ de pendiente pequeña (si $n = 2$ de pendiente como mucho $\frac{1}{10}$) tal que $\mu(\Lambda) \geq \frac{1}{2} \mu(B_0)$.

Demostración del Teorema 6.1.1. En esta sección demostraremos el resultado principal suponiendo que es válida la Conjetura 6.3.3 (es decir, que el Lema 2 es válido en general).

Sea $G = \{x \in \Gamma : \varepsilon(x) < \infty\}$. Veremos que los puntos de G en los que Γ no admite un plano tangente tienen medida \mathcal{H}^{n-1} cero.

Supongamos que eso no sucede. Entonces si $F_0 \subseteq G$ es tal que G no admite tangentes en puntos de F_0 , tenemos que F_0 tiene medida \mathcal{H}^{n-1} positiva. Podemos quedarnos con un subconjunto cerrado de F_0 , F tal que tiene medida positiva y finita. Esto es $0 < \mathcal{H}^{n-1}(F) < \infty$. Como $\mathcal{E}(x) < \infty$ en F tenemos por el Lema 6.2.1

$$\int_0^1 [\varepsilon(x, r)^2 + \alpha^+(x, r)^2 + a_\psi(x, r)^2] \frac{dr}{r} < \infty.$$

Por el teorema de Egoroff para medidas 2.1.10 podemos remplazar a F por un subconjunto cerrado que siga teniendo medida \mathcal{H}^{n-1} positiva sobre el cual

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^s (\varepsilon(x, r)^2 + \alpha^+(x, r)^2 + a_\psi(x, r)^2) \frac{dr}{r} = 0 \text{ uniformemente.}$$

Preservamos el nombre de F . Podemos conseguir que en ese conjunto tengamos además

$$\mathcal{H}^{n-1}(B(x, r) \cap F) \leq 3\omega_{n-1}r \quad \forall x \in F, r > 0. \quad (6.3)$$

Para r chicos se consigue fácilmente ya que $\Theta^{n-1,*}(F, x) \leq 1$ para \mathcal{H}^{n-1} casi todo punto en F por el Lema 2.5.1. Quitando un conjunto de medida cero podemos conseguir que eso pase para todo F .

Si nos fijamos

$$\varphi(x, r) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B(x, r) \cap F)}{\omega_{n-1}r^{n-1}}$$

para todo $x \in F$ tenemos que $\limsup_{r \rightarrow 0} \varphi(x, r) \leq 1$. Usando (esencialmente) el Teorema de Egoroff 2.1.10 podemos conseguir que este límite superior sea uniforme en un subconjunto cerrado de F de medida \mathcal{H}^{n-1} positiva. Nos alcanzará con que existe r_0 tal que para todo $r < r_0$ tenemos que $\forall x \in F$ (aunque ahora F es posiblemente más chico) $\forall r < r_0$ la cota $\varphi(x, r) \leq 3$.

Ahora elegimos algún $x \in F$ y cambiamos F por $F \cap \overline{B(x, r_0/2)}$. Luego sabemos que si $r > r_0$, $\varphi(y, r) = \varphi(y, r_0) \forall y \in F$ porque no hay puntos de F en $B(y, r) \setminus B(y, r_0)$ porque restringimos al conjunto F a $B(x, r_0/2)$ que tiene diámetro r_0 . Como $\varphi(y, r) \leq 3$ para $y \in F$ cuando $r \leq r_0$, entonces $\varphi(y, r) \leq 3$ para todo r .

Si $c_0 = \frac{1}{2^{n-1}+1}\omega_{n-1}$, elegimos $\theta > 0$, $\varepsilon \in (0, \theta)$ lo suficientemente chicos para estar en las hipótesis del Lema 6.3.3. Elegimos $\delta > 0$ suficientemente chico para que valga el Lema 6.3.2 (**Lema principal 1**). Sea R lo suficientemente chico como para que

$$\int_0^{7R/\varepsilon} (\varepsilon(x, r)^2 + \alpha^+(x, r)^2 + a_\psi(x, r)^2) \frac{dr}{r} \leq \min(\delta, \varepsilon) \quad (6.4)$$

para todo $x \in F$. Denotamos $\mu = \frac{1}{3\omega_{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}|_F$. Entonces μ tiene crecimiento 1-polinomial de grado $n - 1$ por (6.3). Como $\Theta^{n-1,*}(F, x) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ para \mathcal{H}^{n-1} casi todo $x \in F$ podemos encontrar una bola B_0 de radio menor a R tal que

$$\mu(B_0) \geq \frac{1}{2^{n-1} + 1}\omega_{n-1}r(B_0)^{n-1}.$$

Estamos en condiciones de aplicar el Lema 6.3.3 para la medida $\nu = \mu|_{B_0}$ (que claramente satisface $\nu(B_0) \geq c_0r(B_0)^{n-1}$). Si B es una bola con $\nu(B) \geq \theta r(B)^{n-1}$, entonces $B \cap B_0 \neq \emptyset$ y además

$$r(B)^{n-1} \leq \frac{r(B_0)^{n-1}}{\theta} \leq \frac{r(B_0)^{n-1}}{\varepsilon}.$$

Entonces usando (6.4) obtenemos que

$$\int_{7B} \int_0^{7r(B)} [\varepsilon(x, r)^2 + \alpha^+(x, r)^2] d\mu(x) \frac{dr}{r} \leq \delta\mu(7B).$$

Como tenemos $\mu(B) \geq \theta r(B)^{n-1}$ entonces por el Lema 6.3.2 tenemos que $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \varepsilon$. Tenemos también por (6.4) que

$$\int_0^{r(B_0)/\varepsilon} a_\psi(x, r)^2 \frac{dr}{r} d\nu(x) \leq \varepsilon \text{ en } \text{supp}(\nu).$$

Ahora usando el Lema 6.3.3 tenemos un gráfico Λ con $F_1 = F \cap \Lambda$ que satisface $\mathcal{H}^{n-1}(F_1) > 0$. Por el Lema 5.3.9 \mathcal{H}^{n-1} casi todo $x \in \Lambda$ tenemos que

$$\Theta_*^{n-1}(x, \Lambda) = 1.$$

Usamos ahora el Lema 2.5.1 y el Corolario 2.5.2 para obtener que para \mathcal{H}^{n-1} casi todo $x \in F_1$ vale que

$$\Theta_*^{n-1}(x, F_1) = 1$$

y Λ admite un plano tangente en x .

Lo que sigue mostrará que el plano tangente a Λ en x es tangente a Γ . Definimos

$$A(x, r, R) = \{y : r < |y - x| < R\}$$

el anillo abierto centrado en x con radio interior r y radio exterior R .

Usamos la notación de la Sección 5.3. Debemos ver entonces que si V es el plano tangente a Λ en x para todo real positivo s existe $r(s)$ tal que $\Gamma \cap X(x, r(s), V, s) = \emptyset$. Para ver eso veremos que existe $r(s)$ tal que si $r < r(s)$ entonces

$$\Gamma \cap X(x, V, s) \cap A(x, r/2, r) = \emptyset.$$

Como podemos ir cambiando r , entonces recorreremos todo $B(x, r(s)) \setminus \{x\}$ al variar r . Esto implica directamente que

$$\Gamma \cap X(x, V, s) \cap B(x, r(s)) = \Gamma \cap X(x, r(s), V, s) = \emptyset.$$

Como $\Theta_*^1(x, F_1) = 1$, si elegimos $\varepsilon > 0$, entonces existe r_0 que depende de ε tal que si $r < r_0$ estamos frente a las hipótesis del Lema 6.3.2 para la medida μ y la bola $B_0 = B(x, r)$. Es decir, podemos aplicar el lema porque tenemos densidad alta y las acotaciones que ya mencionamos antes para la medida μ y los coeficientes. Esto implica que $\beta_{\infty, \Gamma}(B(x, r)) \leq \varepsilon$. Como podemos hacer esto para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \beta_{\infty, \Gamma}(B(x, r)) = 0.$$

Supongamos entonces que existe una sucesión de radios r_k que convergen a cero tales que $\Gamma \cap X(x, V, s) \cap A(x, r_k/2, r_k) \neq \emptyset$. Trasladamos todo para que $x = 0$ y hacemos una homotecia para que la figura ahora sea $\Gamma_k \cap X(0, V, s) \cap A(0, 1/2, 1)$. Aquí $\Gamma_k = \frac{1}{r_k} \Gamma$.

Sea $y_k \in \Gamma_k \cap X(0, V, s) \cap A(0, 1/2, 1)$. Estos Γ_k son bordes de 2-sided c -corkscrew y luego podemos aplicar el lema de compacidad de 2-sided c -corkscrew respecto a la convergencia local de Hausdorff. Podemos suponer además que en la subsucesión que tomamos y_n converge a un punto y . Tenemos que y debe estar en $\overline{A(0, 1/2, 1)}$.

Como V es el plano tangente a Λ tendremos que los conjuntos

$$\Lambda_k = \frac{1}{r_k}(\Lambda - x) \cap \overline{B(0, 1)}$$

que se obtienen por ampliar el gráfico y trasladarlo convergen en sentido local de Hausdorff al plano V . Los conjuntos

$$A_k = \frac{1}{r_k}(F_1 - x) \cap \overline{B(0, 1)}$$

están contenidos en Λ_k . Quedándonos en una subsucesión podemos conseguir que A_k converja en sentido local de Hausdorff a un cerrado A_∞ . La condición de densidad sobre x se traduce en que $\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda_k)$ converge a ω_{n-1} . También se puede ver que $\mathcal{H}^{n-1}(A_k)$ converge a ω_{n-1} .

Sabemos que Λ_k converge a $V \cap \overline{B(0, 1)}$ y que A_k converge a A_∞ . Veamos ahora que

$$A_\infty = V \cap \overline{B(0, 1)}$$

Si no fuera así, como

$$((V \cap \overline{B(0, 1)}) \setminus A_\infty)$$

es no vacío, entonces será abierto. Luego habría un conjunto cerrado C , la clausura de una bola abierta en $((V \cap \overline{B(0, 1)}) \setminus A_\infty)$. Para k suficientemente grande, Λ_k es un gráfico Lipschitz sobre V en $\overline{B(0, 1)}$. Si f_k es la función Lipschitz, el problema es que al levantar C al gráfico mirando $f_k(C_k)$ tenemos que

$$\mathcal{H}^{n-1}(f_k(C_k)) \geq \mathcal{H}^{n-1}(C)$$

porque C es la proyección ortogonal de $f_k(C_k)$ sobre V .

Como tenemos que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Lambda_k \setminus A_k) \rightarrow 0$$

entonces debe suceder que $f_k(C_k) \cap A_k \neq \emptyset$ para k suficientemente grande. Si tomamos $z_k \in f_k(C_k) \cap A_k$ entonces salvo una subsucesión z_k converge a z que debe estar en C . Luego debemos tener que $z \in C \cap A_\infty$ lo cual es un absurdo.

En la Figura 6.6 tenemos al conjunto C en el plano pintado de rojo, que está metido en una bola que estamos mirando sobre el plano. El conjunto azul oscuro es el que se obtiene por levantar a C por el gráfico Lipschitz.

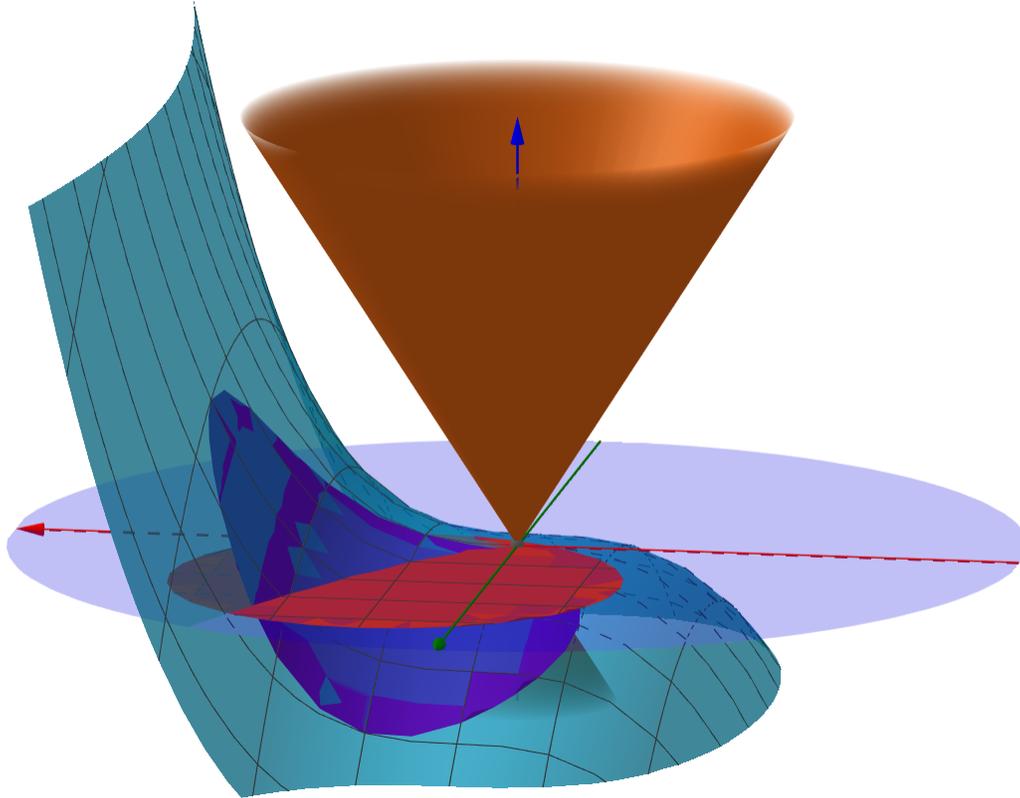


Figura 6.6: Tangente blow-up sin agujeros.

Entonces tenemos que en el límite está el plano V y el punto y en $\overline{A(0, 1/2, 1)}$. Por el Lema 3.2.7 deberíamos tener $\beta_{\infty, \Gamma_{\infty}}(\overline{B(0, 1)}) = 0$. Esto significaría que $\Gamma_{\infty} \cap \overline{B(0, 1)}$ está contenido en un plano ya que se alcanza el β_{∞} . Esto es un absurdo porque y está afuera.

En la Figura 6.7 vemos dónde estaría y entre las dos bolas $B(0, 1/2)$, $B(0, 1)$ y en el cono.

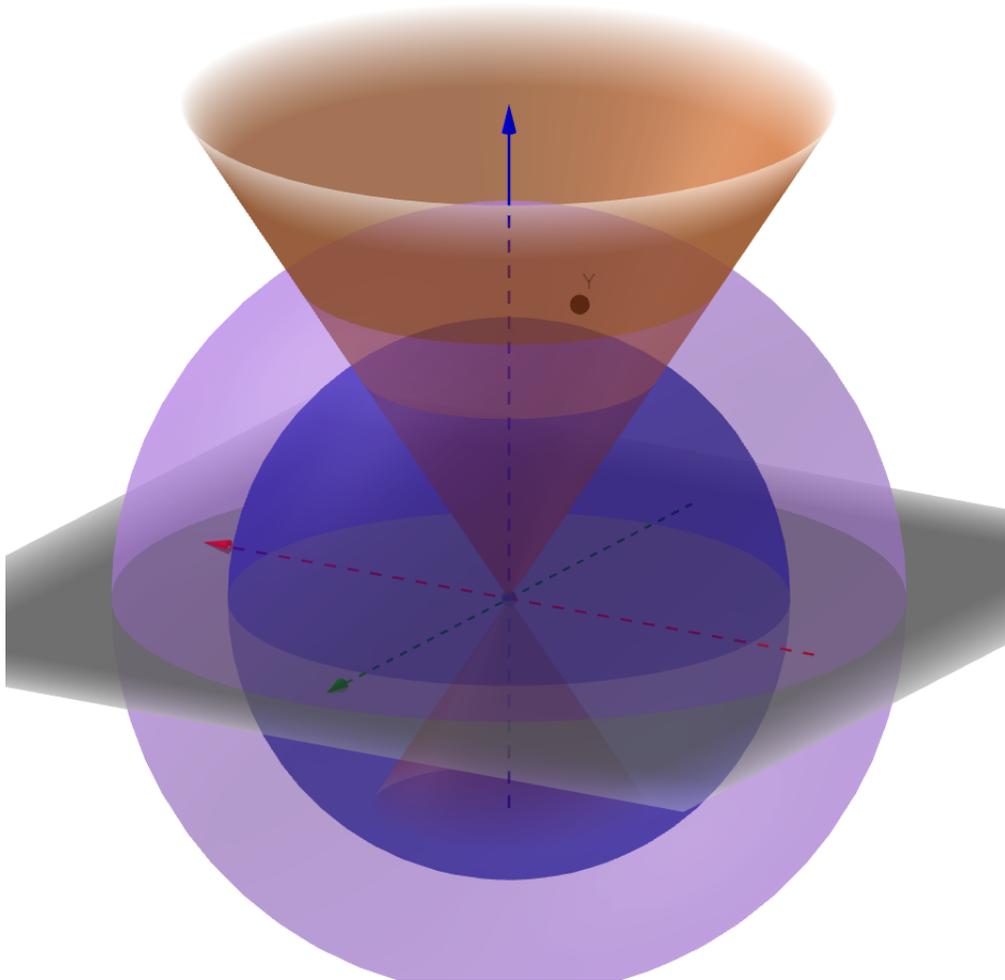


Figura 6.7: Cono y blow-up.

Nota: El argumento que muestra que cotas finas en medida se pueden usar para concluir que no puede haber agujeros en el límite lo vuelvo a hacer en la demostración del Lema 6.4.1. En esa sección se pueden encontrar las cuentas explicadas con mucho más detalle.

Ahora para ver la rectificabilidad del conjunto donde $\mathcal{E}(x)$ es finita basta notar que por lo que demostramos tendremos que para \mathcal{H}^{n-1} casi todo punto de G , Γ admite un plano tangente en x . Esto junto al Teorema 5.3.3 implica la rectificabilidad del conjunto donde $\mathcal{E}(x)$ es finita. \square

6.4. Un resultado de convergencia

Vamos a probar el Lema Principal 1 6.3.2 por el absurdo. Para eso vamos a considerar una sucesión numerable de 2-sided c -corkscrew Ω_j^+ para los que no se satisface la desigualdad que buscamos en β_∞ y tienen cotas para las funciones cuadráticas que van mejorando cuando $j \rightarrow \infty$. Nuestra intención será usar un argumento de compacidad, decir que el límite es analíticamente suave y a la vez liso. Eso implicará que a cierta escala es un plano lo que nos permitirá contradecir el hecho de que ningún término de la sucesión satisfacía las cotas que deseábamos de β_∞ .

Llamamos $\varepsilon_j(x, r)$, $\alpha_j^+(x, r)$ los coeficientes $\varepsilon(x, r)$ y $\alpha^+(x, r)$ asociados a Ω_j^+ . Usaremos Ω^\pm y Γ para referirnos a Ω_∞^\pm , Γ_∞ .

Lema 6.4.1. *Fijamos $C_0, c_0 > 0$. Sea $\{\mu_j\}_j$ una sucesión de medidas con crecimiento C_0 -polinomial de grado $n - 1$ soportadas en Γ_j y convergiendo débilmente a una medida μ (entonces μ tiene crecimiento C_0 -polinomial de grado $n - 1$ y esta soportada en Γ). Supongamos que B_0 es una bola con $\mu(B) \geq c_0 r^{n-1}$. Asumimos también que para todo $j \geq 1$ vale que :*

$$\int_{7B_0} \int_0^{7r(B_0)} \alpha_j^+(x, r)^2 \frac{dr}{r} d\mu_j(x) \leq \frac{1}{j} \mu_j(7B_0), \quad (6.5)$$

y

$$\int_{7B_0} \int_0^{7r(B_0)} \varepsilon_j(x, r)^2 \frac{dr}{r} d\mu_j(x) \leq \frac{1}{j} \mu_j(7B_0). \quad (6.6)$$

Entonces vale lo siguiente

1. Existe una variedad analítica real Z tal que

$$\text{supp}(\mu) \cap 7B_0 \subseteq Z \subseteq \Gamma.$$

2. Para todo $x \in 7B_0 \cap \text{supp}(\mu)$ y para todo $r \in (0, 7r(B_0))$ existe una pareja de hemiesferas admisible contenida en $\partial B(x, r)$.

En este caso, cuando hablamos de una variedad analítica real nos estamos refiriendo a que Z será el conjunto de ceros de una función analítica real.

Lema 6.4.2. *Sea $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío con $\Omega^- = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega^+}$ y $\Gamma = \partial\Omega^+$. Suponemos que $\partial\Omega^- = \Gamma$ también. Sea μ una medida con crecimiento C_0 -polinomial de grado $n - 1$ soportada en Γ , sea B una bola centrada en $\text{supp}(\mu)$. Suponemos que:*

1. Existe una variedad analítica real Z tal que $\text{supp}(\mu) \cap B \subseteq Z \subseteq \Gamma$, y
2. Para todo $x \in B \cap \text{supp}(\mu)$ y $r \in (0, 3r(B))$, existen dos hemiesferas complementarias $S^+(x, r)$, $S^-(x, r)$ de radio r tales que $S^+(x, r) \subseteq \overline{\Omega^+}$ y $S^-(x, r) \subseteq \overline{\Omega^-}$.

entonces existe un hiperplano P tal que $\Gamma \cap B = P \cap B$.

Demostremos el Lema 6.3.2 (**Lema principal 1**) suponiendo validos los dos lemas de arriba.

Demostración del Lema 6.3.2. Renormalizando alcanza probar el lema para la bola $B_0 := B(0, 1)$. Vamos a demostrar el resultado por contradicción: supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ hay un abierto 2-sided c -corkscrew Ω_k^+ con $\Gamma_k := \partial\Omega_k^+$ conteniendo a 0 y soportando a una medida μ_k , C_0 polinomial de exponente $n - 1$ con $\mu_k(B_0) \geq c_0$. Suponemos que estas medidas satisfacen:

$$\int_{7B_0} \int_0^7 (\varepsilon_k(x, r)^2 + \alpha_k^+(x, r)^2) \frac{dr}{r} d\mu_k(x) \geq \frac{1}{k} \mu_k(7B_0)$$

y $\beta_{\infty, \Gamma_k}(B_0) > \varepsilon$. Acá $\varepsilon_k(x, r)$ y $\alpha_k^+(x, r)$ son los coeficientes $\varepsilon(x, r)$ y $\alpha^+(x, r)$ asociados a Ω_k^+ .

La condición $\mu_k(B_0) \approx 1$ junto al crecimiento C_0 -polinomial de grado $n - 1$ implica que

$$\text{diam}(\Omega_k^+) \geq \text{diam}(\Gamma_k) \geq \text{diam}(B_0 \cap \text{supp}(\mu_k)) \gtrsim 1.$$

Es decir, $\inf \text{diam}(\Omega_k^+) > 0$. Esto nos permite aplicar el lema de compacidad para abiertos 2-sided c -corkscrew, Lema 3.3.5. Luego pasando a una subsucesión a la que renombramos, tenemos un abierto 2-sided c -corkscrew Ω^+ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\Omega_k^\pm} \rightarrow \overline{\Omega^\pm} \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = \Gamma$$

en sentido local de Hausdorff. Por el Lema 3.2.7 tenemos que $\beta_{\infty, \Gamma}(B_0) \geq \varepsilon$. Entonces por el resultado de compacidad de medidas del Teorema 2.4.3 tenemos que pasando a una subsucesión μ_k converge débilmente a una medida μ . Esta medida estará soportada en Γ por el Lema 3.1.16 con $\mu(\overline{B_0}) \geq c_0$. Ahora aplicamos el Lema 6.4.1. Entonces, tenemos una variedad analítica real Z tal que $7B_0 \cap \text{supp}(\mu) \subseteq Z \subseteq \Gamma$. También, tenemos para todo $x \in 7B_0 \cap \text{supp}(\mu)$ y $r \in (0, 7)$ que existen hemiesferas complementarias (S^+, S^-) centradas en x con radio r satisfaciendo $S^\pm \subseteq \overline{\Omega^\pm}$.

Como $\mu(\overline{B_0}) \geq c_0$, podemos encontrar una bola B' centrada en $\text{supp}(\mu) \cap \overline{B_0}$ tal que $7B_0 \supseteq B' \supseteq \overline{B_0}$ con $\text{supp}(\mu) \cap B' \subseteq Z$ para todo $x \in \text{supp}(\mu) \cap B'$ y $r \in (0, 3r(B'))$. Ahora aplicamos el Lema 6.4.2 para la bola B' y concluimos que existe un plano tal que $\Gamma \cap B' = P \cap B'$. Pero esto contradice el hecho que $\beta_{\infty, \Gamma}(B_0) \geq \varepsilon > 0$ porque coincide con el plano P en la bola y luego $\beta_{\infty, \Gamma}(B_0) = 0$. \square

Demostración del Lema 6.4.1. El hecho de que $\text{supp}(\mu) \subseteq \Gamma$ viene del Lema 3.1.16. Suponemos que $B_0 = 1$. La primera conclusión sale de (6.5). Esencialmente lo que usamos es que los coeficientes involucrados $\alpha^+(x, r)^2$ son analíticos reales en x para r fijo.

La segunda conclusión sale de (6.6). El control que tenemos en los coeficientes ε se traduce en un control de flatness en el límite muy fino.

Empezamos demostrando el primer ítem.

Demostración Smoothness: Por el lema de compacidad de corkscrew, Lema 3.3.5 tenemos que eligiendo una subsucesión $\Omega_{j_k}^\pm$ con sus funciones características convergiendo a g^\pm débil* en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $g^+ = 1$ en Ω^+ , $g^+ = 0$ en Ω^- . Definimos

$$\alpha_0^+(x, r) = \left| \frac{\pi^{n/2}}{2} - \frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy \right| = \left| \frac{\pi^{n/2}}{2} - \frac{1}{r^n} (g^+ * e^{-(\cdot)^2/r^2})(x) \right|.$$

Estudiamos algunas propiedades de $\alpha_0^+(x, r)^2$. Para cada $r > 0$ fijo la función $x \rightarrow \alpha_0^+(x, r)^2$ es analítica real como veremos en el Apéndice A. Vista como una función en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ via $(x, r) \rightarrow \alpha_0^+(x, r)$ se puede verificar que es una función continua.

Afirmación 6.4.3. Tenemos que $\alpha_0^+(x, r) = 0$ para todo $x \in 7B_0 \cap \text{supp}(\mu)$.

Demostración. Veremos que la condición

$$\int_{7B_0} \int_0^7 \alpha_0^+(x, r)^2 r^3 dr d\mu(x) = 0$$

nos alcanzará para lo que queremos. Se puede notar que $\int_0^7 \alpha_0^+(x, r)^2 r^3 dr$ es continua en x ya que $\alpha_0^+(x, r)^2$ es continua en (x, r) . Luego si $\alpha_0^+(x_0, r_0) \neq 0$ para $x_0 \in \text{supp}(\mu) \cap 7B_0$, $r_0 \in (0, 7]$ entonces como esta en el soporte, en un entorno a (x, r) debe no anularse $\alpha_0^+(x, r)$. Luego tendremos que

$$\int_0^7 \alpha_0^+(x, r)^2 r^3 dr > 0$$

para x en un entorno de x_0 . Como x_0 esta en el soporte de la medida, entonces eso implica

$$\int_{7B_0} \int_0^7 \alpha_0^+(x, r)^2 r^3 dr d\mu(x) > 0,$$

lo cual es un absurdo.

Sabemos que

$$\int_{7B_0} \int_0^7 \alpha_{j_k}^+(x, r)^2 r^3 dr d\mu_{j_k}(x) \leq \frac{\mu_{j_k}(7B_0)}{j_k} \leq \frac{C}{k}.$$

Donde C es alguna constante universal. Esto se debe al crecimiento C_0 -polinomial de grado $n - 1$ junto a que la sucesión j_k es creciente.

Si tenemos $\varphi \in C_c^\infty(7B_0)$, $\psi \in C_c^\infty((0, 7))$, entonces definimos:

$$f_k(x, r) := \varphi(x) \psi(r) r^3 \left(\frac{1}{r^n} e^{-|\cdot|^2/r^2} * \mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^\pm} - \frac{\pi^{n/2}}{2} \right)^2.$$

Definimos también

$$f(x, r) := \varphi(x) \psi(r) r^3 \left(\frac{1}{r^n} e^{-|\cdot|^2/r^2} * g^+ - \frac{\pi^{n/2}}{2} \right)^2.$$

Sabemos que como $\mathbb{1}_{\Omega_{j_k}^\pm}$ converge débil* a g^+ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, r) = f(x, r)$$

donde el límite es puntual. Es porque convolucionar contra $e^{-|\cdot|^2}$ es simplemente integrar contra una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Al dejar fijo (x, r) , la convolución converge a la convolución.

Tenemos que f_k esta uniformemente acotada en $\overline{7B_0} \times [0, 7]$ con sus derivadas acotadas uniformemente. Por un lado multiplicar por φ y ψ nos permite restringirnos a un lugar donde tenemos control ya que nos transforma a f_k en una función de soporte compacto. Por el otro la potencia por la que elegimos multiplicar a r es para que sus derivadas parciales primeras están acotadas uniformemente. La única derivada parcial que puede generar problemas es respecto a r . La mayor potencia de r que se puede generar al derivar dividiendo es r^3 . El r^3 se genera de derivar $e^{-|\cdot|^2/r^2}$ usando la regla de la cadena. El hecho de que aparezca r^n dividiendo no genera problemas porque este factor es de normalización. Es decir tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{r^n} \left(e^{-|\cdot|^2/r^2} * g^+ \right) (x) = \frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} g^+(x-y) e^{-|\frac{y}{r}|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} g^+(x-rz) e^{-|z|^2} dz.$$

El último paso se obtiene al hacer un cambio de variables.

Por el teorema de Arzelà-Ascoli tenemos que podemos conseguir una subsucesión de f_k que converge uniforme sobre compactos a f . Renombramos la sucesión para que f_k converja uniformemente sobre compactos a f . Ya dijimos que están acotadas. La equicontinuidad para poder aplicar Arzelà-Ascoli la conseguimos ya que las primeras derivadas están acotadas uniformemente.

Ahora tenemos que

$$\iint f dr d\mu(x) = \iint f dr d(\mu - \mu_{j_k}) + \iint (f - f_k) dr d\mu_{j_k} + \iint f_k dr d\mu_{j_k}.$$

La primera integral converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$ ya que $dr d\mu_{j_k}$ converge débil a $dr d\mu$ porque μ_{j_k} ya converge débil a μ . La segunda integral converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$, por la convergencia uniforme sobre compactos de f_k a f . Para la tercera integral tenemos:

$$\left| \iint f_k dr d\mu_{j_k} \right| \leq \int_{7B_0} \int_0^7 \alpha_{j_k}^+(x, r)^2 r^3 dr d\mu_{j_k}(x) \leq \frac{C}{k}.$$

Aquí seguimos teniendo esta desigualdad ya que cuando renombramos para tener una subsucesión convergente de f_k , esta subsucesión k_i por la que renombramos es creciente y luego $\frac{C}{k} \geq \frac{C}{k_i}$. Esto nos da que, para toda $\varphi \in C_c^\infty(7B_0)$, y para toda $\psi \in C_c^\infty((0, 7))$, vale que

$$\int \int f dr d\mu = 0.$$

Entonces tenemos que

$$\int_{7B_0} \int_0^7 \alpha_0^+(x, r)^2 r^3 dr d\mu(x) = 0.$$

□

Afirmación 6.4.4. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, si existe una sucesión $r_k \rightarrow 0$ tal que $\alpha_0^+(x, r_k) = 0$, entonces $x \in \Gamma$.

Demostración. Sabemos que $g^+ = 1$ en Ω^+ y $g^+ = 0$ en Ω^- . Si $x \in \Omega^+$ entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy = \lim_{r \rightarrow 0} \int g^+(rz+x) e^{-|z|^2} dz = \int g^+(x) e^{-|y|^2} dy = \pi^{n/2}. \quad (6.7)$$

El segundo paso se obtiene haciendo el cambio de variables $z = \frac{y-x}{r}$ y el tercero es por convergencia mayorada. la última igualdad es la conocida identidad

$$\int e^{-|y|^2} dy = \pi^{n/2}.$$

Luego para $r > 0$ suficientemente chico

$$\left| \frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy - \pi^{n/2} \right| < \frac{\pi^{n/2}}{2}$$

Eso es imposible ya que para la sucesión r_k teníamos

$$\frac{1}{r_k^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r_k^2} dy = \frac{\pi^{n/2}}{2}$$

Esto dice que $x \notin \Omega^+$. Si $x \in \Omega^-$ entonces tenemos usando las mismas cuentas que en (6.7) tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy = \int g^+(x) e^{-|y|^2} dy = 0.$$

De la misma forma si $r > 0$ es pequeño debería tener

$$\frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy$$

cercano a cero pero eso no es compatible con $\alpha(x, r_k) = 0$ para $r_k \rightarrow 0$ porque tenemos r_k arbitrariamente pequeños para los cuales se parece a $\frac{\pi^{n/2}}{2}$. Así concluimos $x \in \Gamma$. □

Consideramos ahora el conjunto

$$Z = \bigcap_{k \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_0^+(x, 2^{-k}) = 0\}.$$

La primera afirmación que hicimos recién nos dice que $7B_0 \cap \text{supp}(\mu) \subseteq Z$. Esto es porque los elementos de $7B_0 \cap \text{supp}(\mu)$ anulan los coeficientes a todas las escalas. La segunda afirmación dice que Z esta contenido en nuestra hipersuperficie Γ , ya que 2^{-k} serviría como ejemplo de sucesión que converge a cero donde se anula el coeficiente α_0^+ . Juntando las dos tenemos $\text{supp}(\mu) \cap 7B_0 \subseteq Z \subseteq \Gamma$.

Para decir que Z es una variedad analítica real definimos la siguiente función:

$$F := \sum_{k \geq 0} 2^{-k} e^{-2^{2k+1}k^2} \alpha_0^+(\cdot, 2^{-k})^2. \quad (6.8)$$

Podemos ver que $\alpha_0^+(x, r)$ esta acotada y luego la serie converge uniformemente. Lo que hace que F este bien definida. Como dijimos antes:

$$\left| \frac{1}{r^n} \int g^+(y) e^{-|y-x|^2/r^2} dy \right| = \left| \int g^+(rz+x) e^{-|z|^2} dz \right| \leq \|g^+\|_\infty \pi^{n/2}.$$

Luego $\alpha_0^+(x, r)$ esta acotado y la serie en F converge uniformemente. Veremos que es analítica real en el Apéndice A. Entonces $Z = F^{-1}(0)$ es una variedad analítica real. \square

Pasamos a demostrar el segundo item.

Demostración Flatness: Sea

$$E_k = \left\{ x \in \Gamma_k \cap 7B_0 : \int_0^7 \varepsilon_k(x, r)^2 \frac{dr}{r} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshev tenemos que

$$\mu_k(7B_0 \setminus E_k) \leq \sqrt{k} \int_{7B_0} \int_0^7 \varepsilon_k(x; r)^2 \frac{dr}{r} d\mu_k(x) \leq \frac{\sqrt{k}}{k} \mu(7B_0) = \frac{1}{\sqrt{k}} \mu_k(7B_0).$$

Sea $\tau_k = 1 - k^{-1/4}$. Para cada $x \in E_k$ y $0 < r < 7$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \int_0^7 \varepsilon_k(x, s)^2 \frac{ds}{s} \\ &\geq \int_{\tau_k r}^r \varepsilon_k(x, s)^2 \frac{ds}{s} \\ &\geq \inf_{s \in [\tau_k r, r]} \varepsilon_k(x, s)^2 \log \frac{1}{\tau_k} \approx \inf_{s \in [\tau_k r, r]} \varepsilon_k(x, s)^2 \log \frac{1}{k^{1/4}}. \end{aligned}$$

En el último paso estamos usando la aproximación de primer orden de $\log(1+x)$. Como estamos tomando x cercano a cero no hay problema en eso. Entonces para todo $r \in (0, 7)$ existe algún $s_{k,r} \in [\tau_k r, r]$ tal que

$$\varepsilon(x, s_{k,r}) \lesssim \frac{1}{k^{1/8}}. \quad (6.9)$$

Entonces para cada $x \in E_k$ y $0 < r < 7$ deben existir dos casquetes esféricos

$$D^\pm(x, s_{k,r}) \subseteq \partial B(x, s_{k,r})$$

que satisfacen

$$\mathcal{H}^{n-1}(D^\pm(x, s_{k,r})) \geq \left(\frac{n\omega_n}{2} - Ck^{-1/8} \right) s_{k,r}^{n-1} \text{ y } D^\pm(x, s_{k,r}) \subseteq \overline{\Omega_k^\pm}.$$

Donde C es la constante implícita en (6.9).

Consideramos $\widetilde{E}_k \subseteq E_k$ un compacto tal que

$$\mu_k(\widetilde{E}_k) \geq \frac{k-1}{k} \mu_k(E_k) \geq \frac{k-1}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \mu_k(7B_0).$$

Por nuestro resultado de compacidad para conjuntos probado en el Lema 3.1.2 y para medidas probado en el Teorema 2.4.3, podemos conseguir que pasen dos cosas al tomar una subsucesión. La primera, las medidas $\mu_k|_{\widetilde{E}_k}$ convergen débilmente a alguna medida σ . La segunda, los conjuntos \widetilde{E}_k convergen en la distancia de Hausdorff a un compacto $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Como $\widetilde{E}_k \subseteq \Gamma_k$, entonces $F \subseteq \Gamma$. Por nuestro Lema 3.1.16 sobre el comportamiento de los soportes de medidas respecto a la convergencia de Hausdorff, al tener que $\widetilde{E}_k \subseteq \Gamma_k$, tenemos entonces que $\text{supp}(\sigma) \subseteq F$. Luego $\text{supp}(\sigma) \subseteq \Gamma$.

Afirmo que $\forall x \in \text{supp}(\sigma)$ y todo $r \in (0, 7)$ existen una pareja de hemiesferas admisible de centro x y radio r . Dado $x \in \text{supp}(\sigma)$ sabemos que está en F . Luego deben existir $x_k \in \widetilde{E}_k$ tales que $x_k \rightarrow x$ porque la sucesión \widetilde{E}_k converge a F en la distancia de Hausdorff. Entonces podemos tomar $t_k = s_{r,k}(x_k)$ tal que tengamos los casquetes $D_k^\pm(x_k, t_k)$ con las cotas de antes. Suponemos además que los casquetes están contenidos en alguna hemiesfera. Si no fuese así reemplazamos los casquetes por casquetes más pequeños que cumplan la cota y esten contenidos dentro de una hemiesfera. Ahora tomamos S_k^\pm dos hemiesferas (no necesariamente complementarias) tales que

$$D_k^\pm(x_k, t_k) \subseteq S_k^\pm.$$

Salvo subsucesiones podemos conseguir que $\overline{D_k^\pm(x_k, t_k)}$ converjan a conjuntos cerrados $\overline{D_\infty^\pm}$ y S_k^\pm converjan a hemiesferas S_∞^\pm de $\partial B(x, r)$. Todos estos conjuntos estarán en $\partial B(x, r)$ ya que $x_k \rightarrow x$ y $t_k \rightarrow r$ por el Lema 3.1.2 y el Corolario 3.1.14.

Supongamos que $S_\infty^+ \neq \overline{D_\infty^+}$, entonces como $D_\infty^+ \subseteq S_\infty^+$ debe existir un punto en el interior de S_∞^+ para la topología de la esfera y un casquete abierto C tal que $\overline{C} \cap \overline{D_\infty^+} = \emptyset$. Con \overline{C} en el interior estricto de S_∞^+ . Ahora elegimos C_k que sería en algún sentido “el \overline{C} de S_k^+ ”.

Existe una transformación afín T_k que lleva S_∞^+ en S_k^+ . Podemos tomarlas de forma tal que $T_k \rightarrow Id$ (como transformaciones afines, recordar el Corolario 3.1.14). Si consideramos $C_k = T_k(\overline{C})$ entonces tendremos que $T_k(\overline{C}) \rightarrow \overline{C}$ en la distancia de Hausdorff. Veremos que

$$T_k(\overline{C}) \cap \overline{D_k^+} \neq \emptyset$$

para k suficientemente grande. Esto se debe a que el volumen relativo que ocupa $T_k(\overline{C})$ varia levemente cuando $k \rightarrow \infty$. Más precisamente podemos tomar T_k como compo-
 ner una transformación ortogonal que le da la dirección correcta a la esfera, con una
 homotecia que le da el radio correcto a $T_k(S_\infty^+)$, con una traslación que la centra correc-
 tamente. Para que $T_k \rightarrow Id$ basta con elegir la transformación ortogonal lo más cerca
 posible de la identidad. El único factor que altera el área es la homotecia que lo altera
 por un factor de $\left(\frac{t_k}{r}\right)^{n-1}$. Como esta sucesión converge a 1 es levemente alterado el área
 para k suficientemente grande.

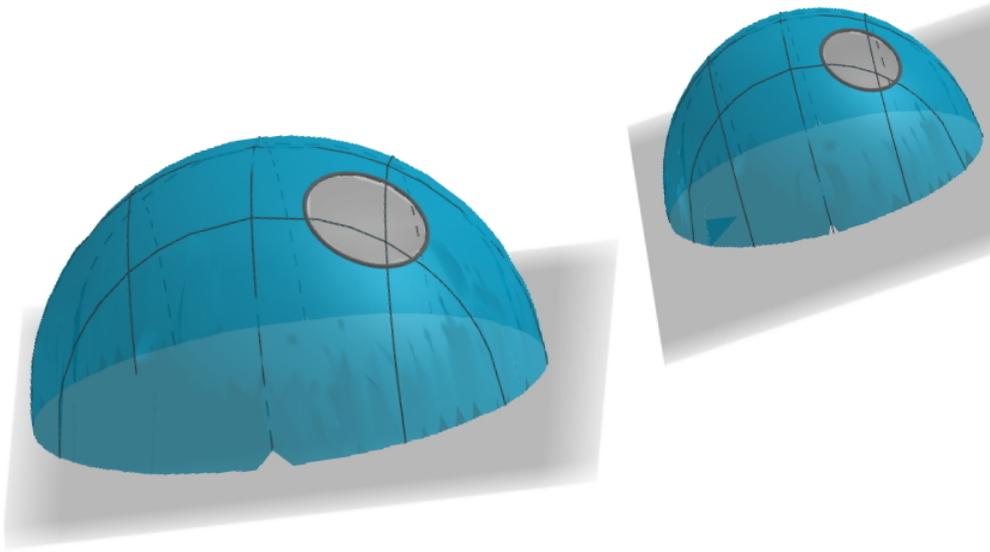


Figura 6.8: Hemiesferas

En la Figura 6.8 tenemos la hemiesfera límite S_∞^+ y una de las hemiesferas S_k^+ . En S_∞^+ marcamos \overline{C} y en S_k^+ , C_k que son los parches en gris. Los planos sobre los que hacen sombra son los que le dan la dirección a la esfera.

Sabemos entonces que

$$\mathcal{H}^{n-1}(C_k) = \left(\frac{t_k}{r}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(C).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(S_k^+ \setminus C_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{t_k}{r}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(S_\infty^+ \setminus C) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(S_\infty^+ \setminus C) < \mathcal{H}^{n-1}(S_\infty^+) \\ &= \frac{n\omega_n}{2} r^{n-1}. \end{aligned}$$

Si $T_k(\overline{C}) \cap \overline{D_k^+} = \emptyset$ infinitas veces, entonces $\mathcal{H}^{n-1}(C_k \cap \overline{D_k^+}) = 0$ y luego

$$\mathcal{H}^{n-1}(\overline{D_k^+}) = \mathcal{H}^{n-1}(\overline{D_k^+} \cap (S_k^+ \setminus C_k)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_k^+ \setminus C_k).$$

Esto implica que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\overline{D_k^+}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_\infty^+ \setminus C) < \frac{n\omega_n}{2} r^{n-1},$$

contradiendo las desigualdades $\mathcal{H}^{n-1}(D_k^+) \geq (\frac{n\omega_n}{2} - Ck^{-1/8})t_k^{n-1}$.

Luego para k suficientemente grande se obtiene que $T_k(\overline{C}) \cap \overline{D_k^+} \neq \emptyset$. Tomamos una sucesión y_k en esa intersección definida a partir de un k_0 donde empieza a pasar que la intersección es no vacía. Esta sucesión está contenida en un compacto y luego tiene una subsucesión convergente que convergerá a un elemento y de C . Esto implica que $y \in C \cap \overline{D_\infty^+}$. Contradiendo la definición de C . De aquí concluimos $\overline{D_\infty^+} = S_\infty^+$. Análogamente para $\overline{D_\infty^-} = S_\infty^-$.

Lo que no es inmediato es que valga que $\overline{D_\infty^+} \cup \overline{D_\infty^-} = \partial B(x, r)$. La idea para esto es la siguiente: Definimos $S_k = S_k^+ \cup S_k^-$. Definimos por otro lado $D_k = \overline{D_k^+} \cup \overline{D_k^-}$. Con estos conjuntos se puede usar un argumento idéntico ya que el hecho de que sean disjuntos nos dice que podemos sumar las cotas inferiores para el área. La contradicción es la misma.

En conclusión tenemos el resultado de flatness para todo $x \in \text{supp}(\sigma)$. Finalmente vemos que $\sigma|_{7B_0} = \mu|_{7B_0}$. Esto se debe a que si $f \in C_0(7B_0)$,

$$\left| \int_{\widetilde{E_k}} f d\mu_k - \int_{7B_0} f d\mu_k \right| \leq \frac{\|f\|_\infty \mu(7B_0)}{\sqrt{k}}.$$

□

En lo que sigue queremos ver que suponiendo las hipótesis que son consecuencia del Lema 6.4.1 que nos daba condiciones sobre el 2-sided c -corkscrew límite, tenemos el Lema 6.4.2 que nos dice que efectivamente el límite es plano en la bola que estamos mirando.

Demostración del Lema 6.4.2. Como μ es no nula y tiene crecimiento polinomial de grado $n - 1$, entonces

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z) \geq \mathcal{H}^{n-1}(\text{supp}(\mu)) > 0.$$

Esto es porque el crecimiento polinomial de grado $n - 1$ implica que μ es absolutamente continua con respecto a \mathcal{H}^{n-1} .

Sabemos que $Z \neq \mathbb{R}^n$ porque Ω^+ es no vacío. Si consideramos S_{n-1} en la descomposición del Teorema de stratification de Whitney 4.2.7 de Z , entonces $\mathcal{H}^{n-1}(S_{n-1}) > 0$ ya que $\mathcal{H}^{n-1}(S_j) = 0$ para todo $0 \leq j \leq n - 2$. Esto nos dice entonces que $S_{n-1} \neq \emptyset$. Más aún, para toda bola $B' \subseteq B$ que corta a $\text{supp}(\mu)$ tenemos que $\mathcal{H}^{n-1}(S_{n-1} \cap B') > 0$ ya que si $\mathcal{H}^{n-1}(S_{n-1} \cap B') = 0$ entonces $\mathcal{H}^{n-1}(Z \cap B') = 0$ porque las subvariedades de dimensiones menores en la descomposición no aportan medida.

Por comodidad eliminaremos el subíndice en S_{n-1} y nos referiremos a esta subvariedad como S . Veremos que S esta contenida en un plano. Miramos la normal exterior sobre S . Podemos verla como un mapa a S^{n-1} (el mapa de Gauss) si trasladamos al

origen el vector normal. Como tenemos definido $N : S \rightarrow S^{n-1}$ tiene sentido calcularle el diferencial. Veremos que $dN = 0$ sobre $S \cap B$ y luego será un plano allí. Veremos que esta diferencial es cero para todo $y \in \text{supp}(\mu) \cap S \cap B$. Sabemos que la normal es analítica real vista como función entre variedades analíticas reales. Es decir, al restringirla a cartas es analítica real. Luego como $\mathcal{H}^{n-1}(S \cap \text{supp}(\mu)) > 0$ el diferencial de la normal debe anularse en toda la variedad S , esto implica que la normal es constante y luego debe estar contenida en un plano.

Una vez demostrado esto, sabremos que es una subvariedad del plano y luego es un abierto de este plano. Esto implicará que esta contenido todo el plano por el Corolario 4.2.3.

Dado $x \in \text{supp}(\mu) \cap S \cap B$ si consideramos $V = T_x(S)$, entonces existe un entorno de x para el cual esto es un gráfico analítico real sobre V . Esto se obtiene al utilizar el teorema de la función inversa al componer una parametrización de un entorno de x en S con la proyección ortogonal en V . Entonces tenemos una bola B' centrada en x con $\overline{B'} \subseteq B$ tal que existe un plano afín V de dimensión $n - 1$ que pasa por x y en B' , la hipersuperficie S es el gráfico de una función analítica real sobre V .

Sin pérdida de generalidad suponemos que $y = 0$, $V = \{x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0\}$. Veré si f es la parametrización analítica real, en B' de S , entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n - 1$

Estudiaremos cómo se comportan los arcos geodésicos en la esfera con respecto a la partición de conjuntos dada por la descomposición de un 2-sided c -corkscrew.

Los arcos geodésicos en la esfera son los arcos circulares que están contenidos en grandes círculos. Los grandes círculos de una esfera son las intersecciones de 2-planos que pasan por el centro y la esfera. Si la esfera es la unitaria, si u y v son dos vectores unitarios y ortogonales un gran círculo es $\cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Los grandes círculos se obtienen al variar u y v en S^{n-1} preservándolos ortogonales.

Propiedad Fundamental. *Sea $x \in B \cap \text{supp}(\mu)$ y $r \in (0, 3r(B))$, sea $I \subseteq \partial B(x, r)$ un arco geodésico tal que $\mathcal{H}^1(I) < \pi r$ y sus extremos están ambos en Ω^+ . Entonces $I \subseteq S^+(x, r)$, y luego $I \subseteq \overline{\Omega^+}$. La misma afirmación es cierta intercambiando Ω^+ y Ω^- .*

Para verificar la propiedad fundamental basta notar que si I es un arco geodésico como el que dijimos, entonces sus extremos x_1 y x_2 no están en $\overline{\Omega^-}$ ya que están en Ω^+ . Entonces x_1 y x_2 están en $S^+(x, r)$. Si C el gran círculo que tiene a x_1 y a x_2 entonces la descomposición en las hemiesferas $S^+(x, r)$, $S^-(x, r)$ descompone a C en dos semicírculos cerrados C^+ y C^- con

$$C^+ \subseteq S^+(x, r) \quad \text{y} \quad C^- \subseteq S^-(x, r).$$

Los dos semicírculos tendrán longitud πr . Esto se puede observar notando que si V es el plano que determina la división en S^+ y S^- y P es el 2-plano que determina el gran círculo, entonces el conjunto $P \cap V \cap \partial B(x, r)$ tiene dos puntos. Sea y_1 uno de ellos. Si armamos una base ortonormal de P , $\{y_1, y_2\}$ tenemos que

$$\cos\left(\frac{t}{r}\right) y_1 + \sin\left(\frac{t}{r}\right) y_2$$

es una parametrización por longitud de arco que esta en S^+ y en S^- en los intervalos $[0, \pi r]$, $[\pi r, 2\pi r]$ en algún orden (que depende de la orientación de la base $\{y_1, y_2\}$.) Notamos entonces que

$$\mathcal{H}^1(C^+) = \mathcal{H}^1(C^-) = \pi r.$$

Sabemos que como x_1 y x_2 están en C^+ . Hay dos formas posibles de llegar desde x_1 a x_2 por C . Hay un arco que es más corto y un arco que es más largo. Como tenemos que $\mathcal{H}^1(I) < \pi r$, este arco es el más corto. Si $I \cap C^-$ es no vacío, como C^- es un semicírculo y x_1 y x_2 están en el interior de C^+ entonces I debe contener a todo C^- . Eso implica $\mathcal{H}^1(I) \geq \mathcal{H}^1(C^-) = \pi r$ lo cual es un absurdo porque diría que es el arco más largo. Entonces sabemos que $I \subseteq C^+$ que es lo que buscábamos.

Supongamos que existen i, j tales que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \neq 0.$$

Entonces el hessiano de f en cero no puede ser nulo. Luego existe una dirección v tal que $\text{Hess}(f)(v, v) \neq 0$. Podemos suponer que $\text{Hess}(f)(v, v) > 0$, ya que si no sucede podemos reflejar todo por el plano $x_n = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v = (1, 0, \dots, 0)$. Luego en un entorno del origen, si

$$g(t) = f(t, 0, \dots, 0), \quad g''(0) > 0.$$

Nos podemos restringir a un entorno del origen en el que g es estrictamente convexa. Esto es, consideramos δ tal que $g''(t) > 0$ para todo $|t| < \delta$. Observaremos entonces qué pasa en el abierto $B_\delta(0)$.

Llamamos α a la curva parametrizada por $g : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta curva es analítica real. Consideramos $z_1 = g(-\delta)$ y $z_2 = g(\delta)$. Sea

$$d_0 = \frac{1}{2} \min_{i=1,2} \text{dist}(x, z_i).$$

Definimos $\delta \ll 1$ una constante positiva que elegiremos después. La figura 6.4 la deberíamos pensar como la proyección sobre el plano

$$x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0.$$

Por más que no es exactamente eso, se vería parecido a esto al proyectarlo. La figura no esta a escala y tenemos que pensar que $r(B_1) \gg r(B_2) \gg r(B_3)$. Consideramos entonces $B(x, r)$ con $r \in (0, \frac{d_0}{2})$. Suponemos que r es lo suficientemente chico como para que la distancia de cualquier punto en $S \cap B(x, r)$ al plano V es como mucho $\delta \frac{r}{1000}$. Sea $y_1 \in \partial B(x, r) \cap \alpha$. Como $\Gamma = \partial \Omega^+$, entonces existe una bola $B_1 \subseteq \Omega^+$ que satisface

$$\text{dist}(y, B_1) + r(B_1) \leq \delta \text{dist}(y_1, \mathbb{R}_-^n).$$

Esto implica que $B_1 \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Sea C_1 un gran círculo de $\partial B(x, r)$ que pasa por el centro de B_1 y por el punto de $\alpha \cap \partial B(x, r/2)$ más cercano respecto a y_1 (si $r > 0$ es

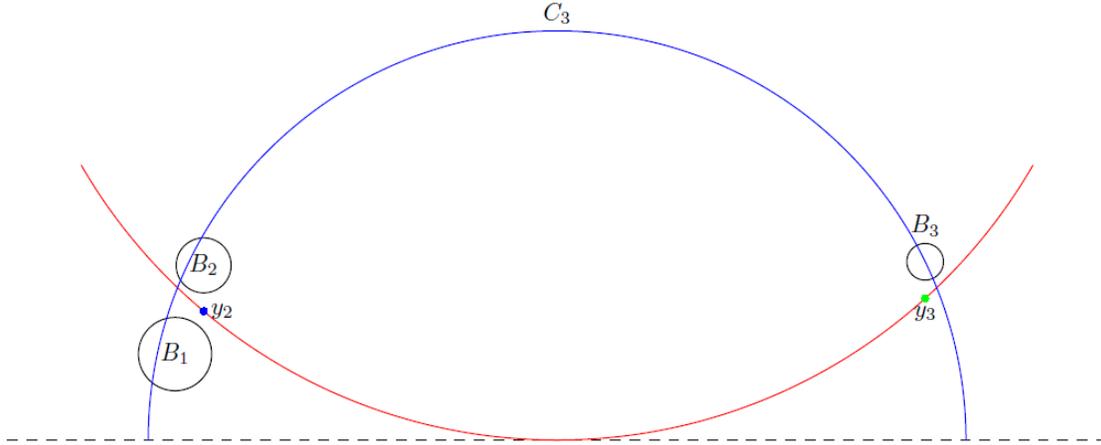


Figura 6.9: Hessiano se anula [JTV].

lo suficientemente chico α siempre corta a $\partial B(x, r)$ en dos puntos por la convexidad estricta de α). Ahora usando que $\Gamma = \partial\Omega^-$, existe una bola $B_2 \subseteq \Omega^-$ que satisface

$$\text{dist}(y_2, B_2) + r(B_2) \leq \delta \min(\text{dist}(y_2, \mathbb{R}_+^n), r(B_1)).$$

La elección de que B_2 sea tan chica hace que esté en \mathbb{R}_+^n y que exista un entorno de elecciones de grandes círculos que pasan por B_1 y B_2 en alguna esfera. Dada una esfera $\partial B(x, r)$, decimos que un gran círculo es la intersección de un 2 plano que pasa por el centro con la esfera. Luego los grandes círculos se pueden pensar como $Gr(2, n) \times \mathbb{R}_+$ donde la primera coordenada marca el plano y la segunda la esfera en la que estamos observando.

Sea C_2 un arco geodésico que pasa por B_1 y B_2 . Para δ lo suficientemente chico (tal vez en función del r fijado) este gran círculo interseca a S en \mathbb{R}_+^n ya que en un entorno del eje x_1 , f es positiva.

Tenemos que distinguir entre dos casos. El primero es en el que B_2 esta arriba de B_1 en la última coordenada (esto pasa si B_1 esta abajo de S). Entonces, usando que $\Gamma = \partial\Omega^+$, vemos que existe una bola $B_3 \subseteq \Omega^+$ que satisface

$$\text{dist}(y_3, B_3) + r(B_3) \leq \delta \min(\text{dist}(y_3, \mathbb{R}_+^n), r(B_2)).$$

En el caso en que B_2 esta por debajo de B_1 (que pasa si B_1 esta arriba de S), usando que $\Gamma = \partial\Omega^-$, podemos elegir una bola $B_3 \subseteq \Omega^-$ que también satisfaga la desigualdad anterior. En cualquier caso, podemos encontrar un gran círculo geodésico C_3 que pase por B_1 , B_2 y B_3 . Esto es porque si δ es lo suficientemente chico la estabilidad anterior que nos da que los arcos geodésicos que pasan por B_1 y B_2 son un abierto, nos permite deformar sutilmente a C_2 para que ahora sí pase por B_3 .

En el primer caso, tenemos que existe un arco en C_3 con extremos en B_1 y B_3 (que están en Ω^+) y pasa por B_2 . La longitud de este arco es estrictamente menor que

$\mathcal{H}^1(C_3)/2$ porque sus extremos están contenidos en \mathbb{R}_+^n . Por la propiedad fundamental, este arco está contenido en $\overline{\Omega^+}$, que es una contradicción porque $B_2 \subseteq \Omega^-$. En el segundo caso tenemos que existe un arco en C_3 que une B_2 y B_3 (que están contenidos en Ω^-) y pasa por B_1 . Este arco tiene longitud estrictamente menor que $\mathcal{H}^1(C_3)/2$. Por la propiedad fundamental, este arco está contenido en $\overline{\Omega^-}$. Esto es de nuevo una contradicción porque $B_1 \subseteq \Omega^+$. Entonces $g''(0) = 0$ y se anula el Hessiano en x .

Vemos ahora que si se anula el Hessiano en x se anula el diferencial de la normal. Preservamos la notación de antes. Dado $v \in T_0(S) = V$ tenemos una curva $\gamma(t)$ tal que $\gamma'(t) = v$. Justamente esta se puede tomar como $\gamma(t) = f(tv)$ para $|t| < \delta$. Para cada t , $\gamma'(t)$ es un vector tangente a S . Luego

$$\langle N, \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Esto último implica que

$$\langle N(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Derivando la última igualdad tenemos que

$$\langle dN(\gamma(t))\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Luego

$$\langle dN_0 v, v \rangle = 0.$$

Esto implica que sobre $T_0(S)$ sabemos que la forma bilineal simétrica

$$\beta(v, w) = \langle dN_0 v, w \rangle$$

se anula siempre que $v = w$. Eso implica que la forma bilineal es nula. Finalmente se desprende de esto $dN = 0$ en el origen como queríamos.

Juntando lo que obtuvimos tenemos que existe un plano P tal que $S = P$, entonces $P \subseteq Z$. Esto nos dice que $\Gamma \cap B \subseteq P \cap B$. Suponemos de nuevo sin pérdida de generalidad que $P = \{x : x_n = 0\}$.

Si $B \cap \mathbb{R}_+^n \cap \Omega^+ \neq \emptyset$ veremos que $B \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \Omega^+$. Para $x \in P$, consideramos la siguiente extensión por hemiesferas de $\Omega^+ \cap B \cap \mathbb{R}_+^n$ con respecto al centro x :

$$U_x^+ = \bigcup_{r \in (0, 3r(B)) : \partial B(x, r) \cap \Omega^+ \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset} \partial B(x, r) \cap \mathbb{R}_+^n$$

Este conjunto U_x^+ es un abierto.

Afirmación 6.4.5. Si $x \in \text{supp}(\mu) \cap B \cap P$ y $U_x^+ \neq \emptyset$ entonces

$$\Omega^+ \cap B(x, 3r(B)) \cap \mathbb{R}_+^n = U_x^+.$$

Demostración. Observemos la Figura 6.10.

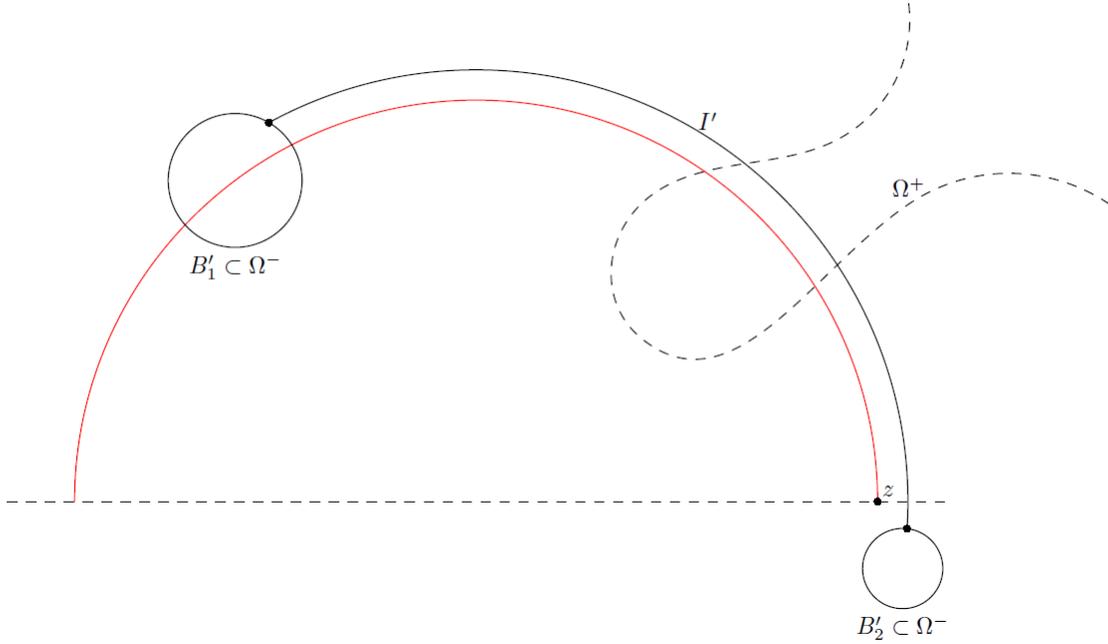


Figura 6.10: Ω^+ está cerrado por hemisferas [JTV].

La figura la deberíamos pensar como la proyección sobre algún 2-plano que contenga al eje x_n . Por más que no es exactamente eso, se vería parecido a esto al proyectarlo en algún plano. La figura no está a escala y tenemos que pensar que $r(B'_1) \gg r(B'_2)$.

Los argumentos son similares a los que usamos antes. Es claro que nos alcanza demostrar que $U_x^+ \subseteq \Omega^+$ ya que por definición de U_x^+

$$\Omega^+ \cap B(x, 3r(B)) \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq U_x^+.$$

Si no sucede que $U_x^+ \subseteq \Omega^+$, entonces existe un punto $y \in U_x^+ \cap \overline{\Omega^-}$. Afirmando que si tomamos $r = |y - x|$ entonces

$$\partial B(x, r) \cap \Omega^+ \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset \text{ y } \partial B(x, r) \cap \Gamma \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset.$$

Por un lado como U_x^+ es abierto y $y \in U_x^+$, entonces $\partial B(x, r) \cap \Omega^+ \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$. Como $y \in \overline{\Omega^-}$ entonces o bien $y \in \Gamma$ o bien $y \in \Omega^-$. Si sucede el primero, entonces queda demostrada la afirmación. Si sucede el segundo sabemos que

$$\partial B(x, r) \cap \Omega^- \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset.$$

Esto implica que hay dos puntos a y b en $\partial B(x, r) \cap \mathbb{R}_+^n$ tales que uno esta en Ω^- y otro esta en Ω^+ . Como $\Gamma = \partial\Omega^\pm$, entonces toda curva entre a y b debe cortar a Γ . En particular si tomamos una que se mantenga en $\partial B(x, r) \cap \mathbb{R}_+^n$ (por ejemplo un gran circulo de $\partial B(x, r)$ entre a y b) tenemos lo deseado.

Como existe un punto $y' \in \partial B(x, r) \cap \Gamma \cap \mathbb{R}_+^n$, el hecho de que $\Gamma = \partial\Omega^-$, y que U_x^+ es abierto implica que existe una bola $B'_1 \subseteq U_x^+ \cap \Omega^-$. Sea C'_1 un gran circulo que pasa por el centro de B'_1 y por Ω^+ . Elegimos uno de los dos puntos $z \in C'_1 \cap L$ tal que el arco más corto entre C'_1 y el centro de B'_1 interseque a Ω^+ .

Sea $\delta \ll 1$ un real positivo que fijaremos después. Como $\Gamma = \partial\Omega^-$, entonces existe $B'_2 \subseteq \Omega^-$ tal que

$$r(B'_2) + \text{dist}(z, B'_2) \leq \delta \min(r(B'_1), \text{dist}(B'_1, P)).$$

Sabemos que los grandes círculos que intersecan a B'_1 y a Ω^+ son un abierto de $G(2, n) \times \mathbb{R}_+$. Si δ es lo suficientemente chico, entonces B'_2 esta lo suficientemente cerca de z y luego hay un gran circulo C'_2 que corta a B'_1 , a Ω^+ y a B'_2 . Si tomamos un arco $I' \subseteq C'_2$ con sus extremos en B'_1 y B'_2 , entonces para δ suficientemente chico vale que $\mathcal{H}^1(I') < \mathcal{H}^1(C'_2)$, y que I' interseca a Ω^+ en su interior. Como B'_1 y B'_2 estan en Ω^- , entonces todo I' debe estar contenido en $\overline{\Omega^-}$ por la propiedad fundamental, que contradice el hecho de que $I' \cap \Omega^+ \neq \emptyset$. \square

Ahora asumimos que $B \cap \mathbb{R}_+^n \cap \Omega^+ \neq \emptyset$ y queremos ver entonces que

$$B \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \Omega^+.$$

Supongamos que esto no es cierto. Esto implica que si $x_B \in \text{supp}(\mu) \cap P$ es el centro de B , entonces

$$B(x_B, 2r(B)) \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \Omega^+.$$

Sea V una componente conexa de $\Omega^+ \cap B(x_B, 2r(B)) \cap \mathbb{R}_+^n$. Por el claim anterior, V coincide con la extensión por hemiesferas centrada en x_B , es decir, es de la forma

$$V = A(x_B, s_1, s_2) \cap \mathbb{R}_+^n \text{ o } V = B(x_B, s_1) \cap \mathbb{R}_+^n,$$

con $s_1 < 2r(B)$ siempre ya que $V \neq B(x_B, 2r(B)) \cap \mathbb{R}_+^n$ por suposición. Sea $x' \in \frac{1}{10}B \cap P \cap \text{supp}(\mu)$, $x' \neq x_B$ (la existencia de x' sale del crecimiento polinomial de μ). Por el claim, la extensión por hemiesferas $U_{x'}$ centrada en x' esta contenida en Ω^+ , pero entonces

$$\Omega^+ \supseteq U_{x'} \supseteq \bigcup_{r \in (0, 3r(B)) : \partial B(x', r) \cap \Omega^+ \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset} \partial B(x', r) \cap \mathbb{R}_+^n \supseteq \partial B(x_B, s_1) \cap \mathbb{R}_+^n,$$

que contradice la definición de V como componente conexa de Ω^+ . Ahora si

$$B \cap \mathbb{R}_+^n \cap \Omega^+ \neq \emptyset$$

entonces

$$B \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \Omega^+.$$

Por argumentos completamente análogos, tenemos que si $B \cap \mathbb{R}_+^n \cap \Omega^- \neq \emptyset$ entonces $B \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \Omega^-$. Para cubrir el resto de los casos basta reflejar por el plano P para que la sección superior al plano se intercambie con la sección inferior al plano. Entonces concluimos que $B \cap \partial\Omega^+ \subseteq P$, concluyendo la demostración del lema. \square

\square

Apéndice A

Un resultado sobre funciones analíticas reales

El plan de esta sección es demostrar que la función F definida en (6.8) es una función analítica real. Nuestra estrategia será considerar primero la siguiente definición de convolución:

Definición A.0.1. Dada $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $x \rightarrow f(x + iy)$ con y fijo es integrable. Dada $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$(g * f)(x + iy) := \int_{\mathbb{R}^n} g(u) f(x + iy - u) du. \quad (\text{A.1})$$

Es decir, es la convolución entre g y f al fijar la parte imaginaria.

Definición A.0.2. Sea $a \in \mathbb{R}_+$. Consideramos la función $f_a : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$f_a(z) = a^{n/2} e^{-a \sum_{j=1}^n z_j^2}.$$

Proposición A.0.3. Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene la acotación

$$|(g * f_a)(x + iy)| \leq \|g\|_\infty \pi^{n/2} e^{a|y|^2}.$$

Demostración. Reescribimos la expresión como

$$f_a(x + iy) = e^{-a|x|^2 + 2iax \cdot y + a|y|^2}.$$

Si le tomamos modulo a la expresión y descomponemos en producto obtenemos:

$$|f_a(x + iy)| = e^{-a|x|^2} e^{a|y|^2}.$$

La expresión $e^{2iax \cdot y}$ desaparece porque tiene modulo 1.

Acotando la convolución por la norma infinito de g , multiplicado por la norma 1 de f (con parte imaginaria fija) tenemos:

$$\begin{aligned} |(g * f_a)(x + iy)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(u) f_a(x + iy - u) du \right| \leq \|g\|_{\infty} a^{n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x-u|^2} du \right) e^{a|y|^2} \\ &= \|g\|_{\infty} \pi^{n/2} e^{a|y|^2}. \end{aligned}$$

En el último paso estamos usando primero la invarianza de traslación para eliminar a x de la integral junto al cambio de variables $v = \sqrt{a}u$. La constante $\pi^{n/2}$ corresponde a la integral bien conocida $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2} du$. \square

Vamos a demostrar dos proposiciones sobre que podemos meter derivadas adentro de la convolución. Esto nos permitirá usar Cauchy-Riemann para demostrar que la convolución es holomorfa.

Proposición A.0.4. *Si $g \in L^{\infty}$ entonces*

$$\frac{\partial(g * f_a)}{\partial x_k} = g * \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_k} \right)$$

Demostración. Pensaremos a y fijo en todo momento. Denotamos e_k al elemento de \mathbb{R}^n que tiene un solamente un 1 en la coordenada k y ceros en las demás. La derivada por definición es

$$\frac{\partial(g * f_a)}{\partial x_k}(x + iy) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \left(\frac{f_a(x + iy + he_k - u) - f_a(x + iy - u)}{h} \right) du.$$

Sabemos que puntualmente esa función converge a

$$g(u) \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy - u).$$

Vamos a utilizar el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue para ver que la integral efectivamente converge a lo que deseamos.

Nos restringiremos a $h > 0$, luego cambiando h por $-h$ el mismo argumento da que la integral converge en ese caso. Como ambas convergerán a la convolución, entonces efectivamente ese será el límite de h tendiendo a cero porque coinciden sus límites laterales.

Por el Teorema del valor medio sabemos que existe $s \in (0, h)$ tal que

$$\frac{f_a(x + iy + he_k - u) - f_a(x + iy - u)}{h} = \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + se_k + iy - u). \quad (\text{A.2})$$

Llamamos $M := \|g\|_\infty$. Si nos restringimos a considerar únicamente $h < 1$ entonces la función

$$\alpha(u) := M \sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + se_k + iy - u) \right|.$$

es una cota superior para la expresión en (A.2). Debemos ver que $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Calculamos

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy) = a^{n/2} a(-2x_k + 2iy_k) e^{-a|x|^2 + 2iax \cdot y + a|y|^2}.$$

Esto implica que

$$\left| \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy) \right| \leq 2a^{n/2+1}(|x_k| + |y_k|) e^{-a|x|^2} e^{a|y|^2}.$$

Estudiaremos cotas para $\alpha(u)$.

$$\left| \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy + se_k - u) \right| \leq 2a^{n/2+1}(|x_k + s - u_k| + |y_k|) e^{-a|x+se_k-u|^2} e^{a|y|^2} \quad (\text{A.3})$$

Expandimos el cuadrado:

$$(\text{A.3}) \leq 2a^{n/2+1}(|x_k + s - u_k| + |y_k|) e^{-a|x-u|^2} e^{-as^2 - 2a(x_k - u_k)s} e^{a|y|^2}$$

Usamos desigualdad triangular en $|x_k + s - u_k|$. Acotamos $e^{-as^2} \leq 1$ y también como $s \leq 1$, $-2(x_k - u_k)s \leq 2|x_k - u_k|$:

$$(\text{A.3}) \leq 2a^{n/2+1}(|x_k - u_k| + 1 + |y_k|) e^{-a|x-u|^2} e^{2a|x_k - u_k|} e^{a|y|^2}.$$

Definimos

$$\beta(u) := 2Ma^{n/2+1}(|x_k - u_k| + 1 + |y_k|) e^{-a|x-u|^2} e^{2a|x_k - u_k|} e^{a|y|^2}.$$

Veremos que β es una función integrable. Notamos que la expresión que tenemos es un producto de funciones en una variable. Por un lado tenemos la constante $2Ma^{n/2+1}e^{a|y|^2}$ que no cambia el hecho de que α sea integrable (recordar que estamos con y fijo).

Si $j \neq k$ tenemos la función

$$\beta_j(u_j) := a^{1/2} e^{-a|x_j - u_j|^2}.$$

Por otro lado

$$\beta_k(u_k) := a^{1/2} (|x_k - u_k| + 1 + |y_k|) e^{-a|x_k - u_k|^2 + 2a|x_k - u_k|}.$$

Sabemos entonces que

$$\beta(u) = 2Ma e^{a|y|^2} \prod_{j=1}^k \beta_j(u_j).$$

Por el Teorema de Fubini, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta(u) du = 2Ma^{n/2+1} e^{a|y|^2} \prod_{j=1}^k \int_{\mathbb{R}} \beta_j(u_j) du_j.$$

Esta identidad vale ya que todas las funciones son positivas. Si la integral de alguna de las β_j fuese ∞ entonces la integral de β sería ∞ . Sabemos que si $j \neq k$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \beta_j(u_j) du_j = \int_{\mathbb{R}} a^{1/2} e^{-a|x_j - u_j|^2} du_j = \pi^{1/2}.$$

Llamamos $b = |y_k| + 2$. Sabemos que β_k es simétrica respecto a x_k . Luego basta ver que si $x_k - u_k > 0$ la integral converge. Llamamos $t = x_k - u_k$. Vemos que la integral restringida a $t > 0$ converge.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a^{1/2}(t-1+b)e^{-at^2+2at} dt &= \int_0^\infty a^{1/2} e^a (t-1+b) e^{-a(t-1)^2} dt = \int_{-1}^\infty a^{1/2} e^a (t+b) e^{-at^2} dt \\ &= \frac{e^a}{a^{1/2}} \int_{-a^{1/2}}^\infty 2te^{-t^2} dt + be^a \int_{-a^{1/2}}^\infty e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

En el primer paso completamos el cuadrado. En el segundo paso hicimos el cambio de variables $s = t + 1$. En el tercer paso hicimos el cambio de variables $s = a^{1/2}t$.

Estimamos las dos integrales de la suma.

$$\frac{e^a}{-a^{1/2}} \int_{a^{1/2}}^\infty 2te^{-t^2} dt = \frac{e^a}{a^{1/2}} e^{-t} \Big|_{t=-a^{1/2}}^{t=\infty} = \frac{e^a}{a^{1/2}} e^{a^{1/2}}.$$

Por otro lado

$$be^a \int_{-a^{1/2}}^\infty e^{-t^2} dt \leq be^a \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \leq be^a \pi^{1/2}.$$

Juntando estas dos desigualdades tenemos que $\beta(u)$ es integrable. Luego al conocer $\alpha(u) \leq \beta(u)$ sabemos que $\alpha(u)$ es integrable. Por lo tanto podemos usar el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue como queríamos. \square

Al igual que con la Proposición anterior, necesitaremos que la derivada respecto de y se mete adentro de la convolución.

Proposición A.0.5. Si $g \in L^\infty$ entonces

$$\frac{\partial(g * f_a)}{\partial y_k} = g * \left(\frac{\partial f_a}{\partial y_k} \right)$$

Demostración. Denotamos nuevamente como e_k al elemento de \mathbb{R}^n que tiene un único 1 en la coordenada k . La derivada por definición es

$$\frac{\partial(g * f_a)}{\partial y_k}(x + iy) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \left(\frac{f_a(x + iy + ihe_k - u) - f_a(x + iy - u)}{h} \right) du.$$

Sabemos que puntualmente esa función converge a

$$g(u) \frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + iy - u).$$

Vamos a utilizar el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue para ver que la integral efectivamente converge a lo que deseamos.

Nos restringiremos a $h > 0$, luego cambiando h por $-h$ el mismo argumento da que la integral converge en ese caso. Como ambas convergerán a la convolución, entonces efectivamente ese será el límite de h tendiendo a cero porque coinciden sus límites laterales.

Por el Teorema del valor medio sabemos que existe $s \in (0, h)$ tal que

$$\frac{f_a(x + iy + ihe_k - u) - f_a(x + iy - u)}{h} = \frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + ise_k + iy - u). \quad (\text{A.4})$$

Calculamos

$$\frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + iy) = a^{n/2} a(2y_k + 2ix_k) e^{-a|x|^2 + 2iax \cdot y + a|y|^2}.$$

Acotamos la derivada nuevamente como

$$\left| \frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + iy) \right| \leq 2a^{n/2+1}(|x_k| + |y_k|) e^{-a|x|^2} e^{a|y|^2}.$$

Como el cómputo de la derivada es local podemos considerar $R > 0$ tal que $|y + se_k| \leq R$ cuando $0 \leq s \leq 1$. Considerando esto último tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + ise_k + iy - u) \right| &\leq 2a^{n/2+1}(|x_k - u_k| + |y_k + s|) e^{-a|x-u|^2} e^{a|y+se_k|^2} \\ &\leq 2a^{n/2+1}(|x_k - u_k| + R) e^{-a|x-u|^2} e^{aR^2}. \end{aligned}$$

Sea $M = \|g\|_\infty$. Definimos

$$\alpha(u) := 2Ma^{n/2+1}(|x_k - u_k| + R) e^{-a|x-u|^2} e^{aR^2}.$$

Podemos notar que α esta en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Análogamente al caso anterior podemos partir la integral como producto vía el Teorema de Fubini.

Si $j \neq k$ definimos

$$\alpha_j(u_j) := a^{1/2} e^{-a|x_j - u_j|^2} \text{ para } u_j \in \mathbb{R}.$$

Teniendo

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha_j(u_j) du_j = \pi^{1/2}.$$

Definimos

$$\alpha_k(u_k) := a^{1/2}(|x_k - u_k| + R) e^{-a|x_k - u_k|^2} \text{ para } u_k \in \mathbb{R}.$$

Así se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha_k(u_k) du_k = 2a^{-1/2} \int_0^\infty te^{-t^2} dt + 2R \int_0^\infty e^{-t^2} dt < \infty.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(u) du = 2Ma e^{aR^2} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \alpha_j(u_j) du_j < \infty.$$

En conclusión como $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y acota los cocientes incrementales sus integrales convergen por el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue. \square

Para estar en las hipótesis del Teorema 4.3.1, necesitamos que la convolución sea continua.

Proposición A.0.6. *La convolución $g * f_a$ es continua.*

Demostración. Debemos ver que si $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$, entonces $(g * f_a)(x_k + iy_k) \rightarrow (g * f_a)(x + iy)$.

$$(g * f_a)(x + iy) - (g * f_a)(x_k + iy_k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(u) (f_a(x + iy - u) - f_a(x_k + iy_k - u)) du.$$

Sabemos que puntualmente el integrando converge a cero. Veremos que la integral converge a cero por el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue. Para eso debemos acotarla por una función mayorante en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Si k es suficientemente grande, entonces $|(x + iy) - (x_k + iy_k)| < 1$. Sea R tal que $|(x_k, y_k)| < R$ para todo k . Computamos algunas desigualdades que utilizaremos en breve. Entonces tenemos que $|y| - |y_k| < 1$ y $|y| + |y_k| < 2R$. Esto implica que

$$|y|^2 - |y_k|^2 = (|y| - |y_k|)(|y| + |y_k|) \leq 2R. \quad (\text{A.5})$$

Por desigualdad triangular $|x_k - u| - |x - u| \leq |x_k - x| < 1$. También tenemos $|x_k - u| + |x - u| \leq 2|x - u| + |x_k - x| < 2|x - u| + 1$. Esto implica que

$$|x_k - u|^2 - |x - u|^2 = (|x_k - u| - |x - u|)(|x_k - u| + |x - u|) \leq 2|x - u| + 1. \quad (\text{A.6})$$

Juntando las dos desigualdades (A.5) y (A.6) tenemos que

$$|x_k - u|^2 - |x - u|^2 + |y|^2 - |y_k|^2 \leq 2|x - u| + 2R + 1.$$

Esto nos permitirá acotar

$$\begin{aligned} |f_a(x + iy - u) - f_a(x_k + iy_k - u)| &= e^{-a|x-u|^2 + a|y|^2} \left| 1 - e^{(|x_k-u|^2 - |x-u|^2 + |y|^2 - |y_k|^2)} \right| \\ &\leq e^{aR^2} e^{-a|x-u|^2} (1 + e^{a(2|x-u| + 2R + 1)}). \end{aligned}$$

Sea $M = \|g\|_\infty$. Definimos

$$\alpha(u) := Me^{aR^2} e^{-a|x-u|^2} (1 + e^{a(2|x-u|+2R+1)}).$$

Afirmo que esta función es integrable. Como la función es radial podemos cambiar a polares.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(u) du = \int_0^\infty Me^{aR^2} e^{-at^2} (1 + e^{a(2t+2R+1)}) n\omega_n t^{n-1} dt.$$

Separamos la integral anterior. Por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Me^{aR^2} n\omega_n t^{n-1} e^{-at^2} dt &\leq Me^{aR^2} n\omega_n \left(1 + \int_1^\infty t^{n-1} e^{-at^2} dt \right) \\ &\leq Me^{aR^2} n\omega_n \left(1 + \int_1^\infty t^{n-1} \frac{n!}{a^{2n} t^{2n}} dt \right) < \infty. \end{aligned}$$

En el anteúltimo paso estamos usando la cota $e^{at^2} \geq \frac{a^n t^{2n}}{n!}$ mirando la expansión de Taylor de la exponencial y usando que todos los términos son positivos. Esa cota implica que $e^{-at^2} \leq \frac{n!}{a^n t^{2n}}$. Como $\int_1^\infty t^{-1-n} dt < \infty$ tenemos que la integral es finita.

Por otro lado

$$\int_0^\infty Me^{aR^2} e^{-at^2} e^{a(2t+2R+1)} n\omega_n t^{n-1} dt \simeq \int_0^\infty e^{-a(t-1)^2} t^{n-1} dt = \int_{-1}^\infty e^{-at^2} (t+1)^{n-1} dt.$$

En el primer paso estamos desechando las constantes y completando el cuadrado. En el último paso haciendo el cambio de variables $s = t - 1$. Debemos ver entonces que

$$\int_{-1}^\infty e^{-at^2} (t+1)^{n-1} dt < \infty.$$

Tenemos que

$$\int_{-1}^\infty e^{-at^2} (t+1)^{n-1} dt \leq 2 + \int_1^\infty e^{-at^2} (t+1)^{n-1} dt.$$

En la desigualdad anterior estamos acotando por 1 el integrando en el intervalo $[-1, 1]$. Como $e^{-at^2} \leq \frac{n!}{a^n t^{2n}}$ tenemos entonces

$$\int_1^\infty e^{-at^2} (t+1)^{n-1} dt \leq \int_1^\infty \frac{n!}{a^{2n} t^{2n}} (t+1)^{n-1} dt \leq \frac{2^{-n} n!}{a^n} \int_1^\infty t^{-n-1} dt < \infty.$$

Esto último nos permite concluir que α es integrable. Aplicando el Teorema de Convergencia Mayorada de Lebesgue usando a α como mayorante tenemos el resultado deseado. \square

Veamos ahora que la convolución queda holomorfa.

Lema A.0.7. *Dada $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos que la convolución $g * f_a$ (definida por (A.1)) es holomorfa.*

Demostración. Sabemos que f_a es holomorfa porque la exponencial lo es y los polinomios lo son. Para ver que $g * f_a$ es holomorfa veremos que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Veremos que las derivadas clásicas en este caso coinciden con las distribucionales. La razón por la que las satisfará Cauchy-Riemann es que la derivadas pasarán a la f por la Proposición A.0.4 y la Proposición A.0.5.

Por los argumentos de A.0.4 sabemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x + iy - u) \right| \leq 2a^{n/2+1}(|x_k - u_k| + 1 + |y_k|)e^{-a|x-u|^2} e^{2a|x_k - u_k|} e^{a|y|^2}.$$

Nuestras acotaciones siguientes nos dan que $g * \frac{\partial f_a}{\partial x_k}$ esta en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n})$.

Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tenemos que (aplicando repetidas veces el Teorema de Fubini ya que lo que integramos es absolutamente integrable). Para simplificar la presentación, pongamos

$$I = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x + iy) \left(g * \frac{\partial f_a}{\partial x_k} \right) (x + iy) dx dy.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \varphi(x + iy) \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy - u) du dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x + iy) \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(x + iy - u) dx dy du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(u) \iint_{\mathbb{R}^{2n}} -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x + iy) f_a(x + iy - u) dx dy du \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x + iy) (g * f_a)(x + iy) dx dy. \end{aligned}$$

En el medio estamos usando la regularidad de la f_a para usar que podemos aplicar partes. Juntando todo tenemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x + iy) \frac{\partial (g * f_a)}{\partial x_k}(x + iy) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x + iy) (g * f_a)(x + iy) dx dy.$$

Esto nos da que efectivamente la derivada distribucional de la convolución en la variable x_k es la convolución de la derivada en la variable x_k .

En la variable y usando las cotas de (A.0.5) tenemos que

$$\left| \frac{\partial f_a}{\partial y_k}(x + iy - u) \right| \leq 2a^{n/2+1}(|x_k - u_k| + |y_k|)e^{-a|x-u|^2} e^{a|y|^2}.$$

Las cotas que siguen nos permiten ver que $g * \frac{\partial f_a}{\partial y_k}$ esta en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n})$. Esto nos deja concluir usando el mismo argumento de Fubini que usamos recién que la derivada distribucional de la convolución en la variable y_k es la convolución con la derivada en la variable y_k .

Tenemos entonces

$$\frac{\partial(g * f_a)}{\partial x_k} + i \frac{\partial(g * f_a)}{\partial y_k} = g * \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_k} + i \frac{\partial f_a}{\partial y_k} \right) = 0.$$

El primer paso se deduce de las Proposiciones A.0.4 y A.0.5. El último es porque f_a satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann por ser holomorfa. Luego $g * f_a$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en sentido distribucional. Esto implica que $g * f_a$ es una función holomorfa.

También se puede conseguir esto último viendo que las derivadas parciales de la convolución son continuas como en la Proposición A.0.6. Esto implica que la convolución es $C^1(\mathbb{R}^n)$ y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en sentido usual. \square

Recordamos ahora la definición

$$\alpha_0^+(x, r)^2 = \left(g^+ * e^{-|\cdot|^2/r^2} - \pi^{n/2} \right)^2.$$

Aquí g^+ es una función en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Utilizando la definición de convolución de (A.1) extendemos a nuestra $\alpha_0^+(x, r)$ original a una función compleja. Esta función será

$$\alpha_0^+(z, r)^2 = (g^+ * f_{1/r^2} - \pi^{n/2})^2.$$

Deducimos del Lema A.0.7 que esta función es holomorfa compleja.

Corolario A.0.8. *La función compleja $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por la serie*

$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{-2^{2k+1}k^2} \alpha_0^+(z, 2^{-k})^2$$

está bien definida. La serie converge absolutamente y uniformemente sobre compactos. En particular F es holomorfa.

Demostración. Expandiendo el cuadrado en la definición de $\alpha_0^+(z, r)^2$ tenemos que:

$$\alpha_0^+(z, r)^2 = (g^+ * f_{1/r^2})^2 + 2g^+ * f_{1/r^2} + \pi^n.$$

Tenemos entonces usando la Proposición A.0.3 para $a = \frac{1}{r^2}$ que

$$|(g^+ * f_{1/r^2})(x + iy)| \leq \|g^+\|_\infty \pi^{n/2} e^{|y|^2/r^2}.$$

Luego

$$(g^+ * f_{1/r^2})^2(x + iy) \leq \|g^+\|_\infty^2 \pi^n e^{2|y|^2/r^2}.$$

Esto implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{-2^{2k+1}k^2} (g^+ * f_{2^{-2k}})^2(x + iy) \leq \|g^+\|_{\infty}^2 \pi^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k+1}(|y|^2 - k^2)}.$$

Si nos restringimos a la franja $|y| \leq R$ para algún $R > 0$ vemos que la serie descripta converge absolutamente y uniformemente.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k+1}(|y|^2 - k^2)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k+1}(R^2 - k^2)}.$$

Cuando $k > R$ tenemos que $R^2 - k^2 \leq 0$. Esto implica que si $k > R$ tenemos $2^{-k} e^{2^{2k+1}(R^2 - k^2)} \leq 2^{-k}$ esto hace que la serie converja absolutamente y uniformemente. Como la última conclusión vale para todo R , sabemos que la serie determinada por quedarnos con el término cuadrado en la convolución de los tres que dimos al expandir $\alpha_0^+(x, r)^2$.

Vemos que al igual que recién la serie asociada al segundo término de la convolución converge absolutamente y uniformemente sobre compactos.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{-2^{2k+1}k^2} (2g^+ * f_{2^{-2k}})(x + iy) \leq \|g^+\|_{\infty}^2 \pi^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k}(|y|^2 - 2k^2)}.$$

Ahora si nos restringimos a $|y| \leq R$ tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k}(|y|^2 - 2k^2)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2^{2k}(R^2 - 2k^2)}.$$

Luego si $k > R/\sqrt{2}$ entonces tenemos $R^2 - 2k^2 < 0$ que hace que

$$2^{-k} e^{2^{2k}(R^2 - 2k^2)} \leq 2^{-k}.$$

Esto hace que la serie converja absolutamente y uniformemente en $|y| \leq R$. Como esto vale para todo R sabemos que la serie converge absolutamente y uniformemente sobre compactos.

Por último como el exponente de la exponencial es negativo, podemos acotarla por 1. Esto implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi^n 2^{-k} e^{-2^{2k+1}k^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \pi^n 2^{-k} \leq 2\pi^n.$$

Luego la última serie converge uniformemente y absolutamente.

En conclusión sabemos que la serie converge uniformemente sobre compactos y por el Lema A.0.7 las sumas parciales son holomorfas. Por el Teorema 4.3.3 tenemos que el límite es holomorfo. □

Índice de figuras

1.1.	$\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$	8
1.2.	$\varepsilon(x, r)$	10
2.1.	Conjunto de Cantor.	22
3.1.	Wikipedia Hausdorff Distance.	35
3.2.	2-sided c -corkscrew [Bad10].	45
3.3.	No-ejemplo de un 2-sided c -corkscrew [Bad10].	46
3.4.	Un sacacorchos.	46
3.5.	Transformación generadora del proceso iterativo de la construcción del Snowflake.	47
3.6.	Wikipedia Koch Snowflake	47
3.7.	Brócoli Romanesco.	48
3.8.	Comparación de posibles regularidades de una curva [Bad10].	49
5.1.	Cono y plano tangente.	68
6.1.	$\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$	73
6.2.	$\varepsilon(x, r)$	75
6.3.	$\varepsilon(x, r) \leq C\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ [Tol20]	76
6.4.	$\varepsilon(x, r) = 0$ y $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) > 0$ [Tol20].	77
6.5.	Versión de $\varepsilon(x, r)$ en \mathbb{R}^3 .	79
6.6.	Tangente blow-up sin agujeros.	87
6.7.	Cono y blow-up.	88
6.8.	Hemiesferas	96
6.9.	Hessiano se anula [JTV].	100
6.10.	Ω^+ esta cerrado por hemiesferas [JTV].	102

Bibliografía

- [AS18] Jonas Azzam and Raanan Schul. An analyst’s traveling salesman theorem for sets of dimension larger than one. *Math. Ann.*, 370(3-4):1389–1476, 2018. [78](#)
- [Bad10] Matthew Badger. *Lipschitz Approximation to Corkscrew Domains*. University of Washington, Department of Mathematics, Rainwater Seminar. 2010. [Link](#). [45](#), [46](#), [49](#), [115](#)
- [Bee93] Gerald Beer. *Topologies on closed and closed convex sets*, volume 268 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. [29](#)
- [BP17] Christopher J. Bishop and Yuval Peres. *Fractals in probability and analysis*, volume 162 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017. [77](#)
- [DL08] Camillo De Lellis. *Rectifiable sets, densities and tangent measures*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. [66](#)
- [DS91] Guy David and Stephen Semmes. Singular sets and rectifiable sets in \mathbb{R}^n . *Astérisque*, (193), 1991. [9](#)
- [EG15] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, Boca Raton, FL, revised edition, 2015. [17](#), [26](#), [67](#), [71](#)
- [Fal86] K. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. [17](#)
- [GM08] John B. Garnett and Donald E. Marshall. *Harmonic measure*, volume 2 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. Reprint of the 2005 original. [77](#)
- [Jon90] Peter W. Jones. Rectifiable sets and the traveling salesman problem. *Invent. Math.*, 102(1):1–15, 1990. [77](#)

- [JTV] Benjamin Jaye, Xavier Tolsa, and Michele Villa. A proof of Carleson's ε^2 -conjecture. <https://arxiv.org/abs/1909.08581>. 10, 76, 100, 102, 115
- [Kar17] Daniel Karrasch. *An Introduction to Grassmann Manifolds and their Matrix Representation*. 2017. [Link](#). 29
- [KP02] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. *A primer of real analytic functions*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2002. 55
- [Mag12] Francesco Maggi. *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, volume 135 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. An introduction to geometric measure theory. 66, 71
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability. 17, 27
- [Sch05] Volker Scheidemann. *Introduction to complex analysis in several variables*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. 55
- [Sim14] Leon Simon. *Introduction to Geometric Measure Theory*. Tsinghua Lectures. 2014. [Link](#). 17, 67, 71
- [SS11] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional analysis*, volume 4 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. Introduction to further topics in analysis. 55
- [Tol20] Xavier Tolsa. *The ε^2 -conjecture of Carleson*. One World Fractals and Related Fields. 2020. [Link](#). 76, 77, 115