



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Estado del arte para 3 clases de grafos de intersección:
intervalos, arco-circulares y circulares

Iván Alejandro Garay

Director: Dr. Guillermo A. Durán

Abril de 2021

Índice general

1. Definiciones y notación	9
1.1. Definiciones generales	9
2. Grafos de intervalos	13
2.1. Grafos de intervalos unitarios y propios	19
2.2. Grafos de intervalos q -propios	20
2.3. Reconocimiento	22
3. Grafos arco-circulares	25
3.1. Grafos arcos-circulares propios y unitarios	30
3.2. Grafos arco-circular Helly	46
3.3. Grafos arco-circular Helly propios y unitarios	53
3.4. Caracterizaciones parciales	57
3.5. Reconocimiento	66
3.5.1. Arco-circular	66
3.5.2. Arco-circular Helly, clique Helly y Helly propios	68
3.5.3. Arco-circular propios y unitarios	70
4. Grafos circulares	75
4.1. Grafos circulares Helly y clique Helly	76
4.2. Grafos circular unitarios	83
4.3. Caracterizaciones parciales	85
4.4. Reconocimiento	93
5. Conclusiones y problemas abiertos	95

Resumen

Uno de los problemas principales en teoría de Grafos es encontrar una caracterización estructural de las distintas clases de grafos, ya sea mediante características prohibidas o suficientes. El motivo por el cual nos interesa encontrar dichas caracterizaciones es que nos permiten obtener algoritmos de reconocimiento o darnos una idea de la complejidad computacional que podemos tener en un problema. El objetivo de este trabajo es hacer un estado del arte sobre los principales resultados sobre caracterizaciones para 3 clases de grafos.

Introducción

A continuación se describe la forma en que está organizado el presente trabajo.

En el primer capítulo de nuestro trabajo se darán las definiciones básicas de teoría de grafos.

En el segundo capítulo estudiaremos los grafos de intervalos, estudiaremos sus principales clases y las principales caracterizaciones de las mismas, al igual que las relaciones entre dichas subclases. El problema de caracterizar los grafos de intervalos fueron propuestos de manera independiente en 1957 por Hajos [22] en combinatoria y en 1959 por Benzer [2] en genética.

En el tercer capítulo estudiaremos los grafos arco-circulares como una extensión de los grafos de intervalo. Vamos a seguir el texto de Tucker, el cual caracteriza a los grafos arco-circulares propios y unitarios por medio de grafos prohibidos. Estudiaremos los grafos arco-circulares Helly y las intersecciones posibles de dichas clases.

Finalmente, en el cuarto capítulo estudiaremos los grafos circulares y la relación con los grafos arco-circulares. Los grafos circulares fueron presentados por Even e Itai en 1971 [15]. Una aplicación de los grafos circulares fue propuesta por Knuth [34], el cual consiste en buscar un reordenamiento de vagones de un tren utilizando la menor cantidad de vías posibles.

Capítulo 1

Definiciones y notación

1.1. Definiciones generales

Definición 1.1.1. Un grafo G es un par ordenado $G = (V, E)$, donde V denotará el conjunto de vértices o nodos del grafo y $E \subseteq V \times V$ denotará al conjunto de aristas del grafo. Dado $e = (u, v)$, llamamos extremos a u y v . Si E resulta ser un conjunto de pares ordenados, decimos que el grafo es dirigido, también se lo suele llamar digrafo, de lo contrario, el grafo resulta no dirigido.

Definición 1.1.2. Un grafo es finito si V y E lo son.

Definición 1.1.3. Definimos loop a una arista que tiene los mismos extremos.

Definición 1.1.4. Dos o más aristas con los mismos extremos se los llaman aristas múltiples.

Definición 1.1.5. Decimos que un grafo es simple si no tiene loops ni aristas múltiples.

En este informe sólo trabajaremos con grafos finitos y simples.

Definición 1.1.6. Definimos el complemento de un grafo $G = (V, E)$, como $\bar{G} = (V, \bar{E})$, donde $\bar{E} = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ y } (u, v) \notin E\}$.

Definición 1.1.7. Dado una familia de conjuntos $\Gamma = \{S_1, \dots, S_n\}$ definimos el grafo de intersección $G = (V, E)$, donde cada vértice v_i representa el conjunto S_i , y dos vértices, v_i y v_j , están conectados si sus conjuntos correspondientes tienen intersección no vacía, es decir $E = \{(v_i, v_j) \mid S_i \cap S_j \neq \emptyset\}$

Definición 1.1.8. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $U \subseteq V$ un subconjunto de vértices de G . Decimos que $H = (U, F)$ es un subgrafo si $F \subseteq E$ y $F \subseteq U \times U$. Decimos que H es un subgrafo inducido de G si además se cumple que $F = \{(u, v) \in E \mid u, v \in U\}$, es decir H tiene las mismas aristas que G entre los vértices de H . Diremos que G contiene un H cuando H es un subgrafo inducido de G .

Definición 1.1.9. Dado un grafo G y un vértice v de G , definimos el vecindario abierto de v como $N_G(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$, y el vecindario cerrado de v como $N_G(v) \cup \{v\}$ y lo notamos $N_G[v]$. Notaremos $N(v)$ o $N[v]$ cuando el contexto sea claro. Definimos el grado de un vértice como $d_G(v) = |N_G(v)|$. Obviaremos el subíndice cuando el contexto quede claro.

Definición 1.1.10. Definimos un camino como un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ tales que $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall i = 1 \dots n - 1$. Dicho camino lo notaremos P_n , y diremos que P_n es un camino entre v_1 y v_n , donde éstos vértices los llamaremos extremos.

Definición 1.1.11. Definimos un ciclo como un camino P_n entre v_1 y v_n y que además $(v_1, v_n) \in E$.

Definición 1.1.12. A un grafo se lo llama cordal si no contiene ciclos inducidos de más de 3 vértices.

Definición 1.1.13. Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito si existen dos subconjuntos de vértices disjuntos $V_1, V_2 \subseteq V$ tales que $V = V_1 \cup V_2$ y dos vértices v y u son adyacentes si $v \in V_1$ y $u \in V_2$ o viceversa. Al grafo bipartito con $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$ donde todos los vértices $v_1 \in V_1$ son adyacentes a todos los vértices $v_2 \in V_2$ lo llamamos bipartito completo y lo notamos $K_{r,s}$.

Definición 1.1.14. Diremos que un grafo es completo si y sólo si todos sus vértices son adyacentes entre sí. Al grafo completo con n vértices lo denotamos K_n .

Definición 1.1.15. Un conjunto completo de G es un conjunto de vértices adyacentes dos a dos. Un conjunto completo maximal de G se lo denomina clique.

Definición 1.1.16. La matriz clique A de G es una matriz donde las filas corresponden a las cliques y las columnas a los vértices de G , tal que $a_{ij} = 1$ si el vértice v_j está en la clique Q_i .

Diremos que una matriz A tiene la *propiedad de unos consecutivos* si existe una permutación de las filas de A , tal que sus columnas tengan las entradas de 1's consecutivos.

Para ilustrar la definición, la siguiente matriz tiene la propiedad de unos consecutivos.

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} F_3 \\ F_1 \\ F_4 \\ F_2 \\ F_5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Más general, A tiene la *propiedad de unos circular consecutivos* si luego de la permutación de las filas de A , sus columnas de 1's resultan consecutivos circularmente.

La siguiente matriz tiene la propiedad de unos circular consecutivos, pero no la de unos consecutivos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La *matriz de adyacencia* $M(G)$ de G es una matriz de $n \times n$ tal que $M_{ij} = 1$ si los vértices v_i y v_j son adyacentes y $M_{ij} = 0$ en caso contrario.

Definición 1.1.17. Decimos que la familia $S = \{S_i\}_{i \in I}$ satisface la propiedad Helly, o simplemente S es Helly, si $\forall J \subseteq I$ se cumple que $\forall i \neq j \in J, S_i \cap S_j \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in J} S_i \neq \emptyset$.

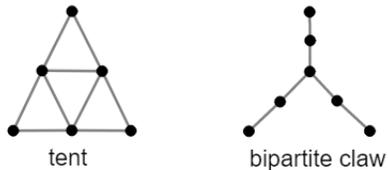
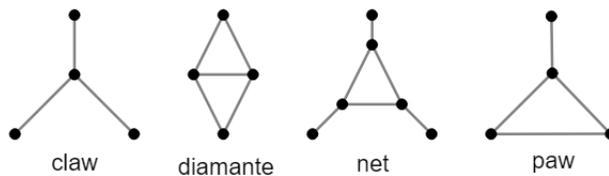
Es decir, que para cada subconjunto T de S se verifica que: si los elementos de T son no disjuntos dos a dos, entonces la intersección de todos los elementos de T es también no vacía.

Para ilustrar, $S = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ no es Helly.

Definición 1.1.18. Decimos que un vértice v es aislado si no es adyacente a ningún otro vértice. Utilizaremos la notación G^* , para denotar al grafo G al cual se le agrega un vértice aislado.

Notación : Utilizaremos el prefijo *co* para referirnos al complemento de un grafo. Así, dado un grafo G decimos que es *co-bipartito* si el complemento de G es bipartito.

A lo largo de este informe usaremos los siguientes grafos:



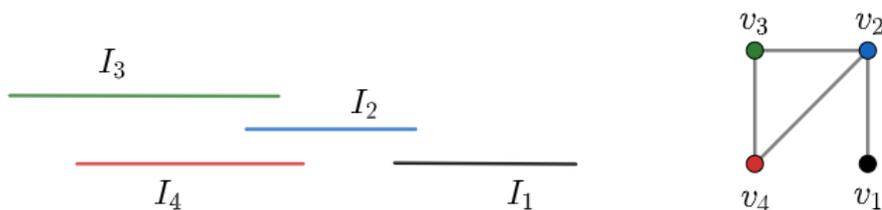
Capítulo 2

Grafos de intervalos

Un grafo G es de intervalos si existe un conjunto de intervalos Γ (llamado modelo o representación) en la recta real y una correspondencia 1-1 entre los vértices de G y los intervalos de Γ de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si los intervalos correspondientes se intersecan.

Definición 2.0.1. Un grafo $G = (V, E)$ es de intervalos si existe una biyección $f : V \Rightarrow \Gamma$, $f(v) = I_v$, tal que $(u, v) \in E$ si y sólo si $I_v \cap I_u \neq \emptyset$ y $u \neq v$

La siguiente figura muestra un grafo G de intervalos y un modelo para el mismo.



Los grafos de intervalo surgen en el proceso de modelar varias aplicaciones reales, en particular aquellos problemas que contienen dependencias de tiempo u otras restricciones que son lineales en la naturaleza. Podemos encontrar aplicaciones en planificación de trabajos [6], organización de archivos [6], secuenciación de proteínas [29], entre otros [16, 41].

Antes de enunciar la caracterización de los grafos de intervalo por medio de subgrafos inducidos, primero tenemos que definir una herramienta que juega un papel fundamental en dicha caracterización.

Definición 2.0.2. Un grafo G es asteroidal si existen tres vértices distintos v_1, v_2 y v_3 y tres caminos L_1, L_2 y L_3 tal que para cada $1 \leq i \leq 3$ se verifique las siguientes condiciones:

(1) L_i conecta a los vértices v_j con v_k , donde $j \neq i$ y $k \neq i$.

(2) v_i no es vecino de ningún vértice de L_i .

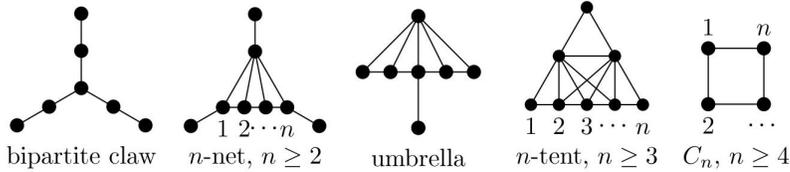
Los vértices v_1, v_2 y v_3 se denominan tripla asteroidal.

Lekkerkerker and Boland [35] caracterizaron a los grafos de intervalo mediante subgrafos prohibidos, para lograrlo consiguieron caracterizar a los grafos de intervalos como aquellos grafos cordales y que no contienen triplas asteroidales.

Teorema 2.0.1. ([35]) Sea G un grafo. Entonces, G es un grafo de intervalos si y sólo si G es cordal y no contiene triplas asteroidales.

Usando este teorema, vamos a probar la caracterización por subgrafos inducidos prohibidos para esta clase.

Teorema 2.0.2. ([35]) Sea G un grafo. Entonces, G es un grafo de intervalos si y sólo si G no induce ninguno de los siguientes grafos.



Demostración. \Rightarrow) Supongamos que G es un grafo de intervalos, por el teorema 2.0.1, es cordal, por lo que no puede contener ningún C_n con $n \geq 4$, y por otro lado, es fácil ver que el resto de los grafos contienen triplas asteroidales.

\Leftarrow) Por el contrarrecíproco, supongamos que G no es un grafo de intervalos, por el teorema 2.0.1, G no es cordal o contiene al menos una tripla asteroidal. Supongamos que G no es cordal, entonces tiene que tener algún C_n para algún $n \geq 4$.

Supongamos que G contiene al menos una tripla asteroidal. En este caso, basta con probar lo siguiente Si G tiene las siguiente propiedades:

1. G es cordal.
2. G es asteroidal.

3. G es minimal, es decir, ningún subgrafo propio es asteroidal.

Entonces, G es uno de los grafos mencionados en el teorema, exceptuando los ciclos.

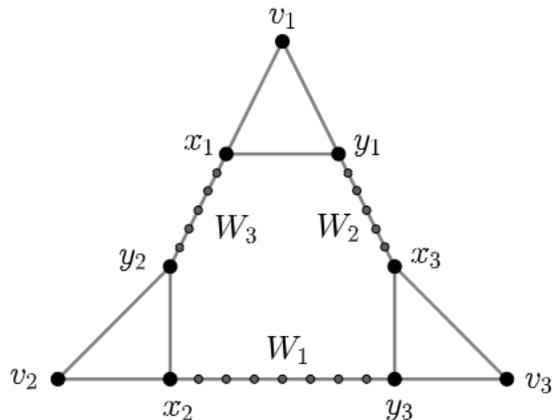
Sean v_1, v_2, v_3 la tripla asteroidal y W_1, W_2, W_3 los respectivos caminos como en la definición 2.0.2.

Como G es minimal por la propiedad 3, se sigue que $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = G$, por lo que los caminos W_i son irreducibles.

Sea $i \neq j$, entonces W_i contiene sólo un vértice de $N(v_j)$, ya que de lo contrario podríamos acortar el camino de v_j a v_k , contradiciendo la minimalidad de G . De aquí se deduce que cada $N(v_j)$ tiene al menos dos vecinos, y en el caso de ser distintos, deben ser adyacentes, de lo contrario G no sería cordal.

Separemos en dos casos

Caso 1: Si todos los v_i son adyacentes a dos vértices distintos, los cuales llamaremos x_i, y_i . Sean los caminos $W_1 = v_2, x_2, \dots, y_3, v_3$, $W_2 = v_3, x_3, \dots, y_1, v_1$, $W_3 = v_1, x_1, \dots, y_2, v_2$. Si sucede que $x_2 = y_3$, $x_3 = y_1$ o $x_1 = y_2$, no referiremos al camino W_i donde ocurre la igualdad, como camino corto. Sumado a esto, todos los b_i (c_i respectivamente) son distintos, ya que de lo contrario, existiría un b_i (c_i respectivamente) que pertenece al camino W_i contradiciendo la propiedad 2.



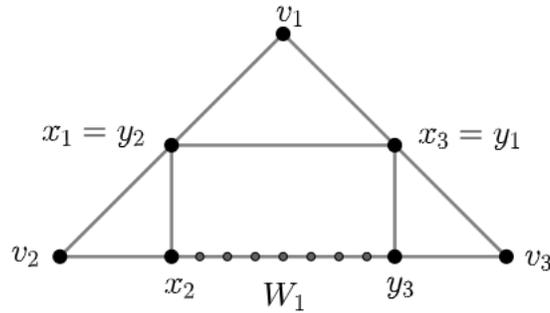
Veremos que existen al menos dos caminos cortos. Supongamos, que W_2 y W_3 son caminos cortos, y consideremos el vértice y_2 . Consideremos el camino cerrado $y_2, x_2, \dots, y_3, x_3, \dots, y_1, x_1, \dots, y_2$. Si y_2 es adyacente a y_1 , entonces podríamos reemplazar el camino W_3 por el camino v_1, y_1, y_2, v_2 , y si y_2 es adyacente a algún vértice interior z de W_1 o W_2 , distinto de y_1 para el primer caso, y distinto de x_2 para el segundo, entonces podríamos reemplazar el camino W_1 por v_2, y_2, z, \dots, v_3 . Ningún caso puede

ocurrir, ya que de lo contrario G no sería minimal, contradiciendo la propiedad (3). De manera similar, x_2 no puede ser adyacente a un vértice interior de W_3 o W_2 distinto de y_2 . Luego,

$$N[y_2] \cap (W_1 \cup W_2) = x_2, \quad N[x_2] \cap (W_2 \cup W_3) = y_2$$

Así, $y_2, x_2, \dots, y_3, x_3, \dots, y_1, x_1, \dots, y_2$ induce un ciclo, contradiciendo la propiedad (1).

De esta manera, al menos dos caminos son cortos, sin pérdida de generalidad, supongamos que W_2 y W_3 son cortos.



Supongamos que x_1 no es adyacente a y_3 , entonces $y_3 \neq x_2$, luego, los vértices v_1, v_2, y_3 forman una tripla asteoroidal en $G \setminus v_3$, contradiciendo la propiedad (3), luego, x_1 e y_3 son adyacentes.

Supongamos que existe un vértice interno z de W_1 , entonces x_1 y z tienen que ser adyacentes, de lo contrario se induce un C_n para algún $n \geq 4$. Usando el mismo razonamiento, x_3 tiene que ser adyacente a todos los vértices del camino W_1 entre x_3 e y_2 , formando así un n -tent.

Caso 2: Supongamos que al menos uno de los vértices v_i es adyacente a un solo vértice. Sin pérdida de generalidad, supongamos que a_1 tiene un solo vecino u . Entonces W_2 y W_3 contienen al vértice u .

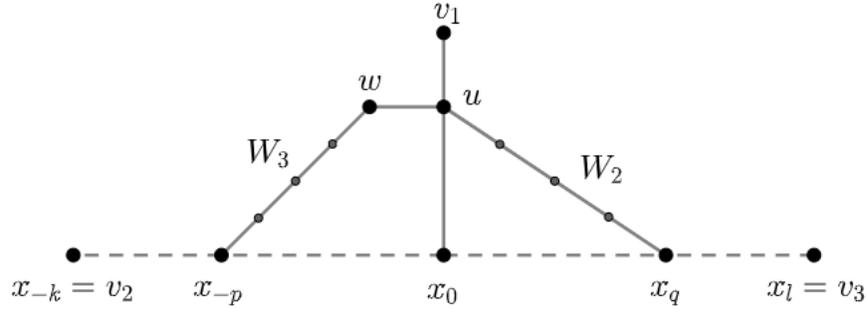
El vértice u tiene que ser adyacente a algún vértice de W_1 , ya que de lo contrario los vértices v_2, v_3, u forman una tripla asteroidal en $G \setminus v_1$, contradiciendo la propiedad (3). Además u no puede ser adyacente a v_2 ni v_3 , ya que si ésto pasase, v_2 sería adyacente a un vértice de W_2 , lo mismo ocurriría con v_3 , contradiciendo la propiedad (2). Vamos a separar en tres subcasos.

Caso 2.1: u es adyacente a dos o más vértices de W_1 . Sean x, y el primer y último vértice de W_1 que son adyacentes a u . Entonces u tiene que ser adyacente a todos los vértices entre x e y , en caso de existir, de lo contrario u, x, \dots, y, u sería un ciclo con más de 4 vértices, contradiciendo la propiedad (1). De esta forma, tenemos un n-net.

Caso 2.2: u es adyacente a un sólo vértice $w \neq v_1$. Entonces $w \in W_1$, ya que de lo contrario, se formaría un ciclo, además $w \in W_2$ y $w \in W_3$, y como w no es adyacente a v_2 ni v_3 , por el mismo razonamiento que el subcaso anterior, se forma un bipartite claw.

Caso 2.3: u es adyacente a solo un vértice $x_0 \in W_1$, y por lo menos un vértice $w \notin (W_1 \cup v_1)$. Sea $W_1 = x_{-k}, \dots, x_0, \dots, x_l$, donde $x_{-k} = v_2, x_l = v_3, k \geq 1, l \geq 1$, sin pérdida de generalidad, $w \in W_3$.

Sea $W_3 = v_1, u, w, \dots, x_{-p}, \dots, x_{-k}$, donde el vértice anterior a x_{-p} es el último vértice en W_3 pero no en W_1 . Se sigue que $p > 0$, ya que de lo contrario, x_0 estaría en W_3 y podríamos reemplazar, en W_3 el camino v_1, u, w, \dots, x_0 por v_1, u, x_0 , lo cual contradice el hecho de que W_3 sea un camino.



W_3 tampoco puede contener un vértice z que sea adyacente a x_i con $i > 0$, ya que $z \neq u$, pues u es adyacente a x_0 . Luego, podemos reemplazar los caminos W_1, W_2 por

$$W'_1 = x_{-k}, \dots, x_{-p}, \dots, w, x_i, x_{i+1}, \dots, x_l$$

$$W'_2 = v_1, u, \dots, z, x_i, x_{i+1}, \dots, x_l$$

Por lo que, los vértices v_1, v_2, v_3 forman una tripla asteroidal en $G \setminus x_0$, contradiciendo la propiedad (3).

Llegado a este punto, vamos a considerar el caso donde los vértices x_1, \dots, x_l son adyacentes solamente a los vértices en W_1 . Si $l = 1$, consideremos el camino cerrado $x_0, u, w, \dots, x_{-p}, \dots, x_0$. Usando que $x_0 \neq w, u \neq x_{-j}$ y tampoco es adyacente a ningún x_{-j} con $j > 0$, se tiene que x_0 es adyacente a u , ya que de lo contrario el camino

cerrado mencionado sería un camino C_n con $n \geq 4$. Como x_0 es adyacente a dos vértices, reemplazando v_3 por v_1 se aplica el subcaso 2.1, y si $l \geq 2$, haciendo el mismo reemplazo, se tiene el subcaso 2.2.

En consecuencia, podemos suponer que existe un x_q con $q > 0$, tal que es adyacente a algún vértice $z \notin W_1$, y por lo anterior $z \notin W_3$, por lo que $z \in W_2$.

Además $x_0 \notin W_2$, ya que de lo contrario, $G \setminus z$ sería asteroidal.

Entonces W_2 es de la forma $W_2 = v_1, u, z, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_l$, el cual no contiene vértices x_i con $i < 0$, ni ningún vértice adyacente a esos vértices. Sea $w' \in W_3, z' \in W_2, w' \neq v_1, z' \neq v_1$, luego $z' \neq w'$ y w', z' no son adyacentes, porque de lo contrario $G \setminus x_0$ sería asteroidal.

Como $x_0, u, w, \dots, x_{-p}, \dots, x_0$ y $x_0, u, z, \dots, x_q, \dots, x_0$ no pueden ser ciclos por la propiedad (1), x_0 y w tienen que ser adyacentes, y x_0 y z también. Por la propiedad (1), x_0 tiene que ser adyacente a todos los vértices entre u, w, \dots, x_{-p} y u, z, \dots, x_q . Por la propiedad (3), G tiene que ser de la forma de una umbrella. □

Un digrafo $D = (V, A)$ tiene una orientación transitiva si $(a, b), (b, c) \in A$ implica que $(a, c) \in A$. Un grafo G es de comparabilidad si se pueden orientar sus aristas de forma tal que el digrafo resultante tenga orientación transitiva.

Teorema 2.0.3. ([20]) *Un grafo G es de intervalo si y sólo si G es cordal y \overline{G} es de comparabilidad.*

Los grafos de intervalos también fueron caracterizados mediante su matriz de cliques y la propiedad de unos consecutivos [20].

Teorema 2.0.4. ([20]) *Un grafo G es un grafo de intervalos si y sólo si su matriz de cliques tiene la propiedad de unos consecutivos por columnas.*

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que G es un grafo de intervalos, y sean $I_i, 1 \leq i \leq n$ los intervalos de un modelo Γ . Consideremos Q el conjunto de cliques de G . Para cada clique consideremos

$$p_j \in \bigcap_{i: v_i \in Q_j} I_i$$

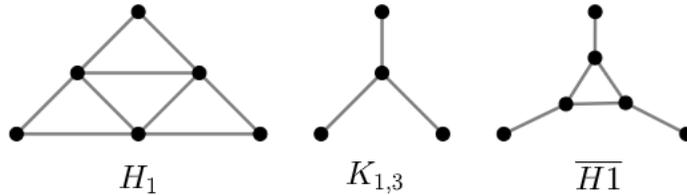
tal que $p_1 < p_2 < \dots < p_m$. Luego construimos la matriz de cliques A de la siguiente forma, $A_{ij} = 1$ si $p_j \in I_i$. De esta manera A tiene la propiedad de unos consecutivos.

\Leftarrow) Sea A la matriz de cliques de G tal que tiene la propiedad de unos consecutivos, tras un reordenamiento, podemos tomar la matriz tal que todas sus columnas ya tengan esta propiedad. Para cada vértice i miramos su columna respectiva, y sea f_i la fila donde aparece el primer 1 y l_i la última. Es fácil ver que $I_i = (f_i - 1, l_i)$ es un modelo de intervalos para G , ya que si v_i, v_j son adyacentes si y sólo si existe una clique Q_k que los contenga si y sólo si $(k - 1, k) \subseteq I_i \cap I_j$. \square

2.1. Grafos de intervalos unitarios y propios

Un grafo de intervalos propios es un grafo de intervalos que tiene un modelo de intervalos de tal forma que ningún intervalo está contenido propiamente en otro; dicho modelo se lo denomina modelo de intervalos propios. Dicha clase de grafos fue introducida por Roberts [43], en el cuál se caracterizó a los grafos de intervalos propios mediante una lista de subgrafos prohibidos.

Teorema 2.1.1. G es un grafo de intervalos propios si y sólo si G no induce ninguno de los siguientes grafos, $\{C_n\}_{n \geq 4}$, $K_{1,3}$, H_1 y $\overline{H_1}$



La demostración es casi trivial usando el teorema 2.1.2., el cual demostraremos.

Un grafo de intervalos unitarios es un grafo de intervalos con un modelo de intervalos Γ , donde todos los intervalos de Γ tienen la misma longitud. Wegner y Roberts introdujeron dicha clase de grafos. Una observación inmediata es la siguiente.

Observación 2.1.1. Como ningún intervalo puede contener propiamente a otro intervalo de misma longitud, es evidente que los grafos de intervalos unitarios son propios.

Roberts probó que también vale la vuelta, es decir que la clase de grafos de intervalos propios coincide con la de intervalos unitarios, sin embargo demostraremos dicha caracterización siguiendo a Kenneth P. Bogart y Douglas B. West [32].

Teorema 2.1.2. ([32, 43]) Sea G un grafo de intervalo, son equivalentes

1. G es un grafo de intervalo unitario
2. G es un grafo de intervalo propio
3. G no induce un $K_{1,3}$

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Es claro que ningún intervalo unitario puede estar contenido propiamente en otro intervalo unitario, se sigue que G es un grafo de intervalo propio.

(1) \Rightarrow (3) Para representar un $K_{1,3}$ mediante intervalos necesitaríamos 3 intervalos disjuntos dos a dos y un intervalo que interseque a dichos intervalos, se sigue que el intervalo del medio queda incluido propiamente. Luego, vale la implicación.

(3) \Rightarrow (2)

Sea $\Gamma = \{I_v\}_{v \in V}$ la representación de intervalos de G . Sean v, w vértices adyacentes, sean v_l y v_r los puntos extremos del intervalo I_v (análogamente con w_l y w_r), y supongamos que $I_w \subset I_v$, es decir $v_l < w_l < w_r < v_r$. Como G no induce ningún $K_{1,3}$, I_v no puede intersecar a derecha ni a izquierda de I_w a otro intervalo, por lo que sin pérdida de generalidad, podemos trasladar I_w a la derecha de I_v tal que $v_l < v_r < w_r$, sin modificar la representación del grafo. Por lo tanto, G es propio.

(2) \Rightarrow (1)

Como G es propio, el orden en el que aparecen los extremos izquierdos y los extremos derechos son el mismo. Sea Γ la representación de intervalos de G , procederemos de izquierda a derecha.

Sea I_v el intervalo elegido, y consideremos $a = v_l$ a no ser que existan u_1, u_2, \dots, u_n , con $n \geq 1$ tales que $v_l < (u_1)_r < (u_2)_r < \dots < (u_n)_r$, en cuyo caso tomaremos $a = (u_n)_r$.

Transformamos el intervalo $[a, v_r]$ en $[a, v_r + 1]$ y trasladamos $[v_r, \infty)$ en $[v_r + 1, \infty)$. Es claro que el orden se mantiene, y al ser propio, los intervalos anteriores a I_v siguen siendo unitarios, luego en finitos pasos se llega a un modelo de intervalos unitarios. \square

Los grafos de intervalos propios, y por el teorema anterior, los de intervalos unitarios, fueron caracterizados por Roberts [43] mediante su matriz de adyacencia aumentada, el cual se define como $M^*(G) = M(G) + I$.

Teorema 2.1.3. ([43]) *Sea G un grafo. Entonces, G es un grafo de intervalos propios (unitarios) si y sólo si $M^*(G)$ verifica la propiedad de unos consecutivos por columnas.*

2.2. Grafos de intervalos q-propios

Para terminar este capítulo vamos a mencionar y caracterizar los intervalos q-propios, una generalización de los intervalos propios, las cuales fueron introducidas

por Proskurowski y Telle [42].

Definición 2.2.1. Sea G un grafo, decimos que es de intervalos q -propios si tiene una representación por intervalos donde ningún intervalo está contenido propiamente en más de q intervalos.

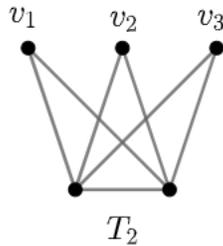
En general, un intervalo $[a, b]$ está contenido propiamente en $[c, d]$ si $a > c$ y $b \leq d$, o $a \geq c$ y $b < d$. Vamos a ver que es suficiente con pedir que las dos desigualdades sean estrictas, en cuyo caso diremos que un intervalo está contenido propiamente por ambos lados.

Teorema 2.2.1. ([42]) Sea G un grafo de intervalos y $\Gamma = \{I_v\}_{v \in V}$ una representación de intervalos para G , entonces existe un modelo $\Gamma' = \{I'_v\}_{v \in V}$ tal que si I'_v está contenido propiamente en I'_u , entonces I_v está contenido propiamente por ambos lados en I_u .

Corolario 2.2.1. Sea G un grafo de intervalos, si no es q -propios entonces para todos los modelos, podemos encontrar un intervalo que esté contenido propiamente por ambos lados en al menos $q + 1$ intervalos.

Demostración. Sea G un grafo como en el enunciado y sea Γ un modelo de intervalos para el mismo. Por el absurdo, supongamos que ningún intervalo de Γ está contenido propiamente por ambos lados en $q + 1$ intervalos. Por el teorema 2.2.1, existe un modelo de intervalos Γ' para G tal que ningún intervalo de Γ' está contenido propiamente en $q + 1$ intervalos. En consecuencia, G es un grafo de intervalos q -propios, lo cual es absurdo. \square

Definición 2.2.2. Definimos T_q al grafo que se obtiene al unir K_q y tres vértices v_1, v_2 y v_3 no adyacentes entre sí tales $(v_i, w) \in E \forall i = 1, 2, 3$ y $\forall w \in K_q$.



Teorema 2.2.2. Sea G un grafo de intervalos. Entonces, G es un grafo de intervalos q -propios si y sólo si G no contiene ningún T_{q+1} como subgrafo inducido.

Demostración. \Rightarrow) Por el absurdo, supongamos que G contiene un T_{q+1} . Sean w_j los vértices en K_{q+1} y v_1, v_2, v_3 los vértices como en la definición 2.2.2. Sea Γ un modelo de intervalos para G donde I_i son los intervalos correspondientes para los v_i y J_j los intervalos correspondientes para los w_j . Sin pérdida de generalidad, supongamos que I_2 está entre I_1 e I_3 . Como los I_i tienen que intersectarse con todos los J_j , en particular para cada $i = 1, 2, 3$, I_i se interseca con $J = \cap J_j$. Sin embargo, I_2 no se interseca con I_1 ni con I_3 , en consecuencia, I_2 está contenido propiamente en J . Por lo tanto, G no es un grafo de intervalos q -propios, lo cual es absurdo.

\Leftarrow) Por el absurdo, supongamos que G no es q -propios, y sea Γ un modelo de intervalos para G tal que los extremos de los intervalos sean enteros. Extendemos estos extremos hacia la derecha e izquierda lo más lejos posible con extremos enteros, formando así, un nuevo modelo de intervalos Γ' para G . Por el corolario 2.2.1, existe un intervalo J y un conjunto de intervalos K tal que $|K| \geq q + 1$. Sea J_1 un intervalo de K tal que $(J_1)_r$ es el más grande de todos en K . Por construcción, si extendemos el extremo derecho de I hasta el extremo derecho de J_1 , el modelo que obtenemos no representa a G . Así, el intervalo I se interseca con un intervalo J_2 en Γ' de tal forma que $(I)_r < (J_2)_l \leq (J_1)_r$. Luego, J_2 se interseca con todos los intervalos de K , pero no con I . De manera similar, podemos hacer este procedimiento extendiendo el extremo izquierdo de I , por lo que podemos tomar un intervalo J_3 en Γ' tal que esté a la izquierda de I , se interseca con todos en K , pero no con I . Como J_1 está entre J_2 y J_3 , estos últimos no se intersecan. En consecuencia, los intervalos de K , junto con J_1, J_2, J_3 inducen un T_{q+1} , lo cual es una contradicción. \square

Observación 2.2.1. Los grafos de intervalos 0-propios son los grafos de intervalos propios y el grafo T_1 es exactamente un $K_{1,3}$.

2.3. Reconocimiento

En esta sección presentaremos una idea de un algoritmo de reconocimiento para grafos de intervalos siguiendo el texto [9]

Utilizaremos la siguiente caracterización de Olariu.

Teorema 2.3.1. *Un grafo G es de intervalos si y sólo si existe un orden lineal \prec en V tal que para cada u, v, w , con $u \prec v$ y $v \prec w$, entonces $(u, w) \in E$ implica $(u, v) \in E$*

Para el desarrollo de este algoritmo necesitaremos del algoritmo Lexicographic Breadth First Search (LBFS).

LBFS

- **Input:** Un grafo G y un vértice u de G .
- **Output:** Un orden σ de los vértices de G .
- **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$

1. $label(u) \leftarrow |V|$;
2. Para cada vértice $v \in V \setminus u$, hacer $label(v) \leftarrow \Lambda$.
3. Para cada $i = |V|, \dots, 1$, hacer:
 - 3.1. Elegir un vértice v no numerado con el label más grande en el sentido lexicográfico;
 - 3.2. $\sigma(v) \leftarrow |V| + 1 - i$ (asignamos a v el número $|V| + 1 - i$);
 - 3.3. Para cada vértice no numerado $w \in N(v)$ hacer, agregar i a $label(w)$.

Podemos observar que LBFS nos permite elegir de manera arbitraria vértices en el paso 3.1. Llamaremos *slice* a éste conjunto y lo notaremos como S .

Describiremos dos variantes para el algoritmo LBFS

LBFS₊: Esta variante necesita una barrida previa del algoritmo LBFS. Ahora v es el vértice de S que está a lo último de σ .

LBFS*: Esta variante necesita dos barridas previas del algoritmo LBFS.

Algoritmo de reconocimiento para Grafos de Intervalo

- **Input:** Un grafo G .
- **Output:** Un booleano decidiendo si G es o no un grafo de intervalos.
- **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$

1. Hacer un LBFS π arbitrario.
2. LBFS₊(π) obteniendo σ .
3. LBFS₊(σ) obteniendo σ^+ .
4. LBFS₊(σ^+) obteniendo σ^{++} .

5. LBFS*(σ^+, σ^{++}) obteniendo σ^* .
6. Si σ^* satisface las condiciones del teorema 2.3.1 entonces G es un grafo de intervalos; en otro caso, G no es un grafo de intervalos.

Los items 5 y 6 pueden ser implementados en tiempo lineal, por lo que el algoritmo de reconocimiento para grafos de intervalos es $O(n + m)$.

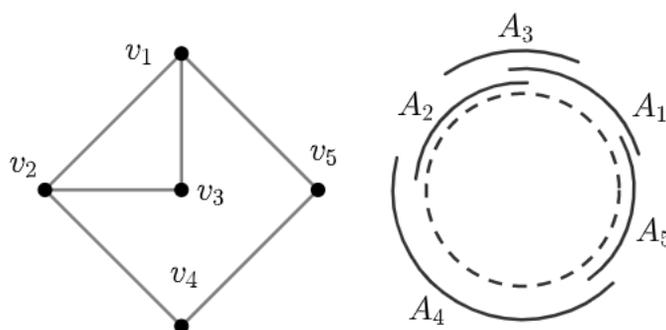
Capítulo 3

Grafos arco-circulares

Un grafo G es arco-circular si existe un conjunto de arcos Γ (llamado modelo o representación) alrededor de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y arcos de Γ de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si los arcos correspondientes se intersecan.

Definición 3.0.1. Un grafo $G = (V, E)$ es arco-circular si existe una biyección $f : V \Rightarrow \Gamma$, $f(v) = A_v$, tal que $(u, v) \in E$ si y sólo si $A_v \cap A_u \neq \emptyset$ y $u \neq v$

La siguiente figura muestra un grafo G arco-circular y un modelo para el mismo.



Los grafos arco-circulares son una generalización de los grafos de intervalo. Cualquier conjunto de intervalos en la recta real cumple la propiedad de Helly. En consecuencia, la subclase de grafos arco-circulares que generaliza de manera natural a los grafos de intervalo, son los grafos arco-circular Helly.

El problema de caracterizar a los grafos arco-circulares fue planteado por primera vez por Hadwiger, Debrunner y Klee [21].

Para este capítulo seguiremos los textos de Alan Tucker [51, 52, 53], ya que él fue quien aportó los fundamentos teóricos sobre esta clase de grafos y quien además propuso el primer algoritmo de reconocimiento de complejidad $O(n^3)$ [50].

En 1995, Hsu propuso un algoritmo de reconocimiento de complejidad $O(nm)$ [25] y en 2003 McConnell propuso un algoritmo de complejidad lineal [39], cuya complejidad es $O(n + m)$.

Los grafos arco-circulares tienen aplicaciones en distintas áreas, como genética, control de tránsito, entre otros, [2, 7, 8, 46, 47]. Una aplicación de los grafos arco-circulares es en control de tránsito [47]. Supongamos que queremos controlar los semáforos de una esquina. En dicha esquina existen carriles compatibles e incompatibles, es decir, carriles por el cual los autos pueden circular a través de ellos simultáneamente. Cada semáforo podemos modelarlo con un arco, donde su longitud representa el tiempo en que ese semáforo está en verde. Dos carriles son compatibles si y sólo si sus arcos se intersecan y la circunferencia puede representar la unidad de tiempo total que se repetirá continuamente.

Observación 3.0.1. Sea G un grafo arco-circular y sea Γ un modelo arco-circular de G , supongamos que existe un punto del círculo que no es cubierto por ningún arco de Γ , entonces es fácil ver que podemos recortar en dicho punto y estirarlo hasta convertirlo en una línea recta, convirtiendo así los arcos en intervalos y el grafo arco-circular en un grafo de intervalos. De manera similar, un grafo de intervalos es un grafo arco-circular donde la unión de todos los arcos no cubren la totalidad del círculo.

Definición 3.0.2. Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad Helly.

Las siguientes son algunas de las subclases de grafos arco-circulares que se estudian en la literatura:

1. Propios: Un grafo G es arco-circular propio (PCA) si existe un modelo arco-circular de G tal que ningún arco está contenido propiamente en otro.
2. Unitarios: Un grafo G es arco-circular unitario (UCA) si existe un modelo arco-circular de G tal que todos los arcos tengan la misma longitud.
3. Helly: Un grafo G es arco-circular Helly (HCA) si existe un modelo arco-circular de G , tal que los arcos satisfagan la propiedad Helly.

4. Clique-Helly: Un grafo G es arco-circular clique-Helly (CHCA) si G es un grafo arco-circular y clique-Helly.

Basándonos en dos papers de Tucker, vamos a probar el siguiente teorema sobre grafos arco-circulares en base al orden circular de los vértices.

Teorema 3.0.1. ([51, 52]) *Un grafo G es arco-circular si y sólo si existe un orden circular (v_1, v_2, \dots, v_n) de sus vértices, tal que para cada $i < j$, si $(v_i, v_j) \in E$, si y sólo si ocurre alguna de las siguientes condiciones:*

- (1) $v_{i+1}, \dots, v_j \in N(v_i)$
- (2) $v_{j+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_i \in N(v_j)$

Demostración. Sea G un grafo arco-circular, entonces tiene un modelo arco-circular. Supongamos que los arcos son de la forma (s_i, t_i) , los enumeramos de la siguiente forma, empezando desde un s_i arbitrario, recorremos el círculo en sentido horario y enumeramos los arcos a medida que aparecen los s_i . Notamos a los arcos A_1, A_2, \dots, A_n , donde A_i representa al vértice v_i .

Sea $i < j$, luego $(v_i, v_j) \in E$ si y sólo si $s_i \in (s_j, t_j)$ o $s_j \in (s_i, t_i)$.

En el primer caso, por la forma de enumerar, tenemos que los extremos $s_{j+1}, s_{j+2}, \dots, s_n, s_1, \dots, s_{i-1}$ están entre los extremos s_j y s_i y como $s_i \in (s_j, t_j)$, se sigue que los arcos $A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{i-1}$ intersecan al arco A_j y por lo tanto $v_{j+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_i \in N(v_j)$.

En el segundo caso, por la forma de enumerar, tenemos que los extremos $s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_{j-1}$ están entre los extremos s_i y s_j , pero como $s_j \in (s_i, t_i)$, se sigue que los arcos $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{j-1}$ intersecan al arco A_i , y por lo tanto $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j \in N(v_i)$.

Para la vuelta, supongamos que tenemos un orden circular de los vértices. Coloquemos p_1, p_2, \dots, p_n en el círculo equidistanciados respetando el orden circular. Para cada vértice v_i consideramos m_i el menor índice tal que $(v_i, v_{m_i}) \notin E$, definimos el arco $A_i = (p_i, p_{m_i})$ y lo colocamos en sentido horario.

Para ver que $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es un modelo arco-circular para G debemos ver que $(v_i, v_j) \in E$ si y sólo si A_i interseca a A_j .

Sea $i < j$, por construcción A_i interseca a A_j si y sólo si $p_i \in A_j$ o si $p_j \in A_i$.

p_j está en el arco A_i si y sólo si el punto p_j está entre los puntos p_i y p_{m_i} , y utilizando el orden circular de los mismos, se sigue que los puntos $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{j-1}$ están entre p_i y p_{m_i} , es decir que los arcos $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_j$ intersecan al arco A_i .

Utilizando nuevamente el orden circular, p_i está en el arco A_j si y sólo si los arcos $A_{j+1}, \dots, A_n, A_1, A_i$ intersecan al arco A_j . Por lo tanto, se verifica que $(v_i, v_j) \in E$ si y sólo si A_i interseca a A_j , es decir, G es un grafo arco-circular. \square

Daremos una caracterización de los grafos arco-circulares cordales. Para ello primero necesitamos siguiente concepto.

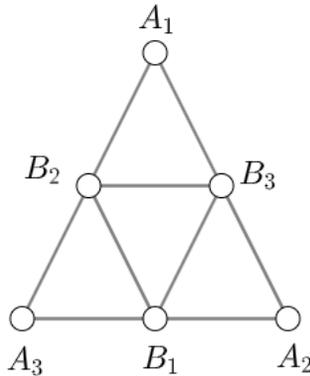
Definición 3.0.3. Un grafo G es *múltiplo* de otro grafo H si G puede ser obtenido reemplazando cada vértice v de H por un grafo completo K_v y si además $(a, b) \in E(G) \forall a \in K_v, b \in K_w$ si y sólo si $(v, w) \in E(H)$, es decir todos los vértices de K_v son adyacentes a todos los vértices de K_w si y sólo si v y w son adyacentes en H

Teorema 3.0.2. ([1]) Sea G un grafo conexo que no contiene ningún *claw*, *net*, C_4 ni C_5 . Si G contiene un *tent* como subgrafo inducido, entonces G es un múltiplo de un *tent*.

Demostración. La demostración la haremos por inducción en la cantidad de vértices.

El caso base es claro, ya que si G tiene 6 vértices, entonces G es un *tent*.

Supongamos que G tiene más de 6 vértices. Entonces existe un vértice v tal que $G \setminus v$ es conexo y contiene un *tent* como subgrafo inducido. Por hipótesis inductiva, $G \setminus v$ es un múltiplo de un *tent*. Consideraremos A_i y B_i con $1 \leq i \leq 3$ los subgrafos completos correspondientes a los vértices del *tent* etiquetados de la siguiente manera.



Como G es conexo, v tiene que tener algún vecino

Supongamos que v es adyacente a algún vértice de los A_i , digamos a A_1 , entonces removiendo todos los vértices de B_1 , todos los vértices exceptuando uno de A_3 y A_2 , se tiene que se induce un *net*.

Supongamos que v tiene vecinos en sólo dos de los A_i , digamos A_1 y A_2 , entonces se induce un C_4 .

Supongamos que v tiene vecinos en los 3 A_i , removiendo los conjuntos B_i , y todos los vértices exceptuando los respectivos vecinos de los A_i , se induce un *claw*.

Por lo tanto, como ninguno de éstos tres casos puede ocurrir, entonces v tiene que tener algún vecino en B_1 , B_2 o B_3 , sin pérdida de generalidad, supongamos que v es adyacente a algún vértice de B_2 . Sumado a esto, v tiene que ser adyacente a todos los vértices de A_1 o A_3 , de lo contrario es fácil ver que se induce un claw, nuevamente, sin pérdida de generalidad, v es adyacente a todos los vértices de A_1 .

Supongamos que v no es adyacente a ningún vértice de $A_2 \cup A_3$, entonces v tiene que ser adyacente a todos los vértices de B_2 y B_3 , ya que si v es adyacente a un vértice de B_2 , y existe un vértice en B_3 que no es adyacente a v , éstos vértices junto con un vértice de A_3 forman un claw. De manera similar no puede suceder que exista un vértice en B_2 no adyacente a v y un vértice en B_3 adyacente a v , ya que se induciría un claw con un vértice de A_3 . Tampoco puede suceder que existan vértices en B_2 y B_3 no adyacente a v , ya que agregando un vértice de A_1 , A_2 y A_3 se induce un net. Finalmente v no puede tener ningún vecino en B_1 , ya que de lo contrario, agregando un vértice de A_2 y A_3 se forma un claw. Por lo tanto, podemos agregar v al conjunto A_1 , y G se mantiene como un múltiplo de un tent.

Supongamos que v es adyacente a al menos un vértice de $A_2 \cup A_3$, digamos que v es adyacente a $u \in A_2$. Afirmamos que v tiene que ser adyacente a todos los vértices de B_1 , B_2 y B_3 .

Si existen vértices en B_1 y B_2 que no son adyacentes a v , agregando un vértice de A_1 y el vértice que es adyacente a v en A_2 se forma un C_5 , en cualquier otro caso es fácil ver que se forma un C_4 .

Además v es adyacente a todos los vértices de A_2 , ya que si existiese un vértice que no lo es, entonces un vértice de B_1 , uno de A_3 , que recordemos que no es adyacente ya que de lo contrario v tendría vecinos en los 3 conjuntos A_i , y dicho vértice de A_2 forman un claw.

Como v no es adyacente a ningún vértice de A_3 , podemos agregar a v al conjunto B_3 obteniendo un múltiplo de un tent.

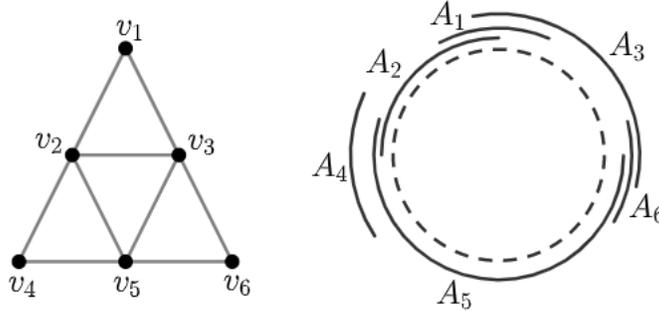
□

Teorema 3.0.3. ([1]) *Sea un grafo G cordal y conexo. G es un grafo arco-circular propio si y sólo si ningún subgrafo inducido es un net o claw.*

Demostración. Como los grafos claw y net no son grafos arco-circulares propios, entonces se verifica la condición suficiente.

Como G es cordal, no induce ningún C_4 ni C_5 . Por las hipótesis, tampoco induce un net o claw. Usando el teorema anterior, G es un múltiplo de un tent, por lo tanto, es suficiente con probar que cualquier múltiplo de un tent es un grafo arco-circular.

Consideremos la representación arco-circular del tent.



Luego, si H_i es un grafo completo que corresponde al vértice v_i del tent, le asignamos el arco A_i a todos los vértices de H_i , de esta manera tenemos un modelo arco-circular propio del múltiplo del tent.

□

3.1. Grafos arcos-circulares propios y unitarios

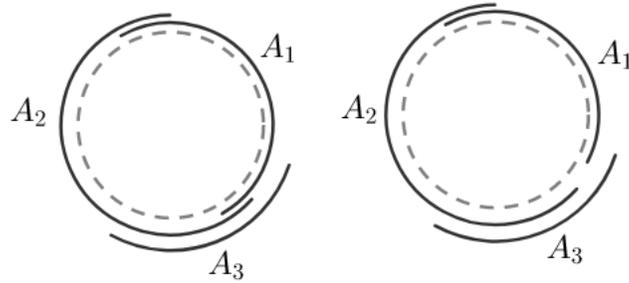
En esta sección vamos a caracterizar a los grafos arco-circulares propios mediante una lista de subgrafos prohibidos siguiendo el texto de Tucker [53].

Definición 3.1.1. ([49, 52]) Un grafo G arco-circular que no tiene ningún modelo arco-circular donde dos arcos cubran el círculo por completo se lo denomina *normal*.

Mediante el siguiente resultado vamos a poder asumir, cuando lo precisemos, que los grafos arco-circulares propios son siempre normales.

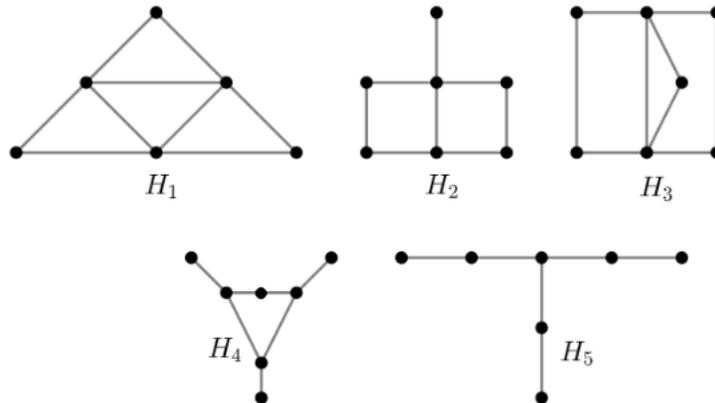
Teorema 3.1.1. *Sea G un grafo arco-circular propio, entonces G es un grafo arco-circular normal.*

Demostración. Supongamos que $|V(G)| \geq 3$ y sea Γ un modelo arco-circular propio para G . Supongamos que los arcos A_1, A_2 cubren todo el círculo. Como $|V(G)| \geq 3$, un tercer arco A_3 debe intersectar a los otros dos arcos de forma tal que el modelo sea propio. Sin pérdida de generalidad supongamos que dicha intersección se realiza en el extremo horario de A_1 y el extremo antihorario de A_2 . Es fácil ver que podemos acortar el extremo horario de A_1 de forma tal que el modelo sea normal, y se mantengan las intersecciones correspondientes.



□

Para esta sección vamos a trabajar con los siguientes grafos.



La técnica que utilizaremos a lo largo de éste capítulo será dibujar los vértices del grafo en un círculo.

Aclaración: Supongamos que un vértice v es adyacente a dos vértices a y b , y además tenemos un orden circular entre a y b . En la imagen se verán las aristas (v, a) y (b, a) , pero posiblemente no veremos la arista (v, w) donde w está entre a y b . Esto lo haremos para no sobrecargar de aristas la imagen.

Sumado a ésto, necesitaremos incorporar los siguientes conceptos.

Definición 3.1.2. Dado un subconjunto propio circular y no vacío de V , notamos $neg(S)$ y $pos(S)$ al último vértice si recorremos a S en sentido antihorario y sentido horario respectivamente.

Para un orden circular se define la relación $cir(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si recorriendo el orden una sola vez, los x 's aparecen en dicho orden. Y denotaremos $\overline{cir}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si se cumple $cir(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y además todos los x_i son distintos.

Dado un orden circular abierto, notaremos $N(y) \prec N(x)$ si ocurre $\overline{cir}(neg(N(x)), neg(N(y)), pos(N(y)), pos(N(x)))$

Tucker dio una caracterización de los grafos arco-circulares propios de la siguiente forma

Teorema 3.1.2. ([52, 53]) \overline{G} es un grafo arco-circular propio si y sólo si existe un orden circular abierto en G , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal que

1. $cir(x_i, pos(N_G(x_i)), pos(N_G(x_{i+1})))$
 2. $cir(x_i, neg(N_G(x_i)), neg(N_G(x_{i+1})))$
- A menos que $N_G(x_i) = \emptyset$ o $N_G(x_{i+1}) = \emptyset$

Definición 3.1.3. Sea G un grafo con un orden circular abierto, si verifica las dos condiciones del teorema anterior diremos que G tiene un orden OCC.

Para demostrar el teorema principal de ésta sección vamos a dividir el problema en dos, cuando el grafo es bipartito y cuando no.

Para lograr esto, necesitaremos los siguientes resultados.

Teorema 3.1.3. ([52, 53]) Sea G un grafo no bipartito. Son equivalentes

1. G tiene un orden circular abierto.
2. G tiene un orden OCC.

Teorema 3.1.4. ([53]) Sea G un grafo bipartito. Son equivalentes

1. G tiene un orden circular abierto.
2. G tiene un orden lineal abierto.

Demostración. Supongamos que G es un grafo bipartito con un orden circular abierto, permutando circularmente los índices, podemos obtener un nuevo orden circular abierto en el cual el primer y último vértice están en distintas particiones. Luego, ningún $N(v)$ contiene simultáneamente el primer y último vértice, por lo que el orden resulta lineal, probando así (1) \Rightarrow (2). La vuelta es trivial. \square

Proposición 3.1.1. ([49]) Sea G un grafo bipartito con orden circular, entonces no contiene como subgrafo inducido a H_5 ni $\{C_{2n}\}_{n \geq 3}$

Primero resolveremos el caso cuando el grafo es bipartito, para ésto necesitaremos dos lemas.

Lema 3.1.1. ([53]) *Dado un grafo G bipartito tal que no tiene como subgrafos inducidos a $\{C_{2n}\}_{n \geq 3}, \{C_{2n+1}\}_{n \geq 1}, H_i$ con $1 \leq i \leq 5$, entonces existe un orden lineal abierto tal que para todo $x, y, N(y) \not\prec N(x)$.*

Lema 3.1.2. ([53]) *Sea G un grafo que está en las condiciones del lema previo, entonces G tiene un orden OCC.*

Demostración. Podemos suponer que el grafo G es conexo, ya que si tuviese dos componentes conexas, al ser bipartito, es fácil combinar los órdenes OCC de sus componentes conexas para formar un orden OCC para G . También podemos suponer que existen al menos dos vértices en una componente y al menos dos vértices en la otra componente tal que los dos vértices no tienen el mismo vecindario, ya que dado un grafo con un orden OCC es fácil agregar un vértice con el mismo vecindario que el resto de vértices en su componente.

Por el lema previo, podemos tomar un orden lineal abierto tal que no existen vértices x, y tales que $N(x) \prec N(y)$. Sean $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ la partición bipartida de V y supongamos que $x_1 = neg(V_1)$, $x_n = pos(V_1)$, $y_1 = neg(V_2)$ e $y_m = pos(V_2)$.

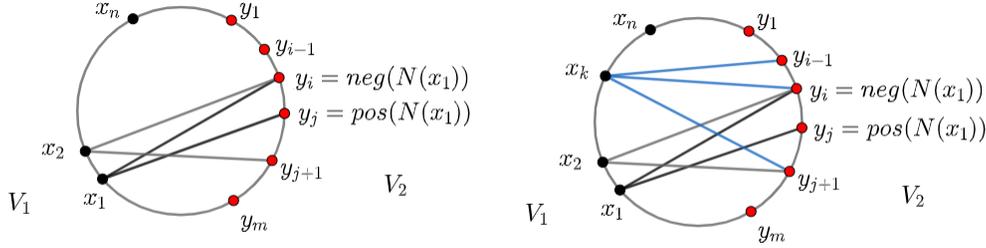
Supongamos que $(x_1, y_1) \notin E$ y $(x_1, y_m) \notin E$. Consideremos $y_i = neg(N(x_1))$ y $y_j = pos(N(x_1))$, entonces sucede que $(x_2, y_i) \in E$ ya que de lo contrario $N(y_i) = \{x_1\}$ esto se debe a que no puede ser adyacente a uno posterior a x_2 ya que por el orden lineal debería ser adyacente a x_2 y debido a que $x_1 = neg(V_1)$ y ésto implicaría que no existe un camino P desde x_1 a algún vértice anterior a y_i por lo que $y_i = neg(V_2)$, pero esto no puede pasar porque estamos asumiendo que $(x_1, neg(V_2)) \notin E$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $N(x_1) \neq N(x_2)$, de lo contrario podemos ordenar el conjunto V_1 para que ésto se verifique, luego se tiene que $(x_2, y_{i-1}) \in E$ o $(x_2, y_{j+1}) \in E$ pero no puede ocurrir las dos cosas simultáneamente sino $N(x_1) \prec N(x_2)$.

Supongamos que $(x_2, y_{j+1}) \in E$, un argumento similar se aplica al caso $(x_2, y_{i-1}) \in E$, y supongamos además que ocurre $N(y_i) \setminus \{x_1\} \not\subseteq N(y_{j+1})$, entonces existe $w \in N(y_i) \setminus \{x_1\}$ tal que $w \notin N(y_{j+1})$, usando que $x_2 = neg(N(y_{j+1}))$ por lo que estamos asumiendo y porque $(x_1, y_{j+1}) \notin E$, ya que de lo contrario y_i no sería $neg(N(x_1))$ y usando el orden lineal, tenemos que w se sitúa posterior a $pos(N(y_{j+1}))$, usando nuevamente el orden lineal, es fácil ver que se llega a $N(y_{j+1}) \prec N(y_i)$, lo cual no puede ocurrir y por lo tanto $N(y_i) \setminus \{x_1\} \subseteq N(y_{j+1})$.

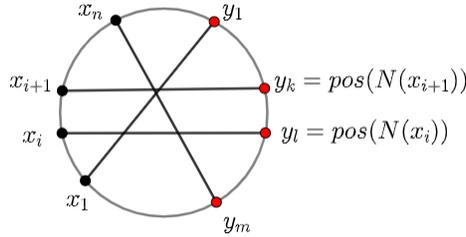
Si consideramos $x_k = neg(N(y_{i-1}))$ se tiene que $(x_k, y_i) \in E$, ya que de lo contrario habría dos componentes conexas y usando que $N(y_i) \setminus \{x_1\} \subseteq N(y_{j+1})$ tendríamos que $(x_k, y_{j+1}) \in E$ y por el orden lineal se tendría que $N(x_1) \prec N(x_k)$. El absurdo provino

de suponer que $(x_1, y_1) \notin E$ y $(x_1, y_m) \notin E$, por lo tanto $(x_1, y_1) \in E$ o $(x_1, y_m) \in E$. De manera similar se concluye que $(x_n, y_1) \in E$ o $(x_n, y_m) \in E$



Luego, ocurre que tenemos que analizar los casos donde $(x_1, y_1) \in E$ y $(x_n, y_m) \in E$, y $(x_1, y_m) \in E$ y $(x_n, y_1) \in E$, sin embargo esta segunda opción se soluciona invirtiendo el orden de V_2 .

Analicemos el primer caso y supongamos que para x_i y x_{i+1} ocurre que $\overline{cir}(x_i, pos(N(x_{i+1})), pos(N(x_i)))$ digamos que $y_k = pos(N(x_{i+1}))$ e $y_l = pos(N(x_i))$ con $k < l$, podemos tomar esto último ya que la hipótesis implica $pos(N(x_i)) \neq pos(N(x_{i+1}))$



Consideremos los conjuntos $S = \{x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n\}$ y $T = \{y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_m\}$

Sea $P_r = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ el camino que une x_n con x_{i+1} , y sea u_{j+1} el primer vértice en $(S \cup T)^c$.

Es claro que $(x_{i+1}, y_l) \notin E$, ya que de lo contrario y_k no sería $pos(N(x_{i+1}))$, esto implica que $x_i = pos(y_l)$, ya que y_l no puede ser adyacente a un vértice posterior a x_{i+1} ya que usando el orden lineal esto implicaría que y_l tiene que ser adyacente a x_{i+1} .

De acá podemos deducir que $u_j \neq x_n = u_1$, ya que si fuesen iguales, entonces $u_2 \in V_2 \setminus T$, usando que $(x_n, y_1) \in E$ con el orden lineal, entonces necesariamente (u_j, y_l) , ya que y_l es el último vértice en el orden que no está en T , pero esto no puede suceder ya que implicaría que x_{i+1} es adyacente a y_l . Luego, $u_j \neq x_n$ y por lo tanto, existe un vértice anterior a u_j .

Supongamos que $u_j \in S$, entonces $u_{j-1} \in T$ y $u_{j+1} \in V_2 \setminus T$ y usando el orden lineal necesariamente $(u_j, y_l) \in E$ lo que implicaría que x_i no es $pos(N(y_l))$. De manera

similar, si $u_j \in T$ se concluye que y_l no es $\text{pos}(N(x_i))$. Por lo tanto se llega al absurdo, el cual provino de suponer que $\overline{\text{cir}}(x_i, \text{pos}(N(x_{i+1})), \text{pos}(N(x_i)))$, por lo tanto se verifica que $\overline{\text{cir}}(x_i, \text{pos}(N(x_i)), \text{pos}(N(x_{i+1})))$. Con argumentos similares se llega a un absurdo si $\overline{\text{cir}}(x_i, \text{neg}(N(x_{i+1})), \text{neg}(N(x_i)))$, lo mismo sucede si elegimos y_i e y_{i+1} .

Por lo tanto, G tiene un orden OCC. □

A continuación vamos a tratar el caso cuando G es un grafo no bipartito, podemos asumir que \overline{G} no induce ningún $\{C_n\}_{n \geq 4}$ ni H_1 , ya que de lo contrario, \overline{G} sería un grafo de intervalos propios, en cuyo caso ya terminamos. Luego, la condición (1) implica que \overline{G} es conexo. Además, como el grafo es no bipartito, debe inducir un C_{2n+1} para al menos un $n \geq 1$ y como los C_{2n+1}^* están prohibidos, sabemos que G tiene que ser conexo.

Lema 3.1.3. ([53]) *Si G satisface las condiciones (1) y (2) del teorema 3.1.5, y \overline{G} no es un grafo de intervalos propios, entonces $\overline{G} \setminus v$ es conexo $\forall v \in V$.*

Demostración. Como \overline{G} no es un grafo de intervalos propios, tiene que inducir un $\{C_n\}_{n \geq 4}$, H_1 , $\overline{H_1}$ o un $K_{1,3}$.

Si \overline{G} induce un $\overline{H_1}$ o un $K_{1,3}$, entonces G induce un H_1 o un C_3^* , lo cual está prohibido por la condición (2). Por lo que \overline{G} contiene un $\{C_n\}_{n \geq 4}$ o un H_1 . Llamemos N a dicho grafo.

Sea w un vértice en $V(N)$, entonces existe $v \in V(G) \setminus V(N)$ tal que $(w, v) \in E$, ya que de lo contrario, se induce un N^* , el cual no puede suceder por la condición (1) del teorema. Por lo tanto, si dicho $w \in V(N)$ es removido de \overline{G} , seguimos teniendo un grafo conexo.

Sin embargo, si w es adyacente sólomente a v , entonces $N[v]$ induce un $K_{1,3}$ si $N = C_n$ o si $N = H_1$ con $d(v) = 3$, e induce un $\overline{H_1}$ si $N = H_1$ con $d(v) = 2$ (en \overline{G}). Ambos casos no pueden suceder ya que en G se induciría un C_3^* o un H_1 , lo cual está prohibido por la condición (2) del teorema 3.1.5.

Por lo tanto, w es adyacente a al menos dos vértices de N lo que implica que remover un vértice de N mantiene el grafo conexo. □

Lema 3.1.4. ([53]) *Bajo las hipótesis del lema anterior. Además supongamos que todo subgrafo propio de G que sea no bipartito tiene un orden OCC. Entonces $\forall v \in V$ tal que $G \setminus v$ es no bipartito, entonces existe un orden OCC para $G \setminus v$ tal que $N(v) \cap N(u)$ es circular $\forall u \in V \setminus N[v]$*

Finalmente, tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema principal de ésta sección.

Teorema 3.1.5. ([53]) *Un grafo \overline{G} es arco-circular propio si y sólo si*

1. \overline{G} no contiene como subgrafos inducidos a $\{C_n^*\}_{n \geq 4}$ ni H_1^*
2. G no contiene como subgrafos inducidos a $\{C_{2n}\}_{n \geq 3}$, $\{C_{2n+1}^*\}_{n \geq 1}$, H_1, H_2, H_3, H_4 y H_5

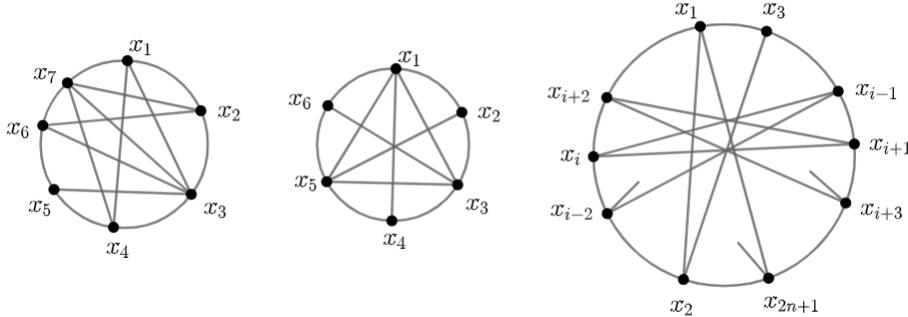
Demostración. \Rightarrow

Los modelos arco-circular propio para los grafos $\{C_n\}_{n \geq 4}$ y H_1 necesariamente cubren todo el arco, luego $\{C_n^*\}_{n \geq 4}$ y H_1^* deben ser subgrafos prohibidos. Es fácil ver que $\overline{H_1}$ y $\overline{H_4}$ no son PCA.

Si G es un grafo bipartito, por el lema 3.1.2, G tiene un OCC.

Por la proposición 3.1.1., como G tiene un orden OCC, entonces G no puede contener a los grafos H_5 ni $\{C_{2n}\}_{n \geq 3}$.

Para el caso donde G no sea bipartito, la siguiente figura muestra, de izquierda a derecha, que no existe un orden OCC para los grafos correspondientes.



(1) Si quitamos el vértice x_5 , tenemos un OCC para el grafo H_2 , no hay forma de agregar este vértice manteniendo un OCC, de la misma forma, para representar al H_3 , x_5 y x_2 deberían ser adyacentes, aún así no se cumple un orden OCC

(2) Para el H_4 ésta es la única configuración válida, no puede suceder que dos vértices del ciclo sean consecutivos, o los tres, ya que de lo contrario, habría al menos un vértice del ciclo que es adyacente a dos vértices fuera del ciclo. Aún así, esta configuración no verifica un orden OCC

(3) Se exhibe un orden circular para los C_{2n+1} con $n \geq 3$. Claramente, agregar un vértice aislado rompería la circularidad de $N(x_j)$ para algún j .

\Leftrightarrow) Como ya mencionamos, separaremos en los casos cuando G sea un grafo bipartito y cuando no. En el primer caso, el lema 3.1.2 lo resuelve.

Supongamos que G es un grafo no bipartito. Dado un v3rtice w de G , 3ste tiene que ser adyacente a un v3rtice del ciclo x_i o a dos v3rtices x_i y x_{i+2} , ya que de lo contrario se inducen C_k^* con k impar, un ciclo impar m3s corto o un ciclo par. De la misma manera, si w es adyacente a un v3rtice z tal que $cir(x_i, z, x_{i+2})$ pero w no es adyacente a x_i ni a x_{i+2} se induce un ciclo par o un C_k^* con k par. Luego por el lema 3.1.4, existe un orden OCC para $G \setminus \{w\}$ tales que $N(x_i) \cap N(w)$ es circular y por lo tanto, $N(w)$ es circular.

Supongamos que todos los $y \notin C_k$ son adyacentes a un mismo v3rtice en C_k , digamos x_i . Supongamos que tenemos y_1, y_2, \dots, y_m , entonces podemos encontrar un OCC para C_k y agregar los v3rtices y_j 's tales que $cir(x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_m, x_{i+1})$. Es claro que obtenemos un orden OCC ya que los v3rtices y_j 's no pueden ser adyacentes entre s3 ya que de lo contrario inducir3an un C_3 . Supongamos ahora que existen $y_1, y_2 \notin C_k$ tales que $(y_1, x_i) \in E$ y $(y_2, x_j) \in E$ con $i \neq j$. No puede suceder que y_1 sea adyacente a y_2 , ya que de lo contrario se induce un ciclo par o un ciclo impar m3s chico. Usando el orden OCC del ciclo C_k podemos agregar y_1 e y_2 de la misma forma que reci3n.

La demostraci3n se dividirá en dos casos, dependiendo de la longitud del ciclo impar en G .

Supongamos que el ciclo m3s corto en G es $C_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ con $k \geq 5$. Supongamos que al menos un v3rtice $y \notin C_k$ es adyacente a dos v3rtices de C_k , digamos x_i y x_{i+2} , elegimos y tal que $d(y)$ sea maximal, luego, podemos encontrar un orden OCC para $G \setminus \{y\}$ tal que $N(y)$ sea circular.

Consideremos $a = pos(N(y))$ y $b = neg(N(y))$, luego ocurre que $cir(a, x_i, x_{i+2}, b)$ existiendo la posibilidad de que $a = x_i$ y $b = x_{i+2}$. Sea $t = pos(N(a))$ y $s = sig(t)$, por lo que $(s, a) \notin E$. Adem3s podemos asumir que $(t, b) \notin E$, ya que de lo contrario $N(y) \subseteq N(t)$ y como $d(y)$ es maximal, se sigue que $N(y) = N(t)$, en este caso resulta trivial agregar el v3rtice y manteniendo el OCC.

Veamos que agregando y entre t y s obtenemos un orden circular de G . Para esto es suficiente con probar que:

1. $N(s) \cap N(t) \subseteq N(y)$
2. $N(y) \subseteq N(s) \cup N(t)$

Caso 1 : Usando que $(s, a) \notin E$ y $(t, b) \notin E$ es claro que vale $\overline{cir}(a, w, b)$ para todo

$w \in N(s) \cap N(t)$ y usando que $N(y)$ es circular, se cumple 1.

Caso 2 : Si 2. no valiese, existiría $w \in N(y)$, se debe cumplir que $(s, b) \notin E$, debido a que $N(s) \cup N(t)$ es circular. Reemplazando x_i por a , x_{i+1} por y y x_{i+1} por b se induce un C_k^* .

Veamos que las dos condiciones son suficientes para probar que el orden circular se mantiene.

Si $w \in N(s) \cap N(t)$, entonces $z \in N(y)$ y por lo tanto, $N(w)$ resulta circular

Si $w \notin N(s) \cap N(t)$ pero $w \in N(y)$; o si $w \notin N(y)$ pero $w \in N(s) \cup N(t)$, podemos suponer que $w \in N(s)$ pero $w \notin N(t)$, en ambos casos es claro que $N(w)$ es circular, no puede ser adyacente a un vértice previo a t , ya que de lo contrario, $G \setminus \{y\}$ no sería un orden OCC.

Por lo tanto G tiene un orden circular.

Supongamos que el ciclo más corto en G es $C_3 = (x_1, x_2, x_3)$. Dado $w \in G$, por el lema 3.1.3, entonces $\overline{G} \setminus \{w\}$ es conexo, por lo que existen y_1, y_2, \dots, y_k con $k \geq 1$, $y_i \in G \setminus \{w\}$ tal que $\text{cir}(x_3, y_1, y_2, \dots, y_k, x_1)$ en $G \setminus \{w\}$ por hipótesis inductiva. De esto podemos deducir que $(y_1, x_3) \notin E$, $(y_k, x_1) \notin E$, $(y_i, y_{i+1}) \notin E$ y $(y_i, x_2) \in E \forall 1 \leq i \leq k$.

Sea $j = \min\{i \mid (y_i, x_1) \notin E, 1 \leq i \leq k\}$. De esta forma vértices (x_1, x_2, y_{j-1}) forman un C_3 .

Usando el Lema 3.1.4 con $G \setminus \{y_j\}$, existe un OCC para $G \setminus \{y_j\}$ tal que $N(x_1) \cap N(y_j)$ y $N(x_3) \cap N(y_j)$ son circulares.

Como tenemos que

$$N(y_j) = (N(y_j) \setminus (N(x_1) \cup N(y_{j-1}))) \cup (N(y_j) \cap (N(x_1) \cup N(y_{j-1})))$$

Supongamos existe $w \in N(y_j) \setminus (N(x_1) \cup N(y_{j-1}))$, luego $(w, x_2) \in E$, de lo contrario, como w no es adyacente a los vértices x_1, y_{j-1} y x_2 , tenemos que se induce un C_3^* en G .

Aún así, x_2 es adyacente a los vértices x_1, y_{j-1}, y_j y w , y éstos a su vez forman dos K_2 , por lo que \overline{G} induce un C_4^* .

Luego $N(y_j) \setminus (N(x_1) \cup N(y_{j-1})) = \emptyset$ y por lo tanto

$$N(y_j) = N(y_j) \cap (N(x_1) \cup N(y_{j-1})) = (N(y_j) \cap N(x_1)) \cup (N(y_j) \cap N(y_{j-1}))$$
 es circular.

Supongamos que $d(y_j) = 1$, entonces no puede existir un vértice w distinto a x_1, x_3 que sea adyacente a éstos dos y que verifique $\overline{\text{cir}}(x_3, w, x_1)$, ya que de lo contrario los vértices (x_3, w, x_1) forman un C_3 , que junto a y_j forman un C_3^* .

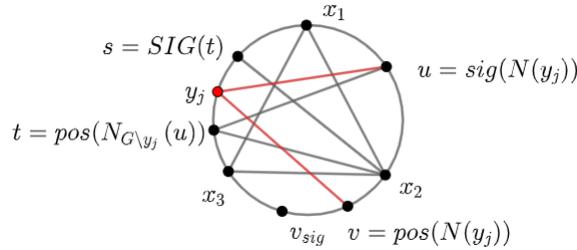
Supongamos que $d(y_j) \geq 2$ y sean $u = \text{neg}(N(y_j))$ y $v = \text{pos}(N(y_j))$, es claro que ocurre $\text{cir}(x_1, u, x_2, v, x_3)$ ya que x_2 es adyacente a y_j por la circularidad, además, $x_1 \neq u$ y $x_3 \neq v$.

Supongamos que $u \neq x_2$ y consideremos $t = pos(N_{G \setminus \{y_j\}}(u))$ y $v_{sig} = SIG(v)$ (El siguiente a v en sentido horario).

A continuación separaremos en dos casos, dependiendo de si t y v_{sig} son adyacentes o no.

Supongamos que $(t, v_{sig}) \notin E$, si tomamos $s = SIG(t)$ entonces $(u, s) \notin E$.

Usando que $(u, x_3) \in E$ pues ocurre $\overline{cir}(x_1, u, x_2)$, se sigue $cir(x_3, t, s)$. Si ocurriese $cir(x_1, t, s)$, tenemos que por la circularidad de $N(t)$, t es adyacente a v_{sig} . Luego ocurre $cir(x_3, t, s, x_1)$ y por lo tanto, t y s son adyacentes a x_2



Afirmo que agregando el vértice y_j entre t y s , obtenemos un orden circular, para eso es suficiente con ver dos cosas:

1. $N(s) \cap N(t) \subseteq N(y_j)$
2. $N(y_j) \subseteq N(s) \cup N(t)$

Caso 1: Sea $w \in N(s) \cap N(t)$, como $(s, u) \notin E$ y $(s, x_2) \in E$, el vértice w se sitúa posterior a u y como $(t, v_{sig}) \notin E$ y $(t, x_2) \in E$ se sigue que w es el vértice v o uno previo a éste, luego $w \in N(y_j)$.

Caso 2: Supongamos que existe un $w \in N(y_j)$ pero $w \notin N(s) \cap N(t)$.

Como $w \in N(y_j)$, se tiene que el vértice está entre u y v , o ser alguno de éstos. Usando que $w \notin N(t)$, w se sitúa entre x_2 y v , éste último incluido.

Usando que $(s, x_2) \in E$ no puede suceder que $(s, v) \in E$, de lo contrario, usando la circularidad de $N(s)$, $w \in N(s) \cap N(t)$

Usando que s no es adyacente a u ni a v se sigue que $\overline{cir}(x_3, s, x_1)$.

Como s es adyacente a x_2 y no es adyacente a u , tenemos que s no es adyacente a x_1 , además x_1 no es adyacente a u , de lo contrario, usando la circularidad de $N(u)$ tendríamos que s y u son adyacentes.

De la misma forma, s no es adyacente a x_3 , ya que por la circularidad de $N(s)$, se tendría que s es adyacente a v .

Sumado a ésto, u y v no pueden ser adyacentes, de lo contrario los vértices u, v y y_j formarían un C_3 , por lo que agregando el vértice s tendríamos un C_3^* en G .

De la misma forma, x_3 no es adyacente a v , ya que de lo contrario los vértices x_1, x_3 y v forman un C_3 y agregando y_j tenemos un C_3^* en G .

Sin embargo, tenemos que se induce un C_5^* con los vértices x_1, v, y_j, u, x_3 y s , siendo este último el vértice aislado.

Por lo tanto tenemos un orden circular en G .

Supongamos que $(t, v_{sig}) \in E$. Recorriendo los vértices desde t yendo en sentido antihorario, sea t^* el primer vértice no adyacente a v_{sig} , donde existe la posibilidad de que $t^* = v_{sig}$ y sea $s^* = SIG(t^*)$, por lo que $(s^*, v_{sig}) \in E$. Como x_1 es adyacente a c por la circularidad y t^* no, se tiene que $cir(t^*, s^*, x_1)$.

Nuevamente afirmo que agregando el vértice y_j entre t^* y s^* , obtenemos un orden circular, para eso es suficiente con ver dos cosas:

1. $N(s^*) \cap N(t^*) \subseteq N(y_j)$
2. $N(y_j) \subseteq N(s^*) \cup N(t^*)$

Caso 2: Veamos que s^* tiene que ser adyacente a u , para ver esto separaremos en dos casos, dependiendo de donde se sitúe s^* en el círculo.

Caso a : Supongamos que s^* verifica que $cir(x_3, s^*, x_1)$, como x_3 es adyacente a x_1 y a x_2 , se sigue que x_3 es adyacente a u por la circularidad, y como u es adyacente a t^* , tenemos que s^* es adyacente a u .

Caso b : Supongamos que s^* verifica que $cir(v_{sig}, s^*, x_3)$, entonces s^* es adyacente a x_1 y como también es adyacente a v_{sig} , por la circularidad de $N(s^*)$, s^* es adyacente a u .

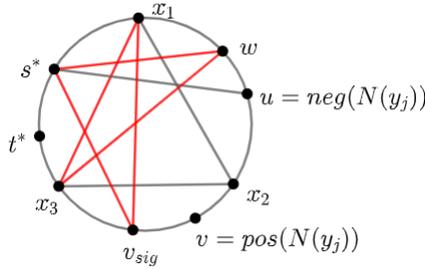
Por lo tanto $N(y_j) \subset N(s^*)$ y entonces $N(y_j) \subset N(s^*) \cup N(t^*)$.

Caso 2 : Veamos que $N(s^*) \cap N(t^*) \subset N(y_j)$. Si no fuese el caso, podríamos tomar $w \in N(s^*) \cap N(t^*)$ pero $w \notin N(y_j)$. Como t^* no es adyacente a v_{sig} pero si a u , tenemos que w tiene que estar previo a u . Además s^* no puede ser adyacente a x_1 , ya que de lo contrario los vértices s^*, x_1 y v_{sig} forman un C_3 , que junto con y_j tenemos un c_3^* en G . Como $w \in N(s^*)$, $w \neq x_1$ por lo que $\overline{cir}(x_1, w, u)$.

Es fácil ver que $(x_1, w) \notin E$, $(v_{sig}, w) \notin E$ y $(v_{sig}, x_3) \notin E$, ya que de lo contrario,

es fácil ver que se inducen un C_3^* en G . Como x_3 no es adyacente a v_{sig} , se sigue que $s^* \neq x_3$, y además es fácil ver que $(s^*, x_3) \notin E$. Luego $x_3 \neq v_{sig}$ por lo que los vértices $s^*, w, x_3, x_1, v_{sig}$ e y_j forman un C_5^* , donde y_j es el vértice aislado, llegando a un absurdo.

La siguiente figura muestra en rojo el C_5 inducido.



Por lo tanto, tenemos un OCC. □

Como corolario podemos derivar una nueva caracterización para esta clase de grafos por medio de subgrafos prohibidos, tal como lo propuso Durán en [12]. Para lograr esto necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.1.5. ([12]) *Los grafos $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, \overline{H_5}$ y $\{\overline{C_{2n+1}^*}\}_{n \geq 1}$ son arco-circulares.*

Demostración. Es fácil encontrar modelos arco-circulares para los grafos $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}$ y $\overline{H_5}$.

Fijamos $n \geq 1$, veamos que C_{2n+1}^* es un grafo arco-circular. Sean los vértices w_i con $1 \leq i \leq 2n + 1$ y consideremos el siguiente rótulo en base a la paridad del índice: $v_1 = w_1, v_2 = w_3, \dots, v_{n+1} = w_{2n+1}$ y $v_{n+1} = w_2, v_{n+2} = w_4, \dots, v_{2n+1} = w_{2n}$, estamos en las hipótesis del teorema 3.0.1 y por lo tanto, el grafo $\overline{C_{2n+1}^*}$ es arco-circular. Es evidente que si agregamos un vértice universal el grafo sigue siendo arco-circular. □

Lema 3.1.6. ([12]) *Los grafos $H_1^*, \{C_n^*\}_{n \geq 4}$ y $\{\overline{C_{2n}}\}_{n \geq 3}$ no son arco-circulares.*

Demostración. Las representaciones arco-circulares de los grafos H_1 y $\{C_n\}_{n \geq 4}$ cubren toda la circunferencia por lo que es imposible agregar el arco que representa al vértice aislado.

Supongamos ahora que existe algún $n \geq 3$ tal que $\overline{C_{2n}}$ es arco-circular. Por el teorema, no puede ser arco-circular propio, por lo que existen dos arcos A_i y A_k tales que $A_i \subset A_k$, donde los arcos representan a los vértices v_i y v_k . Luego, $N[v_i] \subseteq N[v_k]$. Veamos que ésto no puede suceder. Llamo G al grafo C_{2n}

Supongamos que $(v_i, v_k) \in E(G)$, entonces $(v_i, v_k) \notin E(\overline{G})$ y por lo tanto, $v_i \notin N[v_k]$.

Por otro lado, si $(v_i, v_k) \notin E(G)$, podemos tomar los dos caminos que unen a dichos vértices en G . Sean $P = v_i v_{i+1} \dots v_k$ y $Q = v_i v_{i-1} \dots v_1 v_n v_{n-1} \dots v_k$. Luego, existe $u \in \{v_{k+1}, v_{k-1}\}$ tal que $(v_i, u) \notin E(\overline{G})$, por lo que $u \in N[v_i]$ pero $u \notin N[v_k]$ \square

Por lo tanto podemos reformular la caracterización de Tucker de la siguiente forma.

Corolario 3.1.1. ([12]) *Un grafo G es arco-circular propio si y sólo si G es arco-circular y no contiene como subgrafos inducidos a $\overline{H_1}, \overline{H_2}, \overline{H_3}, \overline{H_4}, \overline{H_5}$ ni a $\{\overline{C_{2n+1}^*}\}_{n \geq 1}$.*

A continuación se define los conceptos claves para la caracterización de grafos arco-circular propios que realizaron Hell, Bang-Jensen y Huang [23], Huang [26, 27] y Skrien [44], quienes generalizaron el concepto de *torneos*.

Definición 3.1.4. Un *digrafo* D es una orientación de un grafo G si para cada $v, u \in V(G)$ se verifica que $(v, u) \in E(G)$ si y sólo si $(v, u) \in A(D)$ o bien $(u, v) \in A(D)$.

Un torneo es una orientación de un grafo completo. Un grafo G es un torneo local si G admite una orientación tal que $N^-(v)$ y $N^+(v)$ inducen un torneo en G , para todo $v \in V(G)$.

Una enumeración circular de un digrafo D es un orden circular v_1, v_2, \dots, v_n de sus vértices, tal que para cada v_i existen enteros no negativos r y s tal que $N^-(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_{i-r}\}$ y $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+s}\}$. Un grafo que admite una enumeración circular es llamado *ronda*. En el caso en que v_1, v_2, \dots, v_n tengan un orden lineal, diremos que se trata de una enumeración derecha, y a G será llamado *derecho*.

En el siguiente teorema se caracteriza a los grafos de intervalos usando estas definiciones. Luego, podemos ver como generalizar el teorema para los grafos arco-circulares propios. Las demostraciones las obviaremos ya que no es el propósito de esta tesis, sin embargo resulta interesante ver cómo las clases de grafos están relacionadas.

Teorema 3.1.6. ([11, 43]) *Sea G un grafo. Entonces, G es un grafo de intervalos propios si y sólo si G es derecho.*

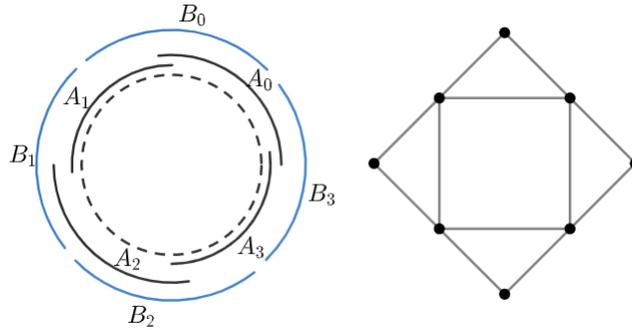
Teorema 3.1.7. ([11, 44]) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo G conexo:*

1. G es un grafo arco-circular propio.
2. G es orientable como torneo local
3. G tiene una enumeración circular.

Recordemos que un grafo arco-circular unitario (UCA) es un grafo arco-circular que admite un modelo donde todos los arcos tienen la misma longitud. Claramente $UCA \subseteq PCA$, de manera similar ocurría con los grafos de intervalos unitarios y propios, excepto que en el caso de los intervalos tenemos una igualdad. Sin embargo, estas dos clases de grafos arco-circulares no coinciden.

Tucker formuló una caracterización de la clase UCA mediante subgrafos prohibidos [53]. Definiremos dicha clase usando la notación de [14].

Sean dos números naturales n y k tal que $n > k \geq 1$, denotamos $CI(n, k)$ al grafo cuyo modelo se construye de la siguiente forma. Sean $\epsilon > 0$ un número real, un círculo de radio $r = 1$ y arcos A_i, B_i con $0 \leq i \leq n - 1$. Cada arco A_i tiene longitud $\frac{2\pi k}{n} + \epsilon$ y dibujan empezando en el punto $\frac{2\pi i}{n}$ y cada arco B_i tiene longitud $\frac{2\pi k}{n} - \epsilon$ y se dibujan empezando en el punto $\frac{2\pi i + \pi}{n}$



Teorema 3.1.8. ([53]) *Sea G un grafo arco-circular propio. Entonces G es un grafo arco-circular unitario si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido a $CI(n, k)$, para $n > 2k$ y n, k coprimos.*

Introduciremos los siguientes conceptos para demostrar el teorema 3.1.8.

Sea un grafo G con modelo arco-circular Γ . Supongamos que el perímetro del círculo es 1. Sean n, k, m, l enteros. Un *circuito* (n, k) de G es un subconjunto de n vértices, cuyos arcos correspondientes admiten un orden circular A_1, \dots, A_n , tal que los arcos consecutivos se intersecan, s_{i+1} es el extremo izquierdo que precede inmediatamente a t_i y k es la cantidad de vueltas que se da alrededor del círculo. Para contar el número de vueltas, empezaremos en el extremo antihorario de A_1 , pasando de A_1 a A_2 , de A_2 a A_3 y siguiendo así, cada vez que pasamos por el punto de inicio contaremos una vuelta. Similarmente, un *conjunto independiente* (m, l) de G es un subconjunto de m vértices, cuyos arcos correspondientes admiten un orden circular A_1, \dots, A_m , donde los arcos consecutivos son disjuntos, s_{i+1} el cual antecede inmediatamente a t_i y l se define

análogamente. En esta sección, al circuito lo notaremos C , mientras que al conjunto independiente lo notaremos como I .

Un circuito (n, k) es *minimal* si no contiene circuitos (n', k') donde $\frac{n'}{k'} < \frac{n}{k}$, y $k, k' > 0$. Similarmente, se define un conjunto independiente (m, l) *maximal*.

Lema 3.1.7. ([53]) *Sea G un grafo arco-circular propio y Γ un modelo arco-circular propio para G . Entonces, para cada circuito (n, k) y conjunto independiente (m, l) , tenemos que $m/l \leq n/k$. Si $m/l = n/k$, entonces C e I no tienen vértices en común.*

Lema 3.1.8. ([53]) *Sea G un grafo arco-circular propio. Para cada n, k coprimos con $n > 2k$, G contiene un circuito (n, k) minimal y un conjunto independiente (m, l) maximal (con respecto a cualquier modelo arco-circular propio), si y sólo si G contiene el subgrafo $CI(n, k)$. Para $n < 2k$, o n, k no coprimos, ningún conjunto independiente maximal existe.*

A continuación se demostrará el teorema 3.1.8.

Demostración. \Rightarrow) Sea $CI(n, k)$ el grafo como lo definimos al comienzo de la sección. Supongamos que $CI(n, k)$ tiene una representación arco-circular unitaria. Como los arcos A_i intersecan a A_{i-1}, A_{i+1} se tiene que $\sum_{i=0}^{n-1} |A_i| = n|A_0| \geq 2\pi$, mientras que los arcos $|B_i|$ son disjuntos, por lo que debe suceder que $\sum_{i=0}^{n-1} |B_i| = n|B_0| < 2\pi$. Luego $|B_0| < 2\pi \leq |A_0|$, llegando a un absurdo.

\Leftarrow) Sea Γ un modelo arco-circular propio podemos tomar Γ un modelo normal por el teorema 3.1.1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los $2|V|$ extremos de los $|V|$ arcos son distintos, ya que podemos modificar los arcos en ϵ sin causar problemas. Sea $t = \min(n/k)$ sobre todos los circuitos (n, k) de G con respecto a Γ , y sea $r = \max(m, l)$ sobre todos los conjuntos independientes (m, l) de G con respecto a Γ . Sea $s = \frac{(r+t)}{2}$. Modificando el modelo Γ de ser necesario, podemos tomar un círculo con circunferencia s . Como G no contiene $CI(n, k)$, por el lema anterior, $r < s < t$. Veamos que podemos transformar los arcos en arcos con longitud = 1.

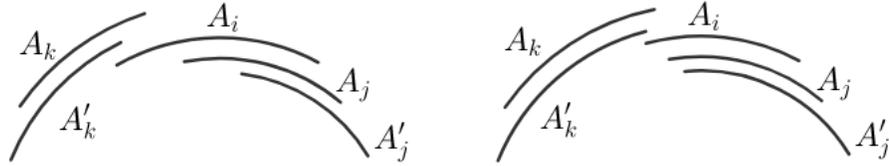
Supongamos que $|A_i| > 1$. Dejaremos fijo los demás arcos y acortaremos los extremos de A_i hasta:

(a) A_i tiene un extremo en común con otro arco A_j (ya sea en sentido horario o antihorario).

(b) Se pierde una intersección previa con otro arco A_k .

En el caso (a), como $|A_i| > 1$, entonces $|A_j| > 1$, ya que estamos asumiendo que el grafo es arco-circular propio, por lo que podemos acortar los extremos de A_j , sin embargo, estamos creando nuevamente el caso (a) o (b) para algún A'_j . En el caso (b),

asumamos que la intersección que se pierde sucede en el extremo, en sentido horario, de A_i . Extendemos el arco A_k en sentido antihorario para mantener la intersección con A_i . Sin embargo, si $|A_k| = 1$, entonces movemos todo el arco en sentido antihorario hacia el punto medio de A_i . Este movimiento puede causar nuevamente los casos (a) y (b), sin embargo es fácil ver que lo podemos realizar sin crear nuevas intersecciones, ya que todos los puntos extremos son distintos. Observemos que puede ocurrir un 'apilamiento' de puntos extremos de los arcos. En la siguiente figura los casos (a) y (b) en la izquierda, y el 'apilamiento' una vez acortado A_i , en la derecha



Es claro que los movimientos que involucran acortar los arcos siempre se pueden realizar, sin embargo, en el caso (b), puede ocurrir que un arco del tipo A_k que sea unitario no pueda moverse en una dirección, digamos en sentido antihorario, esto ocurre cuando dicho arco ya fue movido en sentido horario. Luego, A_i y los arcos A_k recorridos en sentido horario forman un circuito (n, k) . Tal circuito necesita que la circunferencia del círculo sea $\leq n/k$. Los posibles 'apilamientos' de los A_k 's y A_j 's pueden ser reducidos en ϵ , como $n/k \geq t > s$, entonces $n/k - \epsilon > s$. Por lo que estas alteraciones siempre se pueden realizar.

Supongamos que queremos extender el arco A_i , mientras fijamos los demás arcos. Los problemas que aparecen son los siguientes:

(a) A_i tiene un extremo en común con otro arco A_j (ya sea en sentido horario o antihorario).

(b) Sea crea una nueva intersección con otro arco A_k .

En el caso (a), como $|A_i| < 1$, entonces $|A_j| < 1$, ya que de lo contrario el modelo no sería propio. Luego, podemos iterar sobre A_j creando el caso (a) o (b). En el caso (b) asumamos que la intersección se crea en el extremo en sentido horario de A_i . En este caso vamos a acortar A_k para evitar esta intersección. En el caso en que $|A_k| = 1$, vamos a mover todo el arco en sentido horario. Nuevamente, este último movimiento, puede crear los casos (a) o (b). El argumento sigue análogamente al caso anterior, usando un conjunto independiente (m, l) en el caso (b).

□

Como ya mencionamos, los grafos arco-circulares pueden aplicarse al control de tránsito. Los grafos arco-circulares unitarios aparecen naturalmente en este problema cuando todos los semáforos de las esquinas tienen la misma duración.

El primer algoritmo de reconocimiento de los grafos arco-circulares unitarios en tiempo polinomial fue presentado en [14], su complejidad es de $O(n^2)$ donde n es el número de vértices del grafo. Un algoritmo de reconocimiento en tiempo $O(n)$ fue presentado en [36].

3.2. Grafos arco-circular Helly

Recordemos que los grafos arco-circular Helly son aquellos grafos arco-circular que admite un modelo cuyos arcos satisfacen la propiedad de Helly. Debido a que los grafos de intervalo satisfacen la propiedad de Helly, los grafos arco-circular Helly son los más cercanos a los grafos de intervalos.

La primera caracterización para esta clase fue dado por Gavril [18]. En dicho paper se muestra que los grafos arco-circular Helly surgen de los grafos de intervalo, extendiendo el orden lineal de la matriz cliques a uno circular.

La generalización del teorema 2.0.4 hacia los grafos arco-circular Helly es la siguiente.

Teorema 3.2.1. ([18]) *Un grafo G es arco-circular Helly si y sólo si su matriz de cliques tiene la propiedad de unos circular consecutivos por columnas.*

Demostración. \Rightarrow)

Sea G un grafo arco-circular Helly. Sean $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ el conjunto de k cliques de G y sea $\Gamma = \{A_v\}_{v \in V}$ el modelo de arcos para G donde el arco A_v representa al vértice v . Para cada clique Q_j consideremos

$$B_j = \bigcap_{v \in Q_j} A_v$$

Es evidente que $B_j \neq \emptyset$ y que $B_j \cap B_i = \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$, debido a que los Q_j son cliques.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los arcos B_1, B_2, \dots, B_k aparecen circularmente consecutivos. Para cada $1 \leq j \leq k$ tenemos que $Q_j = \{v \mid B_j \subseteq A_v\}$. Luego, como cada A_v contiene arcos circularmente consecutivos y usando que $B_j \subseteq A_{v_i}$ si y sólo si $v_i \in Q_j$ se sigue que los unos de la columna j de la matriz de cliques de G aparecen circularmente consecutivos.

\Leftarrow) Supongamos que la matriz de cliques de G verifica la propiedad de unos consecutivos por columnas. Nuevamente, sea $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ el conjunto de k cliques del grafo. Coloquemos k puntos p_1, p_2, \dots, p_k en un círculo en sentido horario. Vamos a construir un modelo para G de la siguiente forma.

Para cada $1 \leq i \leq n$ consideremos la columna i de la matriz de cliques, y tomaremos las filas m y l tal que si en la columna se empieza por la fila m y se recorre circularmente hasta la fila l los unos aparecen de manera consecutivas.

El arco para el vértice v_i se define de la siguiente manera.

Si $m \neq 1$ entonces $A_i = (p_{m-1}, p_l)$.

Si $m = 1$ entonces $A_i = (p_k, p_l)$.

Si dicha columna contiene todos unos, entonces $A_i = (p_k, p_k)$.

Si un arco A_i es de la forma (p_s, p_t) se dibuja el arco empezando en el punto p_s y recorriendo el círculo en sentido horario, se llega al punto p_t .

De esta forma se tiene que v_i es adyacente a v_j si y sólo si existe r con $1 \leq r \leq k$ tal que $v_i, v_j \in A_r$, y por construcción esto vale si y sólo si $A_i \cap A_j \supseteq (r-1, r) \neq \emptyset$. Por lo tanto, G es un grafo arco-circular.

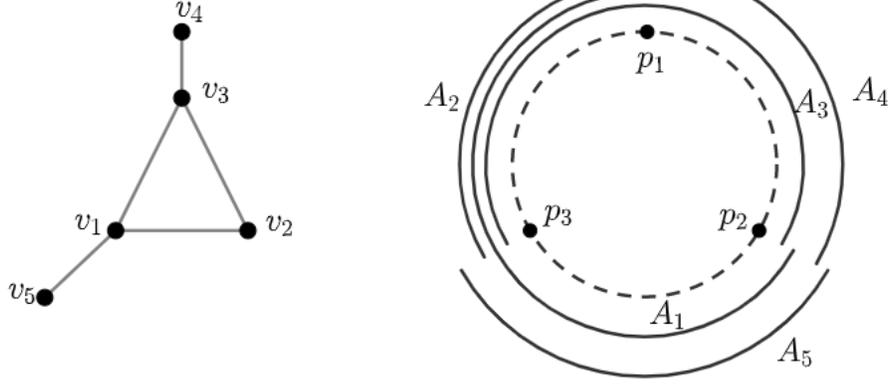
Por construcción, para cada $1 \leq j \leq k$

$$\bigcap_{v \in Q_j} A_v = (j-1, j)$$

Consideremos un subconjunto de arcos que construimos tal que son no disjuntos dos a dos, los vértices correspondientes son adyacentes dos a dos, es decir, forman un completo. Luego existe un clique que contenga dichos vértices y utilizando lo anterior, la intersección del subconjunto está incluido en un arco, por lo tanto es no vacío y el grafo es Helly.

□

La siguiente imagen es un ejemplo de como se construye dicho modelo para un grafo HCA según el teorema anterior. Tomando $Q_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $Q_2 = \{v_3, v_4\}$ y $Q_3 = \{v_1, v_5\}$



Esta caracterización nos conduce a un algoritmo de reconocimiento para los grafos arco-circular Helly con complejidad $O(n^3)$.

Otra caracterización para los grafos arco-circular Helly, dentro de la clase de grafos arco-circulares, fue presentado en [28, 37], ambas caracterizaciones son similares. A continuación seguiremos el texto [37].

Si tenemos un modelo arco-circular Γ donde $A = (s, t)$ es un arco de Γ , entonces el complemento del modelo $\bar{\Gamma}$ se define con los arcos $\bar{A} = (t, s)$.

Teorema 3.2.2. ([28, 37]) *Sea Γ un modelo arco-circular, entonces Γ es arco-circular Helly si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si tres arcos de Γ cubren el círculo entonces dos de ellos también lo cubren.*
2. *El grafo intersección de $\bar{\Gamma}$ es cordal.*

Demostración. (\Rightarrow)

(1) Es claro que vale, de lo contrario no sería Helly.

Si no valiese (2), el grafo intersección de (C, A) induce un C_n , con $n \geq 4$. Sea $\bar{A}' \subseteq \bar{A}$ el conjunto de arcos correspondientes a C_n . Observemos que si dos arcos de \bar{A}' cubriesen C , entonces C_n debería tener una cuerda. Luego, los arcos de \bar{A}' están circularmente ordenados.

Para llegar al absurdo, vamos a ver que \bar{A} no es Helly, para eso es suficiente ver que \bar{A}' no es Helly.

Sean $\bar{A}_i = (s_i, t_i)$, $\bar{A}_j = (s_j, t_j)$ tales que $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j = \emptyset$, podemos tomar $p \in (t_i, s_j)$ que no está en \bar{A}_i ni en \bar{A}_j , por lo que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Por otro lado, si $\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \neq \emptyset$ no pueden cubrir el arco por completo, por lo que razonando de la misma forma, podemos encontrar un punto p que no esté en \bar{A}_i ni en \bar{A}_j , luego $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Para concluir que A' no es Helly basta ver que no puede suceder que $\cap A_i \neq \emptyset$. Si $p \in A_i$ $1 \leq i \leq n$, entonces $p \notin \overline{A_i}$ por lo que $\overline{A'}$ no cubre el círculo, lo cual es un absurdo ya que $\overline{A'}$ no podría inducir un C_n . Por lo tanto vale (2)

(\Leftarrow) Es análogo. \square

Definición 3.2.1. Sea un modelo (C, A) , decimos que $A' \subseteq A$ es una subfamilia minimal no-Helly si A' no es Helly y si además $A' \setminus A_i$ es Helly $\forall A_i \in A'$. En cuyo caso, decimos que el modelo (C, A') es minimal no HCA.

Corolario 3.2.1. Sea Γ un modelo minimal no HCA entonces se cumple las siguientes condiciones

1. Los arcos de Γ se intersecan dos a dos y Γ cubre el círculo
2. Dos arcos de Γ cubren el círculo cuando no son consecutivos en el orden circular de Γ .

Demostración. Es claro que Γ tiene que cubrir el círculo, ya que de lo contrario tendríamos un modelo de grafos de intervalos, el cual es Helly y si existiesen dos arcos de Γ que no se interseca, este modelo no es minimal. Luego, se cumple (1).

Supongamos que $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y que dos arcos consecutivos cubren el círculo, entonces por el teorema anterior el grafo con modelo $\overline{\Gamma}$ induce un C_k con $k \geq 4$. Es claro que no puede existir un arco A distinto de los arcos A_i , ya que de lo contrario Γ no sería minimal. Luego $\overline{\Gamma}$ es un C_k , rotulando los vértices para que queden consecutivos, obtenemos que se cumple (2). \square

Recordemos que para un modelo arco-circular podemos tomar un arco de la forma (s, t) , donde s es el punto de la izquierda y t el punto de la derecha. Dado R , una secuencia consecutiva maximal de puntos izquierda o bien puntos derecha, se definen $SIGUIENTE(R)$ y $ANTERIOR(R)$ como las secuencias consecutivas maximales que le precede y antecede.

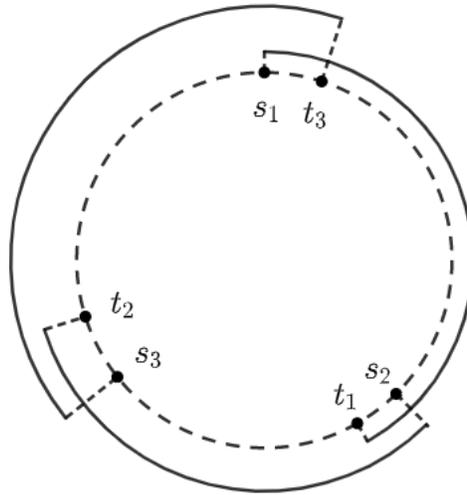
Dado un punto p denotamos $SECUENCIA(p)$ a la secuencia consecutiva maximal que contiene al punto p .

Sean s_i un punto a izquierda de un modelo de arcos Γ y $S = SECUENCIA(s_i)$, decimos que s_i es estable si para todo $t_j \in ANTERIOR(S)$ sucede que $i = j$ o $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Sean t_i un punto a izquierda de un modelo de arcos Γ y $T = SECUENCIA(t_j)$, decimos que t_j es estable si para todo $s_i \in SIGUIENTE(T)$ sucede que $i = j$ o $A_i \cap A_j = \emptyset$.

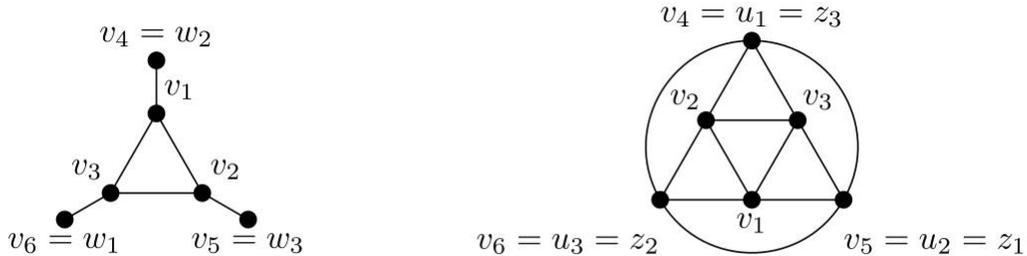
Definición 3.2.2. Decimos que un modelo Γ es estable cuando todos los puntos a izquierda o a derecha son estables.

La siguiente figura muestra un modelo no estable ya que $S = SECUENCIA(s_1) = \{s_1\}$ y $T = SIGUIENTE(S) = \{t_3\}$, se tiene que los subíndices son distintos y $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$



Definición 3.2.3. Un grafo G es un *obstáculo* si G contiene un clique $Q = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$, tal que para cada $i = 1, 2, \dots, n$ (considerando el subíndice $n + 1$ como 1) se cumple al menos de una de las siguientes condiciones.

1. $N(w_i) \cap Q = Q \setminus \{v_i, v_{i+1}\}$, para algún $w_i \in V(G) \setminus Q$
2. $N(u_i) \cap Q = Q \setminus \{v_i\}$ y $N(z_i) \cap Q = Q \setminus \{v_{i+1}\}$ para algún par de vértices adyacentes $u_i, z_i \in V(G) \setminus Q$



Teorema 3.2.3. ([28, 37]) Sea G un grafo arco-circular, son equivalentes:

1. G es arco-circular Helly.
2. G no contiene obstáculos como subgrafos inducidos.
3. Todos los modelos estables de G son arco-circular Helly.

Demostración. (1) \Rightarrow (2)

Supongamos que G es un grafo arco-circular Helly que contiene un obstáculo H , y sea $Q_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una clique de H . Por hipótesis, existe un orden circular de los vértices v_i tal que satisfacen las condiciones (1) y (2) de la definición de obstáculo, y sea A_i el arco correspondiente a v_i con $1 \leq i \leq n$.

Definamos las cliques C_i en H para cada $1 \leq i \leq n$ de la siguiente forma

Si se cumple la condición (1), $C_i \supseteq \{w_i\} \cup Q_n \setminus \{v_i, v_{i+1}\}$.

Si se cumple la condición (2), $C_i \supseteq \{u_i, z_i\} \cup Q_n \setminus \{v_i, v_{i+1}\}$.

Es evidente que $C_i \neq C_j$ si $i \neq j$, ya que cada clique C_i contiene distintos subconjuntos de Q .

Para cada clique C_i consideremos

$$B_i = \bigcap_{v \in C_i} A_v$$

Como H es un grafo arco-circular Helly, cada B_i es distinto de vacío y además B_1, B_2, \dots, B_n son disjuntos y están ordenados circularmente. Por construcción, es fácil ver que

$$B_j \subseteq A_i \iff j \neq i - 1, i$$

Por hipótesis, como $n \geq 3$, dicho j existe.

Si definimos

$$B = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$$

Se sigue que B es distinto de todos los B_i , por lo que existe i con $1 \leq i \leq n$ tal que B se encuentra entre B_{i-1} y B_i , sin embargo esto no puede ocurrir ya que existe j distinto de $i - 1, i$ tal que $B_j \subseteq A_i$, además $B \subseteq A_i$, sin embargo $B_{i-1}, B_i \not\subseteq A_i$. Esto es un absurdo y por lo tanto se verifica (2).

(2) \Rightarrow (3)

Supongamos por hipótesis que G no contiene ningún obstáculo, nuevamente por el absurdo vamos a suponer que G tiene un modelo estable que no es HCA.

Sea $\Gamma' \subseteq \Gamma$ un subconjunto minimal no Helly.

Sea A_1, A_2, \dots, A_n los arcos correspondientes a Γ' y v_1, v_2, \dots, v_n los vértices correspondientes a los arcos.

Sean A_i, A_{i+1} arcos consecutivos, por el corolario no cubren el círculo. Definamos $T = \text{SECUENCIA}(t_{i+1})$ y $S = \text{SECUENCIA}(s_i)$ y como el modelo Γ es estable, $S \neq \text{SIGUIENTE}(T)$, ya que de lo contrario, los arcos A_i y A_{i+1} no se intersecan.

Utilizando esto podemos tomar $s_z \in \text{SIGUIENTE}(T)$ y $t_u \in \text{ANTERIOR}(S)$ tal que $A_z \cap A_i = \emptyset$ y $A_u \cap A_{u+1} = \emptyset$ por la estabilidad. Podemos asumir $z \neq u$, ya que de lo contrario el grafo no sería conexo.

Como el modelo Γ' cubre todo el círculo por el corolario anterior, entonces existe $j \neq i, i+1$ tal que $s_z, t_u \in A_j$.

Sean z_i y u_i los vértices correspondientes a los arcos A_z y A_u .

Caso 1: Supongamos que z_i no es adyacente a v_i , o que u_i no es adyacente a v_{i+1} , entonces se sigue que $N(w_i) \cap Q = Q \setminus \{v_i, v_{i+1}\}$, donde w_i es z_i en el primer caso y u_i en el segundo. Luego, se verifica la primera condición por lo que G contiene un obstáculo.

Caso 2: Supongamos que z_i es adyacente a v_i y que u_i es adyacente a v_{i+1} , es fácil ver que z_i y u_i tiene que ser adyacentes, por lo tanto se sigue que $N(z_i) \cap Q = Q \setminus \{v_{i+1}\}$ y $N(u_i) \cap Q = Q \setminus \{v_i\}$. Luego, se verifica la segunda condición por lo que G contiene un obstáculo.

Como ninguno de los dos casos puede ocurrir se llega a un absurdo, por lo que todos los modelos estables de G son HCA.

(3) \Rightarrow (1)

Es evidente. □

Utilizando esta caracterización, en ([37]) se presenta un algoritmo de reconocimiento lineal para los grafos arco-circular Helly. Esta clase de grafos puede ser reconocido en $O(n + m)$.

Sumaremos a esta sección una caracterización de los grafos clique-Helly [48]. Para esto necesitaremos introducir el concepto de triángulo extendido. Dado un grafo G y

un triángulo T de G , se define el triángulo extendido T' de G , relativo a T , al subgrafo inducido en G por el conjunto formado por todos los vértices adyacentes a al menos dos de los vértices de T .

Teorema 3.2.4. ([48]) *Un grafo G es clique-Helly si y sólo si todos sus triángulos extendidos contienen un vértice universal.*

Demostración. Sea T un triángulo de G .

\Rightarrow) Supongamos por el absurdo que el triángulo extendido T' , relativo a T , no contiene ningún vértice universal. Sea $Q = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ el conjunto de cliques de G . Se sigue que $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$, sin embargo como no tenemos un vértice universal, la intersección de todos los Q_i es vacía. En consecuencia, G no es clique-Helly, absurdo.

\Leftarrow) Por hipótesis, todos los triángulos extendidos T' de G contienen un vértice universal. Supongamos que G no es clique-Helly. Sea Q el conjunto minimal de cliques Q_i de G no disjuntos dos a dos, con ningún vértice en común. Por la minimalidad de Q , existe un triángulo T con vértices v_1, v_2, v_3 tal que v_i es un vértice común de $Q \setminus Q_i$, $1 \leq i \leq 3$. El triángulo extendido T' de G contiene un vértice universal. Esto nos conduce a un vértice común en Q , lo cual es una contradicción. □

Dicha caracterización nos conduce a un algoritmo de reconocimiento en tiempo polinomial. Sumado al algoritmo para reconocer los grafos arco-circulares propuesto por McConnell [39], obtenemos un algoritmo para reconocer los grafos arco-circular clique-Helly.

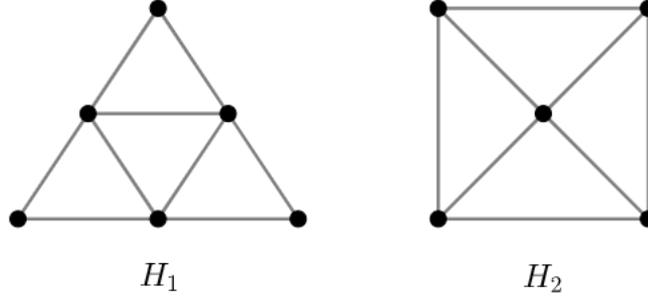
Las siguientes dos secciones estudiaremos otras clases de grafos arco-circulares.

Es bastante natural considerar los grafos que son simultáneamente PCA, UCA y HCA. Sin embargo como es claro que $UCA \subseteq PCA$, sólo tenemos que considerar los grafos que son simultáneamente PCA y HCA; y UCA y HCA.

3.3. Grafos arco-circular Helly propios y unitarios

Un grafo G es un grafo arco-circular Helly propio (PHCA) si G admite un modelo arco-circular que sea propio y Helly simultáneamente. En [12] se probó que dicha clase es una subclase propia de la intersección entre las clases PCA y HCA. Seguiremos el texto [38] para caracterizar a esta clase por medio de subgrafos inducidos prohibidos.

En dicha caracterización utilizaremos los siguientes dos grafos.



Definición 3.3.1. Dado un grafo G , notamos G_1 al grafo que se obtiene al remover todos los vértices universales de G excepto uno, y G_0 al grafo que se obtiene al remover todos los vértices universales.

Definición 3.3.2. Sea G un grafo, decimos que v y w son gemelos en G si $N[v] = N[w]$

Lema 3.3.1. ([38]) Sean v y w gemelos en un grafo G Entonces G es PCA (UCA) (HCA) (intervalo propio) si y sólo si $G \setminus \{v\}$ es PCA (UCA) (HCA) (intervalo propio).

Demostración. \Rightarrow) Es evidente.

\Leftarrow) Sean G un grafo de alguna clase de las hipótesis y $A_w = (s, t)$ el arco correspondiente a w . Es claro que agregando el arco $(s + \epsilon, t + \epsilon)$ el grafo sigue en la clase respectiva. \square

A continuación se demuestra la caracterización de los grafos arco-circular Helly propios por subgrafos inducidos prohibidos dentro de la clase de grafos arco-circulares propios.

Teorema 3.3.1. ([38]) Sea G un grafo arco-circular propio, son equivalentes:

1. G es arco-circular Helly propio
2. G no contiene a H_1 ni a H_2 como subgrafos inducidos
3. G_1 es un grafo arco-circular Helly o G_0 es un grafo de intervalos

Demostración. (1) \Rightarrow (2)

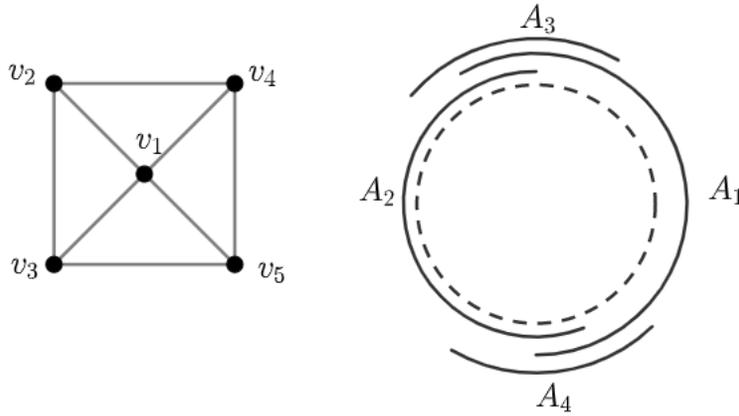
Es suficiente ver que un H_2 no es PHCA. Si lo fuese, en particular sería Helly, y como induce un $K_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$, dos de los arcos de dicho K_3 deben cubrir por completo el círculo. Sean A_i el arco correspondiente al vértice v_i del H_2 con $1 \leq i \leq 5$.

Es claro que el A_1 debe ser uno de los dos arcos que cubren por completo el círculo, ya que de lo contrario no sería propio.

Si pérdida de generalidad asumamos que $A_1 \cup A_2$ cubren el círculo. Como v_3 es adyacente a v_1 y a v_2 , entonces $A_3 \cap A_1 \neq \emptyset$ y $A_3 \cap A_2 \neq \emptyset$. De la misma forma, v_4 es adyacente a v_1 y a v_2 , entonces $A_4 \cap A_1 \neq \emptyset$ y $A_4 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Sin embargo, como v_3 y v_4 no son adyacentes los arcos A_3 y A_4 son disjuntos

Como v_5 es adyacente a v_1 y a v_3 entonces A_5 debe intersectarse con A_1 y con A_3 , pero no con A_2 , luego $A_5 \subset A_1$, ya que de lo contrario existiria $p \in A_5$ tal que $p \notin A_1$ y esto implica que $p \in A_2$. Por lo tanto, se llega al absurdo al no ser propio.



(2) \Rightarrow (3)

Supongamos que G_1 no es HCA, como G es PCA entonces por el lema 3.3.1 G_1 es PCA, luego existen 3 arcos A_1, A_2 y A_3 que cubren el círculo, sin embargo dos arcos no pueden cubrir el círculo ya que G_1 tiene un vértice universal, ya que de lo contrario habrían al menos dos vértices universales.

Coloquemos los arcos A_1, A_2 y A_3 sobre el círculo en sentido horario, cubriendo dicho círculo.

Veamos que unos de los vértices A_i tiene que representar al vértice universal. Supongamos lo contrario. Sea v_i el vértice correspondiente a A_i Como los vértices v_i forman un K_3 y por lo tanto tendríamos tres vértices universales, así que debe existir w_1 adyacente a algún v_i , sin pérdida de generalidad, supongamos que w_1 es adyacente a v_2 , y además tiene que ser adyacente a otro vértice, de lo contrario no sería propio, digamos v_3 . Observemos que los vértices v_1 y v_3 resultan universales. Razonando de esta forma se concluye que existen 3 vértices w_i tal que w_i es adyacente a v_j y v_k con $j, k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Si los w_i no son adyacentes dos a dos, se obtiene un H_1 , y si al menos dos de dichos arcos son adyacentes, tenemos un H_2 .

Por lo tanto, existe un v_i que es universal. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es v_1 .

Afirmo que $G \setminus v_1$ es un grafo de intervalos. Para ver ésto separemos en dos casos.

Caso 1: Supongamos que existe un arco B tal que al remover A_1 los arcos B, A_2, A_3 cubren el círculo. Como v_1 es el único vértice universal de G_1 , entonces los tres arcos no son universales, razonando igual que arriba se concluye que G induce un H_1 o un H_2 .

Caso 2: Supongamos que existen dos arcos B_1 y B_2 tal que al remover A_1 los arcos B_1, B_2, A_2, A_3 cubren el círculo, podemos suponer que estos arcos están colocados en sentido horario, podemos suponer que $B_2 \cap A_3 = \emptyset$ y $B_1 \cap A_2 = \emptyset$, ya que de lo contrario estaríamos en el caso 1. Si w_i es el vértice correspondiente al arco B_i es fácil ver que los vértices v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 forman un H_2 .

Utilizando que el grafo G_1 es PCA, los dos casos son los únicos escenarios posibles a analizar. Se sigue que $G \setminus \{v_1\}$ es de intervalo.

(3) \Rightarrow (1)

Supongamos que G_1 es HCA, entonces usando el lema 3.3.1 podemos agregar todos los vértices universales obteniendo G , luego el grafo G es HCA y por hipótesis es PCA, luego G es PHCA.

Ahora supongamos que G_0 es de intervalo, luego es HCA y como G es PCA se sigue que G_0 es PCA, es decir es de intervalos propio.

Caso 1: Supongamos que G_0 es conexo, tomamos t_l el primer extremo y s_r el último primer extremo. Podemos colocar el arco $I := (t_l - \epsilon, s_r + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Es claro que dicho arco es universal y además el modelo sigue siendo propio.

Si no lo fuese, podríamos tomar $A_i \subset I$. Es claro que $(v_i, v_r) \notin E$ y $(v_i, v_s) \notin E$. Como G_0 es conexo podemos tomar un camino P_n de v_i a v_r con $n \geq 2$.

Si consideramos el subgrafo inducido por los vértices $V(P_n) \cup \{v\} \cup \{v_s\}$, donde v es el vértice universal agregado, se sigue que no es propio.

Usando el lema 3.3.1, podemos agregar los vértices universales hasta obtener G , luego es PHCA.

Caso 2: Supongamos que G_0 tiene dos componentes conexas, recorriendo el círculo

en sentido horario, podemos agregar el arco $I := (s_r + \epsilon, t_l - \epsilon)$ tal que sea universal y siga siendo propio, nuevamente, podemos suponer por el absurdo, tomar v_i en una componente conexa, como éste es conexo, podemos tomar P_n de v_r a v_i con $n \geq 2$, sumando que el vértice v es universal, se llega al absurdo de la misma manera.

Caso 3: Es claro que G_0 no puede tener más de dos componentes conexas, ya que al agregar un vértice universal, obtendríamos que no es propio. \square

De manera similar a los grafos arco-circulares propios Helly, podemos caracterizar con el siguiente teorema a los grafos arco-circulares unitarios Helly, cuya demostración será omitida ya que es similar a la anterior.

Teorema 3.3.2. ([38]) *Sea G un grafo arco-circular unitario, son equivalentes*

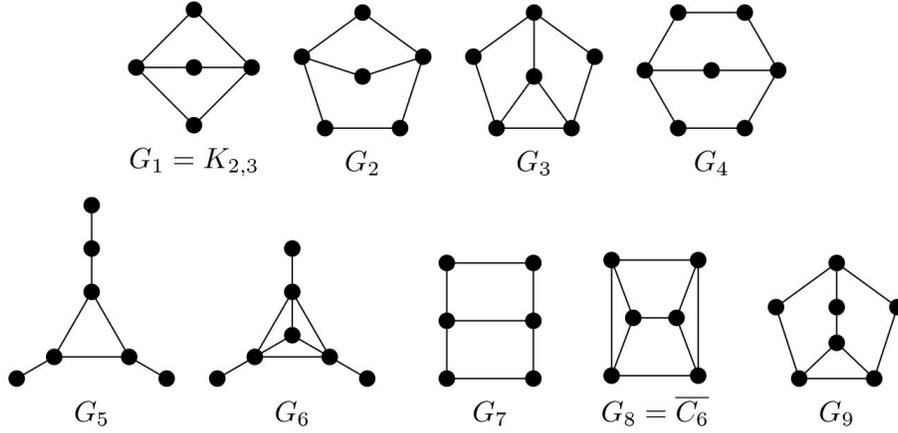
1. G es un grafo arco-circular Helly unitario
2. G no contiene ningún H_2 como subgrafo inducido
3. G_1 es arco-circular Helly o G_0 es un grafo de intervalos.

Con estas caracterizaciones, ambas clases pueden ser caracterizadas mediante una lista de subgrafos prohibidos. Si agregamos el grafo H_1 a la lista de subgrafos inducidos para grafos PCA, obtenemos la caracterización para los grafos PCHA. De manera similar, agregar el H_2 a la lista para caracterizar los grafos UCA, obtenemos la caracterización de los grafos UCHA. Los algoritmos de reconocimiento tienen complejidad $O(n + m)$, sin embargo si el sabemos de antemano que el grafo es un grafo arco-circular propio, la complejidad baja a $O(n)$.

3.4. Caracterizaciones parciales

El problema de caracterizar a los grafos arco-circulares mediante una lista de subgrafos minimales inducidos aún no se conoce, sin embargo existen algunos resultados parciales en esta dirección [3]. Demostraremos dos de los cuatro teoremas en profundidad.

En esta sección utilizaremos los siguientes grafos.



Definición 3.4.1. Se define un grafo semicircular como los grafos arco-circulares donde los arcos de su modelo son semicirculares.

Es claro que los grafos semicirculares son grafos arco-circulares unitarios.

Definición 3.4.2. Dados dos grafos G y H tal que $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, definimos la unión disjunta $G \cup H$ como el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) \cup V(H)$ y el conjunto de aristas $E(G) \cup E(H)$.

Si t es un número no negativo, definimos tG como la unión disjunta de t copias de G .

Definición 3.4.3. G es un aumentado de H si G es isomorfo a H , o si G puede ser obtenido a partir de H agregando vértices universales.

En la sección presente usaremos el siguiente resultado de cografos.

Teorema 3.4.1. Sea G un cografo, entonces G no es conexo o \overline{G} no es conexo

Demostración. Supongamos que G es un grafo tal que G y \overline{G} es conexo. Supongamos que G tiene la menor cantidad de vértices posibles que verifica esto, de lo contrario, podemos tomar un conjunto de vértices X minimal tal que el subgrafo inducido por los vértices de X en G y en \overline{G} sean conexos.

Intercambiando roles de ser necesario, podemos tomar $v \in V(G)$ tal que $G \setminus v$ no sea conexo. Como \overline{G} es conexo, existe $x \in V(\overline{G})$ tal que $(x, v) \in E(\overline{G})$, por lo que $(x, v) \notin E(G)$.

Como $G \setminus v$ no es conexo, tiene al menos dos componentes conexas no vacías C_1 y C_2 , podemos suponer que $x \in C_1$. Sea $y \in C_2$, observar que existe la posibilidad de

$(v, y) \in E(G)$. El camino que une x con y tiene más de 4 vértices, luego G no es un cografo. \square

Comenzaremos caracterizando los grafos arco-circulares dentro de la clase de cografos.

Teorema 3.4.2. *Sea G un grafo, son equivalentes:*

1. G no contiene P_4 ni $3K_1$.
2. G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 0$.
3. G es un grafo semicircular.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que G no contiene ningún P_4 ni $3K_1$ como subgrafos inducidos. Si G tiene menos de dos vértices, entonces G es completo. Por lo que podemos asumir que G tiene al menos dos vértices. Por el teorema 3.4.1, como G es un cografo, entonces G no es conexo o bien \overline{G} no es conexo.

Supongamos que G no es conexo. Como G no contiene $3K_1$, necesariamente tiene que tener dos componentes, más aún, estas componentes son grafos completos, ya que de lo contrario es fácil ver que se induce un $3K_1$. Por lo que G es un múltiplo de $\overline{K_2}$.

Supongamos que \overline{G} no es conexo y sea H el subgrafo de G tal que los vértices de H forman una componente conexa en \overline{G} , a H le diremos anticomponente. Como H no contiene P_4 ni $3K_1$ y \overline{H} es conexo, entonces H es un grafo trivial o bien no conexo. En el segundo caso, por el mismo argumento de arriba H induce en G un múltiplo de $\overline{K_2}$. Sea s el número de anticomponentes de G que son triviales y t el número de anticomponentes de G que inducen en G un múltiplo de $\overline{K_2}$. Debido a que G es la unión de sus anticomponentes, G es la unión de un múltiplo de $\overline{tK_2}$ y un completo K_s . Equivalentemente, G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$. Finalmente como G es un múltiplo de éste grafo, se tiene que es un grafo arco-circular. Los detalles son análogos al del teorema 3.0.3.

(2) \Rightarrow (3) Supongamos que G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$. En particular, G es un múltiplo de $\overline{tK_2 \cup sK_1}$ con $s = 0$ o 1 . Veamos que $\overline{tK_2 \cup sK_1}$ es un grafo semicircular. Sean $\{p_i, p'_i\}, \{q_j, q'_j\}$ con $1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s$, puntos distintos y antipodales del círculo. Para cada $i = 1, \dots, t$, sean S_i^1, S_i^2 dos semicírculos abiertos con extremos en p_i, p'_i . De manera análoga, consideramos T_j con $j = 0, 1$ el semicírculo abierto con extremos en q_j, q'_j . Luego $\Gamma = \{S_1^1, S_1^2, \dots, S_t^1, S_t^2, T_1, \dots, T_s\}$ es un modelo semicircular para $\overline{tK_2 \cup sK_1}$.

(3) \Rightarrow (1). Supongamos que G es un grafo semicircular. Es claro que $3K_1$ no es semicircular, ya que no se pueden colocar 3 semicírculos disjuntos dos a dos. También

es fácil ver que P_4 no es semicircular, ya que si lo fuese, podemos tomar un modelo $\Gamma = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ de semicírculos donde S_i representa al vértice v_i en el grafo P_4 , asumiendo que v_i es adyacente a v_{i+1} para $i = 1, 2, 3$, vemos que los semicírculos S_1, S_3 son disjuntos y tienen los mismos extremos pues v_1, v_3 no son adyacentes. Como v_2 es adyacente a estos dos vértices, $S_1 \cap S_2$ y $S_2 \cap S_3$ son distintos de vacío. Es fácil ver que no hay forma de colocar S_4 tal que sólo tenga intersección con S_3 , llegando de esta forma a un absurdo. \square

Teorema 3.4.3. *Sea G un cografo que contiene un C_4 como subgrafo inducido, tal que todos sus subgrafos propios inducidos son grafos arco-circulares. Entonces se cumple una sólo de las siguientes condiciones:*

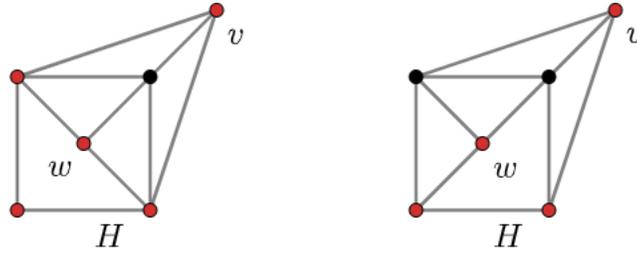
1. G es isomorfo a $K_{2,3}$ o C_4^*
2. G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 2$.

Demostración. Es claro que $K_{2,3}$ y C_4^* no son múltiplos aumentados de $\overline{tK_2}$ para ningún $t \geq 2$.

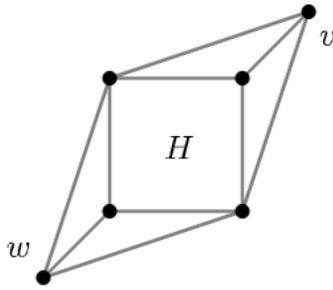
Supongamos que G no es isomorfo ni a $K_{2,3}$ ni a C_4^* . Por hipótesis, estos dos grafos no pueden ser subgrafos propios de G , ya que no son grafos arco-circulares.

Sea H el subgrafo inducido de G que es isomorfo a C_4 , podemos suponer que existe un vértice $v \in G \setminus H$, ya que de lo contrario G sería $C_4 = \overline{2K_2}$. Dicho vértice v tiene que ser adyacente a al menos un vértice de H , ya que de lo contrario G induciría un C_4^* . Además, v no puede ser adyacente a un sólo vértice de H , ya que induciría un $3K_1$, ni tampoco a sólo dos vértices, puesto que se induciría un P_4 , por lo que v tiene que ser adyacente a 3 o 4 vértices de H . Si v es adyacente a 3 vértices de H , denotaremos $C(v)$ al camino inducido por $N(v)$ en H .

Supongamos que existe otro vértice distinto de v , $w \in G \setminus H$. Si v es adyacente a 3 vértices de H y w a 4 vértices de H , es fácil ver que se induce un P_4 . Luego, v y w ambos deben ser adyacentes a 3 o 4 vértices de H . Analicemos el caso donde v y w son adyacentes a 3 vértices de G . Si $C(v) = C(w)$ o si un extremo de $C(v)$ es un vértice central de $C(w)$ es fácil ver que se llega a un absurdo. La siguiente figura muestra que los vértice inducen un $K_{2,3}$, en la izquierda, e inducen un P_4 , en la derecha.



Por lo que la única opción es que $C(v)$ y $C(w)$ sólo compartan extremos, como se detalla en la figura siguiente



Veamos que G no contiene ningún $3K_1$. Por el absurdo, supongamos que S es un subgrafo inducido de G que es isomorfo a $3K_1$. Supongamos que S y H tienen 2 vértices en común, entonces el vértice restante de S estaría en $G \setminus H$, y por lo que vimos tienen que ser adyacentes a 3 o 4 vértices de H , lo cual llevaría a que S no es isomorfo a $3K_1$, una contradicción. Tampoco pueden tener 1 vértice en común, ya que si lo tuviesen, los otros dos vértices de S tienen que ser adyacentes a los mismos 3 vértices de H , por lo anterior, es una contradicción. Se concluye así que S y H no tienen ningún vértice en común, por lo que los tres vértices de $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ están en $G \setminus H$. Luego, estos vértices tienen que ser adyacentes a 3 vértices de H o bien a 4 vértices de H . Si los tres vértices son adyacentes a exactamente tres vértices de H , es fácil ver $C(v_i) = C(v_j)$ o bien el vértice del medio de $C(v_i)$ es extremo de $C(v_j)$ con $i \neq j$. Y si los tres vértices v_i son adyacentes a los cuatro vértices de H es fácil ver que se induce un $K_{2,3}$ en G . Por lo tanto, se llega a un absurdo y G no contiene ningún $3K_1$ y como es un cografo, por el teorema 3.6.2, G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 0$. \square

Corolario 3.4.1. *Sea G un cografo. G es un grafo arco-circular si y sólo si G no induce G_1 ni C_4^**

Demostración. Sea G un grafo que no contiene un G_1 ni un C_4^* , supongamos por el absurdo que G no es un grafo arco-circular. Sin pérdida de generalidad supongamos que G es minimalmente no arco-circular, es decir que G no es arco-circular pero todo subgrafo propio inducido es arco-circular. Por ésto último, G no puede ser un grafo de intervalos y como no contiene un P_4 , necesariamente debe contener un C_4 .

Como G no es isomorfo a G_1 ni a C_4^* , por el teorema 3.4.3, G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 0$, y por el teorema 3.4.2, G es un grafo semicircular, en particular es un grafo arco-circular, lo cual es absurdo. \square

En segundo lugar, caracterizaremos los grafos arco-circulares dentro de la clase de grafos que no inducen ningún paw. Primero necesitaremos la siguiente definición.

Definición 3.4.4. G es un bloomed H si existe un subconjunto $W \subseteq V(G)$ tal que el subgrafo inducido por W es isomorfo a H y $V(G) \setminus W$ es vacío o bien induce en G una unión disjunta de grafos completos B_1, B_2, \dots, B_j , para algún $j \geq 1$, donde cada B_i es completo a algún vértice del grafo inducido por W , pero anticompleto a otro vértice del grafo inducido por W . Si cada vértice en W es completo a algún B_i , decimos que G es un fully bloomed H . Los grafos B_i se llamarán blooms. Un bloom trivial está compuesto por un sólo vértice.

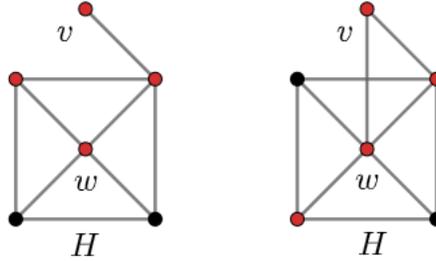
Teorema 3.4.4. *Sea G un grafo que no contiene un paw. Supongamos que G contiene un C_4 como subgrafo inducido tal que todos sus subgrafos propios inducidos son arco-circulares. Entonces se cumple al menos una de las siguientes condiciones:*

1. G es isomorfo a G_1, G_2, G_7 o C_4^*
2. G es un C_4 bloomed con blooms triviales.
3. G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 2$.

Demostración. Supongamos que G no es isomorfo a G_1, G_2, G_7 ni C_4^* , como todos los subgrafos propios de G son arco-circulares, entonces ninguno de estos grafos son subgrafos inducidos de G .

Por hipótesis, sea H el subgrafo isomorfo a C_4 , si $H = G$ no hay nada que probar, pues $C_4 = \overline{2K_2}$. Supongamos, entonces, que existe un vértice $v \in G \setminus H$, como G no contiene ningún C_4^* , v tiene que ser adyacente a al menos un vértice de H . Además, G no induce ningún paw, v no puede ser adyacente a 3 vértices de H ni a dos vértices de H adyacentes. Tampoco puede ser adyacentes a dos vértices de H no adyacentes, ya que de lo contrario se induciría un $K_{2,3}$. Luego, v es adyacente a exáctamente 1 vértice de H o bien a 4 vértices de H .

Supongamos que existe otro vértice distinto de $v, w \in G \setminus H$, y además, supongamos que v es adyacente a exactamente un vértice de H , mientras que w es adyacente a cuatro vértices de H . La siguiente figura que esto no puede suceder, en rojo se detalla el paw que se forma, analizando ambos casos cuando v y w son o no adyacentes.



Analizaremos primero el caso donde cada vértice de $G \setminus H$ es adyacente a exactamente un vértice de H . Veamos que $G \setminus H$ es un conjunto independiente. Por el absurdo, supongamos que existen dos vértices v y w en $G \setminus H$ que son adyacentes. La siguiente figura muestra, de izquierda a derecha, que se induce en G un paw, un G_7 y un G_2 . Llegando a una contradicción, $G \setminus H$ es un conjunto independiente. Por lo que G es un bloomed C_4 con blooms triviales.

Resta analizar el caso donde todos los vértices de $G \setminus H$ son adyacentes a exactamente cuatro vértices de H . Supongamos que $G \setminus H$ contiene un $3K_1$, entonces esos tres vértices junto con dos vértices no adyacentes de H inducen un $K_{2,3}$. Supongamos que $G \setminus H$ contiene un P_4 , entonces tres vértices no consecutivos de P_4 junto con cualquier vértice de H inducen un paw. Luego, $G \setminus H$ no contiene ningún P_4 ni $3K_1$. Sea S un subgrafo de G . Si S está en H o en $G \setminus H$ no puede contener ningún P_4 ni $3K_1$, ni ser isomorfo a ninguno de éstos por lo anterior. Si al menos un vértice de S está en H y otro vértice está en $G \setminus H$, \overline{S} no es conexo, pues los vértices de H son todos adyacentes a los cuatro vértices de $G \setminus H$. Como los complementos de P_4 ni $3K_1$ son conexos, estos grafos sólo pueden estar en H o en $G \setminus H$, lo cual vimos que no puede suceder. Por lo tanto G no contiene ningún P_4 ni $3K_1$ y por el teorema 3.4.2, G es un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún $t \geq 0$, y como G contiene un C_4 , $t \geq 2$. \square

Teorema 3.4.5. *Sea $j \geq 5$. Sea G un grafo que no contiene un paw. Supongamos que G contiene un C_j y que todos sus subgrafos propios inducidos son arco-circulares. Entonces, se cumple sólo una de las siguientes condiciones:*

1. G es isomorfo a G_2, G_4 o C_j^* .
2. G es un bloomed C_j con blooms triviales.

Demostración. Supongamos que G no es isomorfo a los grafos G_2, G_4 ni C_j^* . Nuevamente, como los subgrafos propios de G son arco-circulares por hipótesis, G no contiene ninguno de estos grafos como subgrafos inducidos. Más aún, G no contiene C_j^* con $j \geq 4$, ya que estos no son grafos arco-circulares. G no puede ser isomorfo a G_3 . Sea H el subgrafo de G que es isomorfo a C_j por lo que no es isomorfo a $K_{2,3}$. Si $G = H$ no hay nada que probar. En caso contrario, si v es un vértice de $G \setminus H$ entonces v es adyacente a todos los vértices de H o $N_H(v)$ induce un camino no vacío en H . Pero como H es isomorfo a C_j con $j \geq 5$, y G no contiene ningún paw, entonces todos los vértices de $G \setminus H$ tienen que ser adyacentes a exáctamente un vértice de H .

Probaremos que $G \setminus H$ es un conjunto independiente. Por el absurdo, supongamos que $v, w \in G \setminus H$ son adyacentes. Los vértices v y w no pueden ser adyacentes al mismo vértice de H , ya que de lo contrario se induce un paw, ni tampoco pueden ser adyacentes a dos vértices adyacentes en H , ya que se induciría un C_4^* . Por lo que podemos asumir que v y w son adyacentes a dos vértices de H no adyacentes

Sean P^1 y P^2 caminos que unen a los vecinos de v y w en H . Por hipótesis, P^1 y P^2 contienen al menos tres vértices, y al menos uno de ellos contiene cuatro vértices, ya que H es un ciclo con más de cinco vértices.

Como G no contiene ningún C_j^* , $j \geq 4$, cada camino P^1, P^2 tiene que tener a lo sumo cuatro vértices. Si los caminos tuviesen tres o cuatro vértices respectivamente, entonces los vértices $V(H) \cup \{v, w\}$ inducen un G_4 , una contradicción. Luego, cada camino tiene cuatro vértices, sin embargo, los vértices $V(H) \cup \{v, w\} \setminus N_H(v)$ induce un bipartite claw, una contradicción. Se concluye que $G \setminus H$ es un conjunto independiente de G , y por lo tanto cada vértice de $G \setminus H$ es adyacente a sólo un vértice de H , luego, G es un bloomed C_j con blooms triviales. \square

Corolario 3.4.2. *Sea un grafo G que no contiene un paw. Entonces G es un grafo arco-circular si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido a los grafos G_1, G_2, G_4, G_7 o $\{C_n^*\}_{n \geq 4}$ ni al grafo bipartite claw.*

Demostración. Supongamos que G es un grafo minimalmente no arco-circular, en particular no es de intervalos, por hipótesis no puede contener un bipartite claw, y como no contiene ningún paw, no puede contener n-net ($n \geq 2$), umbrella, ni n-tent ($n \geq 3$). Luego G contiene un C_n para algún $n \geq 4$. Es fácil ver que un bloomed C_n con blooms triviales es arco-circular.

Para el caso de que G sea un múltiplo aumentado de $\overline{tK_2}$ para algún t no negativo, la demostración de que G es arco-circular, fue realizada en el teorema 3.4.2. \square

En tercer lugar, caracterizaremos a los grafos arco-circular dentro de la clase de los grafos que son cografos y no inducen ningún claw ($K_{1,3}$), y por último lo haremos dentro de la clase de grafos sin diamantes.

Teorema 3.4.6. *Sea G un grafo cordal que no contiene un $K_{1,3}$ tal que todos sus subgrafos propios inducidos son arco-circulares. Entonces, se cumple sólo una de las siguientes condiciones:*

1. G es isomorfo a net^* , G_5 o G_6 .
2. G es un grafo arco-circular.

Corolario 3.4.3. *Sea G un grafo cordal que no induce un $K_{1,3}$. Entonces G es un grafo arco-circular si y sólo si G no contiene $tent^*$, net^* , G_5 o G_6 .*

Demostración. Supongamos que G es un grafo minimalmente no arco-circular que no contiene ninguno de esos grafos. En particular, G no puede ser un grafo de intervalos. Como G es cordal, entonces no puede contener C_n con $n \geq 3$. Y como G no contiene $K_{1,3}$, entonces tampoco puede contener bipartite claw, umbrella, n -tent ($n \geq 3$), ni n -tent ($n \geq 4$), por lo que G contiene al menos un tent o un net.

Caso 1: Supongamos que G contiene un tent, si G no es conexo, entonces induce un $tent^*$, mientras que si G es conexo, por el teorema 3.0.2, G es un múltiplo de un tent, y como vimos en el teorema 3.0.3, un múltiplo de un tent es un grafo arco-circular, lo cual es un absurdo.

Caso 2: Supongamos que G contiene un net, entonces por el teorema 3.4.6, G es isomorfo a net^* , G_5 o G_6 , en cualquier caso es un absurdo.

Por lo tanto, G es un grafo arco-circular □

Definición 3.4.5. Un agujero o hole es un ciclo inducido C_n con $n \geq 4$.

Teorema 3.4.7. *Sea G un grafo sin diamantes que contiene un agujero, tal que todos sus subgrafos propios inducidos son arco-circulares. Entonces, se cumple sólo una de las siguientes condiciones:*

1. G es isomorfo a $G_1, G_2, G_3, G_4, G_7, G_8, G_9$ o C_n^* para algún $n \geq 4$.
2. G es un grafo arco-circular.

Teorema 3.4.8. *Sea G un grafo cordal sin diamantes. Supongamos que G contiene un net y que todos sus subgrafos propios inducidos son arco-circulares. Entonces, se cumple sólo una de las siguientes condiciones:*

1. G es isomorfo a un net^* , G_5 o G_6
2. G is a fully bloomed triangle, y por lo tanto, es un grafo arco-circular.

Corolario 3.4.4. *Sea G un grafo que no induce un diamante. Entonces G es un grafo arco-circular si y sólo si G no induce bipartite claw, net^* , G_i con $1 \leq i \leq 9$ o $\{C_n^*\}_{n \geq 4}$.*

Demostración. Por el absurdo, supongamos sin pérdida de generalidad que G es un grafo minimalmente no arco-circular. En particular no es un grafo de intervalos. Por hipótesis, G no contiene un bipartite claw, y como no contiene diamantes, tampoco puede contener un umbrella, n -net con $n \geq 3$ ni n -tent con $n \geq 3$. Por lo tanto G debe contener un C_n con $n \geq 4$, es decir un agujero, o un net. Sin embargo no puede contener un hole, ya que por el teorema 3.4.7 se llega a un absurdo. Por otro lado, si G es cordal y contiene un net, contradice el teorema 3.4.8. Por lo tanto G es un grafo arco-circular. \square

3.5. Reconocimiento

3.5.1. Arco-circular

En la presente sección seguiremos el texto [39] y presentaremos un algoritmo de reconocimiento para grafos arco-circulares y las ideas detrás del algoritmo.

La idea fundamental consiste en construir una matriz que clasifique a los arcos según su tipo de intersección.

Definición 3.5.1. Sea G un grafo arco-circular y Γ un modelo para G . La matriz arco-circular del modelo Γ es una matriz T de $n \times n$ donde la entrada T_{ij} representa el tipo de intersección de los arcos A_i y A_j y se define de la siguiente forma:

1. Si el arco A_i contiene un sólo extremo del arco A_j , $T_{ij} = 1$.
2. Si los arcos A_i, A_j cubren el círculo y cada uno contiene ambos extremos del otro, $T_{ij} = 2$.
3. Si el arco A_i está contenido en el arco A_j , $T_{ij} = c$.
4. Si el arco A_i contiene al arco A_j , $T_{ij} = t$.
5. Si los arcos A_i, A_j no se intersecan, $T_{ij} = n$.

De esta definición podemos obtener una partición del grafo G , dado un modelo Γ , de la siguiente manera: G_1 y G_2 aquellos que verifican la condición (1) y (2) respectivamente, G_c los que verifican la condición (3) y (4), y G_n , la condición (5).

Una arista del grafo G_c puede ser distinguida, a su vez, mediante la siguiente clasificación:

- $D_c = \{(v_i, v_j) : \text{El arco } A_i \text{ está contenido en } A_j\}$.
- $D_c^t = \{(v_i, v_j) : \text{El arco } A_i \text{ contiene a } A_j\}$.

La herramienta que usaremos en estas matrices la llamaremos *flip*. Un *flip geométrico* en un vértice v , con arco $A = (s, t)$, consiste en reemplazar el arco A por el arco (t, s) . Esto genera los siguientes cambios si realizamos un flip en v_i .

- $(v_i, v_j) \in G_2$ se transforma en $(v_i, v_j) \in D_c$, y viceversa.
- $(v_i, v_j) \in G_n$ se transforma en $(v_i, v_j) \in D_c^t$, y viceversa.
- $(v_i, v_j) \in G_1$ se mantiene intacto.

Dado una matriz de intersección T , podemos computar la matriz de intersección T' que se obtiene de hacer un flip en un vértice v_i . T' sólo va a requerir renombrar algunas entradas de la fila y columna i . Llamaremos *flip algebraico* a este proceso.

Si T' pueden ser obtenido a partir de T mediante una sucesión de flips, diremos que T, T' son equivalentes. Una observación importante es que dado esta clase de equivalencia, ésta contiene una matriz de intervalos, ya que si tomamos un punto que no sea ningún extremo, podemos hacer flips sobre todos los arcos que contengan a ese punto, dando por resultado en un conjunto de arcos que no cubren el círculo.

Algoritmo para construir un modelo arco-circular:

- **Input:** Un grafo G .
 - **Output:** Determina si G es arco-circular.
 - **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$.
1. Encontrar una matriz de intersección T que pueda demostrarse que es realizada por algún modelo de G .
 2. Realizar flips algebraicos en T hasta obtener una matriz de intervalos T' .
 3. Encontrar un modelo de intervalos Γ' para T' .
 4. Invertir los flips usados para obtener T' de T , pero aplicarlos a Γ' mediante flips geométricos para obtener un modelo arco-circular Γ de T .

3.5.2. Arco-circular Helly, clique Helly y Helly propios

Empezaremos reconociendo los grafos arco-circular Helly, el cual se sigue del teorema 3.2.3.

Algoritmo de reconocimiento para grafos HCA

- **Input:** Un grafo G .
 - **Output:** Determina si G es un grafo HCA o no.
 - **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$.
1. Aplicar los algoritmos para decidir si G es un grafo arco-circular [39]. En caso afirmativo, construir un modelo Γ para G . Caso contrario, G no es HCA.
 2. Transformar Γ en un modelo estable.
 3. Verificar si Γ es un modelo HCA. En caso de ser afirmativo, G es un grafo HCA, y en caso contrario no.

Para el paso (1), podemos aplicar el algoritmo visto de McConnell [39], su complejidad es $O(n + m)$.

El siguiente paso será transformar el modelo obtenido a un modelo estable. La idea básica para el paso (2) es aumentar tanto como se pueda la longitud de los arcos, posiblemente extendiendo ambos extremos, manteniendo las adyacencias del grafo. La estrategia usada en [37] consiste en primero extender los extremos t_j de los arcos A_j . Esto es, para cada t_j , encontrar el extremo izquierdo s_i más cercano, en sentido horario, satisfaciendo $i = j$ o $A_i \cap A_j = \emptyset$. Movemos t_j para que sea el extremo anterior a s_i , en sentido horario. De manera análoga, en sentido antihorario, hacemos lo mismo con s_i . Consideramos $T = SECUENCIA(t_j)$ y movemos t_j hacia T , en sentido antihorario, reordenando, posiblemente, T y transformando esta secuencia en $T' s_i T''$, donde T' es el conjunto de extremos $t_k \in T$ tal que $i = k$ o $A_i \cap A_k = \emptyset$, y $T'' = T \setminus T'$. Este algoritmo transforma un modelo en uno estable.

Algoritmo sobre modelos estables

- **Input:** Un modelo Γ .
- **Output:** Un modelo estable equivalente a Γ .

- **Tiempo de ejecución:** $O(n)$.

Por último, el paso (3), consiste en reconocer si un modelo es arco-circular Helly. Dicho algoritmo se encuentra detallado en [37].

Algoritmo para reconocer modelos HCA

- **Input:** Un modelo Γ .
- **Output:** Positivo en caso de ser un modelo HCA, negativo en caso contrario.
- **Tiempo de ejecución:** $O(n)$.

En segundo lugar, presentaremos un algoritmo de reconocimiento para los grafos arco-circular clique-Helly.

Algoritmo para reconocer grafos clique-Helly

- **Input:** Un grafo G .
- **Output:** Determina si G es un grafo arco-circular clique-Helly.
- **Tiempo de ejecución:** $O(nm^2)$.

1. Determinar si G es un grafo arco-circular .
2. Determinar si G es clique-Helly.

El primer paso [39] lo podemos ejecutar en $O(n + m)$.

El algoritmo para el paso (2) se sigue del teorema 3.2.4, el cual nos conduce a un algoritmo de tiempo polinomial para reconocer cuando un grafo es clique-Helly.

Para cada triángulo T de G , construimos el triángulo extendido T' y verificamos si contiene un vértice universal. Luego, G es clique-Helly, cuando la respuesta es positiva para cada triángulo T .

Necesitamos $O(nm)$ para generar todos los triángulos de G . Fijado un triángulo, el costo computacional para la operación requerida es de $O(m)$. Por lo tanto, el algoritmo tiene complejidad $O(nm^2)$.

Finalmente, para terminar esta subsección, presentaremos un algoritmo para reconocer a los grafos arco-circular Helly propios, basados en el teorema 3.3.1.

Algoritmo para reconocer grafos arco-circular Helly propios

- **Input:** Un grafo G .
 - **Output:** Determina si G es un grafo arco-circular Helly propio.
 - **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$.
1. Chequear si G es un grafo arco-circular propio [31]. En caso afirmativo obtener un modelo Γ para G .
 2. Transformar Γ en un modelo donde dos arcos no cubran el círculo.
 3. Obtener Γ_0 y Γ_1 a partir de Γ .
 4. Verificar si Γ_1 contiene tres arcos que cubran el círculo. En caso de ser negativo, el modelo es Helly.
 5. Verificar si Γ_0 es un modelo de intervalos.

El paso (1) lo podemos hacer en $O(n+m)$. El paso (2) se puede hacer en $O(n)$ usando los algoritmos de [31]. Para paso (3) basta con encontrar todos los arcos universales.

Para entender el paso (4), necesitamos el siguiente corolario del teorema 3.2.2. Este paso se puede hacer en $O(n)$.

Corolario 3.5.1. *Sea Γ un modelo arco-circular propio donde dos arcos no cubren el círculo, tal que Γ no es Helly, entonces tres arcos de Γ cubren el círculo*

Demostración. Por el absurdo, supongamos que no existen tres arcos de Γ que cubran el círculo. Entonces, por el teorema 3.2.2, el grafo con modelo $\bar{\Gamma}$ induce un C_n para algún $n \geq 4$. Luego, los arcos $\bar{A}_1, \bar{A}_3 \in \bar{\Gamma}$ que corresponden a los vértices v_1, v_3 no se intersecan, luego los arcos A_1, A_3 cubren el círculo, lo cual es absurdo. \square

Finalmente el paso (5) se puede verificar en $O(n)$, observemos que no estamos verificando si un grafo es o no de intervalos, en este caso sería $O(n + m)$, sino un modelo.

Por lo tanto, el algoritmo verifica si un grafo es PHCA en $O(n + m)$.

3.5.3. Arco-circular propios y unitarios

Empecemos con los grafos arco-circular propios, sólo se presentaran las ideas esenciales que hay detrás del algoritmo de reconocimiento.

Algoritmo de reconocimiento para grafos PCA

- **Input:** Un grafo G .
- **Output:** Determina si G es un grafo arco-circular propio.
- **Tiempo de ejecución:** $O(n + m)$.

Al comienzo del capítulo mencionamos que los grafos arco-circulares Helly son los más cercanos a los grafos de intervalos, ya que ambos verifican la propiedad Helly. Sin embargo existe una clase de grafos de intervalos que están muy relacionados con los grafos arco-circulares propios co-bipartitos.

Definición 3.5.2. Un grafo G es un grafo de intervalos bipartito si G tiene un modelo Γ de intervalos, donde los elementos de Γ están particionados en dos partes, es decir, dados $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si los intervalos correspondientes se intersecan y pertenecen a distintas partes de la partición. Si adicionalmente los intervalos son propios, el grafo G es de intervalos bipartitos propios.

Teorema 3.5.1. ([24]) Sea G un grafo co-bipartito. Entonces, G es un grafo arco-circular propio si y sólo si \overline{G} es de intervalos bipartitos propios.

Teorema 3.5.2. ([52]) Sea G un grafo que no es co-bipartito. Entonces, G es un grafo arco-circular propio si y sólo si $M^*(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos.

En esta sección daremos un esquema y una idea, siguiendo el artículo [31], para un algoritmo de reconocimiento para los grafos arco-circulares propios en tiempo $O(n + m)$. La idea consiste en separar en dos casos, cuando G es co-bipartito y cuando no.

El primer paso del algoritmo consiste en decidir si G es o no co-bipartito. Si G es co-bipartito, entonces los vértices están cubiertos por dos cliques. Al menos uno de esos cliques contienen al menos la mitad de los vértices, entonces $m \geq \frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1)$. Si esta desigualdad no se cumple, entonces G no es co-bipartito. Podemos chequear que \overline{G} es bipartito en $O(n^2) = O(m)$.

Si G no es co-bipartito, entonces usamos el teorema 3.5.2 y verificamos si $M^*(G)$ tiene la propiedad de unos consecutivos. Sin embargo, para este paso, usaremos la siguiente reducción.

Teorema 3.5.3. Sea M_1 una matriz cuyas entradas son 0 o 1 y fijemos una columna j . Consideremos la matriz M_2 obtenida de complementar las filas con 1 de la columna j de M_1 . Entonces, M_1 tiene la propiedad de unos circular consecutivos si y sólo si M_2 tiene la propiedad de unos consecutivos.

La reducción se hace sobre la columna cuyo vértice correspondiente tiene el menor grado. De esta forma se logra hacer la reducción en $O(m)$. Una vez hecho esto, testear si M tiene la propiedad de unos consecutivos. En cuyo caso, ordenamos las columnas de $M^*(G)$ del mismo modo para que la matriz tenga la propiedad de unos circular consecutivos, y ordenamos las filas como corresponde, ya que es una matriz de adyacencia. Tucker [52] mostró como producir un modelo arco-circular propio para G a partir de la matriz $M^*(G)$ con la propiedad de unos circular consecutivos en $O(n + m)$.

Si G es un grafo co-bipartito, por el teorema 3.5.1, G es un grafo arco-circular propio si y sólo si \overline{G} es de intervalos bipartitos propios. El grafo G está cubierto por dos cliques, uno de ellos tiene que cubrir al menos $\frac{n}{2}$ vértices de G , por lo que en tiempo $O(n^2) = O(m)$ podemos obtener \overline{G} a partir de G . Si \overline{G} es de intervalos bipartitos propios, el cual puede decidirse en $O(n + m)$, obtenemos un modelo para éste y usamos un algoritmo de Hell y Huang [24] para construir un modelo arco-circular propio, a partir del modelo de \overline{G} .

Finalmente, presentaremos un algoritmo de reconocimiento para los grafos arco-circular unitarios basándonos en la caracterización de Tucker, dicho algoritmo tiene complejidad $O(n^2)$. Los siguientes lemas, que deducen de la demostración del lema 3.1.8, nos ayudarán en nuestro algoritmo. Seguiremos el texto [14].

Lema 3.5.1. *Sea $C = x_1, \dots, x_n$ un circuito (n, k) minimal, entonces para cada i , el arco A_{i+1} es el arco vecino de A_i más lejano en sentido horario (i.e., de todos los arcos adyacentes a A_i , A_{i+1} es aquel cuyo extremo horario es el más lejano a A_i).*

Lema 3.5.2. *Sea $I = x_1, \dots, x_m$ un conjunto independiente (m, l) maximal, entonces para cada i , A_{i+1} es el primer arco no vecino de A_i (i.e., de todos los arcos no adyacentes a A_i , A_{i+1} es aquel cuyo extremo antihorario es el más cercano a A_i).*

Por el teorema 3.1.1., podemos asumir que los grafos arco-circulares propios son normales.

Queda por buscar las cotas superiores e inferiores para la longitud de la circunferencia para cualquier modelo arco-circular unitario para G con arcos con longitud 1. La cota superior es la menor n/k sobre todos los circuitos (n, k) minimales, mientras que la cota superior es la mayor m/l sobre todos los conjuntos independientes (m, l) maximales. Estas cotas determinarán si el modelo arco-circular unitario existe o no.

Esto lo usamos en la demostración del teorema 3.1.8, ya que si p es la longitud de la circunferencia, entonces p tiene que ser menor que el valor dado por todos los circuitos

(n, k) minimales y mayor al valor impuesto por todos los conjuntos independientes (n, l) maximales. Si este rango es vacío, el modelo UCA no puede existir y viceversa.

Algoritmo de reconocimiento para grafos UCA

- **Input:** Un grafo G .
- **Output:** Determina si G es un grafo arco-circular unitario.
- **Tiempo de ejecución:** $O(n^2)$.

(1) Buscar la mayor cota inferior

Para cada arco A_i en Γ .

1. $c \leftarrow A_i$.
2. Marcar c .
3. Mientras existan arcos sin marcar no adyacentes a c :
 - a) Buscar, en sentido horario, el primer arco sin marcar no adyacente a c . Marcarlo, y guardarlo en c .
 - b) Calcular m/l , donde m es la cantidad de arcos marcados, y l es la cantidad de vueltas completadas. Si este valor es la mayor cota inferior encontrada, guardarla.

(2) Buscar la menor cota superior

Para cada arco A_i en Γ .

1. $c \leftarrow A_i$.
2. Marcar c .
3. Mientras existan arcos sin marcar adyacentes a c :
 - a) Buscar el arco sin marcar adyacente a c que más se extiende en sentido horario. Marcarlo, y guardarlo en c .
 - b) Si al agregar c a los arcos marcados se completó una nueva vuelta, calcular n/k , donde n es la cantidad de arcos marcados, y k es la cantidad de vueltas completadas. Si este valor es la menor cota superior encontrada, guardarla.

(3) Las mejores cotas superior e inferior encontradas son iguales si y sólo si G no es UCA.

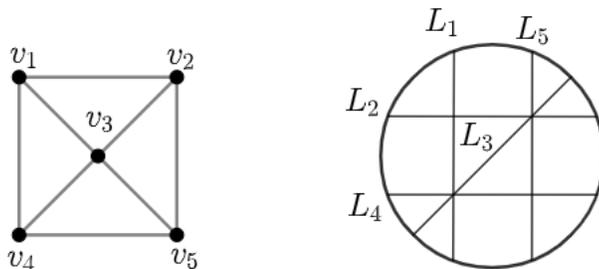
Capítulo 4

Grafos circulares

Un grafo G es circular si existe un conjunto de cuerdas Γ dentro de un círculo (llamado modelo) y una correspondencia 1-1 entre vértices de G y cuerdas de Γ , de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se cortan.

Definición 4.0.1. Un grafo G es circular si existe una biyección $f : V \rightarrow \Gamma$, $f(v) = L_v$, donde $\Gamma = \{L_v\}_{v \in V}$, tal que $(u, v) \in E$ si y sólo si $u \neq v$ y $L_u \cap L_v \neq \emptyset$. Es decir, un grafo circular es un grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo.

La siguiente figura muestra un grafo circular y un modelo para el mismo



Esta clase de grafos fue introducida por Even e Itai [15], donde se muestra una aplicación para resolver un problema de reordenamiento de vagones de un tren propuesto por Knuth [34], usando pilas y colas.

Se pueden encontrar algoritmos de tiempo polinomial para reconocer grafos en esta clase en [5, 17, 40, 45]. A continuación se estudia los principales resultados sobre esta clase y su relación con los grafos arco-circulares.

Las siguientes son algunas subclases interesantes de los grafos circulares, estudiadas en [12] :

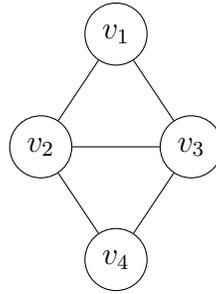
1. Unitarios: Un grafo G es circular unitario (UC) si existe un modelo de cuerdas para G de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud.

2. Helly: Un grafo G es circular Helly (HC) si existe un modelo de cuerdas Γ para G de manera que el conjunto satisfaga la propiedad de Helly.

3. Clique-Helly: Un grafo G es circular clique-Helly (CHC) si G es un grafo circular y clique-Helly.

4.1. Grafos circulares Helly y clique Helly

Recordemos que un diamante es el grafo que se obtiene removiendo una arista de un K_4 . Para el siguiente teorema, utilizaremos la siguiente figura.



Teorema 4.1.1. ([12]) *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es un grafo circular y no induce un diamante.*

Demostración. Supongamos que un grafo circular Helly G induce un diamante, H .

Sea Γ_i la cuerda que representa al vértice v_i con $1 \leq i \leq 4$. Es claro que las cuerdas Γ_1, Γ_2 y Γ_3 se intersecan dos a dos, como estamos suponiendo que G es Helly, entonces $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset$, y como G es un grafo circular y los Γ_i son cuerdas, entonces dicha intersección debe ser un punto p . De manera análoga, $\exists q \in \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_4$.

Supongamos que $p = q$, entonces $\Gamma_1 \cap \Gamma_4 \neq \emptyset$. Por lo tanto, todos los Γ_i se intersecan dos a dos, y como G es Helly, los Γ_i tienen un punto en común, lo que implica que el grafo obtenido al intersecar los Γ_i es un K_4 y no un diamante.

Si $p \neq q$ entonces $\Gamma_2 = \Gamma_3$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto se llega al absurdo, el cual vino de suponer que G inducía un diamante. \square

En la tesis de Durán [12] se conjeturó que dicha condición también era suficiente para que un grafo sea circular Helly. Recientemente, en [10], dicha conjetura fue probada.

Teorema 4.1.2. ([10]) *Sea G un grafo circular que no induce un diamante, entonces es un grafo circular Helly.*

La demostración del teorema se realizará en una seguidilla de lemas. Para eso necesitaremos introducir los siguientes conceptos.

Definición 4.1.1. Una sucesión modelo σ_G de un grafo circular G es una sucesión en donde todos los elementos de $V(G)$ aparecen exáctamente dos veces de acuerdo al orden en el que se encuentran los extremos de las cuerdas en sentido horario alrededor del círculo. Una subsucesión σ de σ_G , el cual denotaremos $\sigma \subseteq \sigma_G$, es una sucesión circular que se obtiene eliminando de σ_G las dos apariciones de $v \in X$, para algún subconjunto $X \subseteq V(G)$. Un subgrafo inducido H de G es *convexo* si para cada subsucesión (a, b, c, c, b, a) de σ_G , $\{a, c\} \subseteq V(H)$ implica que $b \in V(H)$. Un subgrafo inducido H de G es una *clique maximal* si todas las cliques maximales de H son cliques maximales de G . Un subgrafo inducido H de G es una *casi componente maximal* si a lo sumo una componente conexa de H no es una componente conexa maximal de G . Un subgrafo inducido H de G es *conveniente* si es convexa, clique maximal y casi componente maximal. Dado subgrafo inducido H de G , denotaremos σ_H la sucesión modelo de H inducido por σ_G . Dado subgrafo inducido H de G , un *modelo Helly mixto* de (G, H) es un modelo circular de G donde la sucesión modelo inducida σ_H es un modelo circular de H .

La estructura de la demostración es la siguiente. Consideraremos un subgrafo conveniente H de G , tal que existe un modelo Helly mixto, esto lo podemos realizar ya que el subgrafo vacío es un subgrafo conveniente. El objetivo será probar que $H = G$. Para lograr esto supondremos que $H \neq G$ y vamos a ver que existe otro subgrafo inducido H' de G que verifica $H \subsetneq H'$ tal que (G, H') admite un modelo Helly mixto. Para construir H' usaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Dado cualquier subgrafo propio conveniente H de G , existe un vértice $u \in V(G) \setminus V(H)$ tal que el subgrafo inducido por los vértices $V(H) \cup \{u\}$ sigue siendo convexo. Más aún, si H tiene una componente que es un subgrafo propio de una componente C de G , entonces existe $u \in C$.*

Demostración. Sea \prec la relación en $V(G) \setminus V(H)$ tal que $u' \prec u$ si $(x, u, u', u', u, x) \subseteq \sigma_G$ para algún $x \in V(H)$. Es claro que para cualquier u maximal para \prec , se tiene que $V(H) \cup \{u\}$ es convexo. Sea $(a, b, c, c, b, a) \subseteq \sigma_G$ tal que $\{a, c\} \in V(H) \cup \{u\}$. Si $a \neq u$ y $c \neq u$ no hay nada que probar, ya que H es convexo (conveniente) por hipótesis. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = u$. Si $b \notin V(H) \setminus \{u\}$ entonces $u \prec b$, lo cual contradice la maximalidad de u . \square

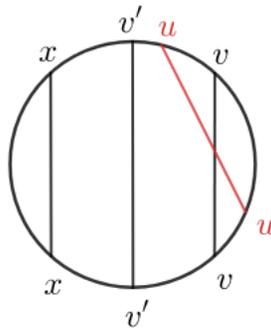
Separaremos la demostración del teorema en el caso cuando existe $u \in V(G) \setminus V(H)$ adyacente a algún vértice $v \in V(H)$ y en el caso cuando tal u no existe.

Caso 1: Ningún vértice de $V(G) \setminus V(H)$ es adyacente a H .

Por el lema anterior, sea $u \in V(G) \setminus V(H)$ tal que el subgrafo inducido por los vértices $V(H) \cup \{u\}$ es convexo.

Lema 4.1.2. *Si $|N_G(u)| \neq 0$, entonces existe un vértice $v \in N_G(u)$ tal que el subgrafo inducido por los vértices $V(H) \cup \{v\}$ es convexo.*

Demostración. Sea $v \in N_G(u)$ supongamos que existe $v' \in V(G) \setminus V(H)$ tal que $v \prec v'$. Sea $x \in V(H)$ tal que $(x, v', v, v, v', x) \subseteq \sigma_G$. Si u, v' no son adyacentes, entonces sucede que $(x, v', u, u, v', x) \subseteq \sigma_G$.



Por lo que $u, x \in V(H) \cup \{u\}$, pero $v' \notin V(H) \cup \{u\}$, contradiciendo la convexidad de $V(H) \cup \{u\}$. Por lo que v es maximal para \prec , luego, $V(H) \cup \{v\}$ es convexo. \square

Si $|N_G(u)| \neq 0$, por el lema anterior podemos tomar un vértice $v \in N_G(u)$ tal que el subgrafo inducido por los vértices $V(H) \cup \{v\}$ es convexo. Como G no contiene ningún diamante, G contiene una única clique maximal que contiene a la arista (u, v) , sea K a dicho conjunto. Si $|N_G(v)| = 0$, $K = \{u\}$.

Lema 4.1.3. *El garfo H' inducido por los vértices $V(H) \cup K$ es un subgrafo conveniente de G , y (G, H') admite un modelo Helly mixto.*

Demostración. Es claro que H' es clique maximal y casi componente maximal. Es evidente que si $K = \{u\}$ entonces H' resulta convexo y por lo tanto, conveniente. Supongamos que $|K| \geq 2$. Por el absurdo, supongamos que H' no es convexo. Sea $w \in K$ tal que $V(H) \cup \{w\}$ no es convexo. Entonces existe una subsucesión $(a, w', x, x, w', a) \subseteq \sigma_G$ tal que $\{a, x\} \subseteq V(H) \cup \{w\}$ pero $w' \notin V(H) \cup \{w\}$. Como $V(H)$ es convexo, entonces a o x tiene que ser w , ya que de lo contrario, w' estaría en $V(H)$, sumado a esto, $w \neq w'$. Luego, tenemos $x \in V(H)$ y $w' \in V(G) \setminus V(H)$ tal que $(w, w', x, x, w', w) \subseteq \sigma_G$ (es fácil ver que w, w' no son adyacentes). Supongamos que u y w' no son adyacentes, entonces, como u, w son adyacentes ya que pertenecen a K , debe suceder que $(u, w', x, w', u) \subseteq \sigma_G$ (sucede lo mismo que la figura anterior, intercambiando roles), luego, como $V(H) \cup \{u\}$ es convexo, entonces $w' \in V(H) \cup \{u\}$, lo cual es absurdo. Usando el lema anterior, existe un $v \neq u$ tal que $V(H) \cup \{v\}$ es convexo, claramente $v \neq w$, por el mismo razonamiento, v, w' son adyacentes. Luego, los vértices u, v, w, w' forman un diamante en G , absurdo.

Es fácil ver que podemos extender el modelo Helly mixto de (G, H) a (G, H') , ya que K es una clique y ningún vértice de K es adyacente a $V(H)$. \square

Caso 2: Existe un vértice $u \in V(G) \setminus V(H)$ adyacente a algún vértice de H .

Por un lema previo, sea $u_0 \in V(G) \setminus V(H)$ tal que $V(H) \cup \{u_0\}$ es convexo.

Lema 4.1.4. *Dado un subgrafo conveniente H de G , para cada vértice $x \in V(G) \setminus V(H)$, $N_H(u)$ es un conjunto independiente. Equivalentemente, para cada $x, y \in V(H)$, $(u, x, y, u, x, y) \notin \sigma_G$.*

Demostración. Como H es clique maximal, el vecindario de u en H no puede contener una clique maximal no trivial de H . Luego si dos vértices de $N_H(u)$ son adyacentes, digamos x e y , entonces estos vértices pertenecerían a una clique maximal de H con al menos un vértice no adyacente a u . Esto no puede suceder ya que los vértices u, x, y, z forman un diamante. \square

Lema 4.1.5. *Sea $u \in V(G) \setminus V(H)$ adyacente a H tal que $V(H) \cup \{u_0\}$ es convexo. Sean v_1, \dots, v_k , con $k \geq 1$ el vecindario de u en H tal que $(u, v_1, \dots, v_k, u, v_k, \dots, v_1) \subseteq \sigma_G$. Cada vecino x de u y v_i , $1 \leq i \leq k$ es adyacente a exactamente un vértice de $N_H(u)$, v_i , y verifica una sólo de las siguientes condiciones:*

- (P) $i = 1$ y $(u, v_1, x, u, v_1, x) \subseteq \sigma_G$.
(S) $i = k$ y $(u, x, v_k, u, x, v_k) \subseteq \sigma_G$.

En el primer caso, x es un predecesor de u , mientras que en el segundo es un sucesor.

Demostración. Sea x un vecino común de u y v_i . Por el lema anterior $x \in V(G) \setminus V(H)$. Si x fuese adyacente a otro v_j , estos cuatro vértices forman un diamante. Supongamos que no se cumple (S), veamos que x no puede verificar $(u, x, v_i, u, x, v_i) \subseteq \sigma_G$, con $1 \leq i < k$. Como H es casi componente maximal y los vértices u, v_i, v_{i+1} pertenecen a la misma componente en G , los vértices v_i, v_{i+1} tienen que pertenecer a la misma componente en H , luego, existe un vértice $z \neq v_{i+1}$ en H que es adyacente a v_i . Por el lema anterior, x, z no son adyacentes, por lo que se tiene que $(z, x, v_{i+1}, v_{i+1}, x, z) \subseteq \sigma_G$, contradiciendo la convexidad de H . Como x no verifica $(u, x, v_i, u, x, v_i) \subseteq \sigma_G$ no puede ser adyacente a u y v_{i+1} simultáneamente, llegando al absurdo. Similarmente, se prueba que x no verifica $(u, v_i, x, x, v_i, u) \subseteq \sigma_G$, para $1 < i \leq k$. \square

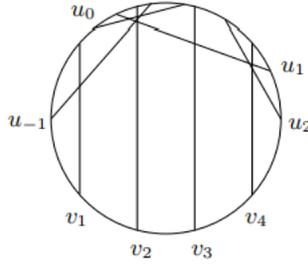
Lema 4.1.6. *Sea $u \in V(G) \setminus V(H)$ adyacente a H tal que $V(H) \cup \{u\}$ es convexo. Para cada predecesor (resp. sucesor) x de u , $V(H) \cup \{x\}$ es convexo y u es un sucesor (resp. predecesor) de x .*

Demostración. Supongamos que $V(H) \cup \{x\}$ no es convexo. Entonces existe $y \in V(G) \setminus V(H)$ y $z \in V(H)$ tal que $(x, x, y, z, z, y) \subseteq \sigma_G$. Como $V(H) \cup \{u\}$ es convexo, el vértice u es adyacente a y , ya que de lo contrario tendríamos $(u, u, y, z, z, y) \subseteq \sigma_G$ y por lo tanto, y pertenecería a $V(H)$. Sean v_1, \dots, v_k el vecindario de u en H tal que $(u, v_1, \dots, v_k, u, v_1, \dots, v_k) \subseteq \sigma_G$. Por definición de x , u y x tienen un mismo vecino, digamos $v_1 \in V(H)$ (resp. $v_k \in V(H)$ en el caso de x sucesor). Como los vértices u, x, y, v_1 (resp. v_k) no pueden formar un diamante, entonces y y v_1 (resp. v_k) no pueden ser adyacentes, pero esto contradice la convexidad de H , ya que tendríamos (v_1, v_1, y, z, z, y) o $(v_k, v_k, y, z, z, y) \subseteq \sigma_G$. Usando el lema previo, u es un sucesor (resp. predecesor) de x . \square

Definamos $u_i \in V(G) \setminus V(H)$ con $-p \leq i \leq q$, tal que la sucesión de vértices $(u_i)_{-p \leq i \leq q}$ sea la más larga que contiene a u_0 y además que u_i sea sucesor de u_{i+1} para $-p + 1 \leq i \leq q$. Usando la definición de u_0 , el lema anterior implica que todos los vértices u_i tienen un vecino en H y son tal que $V(H) \cup \{u_i\}$ es convexo.

Usando el lema 4.1.5, podemos definir una sucesión creciente $(n_i)_{-p-1 \leq i \leq q}$, y vértices v_j para $n_{-p-1} \leq j \leq n_q$, tal que para cada $-p \leq i \leq q$, los vecinos de u_i en H son exactamente los vértices v_j con $n_{i-1} \leq j \leq n_i$. El lema también implica que

$(u_i, v_{n_{i-1}}, \dots, v_{n_i}, u_i, v_{n_i}, \dots, v_{n_{i-1}}) \subseteq \sigma_G$, por lo que los vértices v_j forman un conjunto independiente de H tal que $(v_{n_{-p-1}}, v_{1+n_{p-1}}, \dots, v_{n_q}, v_{n_q}, \dots, v_{1+n_{-p-1}}, v_{n_{-p-1}}) \subseteq \sigma_G$. Un ejemplo es la siguiente figura.



Definimos $H' = H \cup \{u_i \mid -p \leq i \leq q\}$. Veremos que H' es conveniente y admite un modelo Helly mixto.

Lema 4.1.7. *Para cada $-p \leq i \leq q$, los sucesores (resp. predecesores) de u_i son los vértices u_k tales que $k > i$ y $n_{k-1} = n_k$ (resp. $k < i$ y $n_k = n_{i-1}$)*

Lema 4.1.8. *H' es conveniente*

Demostración. El grafo H' tiene tantas componentes conexas como H , por lo que es casi componente maximal. Supongamos que H' no es clique maximal, por lo que existe un vértice $x \in V(G) \setminus V(H')$ adyacente a dos vértices a, b tales que $(a, b) \in E(H')$. La arista no puede estar en $E(H)$, ya que contradice la clique maximalidad de H . Si $a = u_i$ y $b = v_j$, con $-p \leq i \leq q$ y $n_{i-1} \leq j \leq n$, por el lema 4.1.5 el vértice x es un sucesor o predecesor de u_i , y por el lema anterior, debe pertenecer a H' , absurdo. Si $a = u_i$ y $b = u_j$ con $-p \leq i < j \leq q$, entonces x es adyacente a v_{n_i} o no. En el primer caso, por el lema anterior, x debería ser el vértice u_k y por lo tanto pertenecería a H' , mientras que en el segundo caso, los vértices x, a, b, v_{n_i} forman un diamante. Luego, H' es clique maximal.

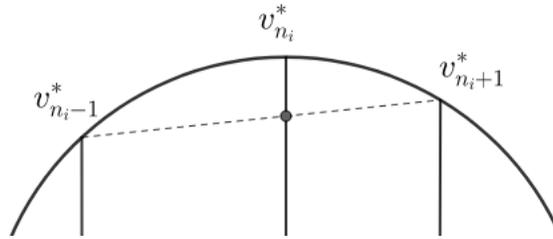
Es fácil ver que H' es convexo mediante el absurdo por lo que la obviaremos, esencialmente se terminan creando tres casos en los cuales contradice las convexidades de $H \cup \{u_i\}$ y $H \cup \{u_j\}$. \square

Para finalizar, enunciaremos el lema final y daremos un sketch de la demostración.

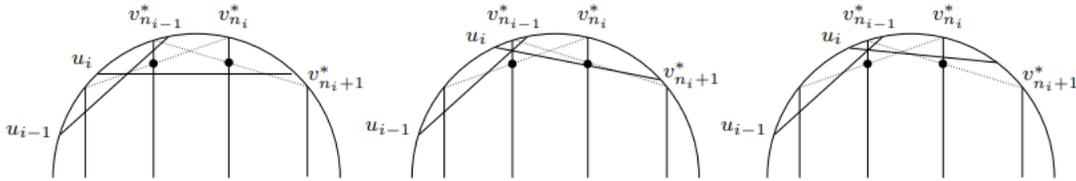
Lema 4.1.9. *Existe un modelo mixto para (G, H') .*

Demostración. Considerar $H_i = V(H) \cup \{u_k \mid -p \leq k \leq i\}$ para $-p + 1 \leq i \leq q$. En cada paso extenderemos un modelo circular Helly de H_{i-1} a H_i . Lo construiremos, para cada i , pidiendo que verifiquen la siguiente propiedad, utilizando el supraíndice $*$ para denotar un extremo de la cuerda.

(*) El punto de intersección entre u_i y v_{n_i} cae estrictamente entre $v_{n_i}^*$ y la cuerda abstracta $[v_{n_{i-1}}^*, v_{n_{i+1}}^*]$.



Supongamos que la cuerda u_{i-1} fue colocada como muestra la siguiente figura (izquierda).



Veamos que H_i es Helly y verifica la propiedad (*). Si $u_i = u_{-p}$, su vecindario en H_{-p} es independiente y trivialmente Helly, es fácil ver que se puede verificar (*) moviendo un extremo del vértice cerca de v_{-p}^* . Si $u_i \neq u_{-p}$, el modelo H_{i-1} es Helly y verifica (*). Movemos u_i para que se interseque con u_{i-1} y $v_{n_{i-1}}$ (figura del centro). En este punto obtenemos que el vecindario de u_i en H_i es un clique maximal, por lo que es Helly. Si (*) no se verificase, podemos mover u_i cerca de $v_{n_i}^*$ (figura de la derecha), manteniendo el punto de intersección de la figura central. De esta manera H' es Helly. Concluyendo el teorema 4.1.2. \square

Corolario 4.1.1. *Sea G un grafo circular. G es un grafo circular Helly si y sólo si G no contiene ningún diamante.*

A continuación probaremos que los grafos circulares Helly, son circular clique-Helly.

Teorema 4.1.3. *Sea G un grafo circular Helly, entonces G es un grafo circular clique-Helly*

Demostración. Supongamos que G es un grafo circular Helly, sabemos que es equivalente a decir que G no contiene ningún diamante. Supongamos por el absurdo que G no es un grafo circular clique-Helly. Sean Q_1, Q_2, \dots, Q_n un conjunto de cliques de G no Helly minimal, es claro que $n \geq 3$. Como este conjunto es minimal, para cada $1 \leq j \leq n$, existe $v_j \in \bigcap_{i \neq j} Q_i$ con $v_j \notin Q_j$. En particular, si miramos los v_j con $1 \leq j \leq 3$ tenemos que dichos vértices forman un K_3 que no está incluido en ningún Q_j . Como Q_1 es completo maximal, debe existir un $v_4 \in Q_1$ que sea adyacente a v_2 y a v_3 pero no a v_1 , ya que éste último no se encuentra en Q_1 . Luego, los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 inducen un diamante en G , absurdo. \square

4.2. Grafos circular unitarios

Teorema 4.2.1. *G es un grafo unitario circular si y sólo si G es un grafo unitario arco-circular.*

Demostración. Asumiremos que el círculo tiene radio $r = 1$.

(\Rightarrow) Sea G un grafo unitario circular, y consideremos el modelo Γ de G de cuerdas de igual longitud. Transformaremos cada cuerda de Γ en un arco alrededor del círculo usando los mismos puntos inicial y final, de tal forma que la longitud del arco sea $\leq \pi$. De esta forma obtenemos un modelo unitario arco-circular para G .

(\Leftarrow) Sea G un grafo arco-circular unitario y sea l la longitud de todos los arcos. Si sucede que $l > \pi$ entonces tendríamos que G es un grafo completo, en este caso podríamos encontrar una representación unitario circular para G fácilmente. Luego, podemos asumir que $l \leq \pi$, nuevamente, podemos transformar cada arco en una cuerda dentro del círculo usando los puntos inicial y final. De esta forma obtenemos un modelo unitario circular para G . \square

Un corolario inmediato es la inclusión $UC \subseteq PCA$.

Corolario 4.2.1. *Sea G un grafo circular unitario, entonces G es un grafo arco-circular propio.*

Demostración. Sea G un grafo circular unitario, por el teorema 4.1.1, es un grafo arco-circular unitario, en particular, es propio. \square

Continuando con la clase de grafos circulares Helly, se define los grafos circulares unitarios Helly a aquellos grafos que tienen un modelo circular que es simultáneamente

unitario y Helly. Dicha clase fue introducida en [4]. A continuación se presenta el teorema de caracterización para esta clase, mediante subgrafos inducidos prohibidos.

Teorema 4.2.2. ([3]) *Sea G un grafo, son equivalentes*

1. G es un grafo circular unitario Helly.
2. G no induce ningún claw, paw, diamante ni C_n^* para ningún $n \geq 3$.
3. G es un ciclo C_n , un grafo completo o una unión disjunta de caminos.

Demostración. Caso 1: Supongamos que G no induce ningún triángulo (C_3)

(1) \Rightarrow (2) Supongamos que G es un grafo circular unitario Helly, al ser un grafo circular unitario, por el corolario 4.2.1, G es un grafo arco-circular propio, y por el teorema 3.1.5, G no contiene C_n^* , ni claw. Y como paw y diamante contienen triángulos, G no los contiene.

(2) \Rightarrow (3) Supongamos que G no contiene ningún ciclo, entonces cada componente conexa de G es un camino, luego G es la unión disjunta de caminos.

Supongamos que G contiene algún ciclo C_n . Como G no induce ningún triángulo, $n \geq 4$. Sea H el ciclo más corto de G . Supongamos que existe un vértice $v \in G \setminus H$. Si v no es adyacente a ningún vértice de H , se induce un C_n^* . Si v es adyacente a exactamente un vértice de H se induce un claw, y si v es adyacente a dos vértices de H , que son vecinos, se induce un triángulo. No puede suceder que estos vértices de H no sean adyacentes, ya que tendríamos un ciclo más corto. Luego $G = H = C_n$.

(3) \Rightarrow (1) Es fácil construir modelos circulares unitarios Helly para ciclos, grafos completos y unión disjunta de caminos.

Caso 2: Supongamos que G induce al menos un triángulo (C_3)

(1) \Leftrightarrow (3)

Sea $\Gamma = \{L_i\}_{i=1}^n$ un modelo circular unitario Helly para G , donde n es la cantidad de vértices de G . Como el modelo se unitario, dado dos cuerdas distintas L_1, L_2 , tienen que ser el diámetro del círculo C , o ambos son tangentes a otro círculo C' con mismo centro que C . Sin pérdida de generalidad, supongamos que las cuerdas L_1, L_2, L_3 son las cuerdas correspondientes al triángulo que contiene G , dichas cuerdas se intersecan dos a dos, y por la propiedad Helly, existe un punto $p \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$. Afirmamos que las cuerdas L_1, L_2, L_3 son el diámetro de C . Supongamos que no, entonces las tres cuerdas son tangentes a otro círculo C' , sin embargo estas tres cuerdas se encuentran en el punto p , lo cual es un absurdo, ya que dado un punto, hay al menos dos rectas tangentes al círculo que pasen por dicho punto. Luego los L_1, L_2, L_3 son el diámetro de C y como Γ es un modelo unitario todas las cuerdas son el diámetro, por lo que el grafo es un completo. La vuelta ya fue demostrada.

(2) \Leftrightarrow (3) Supongamos que primero vale (2) Como G contiene un triángulo, tiene 3 vértices como mínimo. Si $V(G) = 3$, entonces $G = C_3$. Analicemos las posibilidades cuando hay otro vértices v , si v no es adyacente al triángulo, a un vértice o a dos, entonces se inducen un C_3^* , paw y diamante, respectivamente. Por lo que G resulta un grafo completo. Es evidente (3) \Rightarrow (2).

□

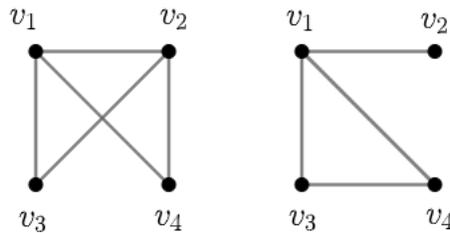
4.3. Caracterizaciones parciales

Recordemos que el problema de caracterizar a los grafos circulares por medio de subgrafos inducidos prohibidos sigue abierto. Al igual que hicimos con los grafos arco-circulares, presentaremos algunas caracterizaciones parciales para los grafos circulares.

Comencemos con una caracterización que dió Bocuher [5], para esto necesitamos introducir el concepto de grafos localmente equivalentes.

Definición 4.3.1. Dado un grafo G y un vértice $v \in V$, la complementación local en v transforma G en $G * v$ reemplazando el subgrafo inducido por $N(v)$ por su complemento.

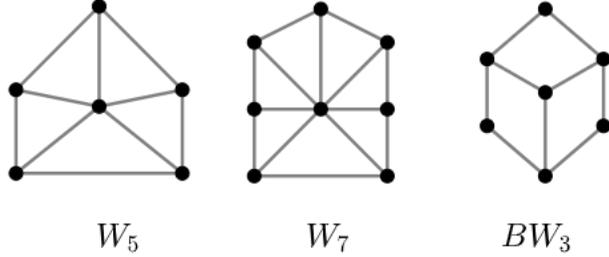
La siguiente figura muestra un grafo G a izquierda y $G * v_1$ en la derecha



Observación 4.3.1. Es fácil ver que $(G * v) * v = G$.

Definición 4.3.2. Dos grafos G y H son localmente equivalentes si existe una sucesión finita de complementaciones locales que transforman G en H .

Teorema 4.3.1. ([5]) Un grafo G es circular si y sólo si ningún grafo localmente equivalente a G tiene como subgrafo inducido a alguno de los siguientes grafos.



Presentaremos una aplicación del teorema de Bouchet, la cual consiste en demostrar el teorema de Naji [40]. La caracterización del teorema de Naji es larga y difícil, sin embargo, seguiremos el texto de Gasse [19], el cual es mucho más conciso, para demostrar el teorema de Naji usando el teorema de Bouchet.

Naji dio la siguiente caracterización de los grafos circulares mediante un sistema de ecuaciones lineales sobre el campo de dos elementos $GF(2)$.

Teorema 4.3.2. ([40]) *Un grafo G es un grafo circular si y sólo si existen valores $\beta(u, v) \in GF(2)$ para cada par (u, v) de vértices tales que :*

1. $\beta(v, u) + \beta(u, v) = 1$ para todo $(v, u) \in E$.
2. $\beta(v, u) + \beta(v, w) = 0$ para todo $(v, u) \notin E, (v, w) \notin E, (u, w) \in E$.
3. $\beta(v, u) + \beta(v, w) + \beta(u, w) + \beta(w, u) = 1$ para todo $(v, u) \in E, (v, w) \in E, (u, w) \notin E$.

Denotaremos $S(G)$ al sistema de ecuaciones del teorema de Naji y diremos que G es consistente si $S(G)$ admite solución en $GF(2)$.

Lema 4.3.1. *Los grafos W_5, W_7 y BW_3 son inconsistentes.*

Lema 4.3.2. *Sea G un grafo consistente y v un vértice de G , entonces $G * v$ es consistente.*

Comenzaremos la demostración del teorema 4.3.2, luego demostraremos los dos lemas.

Demostración. \Rightarrow) Sea G un grafo circular y sea Γ un modelo circular para G . Orientaremos las cuerdas de Γ . Dado una cuerda L consideraremos su punto inicial $L_{inicial}$ y su punto final L_{final} . Dado un punto p en el círculo, diremos que p está a la izquierda

de L si el arco $(L_{inicial}, L_{final})$ recorrido en sentido horario contiene al punto p . En caso contrario, p está a la derecha de L . Definiremos a β de la siguiente forma:

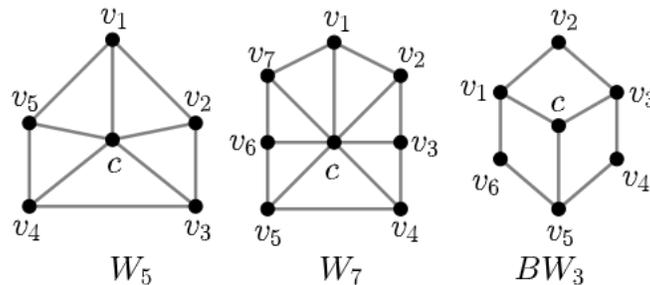
- Si $(u, v) \in E$, entonces $\beta(u, v) = 1$ si y sólo si el punto inicial de L_v está a la izquierda de L_u .
- Si $(u, v) \notin E$, entonces $\beta(u, v) = 1$ si y sólo si ambos puntos, inicial y final, de L_v están a la derecha de L_u .

Veamos que se verifican las tres ecuaciones del teorema. Sean $(u, v) \in E$, por el primer ítem es fácil ver que $\beta(u, v) = 1$ si y sólo si $\beta(v, u) = 0$, por lo que cumple (1). Sean $(u, v) \notin E$, $(v, w) \notin E$, $(u, w) \in E$, por el segundo ítem, es claro que $\beta(u, v) = \beta(v, w) = 1$ o bien $\beta(u, v) = \beta(v, w) = 0$, en cualquier caso suman 0 por lo que se verifica la ecuación (2). Finalmente, sean $(v, u) \in E$, $(v, w) \in E$, $(u, w) \notin E$, para este caso es fácil analizar las cuatro posibilidades, $\beta(v, u) = 0$ o 1 y $\beta(v, w) = 0$ o 1, utilizando que (u, w) no son adyacentes es fácil concluir que la ecuación (3) se verifica.

\Leftarrow) Supongamos que G no es un grafo circular, por el teorema de Bouchet (4.3.1), existe un grafo H localmente equivalente a G tal que H induce algún subgrafo mencionado en dicho teorema. Por el lema 4.3.1, este subgrafo es inconsistente, y como el sistema de ecuaciones relacionado al subgrafo de H es un subsistema del sistema de ecuaciones relacionado a H , se sigue que H es inconsistente. Luego, G es localmente equivalente a un grafo inconsistente, por el lema 4.3.2, G es inconsistente.

□

A continuación demostraremos el lema 4.3.1. Para este lema etiquetaremos los grafos del teorema de Bouchet de la siguiente manera.



Demostración. Sea β la solución de $S(G)$.

(1) Veamos que W_5 es inconsistente. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta(c, v_i) = 1$, $1 \leq i \leq 5$, ya que de lo contrario podemos reemplazar $\beta(v_i, u)$ por $\beta(v_i, u) +$

1 si $u \neq v_i$ y $\beta(w, v_i)$ por $\beta(w, v_i)+1$ si $(w, v_i) \in E$. Es fácil ver que el nuevo β es solución de $S(G)$. Consideremos el diamante inducido por los vértices v_1, v_2, v_5, c . Apliquemos la ecuación (3) a los vértices v_1, v_2, v_5 y c, v_2, v_5 .

$$\begin{aligned}\beta(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_5) + \beta(v_2, v_5) + \beta(v_5, v_2) &= 1 \\ \beta(c, v_2) + \beta(c, v_5) + \beta(v_2, v_5) + \beta(v_5, v_2) &= 1\end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones y usando que $\beta(c, v_i) = 1$, tenemos que $\beta(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_5) = 0$, por lo que ambos valores tienen que ser iguales. Sin pérdida de generalidad suponemos que son iguales a 1. Utilizando el mismo razonamiento con el diamante inducido por los vértices v_1, v_4, v_5, c tenemos que $\beta(v_5, v_1) + \beta(v_5, v_4) = 0$. Como los vértices v_1, v_5 son adyacentes, por la ecuación (1), $\beta(v_5, v_1) = 0$ y por lo tanto, $\beta(v_5, v_4) = 0$. Utilizando este mismo razonamiento con los demás vértices, se llega a que $\beta(v_1, v_2) = 0$, lo cual es un absurdo.

(2) El mismo argumento se aplica con W_7 .

(3) Para el grafo BW_3 aplicaremos la ecuación (3) con los vértices v_1, v_3, v_5, c .

$$\begin{aligned}\beta(c, v_1) + \beta(c, v_3) + \beta(v_1, v_3) + \beta(v_3, v_1) &= 1 \\ \beta(c, v_3) + \beta(c, v_5) + \beta(v_3, v_5) + \beta(v_5, v_3) &= 1 \\ \beta(c, v_5) + \beta(c, v_1) + \beta(v_1, v_5) + \beta(v_5, v_1) &= 1\end{aligned}$$

Sumando las tres ecuaciones se obtiene

$$\beta(v_1, v_3) + \beta(v_3, v_1) + \beta(v_3, v_5) + \beta(v_5, v_3) + \beta(v_1, v_5) + \beta(v_5, v_1) = 1$$

Apliquemos la ecuación (2) con los vértices v_1, v_3, v_4 y v_1, v_4, v_5 obteniendo.

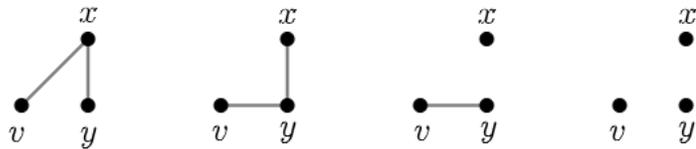
$$\begin{aligned}\beta(v_1, v_3) + \beta(v_1, v_4) &= 0 \\ \beta(v_1, v_5) + \beta(v_1, v_4) &= 0\end{aligned}$$

Sumando, se sigue que $\beta(v_1, v_3) + \beta(v_1, v_5) = 0$. Con el mismo razonamiento aplicado a los vértices v_1, v_3, v_6 y v_3, v_5, v_6 se obtiene $\beta(v_3, v_1) + \beta(v_3, v_5) = 0$. Y con los vértices v_2, v_3, v_5 y v_1, v_2, v_5 se tiene que $\beta(v_5, v_3) + \beta(v_5, v_1) = 0$. Por lo que llegamos al resultado $0 = 1$, lo cual es absurdo. \square

Finalmente, demostraremos el lema 4.3.2.

Demostración. Supongamos que G es consistente, por lo tanto podemos tomar β como solución de $S(G)$. Sea v un vértice arbitrario de G , para ver que $G * v$ es consistente, basta ver que existe una solución α de $G * v$. Denotaremos $G[x_1, \dots, x_k]$ al subgrafo de G inducido por los vértices x_1, \dots, x_k . Construiremos $\alpha \in GF(2)$ de la siguiente manera:

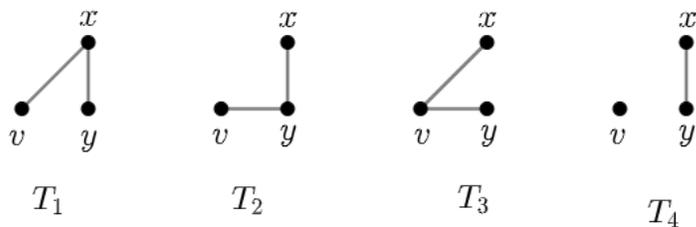
1. Para cada $y \in V(G)$ distinto de v , establecemos $\alpha(v, y) = \beta(v, y)$ y $\alpha(y, v) = \beta(y, v)$.
2. Si $G[v, x, y]$ es un grafo como la figura siguiente, establecemos $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$.



3. Si $G[v, x, y]$ es un K_3 o un K_3 sin la arista (x, y) , establecemos $\alpha(x, y) = \beta(x, y) + \beta(y, x)$.
4. Si $G[v, x, y]$ es un grafo donde $E(G[v, x, y]) = \{(x, y)\}$, establecemos $\alpha(x, y) = \beta(y, x) + \beta(v, x)$.
5. Si $G[v, x, y]$ es un grafo donde $E(G[v, x, y]) = \{(v, x)\}$, establecemos $\alpha(x, y) = \beta(x, y) + \beta(v, y) + 1$.

Es fácil observar que las condiciones 2 a 5 abarcan las 8 combinaciones de $G[v, x, y]$.

Veamos que de ésta forma α es solución para $G * v$. Lo primero que tenemos que ver es $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = 1$ para todo $(x, y) \in E(G * v)$. Tomemos x, y tales que $(x, y) \in E(G * v)$, observemos que $G * v[v, x, y]$ sólo tiene 4 posibilidades y si volvemos a realizar una complementación local en v tenemos que los 4 posibles grafos en $G[v, x, y]$ son los siguientes:



Por lo tanto, es suficiente con ver que $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = 1$ si $G[v, x, y]$ es un grafo como la figura anterior, para que se cumpla la primera ecuación del teorema 4.3.2.

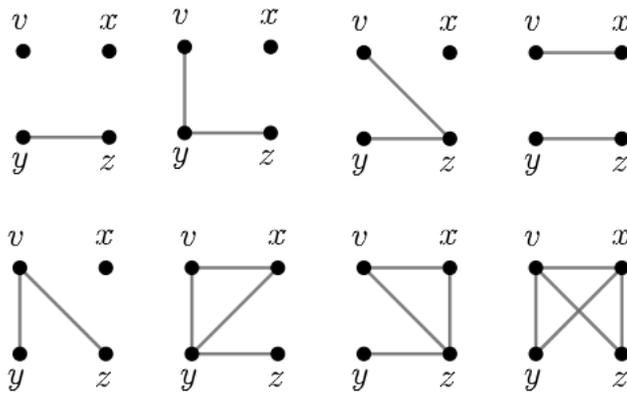
Supongamos que $G[v, x, y]$ es el grafo T_1 o T_2 , por la propiedad (2) de la construcción de α , $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$ y $\alpha(y, x) = \beta(y, x)$. Luego, como β es solución de $S(G)$, se tiene que $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = 1$.

Supongamos que $G[v, x, y]$ es el grafo T_3 , por la propiedad (3) de la construcción de α , $\alpha(x, y) = \beta(x, y) + \beta(y, v)$ y $\alpha(y, x) = \beta(y, x) + \beta(v, y)$. Como β es solución de $S(G)$, usando la ecuación (1), es fácil ver que $\beta(x, v) + \beta(y, v) = \beta(v, x) + \beta(v, y)$, por lo que $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = \beta(x, y) + \beta(y, v) + \beta(y, x) + \beta(v, y) = \beta(v, x) + \beta(v, y) + \beta(x, y) + \beta(y, x) = 1$ por la ecuación (3) de $S(G)$.

Finalmente, si $G[v, x, y]$ es el grafo T_3 , por la propiedad (4) de la construcción de α , $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = \beta(y, x) + \beta(v, x) + \beta(x, y) + \beta(v, y)$. Como β es solución de $S(G)$, usando la ecuación (1), tenemos que $\beta(x, y) + \beta(y, x) = 1$ y por la ecuación (2), $\beta(v, x) + \beta(v, y) = 0$, por lo que $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = 1$.

Por lo tanto $\alpha(x, y) + \alpha(y, x) = 1$ para todo $(x, y) \in E(G * v)$.

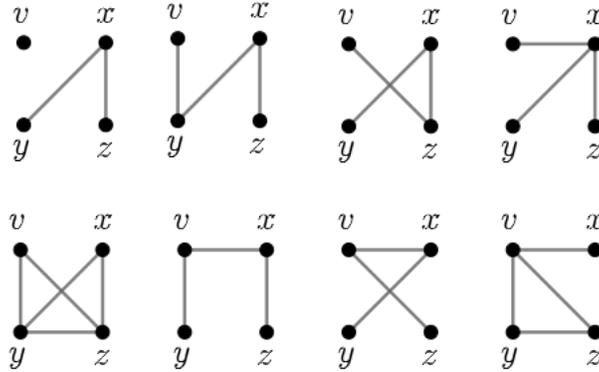
Para verificar $\alpha(x, y) + \alpha(y, z) = 0$ para todo $(x, y) \notin E(G * v)$, $(y, z) \notin E(G * v)$ y $(y, z) \in E(G * v)$ realizaremos el mismo análisis, primero veremos los 8 grafos que obtenemos con estas 3 restricciones, luego complementaremos en v en el grafo $(G * v)[v, x, y, z]$, obteniendo los siguientes 8 grafos en $G[v, x, y, z]$



De la misma manera que hicimos antes, es fácil verificar que $\alpha(x, y) + \alpha(y, z) = 0$ si $G[v, x, y, z]$ es algún grafo de la figura anterior.

Por último, para verificar $\alpha(x, y) + \alpha(x, z) + \alpha(y, z) + \alpha(z, y) = 1$ para todo $(x, y) \in E(G * v)$, $(x, z) \in E(G * v)$ y $(y, z) \notin E(G * v)$, consideramos los 8 grafos posibles con los vértices v, x, y, z y realizamos una complementación local en v . Es fácil chequear

que $\alpha(x, y) + \alpha(x, z) + \alpha(y, z) + \alpha(z, y) = 1$ si $G[v, x, y, z]$ es algún grafo de la figura siguiente.



De esta manera, α es una solución de $S(G * v)$, por lo que $G * v$ resulta consistente. □

A continuación veremos la relación que hay entre los grafos arco-circulares propios y los grafos circulares.

Proposición 4.3.1. *Sea un grafo arco-circular propio, entonces G es un grafo circular.*

Demostración. Sea G un grafo arco-circular propio. Por el teorema 3.1.1, podemos tomar una representación arco-circular propio para G donde no hay dos arcos que cubran todo el círculo. Luego, dado un arco $A = (s, t)$, podemos construir una cuerda L que una los puntos s y t , por lo que obtenemos un modelo circular. □

Sabiendo que los grafos arco-circular propios son una subclase de los grafos circulares, podemos utilizar el teorema de Tucker y el de Bouchet para obtener un resultado sobre las estructuras prohibidas minimales para los grafos circulares.

Analicemos los grafos prohibidos del teorema de Tucker.

Lema 4.3.3. *([12]) Los grafos $\overline{H}_1, \overline{H}_3, H_1^*, \overline{C}_3^*$ y los $\{C_n^*\}_{n \geq 4}$ son circulares.*

Lema 4.3.4. *([12]) Los grafos $\overline{H}_2, \overline{H}_4, \overline{H}_5, \{\overline{C}_{2n}\}_{n \geq 3}$ y $\{\overline{C}_{2n+1}^*\}_{n \geq 2}$ no son circulares.*

De esta forma, podemos el siguiente resultado sobre estructuras prohibidas minimales para los grafos circulares.

Teorema 4.3.3. *([12]) Sea G una estructura prohibida minimal para los grafos circulares, entonces G contiene de forma propia a algún grafo del lema 4.3.3 o es isomorfo a algún grafo del lema 4.3.4.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema 3.1.5., de los dos lemas anteriores y la proposición 4.3.1. \square

Al igual que hicimos con los grafos arco-circulares, presentaremos las caracterizaciones parciales por subgrafos inducidos prohibidos para los grafos circulares. En este caso presentaremos tres caracterizaciones parciales sin demostración debido al extenso background que conlleva.

Definición 4.3.3. Un prisma es un grafo que consiste en la unión de dos C_3 , $\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$, y tres caminos P_1, P_2 y P_3 tal que P_i une v_i con w_i y todos los vértices internos del camino tienen grado dos.

Ejemplo: El grafo $\overline{C_6}$ es un prisma.

Teorema 4.3.4. ([3, 33]) Sea G un grafo que no induce un diamante ni un claw. Entonces, G es un grafo circular si y sólo si G no induce ningún prisma.

Como corolario del teorema de arriba, tenemos la siguiente caracterización parcial de los grafos circulares Helly.

Corolario 4.3.1. Sea G un grafo sin claw. Entonces, G es un grafo circular Helly si y sólo si G no contiene ningún prisma ni diamantes.

Demostración. Sea G un grafo que no contiene ningún claw.

Supongamos que G es un grafo arco-circular Helly, por el corolario 4.0.2, G no contiene ningún diamante. Como G es un grafo circular, por el teorema 4.2.4, G no contiene ningún diamante.

Por otro lado, si G no contiene ningún claw, prisma ni diamantes, por el teorema 4.2.4, G es un grafo arco-circular, y como no contiene diamantes, es un grafo arco-circular Helly. \square

Definición 4.3.4. Un árbol-cografo se define recursivamente utilizando las siguientes reglas:

- Los árboles son árbol-cografos
- Si G es un árbol-cografo, su complemento \overline{G} también es un árbol-cografo
- Si G y H son árboles-cografo, entonces la unión disjunta $G \cup H$ también es un árbol-cografo

Por construcción se sigue que, si G es un árbol-cografo, entonces G o \overline{G} es desconexo, o bien G o \overline{G} es un árbol.

Dados G_1 y G_2 dos grafos, notaremos $G_1 + G_2$ al grafo que se obtiene al unir G_1 y G_2 , donde $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(v_1, v_2) : v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$.

Teorema 4.3.5. ([3]) *Sea G un árbol-cografo. Entonces, G es un grafo circular si y sólo si G no contiene (bipartite claw) + K_1 ni co- (bipartite claw) como subgrafos inducidos.*

Definición 4.3.5. Un grafo es P_4 -tidy si para todo subconjunto $A \subseteq V$ que induce un P_4 en G , existe al menos un vértice v tal que el grafo inducido por los vértices $A \cup \{v\}$ es un grafo que contiene al menos dos P_4 's.

Teorema 4.3.6. ([3]) *Sea G un grafo P_4 -tidy. Entonces, G es un grafo circular si y sólo si no contiene a W_5 , net + K_1 , claw + K_1 o tent-with-center como subgrafos inducidos.*

4.4. Reconocimiento

En esta sección daremos un algoritmo de reconocimiento siguiendo [40]. Luego comentaremos las ideas de otros algoritmos con complejidad menor, no entraremos en detalles profundos ya que sus textos son lo bastante largos y esta tesis tiene que resultar finita.

Sea $S(G)$ el sistema de ecuaciones del teorema de Naji, por el teorema 4.3.2. es suficiente con ver si $S(G)$ tiene solución o no. Es fácil ver que $S(G)$ consta de $n(n-1)$ variables. La ecuación (1) tiene m ecuaciones, el cual puede ser acotado por n^2 . Para ver las cantidad de ecuaciones de (2) y (3) lo tenemos que ver las ternas (v_i, v_j, v_k) de vértices distintos y verificar si se cumplen las condiciones de adyacencias, esto se realiza en $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Sabemos que resolver un sistema lineal de p variables y q ecuaciones tiene complejidad $O(p^2q)$, por lo que el algoritmo de reconocimiento de grafos circulares tiene complejidad $O(n^7)$.

Una idea interesante presentada por Gabor et al. en [17] consiste en un algoritmo basado en descomposiciones split. Un split es una bipartición (A, B) , con $|A|, |B| > 1$ de los vértices de G , en donde existen subconjuntos, lo cuales se lo llaman fronteras, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ tal que no existen aristas entre $A \setminus A'$ y $B \setminus B'$, y todos los vértices de A' son adyacentes a todos los vértices de B' . Un grafo se dice primo si no contiene ningún split. Intruitivamente, se encuentra las descomposiciones split de los split. Es sabido que un

grafo es circular si y sólo si las componentes de su descomposición split son circulares. Esta propiedad fue usada por Garbor et al. para reducir el problema de reconocer un grafo circular al problema de reconocer un grafo primo. Esta reducción facilita el problema, ya que los grafos primos tienen una única representación de cuerdas [5] (salvo reflexiones), dicho algoritmo tiene complejidad $O(nm)$. El algoritmo de Gabor et al. fue mejorado por Spinard [45] en 1994 con complejidad $O(n^2)$. Finalmente, también podemos reconocer la clase de grafos circulares Helly, utilizando cualquier algoritmo de reconocimiento de grafos circulares, basta con verificar si el grafo tiene o no un diamante, es claro que ésto lo podemos verificar en tiempo polinomial, a fuerza bruta y usando la combinatoria, lo podemos hacer en $O(n^4)$.

Capítulo 5

Conclusiones y problemas abiertos

A lo largo de esta tesis hemos estudiado tres clases de grafos, los de intervalo en el capítulo 2, los arco-circulares en el capítulo 3 y los circulares en el capítulo 4. El problema de caracterizar dichas clases no sólo tiene un propósito teórico, sino también aplicado, en cada capítulo hemos citado y en algunos casos mostrado algunas aplicaciones de estas clases, por lo que tener caracterizaciones nos ayuda a obtener algoritmos de reconocimientos, y por lo tanto, resolver dicho problema a través de una computadora.

Sin embargo, los problemas abiertos principales recaen en la clase de grafos arco-circulares y circulares, principalmente en las caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos. Algunos de los problemas abiertos para esta clase de grafos son:

Problema 1: Encontrar una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos para los grafos arco-circulares q -propios, los cuales se definen análogamente a los grafos de intervalos q -propios.

Problema 2: Encontrar una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos para los grafos arco-circulares Helly. Si bien hemos caracterizado esta clase en el teorema 3.2.3, la caracterización fue hecha dentro de la clase de grafos arco-circulares. Por lo tanto, el problema recae en encontrar una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos sin asumir que el grafo sea arco-circular.

Problema 3: Caracterizar los grafos arco-circulares por subgrafos inducidos prohibidos.

Problema 4: Caracterizar a los grafos circulares Helly mediante subgrafos inducidos

prohibidos, nuevamente, la caracterización presentada en esta tesis asume que el grafo es circular.

Problema 5: Caracterizar los grafos circulares mediante subgrafos inducidos prohibidos.

Bibliografía

- [1] Bang-Jensen J. y Hell P., On chordal proper circular arc graphs. *Discrete mathematics* 128, North-Holland (1994), 395-398.
- [2] S. Benzer, On the topology of genetic structure, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 45 (1959) 1607–1620.
- [3] F. Bonomo, G. Durán, L. Grippo, M. Safe, Partial characterizations of circle graphs, *Discrete Applied Mathematics* 159 (2010) 1699–1706.
- [4] F. Bonomo, G. Durán, L. Grippo, M. Safe, Partial characterizations of circular-arc graphs, *Journal of Graph Theory* 61 (2009) 289–306
- [5] A. Bouchet, Reducing prime graphs and recognizing circle graphs, *Combinatorica* 7, 3 (1987) 243-254.
- [6] Carlisle. M. C., Loyd. E. L., On the k-coloring of intervals, LNCS, 497, ICCI'91, (1991) 90-101.
- [7] G. Confessore, P. Dell'olmo, S. Giordani, An approximation result for a periodic allocation problem, *Discrete Applied Mathematics* 112 (2001) 53–72.
- [8] V. Conitzer, J. Derryberry, T. Sandholm, Combinatorial auctions with structured item graphs, in: *Proceedings of the 19th National Conference on Artificial Intelligence*, 1994, pp. 212–218.
- [9] D.G. Corneil, S. Olariu, L. Stewart, The ultimate interval graph recognition algorithm? in: *Proceedings of the 9th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1998, pp. 175–180.
- [10] J. Daligault, D. Gonçalves, M. Rao, Diamond-free circle graphs are Helly circle, *Discrete Mathematics* 310 (2010) 845–849.

- [11] X. Deng, P. Hell, J. Huang, Linear time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs, *SIAM Journal of Computing* 25 (1996) 390–403.
- [12] G. Durán , Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, (2000).
- [13] G. Durán, Some new results on circle graphs, *Matemática Contemporânea* 25 (2003) 91–106.
- [14] G. Durán, A. Gravano, R. McConnell, J. Spinrad, A. Tucker, Polynomial time recognition of unit circular-arc graphs, *Journal of Algorithms* 58 (2006) 67–78.
- [15] S. Even, A. Itai, Queues, stacks and graphs, in: A. Kohavi, A. Paz (Eds.), *Theory of Machines and Computations*, Academic Press, New York, (1971) 71–86.
- [16] Fabri, J., *Automatic Storage Optimization*, (UMI Press Ann Arbor, MI, 1982).
- [17] C. Gabor, K. Supowit and W. Hsu, Recognizing circle graphs in polynomial time, *Journal of the ACM* 36, 3 (1989) 435-473.
- [18] F. Gavril, Algorithms on circular-arc graphs, *Networks* 4 (1974) 357–369.
- [19] E. Gasse, A proof of a circle graph characterization, *Discrete Mathematics* 173 (1997) 277–283.
- [20] P.G. Gilmore, A.J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and interval graphs, *Canadian Journal of Mathematics* 16 (1964) 539–548.
- [21] H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt Rinehardt and Winston, New York, (1964).
- [22] Hajos G., Uber eine Art von Graphen. *Internat. Math. Nachr.* 11 (1957), Problem 65.
- [23] P. Hell, J. Bang-Jensen, J. Huang, Local tournaments and proper circular-arc graphs, *Lecture Notes in Computer Science* 450 (1990) 101–109
- [24] P. Hell, J. Huang, Interval bigraphs and circular-arc graphs, *Journal of Graph Theory* 46 (2004) 313–327.

- [25] W.L. Hsu, $O(mn)$ algorithms for the recognition and isomorphism problems on circular-arc graphs, *SIAM Journal on Computing* 24 (1995) 411–439.
- [26] J. Huang, Tournament-like oriented graphs, Ph.D. Thesis, Simon Fraser University, Burnaby, BC, 1992.
- [27] J. Huang, On the structure of local tournaments, *Journal of Combinatorial Theory B* 63 (1995) 200–221.
- [28] B.C. Joeris, R.M. McConnell, J.P. Spinrad, Helly circular-arc Graphs, *SIAM Conference on Discrete Mathematics*, Victoria, (2006).
- [29] Jungck, J. R., Dick, O. and Dick, A. G., Computer assisted sequencing, interval graphs and molecular evolution, *Biosystem*, 15 (1982) 259-273.
- [30] Kaplan, H., Nussbaum, Y.: A simpler linear-time recognition of circular-arc graphs. In: *The Tenth Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT'06)*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 4059, pp. 289–300. Springer, Berlin (2006)
- [31] Kaplan, H., Nussbaum, Y.: Certifying algorithms for recognizing proper circular-arc graphs and unit circular-arc graphs. In: Fomin, F.V. (ed.) *WG 2006*. LNCS, vol. 4271, pp. 289–300. Springer, Heidelberg (2006)
- [32] Kenneth P. B. y West D. B., A short proof that proper=unit. *Discrete Mathematics* 201, (1999) 21-23.
- [33] T. Kloks, D. Kratsch, H. Müller, Dominoes, *Lecture Notes in Computer Science* 93 (1995) 106–120.
- [34] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1, AddisonWesley, (1969).
- [35] C. Lekkerkerker, D. Boland, Representation of finite graphs by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae* 51 (1962) 45–64.
- [36] M.C. Lin, J.L. Szwarcfiter, Efficient construction of unit circular-arc models, in: *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA'06*, Miami, FL, USA, (2006) 309–315.
- [37] M.C. Lin, J.L. Szwarcfiter, Characterizations and linear time recognition of Helly circular-arc graphs, in: *Proceedings of the 12th Annual International Conference on*

- Computing and Combinatorics, COCOON'06, Taipei, Taiwan, 2006, Lecture Notes in Computer Science 4112 (2006) 73–82.
- [38] M.C. Lin, F. Soulignac, J.L. Szwarcfiter, Proper Helly circular-arc graphs, in: Proceedings of the 33rd International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science, WG'07, Jena, Germany, 2007, Lecture Notes in Computer Science 4769 (2007) 248–257.
- [39] R.M. McConnell, Linear-time recognition of circular-arc graphs, *Algorithmica* 37 (2) (2003) 93–147.
- [40] W. Naji, Reconnaissance des graphes de cordes, *Discrete Math* 54 (1985) 329–337.
- [41] Ohtsuki. T., Mori. H., Khu. E. S., Kashiwabara. T., Fujisawa. T., One dimensional logic gate assignment and interval graph, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 26 (1979) 675–684
- [42] Proskurowski A. y Telle J. A., Classes of graphs with restricted interval models. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 4 (1999), 135–144.
- [43] F. Roberts, Indifference graphs, in: F. Harary (Ed.), *Proof Techniques in Graph Theory*, Academic Press, (1969) 139–146.
- [44] D. Skrien, A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular-arc graphs and nested interval graphs, *Journal of Graph Theory* 6 (1982) 309–316.
- [45] J. Spinrad, Recognition of circle graphs, *Journal of Algorithms*, 16 (2), (1994) 264–282.
- [46] F. Stahl, Circular genetic maps, *Journal Cell. Physiol.* 70 (1967) 1–12.
- [47] K. Stouffers, Scheduling of traffic lights - A new approach, *Transportation Res.* 2 (1968) 199–234.
- [48] J. Szwarcfiter, Recognizing clique-Helly graphs, *Ars Combinatoria* 45 (1997), 29–32.
- [49] A. Tucker, A structure theorem for the consecutive l's property, *J. Comb. Theory* 12 (1972) 153–162.
- [50] A. Tucker, An efficient test for circular-arc graphs, *SIAM J. Comput.* 9 (1980), 1–24.

- [51] A. Tucker, Characterizing circular-arc graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society* 76 (1970) 1257–1260.
- [52] A. Tucker, Matrix characterizations of circular-arc graphs, *Pacific Journal of Mathematics* 38 (1971) 535–545.
- [53] A. Tucker, Structure theorems for some circular-arc graphs, *Discrete Mathematics* 7 (1974) 167–195.
- [54] G. Wegner, Eigenschaften der Nerven homologisch-einfacher Familien in R^n , Ph.D. Thesis, Göttingen (1967).