



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Método numérico espectral para el Laplaciano fraccionario en
dominios bidimensionales generales con frontera suave

Sebastián Agustín Lamas

Director: Oscar P. Bruno

7 de Abril de 2021

Índice General

1	El Laplaciano fraccionario	6
1.1	Motivación	6
1.2	Definición y algunas propiedades	13
2	El problema fraccionario homogéneo de Poisson	19
2.1	Descripción general del problema	19
2.2	El problema unidimensional	20
3	Método propuesto	25
3.1	Descripción del método	25
3.2	Método numérico	33
3.2.1	Evaluación de $(-\Delta)^s u$ para una dada función u	34
3.2.2	Discretización y evaluación de la solución u para una fuente f dada	37
4	Resultados computacionales	52
4.1	Círculo	52
4.2	Elipse	64
5	Conclusiones y trabajo futuro	76
A	Algunos resultados exactos	77
B	Funciones especiales	85
B.1	Funciones gama y beta	85
B.2	Series hipergeométricas	86
B.3	Polinomios de Chebyshev	86
B.4	Polinomios de Gegenbauer	89
B.5	Polinomios de Jacobi	90
C	Demostraciones	91
C.1	Demostración paso expresión (3.3) a (3.4)	91

Agradecimientos

A Oscar, por haber aceptado dirigir esta tesis sin siquiera conocerme e incluso a la distancia. Por todo lo que pude aprender, tanto desde lo relativo a este trabajo como también en lo personal. Fue una de las mejores experiencias de la carrera el haber hecho este trabajo con vos, siempre te voy a estar sumamente agradecido por todo.

A Gabriel y Ricardo por haber aceptado ser jurados de esta tesis y haberse tomado el trabajo de leerla en un tiempo muy particular, a pesar de estar con otras obligaciones.

A mi familia, en especial mi mamá, mi papá y mi hermana por haberme acompañado siempre; y en particular a lo largo de la carrera. A mis amigas y amigos, tanto del colegio como de la facultad.

A la UBA y al DM por la educación de calidad que recibí en estos años como estudiante.

Resumen

El objetivo de esta tesis va a consistir en el desarrollo de un método numérico espectral para tratar el problema fraccionario de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas en dominios bidimensionales generales con frontera suave. El trabajo está organizado en cinco capítulos y tres anexos.

En el capítulo 1, la intención es dar respuesta a la pregunta qué es el Laplaciano fraccionario. Comenzamos comentando una motivación física para entender una posible aplicación de este operador. Luego, mencionamos distintas definiciones equivalentes y notamos algunas propiedades, las cuales haremos uso a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2, describimos a grandes rasgos en qué consiste el problema fraccionario homogéneo de Poisson para el caso n -dimensional. A su vez, prestamos particular atención a qué es lo que ocurre cuando $n = 1$. Para ello, comentamos brevemente los resultados presentados en el paper [4], cuyas deducciones van a ser de gran importancia para el desarrollo de nuestra propuesta.

En el capítulo 3, detallamos el desarrollo y la implementación del método para tratar el problema en el caso n -dimensional y, en particular, para $n = 2$. En primer lugar, deducimos una formulación basándonos en los resultados comentados en el capítulo previo. Luego, describimos, para el caso bidimensional, una posible implementación de la expresión deducida.

En el capítulo 4, probamos el método en dos dominios: el círculo y la elipse. Comenzamos definiendo algunos parámetros propios a cada dominio y necesarios en la implementación de nuestra propuesta. Luego, aplicamos el programa en distintas funciones, sobre las cuales sabemos la solución exacta, de modo que sea posible comparar las aproximaciones obtenidas. Además, sobre dichas funciones, estudiamos el desempeño de nuestro método en comparación con otros ya existentes y publicados en diversos trabajos.

Finalmente, en el capítulo 5, comentamos algunas conclusiones y posibles trabajos futuros, que actualmente estamos estudiando para mejorar la propuesta de esta tesis.

En relación a los apéndices, en el apéndice A, probamos analíticamente que, mediante este método que presentamos, es posible deducir algunas de las formulaciones exactas de la solución al problema en el caso del círculo y la elipse. En el apéndice B, definimos ciertas funciones especiales que usamos a lo largo del trabajo junto con algunas de sus

propiedades más importantes. Por último, en el apéndice C, demostramos un paso que se realiza durante la deducción del método en el capítulo 3.

Capítulo 1

El Laplaciano fraccionario

En las últimas décadas, se empezó a explorar el cálculo fraccionario como una herramienta para el desarrollo de modelos matemáticos más sofisticados que puedan describir con mayor exactitud ciertos procesos. En particular, el Laplaciano fraccionario comenzó a ser utilizado en muchas de estas formulaciones, lo cual despertó un gran interés para su estudio. Iniciaremos este capítulo con un problema que involucra a este operador, para motivar una posible interpretación del mismo. Luego, comentaremos en detalle su formulación junto con algunas de sus propiedades más importantes.

1.1 Motivación

Comencemos con una motivación física del operador. En un principio, vamos a abordar un problema unidimensional, que luego generalizaremos al caso n -dimensional.¹

Supongamos que tenemos una columna de N_p partículas ubicadas en el eje x en la posición $x = \frac{1}{2}\Delta x$, y otra columna de N_p partículas en la posición $x = -\frac{1}{2}\Delta x$, tal como muestra la figura 1.1, con Δx un intervalo específico.

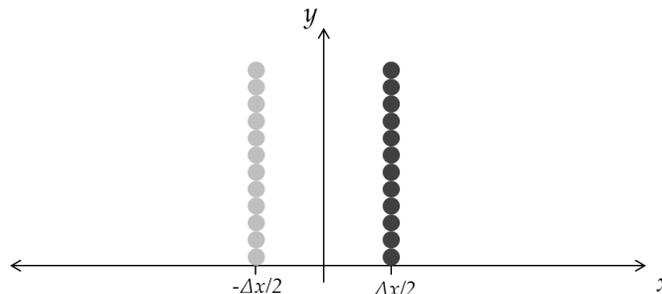


Figura 1.1: Distribución inicial de las partículas

¹Esta sección está basada en los capítulos 1 de [6] y [12].

Obviamente, el número total de partículas es $2N_p$.

Ahora, supongamos que cada partícula se desplaza al azar una cantidad Δx a derecha, con probabilidad q , o a izquierda, con probabilidad $1 - q$; donde $0 \leq q \leq 1$. Es decir, en el nuevo instante, van a haber partículas en las posiciones $x = -\frac{3}{2}\Delta x$, $x = -\frac{1}{2}\Delta x$, $x = \frac{1}{2}\Delta x$ ó $x = \frac{3}{2}\Delta x$.

Si repetimos este procedimiento n veces, las partículas, que inicialmente ocupaban las posiciones $x = -\frac{1}{2}\Delta x$ y $x = \frac{1}{2}\Delta x$, pasaron a ocupar posiciones discretas a lo largo del eje x en los nodos de la forma $x_i = (i - \frac{1}{2})\Delta x$ para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; tal como se ve en la figura 1.2.

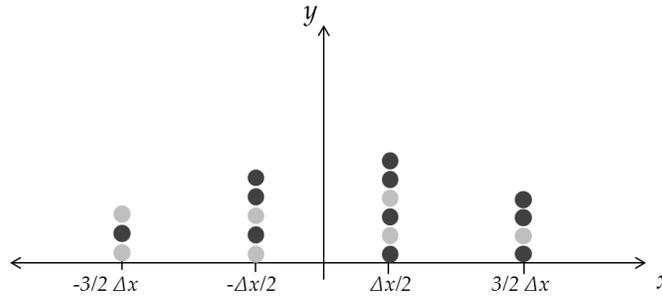


Figura 1.2: Posible distribución de las partículas luego de n saltos

Llamemos $m_i(n)$ a la cantidad de partículas que tiene el nodo i en el instante n . En un comienzo, $m_i(0) = 0$ para cualquier i , excepto $m_0(0) = N_p$ y $m_1(0) = N_p$. Como las partículas se mueven a una distancia fija Δx en cada paso, $m_i(n) \neq 0$ sólo para $-n \leq i \leq n + 1$. A su vez, como la cantidad de partículas se conserva en cada instante, tenemos

$$\sum_{i=-n}^{n+1} m_i(n) = 2N_p,$$

para cualquier n . Finalmente, introducimos un paso temporal Δt y definimos $t_n = n\Delta t$ como el tiempo transcurrido.

Para estudiar el movimiento colectivo de las partículas, cuantificamos la dinámica en términos de una densidad de distribución discreta definida como

$$p_i(n) = \frac{1}{2N_p} m_i(n)$$

para $-n \leq i \leq n + 1$. Por definición, y por la conservación de la cantidad de las partículas en cada instante,

$$\sum_{i=-n}^{n+1} p_i(n) = 1,$$

independientemente del número de pasos n . Las condiciones iniciales indican que $p_0(0) = \frac{1}{2}$ y $p_1(0) = \frac{1}{2}$.

Veamos que estos saltos, también conocidos como paseos aleatorios, representan un proceso de difusión ordinario.

La ecuación de difusión ordinaria para una función $f(x, t)$ está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

donde t es una variable temporal, x es una variable espacial y κ es una constante de difusividad. A esta ecuación también se la conoce como ecuación del calor unidimensional. La condición inicial es un impulso aplicado en el origen del eje x , que recuerda a la doble columna de partículas que se muestra en la figura 1.1, descrita por la función delta de Dirac en una dimensión

$$f(x, t = 0) = \delta_1(x).$$

La solución de la ecuación diferencial sujeta a dicha condición inicial es la función de Green

$$f(x, t) = \mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

para $t > 0$.

Volvamos a nuestro problema. Consideremos el caso en el que $q = \frac{1}{2}$, es decir, cada partícula tiene igual probabilidad de moverse a izquierda o derecha. Lleguemos a una relación entre la ecuación de difusión ordinaria y los paseos aleatorios.

Luego de un salto, todas las partículas que se encontraban en el nodo i se fueron al nodo siguiente o anterior. Además, en promedio, la mitad de las partículas de los nodos $i - 1$ e $i + 1$ llegaron al nodo i . Con lo cual, obtenemos el siguiente balance de población

$$p_i(n + 1) = \frac{1}{2}p_{i-1}(n) + \frac{1}{2}p_{i+1}(n).$$

Si restamos a ambos lados $p_i(n)$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$p_i(n + 1) - p_i(n) = \frac{1}{2}(p_{i-1}(n) - 2p_i(n) + p_{i+1}(n)).$$

Dividiendo por Δt ,

$$\frac{p_i(n + 1) - p_i(n)}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} (p_{i-1}(n) - 2p_i(n) + p_{i+1}(n)).$$

Llamamos $\kappa = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$, y obtenemos

$$\frac{p_i(n + 1) - p_i(n)}{\Delta t} = \kappa \frac{p_{i-1}(n) - 2p_i(n) + p_{i+1}(n)}{\Delta x^2}.$$

Si observamos bien, el lado izquierdo es una aproximación de la derivada temporal mediante diferencias *forward* y el lado derecho es una aproximación de la derivada espacial mediante diferencias centradas. En consecuencia, la ecuación anterior se puede pensar como la representación discreta de la ecuación de difusión para una distribución $p(x, t)$.

Por lo tanto, los paseos aleatorios que describimos representan un proceso de difusión ordinario con constante de difusividad

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}.$$

Pensemos ahora lo siguiente, ¿qué pasa si permitimos que cada partícula pueda no sólo saltar una posición a derecha o izquierda, sino que pueda hacerlo a cualquier nodo arbitrario a lo largo del eje x ? Para analizar este caso, consideremos algunas definiciones.

La probabilidad de saltar a derecha o izquierda k intervalos la denotamos π_k para $k = 0, \pm 1, \dots$, sujeto a que $\pi_0 = 0$. Por ejemplo, en el caso de los paseos aleatorios mencionados al inicio de la sección, todos los π_k eran cero, salvo $\pi_1 = q$ y $\pi_{-1} = 1 - q$. Necesitamos pedir que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi_k = 1,$$

que se conoce como condición de normalización. En el caso de saltos simétricos, $\pi_k = -\pi_{-k}$.

Ahora, la ecuación de balance poblacional está dada por

$$p_i(n+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{i-k}(n) \pi_k.$$

Usando la condición de normalización, podemos reescribir la expresión anterior como

$$p_i(n+1) - p_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p_{i-k}(n) - p_i(n)) \pi_k.$$

Dividiendo ambos miembros por Δt , obtenemos

$$\frac{p_i(n+1) - p_i(n)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (p_{i-k}(n) - p_i(n)) \pi_k.$$

Un interés particular radica en saltos simétricos con

$$\pi_k(s) = \frac{1}{2\zeta_{1+2s}} \frac{1}{|k|^{1+2s}}$$

donde $k \neq 0$, $s \in (0, 1]$ y

$$\zeta_\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^\alpha}$$

que es la bien conocida función zeta de Riemann definida para $\alpha > 1$. Para $k = 0$, tomamos $\pi_0(s) = 0$.

Claramente se cumple la condición de normalización pues

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi_k = \frac{1}{2\zeta_{1+2s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{1}{|k|^{1+2s}} = 1,$$

donde el prima indica que la sumatoria omite el término correspondiente a $k = 0$.

Sustituyendo este π_k en la ecuación previamente deducida, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{p_i(n+1) - p_i(n)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2\zeta_{1+2s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p_{i-k}(n) - p_i(n)}{|k|^{1+2s}} \\ &= \frac{\Delta x^{2s}}{\Delta t} \frac{1}{2\zeta_{1+2s}} \left(\frac{1}{\Delta x^{2s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{p_{i+k}(n) - p_i(n)}{|k|^{1+2s}} \right). \end{aligned}$$

Llamando

$$\nu_s = \frac{1}{2\zeta_{1+2s}} \frac{\Delta x^{2s}}{\Delta t},$$

llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{p_i(n+1) - p_i(n)}{\Delta t} = \nu_s \left(\frac{1}{\Delta x^{2s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{p_{i+k}(n) - p_i(n)}{|k|^{1+2s}} \right).$$

El término dentro del paréntesis representa la aproximación mediante la regla de punto medio del valor principal (P.V.) de una integral impropia singular,

$$\frac{1}{\Delta x^{2s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \frac{p_{i+k}(n) - p_i(n)}{|k|^{1+2s}} \simeq \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+v, t) - f(x, t)}{|v|^{1+2s}} dv,$$

donde la función $f(x, t)$ describe una distribución continua y suave que tiene una derivada primera continua, asumiendo que $f(x_i, t_n) = p_i(n)$.

Tomando límite para Δt y Δx tendiendo a cero, obtenemos la siguiente ecuación para $f(x, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu_s \text{ P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+v, t) - f(x, t)}{|v|^{1+2s}} dv.$$

Tal como veremos en la siguiente sección, la fórmula del Laplaciano fraccionario unidimensional para la función $f(x, t)$ es

$$(-\Delta)^s f(x, t) = C_{1,s} \text{ P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, t) - f(x + v, t)}{|v|^{1+2s}} dv,$$

donde $C_{1,s}$ es una constante. Con lo cual, la ecuación que obtuvimos para $f(x, t)$ la podemos reescribir como

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\kappa_s (-\Delta)^s f,$$

donde

$$\kappa_s = \frac{\nu_s}{C_{1,s}}.$$

Esta ecuación describe un proceso de difusión fraccionaria con coeficiente de difusión fraccionaria κ_s . También se la conoce como ecuación de difusión fraccionaria inestable (o *unsteady fractional diffusion equation*).

Veamos ahora lo que ocurre en el caso n -dimensional. Consideremos una partícula que se mueve en \mathbb{R}^n de forma aleatoria. Estos movimientos los tomamos discretos en tiempo (fijando Δt paso temporal) y en espacio (fijando Δx paso espacial). Elegimos $\Delta t = \Delta x^{2s}$ y denotamos $u(x, t)$ a la probabilidad de hallar la partícula en el punto x al instante t .

Supongamos que la partícula en \mathbb{R}^n se mueve del siguiente modo: en cada paso temporal Δt , la partícula elige al azar una dirección $v \in \partial B_1$ (de acuerdo a la distribución uniforme en ∂B_1) y un número natural $k \in \mathbb{N}$ bajo la probabilidad P , y se mueve con el paso espacial $k\Delta xv$. Dado un $I \subset \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, definimos la probabilidad P como

$$P(I) := \gamma_s \sum_{k \in I} \frac{1}{|k|^{1+2s}}.$$

La constante γ_s se toma para normalizar P , de modo que sea una medida de probabilidad. Es decir,

$$\gamma_s := \frac{1}{\zeta_{1+2s}}.$$

Notemos que saltos grandes están permitidos con probabilidad muy chica. Luego, si la partícula está en tiempo t en el punto x_0 , en el instante $t + \Delta t$, siguiendo el procedimiento, va a elegir una dirección $v \in \partial B_1$ y un número natural $k \in \mathbb{N}$, y se desplazará hacia $x_0 + k\Delta xv$. En la figura 1.3 se puede ver un ejemplo del procedimiento descripto.

La probabilidad de hallar la partícula en x al instante $t + \Delta t$ es la suma de las probabilidades de hallar la partícula en otro lugar, digamos $x + k\Delta xv$, para una dirección $v \in \partial B_1$ y un número natural $k \in \mathbb{N}$ (que lo notamos $u(x + k\Delta xv, t)$), multiplicado

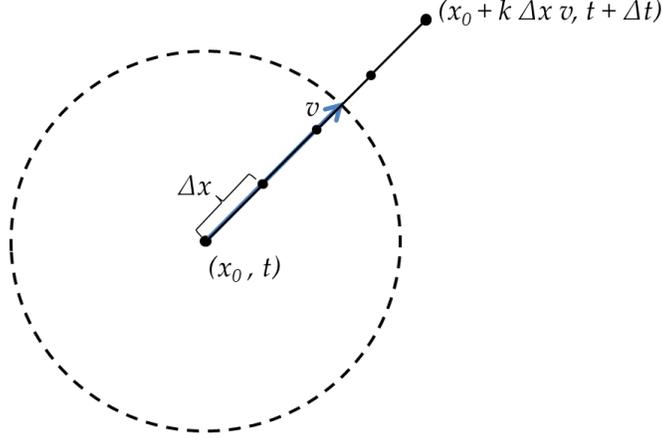


Figura 1.3: Ejemplo de paseo aleatorio en \mathbb{R}^n

por la probabilidad de haber elegido dicha dirección (que, al ser uniforme, es $\frac{1}{|\partial B_1|}$) y la probabilidad de haber elegido dicho número natural (que, por la definición de P es $\frac{\gamma_s}{|k|^{1+2s}}$). Con lo cual,

$$u(x, t + \Delta t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} u(x + k \Delta x v, t) \frac{1}{|\partial B_1|} \frac{\gamma_s}{|k|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v).$$

Notemos que este sería el análogo del balance poblacional que hacíamos para el caso unidimensional, pero ahora en \mathbb{R}^n . Podemos reescribir la ecuación como

$$u(x, t + \Delta t) = \frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + k \Delta x v, t)}{|k|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v).$$

Restando $u(x, t)$ en ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) - u(x, t) &= \frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + k \Delta x v, t)}{|k|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v) - u(x, t) \\ &= \frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + k \Delta x v, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v). \end{aligned}$$

Dividiendo por $\Delta t = \Delta x^{2s}$,

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^{2s}} \frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + k \Delta x v, t) - u(x, t)}{|k|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v).$$

Tal como indicamos en el caso unidimensional,

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \simeq \partial_t u(x, t)$$

al ser la discretización de la derivada temporal usando diferencias *forward*. Con respecto al término del lado derecho, podemos reconocer nuevamente la aproximación mediante la regla de punto medio del valor principal, por lo que la expresión la podemos aproximar por

$$\frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial B_1} \frac{u(x + rv, t) - u(x, t)}{|r|^{1+2s}} d\mathcal{H}^{n-1}(v) dr.$$

Finalmente, usando coordenadas polares, la integral nos queda

$$\frac{\gamma_s}{|\partial B_1|} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Al igual que en el caso de una dimensión, y tal como veremos en la siguiente sección, el término del lado derecho es una constante multiplicada por $-(-\Delta)^s u / C_{n,s}$. Por lo que, para pasos temporales y espaciales muy chicos, el proceso probabilístico previamente descrito se aproxima a la ecuación del calor fraccionaria

$$\partial_t u(x, t) = -\kappa_{s,n} (-\Delta)^s u(x, t)$$

con

$$\kappa_{s,n} = \frac{\gamma_s}{|\partial B_1| C_{n,s}}.$$

De este modo, mediante una motivación física, vimos un posible origen y describimos una posible formulación del Laplaciano fraccionario. En la siguiente sección definiremos formalmente el operador y mencionaremos algunas de sus propiedades.

1.2 Definición y algunas propiedades

En la sección anterior, vimos una posible definición del Laplaciano fraccionario que involucraba una integral donde aparecía el valor principal junto con una constante que llamamos $C_{n,s}$, donde n era la dimensión del espacio en el que nos encontrábamos y $s \in (0, 1)$. Mencionemos una primera definición y veamos su equivalencia con otras.

Definición 1.2.1. *Dada una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (que suponemos suficientemente regular) y $s \in (0, 1)$, definimos el Laplaciano fraccionario de u como*

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad (1.1)$$

donde

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (1.2)$$

Para poder definir de este modo al operador es suficiente, por simplicidad, tomar la función u en el espacio de Schwartz de funciones suaves que decaen rápidamente (que detallaremos más adelante), o en $C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Previamente, habíamos representado al Laplaciano fraccionario como

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+z)}{|z|^{n+2s}} dz. \quad (1.3)$$

Claramente, ambas definiciones son equivalentes, ya que llamando $z = y - x$ en (1.1), obtenemos la expresión anterior. Notemos que en este caso la singularidad ocurre en z cercano a cero, con lo que la definición de valor principal quedaría

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+z)}{|z|^{n+2s}} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x) - u(x+z)}{|z|^{n+2s}} dz.$$

Otra posible definición del Laplaciano fraccionario es

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy. \quad (1.4)$$

Veamos la equivalencia con (1.1). Observemos, en primer lugar, que la integral no requiere la formulación del valor principal ya que, tomando $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y localmente C^2 , usando la expansión de Taylor de u en $B_1(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|2u(x) - u(x+y) - u(x-y)|}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq 4\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} |y|^{-n-2s} dy + \int_{B_1(0)} \frac{|D^2 u(x)| |y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \\ & \leq 4\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} |y|^{-n-2s} dy + \|D^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_1(0)} |y|^{-n-2s+2} dy < \infty. \end{aligned}$$

Con lo cual, podemos escribir

$$\frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{C_{n,s}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy$$

Separando los términos en la integral y haciendo algunos cambios de variables,

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{n,s}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \frac{u(x) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy \right] \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(\zeta)}{|x - \zeta|^{n+2s}} d\zeta \right] \\
&= C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(\eta)}{|x - \eta|^{n+2s}} d\eta,
\end{aligned}$$

que coincide con (1.1).

En todas estas definiciones hay un parámetro que aún no hemos caracterizado: el valor de $C_{n,s}$. Veamos cómo calcular esta constante. Para ello, recordemos algunas nociones de transformada y transformada inversa de Fourier.

Consideremos el espacio de Schwartz de las funciones que decaen rápidamente

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_\beta f(x)| < \infty\}.$$

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$; la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier están definidas, respectivamente, como

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi^t x} dx$$

y

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi^t x} d\xi.$$

Usando estos conceptos, probemos el siguiente lema, del cual vamos a poder deducir la expresión de $C_{n,s}$.

Lema 1.2.1. *Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}[(2\pi|\xi|)^{2s} \widehat{u}(\xi)](x).$$

Demostración. Consideremos la definición (1.4) del operador.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(-\Delta)^s u(x)](\xi) &= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{F}[(2u(x) - u(x+y) - u(x-y))](\xi)}{|y|^{n+2s}} dy \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) \frac{2 - e^{2\pi i \xi^t y} - e^{-2\pi i \xi^t y}}{|y|^{n+2s}} dy \\
&= C_{n,s} \widehat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \xi^t y)}{|y|^{n+2s}} dy,
\end{aligned}$$

usando que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

Haciendo el cambio de variables $z = |\xi|y$, obtenemos

$$J(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\xi^t y)}{|y|^{n+2s}} dy = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\xi^t \frac{z}{|\xi|})}{|z|^{n+2s}} dz.$$

Veamos que J es invariante ante rotaciones. Sea $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de rotación, queremos probar que $J(\xi) = J(R\xi)$.

$$J(R\xi) = |R\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \frac{(R\xi)^t}{|R\xi|} z)}{|z|^{n+2s}} dz.$$

En particular,

$$|R\xi| = \sqrt{(R\xi)^t (R\xi)} = \sqrt{\xi^t R^t R \xi} = \sqrt{\xi^t \xi} = |\xi|,$$

pues, como R es una matriz de rotación, $R^t = R^{-1}$. Con lo cual, $|R\xi|^{2s} = |\xi|^{2s}$ y $|R\xi| = |\xi|$.

Entonces,

$$J(R\xi) = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \frac{\xi^t R^t z}{|\xi|})}{|z|^{n+2s}} dz.$$

Haciendo el cambio de variables $z = R\tilde{z}$ y usando que $|\det(R)| = 1$,

$$J(R\xi) = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \frac{\xi^t R^t R \tilde{z}}{|\xi|})}{|R\tilde{z}|} d\tilde{z} = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi \frac{\xi^t \tilde{z}}{|\xi|})}{|\tilde{z}|} d\tilde{z} = J(\xi).$$

Por lo tanto, J es invariante ante rotaciones. Consideramos una rotación R que manda el vector canónico $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t$ en $\xi/|\xi|$. Luego,

$$J(\xi) = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi (R e_1^t)^t z)}{|z|^{n+2s}} dz = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi e_1^t R^t z)}{|R^t z|^{n+2s}} dz.$$

Usando el cambio de variables $w = R^t z$, tenemos que

$$J(\xi) = |\xi|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi w_1)}{|w|^{n+2s}} dw,$$

donde w_1 es la primera coordenada del vector w . Haciendo un nuevo cambio de variables $\tilde{w} = 2\pi w$, obtenemos

$$J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\tilde{w}_1)}{|\tilde{w}|^{n+2s}} d\tilde{w}.$$

Definimos

$$C_{n,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\tilde{w}_1)}{|\tilde{w}|^{n+2s}} d\tilde{w} \right)^{-1}.$$

Con lo cual,

$$J(\xi) = \frac{(2\pi|\xi|)^{2s}}{C_{n,s}}.$$

Volviendo a la fórmula de la transformada de Fourier del Laplaciano fraccionario,

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^s u(x)](\xi) = C_{n,s} \widehat{u}(\xi) J(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2s} \widehat{u}(\xi).$$

Tomando la transformada inversa de Fourier, obtenemos lo que queríamos probar. \square

Por lo tanto, además de haber probado un resultado importante del Laplaciano fraccionario, llegamos a una expresión para $C_{n,s}$. Para poder escribir un poco mejor dicha constante, utilicemos el siguiente lema.

Lema 1.2.2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $s \in (0, 1)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi\tilde{w}_1)}{|\tilde{w}|^{n+2s}} d\tilde{w} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}{2^{2s} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}.$$

Demostración. Ver demostración lema 2.3 en [6]. \square

Entonces,

$$C_{n,s} = \frac{2^{2s} s \Gamma(\frac{n}{2} + s)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1-s)}.$$

para $n \geq 1$ y $s \in (0, 1)$.

Para finalizar, veamos una relación entre el Laplaciano fraccionario y el operador Laplaciano clásico. En el caso de este último,

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}(\xi)])(x) = -\Delta \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i \xi^t x} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|\xi|)^2 \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}[(2\pi|\xi|)^2 \widehat{u}(\xi)](x). \end{aligned}$$

Es decir, el Laplaciano clásico actúa en el espacio de Fourier como un multiplicador de $(2\pi|\xi|)^2$. Por el lema 1.2.1, vimos que el Laplaciano fraccionario actúa en el espacio de Fourier como un multiplicador de $(2\pi|\xi|)^{2s}$. Notemos, entonces, que si tomáramos $s \rightarrow 1$, tenemos el caso del Laplaciano clásico. Con lo cual, juntando esta observación con el lema 1.2.1, se puede ver que

$$\lim_{s \rightarrow 1} (-\Delta)^s u = -\Delta u \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (-\Delta)^s u = u.$$

De este modo, finalizamos este capítulo habiendo mencionado un problema que involucra al operador Laplaciano fraccionario a modo de motivación para entender un posible origen y una de sus tantas formulaciones. A su vez, comentamos varias definiciones y propiedades de dicho operador. En el siguiente capítulo, nos vamos a concentrar en un problema particular que involucra al Laplaciano fraccionario y que constituye el tema central de este trabajo.

Capítulo 2

El problema fraccionario homogéneo de Poisson

El problema fraccionario de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas es un problema que fue ampliamente estudiado en los últimos años y lo continúa siendo actualmente. El objetivo de este capítulo es comentar brevemente algunos resultados existentes tanto para el caso unidimensional como para el n -dimensional de este problema. Estas ideas van a ser usadas fuertemente en la descripción del método numérico propuesto en el siguiente capítulo.

2.1 Descripción general del problema

Dada una función f , con cierta regularidad, definida en un dominio abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s \in (0, 1)$, el problema fraccionario homogéneo de Poisson consiste en hallar una función u que cumpla

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c. \end{cases} \quad (2.1)$$

Desarrollar métodos numéricos que resuelvan este problema tiene la dificultad de que la solución u es singular cerca del borde. Varios resultados se han publicado en el tema, tratando esta cuestión. Por ejemplo, en [13] se demostró regularidad global Hölder de las soluciones del problema (2.1) y que el cociente $u(x)/\omega^s(x)$ permanece acotado para $x \rightarrow \partial\Omega$, donde ω es una función suave que se comporta como $\text{dist}(x, \Omega^c)$ cerca de $\partial\Omega$.

Un resultado útil que utilizaremos en el siguiente capítulo es el mencionado en [10]. En dicho trabajo, generalizan el resultado anterior, probando que si Ω es un dominio C^∞ ,

$$f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \iff u = w^s \cdot \psi \text{ con } \psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

y

$$f \in H^r(\bar{\Omega}) \Rightarrow u = \chi + w^s \cdot \psi \text{ con } \chi \in H_0^{r+2s}(\bar{\Omega}) \text{ y } \psi \in H^{r+s}(\bar{\Omega})$$

para $r + s - \frac{1}{2} > 0$ (y $\notin \mathbb{Z}$).

Nosotros, a lo largo del trabajo, vamos a suponer esta condición de regularidad del dominio para poder utilizar estas descomposiciones de la función u .

En la siguiente sección, presentamos algunos de los resultados publicados en [4] para el caso del problema en una dimensión. Estos resultados, junto con el comentario mencionado en el párrafo anterior, los vamos a tener en cuenta para el desarrollo de nuestro método numérico en el próximo capítulo.

2.2 El problema unidimensional

En esta sección mencionaremos algunos de los resultados presentados en [4] para el caso del problema (2.1) con $n = 1$, que luego utilizaremos en el siguiente capítulo.

Recordemos nuestro problema: dada f , con cierta regularidad, definida en un dominio abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $s \in (0, 1)$, hallar una función u que cumpla (2.1). Para el caso unidimensional, consideramos Ω del siguiente modo:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M (a_i, b_i) \tag{2.2}$$

donde los intervalos (a_i, b_i) son abiertos y con clausuras disjuntas. Denotamos $\partial\Omega = \{a_1, b_1, \dots, a_M, b_M\}$.

Tomemos la definición de Laplaciano fraccionario formulada en (1.3),

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{1,s} \text{ P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) - u(x+z)}{|z|^{1+2s}} dz.$$

Claramente, haciendo el cambio de variables $z = -y$, esta expresión es equivalente a

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{1,s} \text{ P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) - u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy.$$

Reexpresemos la formulación anterior del Laplaciano fraccionario como una integral sobre Ω , teniendo en cuenta las condiciones de contorno Dirichlet en Ω^c . Esto lo vamos a ver en el siguiente lema, que primero formulamos para $\Omega = (a, b)$ y luego extendemos para Ω siguiendo la definición (2.2).

Lema 2.2.1. Sean $s \in (0, 1)$, $u \in C_0^2(a, b)$ tal que $|u'|$ es integrable en (a, b) y $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \partial\Omega = \{a, b\}$. Definimos

$$C_s = \frac{C_{1,s}}{2s(1-2s)} = -\Gamma(2s-1) \sin(\pi s) / \pi \quad (s \neq 1/2).$$

Luego, tenemos

$$\text{-Caso } s \neq \frac{1}{2}: \quad (-\Delta)^s u(x) = C_s \frac{d}{dx} \int_a^b |x-y|^{1-2s} \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

$$\text{-Caso } s = \frac{1}{2}: \quad (-\Delta)^{1/2} u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^b \ln|x-y| \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

Demostración. Ver demostración lema 2.3 en [4]. □

Corolario 2.2.1. Dado un dominio Ω definido como (2.2), para $u \in C_0^2(\Omega)$ y $x \notin \partial\Omega$, tenemos

$$\text{-Caso } s \neq \frac{1}{2}: \quad (-\Delta)^s u(x) = C_s \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^M \int_{a_i}^{b_i} |x-y|^{1-2s} \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

$$\text{-Caso } s = \frac{1}{2}: \quad (-\Delta)^{1/2} u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^M \int_{a_i}^{b_i} \ln|x-y| \frac{d}{dy} u(y) dy.$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^M \{a_i, b_i\}$.

Demostración. Ver demostración corolario 2.5 en [4]. □

Notemos que para que valga la representación del operador $(-\Delta)^s$ descrita en el lema 2.2.1 y el corolario 2.2.1, una de sus hipótesis establece que la función u se debe anular en el borde de Ω , dado que se pide $u \in C_0^2(a, b)$. En el paper se hace un estudio detallado de la acción bajo ciertos operadores integrales de ciertas funciones u definidas en $\Omega = (a, b)$ que *no necesariamente* se anulan en a ó b . Dichos operadores son

$$S_s[u](x) := C_s \int_a^b (|x-y|^{1-2s} - (b-a)^{1-2s}) u(y) dy \quad (s \neq \frac{1}{2}),$$

$$S_{\frac{1}{2}}[u](x) := \frac{1}{\pi} \int_a^b \log\left(\frac{|x-y|}{b-a}\right) u(y) dy,$$

$$T_s[u](x) := \frac{\partial}{\partial x} S_s \left[\frac{\partial}{\partial y} u(y) \right] (x).$$

En el caso de T_s , este operador coincide con $(-\Delta)^s$ para funciones u que satisfacen la hipótesis del lema 2.2.1, pero T_s no coincide con $(-\Delta)^s$ para funciones u que no se anulan en $\partial\Omega = \{a, b\}$.

A lo largo de la sección 3 del paper, los autores estudian la imagen de los operadores $T_s[u]$ y $S_s[u]$, para ciertas funciones u . Comentemos a grandes rasgos algunos resultados de dicha sección. Comienzan considerando $\Omega = (0, 1)$ (luego generalizan los resultados para el caso $\Omega = (a, b)$) y estudian la imagen de $T_s[u_\alpha]$ para $u_\alpha(y) = y^\alpha$ con $\text{Re}(\alpha) > 0$, que es suave en $(0, 1)$, pero que tiene una singularidad algebraica en el punto $y = 0$. Logran demostrar que cuando $\alpha = s + n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $T_s[u_\alpha](x)$ se puede extender analíticamente a una región que contenga al punto $x = 0$. Basándose en este resultado, y siguiendo bajo el supuesto de que $\Omega = (0, 1)$, evalúan explícitamente las imágenes de las funciones de la forma $v(y) = y^{s+n}(1-y)^s$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que son singulares en los extremos $y = 0$ e $y = 1$, bajo los operadores integrales T_s y S_s . Logran probar que la imagen de $T_s[v]$ para dichas funciones v se pueden extender analíticamente a una región que contenga al intervalo $[0, 1]$. Además, demuestran que $T_s[u]$ es un polinomio de grado n . Esta conclusión es importante porque conduce a otros dos resultados: la diagonalización de la versión pesada del Laplaciano fraccionario y suavidad e incluso analicidad (salvo un peso singular multiplicativo) de las soluciones de la ecuación del problema bajo ciertas hipótesis sobre f .

Veamos a qué nos referimos con la forma diagonal del Laplaciano fraccionario pesado. Usando la función de peso

$$w^s(y) = (y-a)^s(b-y)^s$$

para $\phi \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ (esto es, ϕ es suave hasta el borde pero no necesariamente se anula en el borde), introducimos la versión pesada

$$K_s(\phi) = C_s \frac{d}{dx} \int_a^b |x-y|^{1-2s} \frac{d}{dy} (w^s \phi(y)) dy \quad (s \neq 1/2)$$

del operador T_s . Recordando el lema 2.2.1, K_s se puede ver como la versión pesada del operador Laplaciano fraccionario, con lo que definimos

$$(-\Delta)_w^s[\phi] = K_s(\phi) \text{ para } \phi \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b].$$

Claramente, dada una solución ϕ de la ecuación

$$(-\Delta)_w^s[\phi] = f$$

en el dominio $\Omega = (a, b)$, la función $u = w^s \phi$ extendida a cero fuera de (a, b) resuelve el problema de Dirichlet del Laplaciano fraccionario (2.1).

Para estudiar las propiedades espectrales del operador $(-\Delta)_w^s$, se define el espacio L^2 pesado

$$L_s^2(a, b) = \left\{ \phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |\phi|^2 w^s < \infty \right\},$$

que, con el producto interno

$$(\phi, \psi)_{a,b}^s = \int_a^b \phi \psi w^s$$

y su norma asociada constituye un espacio de Hilbert.

Los polinomios ortogonales con respecto al producto interno bajo consideración son los conocidos polinomios de Gegenbauer (ver su definición y propiedades en B.4). Usando esta base ortogonal podemos producir una diagonalización explícita del operador $(-\Delta)_w^s$. Consideremos primero el intervalo $(0, 1)$; el correspondiente resultado para un intervalo más general se va a presentar en el corolario.

Teorema 2.2.1. *Dado $s \in (0, 1)$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideremos el polinomio de Gegenbauer $C_n^{(s+1/2)}$ y sea $p_n(x) = C_n^{(s+1/2)}(2x - 1)$. Entonces, el operador pesado $(-\Delta)_w^s$ en el intervalo $(0, 1)$ satisface la identidad*

$$(-\Delta)_w^s(p_n) = \frac{\Gamma(2s + n + 1)}{n!} p_n.$$

Demostración. Ver demostración teorema 3.14 en [4]. □

Corolario 2.2.2. *El operador pesado $(-\Delta)_w^s$ en el intervalo $(-1, 1)$ satisface la identidad*

$$(-\Delta)_w^s(C_n^{(s+1/2)}) = \lambda_n^s C_n^{(s+1/2)},$$

donde

$$\lambda_n^s = \frac{\Gamma(2s + n + 1)}{n!}.$$

En el intervalo (a, b) , tenemos

$$(-\Delta)_w^s(p_n) = \lambda_n^s p_n,$$

donde $p_n(x) = C_n^{(s+1/2)}\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)$.

Demostración. Ver demostración corolario 3.15 en [4]. □

Para dominios multi-intervalos Ω , usando las funciones características $\chi_{(a_i, b_i)}$, definiendo

$$w^s(x) = \sum_{i=1}^M (x - a_i)^s (b_i - x)^s \chi_{(a_i, b_i)}(x)$$

y basándonos en el corolario 2.2.1, definimos el operador Laplaciano fraccionario pesado multi-intervalo en Ω como

$$(-\Delta)_w^s \phi = (-\Delta)^s [w^s \phi],$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Podemos descomponer este operador como

$$(-\Delta)_w^s = \mathcal{K}_s + \mathcal{R}_s,$$

donde

$$\mathcal{K}_s[\phi] = \sum_{i=1}^M \chi_{(a_i, b_i)} K_s \chi_{(a_i, b_i)} \phi$$

y

$$\mathcal{R}_s[\phi](x) = C_1(s) \int_{\Omega \setminus (a_j, b_j)} |x - y|^{-1-2s} w^s(y) \phi(y) dy \quad \text{para } x \in (a_j, b_j).$$

Contando con toda esta información, podemos proceder, en el próximo capítulo, al desarrollo del método numérico que proponemos para resolver el problema (2.1) para $n \geq 2$. El método se va a basar principalmente en los resultados obtenidos para el caso unidimensional que recién describimos, junto con los detalles mencionados al comienzo del capítulo.

Capítulo 3

Método propuesto

En este capítulo desarrollaremos un método para la resolución del problema (2.1) para cualquier $n \geq 2$, basándonos en los resultados mencionados en el capítulo previo. A su vez, inspirados en la formulación deducida, detallaremos una posible implementación para el caso $n = 2$.

3.1 Descripción del método

En esta sección comentaremos el método que proponemos para resolver el problema (2.1) en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, con $s \in (0, 1)$.

Comencemos considerando la definición del Laplaciano fraccionario (1.1) para el caso n -dimensional,

$$(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) = C_{n,s} \text{ P.V. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_n)}{\|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|^{n+2s}} dy_1 \dots dy_n, \quad (3.1)$$

donde $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y

$$C_{n,s} = \frac{2^{2s} s \Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 - s)}.$$

Recordando la definición de valor principal (1.2),

$$(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) = C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x_1, \dots, x_n)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(y_1, \dots, y_n)}{\|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|^{n+2s}} dy_1 \dots dy_n. \quad (3.2)$$

Hagamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r \cos(\varphi_1) = z_1 \\ y_2 = x_2 + r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) = z_2 \\ y_3 = x_3 + r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_3) = z_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-2}) \cos(\varphi_{n-1}) = z_{n-1} \\ y_n = x_n + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-2}) \sin(\varphi_{n-1}) = z_n, \end{cases}$$

donde $r \in (-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, \infty)$, $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ para $1 \leq i \leq n-2$ y $0 \leq \varphi_{n-1} < \pi$. Notemos los límites de integración en r y φ_{n-1} : comúnmente hubiéramos definido $\epsilon \leq r < \infty$ y $0 \leq \varphi_{n-1} < 2\pi$, con las demás variables bajo los mismos valores, sin embargo, en nuestro caso, decidimos considerar la versión mencionada dado que dicha formulación nos va a ser útil más adelante.

Aplicando el cambio de variables, (3.2) queda

$$\begin{aligned} C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{\|(r \cos(\varphi_1), \dots, r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-1}))\|^{n+2s}} |r|^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \\ = C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta lo indicado en el apéndice C.1, podemos reescribir la expresión anterior como

$$(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) = C_{n,s} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (3.4)$$

Supongamos $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ fijos, y llamemos $v(r)$ a la función

$$v(r) = u(x_1 + r \cos(\varphi_1), \dots, x_n + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-2}) \sin(\varphi_{n-1})).$$

Claramente, $v(r) = u(z_1, \dots, z_n)$ y $v(0) = u(x_1, \dots, x_n)$, con lo cual (3.4) se puede expresar como

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) &= C_{n,s} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{v(0) - v(r)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \\ &= C_{n,s} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{v(0) - v(r)}{|r|^{1+2s}} dr \right) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

$$= C_{n,s} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left(\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(0) - v(r)}{|r|^{1+2s}} dr \right) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (3.5)$$

Si observamos bien la formulaci3n anterior, el t3rmino que aparece encerrado en el primer gran par3ntesis es la definici3n del Laplaciano fraccionario unidimensional de la funci3n v evaluada en 0 (salvo la constante $C_{1,s}$). Es decir,

$$\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{v(0) - v(r)}{|0 - r|^{1+2s}} dr = \frac{(-\Delta)^s v(0)}{C_{1,s}},$$

donde $(-\Delta)^s$ representa el Laplaciano fraccionario para $n = 1$.

Con lo cual, (3.5) se puede escribir como

$$(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) = C_{n,s} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{(-\Delta)^s v(0)}{C_{1,s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (3.6)$$

A su vez, recordando la definici3n de $C_{n,s}$,

$$\frac{C_{n,s}}{C_{1,s}} = \frac{2^{2s} s \Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 - s)} \cdot \frac{\pi^{1/2} \Gamma(1 - s)}{2^{2s} s \Gamma(s + 1/2)} = \frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(s + 1/2)}.$$

Por lo tanto, (3.6) queda

$$(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(s + 1/2)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (-\Delta)^s v(0) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (3.7)$$

Recordemos c3mo hab3amos definido la funci3n $v(r)$: suponiendo fijos $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$,

$$v(r) = u(x_1 + r \cos(\varphi_1), \dots, x_n + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-1})).$$

Por la propia definici3n del problema (2.1), sabemos que u se anula en Ω^c . Con lo cual, van a existir ciertos valores

$$a_i(\mathbf{x}; \varphi) = a_i((x_1, \dots, x_n); (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \quad \text{y} \quad b_i(\mathbf{x}; \varphi) = b_i((x_1, \dots, x_n); (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))$$

tales que

$$v(r) = 0 \text{ si } r \notin (a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)).$$

Consideramos distintos intervalos porque puede ocurrir que cada rayo en r corte al dominio varias veces (por ejemplo, en el caso de un dominio que no es convexo). A modo de ejemplo, veamos lo que ocurre en \mathbb{R}^2 . Supongamos que elegimos $(x_1, x_2) \in \Omega$

y fijamos φ_1 . Entonces, los valores que va a tomar la variable r están representados por una línea que une los puntos $a(\mathbf{x}; \varphi)$ y $b(\mathbf{x}; \varphi)$, dentro del dominio Ω . Gráficamente,

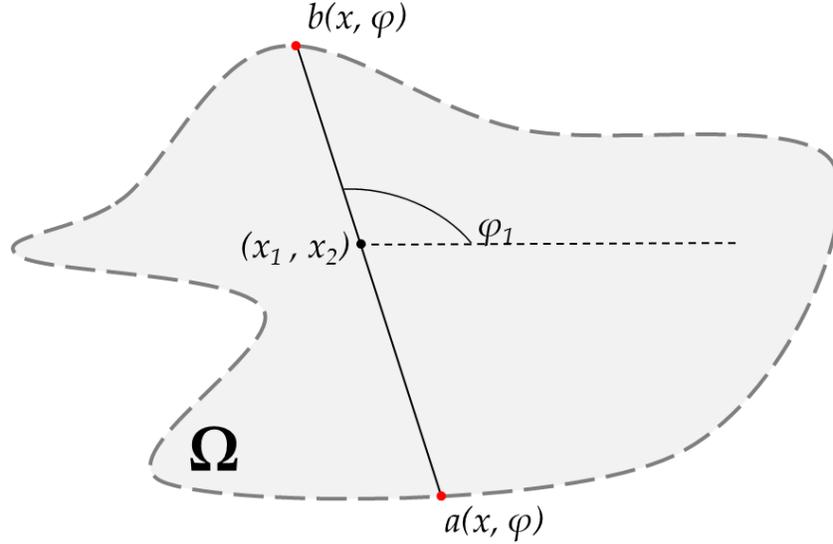


Figura 3.1: Ejemplo valores de la variable r habiendo fijado (x_1, x_2) y φ_1

Ahora, nuestro objetivo va a consistir en poder aplicar los resultados obtenidos en el capítulo anterior a la ecuación (3.7). Lo que nos gustaría es poder escribir a la función v como $w^s \phi$ con w^s una función de peso adecuada y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla ciertas condiciones.

Por lo que vimos, una formulación de esta función de peso debería ser

$$w^s(r) = \sum_{i=1}^M (r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s \chi_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))}(r),$$

donde M indica la cantidad de intervalos en r (es decir, el número de veces que corta el rayo al dominio). Este M sería un $M(\mathbf{x}, \varphi)$, pues debe depender del punto y los ángulos, pero para evitar exceso de notación lo notamos así.

Para no arrastrar tantos términos escribamos

$$v(r) = u(x_1 + r \cos(\varphi_1), \dots, x_n + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-1})) = u(\mathbf{x} + r \cdot \Phi).$$

Dado que queremos expresar a $v(r)$ como $w^s(r)\phi(r)$, sería esperable que

$$\phi(r) = \frac{u(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{w^s(r)}.$$

Lo que tenemos que analizar ahora es bajo qué condiciones la función ϕ tiene la regularidad necesaria para aplicar los resultados del capítulo previo. Por lo que describimos

anteriormente, para el caso multi-intervalo, el Laplaciano fraccionario pesado (con función de peso como w^s) se puede escribir como suma de dos términos: uno que llamamos \mathcal{K}_s y otro que llamamos \mathcal{R}_s . Como el punto donde vamos a evaluar el Laplaciano fraccionario unidimensional es $r = 0$, tomamos el intervalo $(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))$ tal que $0 \in (a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))$. Luego, por cómo caracterizamos \mathcal{K}_s , necesitamos que $\phi \in C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$.

Recordemos que estamos suponiendo que Ω es un dominio C^∞ . Por lo visto en el capítulo 2, en dicho caso, a la función u la podíamos representar al menos de dos maneras, dependiendo de la regularidad de la función f : $f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \iff u = W^s \cdot \psi$ con $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ o $f \in H^r(\bar{\Omega}) \Rightarrow u = \chi + W^s \cdot \psi$ con $\chi \in H_0^{r+2s}(\bar{\Omega})$ y $\psi \in H^{r+s}(\bar{\Omega})$; donde $W \sim \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ cerca de $\partial\Omega$. Verifiquemos que si escribimos a u de estas formas, es posible llegar a la regularidad que necesitamos.

Supongamos $f \in H^r(\bar{\Omega})$ (el otro caso va a ser análogo, obviando lo mencionado para χ y simplificando algunas cuestiones, dado que $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$). Entonces, $u = \chi + W^s \cdot \psi$ con $\chi \in H_0^{r+2s}(\bar{\Omega})$ y $\psi \in H^{r+s}(\bar{\Omega})$. Luego,

$$\phi(r) = \frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{w^s(r)} + \frac{W^s(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{w^s(r)} \cdot \psi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi).$$

Veamos que $\phi \in C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$.

En primer lugar, fijemos el parámetro r de $f \in H^r(\bar{\Omega})$. El resultado del capítulo anterior requería pedir que $r + s - 1/2 > 0$ y que no sea entero. Nuestra idea es poder aplicar el lema de Sobolev (que dice que si $t > k + \frac{1}{2}n$ entonces $H^t \subset C^k$, con n la dimensión del espacio). Como necesitamos $k = 2$ para asegurar que caemos en el espacio en cuestión, y como $\psi \in H^{r+s}(\bar{\Omega})$ y $\chi \in H_0^{r+2s}(\bar{\Omega})$, queremos que $r + s > 2 + \frac{n}{2}$ y $r + 2s > 2 + \frac{n}{2}$. Por lo tanto, $1/2 < 2 + \frac{n}{2} < r + s < r + 2s$ (al ser $s \in (0, 1)$). Con lo cual, tomando $r = 2 + \frac{n}{2} - s + \epsilon$, que no sea entero y con $\epsilon > 0$ número chico, es suficiente para obtener lo que necesitamos. De este modo, garantizamos que $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ y que $\chi \in C_0^2(\bar{\Omega})$.

Como $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, en particular $\psi \in C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$. En relación al término $W(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)$, esta función, al comportarse como la distancia al borde cerca de $\partial\Omega$, se anula en los valores de r que lo intersectan. Como $a_i(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b_i(\mathbf{x}, \varphi)$ lo hacen por definición, entonces estos puntos son ceros de $W(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)$. Por lo que estaríamos dividiendo una función por dos de sus raíces. En relación a la función que se obtiene como resto del cociente, elevada a la s , necesitamos que esté en $C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$. En principio, los resultados previos no mencionan información relativa a la regularidad de esta función W^s , por lo que podríamos imponer como condición que el resto que se obtiene del cociente caiga en ese espacio. Para los casos que analizaremos en el capítulo 4, este cociente resulta estar en el espacio dado que queda como una función constante en la variable r .

Por último, debemos ver que el primer término cae en el espacio. Sabemos que $\chi \in C_0^2(\bar{\Omega})$ por cómo tomamos f . El denominador, al estudiar lo que está ocurriendo

en el intervalo $(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))$, sería $w^s(r) = (r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s$. Se puede ver que $w^s \in C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))$. Sin embargo, lo que se debe analizar con más detalle es qué ocurre en los bordes. Deberíamos probar que el cociente y su derivada existen y son continuos en los extremos. Para ello, estudiemos los límites laterales.

Cuando $r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^+$, el límite

$$\lim_{r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^+} \frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s}$$

es indeterminado (recordar que χ tiene soporte compacto y es continua en $\bar{\Omega}$). Al resolver la indeterminación, por ejemplo usando la regla de L'Hopital, se puede ver que el límite es cero. Para el caso en el que $r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^-$, el límite también es cero dado que los valores de r que se están considerando caen fuera del soporte de χ , por lo que la función en su conjunto es nula. Por lo tanto, el χ/w^s resulta ser continua en $a_i(\mathbf{x}, \varphi)$. Repitiendo un argumento similar, se puede probar la continuidad en $b_i(\mathbf{x}, \varphi)$. Lo que nos resta ver es la existencia de las derivadas en los extremos. Para esto, analizamos la existencia de los límites laterales usando la definición de derivada. Por un lado, debemos estudiar

$$\lim_{r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^+} \left(\frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} - \frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} \Big|_{r=a_i(\mathbf{x}, \varphi)} \right) \cdot \frac{1}{r - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}.$$

Por lo que vimos, el segundo cociente es cero, con lo que el límite queda

$$\lim_{r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^+} \frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^{s+1} (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s}.$$

Analizando el límite, obtenemos nuevamente una indeterminación que se puede resolver aplicando dos veces la regla de L'Hopital y termina dando cero. A su vez,

$$\lim_{r \rightarrow a_i(\mathbf{x}, \varphi)^-} \frac{\chi(\mathbf{x} + r \cdot \Phi)}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^{s+1} (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} = 0$$

por lo mismo que comentamos antes, se están considerando valores de r por fuera del soporte de χ (que tenía soporte compacto). Con lo cual, la derivada existe en $r = a_i(\mathbf{x}, \varphi)$ y vale 0. Haciendo un análisis análogo para $r = b_i(\mathbf{x}, \varphi)$, vemos que $\chi/w^s \in C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$.

Finalmente, la función $\phi(r)$ resulta ser suma y producto de funciones que caen en $C^2(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)) \cap C^1[a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi)]$, por lo que ϕ está en ese espacio y podemos aplicar los resultados del capítulo previo. Se podría seguir estudiando qué forma o regularidad debería tener la función u para lograr la regularidad en ϕ , pero para los casos sobre los que probamos el método no es necesario (de hecho, nos es suficiente con saber que u se puede escribir como $W^s \psi$ pues las funciones f sobre las que testeamos el método son $C^\infty(\bar{\Omega})$).

Con lo cual,

$$(-\Delta)^s v(0) = (-\Delta)^s [w^s \phi](0) = (-\Delta)_w^s [\phi](0).$$

Recordando la descomposición del operador Laplaciano fraccionario pesado en el caso unidimensional para dominios multi-intervalos,

$$(-\Delta)_w^s [\phi](0) = \mathcal{K}_s[\phi](0) + \mathcal{R}_s[\phi](0) \quad (3.8)$$

donde

$$\mathcal{K}_s[\phi](0) = K_s[\chi_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))} \phi](0), \quad (3.9)$$

y

$$\mathcal{R}_s[\phi](0) = C_{1,s} \int_{\bigcup_{j \neq i} (a_j(\mathbf{x}, \varphi), b_j(\mathbf{x}, \varphi))} \frac{w^s(r) \phi(r)}{|r|^{1+2s}} dr = C_{1,s} \int_{\bigcup_{j \neq i} (a_j(\mathbf{x}, \varphi), b_j(\mathbf{x}, \varphi))} \frac{v(r)}{|r|^{1+2s}} dr. \quad (3.10)$$

Lo que buscamos ahora es poder escribir (3.9) de cierta forma, de modo que podamos aplicar el corolario 2.2.2 en la expresión resultante. Para lograr esto, comencemos desarrollando a la función ϕ en serie de polinomios de Gegenbauer $C_k^{(s+1/2)}$ teniendo en cuenta el intervalo $(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))$,

$$\phi(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(\mathbf{x}, \varphi) C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{2(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \frac{1}{\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))}^2}, \quad (3.11)$$

donde

$$d_k(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{a_i(\mathbf{x}, \varphi)}^{b_i(\mathbf{x}, \varphi)} \phi(z) C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{2(z - a_i(\mathbf{x}, \varphi))}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) (z - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - z)^s dz \quad (3.12)$$

y

$$\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))}^2 = \int_{a_i(\mathbf{x}, \varphi)}^{b_i(\mathbf{x}, \varphi)} C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{2(z - a_i(\mathbf{x}, \varphi))}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right)^2 (z - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - z)^s dz. \quad (3.13)$$

Una vez que contamos con este desarrollo, podemos aplicar el corolario 2.2.2 en la expresión (3.11), obteniendo

$$\mathcal{K}_s[\phi](0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k(\mathbf{x}, \varphi)}{\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))}^2} \frac{\Gamma(2s + k + 1)}{k!} C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right). \quad (3.14)$$

Escribamos de mejor manera (3.12) y (3.13). Hagamos en ambos casos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} w = \frac{2(z - a_i(\mathbf{x}, \varphi))}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1, \\ dw = \frac{2}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} dz. \end{cases}$$

Entonces, (3.12) nos queda

$$\begin{aligned} & \left[\int_{-1}^1 \phi \left((w+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(w) (1-w)^s (1+w)^s dw \right] \cdot \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right)^{2s+1} \\ &= \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) \cdot \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right)^{2s+1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A su vez, (3.13) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \|C_k^{(s+1/2)}\|_{(a_i(\mathbf{x}, \varphi), b_i(\mathbf{x}, \varphi))}^2 &= \left[\int_{-1}^1 C_k^{(s+1/2)}(w)^2 (1-w)^s (1+w)^s dw \right] \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right)^{2s+1} \\ &= \|C_k^{(s+1/2)}\|_{(-1,1)}^2 \cdot \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right)^{2s+1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Combinando las ecuaciones (3.7), (3.8), (3.10), (3.14), (3.15) y (3.16), llegamos a la siguiente representación

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(s + 1/2)} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi)}{\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(-1,1)}^2} \frac{\Gamma(2s + k + 1)}{k!} \right) \\ &C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) + C_{1,s} \int_{\bigcup_{j \neq i} (a_j(\mathbf{x}, \varphi), b_j(\mathbf{x}, \varphi))} \frac{v(r)}{|r|^{1+2s}} dr \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agrupemos las constantes y lleguemos a una expresión un poco más reducida. Tal como se indica en B.4,

$$\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(-1,1)}^2 = \frac{2^{-2s} \cdot \pi \cdot \Gamma(k + 2s + 1)}{(k + s + 1/2) \cdot \Gamma(s + 1/2)^2 \cdot \Gamma(k + 1)}.$$

Por lo tanto, usando algunas de las propiedades de la función gama que se mencionan en B.1,

$$\frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(s + 1/2)} \cdot \frac{\Gamma(2s + k + 1)}{k!} \cdot \frac{1}{\|C_k^{(s+1/2)}\|_{(-1,1)}^2} = \frac{\Gamma(s + \frac{n}{2}) \Gamma(s + \frac{1}{2})}{2^{-2s} \pi^{\frac{n+1}{2}}} (k + s + 1/2).$$

A su vez,

$$\frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(s + 1/2)} \cdot C_{1,s} = \frac{C_{n,s}}{C_{1,s}} \cdot C_{1,s} = C_{n,s}.$$

Por lo tanto, (3.17) nos queda

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left[\left(\frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})\Gamma(s + \frac{1}{2})}{2^{-2s}\pi^{\frac{n+1}{2}}} \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi)(k+s+1/2)C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(C_{n,s} \int_{\bigcup_{j \neq i} (a_j(\mathbf{x}, \varphi), b_j(\mathbf{x}, \varphi))} \frac{v(r)}{|r|^{1+2s}} dr \right) \right] \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{-1}^1 \phi \left((w+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(w)(1-w)^s(1+w)^s dw. \quad (3.19)$$

De este modo, llegamos a una representación del Laplaciano fraccionario involucrado en el problema (2.1). Nuestra estrategia principal se basó en el cambio de variables inicial, que nos permitió utilizar los resultados descritos en el capítulo anterior y derivar las expresiones (3.18) y (3.19). En la siguiente sección, haremos uso de estos resultados para desarrollar un método numérico que resuelva el problema homogéneo fraccionario de Poisson para el caso en el que $n = 2$.

3.2 Método numérico

Tal como indicamos al final de la sección anterior, en esta sección nos concentraremos en describir un método numérico que resuelva el problema (2.1) para un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado. En primer lugar, adaptemos las fórmulas (3.18) y (3.19) al caso $n = 2$.

Para este valor de n ,

$$\frac{\Gamma(s + \frac{n}{2})\Gamma(s + \frac{1}{2})}{2^{-2s}\pi^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma(s + 1)\Gamma(s + \frac{1}{2})}{2^{-2s}\pi^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}2^{-2s}\Gamma(2s + 1)}{2^{-2s}\pi^{\frac{3}{2}}} = \frac{\Gamma(2s + 1)}{\pi},$$

usando algunas de las propiedades de la función gamma que se mencionan en B.1.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x_1, x_2) &= \int_0^\pi \left[\frac{\Gamma(2s + 1)}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi)(k+s+1/2)C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(C_{2,s} \int_{\bigcup_{j \neq i} (a_j(\mathbf{x}, \varphi), b_j(\mathbf{x}, \varphi))} \frac{v(r)}{|r|^{1+2s}} dr \right) \right] d\varphi \quad (3.20)
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{-1}^1 \phi \left((y+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy. \quad (3.21)$$

Contando con estos resultados, procedemos al desarrollo de los métodos numéricos. En la primera subsección tratamos el caso de, dada una función u , hallar $(-\Delta)^s u$. En la segunda, nos ocupamos del caso dada una f , hallar u tal que $(-\Delta)^s u = f$.

3.2.1 Evaluación de $(-\Delta)^s u$ para una dada función u

En esta subsección abordaremos el problema de evaluación del operador $(-\Delta)^s$ en una función u dada, para lo que utilizaremos las ecuaciones (3.20) y (3.21).

Comencemos tomando $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, con Ω dominio abierto y acotado, $s \in (0, 1)$ y una función u para la cual queremos calcular $(-\Delta)^s u(x_1, x_2)$.

Obviamente, por lo mencionado anteriormente, suponemos que Ω es un dominio C^∞ . En este trabajo, y en particular en el método que vamos a describir, nos concentraremos en dominios convexos; por lo que supondremos que el segundo término de la integral (3.20) es cero.

La función ϕ se calcula, al igual que antes, como

$$\phi(r) = \frac{u(x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi))}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s},$$

donde $a_i(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b_i(\mathbf{x}, \varphi)$ indican los valores entre los que se encuentra la variable r para cada φ . Debemos recordar que la función ϕ debe tener la regularidad necesaria para poder aplicar los resultados mencionados en la sección anterior, y esto se debe tener en cuenta al elegir la función u .

En primer lugar, discretizamos la integral en la variable φ . Comencemos probando que la función a integrar en φ es π -periódica. Llamando a esta función h ,

$$h(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) (k + s + 1/2) C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right)$$

con

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{-1}^1 \phi \left((y+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy.$$

Entonces, queremos ver que $h(\varphi + \pi) = h(\varphi)$. Empecemos viendo que $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi + \pi) = (-1)^k \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi)$.

Notemos que

$$b_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) = -a_i(\mathbf{x}, \varphi)$$

y

$$a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) = -b_i(\mathbf{x}, \varphi).$$

Al evaluar la expresión de ϕ en $\varphi + \pi$,

$$\phi_{\varphi+\pi}(r) = \frac{u(x_1 + r \cos(\varphi + \pi), x_2 + r \sin(\varphi + \pi))}{(r - a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) - r)^s} = \frac{u(x_1 - r \cos(\varphi), x_2 - r \sin(\varphi))}{(-r - a_i(\mathbf{x}, \varphi))^s (b_i(\mathbf{x}, \varphi) + r)^s} = \phi(-r).$$

A su vez,

$$(y+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) = (y+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) - b_i(\mathbf{x}, \varphi),$$

con lo que

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi + \pi) = \int_{-1}^1 \phi \left((-1) \cdot \left[(y+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) - b_i(\mathbf{x}, \varphi) \right] \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy.$$

Si hacemos el cambio de variables $y = -t$ y $dy = -dt$,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi + \pi) &= \int_{-1}^1 \phi \left((-1) \cdot \left[(-t+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) - b_i(\mathbf{x}, \varphi) \right] \right) C_k^{(s+1/2)}(-t) (1+t)^s (1-t)^s dt \\ &= \int_{-1}^1 \phi \left((t+1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi) \right) (-1)^k C_k^{(s+1/2)}(t) (1+t)^s (1-t)^s dt \end{aligned}$$

que es igual a $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) \cdot (-1)^k$.

Veamos lo que ocurre con los otros términos.

$$\begin{aligned} C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi + \pi)} - 1 \right) &= C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{2b_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \\ &= C_k^{(s+1/2)} \left((-1) \cdot \left[\frac{-2b_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} + 1 \right] \right) \\ &= (-1)^k C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right). \end{aligned}$$

El término $(-1)^k$ aparece pues $C_k^{(s+1/2)}(-x) = (-1)^k C_k^{(s+1/2)}(x)$ y la última expresión en la que se está evaluando el polinomio de Gegenbauer se obtiene reescribiendo el término dentro de los corchetes.

Por lo que, al multiplicar este último término con $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) \cdot (-1)^k$, vemos que la integral en φ es π -periódica. Es decir, $h(\varphi + \pi) = h(\varphi)$.

Con lo cual, probamos que la función en φ es π -periódica. Si la función h es suficientemente suave en φ , la estrategia consiste en usar la regla de trapecios, ya que vamos a lograr convergencia rápida. En todos los ejemplos que probamos, la función h cumplía con esta condición, así que adoptamos, al menos en una primera instancia, este método de integración.

Luego de aplicar este método, obtenemos un conjunto de nodos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_L\}$ con sus respectivos pesos $\{w_{\varphi_1}, \dots, w_{\varphi_L}\}$; de modo que la integral en la variable φ queda aproximada por

$$\int_0^\pi h(\varphi) d\varphi \approx \sum_{l=1}^L h(\varphi_l) w_{\varphi_l}.$$

En segundo lugar, debemos fijar un valor K hasta donde se realice la sumatoria, por lo que $0 \leq k \leq K$.

Después de haber hecho esto, dado un nodo φ_l y un valor k , aproximamos el valor de $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi_l)$. Para ello, nos basamos en la expresión obtenida en (3.21). Notemos que la definición de $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi_l)$ involucra una integral entre $[-1, 1]$ con peso $w(y) = (1-y)^s(1+y)^s$, es decir es una integral cuyo peso es la función de peso de Jacobi con $\alpha = \beta = s > -1$. Para aproximar esta integral, utilizamos la regla de cuadratura de Gauss-Jacobi que se menciona en [11]. De esta forma, obtenemos un conjunto de nodos $\{y_1, \dots, y_M\}$ con sus respectivos pesos $\{w_{y_1}, \dots, w_{y_M}\}$. Luego,

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi_l) \approx \sum_{m=1}^M \phi \left((y_m + 1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi_l) - a_i(\mathbf{x}, \varphi_l)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi_l) \right) C_k^{(s+1/2)}(y_m) w_{y_m}.$$

Con lo cual, las versiones discretas de (3.20) y (3.21), para el caso de un intervalo en la variable r , nos quedarían

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) \approx \sum_{l=1}^L \left[\frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \left(\sum_{k=0}^K \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi_l) (k+s+1/2) C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi_l)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi_l) - a_i(\mathbf{x}, \varphi_l)} - 1 \right) \right) \right] w_{\varphi_l} \quad (3.22)$$

con

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi_l) \approx \sum_{m=1}^M \phi \left((y_m + 1) \left(\frac{b_i(\mathbf{x}, \varphi_l) - a_i(\mathbf{x}, \varphi_l)}{2} \right) + a_i(\mathbf{x}, \varphi_l) \right) C_k^{(s+1/2)}(y_m) w_{y_m}. \quad (3.23)$$

Como comentario final, los límites de cada sumatoria se pueden elegir teniendo en cuenta varios criterios, por ejemplo, en qué punto se quiere hallar $(-\Delta)^s u$, en qué ángulo nos encontramos, cómo es la función u , etc. Sin embargo, para evitar exceso de notación, decidimos poner únicos L, K y M . De esta manera, conseguimos un método para resolver el problema dada una función u , hallar $(-\Delta)^s u$.

3.2.2 Discretización y evaluación de la solución u para una fuente f dada

Ahora nos vamos a concentrar en el problema dada una función f hallar u que cumpla (2.1), para lo que haremos uso de las expresiones (3.22) y (3.23) obtenidas previamente. Como el dominio Ω lo estamos suponiendo C^∞ , vimos que a la función u la podíamos escribir de distintos modos, según la regularidad de la función f . El método lo desarrollamos para aquellos casos en donde u se puede representar como $u(\mathbf{x}) = W^s(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x})$ donde $W \sim \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ (por ejemplo, si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, como va a ocurrir en todos los ejemplos que presentaremos en el próximo capítulo). Notemos que al contar con una expresión de nuestro dominio Ω es posible hallar una fórmula para W . Con lo cual, el método va a consistir en hallar ψ más que en hallar u , ya que, conociendo quién es ψ podemos multiplicar esa función por W^s y obtener la expresión de u . El motivo de por qué hacemos esto se va a entender un poco más adelante.

Al igual que en la sección anterior, comencemos tomando un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ abierto y acotado, $s \in (0, 1)$ y una función f para la cual queremos hallar u que cumpla $(-\Delta)^s u = f$ bajo las condiciones del problema a considerar, teniendo en cuenta el comentario del párrafo anterior.

Notemos que, en este caso, el problema es un poco más complicado. En la sección anterior, la situación era mucho más simple, dado que teníamos que reemplazar la función u en las versiones de las fórmulas (3.20) y (3.21) discretizadas, llegando a una buena aproximación de $(-\Delta)^s u$ en un punto. En este problema, vamos a tener que hallar una aproximación de la función u en todo el dominio Ω más que en un sólo punto, para luego poder usar de cierto modo las fórmulas (3.22) y (3.23).

Lo primero que tenemos que hacer es mallar nuestro dominio Ω . Para lograr esto, comencemos separando Ω en patches, utilizando una partición

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_p} \mathcal{P}_j, \quad \mathcal{P}_k^\circ \cap \mathcal{P}_\ell^\circ = \emptyset \quad \text{para } k \neq \ell,$$

para un cierto número N_p de patches, junto con correspondientes parametrizaciones $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(y_1, y_2)$, $j = 1, \dots, N_p$, donde

$$\mathbf{x}_j : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_j$$

denota una parametrización suave del patch \mathcal{P}_j .

Una vez que tenemos el dominio separado en patches, procedemos con el mallado de cada uno de ellos. Tomemos un patch \mathcal{P}_j con $j \in \{1, \dots, N_p\}$. Sabemos que lo podemos describir con una parametrización suave $\mathbf{x}_j(y_1, y_2)$ con $(y_1, y_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Por lo tanto, para obtener un mallado de \mathcal{P}_j , debemos mallar la región $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La estrategia que consideramos fue tomar el producto cartesiano de los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto en dicho cuadrado (ver B.3). El motivo de por qué hacemos

esto se va a entender mejor en el siguiente paso. Con lo cual, elegimos nodos de la forma

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{M_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{M_j^2}\right)$$

con $0 \leq i \leq M_j^1$ y $0 \leq k \leq M_j^2$. Finalmente, una vez que tenemos esto, aplicamos la parametrización \mathbf{x}_j en cada nodo y obtenemos un mallado para \mathcal{P}_j . Gráficamente,

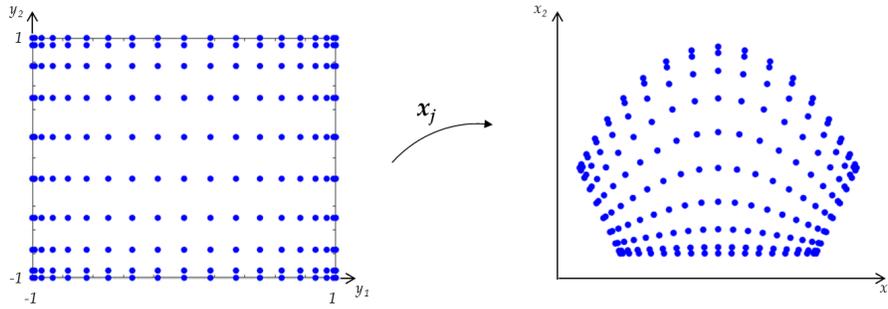


Figura 3.2: Ejemplo de mallado de un patch

El siguiente paso es la interpolación de la función u , y acá es donde entra en juego el por qué mallamos los patches de esa manera. La idea del mallado es que sirva para lo que se conoce en inglés como *collocation and interpolation*. Es decir, cada evaluación $u(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k))$ se va a usar tanto para lograr una aproximación de la misma función como también de incógnita en nuestro método. Probablemente, esta idea resulte más comprensible a medida que avancemos con el desarrollo de nuestra propuesta. Algo importante que debemos destacar en este punto es que no vamos a interpolar u de forma directa, sino que la función que aproximaremos es ψ para luego calcular $u = \text{dist}^s(\mathbf{x}, \Omega^c)\psi$. Si no hiciéramos esto, al ser singular la expresión $\text{dist}^s(\mathbf{x}, \Omega^c)$ a medida que nos acercamos al borde del dominio, se lograrían muy malos resultados con la interpolación.

O sea que debemos concentrarnos en aproximar ψ en cada patch. La estrategia de interpolación dentro de cada \mathcal{P}_j con $j \in \{1, \dots, N_p\}$ va a seguir el siguiente esquema:

- Dado $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{P}_j$, hallamos $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ que cumpla $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \mathbf{x}_j^{-1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.
- Explotando el hecho de que conocemos cuánto vale $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en la malla descrita por el conjunto de puntos

$$\{(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)\}_{0 \leq i \leq M_j^1, 0 \leq k \leq M_j^2},$$

hallamos el valor de dicha función en una malla mucho más fina del $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Luego, usando la información anterior, buscamos una aproximación de la derivada de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en la malla refinada respecto a y_1 , y_2 e $y_1 y_2$.

- Finalmente, calculamos el valor de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ usando un método de interpolación, teniendo en cuenta los valores que dedujimos en el item previo, obteniendo así $\psi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

Veamos un gráfico que resume la propuesta anterior,

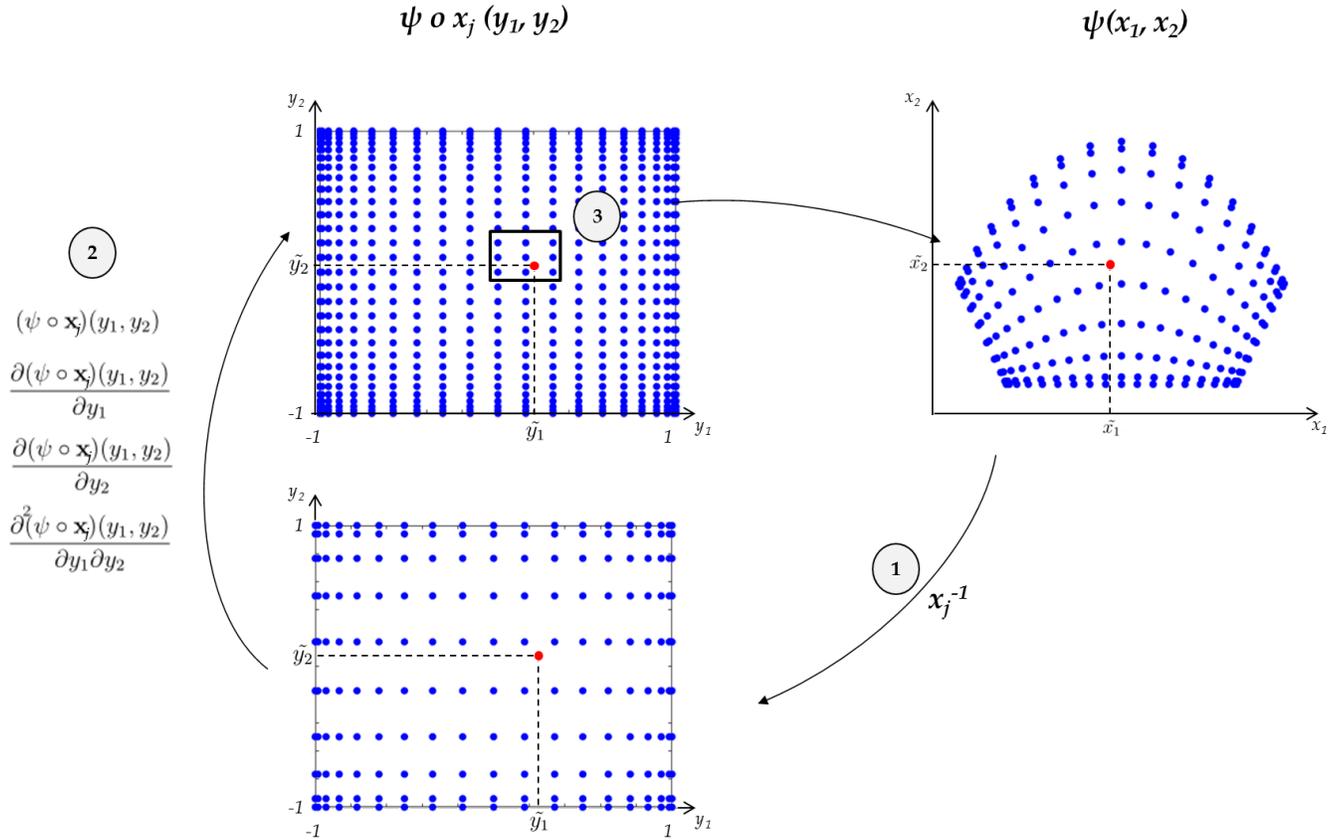


Figura 3.3: Descripción gráfica de la estrategia de interpolación

Describamos la estrategia del segundo item. Comencemos representando, en el dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$, a la función $\psi \circ \mathbf{x}_j$ como doble serie de Chebyshev. Es decir,

$$\psi(\mathbf{x}_j(y_1, y_2)) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2)$$

con

$$a_{n,m} = \frac{2}{M_j^1} \frac{2}{M_j^2} \sum_{i=0}^{M_j^1} \sum_{k=0}^{M_j^2} \psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)) T_n(y_{1,j}^i) T_m(y_{2,j}^k),$$

donde el doble tilde en las sumatorias indica que los términos 0, M_j^1 y M_j^2 están multiplicados por $\frac{1}{2}$.

En esta parte podemos observar la importancia de haber elegido un mallado que utilice los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto. El valor de la función en dichos nodos aparece en el término $a_{n,m}$ en el desarrollo en doble serie de Chebyshev. Por lo que $\psi \circ \mathbf{x}_j$ evaluada en esos puntos constituye tanto nuestra incógnita como nuestro dato para aproximar dicha función, tal como indicamos previamente. Existen distintas versiones de los nodos del tipo Chebyshev-Gauss (ver, por ejemplo, [15, p. 108]), sin embargo nosotros consideramos el caso que incluye a los extremos para evitar la situación en la que algún (x_1, x_2) caiga fuera de la malla. Este problema se puede resolver considerando el caso abierto, pero optamos por el caso indicado.

De lo que nos debemos ocupar ahora es de hallar el valor de la función en una malla más refinada de nuestro dominio. Si elegimos una malla más fina y procedemos con la evaluación directa por medio de la doble sumatoria, el resultado va a ser ciertamente correcto, pero seguir este procedimiento para cada punto puede resultar muy costoso (del orden $\mathcal{O}(M_j^1 M_j^2)$ operaciones), por lo cual implementamos una estrategia diferente, según detallamos a continuación.

El plan va a consistir en tres etapas. En primer lugar, vamos a hallar el valor de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en una malla mucho más fina de cada patch (elegida de forma inteligente) explotando la idea de que contamos con una doble serie de Chebyshev. En segundo lugar, vamos a aproximar los valores de $(\psi \circ \mathbf{x}_j)_{y_1}$, $(\psi \circ \mathbf{x}_j)_{y_2}$, y $(\psi \circ \mathbf{x}_j)_{y_1 y_2}$ utilizando la misma estrategia hecha en la primera etapa. Finalmente, contando con toda esta información, procedemos a interpolar la función $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en el punto $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$.

Comencemos con el primer paso. Si conociéramos cuánto vale $\psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k))$ para cada $0 \leq i \leq M_j^1$ y $0 \leq k \leq M_j^2$, para hallar los coeficientes $a_{n,m}$ podríamos utilizar la transformada discreta del coseno (DCT) en dos dimensiones. Veamos por qué. La expresión de $a_{n,m}$ es

$$a_{n,m} = \frac{2}{M_j^1} \frac{2}{M_j^2} \sum_{i=0}^{M_j^1} \sum_{k=0}^{M_j^2} \psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)) T_n(y_{1,j}^i) T_m(y_{2,j}^k),$$

donde

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{M_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{M_j^2}\right)$$

para cada $0 \leq i \leq M_j^1$ y $0 \leq k \leq M_j^2$. Utilizando la definición de los polinomios de Chebyshev: $T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)]$ para $x \in [-1, 1]$ y $n = 0, 1, 2, \dots$ (ver B.3),

$$T_n(y_{1,j}^i) = \cos[n \cos^{-1}(y_{1,j}^i)] = \cos\left[n \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi \cdot i}{M_j^1}\right)\right)\right] = \cos\left[\frac{\pi \cdot n \cdot i}{M_j^1}\right]$$

y

$$T_m(y_{2,j}^k) = \cos[m \cos^{-1}(y_{2,j}^k)] = \cos \left[m \cos^{-1} \left(\cos \left(\frac{\pi \cdot k}{M_j^2} \right) \right) \right] = \cos \left[\frac{\pi \cdot m \cdot k}{M_j^2} \right].$$

Por lo tanto,

$$a_{n,m} = \frac{2}{M_j^1} \frac{2}{M_j^2} \sum_{i=0}^{M_j^1} \sum_{k=0}^{M_j^2} \psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)) \cos \left(\frac{\pi \cdot n \cdot i}{M_j^1} \right) \cos \left(\frac{\pi \cdot m \cdot k}{M_j^2} \right),$$

con lo cual tiene sentido aplicar la DCT. De esta manera, suponiendo que conocemos cuánto vale la función $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en los nodos, podemos hallar los coeficientes de la serie. Obviamente, nosotros no sabemos cuánto vale en esos puntos (de hecho es lo que queremos averiguar), pero es útil partir de esta idea porque al final vamos a utilizar un método iterativo que calcule una aproximación de la función en cada uno de los nodos de cada patch y, para ello, el método adjudicará valores (siguiendo un cierto criterio) a estas incógnitas.

Una vez que calculamos los coeficientes $a_{n,m}$, vamos a hallar el valor de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en una malla mucho más fina. Claramente, siguiendo el comentario hecho más arriba, la evaluación directa no es opción, debemos optar por otro camino. Este consiste en combinar dos métodos: *zero-padding* y transformada discreta inversa del coseno (IDCT) para el caso bidimensional.

La transformada discreta inversa del coseno (IDCT) bidimensional sigue la misma lógica que la transformada discreta del coseno (DCT), pero esta vez en vez de aplicarse sobre la serie que devuelve los coeficientes lo hacemos sobre la serie que devuelve la función evaluada en ciertos puntos. En otras palabras, la IDCT bidimensional es un algoritmo más barato computacionalmente (con respecto a la evaluación directa) que nos devuelve

$$\psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} T_n(y_{1,j}^i) T_m(y_{2,j}^k)$$

donde

$$y_{1,j}^i = \cos \left(\frac{\pi \cdot i}{M_j^1} \right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos \left(\frac{\pi \cdot k}{M_j^2} \right)$$

con $0 \leq i \leq M_j^1$ y $0 \leq k \leq M_j^2$. Nuevamente, involucra a la transformada del coseno por la propia definición de los polinomios de Chebyshev. Con lo cual, la expresión quedaría

$$\psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} \cos \left(\frac{\pi \cdot n \cdot i}{M_j^1} \right) \cos \left(\frac{\pi \cdot m \cdot k}{M_j^2} \right)$$

con $0 \leq i \leq M_j^1$ y $0 \leq k \leq M_j^2$.

Pensemos lo siguiente: ¿qué pasaría si conociera los coeficientes de la serie pero ahora para $0 \leq n \leq pM_j^1$ y $0 \leq m \leq pM_j^2$ con $p > 1$? Es decir, ¿qué pasaría si conozco los coeficientes para una malla mucho más fina? ¿Cuál es la ventaja de que la malla sea del estilo Chebyshev-Gauss-Lobatto más fina? ¿Que podemos usar la IDCT para hallar la aproximación de la función en muchísimos valores a bajo costo en comparación con la evaluación directa! Esta es la idea de la que tenemos que sacar ventaja, y es donde entra en juego el método de *zero-padding*.

Nosotros conocemos los valores de $a_{n,m}$ para $0 \leq n \leq M_j^1$ y $0 \leq m \leq M_j^2$. Tomemos un $p > 1$ y fijemos $a_{n,m} = 0$ para $M_j^1 + 1 \leq n \leq pM_j^1$ y $M_j^2 + 1 \leq m \leq pM_j^2$ (de ahí el nombre del método). Lo que estamos haciendo es extender los coeficientes a cero en una malla más fina, de hecho p veces más fina que la original. De este modo, obtenemos la siguiente igualdad

$$\sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2) = \sum_{n=0}^{pM_j^1} \sum_{m=0}^{pM_j^2} a_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2).$$

Si aplicamos la IDCT bidimensional sobre esta serie, llegamos a una aproximación de

$$\psi(\mathbf{x}_j(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k))$$

para

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{pM_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{pM_j^2}\right)$$

con $0 \leq i \leq pM_j^1$ y $0 \leq k \leq pM_j^2$. Notemos que este método devuelve lo mismo que evaluar la serie en la malla refinada (al haber agregado coeficientes $a_{n,m}$ que son cero), pero sin necesidad de tener que hacer evaluación explícita o resolver un sistema. En la práctica, luego de varios experimentos computacionales, elegimos $p = 16$ llegando a muy buenos resultados.

Hagamos un breve resumen de qué fue lo que hicimos hasta ahora. En cada patch, suponiendo conocido el valor de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en cada nodo de la malla, hallamos una aproximación de la función en una malla mucho más fina mediante la estrategia DCT2 + *zero-padding* + IDCT2. Esto concluye la primera etapa de nuestro plan.

En segundo lugar, habíamos indicado que necesitábamos aproximar algunas de las derivadas de $\psi \circ \mathbf{x}_j$, y para esto utilizaremos la misma estrategia. Comencemos con $(\psi \circ \mathbf{x}_j)_{y_1}$. Lo primero que hay que hacer es encontrar una expresión de esta función. Como sólo conocemos la representación de $\psi \circ \mathbf{x}_j$ en doble serie de Chebyshev, una posible idea es derivar la serie. Optemos por esa propuesta.

Sabemos que

$$\psi(\mathbf{x}_j(y_1, y_2)) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2).$$

Con lo cual,

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_1, y_2) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2} a_{n,m} \frac{dT_n(y_1)}{dy_1} T_m(y_2).$$

De acuerdo a las propiedades mencionadas en B.3 respecto a la derivada de un polinomio de Chebyshev,

$$\left\{ \begin{array}{l} T'_0(y_1) = 0, \\ T'_1(y_1) = T_0(y_1), \\ T'_2(y_1) = 4T_1(y_1), \\ T'_3(y_1) = 6T_2(y_1) + 3T_0(y_1), \\ T'_4(y_1) = 8T_3(y_1) + 8T_1(y_1), \\ T'_5(y_1) = 10T_4(y_1) + 10T_2(y_1) + 5T_0(y_1), \\ T'_6(y_1) = 12T_5(y_1) + 12T_3(y_1) + 12T_1(y_1), \\ \vdots \\ T'_{2r}(y_1) = 2(2r) \sum_{l=0}^{r-1} T_{2l+1}(y_1), \\ T'_{2r+1}(y_1) = 2(2r+1) \sum_{l=1}^r T_{2l}(y_1) + (2r+1)T_0(y_1), \\ \vdots \end{array} \right.$$

Reemplacemos estos resultados en la expresión de la derivada. Si M_j^1 es par,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_1, y_2) &\approx \sum_{m=0}^{M_j^2} \left(\sum_{n=0}^{M_j^1} a_{n,m} \frac{dT_n(y_1)}{dy_1} \right) T_m(y_2) \\ &= \sum_{m=0}^{M_j^2} \left(\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{M_j^1}{2} \rfloor} \left(a_{2r,m} 2(2r) \sum_{l=0}^{r-1} T_{2l+1}(y_1) \right) + \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{M_j^1}{2} \rfloor - 1} \left(a_{2r+1,m} 2(2r+1) \sum_{l=0}^r T_{2l}(y_1) \right) \right) T_m(y_2). \end{aligned}$$

Si M_j^1 es impar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_1, y_2) &\approx \sum_{m=0}^{M_j^2} \left(\sum_{n=0}^{M_j^1} a_{n,m} \frac{dT_n(y_1)}{dy_1} \right) T_m(y_2) \\ &= \sum_{m=0}^{M_j^2} \left(\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{M_j^1}{2} \rfloor} \left(a_{2r,m} 2(2r) \sum_{l=0}^{r-1} T_{2l+1}(y_1) \right) + \sum_{r=0}^{\lceil \frac{M_j^1}{2} \rceil - 1} \left(a_{2r+1,m} 2(2r+1) \sum_{l=0}^r T_{2l}(y_1) \right) \right) T_m(y_2). \end{aligned}$$

El símbolo \times' (resp. \times) en la sumatoria indica que el último (resp. primer) término se encuentra multiplicado por $\frac{1}{2}$.

Las sumatorias anteriores se pueden reexpresar como

$$\sum_{m=0}^{M_j^2} \sum_{n=0}^{M_j^1-1} b_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2),$$

donde $b_{n,m}$ es igual a

$$\sum_{r=\frac{n}{2}}^{\lceil \frac{M_j^1}{2} \rceil - 1} a_{2r+1,m} 2(2r+1) \quad \text{si } n \text{ es par} \quad \text{y} \quad \sum_{r=\frac{n+1}{2}}^{\lfloor \frac{M_j^1}{2} \rfloor} a_{2r,m} 2(2r) \quad \text{si } n \text{ es impar}.$$

O también, en una fórmula más compacta,

$$b_{n,m} = \sum_{r=n+1}^{M_j^1} a_{r,m} 2r \mathbf{1}\{r \equiv n+1(2)\}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_1, y_2) \approx \sum_{m=0}^{M_j^2} \sum_{n=0}^{M_j^1-1} b_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2).$$

Partiendo de esta expresión, podemos proceder de manera análoga a lo hecho en el caso anterior para obtener una aproximación de cuánto vale la función en la malla refinada. Recordemos el esquema: DCT2 + *zero-padding* + IDCT2. DCT2 lo omitimos ya que, al conocer los valores de $a_{n,m}$, conocemos los valores de $b_{n,m}$. Con lo cual, lo que nos resta hacer es *zero-padding* + IDCT2.

Al igual que antes, tomamos el mismo $p > 1$ (necesitamos la información en la misma malla más fina de antes) y extendemos la serie a cero fijando $b_{n,m} = 0$ para

$M_j^1 \leq n \leq pM_j^1$ y $M_j^2 + 1 \leq m \leq pM_j^2$. Finalmente, aplicando IDCT2 sobre esta nueva serie, obtenemos una aproximación de cuánto vale

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)$$

para

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{pM_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{pM_j^2}\right)$$

con $0 \leq i \leq pM_j^1$ y $0 \leq k \leq pM_j^2$.

Esta misma idea la podemos repetir para aproximar $\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_2}$. Haciendo un procedimiento análogo, podemos ver que

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_2}(y_1, y_2) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1} \sum_{m=0}^{M_j^2-1} c_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2)$$

donde

$$c_{n,m} = \sum_{r=m+1}^{M_j^2} a_{n,r} 2r \mathbf{1}\{r \equiv m + 1(2)\}.$$

Nuevamente, aplicando el procedimiento *zero-padding* + IDCT2 descrito previamente, obtenemos una aproximación de cuánto vale

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_2}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)$$

para

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{pM_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{pM_j^2}\right)$$

con $0 \leq i \leq pM_j^1$ y $0 \leq k \leq pM_j^2$.

Para finalizar, nos resta aproximar la derivada $\frac{\partial^2(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1 \partial y_2}$. Por lo que vimos antes, tenemos una expresión de cómo queda la serie al derivar respecto a y_1 ó y_2 . Por lo tanto, debemos combinar esas ideas. Sabemos que

$$\frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_1, y_2) \approx \sum_{m=0}^{M_j^2} \sum_{n=0}^{M_j^1-1} b_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2).$$

Con lo cual,

$$\frac{\partial^2(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1 \partial y_2}(y_1, y_2) \approx \sum_{n=0}^{M_j^1-1} \sum_{m=0}^{M_j^2-1} d_{n,m} T_n(y_1) T_m(y_2)$$

donde

$$d_{n,m} = \sum_{r=m+1}^{M_j^2} b_{n,r} 2r \mathbf{1}\{r \equiv m+1(2)\}.$$

Escribamos un poco mejor la expresión de $d_{n,m}$,

$$\begin{aligned} d_{n,m} &= \sum_{r=m+1}^{M_j^2} b_{n,r} 2r \mathbf{1}\{r \equiv m+1(2)\} \\ &= \sum_{r=m+1}^{M_j^2} \left(\sum_{l=n+1}^{M_j^1} a_{l,r} 2l \mathbf{1}\{l \equiv n+1(2)\} \right) 2r \mathbf{1}\{r \equiv m+1(2)\} \\ &= \sum_{r=m+1}^{M_j^2} \sum_{l=n+1}^{M_j^1} a_{l,r} 4lr \mathbf{1}\{l \equiv n+1(2)\} \mathbf{1}\{r \equiv m+1(2)\}. \end{aligned}$$

Contando con esta expresión, realizamos al igual que antes el procedimiento *zero-padding* + IDCT2, llegando a una aproximación del valor de

$$\frac{\partial^2(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1 \partial y_2}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)$$

para

$$y_{1,j}^i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{pM_j^1}\right) \quad \text{e} \quad y_{2,j}^k = \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{pM_j^2}\right)$$

con $0 \leq i \leq pM_j^1$ y $0 \leq k \leq pM_j^2$.

Una vez que contamos con toda esta información en la malla refinada, podemos proceder con la interpolación. En primer lugar, recordemos que partíamos de un punto $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{P}_j$ y hallábamos $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ tal que $\mathbf{x}_j(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Para encontrar una aproximación de $(\psi \circ \mathbf{x}_j)(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, el primer paso consiste en hallar una submalla de 9 puntos (de la malla refinada) que contenga a $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$. Gráficamente,

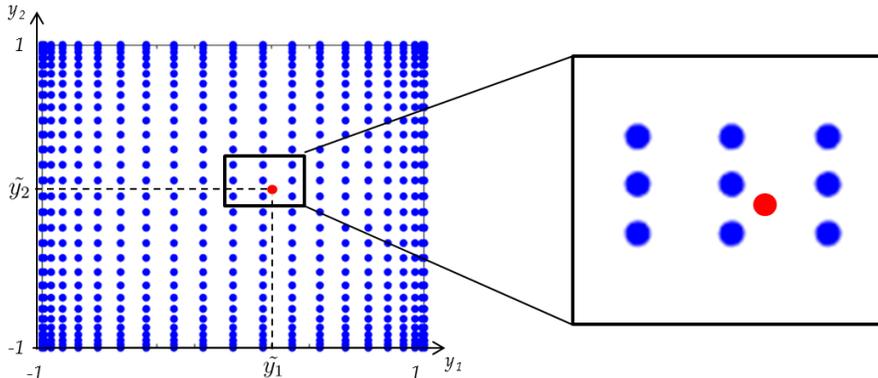


Figura 3.4: Submalla que contiene al punto $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

Es decir, buscamos un $i_0 \in \{0, \dots, pM_j^1\}$ y $k_0 \in \{0, \dots, pM_j^2\}$ tal que el punto esté dentro de la malla generada por los nodos de la forma

$$(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k) = \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot i}{pM_j^1}\right), \cos\left(\frac{\pi \cdot k}{pM_j^2}\right) \right)$$

con $i \in \{i_0 - 1, i_0, i_0 + 1\}$ y $k \in \{k_0 - 1, k_0, k_0 + 1\}$.

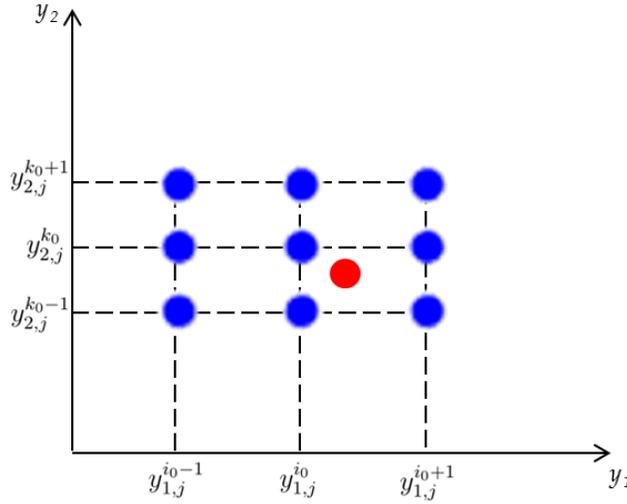


Figura 3.5: Descripción submalla que contiene al punto $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

Luego, para cada $y_{1,j}^i$ con $i_0 - 1 \leq i \leq i_0 + 1$, buscamos dos polinomios $f_i(y_2)$ y $g_i(y_2)$ de grado 5 que pasen por los puntos $(y_{1,j}^i, y_{2,j}^{k_0-1})$, $(y_{1,j}^i, y_{2,j}^{k_0})$ e $(y_{1,j}^i, y_{2,j}^{k_0+1})$ y que cumplan

$$f_i(y_{2,j}^k) = (\psi \circ \mathbf{x}_j)(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k), \quad \frac{df_i}{dy_2}(y_{2,j}^k) = \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_2}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)$$

$$g_i(y_{2,j}^k) = \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k), \quad \frac{dg_i}{dy_2}(y_{2,j}^k) = \frac{\partial^2(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1 \partial y_2}(y_{1,j}^i, y_{2,j}^k)$$

para $k_0 - 1 \leq k \leq k_0 + 1$. Una vez que contemos con estos polinomios, lo que nos va a interesar hallar son los valores $f_i(\tilde{y}_2)$ y $g_i(\tilde{y}_2)$ para cada $i_0 - 1 \leq i \leq i_0 + 1$.

Empecemos con el caso de $f_i(y_2)$. Lo que necesitamos es que tanto f como su derivada coincidan con $(\psi \circ \mathbf{x}_j)$ y su derivada en la variable y_2 respectivamente, en los puntos mencionados. Como son seis datos, tiene sentido pedir un polinomio de grado 5. El motivo por el que elegimos de grado 5, es porque nos dio resultados computacionales muy buenos en comparación con otros métodos (por ejemplo, interpolación clásica de Hermite). Para hallar el polinomio usamos el método de interpolación de Newton. Describamos brevemente en qué consiste.

La idea del método consiste en plantear la siguiente tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{cccccc}
y_{2,j}^{k_0-1} & & y_{2,j}^{k_0-1} & & y_{2,j}^{k_0} & & y_{2,j}^{k_0} & & y_{2,j}^{k_0+1} & & y_{2,j}^{k_0+1} \\
f_i(y_{2,j}^{k_0-1}) & & f_i(y_{2,j}^{k_0-1}) & & f_i(y_{2,j}^{k_0}) & & f_i(y_{2,j}^{k_0}) & & f_i(y_{2,j}^{k_0+1}) & & f_i(y_{2,j}^{k_0+1}) \\
f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & \\
f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & & & \\
f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & & & & & \\
f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & & & & & & & \\
f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] & & & & & & & & & &
\end{array}$$

donde la diferencia de primer orden se define como

$$f_i[z_1, z_1] = f'_i(z_1) \quad \text{o} \quad f_i[z_1, z_2] = \frac{f_i(z_2) - f_i(z_1)}{z_2 - z_1},$$

y la diferencia de orden r se define como

$$f_i[z_1, z_2, \dots, z_r] = \frac{f_i[z_2, \dots, z_r] - f_i[z_1, \dots, z_{r-1}]}{z_r - z_{r-1}}.$$

Luego, se plantea el polinomio interpolador de Newton usando los valores calculados previamente. En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
f_i(y_2) &= f_i(y_{2,j}^{k_0-1}) + f'_i(y_{2,j}^{k_0-1}) \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1}) + f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 + f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}] \cdot \\
&\quad (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0}) + f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0})^2 + \\
&\quad f_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0+1}).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
g_i(y_2) &= g_i(y_{2,j}^{k_0-1}) + g'_i(y_{2,j}^{k_0-1}) \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1}) + g_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 + g_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}] \cdot \\
&\quad (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0}) + g_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0})^2 + \\
&\quad g_i[y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0-1}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0}, y_{2,j}^{k_0+1}, y_{2,j}^{k_0+1}] \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0-1})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0})^2 \cdot (y_2 - y_{2,j}^{k_0+1}).
\end{aligned}$$

Con lo cual, para hallar $f_i(\tilde{y}_2)$ y $g_i(\tilde{y}_2)$, resta hacer las respectivas evaluaciones.

De este modo, obtuvimos una aproximación de los siguientes valores

$$(\psi \circ \mathbf{x}_j)(y_{1,j}^{i_0-1}, \tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^{i_0-1}, \tilde{y}_2) \quad \text{mediante} \quad f_{i_0-1}(\tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad g_{i_0-1}(\tilde{y}_2) \quad \text{respectivamente,}$$

$$(\psi \circ \mathbf{x}_j)(y_{1,j}^{i_0}, \tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^{i_0}, \tilde{y}_2) \quad \text{mediante} \quad f_{i_0}(\tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad g_{i_0}(\tilde{y}_2) \quad \text{respectivamente,}$$

$$(\psi \circ \mathbf{x}_j)(y_{1,j}^{i_0+1}, \tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^{i_0+1}, \tilde{y}_2) \quad \text{mediante} \quad f_{i_0+1}(\tilde{y}_2) \quad \text{y} \quad g_{i_0+1}(\tilde{y}_2) \quad \text{respectivamente.}$$

En nuestro gráfico, obtuvimos las interpolaciones en los nodos verdes,

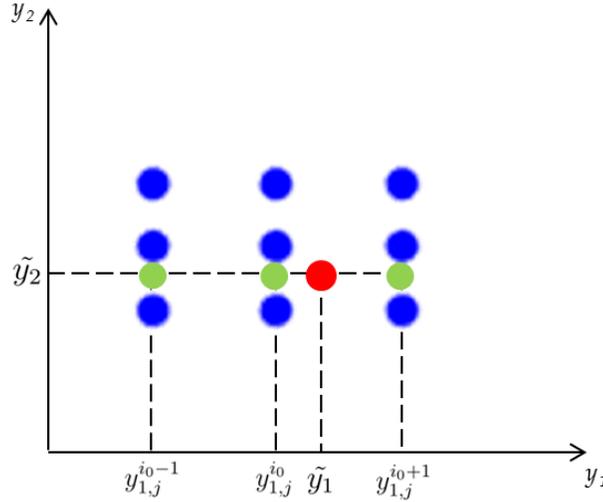


Figura 3.6: Interpolaciones en la submalla que contiene al punto $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$

Finalmente, para llegar a una aproximación de $(\psi \circ \mathbf{x}_j)(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, nos resta interpolar en los nodos verdes, es decir, en los puntos de la forma $(y_{1,j}^i, \tilde{y}_2)$ con $i_0 - 1 \leq i \leq i_0 + 1$. Notemos que podemos proceder de manera similar a lo hecho antes, definiendo una única función $h(y_1)$ que sea un polinomio de grado 5 que cumpla

$$h(y_{1,j}^i) = (\psi \circ \mathbf{x}_j)(y_{1,j}^i, \tilde{y}_2), \quad \frac{dh}{dy_1}(y_{1,j}^i) = \frac{\partial(\psi \circ \mathbf{x}_j)}{\partial y_1}(y_{1,j}^i, \tilde{y}_2)$$

para $i_0 - 1 \leq i \leq i_0 + 1$.

Con lo cual, realizando cuentas similares a las de antes, obtenemos

$$\begin{aligned} h(y_1) = & h(y_{1,j}^{i_0-1}) + h'(y_{1,j}^{i_0-1}) \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0-1}) + h[y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0}] \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0-1})^2 + h[y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0}, y_{1,j}^{i_0}] \cdot \\ & (y_1 - y_{1,j}^{i_0-1})^2 \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0}) + h[y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0}, y_{1,j}^{i_0}, y_{1,j}^{i_0+1}] \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0-1})^2 \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0})^2 + \\ & h[y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0-1}, y_{1,j}^{i_0}, y_{1,j}^{i_0}, y_{1,j}^{i_0+1}, y_{1,j}^{i_0+1}] \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0-1})^2 \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0})^2 \cdot (y_1 - y_{1,j}^{i_0+1}). \end{aligned}$$

Entonces, $(\psi \circ \mathbf{x}_j)(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \approx h(\tilde{y}_1)$.

Para finalizar, combinemos todos los métodos descritos en esta subsección para ver cómo resolver el problema de dada una f , hallar u tal que $(-\Delta)^s u = f$. Como nosotros conocemos los valores de f en los respectivos mallados de cada patch que describen Ω (pues sabemos quién es f de antemano) y, por la subsección anterior, sabemos un método para hallar $(-\Delta)^s u$ dada u , la idea va a ser resolver una especie de sistema. Notemos que no tenemos una matriz A de manera explícita que nos permita describir $Ax = f$, sino que conocemos una forma de calcular dicha matriz. Por lo tanto, proponemos utilizar un método iterativo que pueda recibir como input, en vez de A , una función que la calcule de manera indirecta. En nuestro caso, elegimos el método iterativo GMRES [14].

La estrategia va a ser la siguiente. Nuestro vector de incógnitas x va a representar un vector que contenga en cada elemento el valor de la función ψ en cada nodo de la malla. Es decir, $x_l = \psi(x_{1,j}^i, x_{2,j}^k)$ para respectivos índices. El método GMRES, en cada iteración, nos va a devolver una estimación del vector x . Por lo tanto, en cada paso, sabemos una aproximación de la función ψ en cada nodo de cada una de las mallas. Tal como mencionamos inicialmente, al saber esto, empleando todas las técnicas antes descritas (DCT2 + *zero-padding* + IDCT2 para obtener el valor aproximado de la función en una malla más fina, e interpolación en una submalla de nueve nodos) dado un punto $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ puedo llegar a una interpolación de la función ψ allí. Ahora, la pregunta es: ¿de qué me sirve tener una interpolación de ψ en nuestro problema? Podemos usar esta interpolación en el método de la sección anterior definiendo $u = \text{dist}^s \psi$ y ver cuánto difiere del valor verdadero de f , que de esto se ocuparía GMRES.

De este modo, llegamos a un método numérico que para resolver el problema dada una f , hallar u tal que $(-\Delta)^s u = f$.

Como comentario final, en este capítulo nos concentramos en describir un método numérico que resuelva el problema (2.1) y sugerimos una posible implementación. En el siguiente capítulo, mostraremos algunos resultados obtenidos luego de implementar todas las ideas descritas a lo largo de las diferentes secciones.

A modo de resumen, nuestro método consiste en

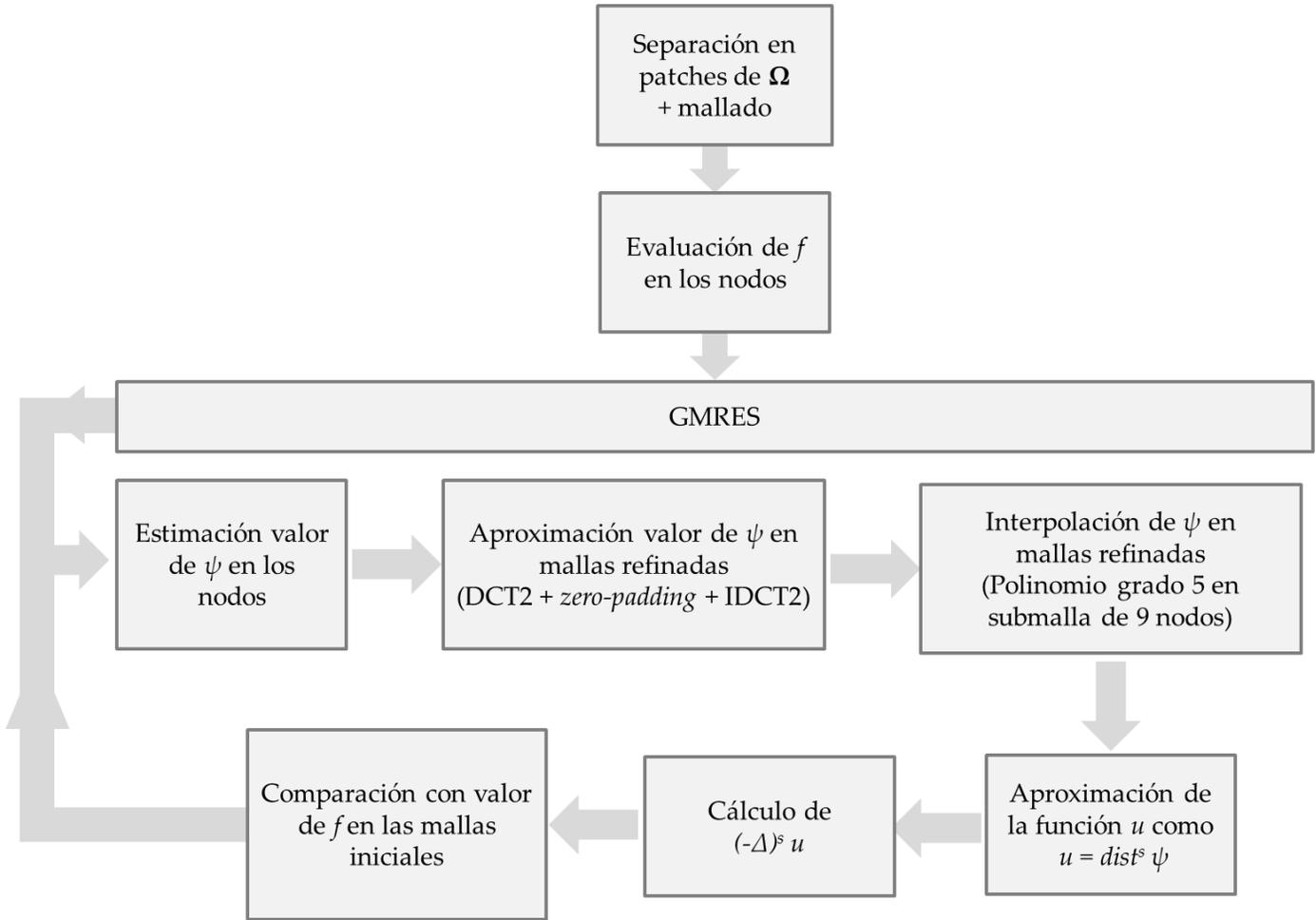


Figura 3.7: Descripción gráfica del método propuesto

Capítulo 4

Resultados computacionales

En este capítulo mostraremos varios experimentos computacionales, obtenidos luego de aplicar el método descrito en el capítulo previo, en diferentes dominios. En algunos casos, compararemos los resultados con métodos existentes y, en otros, con resultados exactos. El procedimiento descrito en el capítulo anterior fue programado en lenguaje MATLAB. Todos los ejemplos fueron corridos utilizando la versión MATLAB R2020b en una computadora con procesador Intel(R) Core(TM) i5-3210M CPU 2.50 GHz con 6 Gb. de memoria RAM.

4.1 Círculo

El primer caso que vamos a analizar es el de $\Omega = B_1(0, 0)$. Este fue y sigue siendo uno de los casos más estudiados en relación al problema (2.1), de hecho en la actualidad se conocen fórmulas explícitas de u y f que lo resuelven (ver [8]).

Adaptemos cada uno de los pasos de nuestro método a este dominio. El primero consiste en separarlo en patches. Nosotros decidimos hacerlo en cinco de ellos, del siguiente modo

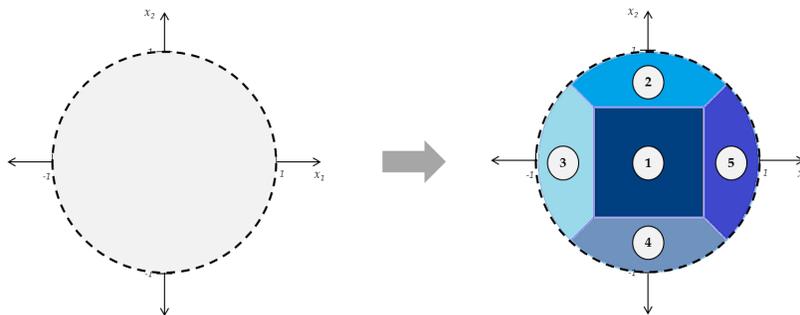


Figura 4.1: Separación en patches de $\Omega = B_1(0, 0)$

Describamos cada uno de estos patches. Recordemos que, para cada $1 \leq j \leq 5$, debemos definir una parametrización $\mathbf{x}_j : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_j$ suave. Con lo cual, tomamos

$$\mathbf{x}_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_1, \quad \mathbf{x}_1(y_1, y_2) = (0.5 \cdot y_1, 0.5 \cdot y_2)$$

$$\mathbf{x}_2 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad \mathbf{x}_2(y_1, y_2) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot y_1 + \frac{\pi}{2}, \frac{(1 - \epsilon)2 \sin(\mathbf{x}_2^1) - 1}{4 \sin(\mathbf{x}_2^1)} \cdot y_2 + \frac{(1 - \epsilon)2 \sin(\mathbf{x}_2^1) + 1}{4 \sin(\mathbf{x}_2^1)} \right)$$

$$\mathbf{x}_3 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_3, \quad \mathbf{x}_3(y_1, y_2) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot y_1 + \pi, \frac{(1 - \epsilon)2 \cos(\mathbf{x}_3^1) + 1}{4 \cos(\mathbf{x}_3^1)} \cdot y_2 + \frac{(1 - \epsilon)2 \cos(\mathbf{x}_3^1) - 1}{4 \cos(\mathbf{x}_3^1)} \right)$$

$$\mathbf{x}_4 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_4, \quad \mathbf{x}_4(y_1, y_2) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot y_1 + \frac{3\pi}{2}, \frac{(1 - \epsilon)2 \sin(\mathbf{x}_4^1) + 1}{4 \sin(\mathbf{x}_4^1)} \cdot y_2 + \frac{(1 - \epsilon)2 \sin(\mathbf{x}_4^1) - 1}{4 \sin(\mathbf{x}_4^1)} \right)$$

$$\mathbf{x}_5 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_5, \quad \mathbf{x}_5(y_1, y_2) = \left(\frac{\pi}{4} \cdot y_1 + 2\pi, \frac{(1 - \epsilon)2 \cos(\mathbf{x}_5^1) - 1}{4 \cos(\mathbf{x}_5^1)} \cdot y_2 + \frac{(1 - \epsilon)2 \cos(\mathbf{x}_5^1) + 1}{4 \cos(\mathbf{x}_5^1)} \right)$$

con $\epsilon > 0$ suficientemente chico, donde \mathbf{x}_j^1 representa la primera coordenada de la parametrización \mathbf{x}_j (con $j \in \{2, \dots, 5\}$).

Veamos por qué estas parametrizaciones sirven. La función \mathbf{x}_1 debe mandar el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ al cuadrado $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$, con lo cual, es esperable que tenga dicha formulación.

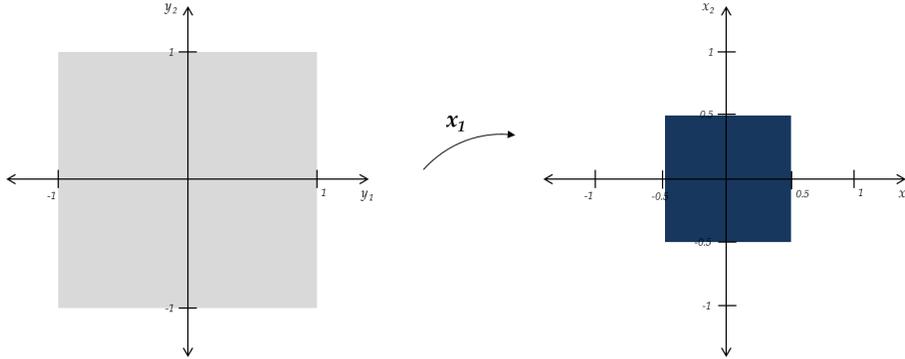


Figura 4.2: Descripción gráfica de la parametrización \mathbf{x}_1

Con respecto a lo que ocurre en los otros patches, analicemos el caso particular de \mathcal{P}_2 , dado que la idea es análoga para los demás. Empecemos describiendo este patch en coordenadas polares, definiendo $x_1 = r \cos(\theta)$ y $x_2 = r \sin(\theta)$. Claramente, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Para hallar los límites de la variable r , tenemos en cuenta que la región está delimitada por las ecuaciones $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y $x_2 = 0.5$. De la primera expresión, reemplazando los respectivos valores de x_1 y x_2 , llegamos a que $r < 1$ ó $r \leq 1 - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ suficientemente chico (recordemos que, al estar considerado nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, el método toma puntos en los extremos, por lo que el programa puede

fallar si se toman valores en el borde. Por esta cuestión es preferible achicar un poco el dominio para evitar errores). A partir de la segunda ecuación,

$$0.5 = x_2 = r \sin(\theta) \Rightarrow r \geq \frac{0.5}{\sin(\theta)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{0.5}{\sin(\theta)} \leq r \leq 1 - \epsilon.$$

Notemos que, al poner menores o iguales, estamos permitiendo que los patches a lo sumo se intersecten en los bordes, que era válido por cómo los definimos.

Lo que nos resta es hacer el mapeo del dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ a las respectivas variables θ y r . Para lograr esto, usamos la misma transformación del primer patch. Recordemos que la fórmula general para mandar el intervalo $[-1, 1]$ en un intervalo $[a, b]$ es

$$z(t) = \left(\frac{b+a}{2}\right) + t \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)$$

con $t \in [-1, 1]$. Con lo cual, reemplazando a y b con los respectivos límites de las variables r y θ llegamos a la formulación de \mathbf{x}_2 . Gráficamente,

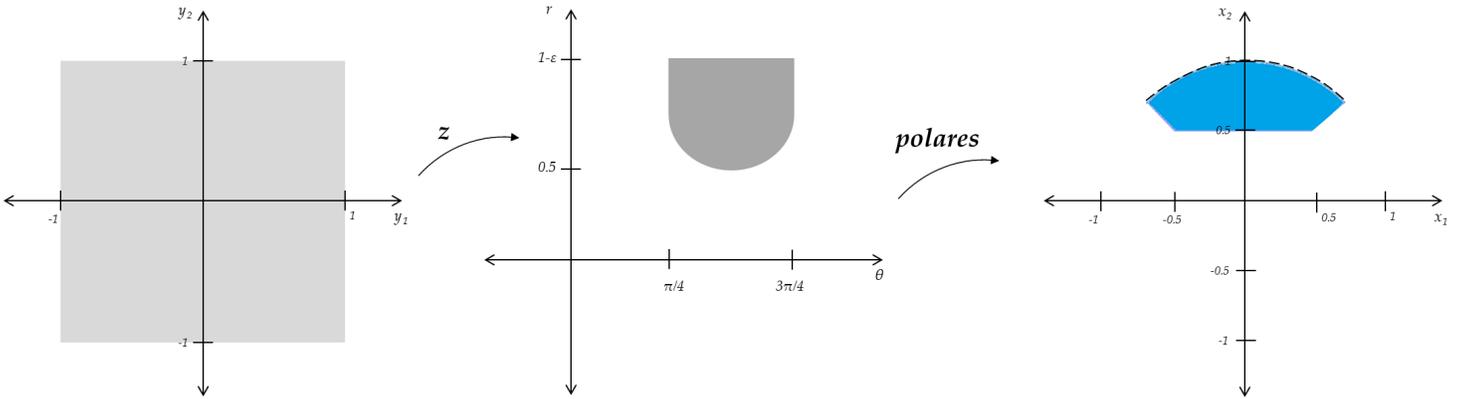


Figura 4.3: Descripción gráfica de la parametrización \mathbf{x}_2

En los patches restantes repetimos la misma idea recién explicada, pero considerando

$$\text{Patch 3: } \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \quad \text{y} \quad -\frac{0.5}{\cos(\theta)} \leq r \leq 1 - \epsilon,$$

$$\text{Patch 4: } \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4} \quad \text{y} \quad -\frac{0.5}{\sin(\theta)} \leq r \leq 1 - \epsilon,$$

$$\text{Patch 5: } \frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4} \quad \text{y} \quad \frac{0.5}{\cos(\theta)} \leq r \leq 1 - \epsilon.$$

Una vez que tenemos separado el dominio en patches, el siguiente paso es el mallado. Teniendo en cuenta la técnica descrita en el capítulo anterior, una posible malla del dominio queda

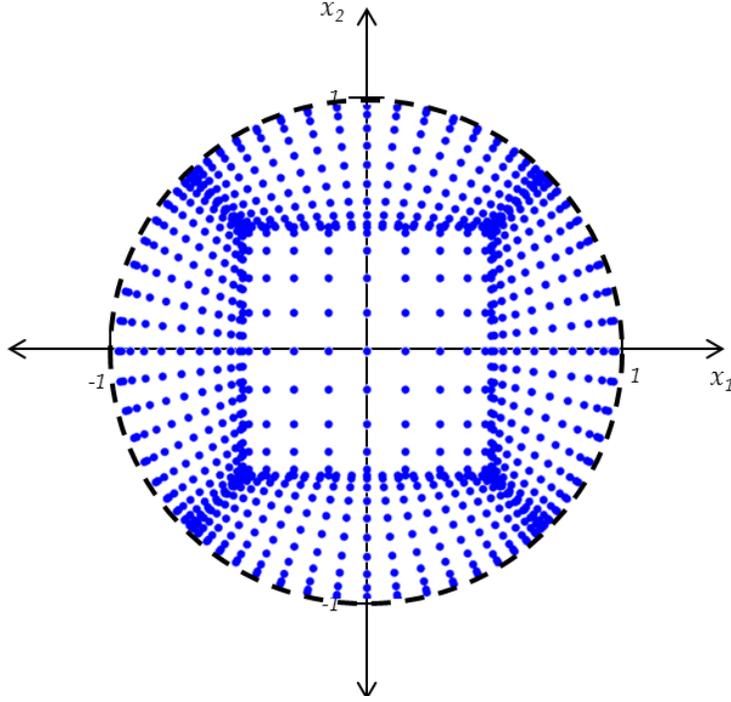


Figura 4.4: Ejemplo de mallado de $\Omega = B_1(0,0)$

En los ejemplos que mostaremos a continuación, para diferentes valores de $n \in \mathbb{N}$, vamos a considerar mallas que cumplan $M_1^1 = M_1^2 = n$, $M_j^1 = 2 \cdot n$ y $M_j^2 = n$ para $j \in \{2, \dots, 5\}$. Es decir, el primer patch va a ser de tamaño $n \times n$ y los restantes de tamaño $2n \times n$, como se ve en la imagen (esto lo elegimos así luego de varios experimentos computacionales).

Por último, debemos fijar unos detalles más para este dominio: la función $\text{dist}^s(\mathbf{x}, \partial\Omega)$, cómo calcular $a(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b(\mathbf{x}, \varphi)$ y el método de integración en la variable φ . En relación a la primera cuestión, tomamos $\text{dist}^s(\mathbf{x}, \partial\Omega) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^s$. Para hallar las funciones restantes, recordemos que eran los puntos en donde se intersectan el rayo de coordenadas $(\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi), \tilde{x}_2 + r \sin(\varphi))$, con $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ y φ fijos, y el borde del dominio. Este borde se puede describir como

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

con lo cual para hallar la intersección, resta reemplazar las coordenadas en la fórmula y despejar los valores de r . Notamos $\tilde{x}_1 = x_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2$. Haciendo esto,

$$(x_1 + r \cos(\varphi))^2 + (x_2 + r \sin(\varphi))^2 = 1,$$

que nos queda

$$r^2 + r(2x_1 \cos(\varphi) + 2x_2 \sin(\varphi)) + (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0.$$

Para hallar los r que cumplen la expresión anterior, debemos resolver la ecuación cuadrática. De este modo, llegamos a que

$$a(\mathbf{x}, \varphi) = -(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) - \sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)}$$

y

$$b(\mathbf{x}, \varphi) = -(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) + \sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)}.$$

En relación a la integral en φ , utilizamos el método de trapecios dado que, por lo que mencionamos recién,

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}^s((\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi), \tilde{x}_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega)}{w^s(r)} &= \frac{(1 - (\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi))^2 - (\tilde{x}_2 + r \sin(\varphi))^2)^s}{(r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} \\ &= \frac{(r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s}{(r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es decir, la función a integrar en φ , tal como indicamos en el capítulo previo, es π -periódica y suave, por lo tanto el método de trapecios va a converger suficientemente rápido.

Con todo esto, pasemos a los resultados numéricos. Todos los ejemplos de esta sección están basados en algunos de los mencionados en el paper [16], dado que es un trabajo bastante reciente y tiene varios casos con los que comparar (que no son los tradicionales de $f = 1$). En dicho trabajo, los autores desarrollan un método de colocación isogeométrica para discretizar el Laplaciano fraccionario y utilizan esta estrategia para resolver, entre otros, el problema fraccionario de Poisson en dos dimensiones que estamos considerando. A lo largo de la cuarta sección del paper se exhiben algunos ejemplos donde muestran el potencial de su propuesta. Lo que nosotros hicimos fue tomar tres de ellos y comparamos dichos resultados con los que llegamos al aplicar nuestro método.

En los ejemplos se usaron las siguientes funciones

$$f(\mathbf{x}) = \frac{2^{2s} \Gamma(s + n + 1)^2}{(n!)^2} (-1)^n P_n^{(s,0)}(2|\mathbf{x}|^2 - 1) \quad \text{y} \quad u(\mathbf{x}) = (1 - |\mathbf{x}|^2)^s (-1)^n P_n^{(s,0)}(2|\mathbf{x}|^2 - 1).$$

Notemos que son un caso particular de los resultados explícitos mencionados en el paper [8], y que luego recordaremos en el apéndice A.

En el trabajo, los autores detallan los resultados numéricos para el caso dada f hallar u tal que $(-\Delta)^s u = f$. Los experimentos fueron realizados tomando $s = 0.8$ y $n = 1, \dots, 5$. Los valores que ellos llaman como m y n (que aparecerán en algunos gráficos) denotan la cantidad de puntos que se toman para ciertas reglas de cuadratura usadas. El error es computado usando la siguiente fórmula

$$\text{error} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} |\tilde{u}(\mathbf{x}_{i,j}) - u(\mathbf{x}_{i,j})|^2}{n_1 \cdot n_2}},$$

donde \tilde{u} es la solución obtenida con el programa y n_1 y n_2 representan la cantidad de puntos en la malla para cada eje.

Como último comentario, para estos casos,

$$\phi(r) = (-1)^n P_n^{(s,0)}(2[(x_1 + r \cos(\varphi))^2 + (x_2 + r \sin(\varphi))^2] - 1),$$

que resulta ser un polinomio en r de grado a lo sumo $2n$. Con lo cual, este dato nos sirve para fijar una cota en el valor de K (hasta donde desarrollar la sumatoria), pues, recordando una propiedad mencionada en B.4,

$$\int_{-1}^1 x^m C_n^{(\lambda)}(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx = 0 \text{ para } 0 \leq m < n.$$

Ejemplo 1 - $s = 0.8$ y $n = 1$

Comencemos viendo un gráfico de u y f para este caso,

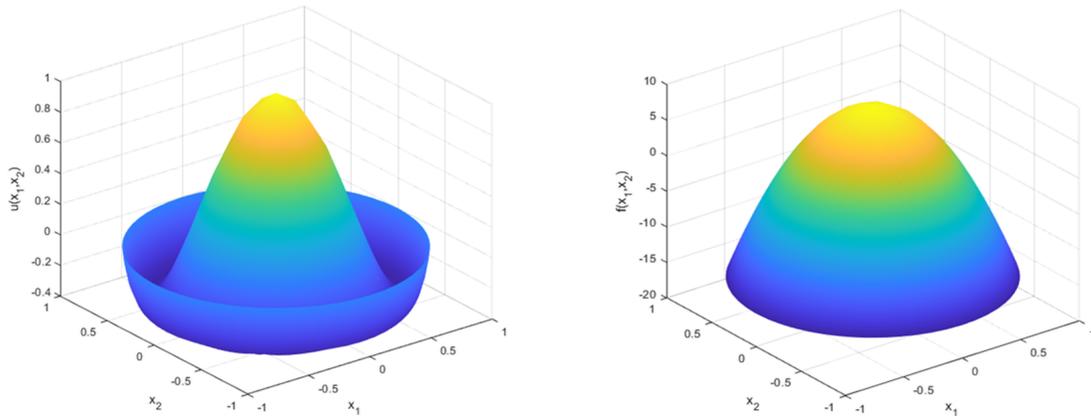


Figura 4.5: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) con $n = 1$ y $s = 0.8$

Para este caso, el grado de $\phi(r)$ es 2, con lo cual tomar un valor de K cercano a ese número va a ser suficiente. En nuestro caso, elegimos $K = 5$. Con respecto

a los valores de I y J (es decir, la cantidad de nodos en la regla de cuadratura que discretiza a la integral del producto interno y la integral en φ respectivamente), elegimos $I = J = 5$, pues para esa elección llegábamos a resultados bastante buenos y en tiempos adecuados. Al aumentar los valores de I, J o K no notamos grandes diferencias, así que sólo comentaremos los resultados obtenidos para estos valores.

A continuación mostramos el gráfico extraído del paper [16] donde se observa el error obtenido con el método propuesto por los autores según el tamaño de la malla utilizada para el caso en cuestión.

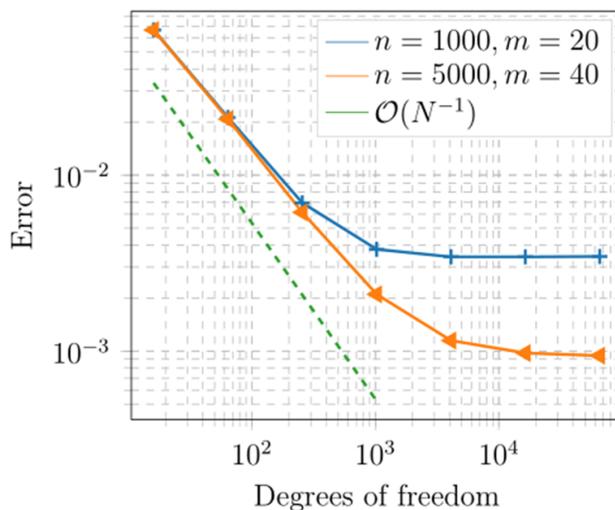
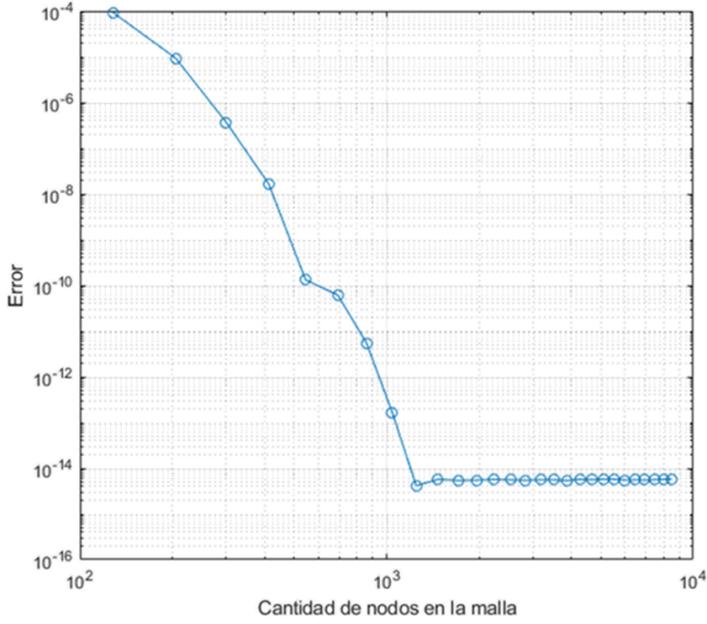


Figura 4.6: Gráfico del error extraído de [16] luego de aplicar el método propuesto para el caso $n = 1$ y $s = 0.8$

Luego de aplicar nuestro método, obtenemos los siguientes gráficos que detallamos a continuación. En el primero mostramos el error obtenido (calculado utilizando la fórmula mencionada inicialmente) según el tamaño de la malla. En otras palabras, dado un n , hallamos una malla de tamaño $n \times n + 4 \cdot 2n \times n$, aplicamos el algoritmo sobre ella y vemos cuánto difiere la solución con el u verdadero para cada punto. En el segundo, mostramos el tiempo que tarda la computadora (en segundos) en correr el algoritmo. Sobre este punto cabe recalcar que es un posible tiempo, es decir, el programa se podría mejorar mucho más de modo que los tiempos sean mejores u óptimos. El objetivo de reportar los tiempos es que se tenga una idea de cuánto se tarda en correr el programa, sabiendo que no necesariamente van a ser los óptimos. En el tercer gráfico mostramos el error obtenido luego de aplicar el método GMRES, según la cantidad de nodos en la malla. Por último, el cuarto gráfico indica la cantidad de iteraciones que debió realizar el método GMRES hasta llegar a una solución (también según el tamaño de la malla). En este caso, se utilizó la versión default de GMRES que ofrece MATLAB donde la cantidad de iteraciones máxima es 10.



Ejemplo 2 - $s = 0.8$ y $n = 5$

Para este caso, los gráficos de las funciones u y f son

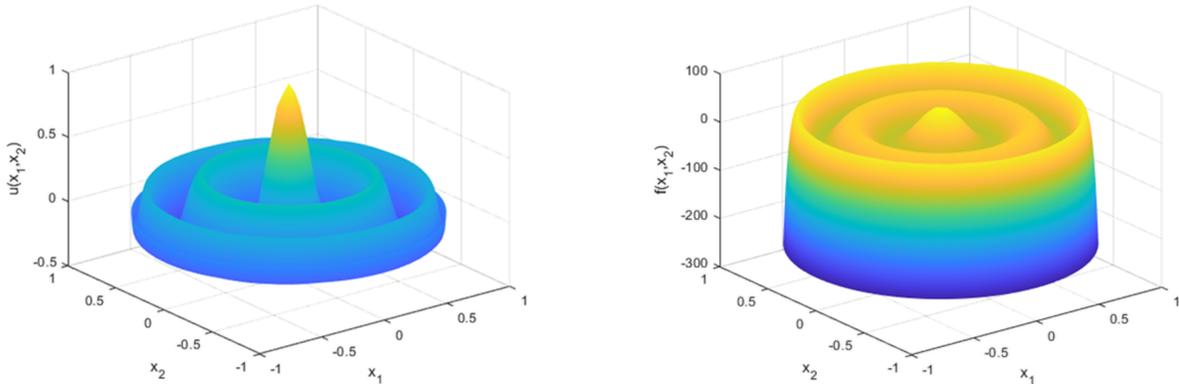


Figura 4.8: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) con $n = 5$ y $s = 0.8$

Para este caso, el grado de $\phi(r)$ es 10, con lo cual un valor de K cercano a 10 va a servir. En nuestro caso, elegimos $K = 11, I = 15$ y $J = 15$ (los últimos nuevamente probando con distintos valores hasta llegar a resultados óptimos en relación al error y los tiempos de corrida del programa). Al aumentar los valores de I, J o K no notamos grandes diferencias, así que sólo comentaremos los resultados obtenidos con dichos valores.

El gráfico de los errores obtenidos, luego de aplicar el método isogeométrico, extraído del paper [16] correspondiente a este caso es

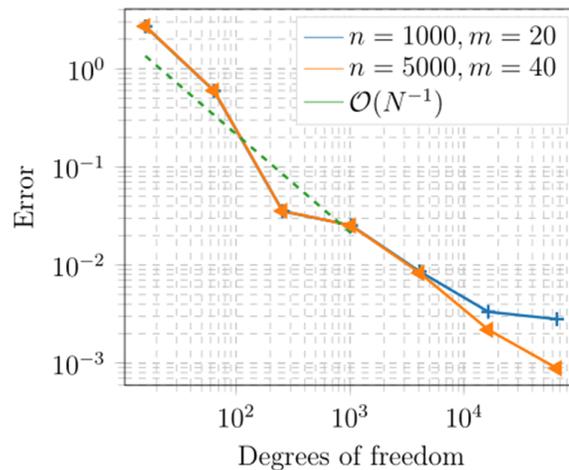


Figura 4.9: Gráfico del error extraído de [16] luego de aplicar el método propuesto para el caso $n = 5$ y $s = 0.8$

Luego de aplicar nuestro método, y teniendo en cuenta los comentarios realizados en el primer ejemplo, obtenemos los siguientes gráficos

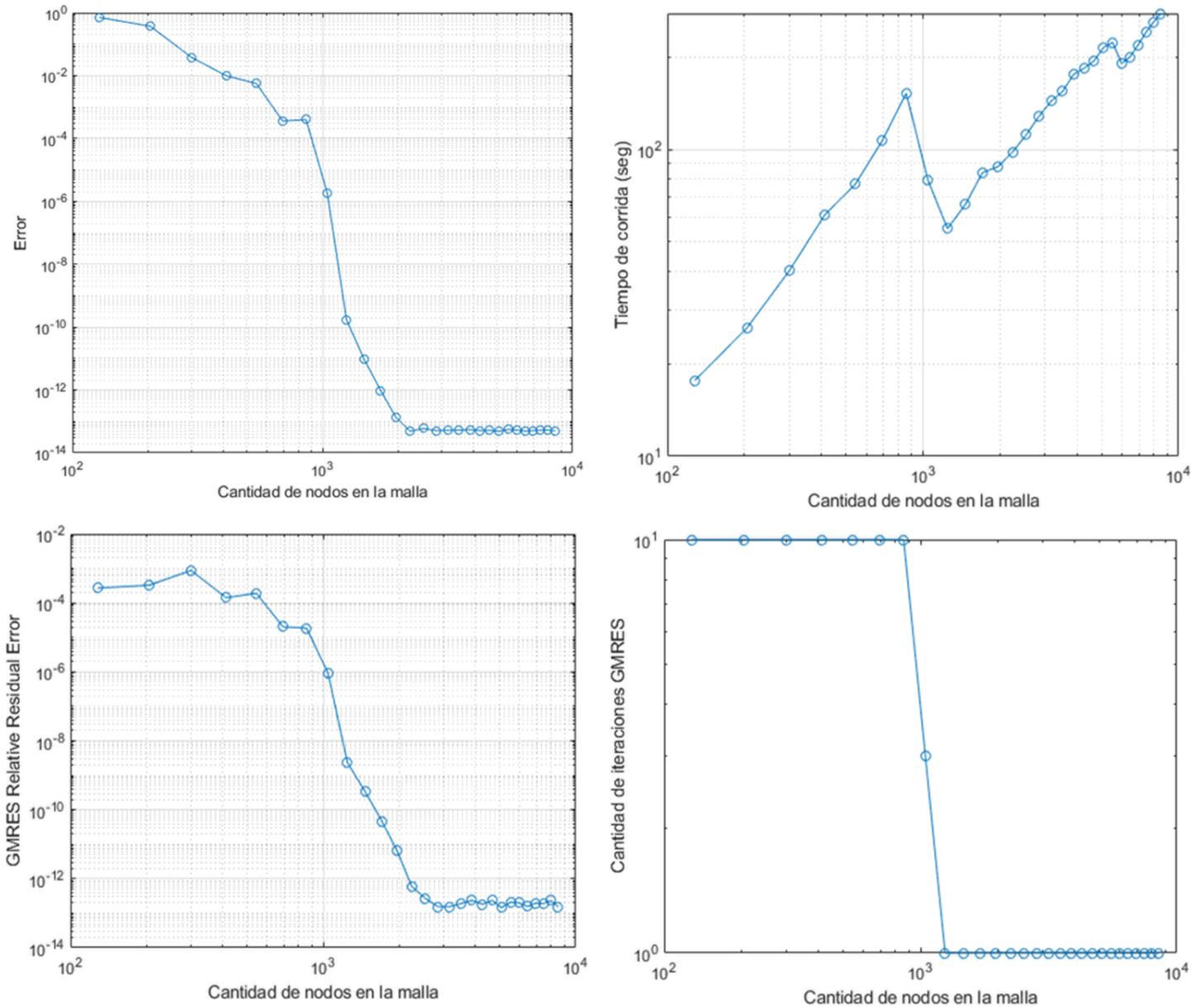


Figura 4.10: Gráficos obtenidos con el método propuesto en este trabajo para el caso $n = 5$ y $s = 0.8$

Ejemplo 3 - $s = 0.5$ y $n = 2$

El último ejemplo que consideramos es el de $n = 2$ y $s = 0.5$. Para este caso, los autores comparan los resultados obtenidos con su método con aquellos a los que se llega luego de aplicar el método de elementos finitos descrito en [3]. Analicemos este caso con nuestra propuesta.

Los gráficos de u y f son

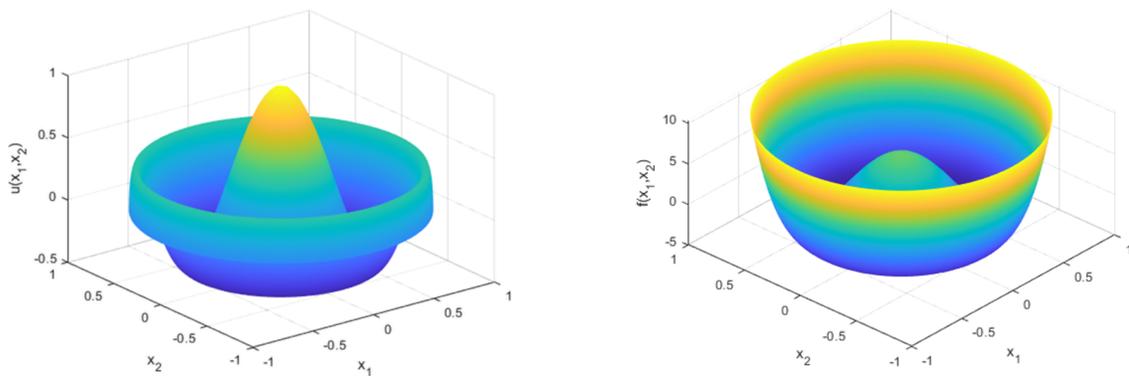


Figura 4.11: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) con $n = 2$ y $s = 0.5$

En este caso, el grado de $\phi(r)$ es 4, por lo que tomando $K = 5$ obtenemos buenos resultados. Los valores de los otros parámetros que consideramos fueron $I = J = 10$, nuevamente mediante experimentos numéricos. Al igual que antes, al aumentar los valores de I, J o K no notamos grandes diferencias.

El gráfico de los errores obtenidos extraído del paper [16] correspondiente a este caso es

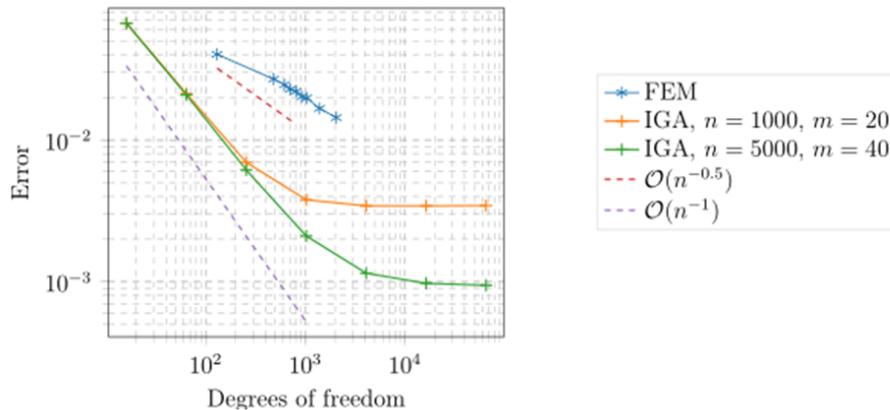


Figura 4.12: Gráfico del error extraído de [16] luego de aplicar el método propuesto para el caso $n = 2$ y $s = 0.5$

En el gráfico, FEM hace referencia al método mencionado en [3] e IGA al método indicado en [16].

Aplicando nuestro método a este caso, obtenemos los siguientes gráficos

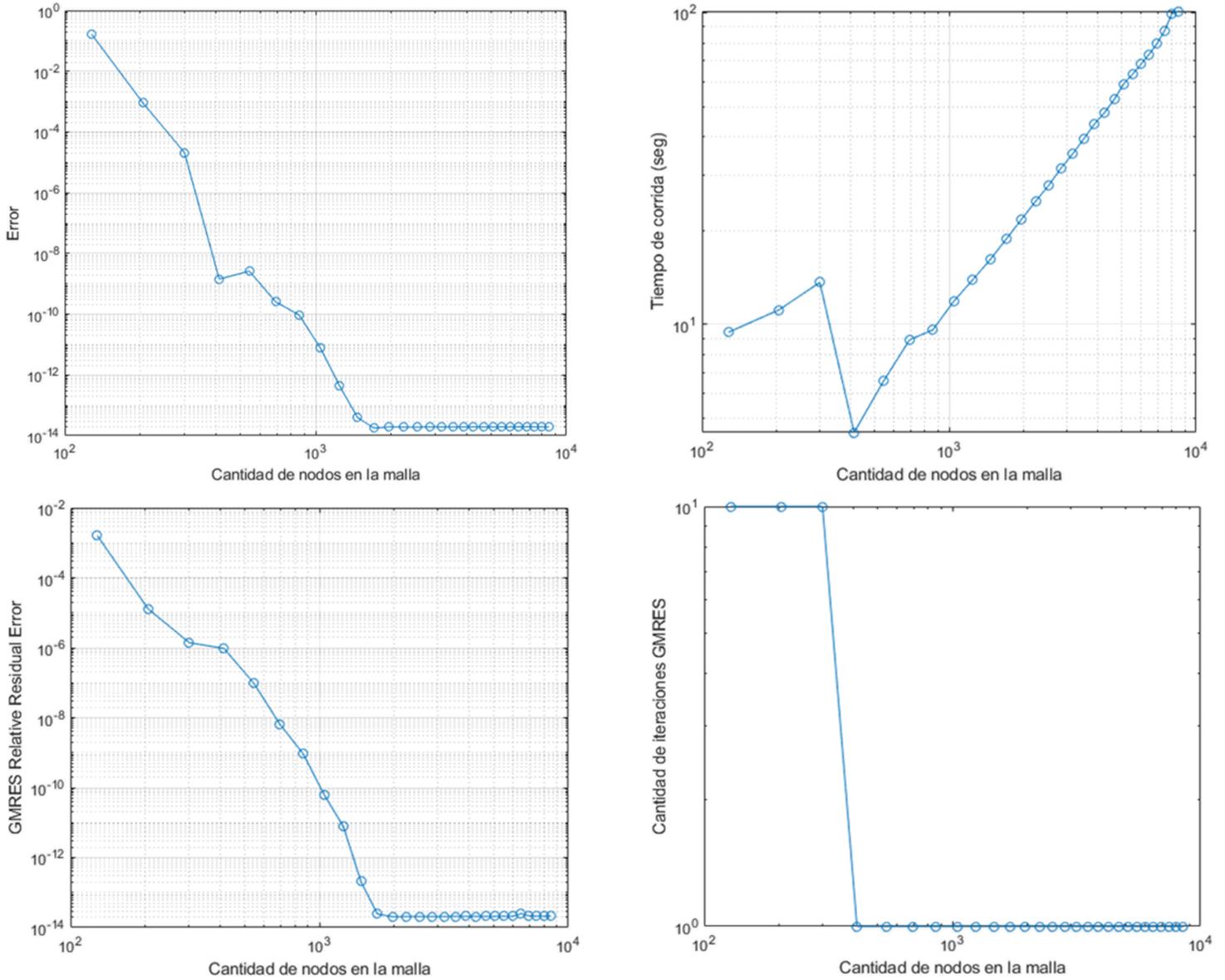


Figura 4.13: Gráficos obtenidos con el método propuesto en este trabajo para el caso $n = 2$ y $s = 0.5$

4.2 Elipse

El segundo caso que vamos a analizar es el de $\Omega = E_{a,b}(0, 0)$, donde a y b representan los semiejes de la elipse (mayor o menor). Este problema es un poco más genérico que el anterior (ya que el círculo es un caso particular de la elipse), y no hay tantos trabajos publicados donde se mencionen soluciones explícitas para este dominio. El paper más avanzado que encontramos hasta el momento para este caso es [1].

Empecemos adaptando cada paso del método a este caso. Al igual que en el círculo, separamos en cinco patches a nuestro dominio, del siguiente modo

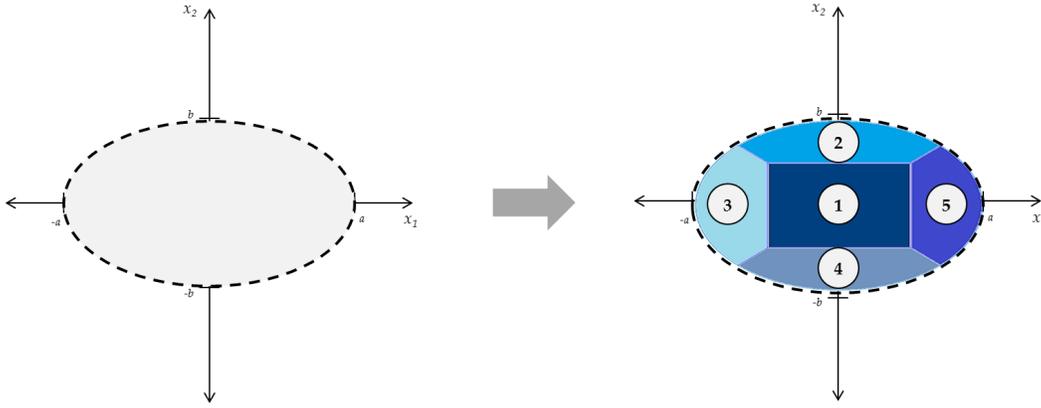


Figura 4.14: Separación en patches de $\Omega = E_{a,b}(0, 0)$

Describamos cada uno de ellos definiendo una parametrización $\mathbf{x}_j : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_j$ suave, para $1 \leq j \leq 5$. Para ello, tomamos

$$\mathbf{x}_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_1, \quad \mathbf{x}_1(y_1, y_2) = \left(\frac{a}{2} \cdot y_1, \frac{b}{2} \cdot y_2 \right)$$

$$\mathbf{x}_2 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad \mathbf{x}_2(y_1, y_2) = \left(\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right) \cdot y_1 + \frac{\pi}{2}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_2^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_2^1)} - \epsilon - \frac{b}{2 \sin(\mathbf{x}_2^1)}} \right) \cdot y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_2^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_2^1)} - \epsilon + \frac{b}{2 \sin(\mathbf{x}_2^1)}} \right) \right)$$

$$\mathbf{x}_3 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_3, \quad \mathbf{x}_3(y_1, y_2) = \left(\tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \cdot y_1 + \pi, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_3^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_3^1)} - \epsilon + \frac{a}{2 \cos(\mathbf{x}_3^1)}} \right) \cdot y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_3^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_3^1)} - \epsilon - \frac{a}{2 \cos(\mathbf{x}_3^1)}} \right) \right)$$

$$\mathbf{x}_4 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_4, \quad \mathbf{x}_4(y_1, y_2) = \left(\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right) \cdot y_1 + \frac{3}{2}\pi, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_4^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_4^1)} - \epsilon + \frac{b}{2 \sin(\mathbf{x}_4^1)}} \right) \cdot y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_4^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_4^1)} - \epsilon - \frac{b}{2 \sin(\mathbf{x}_4^1)}} \right) \right)$$

$$\mathbf{x}_5 : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_5, \quad \mathbf{x}_5(y_1, y_2) = \left(\tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \cdot y_1 + 2\pi, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_5^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_5^1)} - \epsilon - \frac{a}{2 \cos(\mathbf{x}_5^1)}} \right) \cdot y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\mathbf{x}_5^1) + a^2 \sin^2(\mathbf{x}_5^1)} - \epsilon + \frac{a}{2 \cos(\mathbf{x}_5^1)}} \right) \right)$$

con $\epsilon > 0$ suficientemente chico, donde \mathbf{x}_j^1 representa la primera coordenada de la parametrización \mathbf{x}_j (con $j \in \{2, \dots, 5\}$).

Veamos por qué definimos de este modo las parametrizaciones. En primer lugar, la función \mathbf{x}_1 debe mandar el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ al rectángulo $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$. Recordando la fórmula genérica, es de esperar llegar a esa formulación.

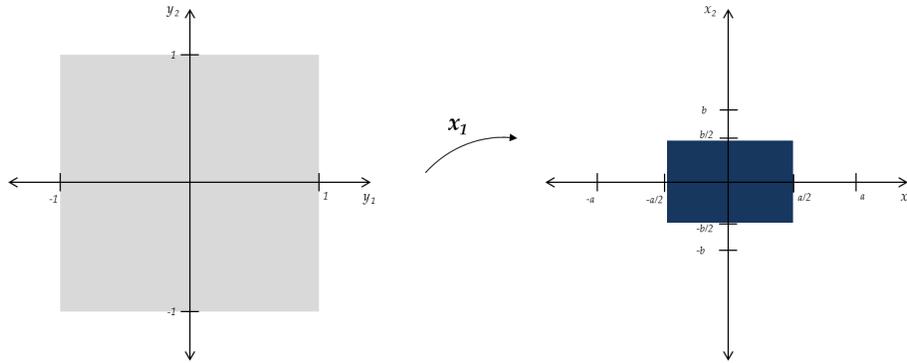


Figura 4.15: Descripción gráfica de la parametrización \mathbf{x}_1

Con respecto a los otros patches, veamos cómo deducir la parametrización para el caso de \mathcal{P}_2 , ya que la idea es análoga para los demás. Nuevamente, describimos este patch en coordenadas polares, fijando $x_1 = r \cos(\theta)$ y $x_2 = r \sin(\theta)$. En este caso, los límites de la variable angular deben tener una relación con las coordenadas de los vértices del rectángulo. Para el patch \mathcal{P}_2 , el ángulo mínimo debe ser el correspondiente al punto $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ y el ángulo máximo debe ser el correspondiente al punto $(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. En el primer caso, el ángulo es

$$\tan(\theta_{\min}) = \frac{b/2}{a/2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta_{\min} = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right),$$

y en el segundo

$$\tan(\theta_{\max}) = \frac{b/2}{-a/2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \theta_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi.$$

Por lo tanto,

$$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta \leq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi.$$

Para hallar los límites de la variable r debemos tener en cuenta que la región está delimitada por las ecuaciones $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ y $x_2 = \frac{b}{2}$. Partiendo de la primera expresión, reemplazando los respectivos valores de x_1 y x_2 , llegamos a que

$$r < \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} \Rightarrow r \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} - \epsilon$$

con $\epsilon > 0$ suficientemente chico (por el mismo motivo que en el caso del círculo). De la segunda ecuación obtenemos que

$$\frac{b}{2} = x_2 = r \sin(\theta) \Rightarrow r \geq \frac{b}{2 \sin(\theta)}.$$

Con lo cual,

$$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta \leq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{y} \quad \frac{b}{2 \sin(\theta)} \leq r \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} - \epsilon.$$

Lo que resta ahora es hacer el mapeo del dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ a la respectiva región recién descrita en las variables r y θ . Para lograr esto usamos la transformación ya mencionada. Finalmente, combinando estas ideas, obtenemos la formulación de \mathbf{x}_2 . Gráficamente,

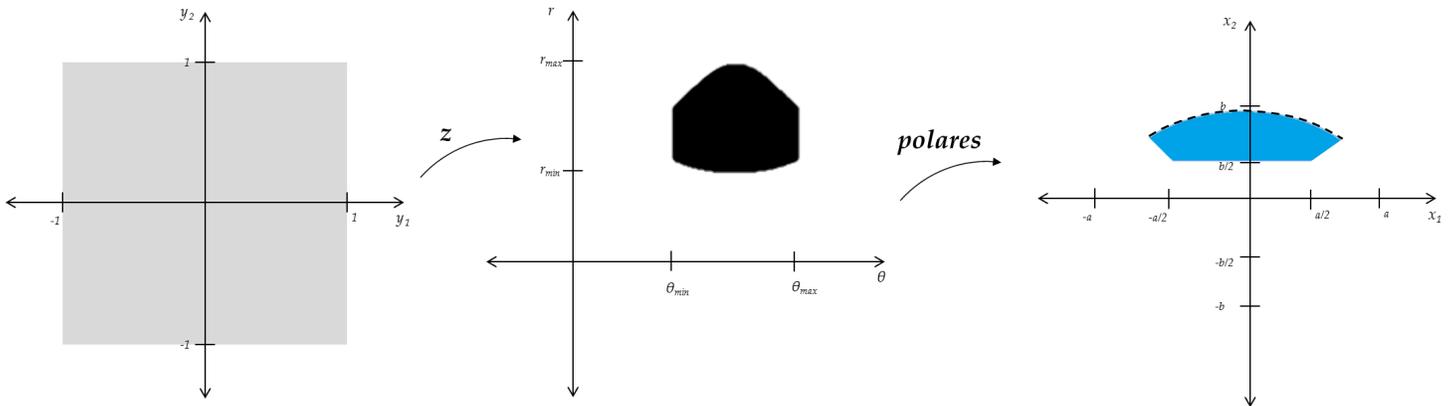


Figura 4.16: Descripción gráfica de la parametrización \mathbf{x}_2

En los patches restantes repetimos la misma idea recién explicada, pero considerando:

$$\text{Patch 3: } \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta \leq \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{y} \quad -\frac{a}{2 \cos(\theta)} \leq r \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} - \epsilon,$$

$$\text{Patch 4: } \pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta \leq 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{y} \quad -\frac{b}{2 \sin(\theta)} \leq r \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} - \epsilon,$$

$$\text{Patch 5: } 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \theta \leq 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{y} \quad \frac{a}{2 \cos(\theta)} \leq r \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}} - \epsilon.$$

Una vez que tenemos separado el dominio en patches, el siguiente paso es el mallado. Teniendo en cuenta la técnica mencionada en el capítulo previo, una posible malla del dominio queda

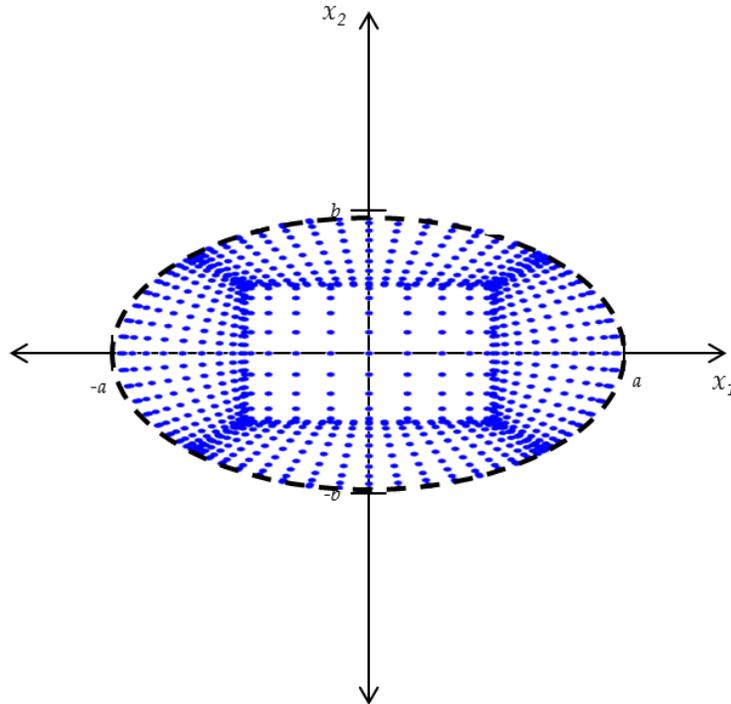


Figura 4.17: Ejemplo de mallado de $\Omega = E_{a,b}(0,0)$

Al igual que en el caso del círculo, luego de varios experimentos computacionales, en los ejemplos consideramos, dado un $n \in \mathbb{N}$, $M_1^1 = M_1^2 = n$, $M_j^1 = 2 \cdot n$ y $M_j^2 = n$ para $j \in \{2, \dots, 5\}$. Es decir, el primer patch es de tamaño $n \times n$ y los restantes de tamaño $2n \times n$, como se ve en la imagen.

Para terminar, fijemos unos últimos datos correspondientes al caso de la elipse. Tomamos

$$\text{dist}^s(\mathbf{x}, \partial\Omega) = \left(1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right)^s.$$

Para hallar $a(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b(\mathbf{x}, \varphi)$ procedemos de manera análoga al caso del círculo. Como queremos hallar la intersección del rayo de coordenadas $(\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi), \tilde{x}_2 + r \sin(\varphi))$, con $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ y φ fijos, y el borde del dominio, debemos reemplazar estos puntos en la ecuación

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1,$$

y despejar r . Haciendo esto (llamamos $\tilde{x}_1 = x_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2$ para simplificar),

$$\left(\frac{x_1 + r \cos(\varphi)}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + r \sin(\varphi)}{b}\right)^2 = 1,$$

que queda

$$r^2(b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi)) + r(2x_1 \cos(\varphi)b^2 + 2x_2 \sin(\varphi)a^2) + (b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2) = 0.$$

Para llegar a los r que cumplen la expresión anterior debemos resolver la ecuación cuadrática. De esta manera, obtenemos

$$a(\mathbf{x}, \varphi) = -\frac{(x_1 \cos(\varphi)b^2 + x_2 \sin(\varphi)a^2)}{(b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))} - \frac{\sqrt{(x_1 \cos(\varphi)b^2 + x_2 \sin(\varphi)a^2)^2 - (b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))(b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2)}}{(b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))}$$

y

$$b(\mathbf{x}, \varphi) = -\frac{(x_1 \cos(\varphi)b^2 + x_2 \sin(\varphi)a^2)}{(b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))} + \frac{\sqrt{(x_1 \cos(\varphi)b^2 + x_2 \sin(\varphi)a^2)^2 - (b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))(b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2)}}{(b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi))}.$$

En relación a la integral en φ , también va a ser útil el método de trapezios dado que, por lo deducido recién,

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}^s((\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi), \tilde{x}_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega)}{w^s(r)} &= \frac{\left(1 - \left(\frac{\tilde{x}_1 + r \cos(\varphi)}{a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{x}_2 + r \sin(\varphi)}{b}\right)^2\right)^s}{(r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} \\ &= \frac{\left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2}\right)^s (r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s}{(r - a(\mathbf{x}, \varphi))^s (b(\mathbf{x}, \varphi) - r)^s} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s.$$

Tal como vimos en el capítulo anterior, sabemos que la expresión es π -periódica. Verifiquémoslo,

$$\left(\frac{\cos^2(\varphi + \pi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi + \pi)}{b^2} \right)^s = \left(\frac{(-\cos(\varphi))^2}{a^2} + \frac{(-\sin(\varphi))^2}{b^2} \right)^s = \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s.$$

Como es una función suave en φ , y dado que el resto de la expresión en φ también lo era, el método de trapecios va a converger suficientemente rápido.

Con toda esta información, pasemos a los resultados numéricos. En todos los casos, los ejemplos fueron extraídos del paper [1] (pág. 14, tabla 3), de modo que podamos comparar con la solución verdadera del problema. Todos los experimentos fueron realizados tomando $s = 0.4$ y $\Omega = E_{1,2}(0, 0)$. El error, al igual que en la sección anterior, fue computado usando la fórmula

$$\text{error} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} |\tilde{u}(\mathbf{x}_{i,j}) - u(\mathbf{x}_{i,j})|^2}{n_1 \cdot n_2}},$$

donde \tilde{u} es la solución obtenida con el programa y n_1 y n_2 representan la cantidad de puntos en la malla para cada eje.

Ejemplo 1

El primer ejemplo que consideramos es

$$u(x_1, x_2) = (1-x_1) \left(1-x_1^2 - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \right)^s \quad \text{y} \quad f(x_1, x_2) = \frac{2^{2s-1} \Gamma(1+s)^2}{\pi} (J_0 - [J_0 + 2sJ_1]x_1),$$

donde

$$J_0 = 2 \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(s+1, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{1}{4}\right) = 4\pi {}_2F_1\left(s+1, \frac{1}{2}; 1; -3\right),$$

$$J_1 = 2 \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(s+1, \frac{1}{2}; 2; 1 - \frac{1}{4}\right) = 2\pi {}_2F_1\left(s+1, \frac{1}{2}; 2; -3\right).$$

En este caso

$$\phi(r) = \left(\cos^2(\varphi) + \frac{\sin^2(\varphi)}{2^2} \right)^s \cdot (1 - (x_1 + r \cos(\varphi)))$$

(que es lineal en r), por lo que tomar K cercano a 1 va a servir. En nuestro caso, consideramos $K = 5$. Con respecto a I y J , realizando experimentos con varias cotas,

vimos que $I = 10$ y $J = 30$ funcionaban bastante bien. Al aumentar los valores de I , J o K no notamos grandes diferencias, así que sólo comentamos los resultados obtenidos para estos valores.

Los gráficos de u y f son

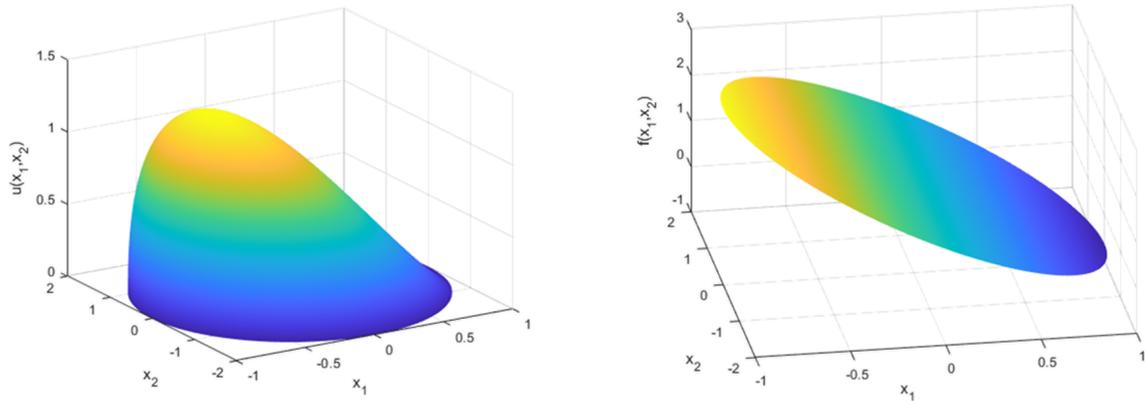


Figura 4.18: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) para el ejemplo 1

Al igual que en los ejemplos estudiados para $\Omega = B_1(0, 0)$, mostramos cuatro gráficos. En el primero podemos observar cómo va variando el error a medida que aumentamos la cantidad de nodos en la malla. Recordemos que la idea es tomar un $n \in \mathbb{N}$, armar la malla de tamaño $n \times n + 4 \cdot 2n \times n$, aplicar el algoritmo de sabiendo f calcular u y finalmente reportar el error usando la expresión antes mencionada. En el segundo gráfico vemos el tiempo de corrida de programa en segundos. Caba mencionar, nuevamente, que no necesariamente este tiempo es óptimo. La idea es informar cuánto tardó el programa por cómo lo codificamos. Obviamente se puede mejorar muchísimo más, pero sólo buscamos dar una idea de los tiempos. En el tercer gráfico se menciona el error relativo luego de usar GMRES y en el último, la cantidad de iteraciones que necesitó hacer el método iterativo hasta encontrar una solución. En este caso, también usamos la versión default de GMRES que ofrece MATLAB, que fija 10 como cantidad de interacciones máximas.

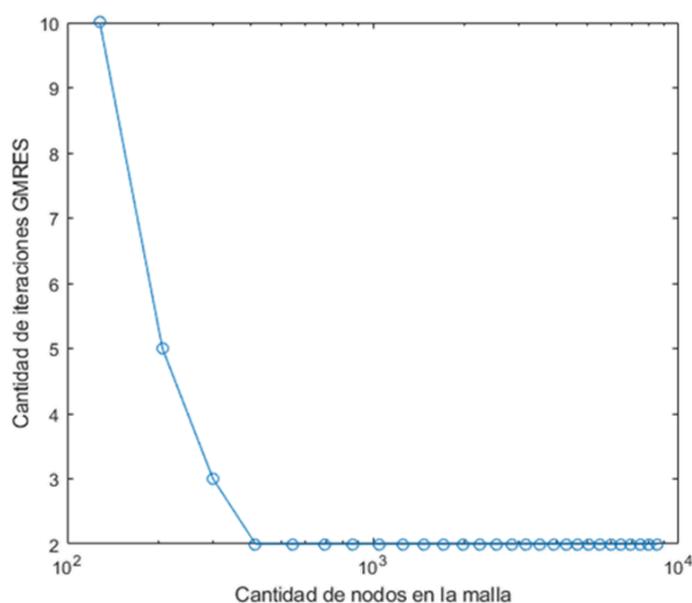
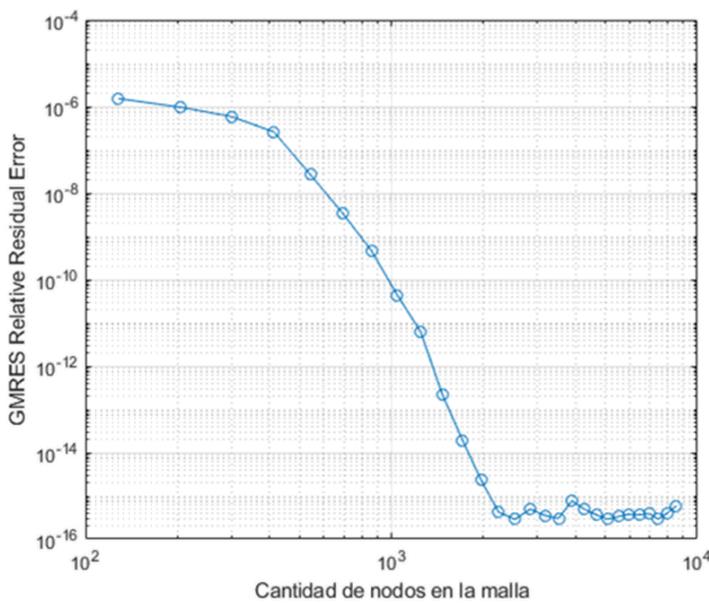
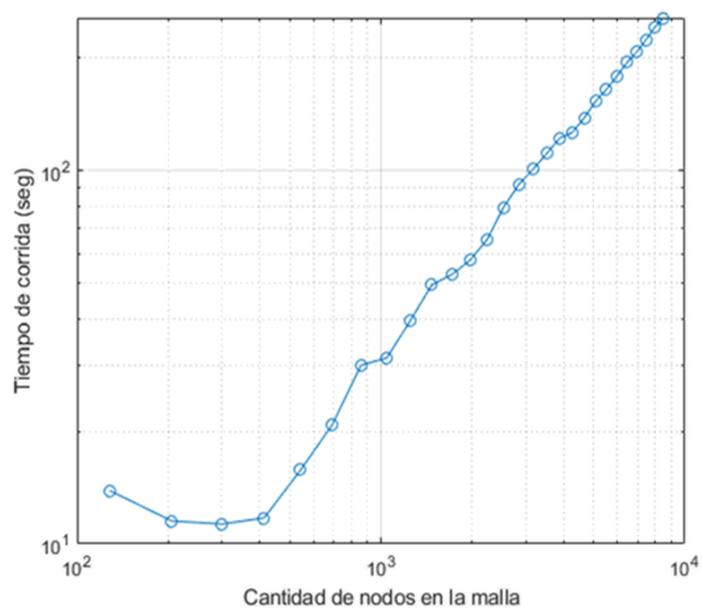
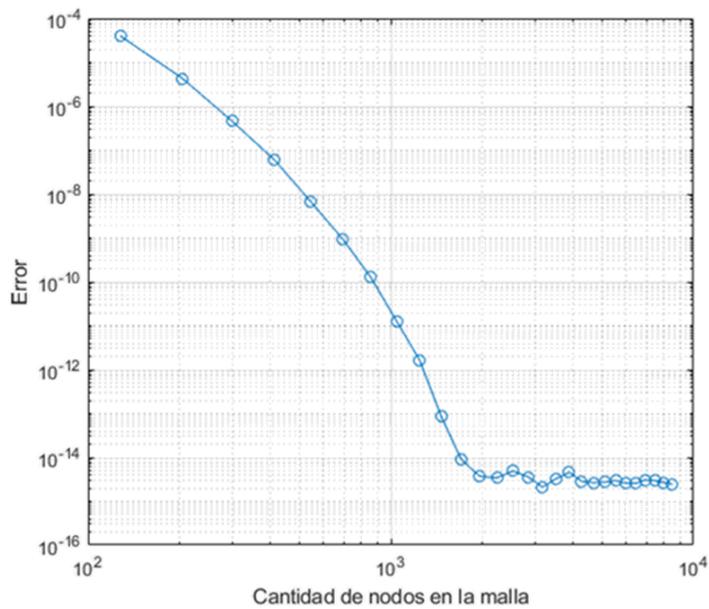


Figura 4.19: Gráficos obtenidos con el método propuesto en este trabajo para el ejemplo 1

Ejemplo 2

El segundo ejemplo que consideramos es

$$u(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 \left(1 - x_1^2 - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \right)^s \quad y$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2^{2s-1} \Gamma(1+s)^2}{\pi} \left([J_0 + 5sJ_1 + 2s(s-1)J_2]x_1^2 - 2[J_0 + 2sJ_1]x_1 + J_0 - sJ_1 + s[J_1 + 2(s-1)(J_1 - J_2)]\frac{x_2^2}{4} \right),$$

donde J_0 y J_1 son los mismos que en el ejemplo 1, y

$$J_2 = 2 \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(s+1, \frac{5}{2}; 3; 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} {}_2F_1\left(s+1, \frac{5}{2}; 3; -3\right).$$

En este caso

$$\phi(r) = \left(\cos^2(\varphi) + \frac{\sin^2(\varphi)}{2^2} \right)^s \cdot (1 - (x_1 + r \cos(\varphi)))^2,$$

que resulta ser una función cuadrática en r . Por lo que tomar K cercano a 2 va a servir. En particular, nosotros consideramos $K = 5$. Con respecto a los demás valores, realizando experimentos con varias cotas vimos que $I = 15$ y $J = 35$ funcionaban bastante bien. Al aumentar los valores de I , J o K no notamos grandes diferencias, por lo que sólo reportamos este caso.

Los gráficos de u y f son

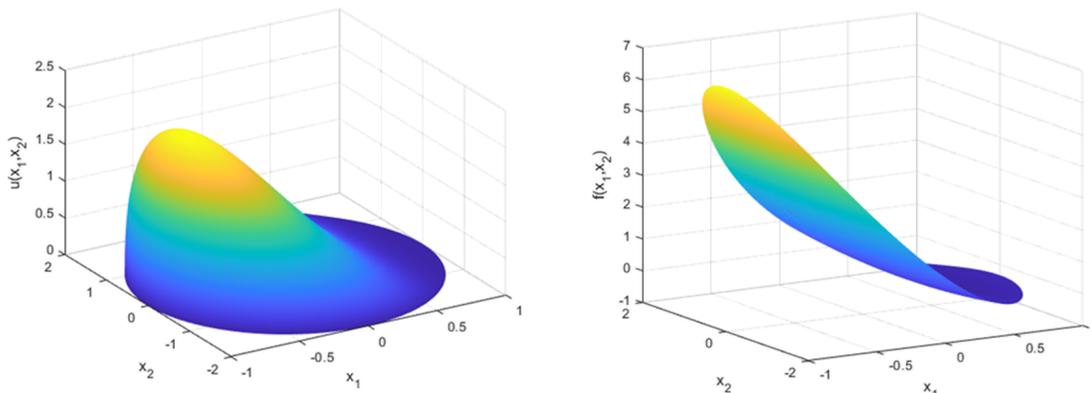


Figura 4.20: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) para el ejemplo 2

Teniendo en cuenta el comentario realizado en el primer ejemplo, en relación a qué representa cada gráfico, en la siguiente página podemos observar los resultados obtenidos para este caso.

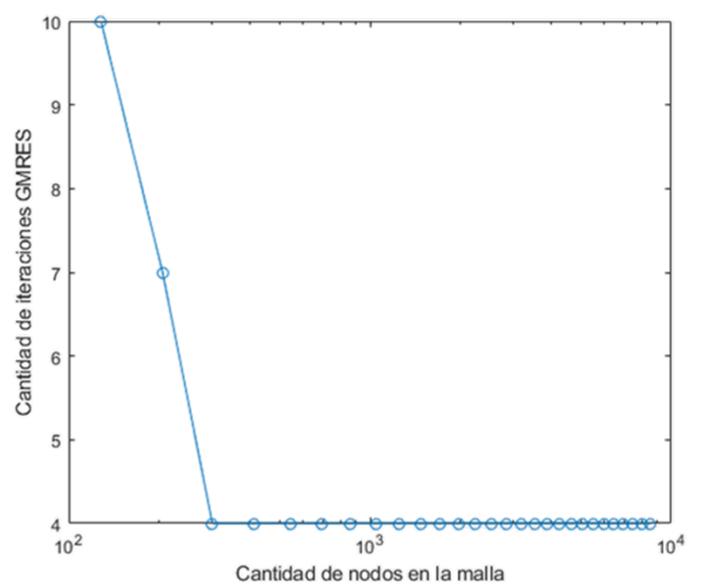
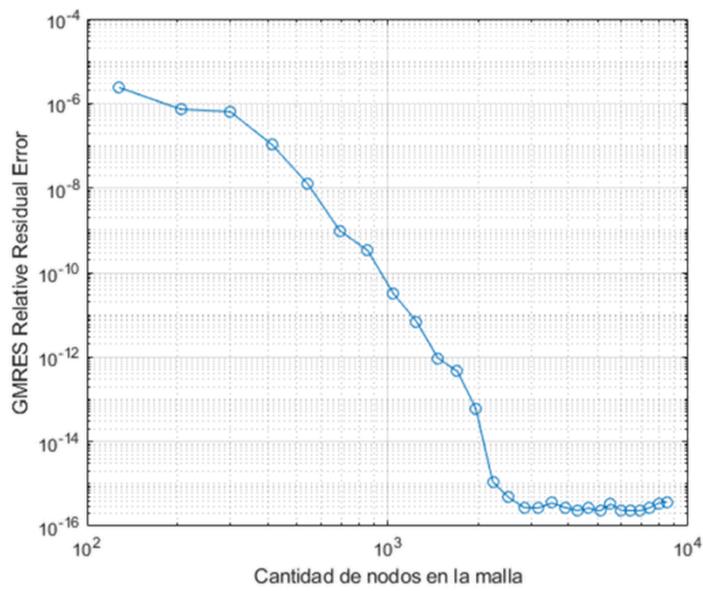
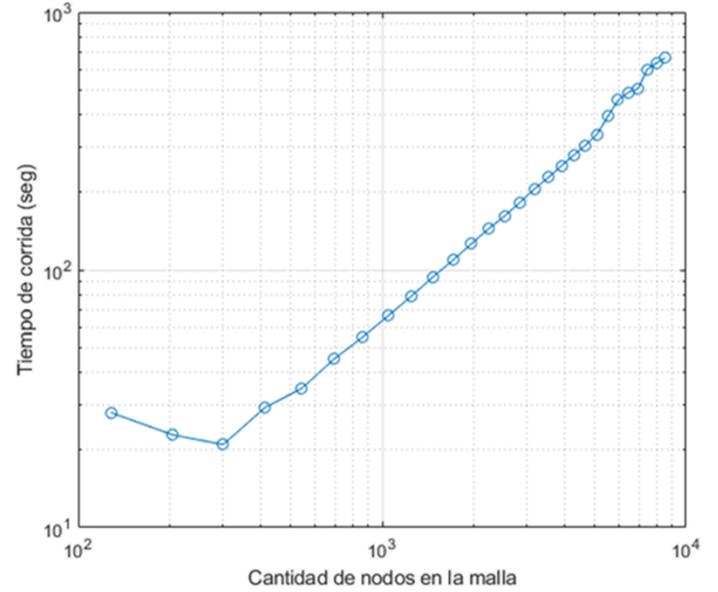
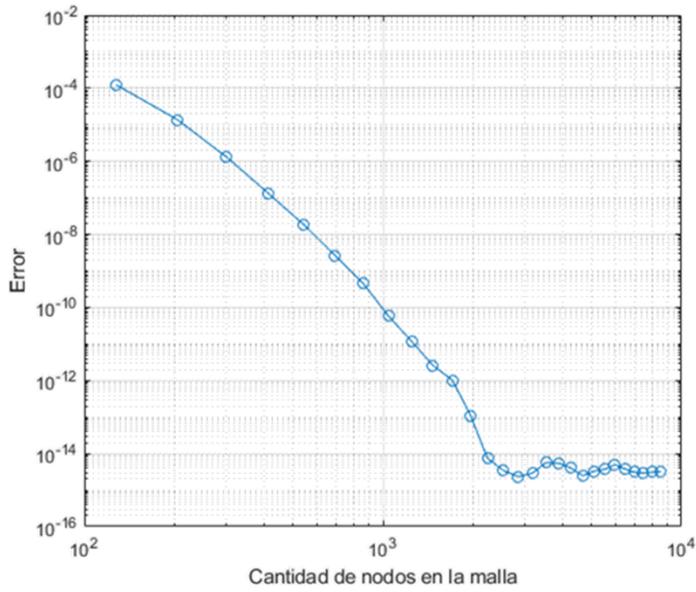


Figura 4.21: Gráficos obtenidos con el método propuesto en este trabajo para el ejemplo 2

Ejemplo 3

El tercer ejemplo que consideramos es

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_2^2 \left(1 - x_1^2 - \left(\frac{x_2}{2} \right)^2 \right)^s \quad y$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2^{2s-1}\Gamma(1+s)^2}{\pi} \left(s[J_0 - J_1 + 2(s-1)(J_1 - J_2)]x_1^2 - s(J_0 - J_1) + [(2s+1)(s+1)J_0 - s(4s+1)J_1 + 2s(s-1)J_2] \frac{1}{4}x_2^2 \right),$$

donde J_0 , J_1 y J_2 se calculan como indicamos en los ejemplos 1 y 2.

Para este caso,

$$\phi(r) = \left(\cos^2(\varphi) + \frac{\sin^2(\varphi)}{2^2} \right)^s \cdot \frac{1}{4}(x_2 + r \sin(\varphi))^2,$$

que es cuadrática en r . Por lo tanto, tomar K cercano a 2 va a servir, en nuestro caso consideramos $K = 5$. Con respecto a los demás valores, realizando experimentos con varias cotas vimos que $I = 10$ y $J = 35$ funcionaban bastante bien. Al aumentar los valores de I , J o K no notamos grandes diferencias, por lo que sólo contamos este caso.

Los gráficos de u y f son

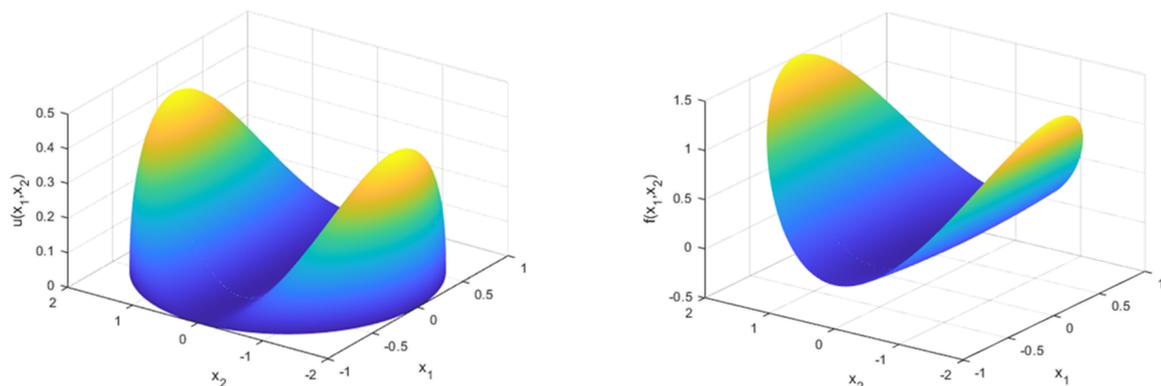


Figura 4.22: Gráfico de $u(x_1, x_2)$ (izq.) y $f(x_1, x_2)$ (der.) para el ejemplo 3

Teniendo en cuenta el comentario realizado en el primer ejemplo, en relación a qué representa cada gráfico, en la siguiente página podemos observar los resultados obtenidos para este caso.

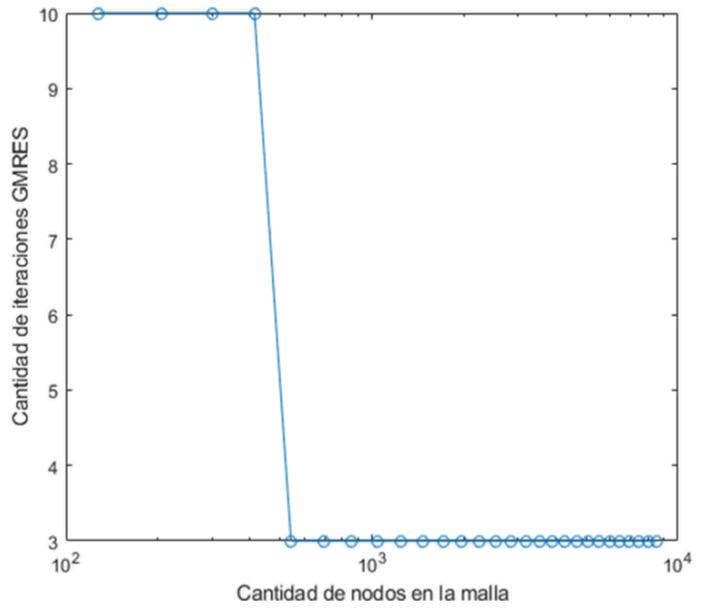
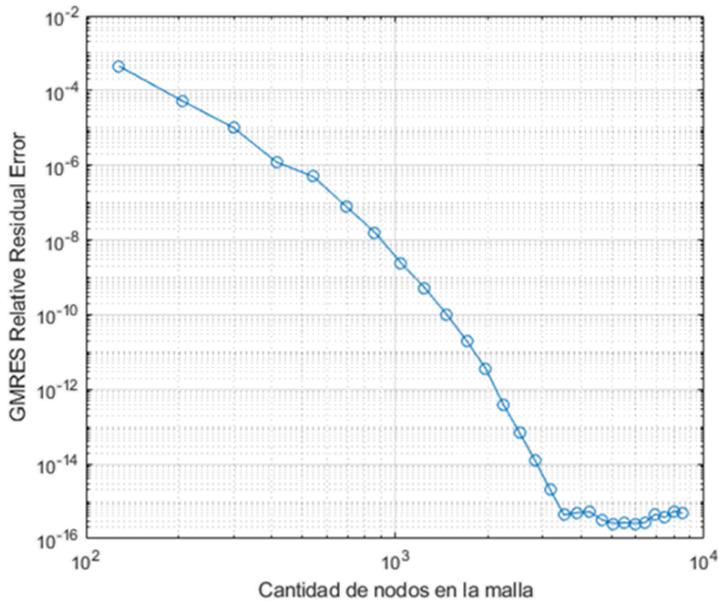
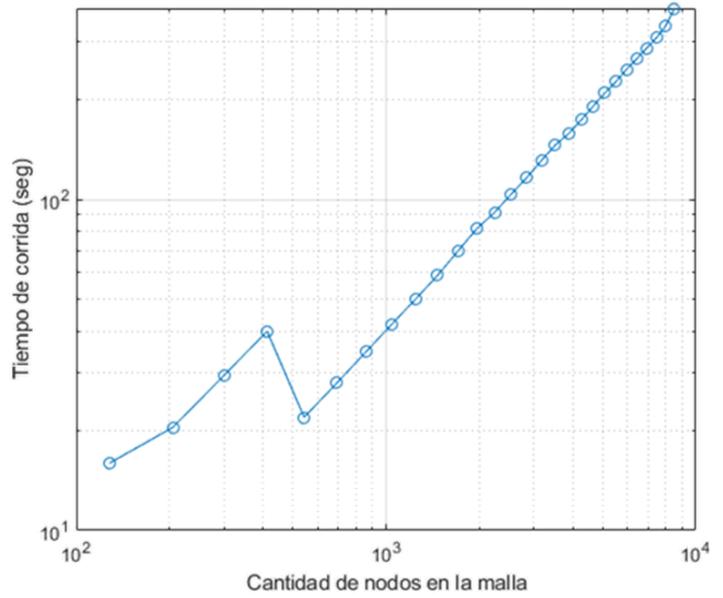
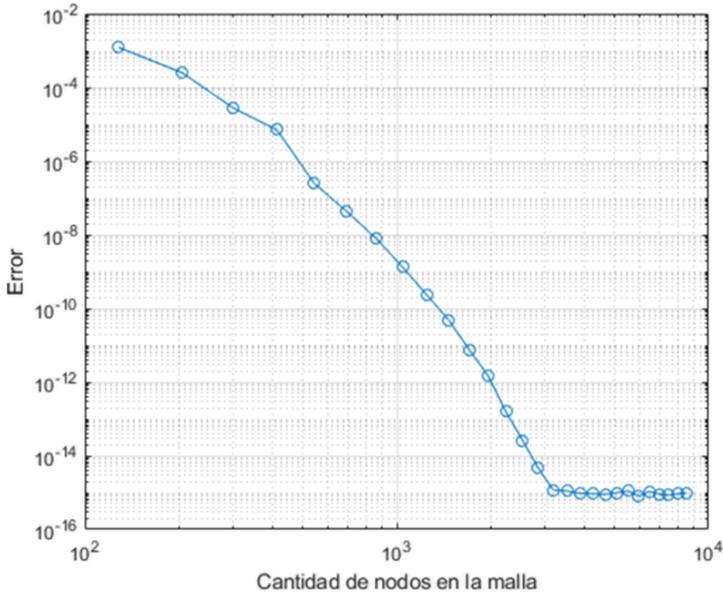


Figura 4.23: Gráficos obtenidos con el método propuesto en este trabajo para el ejemplo 3

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo desarrollamos e implementamos un método numérico para resolver el problema (2.1), en particular para $n = 2$. A partir de los resultados obtenidos en el capítulo previo, podemos observar que aquellos a los que llegamos con el método propuesto son claramente mejores que los existentes hasta el momento. También, es destacable el tiempo de resolución del programa en cada caso, llegando a resultados óptimos en tiempos razonables.

Sin embargo, todavía hay mucho más por mejorar, este trabajo constituye tan solo el punto de partida. En primer lugar, como trabajo actual, estamos intentando expandir el método a otros dominios, como por ejemplo el *squircle* o el *kite*. En este último caso, aparece el desafío de que el dominio no es convexo, por lo que se deben hacer algunas modificaciones en la implementación. A su vez, es necesario estudiar con más detalle lo que ocurre con la integral angular, dado que no siempre se van a dar las condiciones para poder aplicar la regla de trapecios. En relación a este tema, estamos considerando implementar un método similar al que se menciona en [5], en la sección 9.3 y el apéndice B. Además, sería interesante analizar cómo elegir del mejor modo los límites de las sumatorias (es decir, los valores M , L y K) o cuántos puntos tomar en cada patch de modo que no sean los mismos en todos los casos y que dichos valores sean los exactos. Obviamente, la implementación que presentamos se puede optimizar en cuanto a los tiempos de corrida o encontrar otra manera más sencilla de abordar ciertos aspectos, cuestiones que también estamos estudiando para mejorar el rendimiento. Por último, en relación a los resultados mencionados en el apéndice A, sería positivo poder llegar a una demostración analítica para el caso general de que con este método podemos obtener resultados exactos conocidos en el círculo o deducir nuevas expresiones en dominios más allá de la elipse.

Todas estas cuestiones están bajo estudio, para continuar mejorando el método desarrollado e implementado en esta tesis y presentar un resultado de calidad que resulte útil a aquellas personas de la comunidad científica que estén estudiando o trabajando con este problema.

Apéndice A

Algunos resultados exactos

Utilizando el método descrito a lo largo de este trabajo en esta sección verificamos varias soluciones explícitas de la ecuación (2.1) en dominios circulares y elípticos.

Empecemos analizando el caso en el que $\Omega = B_1(0,0)$. Para este dominio, tal como mencionamos en los capítulos previos, existen fórmulas cerradas tanto de u como de f que satisfacen (2.1). Uno de los trabajos más avanzados en este tema es [8]. Comentemos uno de los principales resultados que se demuestran en dicho trabajo y veamos cómo podemos deducir algunos casos usando nuestra propuesta.

En primer lugar, hagamos algunas definiciones previas. Los polinomios sólidos armónicos de orden l son polinomios $V(\mathbf{x})$ en \mathbb{R}^d homogéneos de grado l que satisfacen la igualdad $\Delta V = 0$. Estos polinomios forman un espacio de dimensión finita, cuya dimensión es

$$M_{d,l} := \frac{d+2l-2}{d+l-2} \binom{d+l-2}{l}.$$

Para cada l fijo, es posible hallar una base de este espacio, que denotamos por $V_{l,m}$ con $1 \leq m \leq M_{d,l}$.

Recordando las nociones de función hipergeométrica (ver apéndice B.2) y polinomios de Jacobi (ver apéndice B.5), definamos unas funciones que van a ser necesarias para entender el teorema que vamos a utilizar. Dados $d \geq 1$ y $\alpha > 0$, notamos

$$P_{l,m,n}(\mathbf{x}) := V_{l,m}(\mathbf{x}) P_n^{(\alpha/2, d/2+l-1)}(2|\mathbf{x}|^2 - 1),$$

donde $l, n \geq 0$ y $1 \leq m \leq M_{d,l}$; y

$$p_{l,m,n}(\mathbf{x}) := (1 - |\mathbf{x}|^2)_+^{\alpha/2} P_{l,m,n}(\mathbf{x}).$$

Con todo esto, enunciemos el siguiente teorema

Teorema 1. *Asumamos que $\alpha > 0$, $l, n \geq 0$ y $1 \leq m \leq M_{d,l}$. Entonces*

$$(-\Delta)^{\alpha/2} p_{l,m,n}(\mathbf{x}) = \frac{2^\alpha \Gamma(1 + \frac{\alpha}{2} + n) \Gamma(\frac{d+2l+\alpha}{2} + n)}{n! \Gamma(\frac{d+2l}{2} + n)} P_{l,m,n}(\mathbf{x})$$

para todo \mathbf{x} tal que $|\mathbf{x}| < 1$. En otras palabras, los polinomios $P_{l,m,n}$ forman un sistema ortogonal completo de autofunciones del operador $f \rightarrow (-\Delta)^\alpha(wf)$ en $L^2(w)$, el espacio L^2 pesado con función de peso $w(\mathbf{x}) = (1 - |\mathbf{x}|^2)_+^{\alpha/2}$.

Demostración. Ver demostración teorema 3 en [8]. □

Para nuestro caso, $\alpha = 2s$ y $d = 2$. Por lo que el resultado queda

$$(-\Delta)^s p_{l,m,n}(x_1, x_2) = \frac{2^{2s} \Gamma(1 + s + n) \Gamma(1 + l + s + n)}{n! \Gamma(1 + l + n)} P_{l,m,n}(x_1, x_2)$$

para $|x| < 1$, con $l, n \geq 0$ y $1 \leq m \leq M_{2,l}$. A su vez,

- Si $l = 0$, $M_{d,0} = 1 \forall d \geq 1$, y en particular para $d = 2$.
- Si $l > 0$, $M_{2,l} = 2$.

Con lo cual, si $l = 0$ tenemos que $m = 1$ y si $l > 0$ vale que $m = 1, 2$.

Demostremos usando nuestro método algunos casos particulares.

Ejemplo 1

Para $l = 0, n = 0$ y $m = 1$,

$$u(x_1, x_2) = p_{0,1,0}(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)_+^s$$

y

$$f(x_1, x_2) = 2^{2s} \Gamma(1 + s)^2.$$

De acuerdo a las fórmulas (3.20) y (3.21), para este dominio,

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) = \int_0^\pi \left[\frac{\Gamma(2s + 1)}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) (k + s + 1/2) C_k^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \right) \right] d\varphi$$

con

$$\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) = \int_{-1}^1 \phi \left((y + 1) \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1 - y)^s (1 + y)^s dy.$$

Recordemos que

$$u(x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)) = v(r) = \phi(r) \cdot w^s(r).$$

En este caso,

$$u(x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)) = \text{dist}^s((x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega),$$

que, por lo que vimos en el capítulo 4, es igual a $w^s(r)$. Con lo cual, $\phi(r) = 1$.

Usando esto,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) &= \int_{-1}^1 \phi \left((y+1) \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\ &= \int_{-1}^1 C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x_1, x_2) &= \int_0^\pi \left[\frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) C_0^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a_i(\mathbf{x}, \varphi)}{b_i(\mathbf{x}, \varphi) - a_i(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \right) \right] d\varphi \\ &= \int_0^\pi \frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) d\varphi \\ &= \Gamma(2s+1) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2). \end{aligned}$$

Utilizando algunas de las propiedades de la función gama que se mencionan en B.1, obtenemos que

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) = 2^{2s} \Gamma(s+1)^2 = f(x_1, x_2).$$

Ejemplo 2

Para $l = 1, n = 0$ y $m = 1$,

$$u(x_1, x_2) = p_{1,1,0}(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)_+^s$$

y

$$f(x_1, x_2) = (2^{2s} \Gamma(1+s) \Gamma(2+s)) x_1.$$

Para este caso,

$$u(x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)) = \text{dist}^s((x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega)(x_1 + r \cos(\varphi)),$$

donde, usando que la primera parte es igual a $w^s(r)$, llegamos a que $\phi(r) = x_1 + r \cos(\varphi)$.

Partiendo de (3.21),

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) &= \int_{-1}^1 \phi \left((y+1) \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[x_1 + \left((y+1) \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a(\mathbf{x}, \varphi) \right) \cos(\varphi) \right] C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\left(x_1 + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right) + y \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right] C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\ &= \left(x_1 + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right) \int_{-1}^1 C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \\ &\quad \int_{-1}^1 y \cdot C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy. \end{aligned}$$

Esta integral es igual a

$$\begin{cases} \left(x_1 + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} & \text{si } k = 0, \\ \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \frac{\sqrt{\pi} (s+1/2) \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{5}{2})} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x_1, x_2) &= \frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \int_0^\pi \left[\left(x_1 + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \frac{\sqrt{\pi} (s+1/2) \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{5}{2})} (s+3/2) C_1^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Recordemos las definiciones de $a(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b(\mathbf{x}, \varphi)$ para el caso de $\Omega = B_1(0, 0)$,

$$a(\mathbf{x}, \varphi) = -(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) - \sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)}$$

y

$$b(\mathbf{x}, \varphi) = -(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) + \sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} = -(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)),$$

$$\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} = \sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)},$$

y

$$\frac{-2a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 = -\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} = \frac{x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)}{\sqrt{(x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))^2 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)}}.$$

Reemplazando estos valores en la expresión del Laplaciano fraccionario,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(x_1 + \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) + a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) \right) d\varphi &= x_1 \pi - \int_0^\pi (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) \cos(\varphi) d\varphi \\ &= x_1 \pi - \int_0^\pi (x_1 \cos^2(\varphi) + x_2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= x_1 \pi - x_1 \frac{\pi}{2} \\ &= x_1 \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) C_1^{(s+1/2)} \left(\frac{-2a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) \cos(\varphi) 2(s+1/2) \left(\frac{-2a(\mathbf{x}, \varphi)}{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)} - 1 \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \cos(\varphi) 2(s+1/2) (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)) d\varphi \\ &= 2(s+1/2) \int_0^\pi (x_1 \cos^2(\varphi) + x_2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= 2(s+1/2) x_1 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x_1, x_2) &= \frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) x_1 \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{\pi} (s+1/2) \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{5}{2})} (s+3/2) (s+1/2) x_1 \pi \right] \\ &= x_1 \left[\frac{\Gamma(2s+1) \sqrt{\pi} \Gamma(s+1) (s+1/2)}{2\Gamma(s+\frac{3}{2})} + \frac{\Gamma(2s+1) \sqrt{\pi} \Gamma(s+1) (s+1/2)^2 (s+3/2)}{\Gamma(s+\frac{5}{2})} \right] \end{aligned}$$

Al igual que en el primer ejemplo, utilizando algunas de las propiedades de la función gama que se mencionan en B.1, llegamos a que

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) = x_1 (2^{2s} \Gamma(s+1) \Gamma(s+2)) = f(x_1, x_2).$$

Estas ideas que desarrollamos en los dos ejemplos se podrían extender para demostrar, mediante este método, que el Laplaciano fraccionario de $u(x_1, x_2) = p_{l,m,n}(x_1, x_2)$ es igual a $f(x_1, x_2) = \frac{2^{2s}\Gamma(1+s+n)\Gamma(1+l+s+n)}{n!\Gamma(1+l+n)} P_{l,m,n}(x_1, x_2)$. Obviamente, no resulta algo tan directo de probar, al menos por lo que vimos con el ejemplo 2. Para valores de l más grandes, notamos que una estrategia útil para hallar el valor de $\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi)$ era reescribir a la función $\phi(r)$ como un polinomio en y y usar la propiedad

$$\int_{-1}^1 y^i C_k^{(s+1/2)}(y)(1-y)^s(1+y)^s dy = 0 \text{ para } 0 \leq i < k.$$

Para algunos valores de l más grandes que 1, logramos demostrar la igualdad con un poco más de trabajo, pero optamos por no detallarlos en este apéndice. Posiblemente se puede mejorar la idea de la demostración a medida que se analizan casos más generales, pero nosotros decidimos contar estos ejemplos para ilustrar otro potencial que ofrece el método.

Como último comentario, veamos que también podemos llegar a una expresión explícita de u y f para el caso en el que $\Omega = E_{a,b}(0, 0)$.

Ejemplo 3

De acuerdo al paper [1], el problema (2.1) en $\Omega = E_{a,b}(0, 0)$ para

$$u(x_1, x_2) = \left(1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right)^s$$

admite como solución a la función

$$f(x_1, x_2) = 2^{2s}\Gamma(1+s)^2 \cdot a^{-(2s+1)} \cdot b \cdot {}_2F_1\left(s+1, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

(ver teorema 1.1 de dicho trabajo). Demostremos este resultado con nuestro método.

Para este caso,

$$u(x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)) = \text{dist}^s((x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega).$$

De acuerdo a lo que vimos en el capítulo 4, para la elipse

$$\text{dist}^s((x_1 + r \cos(\varphi), x_2 + r \sin(\varphi)), \partial\Omega) = \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2}\right)^s w^s(r).$$

Con lo cual,

$$\phi(r) = \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2}\right)^s.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_k(\mathbf{x}, \varphi) &= \int_{-1}^1 \phi \left((y+1) \left(\frac{b(\mathbf{x}, \varphi) - a(\mathbf{x}, \varphi)}{2} \right) + a(\mathbf{x}, \varphi) \right) C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\
&= \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s \int_{-1}^1 C_k^{(s+1/2)}(y) (1-y)^s (1+y)^s dy \\
&= \begin{cases} \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s u(x_1, x_2) &= \int_0^\pi \left[\frac{\Gamma(2s+1)}{\pi} \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) \right] d\varphi \\
&= \frac{\Gamma(2s+1) \sqrt{\pi} \Gamma(s+1)}{\pi \Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2) \int_0^\pi \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s d\varphi.
\end{aligned}$$

Calculemos la integral.

$$\int_0^\pi \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{a^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{b^2} \right)^s d\varphi = \frac{1}{b^{2s}} \int_0^\pi \left(\frac{b^2 \cos^2(\varphi)}{a^2} + \sin^2(\varphi) \right)^s d\varphi = \frac{2}{b^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right)^s d\varphi.$$

Reescribiendo $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$,

$$\frac{2}{b^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right)^s d\varphi = \frac{2}{b^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{b^2}{a^2} \cos^2(\varphi) + 1 - \cos^2(\varphi) \right)^s d\varphi = \frac{2}{b^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \cos^2(\varphi) \right)^s d\varphi.$$

Haciendo el cambio de variables

$$\varphi = \arccos(t) \quad \text{y} \quad d\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

la expresión queda

$$\frac{2}{b^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \cos^2(\varphi) \right)^s d\varphi = \frac{2}{b^{2s}} \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) t^2 \right)^s \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Haciendo el nuevo cambio de variables

$$\tau = t^2 \quad \text{y} \quad d\tau = 2t dt,$$

$$\frac{2}{b^{2s}} \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)t^2\right)^s \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{b^{2s}} \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\tau\right)^s (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

Notemos que la integral es muy parecida a la expresión integral de la función hipergeométrica (ver apéndice B.2) con parámetros

$$a = -s, b = \frac{1}{2} \text{ y } c = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{b^{2s}} \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\tau\right)^s (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{\pi}{b^{2s}} {}_2F_1\left(-s, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{\pi}{b^{2s}} \frac{b^{2s+1}}{a^{2s+1}} {}_2F_1\left(1+s, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

donde la última igualdad la obtuvimos aplicando la propiedad mencionada en B.2.

Por lo tanto,

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(2s+1)\sqrt{\pi}\Gamma(s+1)}{\pi\Gamma(s+\frac{3}{2})} (s+1/2)\pi b a^{-(2s+1)} {}_2F_1\left(1+s, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Aplicando las propiedades de la función gama indicadas en B.1,

$$(-\Delta)^s u(x_1, x_2) = 2^{2s}\Gamma(s+1)^2 \cdot b \cdot a^{-(2s+1)} \cdot {}_2F_1\left(1+s, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = f(x_1, x_2).$$

De este modo, mostramos, a través de distintos ejemplos, que el método propuesto también constituye una herramienta útil para poder hallar fórmulas explícitas de u y f que resuelven el problema (2.1).

Apéndice B

Funciones especiales

B.1 Funciones gama y beta

Esta sección está extrída de la sección 1.1 de [7] y del capítulo 6 de [2].

Definición B.1.1. *La función gama está definida para $Re(x) > 0$ por la integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Esta función está directamente relacionada con la función beta:

Definición B.1.2. *La función beta está definida para $Re(x) > 0$ y $Re(y) > 0$ por la integral*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Al hacer el cambio de variables $s = uv$ y $t = (1-u)v$ en la integral

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s^{x-1} t^{y-1} e^{-(s+t)} ds dt,$$

se obtiene la siguiente relación entre ambas funciones

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x, y).$$

Algunas propiedades importantes que usaremos:

- $\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\pi^{1/2}\Gamma(2z)$ (fórmula de duplicación).
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ (fórmula de recurrencia).

Definición B.1.3. El símbolo de Pochhammer está definido para todo x por

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = \prod_{i=1}^n (x + i - 1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Alternativamente, se puede definir recursivamente como

$$(x)_0 = 1 \quad y \quad (x)_{n+1} = (x)_n(x + n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

B.2 Series hipergeométricas

Esta sección está extraída de la sección 1.2 de [7].

La serie hipergeométrica que vamos a mencionar a lo largo de este trabajo es

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n,$$

que resulta convergente para $|x| < 1$.

A esta serie la podemos expresar como una integral del siguiente modo,

Proposición B.2.1. Para $Re(c - b) > 0$, $Re(b) > 0$ y $|x| < 1$,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt.$$

Demostración. Ver demostración proposición 1.2.1 en [7]. □

Otra propiedad importante relativa a esta serie es

Proposición B.2.2. Para $|x| < 1$,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; x).$$

Demostración. Ver demostración corolario 1.2.5 en [7]. □

B.3 Polinomios de Chebyshev

Esta sección está extraída del capítulo 3 de [9].

Definición B.3.1. El polinomio de Chebyshev de primer tipo de orden n se define como

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(x)], \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De esta definición, es fácil notar que

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Algunas propiedades son:

- Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

- El coeficiente principal de $T_n(x)$ es 2^{n-1} y $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
- $T_n(x)$ tiene n ceros que caen en el intervalo $(-1, 1)$. Estos están dados por la fórmula

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$T_n(x)$ tiene $n+1$ extremos en el intervalo $[-1, 1]$ y están dados por la fórmula

$$x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- Relación con las derivadas

$$\begin{cases} T_0(x) = T'_1(x), \\ T_1(x) = \frac{1}{4}T'_2(x), \\ T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1}\right), \end{cases} \quad n \geq 2.$$

- Relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 T_r(x)T_s(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = N_r\delta_{rs},$$

donde $N_0 = \pi$ y $N_r = \frac{\pi}{2}$ si $r \neq 0$. δ_{rs} denota la delta de Kronecker.

- Relación de ortogonalidad discreta

Con los ceros de $T_{n+1}(x)$ como nodos: Sea $n > 0$, $r, s \leq n$, y sea $x_j = \cos((j + 1/2)\pi/(n + 1))$. Entonces

$$\sum_{j=0}^n T_r(x_j)T_s(x_j) = K_r\delta_{rs},$$

donde $K_0 = n + 1$ y $K_r = \frac{1}{2}(n + 1)$ para $1 \leq r \leq n$.

Con los extremos de $T_n(x)$ como nodos: Sea $n > 0$, $r, s \leq n$, y $x_j = \cos(\pi j/n)$. Entonces

$$\sum_{j=0}^n{}'' T_r(x_j)T_s(x_j) = K_r\delta_{rs},$$

donde $K_0 = K_n = n$ y $K_r = \frac{n}{2}$ para $1 \leq r \leq n - 1$. El doble prima indica que los términos $j = 0$ y $j = n$ están multiplicados por $\frac{1}{2}$.

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son un caso particular de los polinomios de Jacobi (ver B.5), salvo por un factor de normalización.

Los polinomios de Chebyshev de segundo tipo se notan $U_n(x)$ y se definen como

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Una última propiedad que mencionaremos sobre estos polinomios es un caso de interpolación. Supongamos que tenemos una función f y queremos hallar un polinomio $P_n \in \mathbb{P}_n$ que interpole a f en los nodos $x_k = \cos(k\pi/n)$, $k = 0, \dots, n$. Estos son los ceros de $U_{n-1}(x)$ junto con $x_0 = 1$ y $x_n = -1$ (también constituyen los extremos de $T_n(x)$). Como $T_n(x)$ es una base de \mathbb{P}_n , puedo escribir a P_n como combinación lineal de dichos polinomios. Entonces, el polinomio interpolador lo notamos como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n{}'' c_k T_k(x),$$

y considerando la segunda relación de ortogonalidad previamente mencionada,

$$c_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n{}'' f(x_j) T_k(x_j), \quad x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad j = 0, \dots, n.$$

Esto también se puede escribir como

$$c_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n{}'' f\left(\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right) \cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right),$$

que es la transformada discreta del coseno (también notada DCT-I) del vector $f(\cos(j\pi/n))$, $j = 0, \dots, n$. Los nodos x_j también se los llama nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (ver [15]).

B.4 Polinomios de Gegenbauer

Esta sección está extraída de la sección 1.4.3 de [7] y el capítulo 22 de [2].

Los polinomios de Gegenbauer también son conocidos como *ultraspherical polynomials*. Para un parámetro $\lambda > -\frac{1}{2}$, su función de peso es $(1 - x^2)^{\lambda-1/2}$ en el intervalo $-1 < x < 1$. Los casos $\lambda = 0, 1$ corresponden a los polinomios de Chebyshev del primer y segundo tipo, respectivamente.

Definición B.4.1. Para $n \geq 0$, los polinomios de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$ se definen como

$$(1 - 2rx + r^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x)r^n, \quad |r| < 1, \quad |x| \leq 1.$$

Otra forma de expresar estos polinomios es mediante la función hipergeométrica ${}_2F_1$ (ver B.2).

Proposición B.4.1. Para $n \geq 0$ y $\lambda > 0$,

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(\lambda)_n 2^n}{n!} x^n {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; 1-n-\lambda; \frac{1}{x^2}\right).$$

Demostración. Ver demostración proposición 1.4.11 en [7]. □

Estos polinomios también se pueden expresar por la recurrencia

$$C_0^{(\lambda)}(x) = 1,$$

$$C_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x,$$

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n} [2x(n + \lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 2)C_{n-2}^{(\lambda)}(x)].$$

Como los polinomios de Gegenbauer están definidos en el intervalo $(-1, 1)$, para un intervalo arbitrario (a, b) deberíamos aplicar un cambio de variables afín.

La norma de estos polinomios está dada por

$$\|C_n^{(\lambda)}\|_{(-1,1)}^2 = \int_{-1}^1 [C_n^{(\lambda)}(x)]^2 (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx = \frac{2^{1-2\lambda} \cdot \pi \cdot \Gamma(n + 2\lambda)}{(n + \lambda) \cdot \Gamma(\lambda)^2 \cdot \Gamma(n + 1)}.$$

Una última propiedad sobre estos polinomios es

$$\int_{-1}^1 x^m C_n^{(\lambda)}(x) (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx = 0 \quad \text{para } 0 \leq m < n.$$

Los polinomios de Gegenbauer son un caso particular de los polinomios de Jacobi, pues

$$C_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(n + \lambda + \frac{1}{2})} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}.$$

B.5 Polinomios de Jacobi

Esta sección está extraída de la sección 1.4.4 de [7].

Para $\alpha, \beta > -1$, la función de peso del polinomio de Jacobi es $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en $-1 < x < 1$.

Definición B.5.1. Para $n \geq 0$, los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ se definen como

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^n {}_2F_1 \left(-n, -n-\beta; \alpha+1; \frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2} \right). \end{aligned}$$

Apéndice C

Demostraciones

C.1 Demostración paso expresión (3.3) a (3.4)

En esta sección, vamos a demostrar que podemos pasar de la expresión

$$C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

a

$$C_{n,s} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1},$$

es decir, que es posible intercambiar el límite.

La idea va a consistir en poder usar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Comencemos llamando E al conjunto

$$E = [0, \pi]^{n-1},$$

y $f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ a la función

$$f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr.$$

Lo que necesitamos ver es que existe una función g cuya integral en E existe y es finita, tal que $|f_\epsilon| \leq g$ en E . Si logramos ver esto, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, podemos garantizar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_E f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = \int_E \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \right) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}.$$

Si llamamos $a = a(\mathbf{x}, \varphi)$ y $b = b(\mathbf{x}, \varphi)$ a los extremos del intervalo tal que $0 \in (a, b)$ y la variable r no se anula en dicho intervalo, la función f_ϵ se puede reescribir como

$$\int_{-\infty}^a \dots dr + \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \dots dr + \int_b^{+\infty} \dots dr$$

donde los puntos suspensivos hacen referencia a la función dentro de la integral, que no la escribimos para evitar exceso de notación. La primera y la tercera integral no dependen de epsilon, por lo que es válido intercambiar el límite en ambas expresiones. Lo que nos resta ver es que es posible realizar este cambio en la integral del medio. Entonces, renombramos la función f_ϵ como

$$f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr,$$

y apliquemos en ella el teorema. Empecemos acotando f_ϵ para poder hallar una posible función g .

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| &= \left| \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)}{|r|^{1+2s}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) dr \right| \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-1}(\varphi_i) \right) \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{|u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)|}{|r|^{1+2s}} dr. \end{aligned}$$

Acotamos cada función seno por 1, dado que $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ para cada i . Con lo cual,

$$|f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| \leq \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{|u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)|}{|r|^{1+2s}} dr.$$

Recordando que

$$u(z_1, \dots, z_n) = u(x_1 + r \cos(\varphi_1), x_2 + r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2), \dots, x_n + r \sin(\varphi_1) \dots \sin(\varphi_{n-1})),$$

y que la función u es, en principio, continua en $\bar{\Omega}$, acotamos el numerador como

$$|u(x_1, \dots, x_n) - u(z_1, \dots, z_n)| \leq |u(x_1, \dots, x_n)| + |u(z_1, \dots, z_n)| \leq 2\|u\|_\infty;$$

donde $\|u\|_\infty$ hace referencia a la norma infinito en $\bar{\Omega}$ (al ser la función continua en un compacto, alcanza un máximo que sería dicha norma, por lo cual este valor existe). Por lo tanto,

$$|f_\epsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| \leq 2\|u\|_\infty \int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{1}{|r|^{1+2s}} dr.$$

La integral se puede resolver como

$$\int_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{1}{|r|^{1+2s}} dr = \frac{\operatorname{sgn}(r)|r|^{-2s}}{-2s} \Big|_{(a,b) \setminus (-\epsilon, \epsilon)} = -\frac{1}{2s} (|b|^{-2s} + |a|^{-2s}).$$

Con lo cual, podemos tomar como función g a

$$g(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = -\frac{\|u\|_\infty}{s} (|b(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s} + |a(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s}).$$

Por último, veamos que la integral en E de g existe y es finita.

$$\begin{aligned} \left| \int_E g(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \right| &= \frac{\|u\|_\infty}{s} \left| \int_E (|b(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s} + |a(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \right| \\ &\leq \frac{\|u\|_\infty}{s} \int_E (|b(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s} + |a(\mathbf{x}, \varphi)|^{-2s}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Como a y b son funciones que no se anulan (se anularía alguna de ellas si \mathbf{x} estuviera en el borde, pero esto nunca ocurre), dichas expresiones no presentan singularidades en el dominio. Además, estas funciones resultan ser continuas en dominios convexos o continuas a trozos en dominios no convexos. En ambos casos, al ser continuas, resultan ser integrables. Por lo que la integral en E de g existe y es finita. Entonces, aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, es válido intercambiar el límite de la expresión (3.3) a (3.4).

Bibliografía

- [1] N. Abatangelo, S. Jarohs and A. Saldaña. *Fractional Laplacian on ellipsoids*. arXiv preprint arXiv:2005.09514 (2020).
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.). *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. Third printing, with corrections. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, vol. 55, 1965.
- [3] G. Acosta, F. M. Bersetche and J. P. Borthagaray. *A short FE implementation for a 2D homogeneous Dirichlet problem of a fractional Laplacian*. *Computers & Mathematics with Applications* 74, no. 4 (2017): 784-816.
- [4] G. Acosta, J. P. Borthagaray, O. P. Bruno and M. Maas. *Regularity theory and high order numerical methods for the (1D)-fractional Laplacian*. *Mathematics of Computation* 87, no. 312 (2018): 1821-1857.
- [5] O. P. Bruno and S. K. Lintner. *A high-order integral solver for scalar problems of diffraction by screens and apertures in three-dimensional space*. *Journal of Computational Physics* 252 (2013): 250-274.
- [6] C. Bucur and E. Valdinoci. *Nonlocal diffusion and applications*. Springer International Publishing, 2016.
- [7] C. F. Dunkl and Y. Xu. *Orthogonal polynomials of several variables*. 2nd ed., Cambridge University Press, *Encyclopedia of mathematics and its applications* 155, 2014.
- [8] B. Dyda, A. Kuznetsov and M. Kwaśnicki. *Fractional Laplace operator and Meijer G-function*. *Constructive Approximation* 45, no. 3 (2017): 427-448.
- [9] A. Gil, J. Segura and N. M. Temme. *Numerical methods for special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [10] G. Grubb. *Fractional Laplacians on domains, a development of Hörmander's theory of μ -transmission pseudodifferential operators*. *Advances in Mathematics* 268 (2015): 478-528.

- [11] N. Hale and A. Townsend. *Fast and accurate computation of Gauss-Legendre and Gauss-Jacobi quadrature nodes and weights*. SIAM J. Sci. Comput. 35, no. 2 (2013): A652-A674.
- [12] C. Pozrikidis. *The fractional Laplacian*. CRC Press, 2016.
- [13] X. Ros-Oton and J. Serra. *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*. J. Math. Pures Appl. 101, no. 3 (2014): 275-302.
- [14] Y. Saad and M. H. Schultz. *GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 7, no. 3 (1986): 856-869.
- [15] J. Shen, T. Tang and L. Wang. *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [16] K. Xu and E. Darve. *Isogeometric collocation method for the fractional Laplacian in the 2D bounded domain*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 364, (2020): 112936.