UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Introducción a la correspondencia local de Langlands para GL_2

Enzo Giannotta

Director: Nicolás Sirolli

Fecha de Presentación 11/10/2022

Agradecimientos

Es ahora que no me salen las palabras para describir cuánto me han allanado el camino, que entiendo aquella frase que dejó escrita Fermat en un estrecho margen de su copia de *Arithmetica*. Me refiero a Martín y a Nicolás. Sin su ayuda y apoyo esta tesis no se hubiera podido finalizar. Y agradezco colosalmente todas las oportunidades que me han brindado, las cuales, sin lugar a dudas, forman la totalidad del conjunto de elementos que constituyen mi futuro. ¡Muchas gracias Martín, muchas gracias Nicolás! Por enseñarme a leer, escribir, y a entender matemática. A ambos les dedico mi porvenir. Finalmente, gracias a ustedes dos y a Ariel por ser jurado, y por sus devoluciones.

También agradezco a quienes forman parte de mi vida y no tienen, *o ya no tienen*, el libre albedrío de elegirme como ser querido. Me refiero a mi familia y amigos. Más específicamente, les dedico este espacio a mi mamá y mi papá, quienes me enseñaron, mediante el ejemplo, a sacrificarme por los demás, ya que desde nuestro nacimiento no han hecho nada más que priorizar nuestro confort y mañana. A mi hermana Luna y a mi otra hermana de corazón Josefina, por cocinar y compartir sus exquisiteces culinarias. A Larry, a Coca, a Mario y a Roqui por estar siempre presentes en mi vida y mis pensamientos.

A mis amigos matemáticos, a quienes nombro meramente por orden alfabético y no por orden de aprecio: Fer, Fran, Franco, Juani, José, Kevin, Leo y Nahuel; con quienes comparto la misma pasión, y nos apoyamos mutuamente. Gracias por ser la fuente de calor y afección que envuelve mi día a día, y por compartir una etapa tan importante; espero poder seguir teniendo la oportunidad de compartir más momentos con ustedes. Por último a Eric, mi mejor amigo desde el primer momento en el que nos conocimos, en el primer año de secundario. No solamente te dedico las mismas palabras que a los matemáticos, sino que me gustaría agradecerte por todos los fines de semana que hemos compartido, y espero compartir muchos más.

Índice general

1. Introducción **5**

2. Generalidades **7**
2.1. Valores absolutos y valuaciones discretas . . . 7
2.1.1. Valores absolutos . . . 7
2.1.2. Valuaciones discretas . . . 8
2.1.3. Completaciones . . . 10
2.1.4. Ramificación . . . 11
2.1.5. Extensión de valores absolutos . . . 12
2.1.6. Cuerpos localmente compactos . . . 13
2.1.7. Cuerpos globales . . . 14
2.1.8. Grupo de descomposición . . . 15
2.1.9. Automorfismo de Frobenius . . . 15
2.2. Adèles e idèles . . . 15
2.2.1. La norma de idèles . . . 17
2.3. Grupos localmente profinitos . . . 18
2.4. L-función y constante local para caracteres de $GL_1(K)$ . . . 21
2.5. Representaciones suaves de grupos localmente profinitos . . . 26
2.5.1. Los vectores suaves de una representación . . . 30
2.5.2. La representación inducida . . . 30
2.5.3. Inducción compacta . . . 31
2.5.4. Lema de Schur . . . 32
2.5.5. La representación dual . . . 34
2.6. Medidas de Haar invariantes . . . 36
2.6.1. Integración . . . 38
2.7. El álgebra de Hecke . . . 41
2.7.1. $\mathcal{H}(G)$-módulos . . . 43

3. Representaciones de Galois **48**
3.1. Representaciones complejas y ℓ-ádicas . . . 48
3.2. El grupo de Weil . . . 49
3.2.1. El grupo de Weil de un cuerpo local arquimediano . . . 52
3.3. Representaciones del grupo de Weil . . . 52
3.4. Representación de Weil-Deligne . . . 54
3.4.1. L-función y constante local para representaciones de Weil-Deligne . . . 55
3.4.2. La representación especial . . . 58
3.4.3. La constante de Langlands . . . 58
3.5. Representaciones ℓ-ádicas . . . 59
3.6. El módulo de Tate de un grupo abeliano . . . 63
3.6.1. Módulo de Tate del grupo multiplicativo . . . 64
3.6.2. Módulo de Tate de una curva elíptica . . . 65
3.7. Curvas elípticas sobre cuerpos de valuación discreta . . . 65
3.7.1. Generalidades sobre curvas elípticas . . . 65
3.7.2. Twist cuadrático . . . 66
3.7.3. Curvas elípticas sobre cuerpos de valuación discreta . . . 66
3.7.4. Reducción buena y mala . . . 67

3.8. La curva de Tate y el teorema de uniformización . . . 67
3.8.1. Teorema de uniformización . . . 68
3.9. La representación de Weil-Deligne asociada a una curva elíptica . . . 69
3.9.1. Reducción potencialmente buena . . . 70
3.9.2. Reducción potencialmente multiplicativa . . . 71
3.9.3. El determinante de la representación . . . 72
3.10. La L-función . . . 72
3.11. El conductor . . . 73

4. Teoría de cuerpos de clases **75**
4.1. Teoría de cuerpos de clases local . . . 75
4.1.1. Reciprocidad local de Artin . . . 75
4.1.2. Grupos norma . . . 76
4.1.3. Teorema de existencia . . . 76
4.1.4. Mapa de reciprocidad local de Artin . . . 77
4.1.5. Correspondencia local de Langlands cuando $n = 1$ . . . 78
4.2. Teoría de cuerpos de clases global . . . 78
4.2.1. Morfismo global de Artin . . . 79
4.2.2. Reciprocidad global de Artin . . . 79
4.2.3. Correspondencia entre caracteres de Hecke de orden finito y representaciones de Galois 1-dimensionales . . . 80

5. Representaciones de GL_2 **81**
5.1. Subgrupos de $GL_2(K)$ . . . 81
5.2. Módulo de Jacquet y representaciones inducidas . . . 81
5.3. L-función y constante local para $GL_2(K)$ . . . 84
5.4. El Teorema inverso . . . 85

6. Correspondencia local de Langlands para GL_2 **86**
6.1. Preliminares . . . 86
6.1.1. Ordenes de cadena . . . 86
6.1.2. El nivel normalizado de una representación suave irreducible . . . 88
6.1.3. Tipo cuspidal . . . 89
6.2. Correspondencia entre pares admisibles y representaciones cuspidales irreducibles de $GL_2(K)$ . . . 89
6.2.1. Nivel cero . . . 90
6.2.2. Nivel $n \geqslant 1$ . . . 91
6.2.3. Teorema de la parametrización Mansa . . . 93
6.3. La correspondencia local de Langlands para GL_2 . . . 93
6.3.1. Caso $p \neq 2$ . . . 95
6.4. Ejemplo: aplicación de la correspondencia local de Langlands sobre una representación proveniente de una curva elíptica . . . 100

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es dar la correspondencia local de Langlands para GL_2, que es enunciado en el Capítulo 6.3.1. En términos generales, es una correspondencia entre representaciones provenientes del grupo de Galois absoluto G_K y representaciones provenientes de GL_2 de naturaleza analítica, que además preserva ciertos invariantes. Más precisamente, es una biyección entre clases de equivalencia de representaciones de Weil-Deligne de dimensión 2 semisimples complejas de un cuerpo local K, y clases de equivalencia de representaciones suaves irreducibles admisibles complejas del grupo localmente profinito $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$, no necesariamente de dimensión finita. Esta biyección preserva L-funciones y constantes locales de twists por caracteres, y caracteres centrales. La correspondencia sirve de puente, traduciendo el lenguaje proveniente de la geometría aritmética (el lado de las representaciones de Galois) a un lenguaje analítico (proveniente de las representaciones automorfas) y viceversa. La ventaja es que el lenguaje analítico es mucho más útil para trabajar con invariantes como las L-funciones y las constantes locales, las cuales contienen información profunda sobre la aritmética de K.

El interés de estudiar las representaciones provenientes del grupo de Galois G_K (no solamente complejas, sino también ℓ-ádicas), por ejemplo las representaciones del grupo de Weil $\mathcal{W}_K$ o de representaciones de Weil-Deligne, es que encapsulan la información aritmética de K y proveen de diversas herramientas para estudiarla. Este grupo es enorme, en consecuencia es difícil de entender completamente. Un primer paso para la humanidad fue entender las extensiones abelianas de K a través de la teoría de cuerpos de clases (donde las representaciones irreducibles se reducen a caracteres), el siguiente paso es entender las extensiones no abelianas. Aquí entran en juego las representaciones $\rho : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(V)$, y por ejemplo entender su imagen ya nos muestra algunos posibles grupos de Galois $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{G}_K \,/\, \mathrm{Ker}\,\rho$ que pueden aparecer.

La correspondencia local de Langlands no solamente está demostrada para GL_2, sino que también para GL_n. El caso $n = 1$ es teoría de cuerpos de clases local. Primero fue demostrado el caso $n = 2$ con K de característica cero, el cual fue comenzado por Jacquet-Langlands [JL70], luego varios autores contribuyeron; sin embargo fue Kutzko quien completó la demostración con dos nuevas ideas en [Kut80] y [Kut84]. Luego en general, fue demostrado el caso para K con característica distinta de cero para todas las dimensiones n por Laumon, Rapoport y Stuhler [LRS93]. El caso K con característica cero y dimensión n arbitraria fue probado por Harris y Taylor en [HT01], también fue demostrado por Henniart en [Hen00] basado en el trabajo de Harris [Har97].

La correspondencia local es simplemente la punta del iceberg, pues posee varias generalizaciones; entre ellas se pueden enunciar resultados y conjeturas para grupos reductivos. Además esta correspondencia forma parte de un programa que abarca cuestiones tanto locales como globales: el **programa de Langlands**. El caso $n = 1$, está probado y es teoría de cuerpos de clases global.

En nuestro caso local, cuando $n = 2$, se puede demostrar de manera más elemental la correspondencia debido a que al ser un caso pequeño podemos clasificar las representaciones y trabajar directamente. En particular, la demostración se vuelve un poco más simple en el caso $p \neq 2$, el cual es el que realizaremos en este trabajo. El caso $p = 2$ es más complicado, pero interesante, debido a que hay más representaciones que corresponder.

Trabajaremos principalmente en el caso K no arquimediano con cuerpo residual k de característica p, y algunas veces por simplicidad trabajaremos en el caso K de característica cero, i.e.

extensiones finitas del cuerpo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$.

Comenzaremos viendo varias generalidades en el Capítulo 2, repasando definiciones y resultados sobre valores absolutos y valuaciones discretas con el objetivo de definir qué es un cuerpo local K; definimos los adèles e idèles que son necesarios para enunciar el caso global, el cual solo enunciaremos para $n = 1$, para dimensiones mayores en general sigue siendo conjetural la correspondencia. Luego avanzaremos a generalidades sobre representaciones de grupos localmente profinitos. Acá también introduciremos la L-función y constante local de un caracter de $K^\times = \mathrm{GL}_1(K)$.

Continuaremos en el Capítulo 3 introduciendo varios tipos de representaciones provenientes del grupo de Galois, entre ellas las representaciones del grupo de Galois absoluto G_K, del grupo de Weil y de Weil-Deligne, tanto complejas como ℓ-ádicas. Aquí también introduciremos sus L-funciones y constantes locales, además construiremos representaciones de Weil-Deligne complejas a partir de representaciones ℓ-ádicas. Finalizaremos el capítulo con ejemplos de representaciones provenientes del módulo de Tate; en particular estudiaremos al módulo de Tate de una curva elíptica E/K, la cual provee de una familia de representaciones ℓ-ádicas compatibles entre ellas, con las cuales construiremos canónicamente una representación $\rho'_{E/K}$. A estas representaciones provenientes de una curva elíptica les asociamos una L-función y un conductor. También se les puede asignar constantes locales, root numbers, y calcularlas, pero este tratamiento se escapa del alcance de esta tesis; se puede consultar una exposición de esto último en el artículo de Rohrlich [Roh94].

El caso de dimensión $n = 1$ de la correspondencia de Langlands es esencialmente teoría de cuerpos de clases, la cual repasaremos en el Capítulo 4.

En el Capítulo 5 enunciamos resultados sobre L-funciones y constantes locales del lado automorfo de la correspondencia, y se clasifican las representaciones no cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{K})$. También se enuncia el Teorema Inverso que garantiza la unicidad de la correspondencia local de Langlands.

Finalmente, en el Capítulo 6 se comienza con unas definiciones preliminares sobre representaciones cuspidales, y se enuncia la correspondencia local para GL_2. Veremos la demostración de la correspondencia en el caso K local no arquimediano con $p \neq 2$ (el caso $p = 2$ se puede encontrar en [BH06]), y se explica un ejemplo de cómo se puede aplicar la correspondencia a una representación proveniente de una curva elíptica $\rho'_{E/K}$.

Capítulo 2

Generalidades

2.1. Valores absolutos y valuaciones discretas

2.1.1. Valores absolutos

Definición 2.1.1. Un **valor absoluto** sobre un cuerpo K es una función $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(I) $|x| \geqslant 0, \quad \forall x \in K$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(II) $|xy| = |x|y|, \quad \forall x, y \in K$.

(III) $|x + y| \leqslant |x| + |y|, \forall x, y \in K$.

Definición 2.1.2. **El valor absoluto trivial** es el valor absoluto que vale 1 para todo $x \neq 0$.

Definición 2.1.3. Decimos que dos valores absolutos $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ en K son **equivalentes** si sus topologías son la misma.

Esto forma una relación de equivalencia. A una clase de equivalencia de un valor absoluto no trivial de un cuerpo K lo llamamos **lugar** de K.

Proposición 2.1.4. *Sean dos valores absolutos $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ en K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes en K.

(II) $|x|_1 < 1 \Rightarrow |x|_2 < 1$ para todo $x \in K$.

(III) Existe $e > 0$ tal que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^e$.

Demostración. Ver el Capítulo II de [CF67]. □

Definición 2.1.5. Decimos que $|\cdot|$ es un valor absoluto **no arquimediano** si es equivalente a un valor absoluto que cumpla la desigualdad $|x + y| \leqslant \text{máx}\{|x|, |y|\}$. De lo contrario decimos que el valor absoluto es **arquimediano**.

Un valor absoluto no arquimediano convierte a K en un **espacio métrico**, de hecho, en un **espacio ultramétrico**, pues vale una desigualdad más fuerte que la triangular:

$$d(x, y) \leqslant \text{máx}(d(x, z), d(z, y)),$$

si consideramos $d(x, y) := |x - y|$.

Observación 2.1.6. Cuando $|\cdot|$ es no arquimediano se tiene que

$$|x + y| = |x|, \text{ si } |y| < |x|,$$

pues $|x + y| \leqslant |x| = |(x + y) - y| \leqslant \text{máx}\{|x + y|, |y|\}$.

Definición 2.1.7. Si $|\cdot|$ es no arquimediano definimos **el anillo de enteros de** K como el anillo $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K := \{\, x \in K \mid |x| \leqslant 1 \,\}$. También definimos el ideal $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_K := \{\, x \in K \mid |x| < 1 \,\}$ de $\mathcal{O}$.

Claramente $\mathfrak{P}$ es un ideal maximal, de hecho los elementos que no pertenecen a $\mathfrak{P}$ son inversibles en $\mathcal{O}$, i.e. $\mathcal{O}$ es un *anillo local*. También $\mathcal{O}$ es un dominio íntegro con cuerpo de fracciones K.

Definición 2.1.8. Decimos que el valor absoluto $|\cdot|$ es **discreto** si existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < |x| < 1 + \delta$$

implica que $|x| = 1$.

Las siguientes dos proposiciones se demuestran en el Capítulo II de [CF67]:

Proposición 2.1.9. *Sea $|\cdot|$ un valor absoluto no arquimediano. Entonces es discreto si y solo si $\mathfrak{P}$ es un ideal principal.*

Proposición 2.1.10. *Sea $|\cdot|$ un valor absoluto. Entonces es no arquimediano si y solo si $|n| \leqslant 1$ para todo n en el anillo generado por 1 en K.*

Corolario 2.1.11. *Si la característica de K es finita entonces todo valor absoluto en K es no arquimediano.*

Demostración. Como el anillo generado por 1 en K es un cuerpo finito F de p elementos, se tiene que $a^{p-1} = 1$ para todo $a \in F$, con lo cual $|a| = 1$. □

Ejemplo 2.1.12. Sea $\mathfrak{P}$ un ideal primo no trivial de un cuerpo de números K (i.e. una extensión finita de $\mathbb{Q}$), se tiene el **valor absoluto $\mathfrak{P}$-ádico normalizado**

$$|x|_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} (1/N(\mathfrak{P}))^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es discreto y no arquimediano. Donde N es la norma de un ideal[1], y $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(x) \in \mathbb{Z}$ es la potencia de $\mathfrak{P}$ que aparece en la factorización única del $\mathcal{O}_K$-módulo generado por x en K[2].

Ejemplo 2.1.13. El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ con el valor absoluto $|\cdot|$ es un valor absoluto arquimediano no discreto. El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ con el valor absoluto $|\cdot|^2$ es arquimediano y no discreto. En ambos casos decimos que el valor absoluto está **normalizado**.

Ejemplo 2.1.14. Sea $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ una inmersión de un cuerpo de números que deja fijo a $\mathbb{Q}$, podemos definir un valor absoluto arquimediano sobre K tomando $|x| = |\sigma(x)|$.

Ejemplo 2.1.15. Dos ideales primos distintos $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_2$ de un cuerpo de números K producen dos valores absolutos (definidos como en el Ejemplo 2.1.12) no equivalentes.

En efecto, definen topologías distintas, pues por el teorema chino del resto existe $x \in \mathcal{O}_K$ tal que $x \equiv 0 \mod \mathfrak{P}_1$ y $x \equiv 1 \mod \mathfrak{P}_2$, luego $|x|_{\mathfrak{P}_1} < 1$ y $|x|_{\mathfrak{P}_2} = 1$, entonces la sucesión $x_n := x^n$ converge a 0 en la primera topología, mientras que en la otra no.

2.1.2. Valuaciones discretas

Sea $K^\times$ el subgrupo multiplicativo de un cuerpo K, y sea $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de los números enteros.

Definición 2.1.16. Una **valuación discreta** de un cuerpo K es un morfismo de grupos

$$v : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(I) Es sobreyectivo.

(II) Se extiende de manera que $v(0) = \infty$ y se tiene la convención de que $\min\{a, \infty\} = a$ para todo $a \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

[1] Si K es un cuerpo de números de grado n sobre $\mathbb{Q}$ entonces el anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ de K es un $\mathbb{Z}$-módulo e I es un submódulo, más aún, si $I \neq 0$ entonces el cociente $\mathcal{O}/I$ es finito. Definimos $N(I)$ como el cardinal de dicho cociente. Para más propiedades de la norma de un ideal se puede consultar el libro [Mil08].

[2] ver la introducción del primer capítulo de [CF67].

(III) $v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$, para todo $x, y \in K$.

Definición 2.1.17. Definimos el **anillo de valuación** de v como $\mathcal{O} = \mathcal{O}_v := \{ x \in K \mid v(x) \geqslant 0 \}$. También definimos el **ideal de valuación** $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v := \{ x \in K \mid v(x) > 0 \}$.

Como lo indica su nombre, el ideal de valuación es un ideal de $\mathcal{O}$.

Observación 2.1.18. Los valores absolutos discretos no arquimedianos son equivalentes a valuaciones discretas.

Sea $c \in (0,1)$ una constante, definimos un valor absoluto discreto no arquimediano $|x| := c^{v(x)}$ si $x \in K^\times$ y $|0| = 0$.

Recíprocamente, si $|\cdot| : K^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times_{>0}$ es un valor absoluto discreto no arquimediano, luego corresponde a una valuación discreta v. En efecto, $\log|x|$ con $x \neq 0$ forma un subgrupo discreto aditivo en $\mathbb{R}$, el cual necesariamente es un grupo abeliano libre con un solo generador, luego existe $c \in (0,1)$ tal que para todo $x \neq 0$ existe $m = m(x) \in \mathbb{Z}$ tal que $|x| = c^m$. Llamamos a m el **orden** de x y multiplicando por un escalar a $m(x)$ obtenemos una valuación discreta v.

Los resultados que valen para valores absolutos se pueden traducir al lenguaje de valuaciones discretas. Luego se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.19. *(I) Si $v(x) \neq v(y)$ entonces $v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$.*

(II) El anillo de valuación $\mathcal{O}$ es un dominio íntegro con cuerpo de fracciones K.

(III) El ideal de valuación $\mathfrak{P}$ es un ideal maximal de $\mathcal{O}$. De hecho, todo elemento fuera de $\mathfrak{P}$ es inversible en $\mathcal{O}$, con lo cual este es un anillo local.

(IV) Una valuación discreta v en K define una topología, la topología proveniente del valor absoluto $|x| = c^{v(x)}$. Esta topología no depende de la constante $c \in (0,1)$.

Definición 2.1.20. Sea K un anillos de valuación discreta v. Los elementos u con $v(u) = 0$ forman un subgrupo $U = U_K$ de $K^\times$, el **grupo de unidades** de $\mathcal{O}$.

Si elegimos un elemento ϖ con $v(\varpi) = 1$ (esta elección generalmente no será canónica) se tiene que todo elemento $x \in K^\times$ se escribe de manera única como $x = \varpi^n u$ para un $n \in \mathbb{Z}$ y $u \in U$. Justamente $n = v(x)$. Observemos que esto implica que $\mathcal{O}$ es un dominio de ideales principales con un único ideal primo $\mathfrak{P}$, el cual está generado por ϖ. Llamamos a ϖ un **elemento uniformizante** de $\mathcal{O}_K$ o K.

Los anillos R de ideales principales con un único ideal primo se llaman **anillos de valuación discreta**. Lo comentado en el párrafo anterior prueba la primera parte de la siguiente afirmación:

Proposición 2.1.21. *El anillo de valuación $\mathcal{O}$ es un anillo de valuación discreta.*

Recíprocamente, un anillo de valuación discreta R es el anillo de valuación $\mathcal{O}$ para una única valuación discreta v del cuerpo de fracciones K de R.

Demostración. Ver la Proposición 2 de la Sección 1 del Capítulo I de [CF67]. □

Cuando un valor absoluto provenga de una valuación v, lo notaremos como $|\cdot|_v$. En el Ejemplo 2.1.12 el valor absoluto proviene de la valuación $\mathfrak{P}$-ádica, luego notaremos $v = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v$ y lo llamaremos **primo finito**. Cuando $|\cdot|$ provenga de una inmersión σ como en el Ejemplo 2.1.13, no notaremos como $|\cdot|_\sigma$ y haremos el abuso de notación $v = \sigma$, por más que el valor absoluto no provenga de una valuación discreta. A v lo llamaremos **primo infinito**. Notaremos como $|\cdot|_v$ a un valor absoluto en la clase de equivalencia.

Si $K \subset L$ y w y v son primos de L y K respectivamente tal que $|\cdot|$ restringido a K es equivalente a $|\cdot|_v$, decimos que w **divide** a v o que w yace sobre v, y escribimos $w \mid v$. Cuando $v = \mathfrak{P}$ es un primo finito esto significa que $\mathfrak{P}_w \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{P}$ o, equivalentemente, que $\mathfrak{P}_w$ divide a $\mathfrak{P}\mathcal{O}_L$. En el caso de un primo infinito esto significa que w corresponde con una inmersión $\sigma : L \hookrightarrow \mathbb{C}$ que extiende a la inmersión de v o a su conjugado complejo.

Definición 2.1.22. Al cuerpo $k = \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ lo llamamos **cuerpo residual**.

Se tiene que K es la unión de subgrupos abiertos $\mathfrak{P}^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{P}^n = \{0\}$. Los cocientes $\mathfrak{P}^n / \mathfrak{P}^{n+1}$ tienen estructura de k-módulo y además se tiene que

Proposición 2.1.23. *Existe un isomorfismo $k \cong \mathfrak{P}^n / \mathfrak{P}^{n+1}$ de k-módulos.*

Demostración. El morfismo $\mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{P}^n$ definido como multiplicar por ϖ^n induce el isomorfismo deseado. □

Existen otros subgrupos multiplicativos de U importantes, estos son $U_n := 1 + \mathfrak{P}^n$ para todo $n \geqslant 1$ y definimos $U_0 := U$. Son abiertos en U, además $\bigcap_n U_n = 1$.

Proposición 2.1.24. (I) *El morfismo $\mathcal{O} \longrightarrow k$ induce un isomorfismo*

$$U/U_1 \cong k^\times.$$

(II) *Para cada $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant 2n$ la función $u \longmapsto u-1$ induce un isomorfismo de grupos*

$$U_n/U_m \cong \mathfrak{P}^n / \mathfrak{P}^m.$$

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de que para $u_1, u_2 \in U_n$ se tiene que

$$(u_1u_2 - 1) - (u_1 - 1) - (u_2 - 1) = (u_1 - 1)(u_2 - 1) \in \mathfrak{P}^{2n},$$

entonces como $m \leqslant 2n$, luego $(u_1u_2 - 1) \equiv (u_1 - 1) + (u_2 - 1) \mod \mathfrak{P}^m$. □

Juntando las dos proposiciones anteriores se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1.25. *Para $n \geqslant 1$ se tiene que*

$$U_n/U_{n+1} \cong k.$$

Proposición 2.1.26. (I) *Si k tiene característica $p > 0$, entonces para $n \geqslant 1$ se tiene que*

$$U_n^p \subset U_{n+1}.$$

(II) *Si K es completo (con la topología inducida por la valuación discreta) y si $m \geqslant 1$ es coprimo con la característica del cuerpo residual k, entonces para todo $n \geqslant 1$ se tiene que $u \longmapsto u^m$ es un automorfismo de U_n.*

Demostración. El primer ítem se deduce del corolario anterior. Una demostración del segundo ítem se encuentra en la Proposición 5 de la Sección 1 del Capítulo I de [CF67]. □

2.1.3. Completaciones

Sea K un cuerpo con un valor absoluto no trivial. Decimos que K es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge en K con la métrica inducida por el valor absoluto.

Teorema 2.1.27. *Sea K un cuerpo con un valor absoluto $|\cdot|$. Luego existe un cuerpo $\widehat{K}$ completo respecto de un valor absoluto $\widehat{|\cdot|}$ y un morfismo $K \longrightarrow \widehat{K}$ que preserva el valor absoluto y que cumple la siguiente propiedad universal: para todo morfismo $K \longrightarrow L$ en un cuerpo completo (respecto a un valor absoluto $\|\cdot\|$), que a su vez preserve valor absoluto, se extiende de manera única a un morfismo $\widehat{K} \longrightarrow L$ que preserva valor absoluto.*

Demostración. Ver el Teorema 7.23 de [Mil08]. □

Definición 2.1.28. A $\widehat{K}$ lo llamamos la **completación de** K.

Observación 2.1.29. (I) Como suele ocurrir usualmente con propiedades universales $\widehat{K}$ es único salvo isomorfismo.

(II) La imagen de K en $\widehat{K}$ es densa.

(III) Si $|\cdot|$ es un valor absoluto no arquimediano o discreto de K entonces la completación también lo es respectivamente. Notamos como $\widehat{\mathcal{O}}$ al anillo de enteros de la completación y como $\widehat{\mathfrak{P}}$ al único ideal maximal de $\widehat{\mathcal{O}}$. Usamos $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ para las unidades. Si ϖ es un elemento uniformizante que genera $\mathfrak{P}$ en $\mathcal{O}$, luego ϖ genera $\widehat{\mathfrak{P}}$ en $\widehat{\mathcal{O}}$.

Proposición 2.1.30. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ el morfismo $\mathcal{O}/\mathfrak{P}^n \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{P}}^n$ es un isomorfismo*

Demostración. La inyectividad sale de probar que el núcleo es trivial usando que el valor absoluto de la completación extiende al valor absoluto en K. La sobreyectividad sale de que como la imagen de $K \longrightarrow \widehat{K}$ es densa, luego también lo es la imagen de $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$. Como $\widehat{\mathfrak{P}}^n$ es abierto (de hecho también es cerrado), $\widehat{x} + \widehat{\mathfrak{P}}^n$ también, luego existe $y \in \widehat{x} + \widehat{\mathfrak{P}}^n \cap \mathcal{O}$, o sea, $\widehat{x}$ es la imagen de y vía el morfismo. □

Cuando v es un lugar de un cuerpo de números K, escribimos K_v para la completación de K respecto al valor absoluto $|\cdot|_v$. Cuando $v = \mathfrak{P}$ es una valuación $\mathfrak{P}$-ádica notamos como $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ al anillo de enteros de $K_{\mathfrak{P}}$, y notamos como $U_{\mathfrak{P}}$ a las unidades.

Ejemplo 2.1.31. El cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos es la completación de $\mathbb{Q}$ respecto al valor absoluto p-ádico $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x)}$.[3] Notamos como $\mathbb{Z}_p$ al anillo de enteros y como $\mathbb{Z}_p^\times$ a las unidades.

Ejemplo 2.1.32. El cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p$ es finito. En efecto, por la proposición anterior $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

2.1.4. Ramificación

Definición 2.1.33. Un **dominio de Dedekind** es un dominio íntegro A tal que

(1) A es noetheriano.

(2) A es íntegramente cerrado.

(3) Todo ideal primo no trivial es un ideal maximal.

Varios ejemplos de dominios de Dedekind son:

Ejemplo 2.1.34.

- Sea K un cuerpo de números, entonces su anillo de enteros algebraicos
$$\mathcal{O}_K = \{\, x \in K \mid x \text{ es raíz de un polinomio mónico en } \mathbb{Z}[X] \,\}$$
es un dominio de Dedekind[4].

- Los anillos de valuación discreta R son dominios de Dedekind, en efecto, son dominios de ideales principales y en particular noetherianos; son íntegramente cerrado pues si $x \neq 0$ es un elemento del cuerpo de fracciones K de R entonces $x \in R$ si y solo si $x^{-1} \notin R$; todo ideal primo no nulo es maximal pues solo existe un único ideal primo no nulo. Por ejemplo, sea K un cuerpo de valuación discreta, entonces $\mathcal{O}_K$ es un anillo de valuación discreta por la Proposición 2.1.21, y por lo tanto es un dominio de Dedekind.

El hecho de que exista factorización única en el anillo $\mathbb{Z}$ de enteros algebraicos de $\mathbb{Q}$ es un resultado clásico de la teoría de números elemental. Esto también sucede para $\mathbb{Z}[i]$ el anillo de enteros del cuerpo de números $\mathbb{Q}(i)$, sin embargo, no sucede en general que un anillo de enteros arbitrario $\mathcal{O}_K$ sea un *dominio de factorización única*. De todas formas existe una noción de factorización única de ideales que generaliza la de elementos, y es válida para dominios de Dedekind:

Teorema 2.1.35. *Sea A un dominio de Dedekind. Todo ideal propio no trivial $\mathfrak{a}$ de A se puede escribir como*
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{P}_n^{r_n}$$
con $\mathfrak{P}_i$ distintos ideales primos no triviales y $r_i > 0$. Los $\mathfrak{P}_i$ y r_i están unívocamente determinados, salvo permutación de índices.

[3] Donde si $\frac{a}{b} = x \neq 0$ con a, b coprimos se define $\operatorname{ord}_p(x) = m_p \in \mathbb{Z}$, con m_p la potencia de p que aparece en la factorización de a o $-m_p$ la potencia de p que aparece en la factorización de b.

[4] Para una demostración ver [Mil08].

Sean A, B dominios de Dedekind con cuerpos de fracciones K, L respectivamente. Un ideal primo $\mathfrak{P}$ de A no trivial se factoriza en B como

$$\mathfrak{P}B = \mathfrak{Q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{Q}_r^{e_r}, \quad e_i > 0.$$

Si alguno de los exponentes cumple que $e_i > 1$ entonces decimos que $\mathfrak{P}$ es **ramificado** en B (o en L). Los e_i se llaman **índices de ramificación**. Decimos que $\mathfrak{Q}$ **divide** a $\mathfrak{P}$ (lo notamos como $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P}$) si $\mathfrak{Q}$ aparece en la factorización de $\mathfrak{P}B$. Solemos escribir $e(\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P})$ al índice de ramificación y $f(\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{P})$ para el grado de la extensión $[B/\mathfrak{Q} : A/\mathfrak{P}]$ (llamado **grado residual**). Decimos que un primo $\mathfrak{P}$ se **parte** o que se **parte completamente** en B (o en L) si $e_i = f_i = 1$ para todo i; decimos que es **inerte** en B (o en L) si $\mathfrak{P}B$ es un ideal primo, i.e. $r = 1$ y $f = e = 1$.

Teorema 2.1.36. *Sea $n = [L : K]$ y $\mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_r$ los ideales primos que dividen a $\mathfrak{P}$ en L. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{r} e_i f_i = n,$$

con $e_i = e(\mathfrak{Q}_i \mid \mathfrak{P})$ y $f_i = f(\mathfrak{Q}_i \mid \mathfrak{P})$. Si L/K es una extensión Galois, entonces todos los e_i son iguales, todos los f_i son iguales y por lo tanto

$$efr = n.$$

Demostración. Ver el Teorema 3.34 de [Mil08]. □

2.1.5. Extensión de valores absolutos

Teorema 2.1.37. *Sea K completo respecto a un valor absoluto $|\cdot|_K$ y sea L una extensión finita de K de grado n. Entonces $|\cdot|_K$ se extiende de manera única a un valor absoluto $|\cdot|_L$ de L, además este nuevo valor absoluto es completo. La fórmula es*

$$|y|_L = |N_{L/K}(y)|_K^{1/n}.$$

Demostración. Ver el Teorema y el Corolario 2 de la Sección 10 del Capítulo II de [CF67]. □

En general, si K no es completo no tiene por que existir una única extensión del valor absoluto, pero si L/K es una extensión separable de grado n entonces hay a lo sumo n extensiones (ver la misma sección de [CF67]).

Observación 2.1.38. De la Proposición 2.1.10 se deduce que extender un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_K$ produce otro valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_L$. Además, se tiene de la fórmula que $|\cdot|_L$ es discreto si y solo si $|\cdot|_K$ es discreto.

Corolario 2.1.39. *Sea K un cuerpo completo respecto de un valor absoluto $|\cdot|_K$ y sea Ω una extensión separable de Ω (no necesariamente finita). Luego $|\cdot|_K$ se extiende de manera única a un valor absoluto $|\cdot|_\Omega$ en Ω.*

Demostración. El teorema anterior dice que podemos extender a $|\cdot|_K$ de manera única a cualquier subextensión finita de Ω, por lo tanto se extiende de manera única a Ω. □

Observación 2.1.40. Si K y Ω son como en el corolario anterior y si K es no arquimediano entonces Ω también lo será. Sin embargo, si K es discreto no tiene por qué serlo también Ω, lo mismo pasa si K es completo.

De todas formas en algunos ejemplos la completación de Ω no está muy lejos de ser algebraicamente cerrada: cuando K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, entonces se extiende el valor absoluto a la clausura algebraica Ω, sin embargo no nos queda completo (ver el Ejercicio 7-7 de [Mil08]), pero si completamos Ω entonces sí nos queda un cuerpo $\mathbb{C}_p$ algebraicamente cerrado y completo. Se tiene que $\mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}$ como cuerpos, pero el isomorfismo no es canónico, depende del axioma de elección.

Proposición 2.1.41. *Sean L y K como en el teorema anterior. Entonces $n = ef$, donde $n = [L : K]$, e es el índice de ramificación y f el grado de la extensión de cuerpos residuales.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.36 se tiene que $n = \sum_i e_i f_i$. En este caso, existe solamente un primo de L dividiendo a $\mathfrak{P}_K$ con lo cual la fórmula se simplifica a un solo término $n = ef$. □

Sea K completo respecto a una valuación discreta, y sea L una extensión finita de K. Sean $\mathfrak{P}_K$ y $\mathfrak{P}_L$ los ideales maximales de los anillos de enteros $\mathcal{O}_K$ y $\mathcal{O}_L$ respectivamente. Entonces $\mathfrak{P}_K \mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_L^e$, donde $e = e(\mathfrak{P}_L \mid \mathfrak{P}_K)$ es el índice de ramificación. Sean v_K, v_L las valuaciones respectivas y ϖ_K, ϖ_L los elementos uniformizantes respectivos, tenemos que:

$$v_K(\varpi_K) = 1 \quad \textbf{y} \quad v_L(\varpi_L) = 1.$$

Como $\varpi_K = \varpi_L^e u_L$ con $u_L \in U_L$, se tiene que

$$v_L(\varpi_K) = e,$$

luego si restringimos v_L a K tenemos que $v_L = ev_K$, pues todos los elementos de K se escriben como $\varpi_K^m u_K$ con $u_K \in U_K$.

Definición 2.1.42. Cuando $e = n$, i.e. $\mathfrak{P}_K \mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_L^n$ decimos que L es **totalmente ramificado** sobre K. Cuando $f = n$, i.e. $\mathfrak{P}_K \mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_L$ decimos que L es **no ramificado** sobre K.

2.1.6. Cuerpos localmente compactos

Proposición 2.1.43. *Sea K completo respecto de un valor absoluto discreto. Sea $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros y $\mathfrak{P}$ el único ideal maximal. Entonces $\mathcal{O}_K$ es compacto si y solo si el cuerpo residual k es finito.*

Demostración. Ver la Proposición 7.46 de [Mil08]. □

Corolario 2.1.44. *Si K es como en la proposición anterior y k es finito. Entonces $\mathfrak{P}^n$, U y U_n son compactos.*

Demostración. Son subconjuntos cerrados de $\mathcal{O}_K$. □

El corolario anterior nos dice que si K tiene una valuación discreta, es completo y su cuerpo residual es finito, entonces K es localmente compacto, luego cumple la siguiente definición:

Definición 2.1.45. Un **cuerpo local** K es un cuerpo con un valor absoluto no trivial tal que K es localmente compacto (y por ende completo).

Recíprocamente, si K tiene una valuación discreta tal que K es localmente compacto, entonces k es finito y K es compacto. Una demostración de este hecho se encuentra en el Corolario de la Sección 7 del Capítulo 2 de [CF67].

Ejemplo 2.1.46. Las extensiones finitas de $\mathbb{Q}_p$ son cuerpos locales, pues al ser extensiones finitas de un cuerpo completo respecto a su valuación discreta, por el Teorema 2.1.37, solo falta verificar que el cuerpo residual de K es finito. En efecto lo es, pues este es una extensión finita del cuerpo residual de $\mathbb{Q}_p$, el cual vimos en el Ejemplo 2.1.32 que era finito.

Observación 2.1.47. Sea K un cuerpo local. Este se clasifica en dos tipos distintos. A su véz en el caso no arquimediano existen dos familias distintas según la característica de K (ver la Observación 7.49 de [Mil08]):

- *Arquimediano*:
  - $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, en ambos la característica es 0.
- *No arquimediano*:
  - Extensiones finitas de $\mathbb{Q}_p$ cuando la característica es 0.
  - Extensiones finitas de $\mathbb{F}_p((t))$ cuando la característica es p.

Definición 2.1.48. Sea K un cuerpo con un valor absoluto $|\cdot|$ y cuerpo residual k con cardinal finito q. Decimos que $|\cdot|$ está **normalizado** si

$$|\varpi| = q^{-1},$$

donde ϖ es un elemento uniformizante de K.

Ejemplo 2.1.49. El cuerpo de los números p-ádicos tiene su valor absoluto $|\cdot|_p$ normalizado, pues un elemento uniformizador es p y se tiene que $|p|_p = p^{-1}$. En general, si K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ con el valor absoluto que extiende el de $\mathbb{Q}_p$, entonces es equivalente a un valor absoluto normalizado. En efecto, como $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{P}^e$, entonces

$$p^{-1} = |p|_p = |p|_K = |\varpi|_K^e,$$

con ϖ un generador de $\mathfrak{P}$. Con lo cual $|\varpi|_K = p^{-1/e}$. Debido a que $n = ef$, se tiene

$$|\varpi|_K = (p^f)^{-1/n} = q^{-1/n},$$

donde $q = p^f$ es el cardinal del cuerpo residual K, ya que este es una extensión de grado f sobre el cuerpo residual $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Q}_p$.

2.1.7. Cuerpos globales

Un **cuerpo global** K es un cuerpo de números cuando $\mathrm{char}(K) = 0$, o una extensión finita separable de $\mathbb{F}_q(t)$ para un $q = p^n$ cuando $\mathrm{char}(K) = p$.

Lema 2.1.50. *Sea $x \neq 0$ un elemento de un cuerpo global K. Entonces existen solamente finitas valuaciones discretas no equivalentes $|\cdot|$ de K tal que*

$$|x| > 1.$$

Demostración. Ver el Lema de la Sección 12 del Capítulo II de [CF67]. □

Observación 2.1.51. Todos los valores absolutos de un cuerpo global K o son valores absolutos discretos no arquimedianos con cuerpo residual finito, o sus completaciones son $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ por la Sección 12 del Capítulo II de [CF67]. Con lo cual tiene sentido hablar de valuaciones normalizadas (para el caso real y complejo definimos normalizado como en el Ejemplo 2.1.13).

Teorema 2.1.52 (Fórmula del Producto)**.** *Sea $x \neq 0$ un elemento de un cuerpo global K. Sea $|\cdot|_v$ la familia de valuaciones normalizadas de K, recorriendo los lugares v de K. Entonces $|x|_v = 1$ para todos los v salvo finitos y además*

$$\prod_v |x|_v = 1.$$

Demostración. Ver el Teorema de la Sección 12 del Capítulo II de [CF67]. □

Teorema 2.1.53. *Sea K un cuerpo de números. Cada lugar de K tiene un representante y solo uno que aparece en la siguiente lista:*

(I) *$v = \mathfrak{P}$ con $\mathfrak{P}$ un ideal primo no nulo de K.*

(II) *$v = \sigma_i$ donde σ_i es una inmersión real de K.*

(III) *$v = \tau_j$ donde τ_j es una inmersión complejo de K.*

Notar que τ_j es equivalente a $\overline{\tau_j}$

Demostración. Ver Capítulo II, sección 11. de [CF67]. □

Si v es como en el ítem (i), es un lugar **no arquimediano**. Si v es como en el ítem (ii) o (iii), es un lugar **arquimediano**.

2.1.8. Grupo de descomposición

Sea L/K una extensión de Galois finita sobre K un cuerpo global, con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Si $a \in L$ y $\sigma \in G$, luego G actúa sobre L vía evaluación.

Se tiene que G actúa también sobre los lugares w de L vía $|a|_{\sigma w} = |\sigma^{-1}a|_w$. Como σ actúa sobre las sucesiones de Cauchy de w de tal manera que nos da una sucesión de Cauchy para σw y recíprocamente, una sucesión de Cauchy para σw actuada por σ^{-1} nos da una sucesión de Cauchy para w, se tiene que σ nos induce por continuidad un isomorfismo isométrico $\sigma_w : L_w \to L_{\sigma w}$ entre las completaciones de L respecto de los lugares w y σw. Si $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{L_v}$ es el anillo de valuación de w, luego $\sigma(\mathcal{O}_w) = \mathcal{O}_{\sigma w}$. Además, si $w \mid v$ con v lugar de K, se tiene también $\sigma w \mid v$, y en consecuencia σ_w es un K_v-isomorfismo. Por último, $\sigma_{\tau w} \circ \tau_w = (\sigma\tau)_w$.

Definición 2.1.54. Llamamos **grupo de descomposición** de w al subgrupo G_w de G definido como:

$$\mathrm{G}_w = \{\sigma \in G : \sigma w = w\}.$$

Notemos que $G_{\sigma w} = \{\tau \in G : \tau\sigma w = \sigma w\} = \sigma\, \mathrm{G}_w\, \sigma^{-1}$, para todo $\sigma \in G$. Con lo cual el conjunto de clases de conjugación del grupo de descomposición de w solo dependen de v.

Proposición 2.1.55. *Valen las siguientes afirmaciones.*

(I) *Sean $w \mid v$, luego la extensión L_w/K_v es Galois y el morfismo*

$$\begin{aligned} G_w &\longrightarrow \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \\ \sigma &\longmapsto \sigma_w \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

(II) *Si w y w' son dos lugares de L sobre v de K, existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma w = w'$. En otras palabras, G actúa transitivamente en los lugares que yacen sobre v.*

Demostración. Ver la Proposición 1.2. en la página 163 de [CF67]. □

2.1.9. Automorfismo de Frobenius

Supongamos que w es un lugar no arquimediano discreto, que viene de un primo no ramificado de L sobre un lugar primo v de K (esto sucede para casi todo v y w, i.e. todos salvo finitos: Corolario 3, Sección Splitting of Primes in Extensions, Capítulo 3 de [MS77]). Por el primer ítem de la Proposición 2.1.55 se tiene que

$$G_w \cong \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \cong \mathrm{Gal}(l_w/k_v), \tag{2.1}$$

donde l_w y k_v son los cuerpos residuales de las completaciones L_w y K_v respectivamente, por otro lado el segundo isomorfismo proviene de que como w es no ramificado sobre v entonces la extensión L_w/K_v es una extensión de cuerpos locales no ramificada. Como estos cuerpos residuales son finitos, $\mathrm{Gal}(l_w/k_v)$ es un grupo cíclico finito, con un generador canónico,

$$\mathrm{Frob} : x \longmapsto x^{Nv},$$

donde Nv es el cardinal de k_v. Luego de (2.1) existe un único elemento $\sigma_w \in G_w$ tal que

$$\sigma_w(a) \equiv a^{Nv} \mod \mathfrak{P}_w$$

para todo $a \in \mathcal{O}_w$ el anillo de enteros de L_w, donde $\mathfrak{P}_w$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_w$. A este automorfismo σ_w lo llamamos **automorfismo de Frobenius** asociado al primo w. Por último, se sabe que este automorfismo depende solo de v salvo conjugación, pues: $\sigma_{\tau w} = \tau^{-1}\sigma_w\tau$.

2.2. Adèles e idèles

Definición 2.2.1. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea $(U_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos $U_i \subset X_i$. El **producto restringido**

$$\prod_{i\in I}(X_i, U_i) := \{\, (x_i)_{i\in I} \mid x_i \in U_i \text{ para casi todo } i \in I \,\}$$

es un espacio topológico con base de abiertos

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i\in I} V_i \;\middle|\; V_i \subset X_i \text{ es abierto } \forall i \in I \text{ y } V_i = U_i \text{ para casi todo } i \in I \right\}.$$

Donde *para casi todo* significa todo, salvo finitos.

Para cada $i \in I$ las proyecciones $\pi_i : \prod_{i\in I}(X_i, U_i) \longrightarrow X_i$, $(x_i)_{i\in I} \longmapsto x_i$ son continuas, pues si W_i es un abierto de X_i entonces $\pi_i^{-1}(W_i)$ es la unión de los conjuntos abiertos $V = \prod_{i\in I} V_i \in \mathcal{B}$ con $V_i = W_i$.

Observación 2.2.2. (I) El producto restringido no cambia si modificamos finitos U_i, i.e.

$$\prod_{i\in I}(X_i, U_i) = \prod_{i\in I}(X_i, U_i'),$$

donde $U_i' = U_i$ para casi todo $i \in I$.

(II) Sea $S \subset I$ un subconjunto finito. Definimos

$$X_S := \prod_{i\in S} X_i \times \prod_{i\notin S} U_i.$$

Este conjunto es abierto en el producto restringido pues es un abierto de la base. Más aún, la topología subespacio de X_S y la topología producto coinciden.

(III) Si la familia X_i de espacios topológicos tienen además una estructura de grupo o anillo topológico, entonces el producto restringido tiene una estructura natural de grupo o anillo, respectivamente. Más aún, con dicha estructura es un grupo o un anillo topológico respectivamente.

(IV) Si los espacios X_i son Hausdorff, entonces el producto restringido también lo es.

(V) Si los X_i son espacios localmente compactos y los abiertos U_i son compactos para casi todo $i \in I$ entonces el producto restringido es localmente compacto, pues $\prod_{i\in I}(X_i, U_i) = \bigcup_S X_S$ con $S \subset I$ recorriendo los subconjuntos finitos y los X_S son abiertos localmente compactos porque S es finito y el producto cartesiano de compactos es compacto por Tychonoff.

Sea K un cuerpo global, vamos a tomar como índices al conjunto de lugares normalizados, vamos a tomar como anillos topológicos $X_v = K_v$ las completaciones de K y como hay finitos lugares arquimedianos, podemos tomar los abiertos $U_v = \mathcal{O}_v$ para las valuaciones discretas no arquimedianas v. El producto restringido define:

Definición 2.2.3. El anillo de **adèles** de K

$$\mathbb{A}_K := \{(x_v) : x_v \in K_v \ \forall v \text{ y } x_v \in \mathcal{O}_v \text{ para casi todo } v \text{ discreto no arquimiediano}\} \subset \prod_v K_v.$$

Si ahora elegimos los grupos topológicos $X_v = K_v^\times$ y los abiertos $U_v \subset \mathcal{O}_{K_v}$ para casi todo v, con v valuación discreta no arquimediana, define el producto restringido:

Definición 2.2.4. El grupo de **idèles** de K

$$\mathbb{A}_K^\times := \left\{(x_v) : x_v \in K_v^\times \ \forall v \text{ y } x_v \in \mathcal{O}_v^\times \text{ para casi todo } v \text{ no arquimiediano}\right\} \subset \prod_v K_v^\times.$$

Tenemos las inclusiones en las completaciones $K \hookrightarrow K_v$ que inducen la inclusión diagonal

$$\begin{aligned} K &\hookrightarrow \mathbb{A}_K \\ x &\mapsto (x, x, x, \ldots), \end{aligned}$$

que está bien definido ya que $x \in \mathcal{O}_v$ para casi todo v por el Lema 2.1.50. La imagen de K en $\mathbb{A}_K$ se llama el subanillo de **adèles principales**. El cual es un cuerpo. También se tiene que $|x| = 1$

para todo $x \in K \hookrightarrow \mathbb{A}_K$ por el Teorema 2.1.52. Análogamente tenemos la inclusión diagonal $K^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$ de los **idèles principales**.

Otra inclusión que existe es

$$\begin{aligned} i_v : K_v &\hookrightarrow \mathbb{A} \\ x &\longrightarrow (1, \ldots, 1, x, 1, 1, \ldots), \end{aligned}$$

donde x aparece en la v-ésima coordenada. Análogamente tenemos la inclusión $i_v : K_v^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$ en la v-ésima coordenada, que la denotamos de la misma forma.

Definición 2.2.5. Definimos el **valor absoluto adélico** como

$$|x| := \prod_v |x_v|_v,$$

con $x = (x_v) \in \mathbb{A}_K$.

Observar que está bien definido porque el producto infinito de la derecha converge en $\mathbb{R}$, además el valor absoluto adélico es multiplicativo. Definimos al núcleo de este morfismo como $\mathbb{A}_K^1$, o sea, los elementos de $\mathbb{A}_K$ con valor absoluto igual a uno.

Ahora, vamos a llamar a $C_K := \mathbb{A}_K^\times / K^\times$ el **grupo de clases de idèles** de K y a $C_K^1 := \mathbb{A}_K^1 / K^\times$ el **grupo de clases de idèles de norma 1** de K.

Proposición 2.2.6. *Valen las siguiente propiedades:*

(I) *$\mathbb{A}_K$ y $\mathbb{A}_K^\times$ son espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff.*

(II) *K y $K^\times$ son subgrupos discretos en $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^\times$, respectivamente.*

(III) *$\mathbb{A}_K / K$ es compacto con la topología cociente.*

(IV) *C_K no es compacto con la topología cociente.*

(V) *C_K^1 si es compacto con la topología cociente.*

Demostración. Que los adèles e idèles son espacios localmente compactos y Hausdorff se deduce de la Observación 2.2.2. Para el resto ver las Secciones 14 y 16 del Capítulo II de [CF67]. □

Teorema 2.2.7 (Teorema de aproximación débil)**.** *Sean $v_1, \ldots, v_N$ valuaciones de K no equivalentes. Sea K_{v_i} la completación de K con respecto a la topología inducida por la norma $|\cdot|_{v_i}$. Luego la imagen diagonal de K en $\prod_{i=1}^N K_{v_i}$ es densa.*

Demostración. Ver el Lema de la Sección 6 del Capítulo II de [CF67] y usar que K es denso en cada K_i. □

2.2.1. La norma de idèles

Sea $\mathbb{A}_K^\times$ el grupo de idèles, se suryecta al grupo J_K de ideales fraccionarios de $\mathcal{O}_K$ vía

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}_K^\times &\longrightarrow J_K \\ a &\longmapsto \prod \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(a)}, \end{aligned}$$

con $v_{\mathfrak{P}}$ la valuación $\mathfrak{P}$-ádica de la componente $a_v \in K_v^\times$ de $a = (a_v) \in \mathbb{A}_K^\times$ en el lugar no arquimediano v correspondiente al valor absoluto $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & K^\times \arrow[r] \arrow[d, two heads, "x \mapsto (x)"] & \mathbb{A}_K^\times \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\phi"] & C_K \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\ 1 \arrow[r] & P_K \arrow[r] & J_K \arrow[r] & Cl_K \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

donde P_K es el subgrupo de ideales principales de J_K y $Cl_K := J_K / P_K$ es el **grupo de clases de ideales**.

Definición 2.2.8. Sea L/K una extensión finita separable. La **norma de idèles** $N_{L/K} : \mathbb{A}_L^\times \longrightarrow \mathbb{A}_K^\times$ se define como $N_{L/K}(b_w) = (a_v)$, donde cada

$$a_v = \prod_{w|v} N_{L_w/K_v}(b_w)$$

es un producto sobre todos los lugares w de L que extienden a v en K, y $N_{L_w/K_v} : L_w \longrightarrow K_v$ es la norma de extensiones de cuerpos que corresponde a la extensión finita separable de cuerpos locales L_w/K_v.

Además se tiene que la norma de idèles $N_{L/K}$ coincide con la norma de extensiones de cuerpos (que vamos a notarlo igual) $N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times$ en el subgrupo de **idèles principales** $L^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_L^\times$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L^\times \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \mathbb{A}_L^\times \arrow[r, two heads] \arrow[d, "N_{L/K}"] & J_L \arrow[d, "N_{L/K}"] \\
K^\times \arrow[r] & \mathbb{A}_K^\times \arrow[r, two heads] & J_K
\end{tikzcd}$$

donde notamos como $N_{L/K} : J_L \longrightarrow J_K$ a la **norma de ideales**, que también es compatible con $N_{L/K} : L^\times \longrightarrow K^\times$. Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.2.9. *Si $b \in L$, entonces $N_{L/K}((b)) = \big(N_{L/K}(b)\big)$, i.e. la parte derecha del diagrama conmuta.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición norma de idèles. □

Observación 2.2.10.

- Volviendo al anterior diagrama conmutativo, la imagen de $L^\times$ bajo la composición de ambas flechas en la primera fila es precisamente el grupo P_L de ideales principales en J_L, análogamente para la imagen de $K^\times$ en P_K. Cocientando por P_L en J_L y P_K en J_K, las flechas inducen morfismos que seguiremos llamando $N_{L/K}$ y que satisfacen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_L \arrow[r, two heads] \arrow[d, "N_{L/K}"] & Cl_L \arrow[d, "N_{L/K}"] \\
C_K \arrow[r, two heads] & Cl_K.
\end{tikzcd}$$

- Sea $w \mid v$ con w un lugar de L y v un lugar de K entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
L_w^\times \arrow[r, "N_{L_w/K_v}"] \arrow[d, hook, "\iota_w"] & K_v^\times \arrow[d, hook, "\iota_v"] \\
\mathbb{A}_L^\times \arrow[r, "N_{L/K}"] & \mathbb{A}_K^\times.
\end{tikzcd}$$

2.3. Grupos localmente profinitos

Definición 2.3.1. Un **grupo profinito** es un grupo G que es el límite inverso de una familia de grupos finitos y discretos.

Proposición 2.3.2. *Sea G un grupo topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *G es un grupo profinito.*

(II) *G es Hausdorff, compacto con una base de entornos de 1 formada por subgrupos abiertos normales.*

(III) *G es Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.*

Demostración. Ver la Proposición 2.8. de [Kar89]. □

Ejemplo 2.3.3. Sea $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ el grupo de Galois de una extensión de cuerpos algebraica normal L/K, equipada con la topología de Krull. Con esta topología $\mathrm{Gal}(L/K)$ es un grupo profinito, pues $G \cong \varprojlim_L \mathrm{Gal}(L/K)$, donde el límite inverso recorre todas las subextensiones de Galois finitas de L sobre K.

Dado un cuerpo K, nos interesa el caso particular del **grupo de Galois absoluto** $\mathrm{G}_K := \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ de K. Donde K^{sep} es la clausura separable de K.

Definición 2.3.4. Un **grupo localmente profinito** es un grupo topológico Hausdorff G, tal que todo entorno abierto de la identidad contiene un subgrupo abierto y compacto de G.

Proposición 2.3.5. *Sea G un grupo topológico. Son equivalentes:*

(I) *G es localmente profinito.*

(II) *G es Hausdorff, localmente compacto y totalmente disconexo.*

Demostración. Ver el Capítulo V de [CF67]. □

Corolario 2.3.6. *Los grupos localmente profinitos compactos son profinitos.*

Varios ejemplos de grupos localmente profinitos son: los grupos discretos, los subgrupos cerrados de grupos localmente profinitos, el cociente por un subgrupo normal cerrado en un grupo localmente profinito. Nosotros vamos a trabajar con K un cuerpo local no arquimediano, el cual es un grupo localmente profinito pues es Hausdorff y la familia $\{\mathfrak{P}^r\}_{r\in\mathbb{Z}}$ forma una base de abiertos compactos de 0 (al ser abiertos y cerrados se tiene que K es también totalmente disconexo). Más aún, $M_n(K)$ y $GL_n(K)$ son grupos también localmente profinitos para todo $n \geqslant 1$, ya que de la misma manera que antes, son Hausdorff y tienen una base de abiertos compactos del neutro: $\{M_n(\mathfrak{P}^r)\}_{r\in\mathbb{Z}}$ en el primero caso y $\{1 + \varpi^r M_n(\mathcal{O}_K)\}_{r\geqslant 0}$ en el segundo. En contraste, los grupos K, $M_n(K)$, $\mathrm{GL}_n(K)$ con K cuerpo local arquimediano, i.e. $K = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, no son localmente profinitos pues no son totalmente disconexos.

Definición 2.3.7. Un grupo **p-profinito** G es un grupo profinito que es el límite inverso de p-grupos finitos. En este caso decimos que G tiene pro-orden p.

Ejemplo 2.3.8.
- Los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
- Cualquier p-grupo finito, pues se pueden ver como un límite inverso constante.

Proposición 2.3.9. *Sea $\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un morfismo de grupos, con G localmente profinito. Son equivalentes:*

(I) *ψ es continua.*

(II) $\mathrm{Ker}\,\psi$ *es abierto.*

Más aún, si ψ satisface alguna de estas condiciones y si G es la unión de subgrupos compactos, entonces la imagen de ψ está contenida en el círculo unitario $\mathbb{S}^1$.

Demostración. La equivalencia es un caso particular de la Proposición 2.5.4 con $n = 1$.

Luego probemos la segunda afirmación. Para eso, basta ver que la imagen de cualquier subgrupo compacto K de G está contenido en $\mathbb{S}^1$. En efecto, consideremos la restricción de ψ a K. Como el núcleo es abierto en K, tiene índice finito porque K es compacto, luego cocientando se tiene que la imagen de la restricción es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ y en particular está contenido en $\mathbb{S}^1$. □

Definición 2.3.10. Vamos a llamar **caracter** de un grupo localmente profinito G a un morfismo continuo de grupos $\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Cuando la imagen esté contenida en el círculo unitario, se va a llamar caracter **unitario** de G.[5]

La Proposición anterior nos dice que los caracteres de $G = M_n(K)$ con K un cuerpo localmente profinito es unitario. En contraste, esto no pasa para $G = \mathrm{GL}_n(K)$, pues $|\det(\cdot)|$ no es un caracter unitario.

[5] En la literatura también aparece el término **cuasicaracter**, el cual se refiere a un caracter no necesariamente unitario.

Definición 2.3.11. Los caracteres de $(K,+)$ van a formar un grupo vía la multiplicación, lo vamos a denotar como $\widehat{K}$.

Si $\psi \in \widehat{K}$ es no trivial, es decir, $\psi \neq 1$, existe un mínimo entero $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{P}^d \subset \operatorname{Ker}\psi$. A este d lo llamamos el **nivel** de ψ.

Notar que si fijamos d el conjunto de caracteres de K de nivel $\leqslant d$ forman un subgrupo de $\widehat{K}$, tal que $\psi|_{\mathfrak{P}^d} = 1$.

El grupo $\widehat{K}$ es un grupo topológico con la topología subespacio del conjunto de funciones continuas entre K y el círculo unitario $C(K, \mathbb{S}^1)$ con la topología compacto-abierta. Como K es un grupo topológico localmente compacto, Hausdorff y abeliano se tiene que $\widehat{K}$ es localmente compacto.

Teorema 2.3.12 (Teorema de la Función Abierta para grupos topológicos localmente compactos)**.** *Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un morfismo sobreyectivo de grupos topológicos localmente compactos y Hausdorff. Entonces φ es abierto si G es σ-compacto*[6]*.*

Demostración. Vel el Teorema 6.19 de [Str06]. □

Proposición 2.3.13 (Dualidad aditiva)**.** *Sean $\psi \in \widehat{K}$ y $\psi \neq 1$ con nivel d. Valen las siguientes afirmaciones:*

(I) *Sea $a \in K$. El morfismo $a \cdot \psi : x \longmapsto \psi(ax)$ es un caracter de K. Si $a \neq 0$, el caracter $a \cdot \psi$ tiene nivel $d - \operatorname{ord}_{\mathfrak{P}}(a)$.*

(II) *El morfismo $a \longmapsto a \cdot \psi$ es un isomorfismo topológico de grupos $K \cong \widehat{K}$.*

Demostración. El morfismo $a \longmapsto a \cdot \psi$ es continuo ya que la preimagen de un abierto subbásico de la topología compacto-abierta es abierto, estos son los abiertos $V(U,W) = \{\chi \mid \chi(U) \subset W\}$ con U compacto y W abierto. Además, si probamos que es un isomorfismo de grupos, se tiene que es una función abierta por el Teorema de la Función Abierta para grupos topológicos localmente compactos, y por lo tanto es un homeomorfismo.

Para el resto de la demostración ver la proposición de la Sección 1.7, Capítulo 1 de [BH06]. □

Por otro lado, sea χ un caracter de $K^\times$. Por la Proposición 2.3.9 $\operatorname{Ker}\chi$ es abierto y por lo tanto contiene a U_K^m para algún $m \geqslant 0$.

Definición 2.3.14. Sea χ un caracter no trivial de $K^\times$. El **nivel** de χ se define como el menor $m \geqslant 0$ tal que χ es trivial en U_k^{m+1}.

Sean enteros $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant 2n$. La Proposición 2.1.24 dice que tenemos un isomorfismo $U_n/U_m \cong \mathfrak{P}^n / \mathfrak{P}^m$ dado por $u \longmapsto u-1$. Observemos que este isomorfismo nos induce un isomorfismo $\widehat{U_n/U_m} \cong \widehat{\mathfrak{P}^n / \mathfrak{P}^m}$.

Dado $\psi \in \widehat{K}$ no trivial con nivel d, y $1 \leqslant n+d \leqslant m+d \leqslant 2(n+d)$, la función

$$\psi_a(x) = \psi(a(x-1))$$

define un caracter de U_{n+d}/U_{m+d} bien definido si $a \in \mathfrak{P}^{-m}$.

Proposición 2.3.15. *Sea $\psi \in \widehat{K}$ no trivial de nivel d. Sean $1 \leqslant n+d \leqslant m+d \leqslant 2(n+d)$. Entonces el morfismo $a \longmapsto \psi_a$ induce un isomorfismo*

$$\mathfrak{P}^{-m} / \mathfrak{P}^{-n} \longrightarrow \widehat{U_{n+d}/U_{m+d}}.$$

Demostración. Por lo discutido anteriormente se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{-m} &\longrightarrow \widehat{U_{n+d}/U_{m+d}} \\ a &\longmapsto \psi_a \end{aligned}$$

es morfismo. Además claramente el núcleo es $\mathfrak{P}^{-n}$. Finalmente es sobreyectivo pues la imagen de $a \mapsto a \cdot \psi$ son los caracteres de nivel $m+d$. □

El caso que nos va a interesar es cuando $d = 1$. En particular n y m cumplen las desigualdades $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant 2n+1$.

[6] Un grupo topológico se dice **σ-compacto** si se puede escribir como la unión de a lo sumo numerables compactos.

2.4. L-función y constante local para caracteres de $GL_1(K)$

Dado un cuerpo local no arquimediano K con cuerpo residual de orden q, vamos a asociarle a un caracter de $K^\times = GL_1(K)$, vamos a asociarle una *L-función* y *constante local*. La primera va a ser una función de la forma $f(q^{-s})^{-1}$ con f un polinomio complejo no nulo de grado a lo sumo 2. La segunda va a ser una función de la forma cq^{-ms}, para una constante c no nula y un entero m.

Fijemos $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$, y μ una medida de Haar en K. Para $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$, definimos la **transformada de Fourier** de Φ respecto de μ y ψ como

$$\widehat{\Phi}(x) := \int_K \Phi(y)\psi(xy)d\mu(y), \quad x \in K.$$

El integrando es localmente constante, luego la integral se reduce a una suma finita.

Proposición 2.4.1. *Valen las siguientes afirmaciones.*

(I) *Para $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$, la función $\widehat{\Phi} \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.*

(II) *Existe un número real positivo $c = c(\psi, \mu)$ tal que*

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x) = c\Phi(-x), \quad \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K),\ x \in K.$$

(III) *Dados ψ, existe una única medida de Haar μ_ψ tal que $c(\psi, \mu_\psi) = 1$. Esta medida satisface $\mu_\psi(\mathcal{O}_K) = q^{l/2}$, donde l es el nivel de ψ.*

(IV) *Para $a \in K^\times$, se tiene que $\mu_{a\cdot\psi} = |a|^{\frac{1}{2}}\,\mu_\psi$.*

Demostración. Sea l el nivel de ψ, y tomemos Φ_j la función característica de $\mathfrak{P}^j$. Para todo $a \in K$, el caracter $a \cdot \psi|_{\mathfrak{P}^j}$ es trivial si y solo si $a \in \mathfrak{P}^{l-j}$. Entonces el soporte de $\widehat{\Phi}_j$ es $\mathfrak{P}^{l-j}$ (ya que si ϕ es un caracter de $\widehat{K}$ con nivel $l > n$ entonces $\int_{\mathfrak{P}^n} \phi(y)d\mu(y) = 0$), luego

$$\widehat{\Phi}_j(x) = \mu(\mathcal{O}_K)q^{-j}, \quad \forall\ x \in \mathfrak{P}^{l-j}.$$

O sea que $\widehat{\Phi}_j = (\mu(\mathcal{O}_K)q^{-j})\Phi_{l-j}$. Esto prueba (i) para Φ una función característica en $\mathfrak{P}^j$. Luego veamos (ii) para Φ en el mismo caso. Nos va a quedar $c = \mu(\mathcal{O}_K)^2 q^{-l}$, ya que

$$\widehat{\widehat{\Phi}}_j(x) = \mu(\mathcal{O}_K)q^{-j}\widehat{\Phi}_{l-j}, \text{ y } \widehat{\Phi_{l-j}} = \mu(\mathcal{O}_K)q^{-(l-j)}\Phi_j.$$

Sea $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K), a \in K$, y sea Ψ la función $x \mapsto \Phi(x-a)$. se tiene que

$$\widehat{\Psi}(x) = \int_K \Phi(y-a)\psi(xy)d\mu(y) = a \cdot \psi(x)\widehat{\Phi}(x).$$

Como $a \cdot \psi$ es localmente constante, siempre vamos a tener que $\widehat{\Psi} \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$ cuando $\widehat{\Phi}$ también esté en $\mathcal{C}_c^\infty(K)$. Consideremos ahora $\Phi = \Phi_j$. Volviendo a tomar la transformada de Fourier conseguimos

$$\widehat{\widehat{\Psi}}(x) = \widehat{\widehat{\Phi}}(x+a).$$

En particular,

$$\widehat{\widehat{\Psi}}(x) = c\Phi(-x-a) = c\Psi(-x),$$

con $c = \mu(\mathcal{O}_K)^2 q^{-l}$. Como las funciones $x \mapsto \Phi_j(x-a)$, $a \in K$, $j \in \mathbb{Z}$ generan a $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ como espacio vectorial, debe ser que valen los ítems (i) y (ii) en general, además podemos tomar $c = \mu(\mathcal{O}_K)^2 q^{-l}$ siempre.

Observemos que para $b > 0$, se tiene que $c(\psi, b\mu) = b^2 c(\psi, \mu)$, con lo cual si buscamos una medida de Haar η tal que $c(\psi, \eta) = 1$ para que valga (iii) la única manera es que η sea igual a $b\mu$ con $b = \frac{q^{l/2}}{\mu(\mathcal{O}_K)}$, ya que las medidas de Haar son únicas salvo un múltiplo positivo.

El último item se deduce de (iii), tenemos que $\mu_{a\cdot\psi} = h\mu_\psi$ para algún $h > 0$, por la unicidad de la medida de Haar. Luego como el nivel del caracter $a \cdot \psi$ es $l - \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(a)$ (ver Proposición 2.3.13) se tiene que $h = q^{\frac{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(a)}{2}} = |a|^{\frac{1}{2}}$ □

Definición 2.4.2. A esta medida μ_ψ la llamamos la **medida de Haar autodual** de K, relativa a ψ.

Es conveniente esta medida porque nos proporciona de la fórmula de inversión de Fourier

$$\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x), \quad \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K),\ x \in K. \tag{2.2}$$

Sea μ^* una medida de Haar de $K^\times$. Tomemos χ un caracter de $K^\times$ y $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$. Para $m \in \mathbb{Z}$ denotamos por $\mathfrak{e}_m$ a la función característica de $\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}$. Definimos $\Phi_m := \mathfrak{e}_m \Phi$ perteneciente a $\mathcal{C}_c^\infty(K^\times) \subset \mathcal{C}_c^\infty(K)$. Y es idénticamente cero para $m \ll 0$. Luego tiene sentido tomar

$$z_m = z_m(\Phi, \chi) := \int_{\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}} \Phi(x)\chi(x) d\mu^*(x), \quad m \in \mathbb{Z},$$

y definir la serie formal de Laurent $Z(\Phi, \chi, X) \in \mathbb{C}((X))$ como

$$Z(\Phi, \chi, X) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} z_m X^m.$$

Introducimos la siguiente función

$$\zeta(\Phi, \chi, s) = Z(\Phi, \chi, q^{-s}).$$

Se tiene que

$$\zeta(\Phi, \chi, s) = \int_{K^\times} \Phi(x)\chi(x)\, |x|^s\, d\mu^*(x).$$

Esta igualdad la interpretamos de la siguiente manera: se puede ver que la integral converge absolutamente y uniformemente sobre franjas verticales para algún semiplano $\Re(s) > s_0$. Allí representa una función racional en q^s, en particular tiene continuación analítica a una función meromorfa en todo el plano complejo.

Sea $\psi \in \widehat{K}$ no trivial, a partir de ahora consideraremos la transformada de Fourier respecto de ψ y de $\mu = \mu_\psi$.

Teorema 2.4.3. *Sea χ un caracter de $K^\times$. Existe una única función racional $c(\chi, \psi, X) \in \mathbb{C}(X)$ tal que*

$$Z(\widehat{\Phi}, \check{\chi}, \frac{1}{q^X}) = c(\chi, \psi, X) Z(\Phi, \chi, X),$$

para todos los $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$.

Demostración. Consideremos el espacio Λ de funciones lineales $\lambda : \mathcal{C}_c^\infty(K) \longmapsto \mathbb{C}(X)$ que satisfacen la ecuación

$$\lambda(a \cdot \Phi) = \chi(a) X^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(a)} \lambda(\Phi), \quad \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K),\ a \in K^\times. \tag{2.3}$$

Este espacio tiene una estructura obvia de $\mathbb{C}(X)$-espacio vectorial. Este espacio contiene la transformación lineal

$$S : \Phi \longmapsto Z(\Phi, \chi, X),$$

la cual es no nula. Para $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$ y $a \in K^\times$ tenemos que

$$\widehat{a\Phi} = |a|\, a^{-1} \widehat{\Phi}.$$

Se sigue que la transformación lineal

$$\widehat{S} : \Phi \longmapsto Z(\widehat{\Phi}, \check{\chi}, \frac{1}{q} X)$$

también cae en Λ. El teorema se concluye usando el Lema de la Sección 23.3 del Capítulo 6 de [BH06] que afirma que Λ tiene dimensión uno sobre $\mathbb{C}(X)$. $\square$

Esta función racional $c(\chi, \psi, X)$ define

$$\gamma(\chi, s, \psi) := c(\chi, \psi, q^{-s}).$$

Sea χ un caracter de $K^\times$. Sea ϖ un elemento uniformizante de $\mathcal{O}_K$. Definimos la L**-función** de χ como la función meromorfa

$$L(\chi, s) := \begin{cases} (1 - \chi(\varpi)q^{-s})^{-1} & \text{si } \chi \text{ es no ramificado,} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando χ es ramificado esto no nos dice nada, sin embargo, cuando χ es no ramificado la L-función nos determina completamente a χ:

Proposición 2.4.4. *Sean χ_1, χ_2 dos caracteres no ramificados de $K^\times$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *Las funciones $L(\chi_1, s)$, $L(\chi_2, s)$ tienen un polo en común.*

(II) *Las funciones $L(\chi_1, s)$, $L(\chi_2, s)$ tienen el mismo conjunto de polos.*

(III) $\chi_1 = \chi_2$.

Definimos la **constante local** de χ

$$\epsilon(\chi, s, \psi) := \gamma(\chi, s, \psi)\frac{L(\chi, s)}{L(\check{\chi}, 1 - s)}, \tag{2.4}$$

es una función racional.

Proposición 2.4.5. *La constante local $\epsilon(\chi, s, \psi)$ satisface la Ecuación funcional*

$$\epsilon(\chi, s, \psi)\epsilon(\check{\chi}, 1 - s, \psi) = \chi(-1). \tag{2.5}$$

Además,

$$\epsilon(\chi, s, \psi) = q^{n(\chi,\psi)(\frac{1}{2}-s)}\epsilon(\chi, \frac{1}{2}, \psi),$$

para algún $n(\chi, \psi) \in \mathbb{Z}$.

Demostración. La ecuación funcional en el Teorema 2.4.3 equivale a que

$$\zeta(\widehat{\Phi}, \check{\chi}, 1 - s) = \gamma(\chi, s, \psi)\zeta(\Phi, \chi, s). \tag{2.6}$$

Aplicándolo dos veces, obtenemos

$$\zeta(\widehat{\widehat{\Phi}}, \chi, s) = \gamma(\check{\chi}, \psi, 1 - s)\gamma(\chi, s, \psi)\zeta(\Phi, \chi, s).$$

La fórmula de inversión de Fourier (2.2) nos dice que $\zeta(\widehat{\widehat{\Phi}}, \chi, s) = \chi(-1)\zeta(\Phi, \chi, s)$, por lo tanto

$$\gamma(\check{\chi}, \psi, 1 - s)\gamma(\chi, s, \psi) = \epsilon(\check{\chi}, \psi, 1 - s)\epsilon(\chi, s, \psi) = \chi(-1),$$

luego la primera ecuación del enunciado se cumple.

Reescribiendo la Ecuación (2.6) obtenemos

$$\frac{\zeta(\widehat{\Phi}, \check{\chi}, 1 - s)}{L(\check{\chi}, 1 - s)} = \epsilon(\chi, s, \psi)\frac{\zeta(\Phi, \chi, s)}{L(\chi, s)},$$

donde las fracciones de ambos lados están en $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$. Luego elegimos Φ tal que $\zeta(\Phi, \chi, s) = L(\chi, s)$. Entonces $\epsilon(\chi, s, \psi), \epsilon(\check{\chi}, \psi, 1 - s) \in \mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$. La primera ecuación funcional del enunciado que acabamos de probar implica que $\epsilon(\chi, s, \psi)$ es un elemento inversible del anillo $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$, con lo cual es igual a aq^{ms} para algún $a \in \mathbb{C}^\times$ y $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente llevamos esto a la forma deseada, lo que prueba la segunda ecuación del enunciado. □

El siguiente lema nos dice que para conocer la constante local podemos asumir que ψ tiene nivel 1.

Lema 2.4.6. *Sea $a \in K^\times$, entonces*

$$\epsilon(\chi, s, a \cdot \psi) = \chi(a)\, |a|^{s-\frac{1}{2}}\, \epsilon(\chi, s, \psi).$$

Es esencial conocer los posibles valores de $\epsilon(\chi, s, \psi)$. Tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.4.7. *Sea χ no ramificado y ψ de nivel 1. Entonces*

$$\epsilon(\chi, s, \psi) = q^{s-\frac{1}{2}} \chi(\varpi)^{-1}.$$

Demostración. Sea μ_ψ la medida de Haar autodual de ψ. Satisface

$$\int_{\mathcal{O}_K} d\mu_\psi(x) = q^{\frac{1}{2}}.$$

Tomemos una medida de Haar $d\mu^*$ en $K^\times$ tal que

$$\int_{U_K} d\mu^*(x) = 1.$$

Sea Φ la función característica en $\mathcal{O}_K$, con lo cual $\zeta(\Phi, \chi, s) = L(\chi, s)$.

En efecto, $\zeta(\Phi, \chi, s) = Z(\Phi, \chi, q^{-s})$ y además por definición

$$Z(\Phi, \chi, X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}} \Phi(x)\chi(x) d\mu^*(x) \right) X^m.$$

Notemos que cada coeficiente z_m que acompaña a X^m se puede simplificar a

$$z_m = \int_{\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}} \chi(x) d\mu^*(x) \quad m \geqslant 0,$$

y $z_m = 0$ cuando $m < 0$, pues Φ es la función característica de U_K. Además,

$$\int_{\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}} \chi(x) d\mu^*(x) = \chi(\varpi^m) \int_{U_K} \chi(x) d\mu^*(x),$$

haciendo un cambio de variable y notando que $\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1} = \varpi^m U_K$.

Nos queda

$$Z(\Phi, \chi, X) = \sum_{m \geqslant 0} \chi(\varpi^m) \left(\int_{U_K} \chi(x) d\mu^*(x) \right) X^m,$$

donde la integral es igual a $\mu^*(U_K) = 1$ cuando χ es no ramificado y vale 0 en otro caso. O sea,

$$Z(\Phi, \chi, X) = \begin{cases} (1 - \chi(\varpi)X)^{-1} & \text{si } \chi \text{ es no ramificado,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Eso es, $\zeta(\Phi, \chi, s) = L(\chi, s)$.

Por otro lado, $\widehat{\Phi}(x) = q^{1/2}\Phi(\varpi^{-1}x)$, con lo cual

$$\begin{aligned} \zeta(\widehat{\Phi}, \chi^{-1}, s) &= q^{1/2} \int_{K^\times} \Phi(\varpi^{-1}x)\chi(x)^{-1} |x|^s \, d\mu^*(x) \\ &= q^{1/2}\chi(\varpi)^{-1} \int_{K^\times} \Phi(x)\chi(x)^{-1} |x|^s \, d\mu^*(x) \\ &= q^{1/2-s}\zeta(\widehat{\Phi}, \chi^{-1}, s) \\ &= q^{1/2-s} L(\chi^{-1}, s). \end{aligned}$$

Nos queda entonces que

$$\epsilon(\chi, s, \psi) = \frac{\zeta(\widehat{\Phi}, \chi^{-1}, 1-s)}{L(\chi^{-1}, 1-s)} = q^{s-\frac{1}{2}}\chi(\varpi)^{-1}.$$

□

Definición 2.4.8. Sea χ un caracter no ramificado de $K^\times$ de nivel $n \geqslant 0$ y sea $\psi \in \widehat{K}$ de nivel 1. Sea $\alpha \in K$ tal que $v_K(\alpha) = -n$. Definimos la **suma de Gauss** de χ respecto de ψ:

$$\tau(\chi, \psi) := \sum_{x \in U_K / U_K^{n+1}} \check{\chi}(\alpha x)\psi(\alpha x).$$

Notar que la sumatoria está bien definida, pues x no depende del representante de la coclase ni del elemento α con $v_K(\alpha) = -n$.

Teorema 2.4.9. *Supongamos que χ es no ramificado y tiene nivel $n \geqslant 0$. Sea $\psi \in \widehat{K}$ de nivel 1. Entonces*

$$\epsilon(\chi, s, \psi) = q^{n(\frac{1}{2}-s)}\tau(\chi, \psi)/q^{(n+1)/2},$$

para todo $\alpha \in K^\times$ tal que $v_K(\alpha) = -n$.

Demostración. Sea Φ la función característica de U_K^{n+1}, con lo cual $\zeta(\Phi, \chi, s) = \mu^*(U_K^{n+1})$. Se tiene que la transformada de Fourier Φ tiene soporte $\mathfrak{P}^{-n}$ y que

$$\widehat{\Phi}(y) = q^{\frac{1}{2}-n-1}\psi(y), \quad y \in \mathfrak{P}^{-n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\zeta(\widehat{\Phi}, \chi^{-1}, s) &= q^{\frac{1}{2}-n-1} \int_{\mathfrak{P}^{-n}\setminus\{0\}} \psi(y)\chi(y)^{-1}\,|y|^s\, d^*(y) \\ &= q^{\frac{1}{2}-n-1} \sum_{m \geqslant -n} z_m q^{-ms},\end{aligned}$$

donde

$$z_m = \int_{\mathfrak{P}^m \setminus \mathfrak{P}^{m+1}} \psi(y)\chi(y)^{-1} d^*(y).$$

Sabemos por el Teorema 2.4.5 que $\zeta(\widehat{\Phi}, \chi^{-1}, s)$ debe reducirse a un monomio en q^s, entonces solamente uno de los coeficientes z_m es no nulo. El primero es

$$z_{-n} = \int_{U_K} \psi(\alpha u)\chi^{-1}(\alpha u) d^*(u),$$

para cualquier $\alpha \in K^\times$ con $v_K(\alpha) = -n$. El integrando es constante sobre los cosets de U_K^{n+1}, luego se tiene que la integral se reduce a

$$\int_{U_K} \psi(\alpha u)\chi^{-1}(\alpha u) d^*(u) = \mu^*(U_K^{n+1}) \sum_{x \in U_K / U_K^{n+1}} \chi(\alpha x)^{-1}\psi(\alpha x).$$

Finalmente probemos la siguiente afirmación: los coeficientes z_m con $m \geqslant -n$ son todos cero. Para esto, tomemos $\beta \in K$ tal que $v_K(\beta) = m > -n$ y consideremos

$$z_m = \int_{U_K} \psi(\beta u)\chi(\beta u)^{-1} d^*(u).$$

Tomando $w \in U_K^n$ tenemos que

$$\int_{U_K} \psi(\beta u)\chi(\beta u)^{-1} d^*(u) = \int_{U_K} \psi(\beta u w)\chi(\beta u w)^{-1} d^*(u).$$

Escribiendo $w = 1 + y$, el primer factor se reduce a $\psi(\beta u)\psi(\beta u y) = \psi(\beta u)$, pues $\beta u y \in \mathfrak{P}^{m+n} \subset \mathfrak{P} \subset \operatorname{Ker}\psi$. Entonces

$$\int_{U_K} \psi(\beta u)\chi(\beta u)^{-1} d^*(u) = \chi(w)^{-1} \int_{U_K} \psi(\beta u)\chi(\beta u)^{-1} d^*(u).$$

Si elegimos w tal que $\chi(w) \neq 1$ podemos concluir que $z_m = 0$. Esto prueba la afirmación y concluye la demostración del teorema. $\square$

Proposición 2.4.10. *Supongamos que χ tiene nivel $n \geqslant 1$. Sea $c \in K$ tal que*

$$\chi(1+x) = \psi(cx), \quad x \in \mathfrak{P}^{[n/2]+1}.$$

Entonces

$$\tau(\chi,\psi) = q^{[(n+1)/2]} \sum_{y \in U_K^{[(n+1)/2]}/U_K^{[n/2]+1}} \check{\chi}(cy)\psi(cy).$$

Demostración. En la Sumatoria que define a $\tau(\chi,\psi)$ escribimos $x = y(1+z)$ con $y \in U_K/U_K^{[n/2]+1}$ y $z \in \mathfrak{P}^{[n/2]+1} / \mathfrak{P}^{n+1}$. Tenemos que

$$\check{\chi}(cy(1+z))\psi(cy(1+z)) = \check{\chi}(cy)\psi(cy)\psi(c(y-1)z).$$

Sumando obtenemos:

$$\tau(\chi,\psi) = \sum_y \check{\chi}(cy)\psi(cy) \sum_z \psi(c(y-1)z).$$

La función $z \mapsto \psi(c(y-1)z)$ es un caracter de $\mathfrak{P}^{[n/2]+1} / \mathfrak{P}^{n+1}$, pues $c(y-1) \in \mathfrak{P}^{-n}$. Es el caracter trivial si y solo si $y \equiv 1 \mod \mathfrak{P}^{n-[n/2]}$, o sea, si y solo si $y \in U_K^{[(n+1)/2]}$. Con lo cual la sumatoria de adentro se anula salvo cuando $y \in U_K^{[(n+1)/2]}$, en cuyo caso toma el valor $(\mathfrak{P}^{[n/2]+1} : \mathfrak{P}^{n+1}) = q^{[(n+1)/2]}$. □

2.5. Representaciones suaves de grupos localmente profinitos

Definición 2.5.1. Una **representación** de un grupo G en un espacio vectorial V sobre un cuerpo F es un morfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(V)$. La denotaremos como un par (ρ, V).

Un morfismo entre representaciones (ρ, V) y (σ, W), es una transformación F-lineal f entre V y W tal que

$$f \circ \rho = \sigma \circ f.$$

Vamos a denotar al conjunto de morfismos de representaciones entre (ρ, V) y (σ, W) como $\mathrm{Hom}_G((\rho, V), (\sigma, W))$ o simplemente $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ cuando esté claro quienes son las representaciones de V y W.

Definición 2.5.2. Decimos que una representación (π, V) es **suave** si para todo $v \in V$ existe un subgrupo abierto compacto K de G tal que $\pi(x)v = v$ para todo $x \in K$.

Vamos a denotar como V^K al subespacio de vectores $v \in V$ fijos por $\pi(x)$ para todo $x \in K$, y G_v al subgrupo de G de elementos que dejan fijo a $v \in V$.

Proposición 2.5.3. *Sea (π, V) una representación. Las siguientes definiciones son equivalentes:*

(I) *La representación es suave.*

(II) *Para todo $v \in V$, el estabilizador de v es abierto en G.*

(III) *Se tiene que $V = \bigcup_K V^K$, recorriendo los subgrupos abiertos compactos de G.*

(IV) *La acción*

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

es continua, pensando a V con la topología discreta.

Demostración.

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Que (i) implica (ii) es inmediato. Recíprocamente, dado $v \in V$, el estabilizador de v es un subgrupo abierto, luego contiene un subgrupo abierto compacto porque G es un grupo localmente profinito.
- $(i) \Leftrightarrow (iii)$ Es inmediato.

- $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ Veamos primero la implicación $(ii) \Rightarrow (iv)$. Sea $w \in V$, tenemos que ver que la preimagen de w vía $G \times V \longrightarrow V$ es abierta, pero este conjunto se puede escribir como unión de conjuntos abiertos:

$$\{ (g, v) \mid g \cdot v = w \} = \bigcup_{g \in G} g G_{g^{-1}w} \times \{g^{-1}w\}.$$

  Recíprocamente, como el conjunto $G \times \{v\}$ es abierto para todo $v \in V$, luego también lo es el estabilizador de v, pues este se puede escribir como

$$\pi_1 \left(G \times \{v\} \cap \mathrm{mult}^{-1}(\{v\}) \right),$$

  donde π_1 es la proyección del producto cartesiano a la primera coordenada y mult es la acción $G \times V \longrightarrow V$.

□

En general, si F es un cuerpo topológico y V es un F-espacio vectorial de dimensión finita n, entonces se puede definir una topología en $\mathrm{Aut}_F(V)$. Solamente hay que fijar una base de V e identificar a $\mathrm{Aut}_F(V)$ con $\mathrm{GL}_n(F)$ y transferir la topología de este último. Es fácil ver que la topología no depende de la base de V elegida. La topología de $\mathrm{GL}_n(F) \subset F^{n \times n}$ es la subespacio y $F^{n \times n}$ posee la topología producto.

Proposición 2.5.4. *Si V tiene además dimensión finita entonces tenemos que las definiciones anteriores equivalen a*

(v) *El morfismo $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(V)$ es continuo con la topología discreta de F.*

(vi) *El núcleo de ρ es abierto.*

Además, si $F = \mathbb{C}$, o sea si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces las definiciones anteriores son también equivalentes a

(vi) *El morfismo $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ es continuo.*

Demostración.

- $(v) \Leftrightarrow (vi)$ Por un lado si ρ es continuo con la topología de F discreta entonces $\mathrm{Ker}\,\rho = \rho^{-1}(\{1\})$ es abierto. Por otro lado si el núcleo de ρ es abierto entonces la preimagen de cualquier conjunto es abierta pues se puede escribir como unión de trasladados de $\mathrm{Ker}\,\rho$.

- $(ii) \Leftrightarrow (v)$ Vamos a probar que $(ii) \Leftrightarrow (vi)$. Si el núcleo es abierto, en particular el estabilizador de cualquier vector $v \in V$ es abierto, pues contiene al núcleo que es un subgrupo abierto. Recíprocamente, si todos los estabilizadores son abiertos, entonces intersecando los estabilizadores de finitos vectores de V que conformen una base obtenemos un subgrupo abierto de G, que está contenido en el núcleo, luego el núcleo también es un subgrupo abierto de G.

- $(v) \Leftrightarrow (vii)$ Ver que (v) implica (vii) es sencillo. Para ver la vuelta, basta probar que (vii) implica (vi) pues ya vimos que esto implica (v). En efecto, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie complejo y por ende no tiene subgrupos pequeños (ver el Lema 3.1.1), i.e. existe un abierto $1 \in U \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ que no contiene subgrupos no triviales. Tenemos que $1 \in \rho^{-1}(U)$ es abierta, luego contiene un subgrupo abierto H, veamos que $H \subset \mathrm{Ker}(\rho)$, y en consecuencia el núcleo será abierto. En efecto, $\rho(H) \subset U$ es un subgrupo de U, entonces debe ser que $\rho(H) = \{1\}$.

□

En el Ejemplo 3.6.2 falla la proposición anterior cuando $F = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Definición 2.5.5. Una representación suave (π, V) se dice **admisible** si el espacio V^K es de dimensión finita, para todo subgrupo abierto compacto K de G.

Sea (π, V) una representación suave de G, luego todo subespacio G-estable nos provee de otra representación suave de G. De la misma manera, si U es un G-subespacio de V, nos induce una representación suave V/U que se define de manera natural en el cociente.

Definición 2.5.6. Decimos que (π, V) es **irreducible** si $V \neq 0$ y V no tiene subespacios G-estables U tal que $0 \neq U \neq V$.

Para dos representaciones suaves (π_i, V_i) de G, definimos $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ como el espacio de F-transformaciones lineales $f : V_1 \longrightarrow V_2$ que conmutan con la acción de G:

$$f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f.$$

Con estas definiciones, la clase representaciones suaves de G forman una categoría abeliana $\mathrm{Rep}(G)$.

Decimos que dos representaciones suaves (π_i, V_i), $i = 1, 2$ de G son **isomorfas** o **equivalentes**, si existe un F-isomorfismo lineal $f \in \mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$.

Ejemplo 2.5.7. Un caracter χ de G (ver 2.3.10) se puede mirar como una representación $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$. La representación $(\chi, \mathbb{C})$ es suave. Además, una representación de dimensión 1 de G es suave si y solo si es equivalente a una representación definida por un caracter de G.

Lema 2.5.8. *Sea G un grupo compacto, y sea (π, V) una representación suave. Entonces para todo $v \in V$ existe un G-subespacio W_v de dimensión finita que lo contiene. Más aún, existe un subgrupo normal abierto compacto K de G tal que W_v es una representación del grupo finito discreto G/K.*

Demostración. Sea $v \in V$, por suavidad existe un subgrupo abierto compacto $K \subset G$ tal que $v \in V^K$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que K es normal, pues podemos cambiar K por $\bigcap_{g \in G/K} gKg^{-1}$. Notar que la intersección es finita porque G es compacto y K es abierto, entonces tiene finitas coclases, con lo cual la intersección es abierta. Más aún, la intersección es un subgrupo normal compacto de G.

Consideremos el subespacio vectorial W_v generado por el conjunto finito $\{\, \rho(g)v \mid g \in K \backslash G \,\}$, este subespacio contiene a v, más aún, es G-invariante.

Notar que K actúa trivialmente sobre W_v, pues si $\rho(g)v$ es uno de los finitos generadores, entonces

$$\rho(k)\rho(g)v = \rho(g)\rho(g^{-1}kg)v = \rho(g)v, \quad \forall k \in K.$$

Con lo cual cocientando por K la acción induce una representación del grupo discreto G/K en W_v. □

Proposición 2.5.9. *Sea G un grupo compacto, y sea (π, V) una representación suave irreducible de G. Entonces V es un espacio de dimensión finita.*

Demostración. Sea $v \in V \smallsetminus \{0\}$, por el lema anterior existe un G-subespacio de dimensión finita W_v que contiene a v. Como $v \neq 0$, el subespacio W_v es no trivial, luego por irreducibilidad debe ser todo el espacio V. □

Definición 2.5.10. Sea (π, V) una representación suave de un grupo profinito G. Diremos que $W \subset V$ es un G-subespacio si es un subespacio vectorial de V que también es G-invariante.

Si U y W son dos G-subespacios de V tales que $V = U \oplus W$, diremos que W es un G-complemento de U en V.

Proposición 2.5.11. *Sea G un grupo arbitrario, y (π, V) de G sobre un cuerpo K. Son equivalentes:*

(I) *V es suma de sus G-subespacios irreducibles.*

(II) *V es suma directa de una familia de G-subespacios irreducibles.*

(III) *Todo G-subespacio de V tiene un G-complemento en V.*

Demostración. La demostración de $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ es una aplicación del lema de Zorn (para ver una demostración completa se puede consultar la Proposición 2.2. del libro [BH06]). Veamos solamente $(iii) \Rightarrow (i)$. Sea V_0 la suma de todos los G-subespacios irreducibles de V, supongamos que V no se escribe como suma de G-subespacios irreducibles, luego por hipótesis se puede escribir $V = V_0 \oplus W$, para algún G-subespacio W de V no trivial. Por definición, W no contiene ningún G-subespacio irreducible. Sin embargo, existe un G-subespacio W_1 de W que es finitamente G-generado, simplemente tomamos el G espacio generado por un vector no nulo. Por el lema de Zorn, W_1 tiene un G-subespacio propio W_0 maximal, luego W_1/W_0 es una representación irreducible. Nuevamente por hipótesis, podemos escribir $V = V_0 \oplus W_0 \oplus U$, con U un

G-complemento de $V_0 \oplus W_0$, y tenemos la G-proyección $V \longrightarrow U$. La imagen de W_1 en U es un G-subespacio irreducible de U, pues la proyección induce un isomorfismo con W_1/W_0. Luego W_1 es un G-subespacio irreducible de V contenido en W, lo cual es absurdo. □

Definición 2.5.12. Decimos que (π, V) es una representación G**-semisimple** si satisface alguna de las tres condiciones equivalentes de la anterior proposición.

A diferencia del caso profinito, un grupo G localmente profinito en general puede tener representaciones no semisimples. Sin embargo, si restringimos la representación a cualquier subgrupo abierto compacto K de G, la representación va a seguir siendo suave, y además va a ser semisimple, pues vamos a tener una representación de un grupo profinito:

Proposición 2.5.13. *Sea G un grupo profinito. Sea (π, V) una representación suave de G sobre un F-espacio vectorial con F algebraicamente cerrado y* $\mathrm{char}(F) = 0$. *Entonces (π, V) es semisimple.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.11 basta probar que V es suma de G-subespacios irreducibles, con lo cual basta probar que para cualquier $v \in V$ arbitrario, existe un G-subespacio que sea suma de irreducibles, conteniendo a v.

En efecto, por el Lema 2.5.8 existe un G-subespacio de dimensión finita W_v que contiene a v, más aún, existe un subgrupo normal abierto compacto $K \subset G$ tal que W_v es una representación del grupo finito G/K. Por el Corolario 1.6. de [FH13] W_v es suma de representaciones irreducibles. □

A partir de ahora, cada vez que usemos esta proposición que habla de semisimplicidad, vamos a estar asumiendo que F cumple las hipótesis del enunciado anterior.

Definición 2.5.14. Sea G localmente profinito y K subgrupo abierto compacto. Denotamos como $\widehat{K}$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones suaves irreducibles de K. Si $\rho \in \widehat{K}$ y (π, V) es una representación suave de G, definimos **la componente ρ-isotípica** V^ρ de V a la suma directa de todas los K-subespacios irreducibles de V equivalentes a ρ.

Notar que en particular, V^K es la componente 1_K-isotípica de V, donde 1_K es la representación trivial de K.

Proposición 2.5.15. *Sea (π, V) una representación suave de G y K un subgrupo abierto compacto. Entonces*

(I) V es la suma directa de sus componentes K-isotípicas:

$$V = \bigoplus_{\rho \in \widehat{K}} V^\rho.$$

(II) Sea (σ, W) otra representación suave de G. Sea $\rho \in \widehat{K}$, entonces todo morfismo de G-representaciones $f : V \longrightarrow W$ es compatible con las componentes ρ-isotípicas:

$$f(V^\rho) \subset W^\rho \quad y \quad W^\rho \cap f(V) = f(V^\rho).$$

Demostración. El primer ítem es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.5.13. La segunda parte sale de que si restringimos a f en las componentes K-irreducibles entonces f es trivial o un isomorfismo de K-representaciones, con lo cual cada sumando de V^ρ es trivial o cae en un sumando de W^ρ. Para ver que $W^\rho \cap f(V) = f(V^\rho)$, solo se necesita probar una inclusión porque la otra es inmediata de que $f(V^\rho) \subset W^\rho$. Si $w \in W^\rho \cap f(V)$ entonces existe $v \in V$ tal que $w = f(v)$, además $v \in V^\rho$, de lo contrario, w pertenecería a una componente isotípica distinta porque la imagen de las componentes isotípicas caen en la misma componente. □

Corolario 2.5.16. *Sean α y β dos morfismos de G-representaciones suaves, entonces la sucesión*

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$$

es exacta si y solo si

$$U^K \xrightarrow{\alpha} V^K \xrightarrow{\beta} W^K$$

es exacta para todo subgrupo abierto compacto K de G.

Demostración. La implicación se deduce del ítem (ii) de la proposición anterior. La vuelta se deduce de que para un $v \in V$ arbitrario existe un subgrupo abierto compacto $K \subset G$ tal que $v \in V^K$, por suavidad. $\square$

Definición 2.5.17. Sea H un subgrupo de G, definimos como $V(H)$ al subespacio lineal generado por

$$\{ v - \pi(h)v \mid v \in V, h \in H \}.$$

En particular, $V(H)$ es un H-subespacio de V.

Corolario 2.5.18. *Sea G un grupo localmente profinito y (π, V) una representación suave. Sea K un subgrupo abierto compacto de G. Luego*

$$V(K) = \bigoplus_{\substack{\rho \in \widehat{K}, \\ \rho \neq 1_K}} V^\rho, \quad V = V^K \oplus V(K),$$

y $V(K)$ es el único K-complemento de V^K en V.

2.5.1. Los vectores suaves de una representación

Sea (π, V) una representación abstracta (i.e. no necesariamente suave) de G. Definimos

$$V^\infty := \bigcup_K V^K,$$

con K recorriendo todos los subgrupos abiertos compactos de G. Se tiene que V^∞ es un subespacio G-estable de V. Más aún, si restringimos π al subespacio V^∞ obtenemos una representación (π^∞, V^∞) suave de G. Esto nos induce un funtor entre la categoría de representaciones abstractas de G y la categoría de representaciones suaves. De hecho es un funtor exacto a izquierda, pero no necesariamente a derecha.

Si (π, V) es suave y (σ, W) no necesariamente lo es, entonces para todo morfismo de representaciones $f : V \longrightarrow W$ se tiene que $f(V) \subset W^\infty$, y por lo tanto $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}_G(V, W^\infty)$.

2.5.2. La representación inducida

Sea G un grupo localmente profinito y H un subgrupo cerrado de G (en particular también es localmente profinito).

Sea (σ, W) una representación suave de H. Consideramos el espacio vectorial X de funciones $f : G \longrightarrow W$ que satisfacen $f(hg) = \sigma(h)f(g)$, $h \in H, g \in G$. Además tiene una estructura de G-representación abstracta:

$$\begin{aligned} \Sigma : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(X) \\ \Sigma(g)f : x &\longmapsto f(xg) \end{aligned}$$

Esta representación abstracta nos induce una representación suave

$$\mathrm{Ind}_H^G \sigma = (\Sigma, X^\infty).$$

Notar que por construcción, para todo $f \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ existe un subgrupo compacto abierto K de G tal que $f(gk) = f(g)$ para todo $g \in G, k \in K$. O sea, $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ es una representación suave de G.

Así construimos un funtor $\mathbf{Rep}(H) \longrightarrow \mathbf{Rep}(G)$ que manda σ en $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ y a $\phi \in \mathrm{Hom}_H((\pi, V), (\sigma, W))$ lo manda a la composición $\phi_* \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \rho, \mathrm{Ind}_H^G \sigma)$.

Tenemos el H-morfismo

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma : \mathrm{Ind}_H^G \sigma &\longrightarrow W, \\ f &\longmapsto f(1). \end{aligned}$$

Se tiene el siguiente teorema, nos dice que el funtor es adjunto a derecha del funtor restricción:

Teorema 2.5.19 (Reciprocidad de Frobenius). *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo localmente profinito G. Sea (σ, W) una representación suave de H y (π, V) una representación suave de G. Se tiene el siguiente isomorfismo natural en las variables π y σ*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G\left(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \sigma\right) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_H\left(\pi|_H, \sigma\right), \\ \phi &\longmapsto \alpha_\sigma \circ \phi, \end{aligned}$$

Demostración. Vamos a construir solamente el morfismo inverso, la naturalidad es fácil de chequear. Sea $f \in \mathrm{Hom}_H\left(\pi|_H, \sigma\right)$, $f_* \in \mathrm{Hom}_G\left(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \sigma\right)$ como $f_*(v)(g) = f(\pi(g)v)$. □

Una observación simple pero útil es que $\alpha_\sigma(V) \neq 0$ para todo G-subespacio V de $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$.

Se tiene también la siguiente propiedad:

Proposición 2.5.20. *El funtor $\mathrm{Ind}_H^G : \boldsymbol{Rep}(H) \longrightarrow \boldsymbol{Rep}(G)$ es aditivo y exacto.*

Demostración. Sea (σ, W) una representación suave de H, denotemos como $X(\sigma)$ al espacio de funciones $G \longrightarrow W$ que satisfacen $f(hg) = \sigma(h)f(g)$ como en la definición de la representación $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$. Por ende, X es un funtor de la categoría de representaciones suaves de H a la categoría de representaciones abstractas de G. Claramente es un funtor aditivo y exacto, además $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = X(\sigma)^\infty$. Con lo cual Ind_H^G es un funtor aditivo y exacto a izquierda ya que $V \mapsto V^\infty$ lo es.

Para probar la exactitud a derecha, sean $(\sigma, W), (\tau, U)$ representaciones suaves de H y sea $f : W \longrightarrow U$ un H-morfismo sobreyectivo, queremos probar que f_* es sobreyectivo. Sea $\phi \in X(\tau)^\infty$, tomemos un subgrupo abierto compacto K de G que fije ϕ. El soporte de ϕ es la unión de coclases dobles HgK y el valor $\phi(g) \in U$ debe quedar fijo por $\tau(H \cap gKg^{-1})$. Por el Corolario 2.5.16 aplicado a H y a la representación trivial de su subgrupo abierto compacto $H \cap gKg^{-1}$, se tiene que existe $\omega_g \in W$ fijo por $\sigma(H \cap gKg^{-1})$ tal que $f(\omega_g) = \phi(g)$. Definamos la función $\Phi : G \longrightarrow W$ que tenga el mismo soporte que ϕ y tal que $\Phi(hgk) = \sigma(h)\omega_g$, para cada $g \in H\backslash \mathrm{supp}\,(\phi)\,/K$. La función Φ queda fija por K, por ende está en $X(\sigma)^\infty$. Su imagen en $X(\tau)^\infty$ vía f_* es ϕ, como $\phi \in X(\tau)^\infty$ era arbitrario, se tiene que f_* también es sobreyectiva, como queríamos. □

2.5.3. Inducción compacta

Existe una ligera variación de la inducción. Sea (σ, W) y X como en la Sección 2.5.2, consideramos ahora el subespacio X_c de funciones $f \in X^\infty$ de soporte compacto módulo H: la imagen del soporte de f en $H\backslash G$ es compacto, equivalentemente, $\mathrm{supp}\,(f) \subset HC$, para algún conjunto compacto $C \subset G$. El espacio X_c es G-estable y nos provee de otra representación suave de G. Denotamos a esta representación como $c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G \sigma$, al igual que la inducción nos provee de un funtor

$$c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G : \mathbf{Rep}(H) \longrightarrow \mathbf{Rep}(G).$$

Vamos a llamar a este funtor **inducción compacta** o **inducción suave con soporte compacto**. Como antes, este funtor es aditivo y exacto.

Proposición 2.5.21. *El funtor $c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G$ es aditivo y exacto.*

Demostración. Es muy parecido a la Proposición 2.5.20. □

Existe un monomorfismo canónico de G-representaciones $c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G \sigma \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G \sigma$. De hecho es un funtor, que se vuelve una equivalencia natural de categorías si y solo si $H\backslash G$ es compacto. Sin embargo, si miramos solamente el morfismo $c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G \sigma \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G \sigma$, este puede ser isomorfismo en algunos casos sin necesidad de que $H\backslash G$ sea compacto. Ver por ejemplo la sección 11.4 de [BH06].

La inducción compacta nos interesa mayoritariamente cuando H es un subgrupo abierto de G. En cuyo caso, existe un H-morfismo canónico

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma^c : W &\longrightarrow c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G \sigma, \\ w &\longmapsto f_w, \end{aligned}$$

con $f_w \in X_c$ de soporte compacto en H y $f_w(h) = \sigma(h)w$, $h \in H$.

Lema 2.5.22. *Sea H un subgrupo abierto de G y (σ, W) una representación suave de H. Se tiene lo siguiente:*

(1) $\alpha_\sigma^c : w \longmapsto f_w$ es un H-isomorfismo de W con el subespacio de las funciones $f \in c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subset H$.

(2) Sea $\mathcal{W}$ una base de W y $\mathcal{G}$ un conjunto de representantes de G/H. El conjunto

$$\{\, g \cdot f_w \mid w \in \mathcal{W},\ g \in \mathcal{G} \,\}$$

es una base de $c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma$.

Demostración. En el primer ítem, es inmediato ver que α_σ^c es un H-morfismo y cae en el espacio de funciones con soporte en H. Su inversa es $f \longmapsto f(1)$.

En el otro caso, el soporte de $f \in c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma$ es la unión finita de coclases Hg^{-1}, para algunos $g \in \mathcal{G}$, y la restricción de f a cualquiera de estas coclases yace en $c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma$. Entonces si tomamos $f' = f|_{Hg^{-1}}$, nos queda que $\operatorname{supp}(f') = Hg^{-1}$ y $g^{-1} \cdot f'$ tiene soporte en H, luego es combinación lineal de funciones f_w, $w \in \mathcal{W}$. Por supuesto que las funciones $g \cdot f_w$ son linealmente independientes. □

Para subgrupos abiertos la inducción compacta tiene su propia propiedad de reciprocidad de Frobenius:

Proposición 2.5.23. *Sea H un subgrupo abierto de G y (σ, W) una representación suave de H, y (π, V) una representación suave de G. El morfismo canónico*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma, \pi) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\sigma, \pi|_H), \\ f &\longmapsto f \circ \alpha_\sigma^c, \end{aligned}$$

es un isomorfismo natural en las variables σ y π.

Demostración. Sea ϕ un H-morfismo $W \longmapsto V$. Existe un único G-morfismo $\phi_* : c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma \longmapsto V$ tal que $\phi_*(f_w) = \phi(w)$, $w \in W$. El morfismo $\phi \longmapsto \phi_*$ es la inversa del morfismo entre los Hom. La naturalidad es sencilla de chequear. □

En este caso, estamos diciendo que restringir a H es un funtor adjunto a derecha de $c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G$. Notemos que cuando G es finito las construcciones de inducción que hicimos arriba coinciden con la inducción de representaciones de grupos finitos y se puede ver directamente.

2.5.4. Lema de Schur

Para lo que sigue es necesario tomar una restricción técnica en el grupo G. Para nosotros no nos presentará ningún problema a futuro, pues en los casos que vamos a utilizar grupos siempre va a valer:

Hipótesis 2.5.24. Para todo subgrupo compacto abierto $K \subset G$, el conjunto G/K es a lo sumo numerable.

Observemos que si pasa para al menos un subgrupo compacto abierto K entonces vale para cualquier otro K'. En efecto, $K \cap K'$ es también abierto compacto y de índice finito en K, luego el morfismo sobreyectivo $G/(K \cap K') \longmapsto G/K$ tiene fibras finitas en y $G/(K \cap K')$ es a lo sumo numerable, entonces G/K' también lo es. Una consecuencia de esta hipótesis es:

Lema 2.5.25. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G, luego la dimensión de V es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $v \in V$, $v \neq 0$, y sea K un subgrupo abierto compacto de G tal que $v \in V^K$. Como V es irreducible, el conjunto a lo sumo numerable $\{\, \pi(g)v \mid g \in G/K \,\}$ genera todo V. □

Esto nos permite generalizar el lema de Schur:

Teorema 2.5.26 (Lema de Schur)**.** *Si (π, V) es una representación suave irreducible de G, luego $\operatorname{End}_G(V) = \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathrm{End}_G(V)$, $\phi \neq 0$. La imagen y el núcleo de ϕ son subrepresentaciones de V, por lo tanto ϕ es un isomorfismo y tiene inversa. Por lo tanto, $\mathrm{End}_G(V)$ es un álgebra de división en $\mathbb{C}$.

Sea $v \in V$, $v \neq 0$ y K como recién, luego como V es irreducible, los trasladados por G/K de v generan todo el espacio y ϕ está únicamente determinado por su valor $\phi(v)$. En particular, el álgebra de endomorfismos tiene dimensión a lo sumo numerable. Ahora, debe ser que ϕ es una constante compleja, de lo contrario ϕ sería trascendente sobre $\mathbb{C}$ y generaría un cuerpo $\mathbb{C}(\phi) \subset \mathrm{End}_G(V)$ que contiene propiamente a $\mathbb{C}$. Esto es absurdo porque el conjunto no numerable $\{ (\phi - \lambda)^{-1} \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$ en $\mathbb{C}(\phi)$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, pero dijimos que la dimensión era a lo sumo numerable. □

Observación 2.5.27. En la demostración anterior se podía cambiar a $\mathbb{C}$ por cualquier otro cuerpo no numerable y algebraicamente cerrado, por ejemplo $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Corolario 2.5.28. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. El centro Z de G actúa sobre V vía el caracter $\omega_\pi : Z \longmapsto \mathbb{C}^\times$, eso es, $\pi(z)v = \omega_\pi(z)v$, para todo $v \in V$ y $z \in Z$.*

Demostración. Sea $z \in Z$, luego existe un único escalar $\omega_\pi(z) \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(z) = \omega_\pi(z)v$ para todo $v \in V$, ya que $\pi(z) \in \mathrm{End}_G(V)$ y usamos el Lema 2.5.26. Luego definimos $\omega_\pi : Z \longmapsto \mathbb{C}^\times$. Usando la unicidad del escalar se puede probar inmediatamente que ω_π es un morfismo. Solo faltaría chequear que es continuo, pero justamente si K es un abierto compacto de G que fija v, entonces ω_π es trivial en el subgrupo abierto compacto $K \cap Z$ de Z, con lo cual el núcleo es abierto en Z. Lo último equivale a que el caracter sea continuo gracias a la Proposición 2.3.9. □

Definición 2.5.29. Al caracter ω_π se lo llama **caracter central** de π.

Corolario 2.5.30. *Si G es abeliano, entonces toda representación suave irreducible de G es de dimensión 1.*

Observación 2.5.31. Si G es compacto, vale la vuelta del lema de Schur: si (π, V) es una representación suave y $\mathrm{End}_G(V)$ es de dimensión uno, entonces π es irreducible. En efecto, π es semisimple, luego se descompone en suma directa de representaciones irreducibles, de haber más de una componente irreducible, $\mathrm{End}_G(V)$ se descompondría en más de un subespacio de dimensión uno.

En general, la vuelta es falsa cuando G es localmente profinito. Por ejemplo ver la sección 9.10 de [BH06].

En el futuro necesitaremos una versión un poco más general de las construcciones anteriores.

Lema 2.5.32. *Sea G un grupo localmente profinito y H un subgrupo abierto de G con índice finito.*

(I) *Si (π, V) es una representación suave de G, luego V es G-semisimple si y solo si es H-semisimple.*

(II) *Sea (σ, W) una representación suave semisimple de H. La representación inducida $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ es G-semisimple.*

Demostración. Supongamos que V es H-semisimple, sea U un G-subespacio de V. Por hipótesis, existe un H-subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$. Sea $f : V \longmapsto U$ una H-proyección con núcleo W. Consideremos la transformación lineal

$$f^G : v \longmapsto [G : H]^{-1} \sum_{g \in G/H} \pi(g) f(\pi(g)^{-1} v), \quad v \in V.$$

Esta definición es independiente de los representantes que tomemos de cada coclase, se sigue que f^G es una G-proyección $V \longrightarrow U$. Entonces $V = U \oplus f^G$ y $\mathrm{Ker}\, f^G$ es un G-subespacio de V. Luego V es G-semisimple por la Proposición 2.5.11.

Recíprocamente, supongamos que V sea G-semisimple. Luego V es la suma directa de G-subespacios irreducibles (nuevamente por la Proposición 2.5.11), luego basta probar el caso cuando V es irreducible. Como representación de H, el espacio V es finitamente generado, luego admite un H-cociente irreducible U. Supongamos que por un momento H es un subgrupo normal de G. Tendríamos que por la reciprocidad de Frobenius 2.5.19, el H-morfismo $V \longrightarrow U$ induce un G-morfismo no trivial, en particular inyectivo, $V \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G U$. Como representación de H, la representación inducida $\mathrm{Ind}_H^G U = c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G U$ es suma directa de G-conjugados de U

(ver Lema 2.5.22). Estos son todos irreducibles sobre H, luego $\mathrm{Ind}_H^G U$ es H-semisimple. Luego la Proposición 2.5.11 implica que $V \subset \mathrm{Ind}_H^G U$ es H-semisimple.

En general, tomamos $H_0 = \bigcap_{g \in G/H} gHg^{-1}$, que es un subgrupo abierto normal de índice finito de G. Luego esto prueba que la subrepresentación V es H_0-semisimple y la primera parte de la demostración muestra que es H-semisimple. Con esto terminamos la demostración de (1), y (2) se sigue de los mismos argumentos. □

Apliquemos esto a lo siguiente, sea Z el centro de G y χ un caracter de Z. Consideremos la clase de representaciones suaves (π, V) de G que admitan a χ como caracter central, eso es

$$\pi(z)v = \chi(z)v, \quad v \in V, z \in Z.$$

Se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.5.33. *Sean (π, V) y χ como recién. Sea K un subgrupo abierto tal que KZ/Z es compacto. Entonces*

(1) Sea $v \in V$. El KZ-espacio generado por v es de dimensión finita, además es suma de KZ-subespacios irreducibles (i.e. es KZ-semisimple por la Proposición 2.5.11).

(2) Como representación de KZ, el espacio V es semisimple.

Demostración. Veamos primero (1), el vector v es fijado por un subgrupo abierto compacto de G, intersecando con K obtenemos un subgrupo abierto compacto K_0 de K. Entonces K_0Z es un subgrupo abierto y tiene índice finito en KZ, porque KZ/Z es compacto. El espacio W generado por $\pi(KZ)v$ se puede generar como espacio vectorial con finitos vectores: $\{\, \pi(g)v \mid g \in KZ/K_0Z \,\}$, luego tiene dimensión finita. Por supuesto que W es K_0Z-semisimple (tiene dimensión finita), luego el Lema 2.5.32 parte (1) nos dice que W es KZ-semisimple. Como v era arbitrario, V se escribe como suma de subespacios KZ-semisimples, luego por la Proposición 2.5.11 V es KZ-semisimple. □

2.5.5. La representación dual

Sea (π, V) una representación suave de un grupo localmente profinito G. Vamos a escribir $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, además tenemos el pairing:

$$\begin{aligned} V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (v^*, v) &\longmapsto \langle v^*, v \rangle. \end{aligned}$$

El espacio V^* posee una representación abstracta π^* de G que se define como

$$\langle \pi^*(g)v^*, v \rangle = \langle v^*, \pi(g^{-1})v \rangle, \quad g \in G, v^* \in V^*, v \in V.$$

Lamentablemente, (π^*, V^*) no tiene por qué ser una representación suave. Luego definimos la **representación contragradiente** o **representación dual suave** de (π, V):

$$\check{V} := (V^*)^\infty = \bigcup_{\substack{K \leqslant G \\ K \text{ abierto compacto}}} (V^*)^K,$$

con la acción de G:

$$\check{\pi} = (\pi^*)^\infty : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\check{V}).$$

La representación $(\check{\pi}, \check{V})$ sí es suave como lo indica su nombre. Seguimos teniendo un pairing $\check{V} \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $(\check{v}, v) \longmapsto \langle \check{v}, v \rangle$ y la acción de g está dada por

$$\langle \check{\pi}(g)\check{v}, v \rangle = \langle \check{v}, \pi(g^{-1})v \rangle, \quad g \in G, \check{v} \in \check{V}, v \in V.$$

Observemos lo siguiente. Si K es un subgrupo abierto compacto de G, recordemos que V^K tiene un único K-complemento $V(K)$ en V (ver 2.5.18). Si $\check{v} \in \check{V}$ es un funcional fijo por K, tenemos que $\langle \check{v}, V(K) \rangle = 0$ por la definición del K-espacio $V(K)$. Por lo tanto, si $\check{v} \in \check{V}^K$, entonces queda determinado por su valor en V^K.

Proposición 2.5.34. *La restricción a V^K induce un isomorfismo $\check{V}^K \cong (V^K)^*$.*

Demostración. Restringir $\check{v} \in \check{V}^K$ a V^K nos da un funcional de V^K y recíprocamente un funcional de V^K se extiende a $\check{V}^K$ definiéndolo como 0 en $V(K)$. □

Corolario 2.5.35. *Sea (π, V) una representación suave de G y sea $v \in V \setminus \{0\}$. Luego existe $\check{v} \in \check{V}$ tal que $\langle \check{v}, v \rangle \neq 0$.*

Sea (π, V) una representación suave de G. Podemos formar el contragradiente $(\check{\check{\pi}}, \check{\check{V}})$ de $(\check{\pi}, \check{V})$. Existe un G-morfismo canónico $\delta : V \longrightarrow \check{\check{V}}$ dado por

$$\langle \delta(v), \check{w} \rangle_{\check{V}} = \langle \check{w}, v \rangle_V, \quad v \in V, \check{w} \in \check{V}.$$

Por el corolario anterior δ es inyectivo.

Proposición 2.5.36. *Sea (π, V) como recién. El morfismo canónico δ es un isomorfismo si y solo si π es admisible.*

Demostración. El morfismo δ induce morfismos $\delta^K : V^K \longrightarrow \check{\check{V}}^K$ para todo subgrupo abierto compacto $K \subset G$ y δ es sobreyectivo si y solo si δ^K es sobreyectivo para todo K, gracias al Corolario 2.5.16. Si usamos la identificación de la Proposición 2.5.34, δ^K es el morfismo canónico $V^K \longrightarrow (V^K)^{**}$, el cual es sobreyectivo si y solo si $\dim V^K$ es finito. □

Sean ahora $(\pi, V), (\sigma, W)$ dos representaciones suaves de G y $f : V \longrightarrow W$ un G-morfismo. Definimos otro G morfismo $\check{f} : \check{W} \longrightarrow V$ dado por

$$\langle \check{f}(\check{w}), \check{v} \rangle = \langle \check{w}, f(v) \rangle, \quad \check{w} \in \check{W}, v \in V.$$

De esta manera, obtenemos un funtor *contravariante* de $\mathbf{Rep}(G)$ en sí mismo.

Lema 2.5.37. *El funtor*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Rep}(G) &\longrightarrow \boldsymbol{Rep}(G), \\ (\pi, V) &\longmapsto (\check{\pi}, \check{V}), \end{aligned}$$

es exacto.

Demostración. Sea una sucesión exacta corta de representaciones suaves (π_i, V_i):

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow V_1^K \longrightarrow V_2^K \longrightarrow V_3^K \longrightarrow 0,$$

es exacta para todo subgrupo abierto compacto $K \subset G$ por el Corolario 2.5.16. Luego tomando el funtor dual y usando la identificación de la Proposición 2.5.34 nos queda la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \check{V}_3^K \longrightarrow \check{V}_2^K \longrightarrow \check{V}_1^K \longrightarrow 0.$$

Finalmente el resultado se sigue del Corolario 2.5.16. □

De esto se deduce que en particular, si (π, V) es reducible entonces su contragradiente $(\check{\pi}, \check{V})$ es reducible. Más aún, cuando (π, V) es admisible, vale la vuelta:

Proposición 2.5.38. *Sea (π, V) una representación suave admisible de G. Luego (π, V) es irreducible si y solo si $(\check{\pi}, \check{V})$ es irreducible.*

Demostración. Si el contragradiente es reducible entonces $(\check{\check{\pi}}, \check{\check{V}})$ es reducible. Como (π, V) es admisible, es G-isomorfo al doble contragradiente por la Proposición 2.5.36. □

2.6. Medidas de Haar invariantes

Sea G un grupo localmente profinito. Consideremos $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ el espacio de funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de funciones localmente constantes y de soporte compacto.

Si f es como antes, la constancia local y la compacidad del soporte juntas implican que existen subgrupos abiertos compactos $K_1, K_2 \subset G$ tal que $f(k_1 x) = f(x) = f(xk_2)$, $\forall x \in G, k_i \in K_i, i = 1, 2$. En efecto, si $g \in S = \operatorname{supp}(f)$, existe un abierto $U_g \subset G$ que contiene a g y donde f es constante, como G es profinito, podemos suponer que U_g es abierto compacto, más aún, multiplicando a U_g a derecha por g^{-1}, podemos suponer que $U_g g^{-1}$ es un subgrupo de G. Consideremos $K_g = U_g g^{-1}$, es un subgrupo abierto compacto y se tiene que $K_g U_g \subset U_g$. Por compacidad podemos cubrir a S con finitos U_{g_i} con $i = 1, 2, \ldots, n$. Tomemos $K_1 = \bigcap_{i=1}^n K_{g_i}$, es un subgrupo abierto compacto, además si $x \in S$ entonces existe i_0 tal que $x \in U_{g_{i_0}}$ y por construcción $f(kx) = f(x)$ para todo $k \in K_1$. De la misma manera, podemos achicar K_1 para que $K_1 S^c \subset S^c$. Luego $f(kx) = f(x)$ para x arbitrario y para todo $k \in K_1$. Análogamente, podemos construir K_2 tal que $f(xk) = f(x)$ para todo $x \in G$ y $k \in K_2$. Tomando $K = K_1 \cap K_2$ se deduce que f es combinación lineal de funciones características en las coclases doble KxK.

El grupo G actúa sobre $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ por traslación a izquierda λ y por traslación a derecha ρ:

$$(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$
$$(\rho(g)f)(x) = f(xg),$$

Por lo visto recién, ambas acciones inducen G-representaciones suaves $(\lambda, \mathcal{C}_c^\infty(G))$, $(\rho, \mathcal{C}_c^\infty(G))$

Definición 2.6.1. Una integral de Haar a derecha en G es un funcional lineal no nulo

$$I : \mathcal{C}_c^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que:

(I) $I(\rho_g f) = I(f), g \in G, f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, y

(II) $I(f) \geqslant 0$ para todo $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, $f \geqslant 0$.

De manera similar definimos integrales de Haar a izquierda usando la traslación a izquierda λ en vez de ρ.

Ahora veremos que existen integrales de Haar a izquierda y derecha, y que respectivamente son únicas salvo un múltiplo positivo.

Proposición 2.6.2. *Existe una integral de Haar invariante a derecha $I : \mathcal{C}_c^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$. Más aún, un funcional lineal $I' : \mathcal{C}_c^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una integral de Haar a derecha si y solo si $I' = cI$, para algún $c > 0$.*

Demostración. Sea K un subgrupo abierto y compacto de G; denotamos como ${}^K\mathcal{C}_c^\infty(G)$ al espacio de funciones en $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ fijos por $\lambda(K)$. Vemos a este espacio como un G-espacio vía la traslación a derecha. Luego coincide exactamente con la representación de G inducida compactamente por la representación trivial 1_K en K:

$${}^K\mathcal{C}_c^\infty(G) = c\text{-}\operatorname{Ind}_K^G 1_K.$$

Lema 2.6.3. *Viendo a $\mathbb{C}$ como un G-espacio donde G actúa trivialmente, se tiene que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G \left({}^K\mathcal{C}_c^\infty(G), \mathbb{C}\right) = 1.$$

Luego existe un elemento no nulo $I_K \in \operatorname{Hom}_G \left({}^K\mathcal{C}_c^\infty(G), \mathbb{C}\right)$ tal que $I_K(f) \geqslant 0$ para todo $f \geqslant 0$. Si h_K es la función característica de K, entonces $I_K(h_K) > 0$.

Demostración. Por reciprocidad de Frobenius 2.5.23 vale la primera afirmación. Sea $g \in G$, denotemos como e_g a la función característica de Kg. el conjunto de funciones $f_g, g \in K\backslash G$ forma una base como espacio vectorial de ${}^K\mathcal{C}_c^\infty(G)$ por el Lema 2.5.22. Luego el funcional $I_K : e_g \mapsto 1$ cumple lo requerido, notando que $h_K = e_1$. $\square$

Tomemos ahora una sucesión decreciente $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ de subgrupos abiertos compactos K_n de G tal que $\bigcap_{n\geqslant 1} K_n = \{1\}$. Luego tenemos que

$$(\pi, V) = \bigcup_{n\geqslant 1} {}^{K_n}\mathcal{C}_c^\infty(G).$$

Para cada $n \geqslant 1$, existe un único funcional G-invariante a derecha I_n en ${}^{K_n}\mathcal{C}_c^\infty(G)$ que manda la función característica de K_n en $[K_1 : K_n]^{-1}$ por el lema anterior. Luego $I_{n+1}|_{{}^{K_n}\mathcal{C}_c^\infty(G)} = I_n$ (pronto justificaremos esto), con lo cual la familia $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ define un funcional en todo el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ y cumple la definición de integral de Haar a derecha. Esto prueba la existencia.

Por otro lado, para todo $n \geqslant 1$ existe c_n tal que $I' = c_n I$ en ${}^{K_n}\mathcal{C}_c^\infty(G)$ por el lema anterior. Como $h_{K_1} = \sum_{g\in K_1} \rho_g h_{K_n}$, se tiene que por invarianza a derecha de las integrales:

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{I'(h_{K_1})}{I(h_{K_1})} &= \frac{I'\left(\sum_{g\in K_1} \rho_g h_{K_n}\right)}{I\left(\sum_{g\in K_1} \rho_g h_{K_n}\right)} \\ &= \frac{[K_1 : K_n] I'(h_{K_n})}{[K_1 : K_n] I(h_{K_n})} \\ &= \frac{I'(h_{K_n})}{I(h_{K_n})} = c_n, \quad \forall n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Con lo cual $I' = cI$ con $c = c_1$. Observemos que una cuenta muy parecida muestra que $I_{n+1}|_{{}^{K_n}\mathcal{C}_c^\infty(G)} = I_n$ si evaluamos en h_{K_n}, y eso basta para probar la igualdad en general.

Además I' no es trivial en algún $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Luego existe un subgrupo abierto compacto K tal que $f(Kx) = f(x)$ para todo $x \in G$. Achicando a K podemos suponer que $K = K_n$ para algún $n \geqslant 1$. Escribiendo a f como combinación lineal de funciones características h_{Kg} con finitos $g \in \operatorname{supp}(f)$, se ve que existe un g tal que $0 < I'(h_{Kg}) = I'(\rho_{g^{-1}} h_K) = I'(h_K)$. Luego $c = c_n = \frac{I'(h_{K_n})}{I(h_{K_n})} > 0$. Probando la unicidad. □

Observación 2.6.4. El lema también implica que si miramos $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ como una representación suave de G vía la traslación a derecha entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Hom}_G\left(\mathcal{C}_c^\infty(G), \mathbb{C}\right) = 1.$$

Se puede probar la existencia y unicidad de la integral de Haar a izquierda de una manera análoga, pero también podemos usar la dualidad de las representaciones suaves:

Corolario 2.6.5. *Sea $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, definimos $\check{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ como $\check{f}(g) = f(g^{-1})$, $g \in G$. Fijemos I una integral de Haar a derecha como antes. Se tiene luego el funcional*

$$\begin{aligned} I' : \mathcal{C}_c^\infty(G) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ f &\longmapsto I(\check{f}), \end{aligned}$$

es una integral de Haar a izquierda de G. Más aún, toda integral de Haar a izquierda es de la forma cI' con $c > 0$.

Demostración. La unicidad sale de la proposición anterior observando que si J es una integral de Haar a izquierda entonces $f \longmapsto J(\check{f})$ es una integral de Haar a derecha. La existencia es inmediata. □

Sea I una integral a izquierda de Haar. Sea $S \neq \varnothing$ un conjunto abierto compacto de G y sea Γ_S la función característica en S. Definimos

$$\mu_G(S) := I(\Gamma_S).$$

La medida μ_G es invariante a izquierda: $\mu_G(gS) = \mu_G(S)$, $\forall g \in G$, y tenemos que $\mu_G(S) > 0$.

Decimos que μ_G es una **medida de Haar a izquierda de G**. Se tiene que

$$I(f) = \int_G f(g) d\mu_G(g), \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(G).$$

Además vamos a abreviar

$$\int_G \Gamma_S(g) f(g) d\mu_G(g) = \int_S f(g) d\mu_G(g).$$

Análogamente definimos medidas a derecha e integrales.

Definición 2.6.6. Decimos que G es **unimodular** si toda integral de Haar a izquierda en G es una integral de Haar a derecha.

Esta definición es lo mismo que decir que la medida de Haar a izquierda lo sea a derecha.

2.6.1. Integración

Se puede extender el dominio de integración de una medida de Haar, veremos un par de ejemplos que nos serán útiles.

Primero, sea $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función G invariante por traslación a izquierda por un subgrupo abierto compacto $K \subset G$. Sea μ_G una medida de Haar a izquierda en G. Si la serie

$$\sum_{g \in K \backslash G} \int_{Kg} |f(x)| d\mu_G(x)$$

converge, luego converge la serie sin el valor absoluto y definimos

$$\int_G f(x) d\mu_G(x) := \sum_{g \in K \backslash G} \int_{Kg} f(x) d\mu_G(x).$$

Esta definición no depende de la elección de K, extiende la integral de Haar y mantiene la propiedad de invariancia por traslación a izquierda.

Después, si G_1, G_2 son dos grupos localmente profinitos, entonces $G = G_1 \times G_2$ es también localmente profinito. Un elemento $\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} f_i^1 \otimes f_i^2$ del producto tensorial $\mathcal{C}_c^\infty(G_1) \otimes \mathcal{C}_c^\infty(G_2)$ nos induce una función en G mediante la fórmula

$$\Phi(g_1, g_2) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} f_i^1(g_1) f_i^2(g_2).$$

Se tiene que $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ y de hecho define un isomorfismo $\mathcal{C}_c^\infty(G_1) \otimes \mathcal{C}_c^\infty(G_2) \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Sea μ_j una medida de Haar a izquierda en $G_j, j = 1, 2$. Luego existe una única medida de Haar a izquierda μ_G en G tal que

$$\int_G f_1 \otimes f_2(g) d\mu_G(g) = \int_{G_1} f_1(g_1) d\mu_{G_1}(g_1) \int_{G_2} f_2(g_2) d\mu_{G_2}(g_2),$$

para $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Escribimos $\mu_G = \mu_{G_1} \otimes \mu_{G_2}$.

En general, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, la función

$$f_1(g_1) = \int_{G_2} f(g_1, g_2) d\mu_{G_2}(g_2)$$

está en $\mathcal{C}_c^\infty(G_1)$. Además se tiene que

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \int_{G_1} f_1(g_1) d\mu_{G_1}(g_1).$$

Luego, sea V un espacio vectorial complejo, consideremos el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(G; V)$ de funciones localmente constantes, de soporte compacto $f : G \longrightarrow V$. Este espacio es isomorfo a $\mathcal{C}_c^\infty(G) \otimes V$:

$$\sum_i f_i \otimes v_i \longmapsto \left(g \mapsto \sum_i f_i(g) v_i \right).$$

Si μ_G es una medida de Haar a izquierda en G, luego existe una única transformación lineal $I_V : \mathcal{C}_c^\infty(G;V) \longrightarrow V$ tal que

$$I_V(f \otimes v) = \int_G f(g) d\mu_G(g) \cdot v.$$

Escribimos entonces

$$I_V(\phi) = \int_G \phi(g) d\mu_G(g), \quad \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G;V).$$

Esta integral tiene las misma propiedades de invarianza que la integral de Haar para funciones de valores escalares.

Sea μ_G como antes, y sea $g \in G$, consideremos el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^\infty(G) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ f &\longmapsto \int_G f(xg) d\mu_G(x). \end{aligned}$$

Este funcional es otra integral de Haar a izquierda en G, luego por la Proposición 2.6.2 existe un único $\delta_G(g) \in \mathbb{R}_+^\times$ tal que

$$\delta_G(G) \int_G f(xg) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x),$$

para todo $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Se tiene que δ_G es un morfismo de grupos $G \longmapsto \mathbb{R}_+^\times$. Es trivial si G es abeliano, de hecho es trivial si y solo si G es unimodular.

Tomando f como la función característica de un subgrupo abierto compacto K de G, vemos que δ_G es trivial en K, por lo tanto δ_G es un caracter de G (ver Proposición 2.3.10). En particular si G es profinito, es unimodular, pues δ_G es trivial en G. Llamamos a δ_G el **módulo de** G.

El funcional

$$f \longmapsto \int_G \delta_G(x)^{-1} f(x) d\mu_G(x), \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

es una integral de Haar a derecha en G.

Sea H un subgrupo cerrado de G, con módulo δ_H. Sea $\theta : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caracter de H. Consideremos el espacio de funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ que son G-suaves bajo la traslación a derecha, de soporte compacto módulo H, además que satisfacen

$$f(hg) = \theta(h) f(g), \quad h \in H, g \in G.$$

Llamemos a este espacio $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$, representación de G vía la traslación a derecha ρ. Notemos que esta representación es justamente $c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \theta$, la inducción compacta de θ.

Proposición 2.6.7. *Sea $\theta : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caracter de H. Son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

(I) *Existe un funcional no nulo $I_\theta : \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $I_\theta(\rho_g f) = I_\theta(f)$, para todo $g \in G$.*

(II) $\theta \delta_H = \delta_G|_H$.

Cuando alguna de estas afirmaciones se cumple, se tiene que el funcional I_θ es único salvo multiplicar por una constante.

Demostración. Sean μ_G y μ_H dos medidas de Haar invariantes a izquierda en G y H, respectivamente. Definimos el G-morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^\infty(G) &\longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta) \\ f &\longmapsto \tilde{f}, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{f}(g) = \int_H \theta \delta_H(h)^{-1} f(hg) d\mu_H(h).$$

Además se cumple que

$$\tilde{\lambda}_h f = \delta_H \theta(h)^{-1} \tilde{f},$$

para todo $h \in H$ y todo $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Veamos que el morfismo es sobreyectivo.

Si K es un subgrupo abierto compacto de G, el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(G)^K$ está generado por las funciones características de las coclases $gK,\ g \in G/K$. Por otro lado, cada coclase HgK soporta como mucho un espacio de funciones de dimensión uno en $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)^K$. Estos subespacios generan $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)^K$, con lo cual $f \longmapsto \tilde{f}$ es sobreyectivo sobre las funciones fijas por K. Luego es sobreyectivo por el Corolario 2.5.16.

Supongamos que el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$ admite un funcional I_θ como en el enunciado. El funcional $f \longmapsto I_\theta(\tilde{f})$ es entonces un G-morfismo no trivial

$$(\mathcal{C}_c^\infty(G), \rho) \longmapsto \mathbb{C}.$$

Sin embargo, el espacio $\mathrm{Hom}_G(\mathcal{C}_c^\infty(G), \mathbb{C})$ tiene dimensión uno por la Observación 2.6.4, y está generado por la integral de Haar a derecha. Entonces la condición (i) se cumple si y solo si la integral de Haar a derecha $\mathcal{C}_c^\infty(G) \longmapsto \mathbb{C}$ se factoriza a través del cociente $\mathcal{C}_c^\infty(G) \longmapsto \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$. Cuando esto sucede, I_θ está unívocamente determinada salvo multiplicación por una constante.

El núcleo de $f \longmapsto \tilde{f}$ contiene a todas las funciones $\lambda_h f - \delta_H \theta(h)^{-1} f,\ h \in H, f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Si aplicamos la integral de Haar a derecha en G obtenemos:

$$\int_G \Big(\lambda_h f(g) - \delta_H \theta(h)^{-1} f(g)\Big) \delta_G(g)^{-1} d\mu_G(g) = \Big(\delta_G(h)^{-1} - \delta_H \theta(h)^{-1}\Big) \int_G f(g) \delta_G(g)^{-1} d\mu_G(g).$$

Esto se anula si y solo si $\delta_G(h)^{-1} = \delta_H \theta(h)^{-1}$, para todo $h \in H$. Por lo tanto $(i) \Rightarrow (ii)$.

Para ver la vuelta, tomemos una función $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ tal que $\tilde{f} = 0$. La función f es fijada por un subgrupo abierto compacto $K \subset G$, luego basta probar el caso $\mathrm{supp}\,(f) \subset HgK$, para algún $g \in K$. Entonces f es combinación lineal de funciones características en coclases $h_i gK,\ h_i \in H$. La condición $\tilde{f} = 0$ significa que

$$\mu_H(H \cap gKg^{-1}) \sum_i \theta \delta_H(h_i)^{-1} f(h_i g) = 0,$$

pues $\theta\delta_H$ es trivial en el subgrupo compacto $H \cap gKg^{-1} \subset H$. Por otro lado,

$$\int_G f(x) \delta_G(x)^{-1} d\mu_G(x) = \mu_G(K) \delta_G(g)^{-1} \sum_i \delta_G(h_i)^{-1} f(h_i g).$$

Si vale (ii) entonces esto se anula como queríamos. □

Cuando alguna de las condiciones de la proposición anterior se cumplen, el caracter θ toma solamente valores positivos. Sea $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ tal que $f(g) \geqslant 0,\ \forall g \in G$, tenemos entonces que $\tilde{f}(g) \geqslant 0,\ \forall g \in G$. Por lo tanto:

Corolario 2.6.8. *Supongamos que se cumple alguna de las condiciones de la proposición anterior. Entonces existe un funcional no nulo I_θ en $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$ tal que*

(I) $I_\theta(\rho_g f) = I_\theta(f)$, *para* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta),\ g \in G$, *y*

(II) $I_\theta(f) \geqslant 0$, *para* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta),\ f \geqslant 0$.

Además estas condiciones determinan a I_θ unívocamente salvo multiplicación por una constante positiva.

Generalmente se usa la siguiente notación:

$$I_\theta(f) = \int_{H\backslash G} f(g) d\mu_{H\backslash G}(g), \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta),$$

y también se le dice a $\mu_{H\backslash G}$ una medida positiva semi-invariante en $H\backslash G$. Como $\theta = \delta_H^{-1}\delta_G\big|_H$ está unívocamente determinado, no nos referiremos a él otra vez.

Sea G un grupo localmente profinito y H un subgrupo cerrado de G. Pongamos

$$\delta_{H\backslash G} = \delta_H^{-1}\delta_G\big|_H : H \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times.$$

Teorema 2.6.9 (Teorema de la dualidad). *Sea $\dot{\mu}$ una medida semi-invariante positiva en $H\backslash G$. Sea (σ, W) una representación suave de H. Luego existe un isomorfismo natural*

$$\left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^\vee \cong \operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma},$$

que depende solamente de la elección de $\dot{\mu}$.

Demostración. Consideremos la acción de $\delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}$ en el mismo espacio $\check{W}$ que $\check{\sigma}$. Sea $(\check{w}, w) \longmapsto \langle \check{w}, w \rangle$ la evaluación $\check{W} \times W \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $\phi \in c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma$, $\Phi \in \operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}$, y consideremos la función

$$f : g \longmapsto \langle \Phi(g), \phi(g) \rangle, \quad g \in G.$$

Nos queda $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \delta_{H\backslash G})$. Después, tenemos el pairing G-invariante $\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma} \times c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ definido como

$$(\Phi, \phi) \longmapsto \int_{H\backslash G} \langle \Phi(g), \phi(g) \rangle d\dot{\mu}(g)$$

Este pairing induce un G-morfismo natural en σ

$$\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma} \longrightarrow \left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^\vee.$$

Veamos que es un isomorfismo. Para ver esto, tomemos un subgrupo abierto compacto $K \subset G$ y veamos como se ve el espacio $\left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^K$. El soporte de una función f en este espacio es unión finita de coclases HgK. El valor $f(g) \in W$ queda fijo por el subgrupo abierto compacto $H \cap gKg^{-1} \subset H$. Luego tomamos un conjunto $\mathcal{G}$ de representantes del espacio de coclases $H\backslash G/K$. Para cada $g \in \mathcal{G}$, elijamos una base $\mathcal{W}_g$ del espacio $W^{H \cap gKg^{-1}}$. Entonces para cada $g \in \mathcal{G}$, $w \in \mathcal{W}$ existe una única función $f_{g,w} \in \left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^K$, soportada en HgK, tal que $f_{g,w}(g) = w$. El conjunto

$$\{ f_{g,w} \mid g \in \mathcal{G},\ w \in \mathcal{W}_g \}$$

es entonces una base de $\left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^K$.

Denotemos como $\mathcal{W}_g^*$ a la base de $\check{W}_g = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}\left(W^{H \cap gKg^{-1}}, \mathbb{C}\right)$. Para $g \in \mathcal{G}$, $\check{w} \in \mathcal{W}_g^*$, definimos $f_{g,\check{w}} \in \left(\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}\right)^K$ de la misma manera que antes. Con lo cual obtenemos que el espacio $\left(\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}\right)^K$ consiste de todas las funciones f tal que para cualquier $g \in \mathcal{G}$, la restricción $f|_{HgK}$ es combinación lineal de funciones $f_{g,\check{w}}$, $\check{w} \in \mathcal{W}_g^*$.

Para $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $w \in \mathcal{W}_{g_1}$, $\check{w} \in \mathcal{W}_{g_2}^*$, se tiene

$$\langle f_{g_2,\check{w}}, f_{g_1,w} \rangle = \begin{cases} \dot{\mu}(Hg_1K)\langle \check{w}, w \rangle & \text{si } Hg_1K = Hg_2K, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

para algún $\dot{\mu}(Hg_1K) > 0$. Por lo tanto el pairing nos identifica $\left(\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}\right)^K$ con el dual lineal de $\left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^K$, entonces $\operatorname{Ind}_H^G \delta_{H\backslash G} \otimes \check{\sigma}$ se identifica con $\left(c\text{-}\operatorname{Ind}_H^G \sigma\right)^\vee$ como queríamos. $\square$

2.7. El álgebra de Hecke

Si G es un grupo finito, las representaciones de G equivalen a los módulos a izquierda sobre el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$. Existe una equivalencia análoga en el caso de representaciones suaves de grupos localmente profinitos, sin embargo tendremos que utilizar otra álgebra que juegue el papel de $\mathbb{C}[G]$.

En lo que sigue vamos a solo necesitar trabajar en el caso en que G es unimodular, por eso, salvo que especifiquemos lo contrario, las medidas e integrales de Haar van a ser invariantes a izquierda y derecha.

Fijemos una medida de Haar μ en G. Para $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ definimos la **convolución**

$$f_1 * f_2(g) := \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g) d\mu(x).$$

La función $(x, g) \longmapsto f_1(x) f_2(x^{-1}g)$ pertenece a $\mathcal{C}_c^\infty(G \times G)$ y por lo tanto $f_1 * f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. De la misma manera, si tenemos $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, $i = 1, 2, 3$, podemos considerar $f_1 * (f_2 * f_3) \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ que es lo mismo que $(f_1 * f_2) * f_3$, en efecto:

$$\begin{aligned}
f_1 * (f_2 * f_3)(g) &= \int_G f_1(x) \left(\int_G f_2(y) f_3(y^{-1}x^{-1}g) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G f_1(x) \left(\int_G f_2(x^{-1}y) f_3(y^{-1}g) d\mu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G f_1(x) f_2(x^{-1}y) d\mu(x) \right) f_3(y^{-1}g) d\mu(y) \\
&= (f_1 * f_2) * f_3(g),
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la invarianza a izquierda de la medida de Haar. Esta cuenta prueba que la convolución es una operación asociativa.

Definición 2.7.1. Para un grupo localmente profinito G definimos el **álgebra de Hecke**

$$\mathcal{H}(G) := (\mathcal{C}_c^\infty(G), *, +),$$

que es una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa.

En general, $\mathcal{H}(G)$ no va a tener un elemento neutro para la convolución. Es conmutativa cuando G es conmutativo.

Observación 2.7.2. La estructura de $\mathcal{H}(G)$ depende de la convolución, y la convolución depende de una elección de medida de Haar μ. Sin embargo, si ν es otra medida de Haar, las álgebras de Hecke que provienen de cada medida $\mathcal{H}_\mu(G), \mathcal{H}_\nu(G)$, son isomorfas. En efecto, como existe una constante $c > 0$ tal que $\nu = c\mu$, podemos construir el isomorfismo $f \longmapsto c^{-1}f$.

Observación 2.7.3. Supongamos que G es un grupo discreto. Podemos tomar como integral de Haar

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \sum_{g \in G} f(g).$$

El morfismo

$$f \longmapsto \sum_{g \in G} f(g) g$$

es un isomorfismo de álgebras con unidad entre $\mathcal{H}(G)$ y el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$.

El único caso en el cual el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G)$ va a poseer un elemento neutro para el producto es cuando G es discreto.

Aunque el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G)$ no siempre tenga un elemento neutro para el producto, si tiene para cada subgrupo K abierto compacto de G un elemento idempotente $e_K \in \mathcal{H}(G)$:

$$e_K(x) = \begin{cases} \mu(K)^{-1} & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Proposición 2.7.4. *Tenemos las siguientes afirmaciones.*

(I) *Efectivamente $e_K * e_K = e_K$.*

(II) *Si $f \in \mathcal{H}(G)$, luego $e_K * f = f$ si y solo si $f(kg) = f(g)$ para todo $k \in K$, $g \in G$.*

(III) *El espacio $e_K * \mathcal{H}(G) * e_K$ es una subálgebra de $\mathcal{H}(G)$ con elemento neutro para el producto: e_K.*

Demostración. Primero veamos que e_K es idempotente, se tiene que

$$\begin{aligned} e_K * e_K(g) &= \int_G e_K(x) e_K(x^{-1}g) d\mu(x) \\ &= \mu(K)^{-1} \int_K e_K(x^{-1}g) d\mu(x) \\ &= \mu(K)^{-2} \int_{K \cap g^{-1}K} d\mu(x). \end{aligned}$$

entonces si g no pertenece a K, $e_K * e_K$ vale 0 y si g pertenece a K vale $\mu(K)^{-1}$, o sea, coincide en cualquier caso con e_K.

Para el segundo ítem, tomando $f \in \mathcal{H}(G),\ k \in K,\ g \in G$ obtenemos

$$\begin{aligned} e_K * f(kg) &= \int_G e_K(x) f(x^{-1}kg) d\mu(x) \\ &= \int_G e_K(k^{-1}x) f(x^{-1}g) d\mu(x) \\ &= \int_G e_K(k^{-1}x) f(x^{-1}g) d\mu(x) \\ &= \int_G e_K(x) f(x^{-1}g) d\mu(x) = e_K * f(g), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la invarianza a izquierda de la medida de Haar y en la tercera igualdad usamos que e_K queda fijo por traslación a izquierda por un elemento de K. Esto muestra que $e_K * f$ es siempre invariante por traslación a izquierda por elementos de K. Con lo cual, si $f = e_K * f$ entonces f es invariante a izquierda por cualquier elemento de K. Recíprocamente, si f es invariante por traslación a izquierda por cualquier elemento de K, entonces la última integral se convierte en $f(g)$.

Por último, (iii) es sigue inmediatamente de que e_K es un elemento idempotente. □

Notemos que $e_K * \mathcal{H}(G) * e_K$ es el espacio de funciones $f \in \mathcal{H}(G)$ que son invariantes por traslación a izquierda y derecha por K:

$$f(k_1 g k_2) = f(g), \quad g \in G, k_1, k_2 \in K.$$

Notamos a este espacio como $\mathcal{H}(G, K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K$.

2.7.1. $\mathcal{H}(G)$-módulos

Sea M un $\mathcal{H}(G)$-módulo a izquierda, vamos a denotar a la acción en M como $(f, m) \longmapsto f * m$ para $f \in \mathcal{H}(G)$ y $m \in M$.

Definición 2.7.5. Decimos que M es **suave** si $\mathcal{H}(G) * M = M$.

Como $\mathcal{H}(G)$ es unión de las subálgebras $\mathcal{H}(G, K)$, se tiene que un $\mathcal{H}(G)$-módulo M es suave si y solo si para todo $m \in M$, existe un subgrupo compacto abierto $K \subset G$ tal que $e_K * m = m$.

Sean M_1, M_2 dos $\mathcal{H}(G)$-módulos suaves, vamos a definir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(M_1, M_2)$ como el espacio de todos los $\mathcal{H}(G)$-morfismos $M_1 \longmapsto M_2$. De esta manera, la clase de $\mathcal{H}(G)$-módulos suaves forma una categoría que denotaremos como $\mathcal{H}(G)$-**Mod**.

Sea (π, V) una representación suave de G. Para $f \in \mathcal{H}(G), v \in V$ definimos

$$\pi(f)v := \int_G f(g)\pi(g)v d\mu(g).$$

El integrando es un elemento de $\mathcal{C}_c^\infty(G; V)$, con la cual la integral define un elemento de V. Alternativamente, podemos elegir un subgrupo abierto compacto $K \subset G$ que fije v y f (por traslación a derecha), luego la integral de la derecha es una suma finita

$$\pi(f)v = \mu(K) \sum_{g \in G/K} f(g)\pi(g)v. \tag{2.7}$$

De esta igualdad se deduce

$$\pi(e_K)v = v, \quad v \in V^K. \tag{2.8}$$

Proposición 2.7.6. *Sea (π, V) una representación suave de G. La operación*

$$(f, v) \longmapsto \pi(f)v, \quad v \in V, f \in \mathcal{H}(G),$$

define una estructura de $\mathcal{H}(G)$-módulo suave en V. Si (π', V') es otra representación suave de G y $\phi : V \longrightarrow V'$ es un G-morfismo, entonces ϕ se puede ver como un $\mathcal{H}(G)$-morfismo:

$$\phi \circ \pi(f) = \pi'(f) \circ \phi, \quad f \in \mathcal{H}(G).$$

Demostración. Sean $v \in V$, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi(f_1 * f_2)v &= \int_G f_1 * f_2(g)\pi(g)v d\mu(g) \\
&= \int_G \left(\int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) d\mu(h) \right) \pi(g)v d\mu(g) \\
&= \int_G \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\pi(g)v d\mu(g) d\mu(h) \\
&= \int_G \int_G f_1(h) f_2(g)\pi(hg)v d\mu(g) d\mu(h) \\
&= \int_G f_1(h)\pi(h) \left(\int_G f_2(g)\pi(g)v d\mu(g) \right) d\mu(h) \\
&= \int_G f_1(h)\pi(h)\pi(f_2)v d\mu(h) = \pi(f_1)\pi(f_2)v.
\end{aligned}$$

Esto le da a V una estructura de $\mathcal{H}(G)$-módulo. Para ver la suavidad, notemos que si K es un subgrupo abierto compacto, tenemos que $\pi(e_K)v = v$, $v \in V^K$.

Que ϕ se puede ver como un morfismo de $\mathcal{H}(G)$-módulos se deduce de la ecuación (2.7). □

Ejemplo 2.7.7. Si tomamos como representación suave a $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ con la traslación a izquierda λ, entonces para $f \in \mathcal{H}(G)$ y $g \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$

$$\lambda(f)g = f * g.$$

Si tomamos como representación suave a $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ con la traslación a derecha ρ, entonces

$$\rho(f)g = f * \breve{g},$$

con $\breve{g}$ la función $\phi \longmapsto g(\phi^{-1})$.

Se puede también a partir de un $\mathcal{H}(G)$-módulo suave M construir una representación suave de G:

Proposición 2.7.8. *Sea M un $\mathcal{H}(G)$-módulo suave. Existe un único G-morfismo $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(M)$ tal que (π, M) es una representación suave de G y*

$$\pi(f)m = f * m, \quad f \in \mathcal{H}(G), m \in M.$$

Además, si M' es un $\mathcal{H}(G)$-módulo suave con una G-representación asociada (π', M'), luego cualquier $\mathcal{H}(G)$-morfismo $M \longrightarrow M'$ es un G-morfismo $\pi \longrightarrow \pi'$.

Demostración. Consideramos el $\mathcal{H}(G)$-morfismo canónico

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G)} M &\longrightarrow M, \\
\sum f_i \otimes m_i &\longleftarrow \sum f_i * m_i
\end{aligned}$$

que es sobreyectivo por suavidad. Sea $\sum_{1\leqslant i\leqslant r} f_i \otimes m_i$ un elemento del núcleo. Elegimos un subgrupo abierto compacto K de G que fija a todos los f_i a izquierda, luego por el segundo ítem del a Proposición 2.7.4

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant r} f_i \otimes m_i &= \sum_{1\leqslant i\leqslant r} (e_K * f_i) \otimes m_i \\ &= e_K \otimes \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant r} f_i * m_i \right) = e_K \otimes 0 = 0,\end{aligned}$$

con lo cual el morfismo es inyectivo, de hecho es un $\mathcal{H}(G)$-isomorfismo $\mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G)} M \cong M$.

El producto tensorial está equipado con una representación suave de G vía traslación a izquierda en el factor de $\mathcal{H}(G)$. vía el isomorfismo podemos trasladar esta acción de G en M y obtenemos una representación suave (π, M).

Esta acción se puede describir más explícitamente. Sea $m \in M$ y $K \subset G$ un subgrupo abierto compacto talque $e_K * m = m$. Para $g \in G$, sea h_{gK} la función característica de gK. Se tiene que

$$\pi(g)m = \mu(K)^{-1} h_{gK} * m.$$

De esto se deduce la última afirmación de la proposición; para la última afirmación juntamos esto con la Ecuación (2.7). □

Como consecuencia, hablar de representaciones suaves de G es equivalente a hablar $\mathcal{H}(G)$-módulos suaves. Pues, si (π, V) es una representación suave de G, los G-subespacios de V son los $\mathcal{H}(G)$-submódulos de V y los G-morfismos $V \longrightarrow V'$ son los $\mathcal{H}(G)$-morfismos $V \longrightarrow V'$, y recíprocamente también. Las categorías son equivalentes, pero esto que acabamos de decir es algo más fuerte.

Lema 2.7.9. *Sea (π, V) una representación suave de G y sea $K \subset G$ un subgrupo abierto compacto. El operador $\pi(e_K)$ es la K-proyección $V \longrightarrow V^K$ con núcleo $V(K)$. El espacio V^K es un $\mathcal{H}(G, K)$-módulo, donde la unidad e_K actúa como la identidad.*

Demostración. Para $v \in V$ y $k \in K$, tenemos

$$\pi(k)\pi(e_K)v = \pi(e_K)\pi(k)v = \pi(e_K)v.$$

Entonces $\pi(e_K)$ es un K-morfismo $V \longrightarrow V^K$. De hecho, para $v \in V^K$ tenemos que $\pi(e_K)v = v$ (como vimos en la Ecuación (2.8)). En particular, $\pi(e_K)$ es sobreyectivo e idempotente. También $\pi(e_K)$ aniquila a $V(K)$, como este es el único K-complemento de V^K debe ser que es todo el núcleo de $\pi(e_K)$. □

Ahora vamos a ver que el $\mathcal{H}(G, K)$-módulo V^K contiene mucha información de (π, V).

Proposición 2.7.10. *Tenemos las siguientes afirmaciones.*

(I) *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. El subespacio V^K es trivial o un $\mathcal{H}(G, K)$-módulo simple.*

(II) *La función $(\pi, V) \longmapsto V^K$ induce una biyección entre:*

  (a) *clases de equivalencia de representaciones suaves irreducibles (π, V) de G tal que $V^K \neq 0$, y*

  (b) *clases de isomorfismo de $\mathcal{H}(G, K)$-módulos simples.*

Demostración. Sea (π, V) una representación suave irreducible de G y $V^K \neq 0$. Sea M un $\mathcal{H}(G, K)$-submódulo de V^K. El espacio $\pi(\mathcal{H}(G))M$ es un G-subespacio no nulo de V, luego por irreducibilidad es todo V. Con lo cual se tiene que

$$V^K = \pi(e_K)V = \pi(e_K)\pi(\mathcal{H}(G))M = \pi(\mathcal{H}(G, K))M = M,$$

como M era arbitrario, se tiene que V^K es $\mathcal{H}(G, K)$-simple.

Luego $(\pi, V) \longmapsto V^K$ induce una función entre las clases de (a) y (b). Construyamos ahora la función inversa. Sea M un $\mathcal{H}(G,K)$-módulo simple y consideremos el G-espacio $U = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} M$, donde G actúa por traslación a izquierda en el factor $\mathcal{H}(G)$. Se tiene que

$$U^K = e_K * \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} M = e_K \otimes M \cong_{\mathcal{H}(G,K)} M,$$

la última equivalencia es por simplicidad de M y la primera es porque U^K es la imagen del operador $\pi(e_K)$ si pensamos en la representación (π, U, V) (ver el Lema 2.7.9).

Por el lema de Zorn existe un G-subespacio X de U que es maximal respecto a la propiedad $X \cap e_K \otimes M = 0$, equivalentemente $X^K = 0$. Si Y es otro G-subespacio de U tal que $Y^K = 0$, entonces $(X+Y)^K = X^K + Y^K = 0$ por el lema anterior. Luego por maximalidad de X, $Y \subset X + Y = X$, por lo tanto X es el único G-subespacio maximal con esta propiedad.

Un G-subespacio W de U que contenga estrictamente a X debe intersecar no trivialmente y en particular debe contener por simplicidad al $\mathcal{H}(G,K)$-módulo simple $e_K \otimes M$. Con lo cual $W = U$. Luego X es un G-subespacio de U maximal y $V = U/X$ es irreducible. Se tiene que $V^K \cong_{\mathcal{H}(G,K)} M$.

Nos queda mostrar que la clase de isomorfismo de V depende solo de la clase de M. Sea $f : M \longrightarrow M'$ un isomorfismo de $\mathcal{H}(G,K)$-módulos. El morfismo f se extiende de manera única a un $\mathcal{H}(G)$-isomorfismo

$$\begin{aligned} f : U = \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} M &\longrightarrow \mathcal{H}(G) \otimes_{\mathcal{H}(G,K)} M' = U', \\ \phi \otimes m &\longmapsto \phi \otimes f(m). \end{aligned}$$

La imagen $X' = f(X)$ es luego el único $\mathcal{H}(G)$-subespacio maximal de U' tal que $X'^K = 0$. Entonces el morfismo f induce un isomorfismo $U/X \cong U'/X'$, como queríamos. □

Corolario 2.7.11. *Sea (π, V) una representación suave de G, $V \neq 0$. Entonces (π, V) es irreducible si y solo si, para todo subgrupo abierto compacto $K \subset G$, el espacio V^K es cero o $\mathcal{H}(G,K)$-simple.*

Demostración. Una implicación está dada por la proposición anterior. Recíprocamente, si (π, V) no es irreducible, sea $U \not\subset V$ un G-subespacio no nulo. Sea $W = V/U$. Existe un subgrupo abierto compacto $K \subset G$ tal que U^K y W^K son no nulos. La sucesión

$$0 \longrightarrow U^K \longrightarrow V^K \longrightarrow W^K \longrightarrow 0$$

es exacta, y es una sucesión exacta de $\mathcal{H}(G,K)$-módulos. Con lo cual V^K es no nulo y no es simple sobre $\mathcal{H}(G,K)$. □

Se puede generalizar lo anterior. Si $K \subset G$ es un subgrupo abierto compacto y $\rho \in \widehat{K}$. Consideramos la función $e_\rho \in \mathcal{H}(G)$, cuyo soporte está en K, la definimos como

$$e_\rho(x) := \frac{\dim \rho}{\mu(K)} \operatorname{tr} \rho(x^{-1}), \quad x \in K.$$

Si K' es el núcleo de ρ, luego e_ρ es constante en las coclases gK' y $K'g'$, con lo cual $e_{K'} * e_\rho = e_\rho * e_{K'} = e_\rho$. Entonces e_ρ pertenece a la subálgebra $\mathcal{H}(K,K')$ de $\mathcal{H}(G,K')$. Sin embargo, $e_{K'} \longmapsto 1$ induce un isomorfismo de álgebras $\mathcal{H}(K,K') \longrightarrow \mathbb{C}[K/K']$. Este isomorfismo manda e_ρ al elemento idempotente del álgebra de grupo correspondiente a la representación irreducible ρ del grupo finito K/K'. Entonces:

Proposición 2.7.12. *Tenemos las siguientes afirmaciones.*

(I) *La función $e_\rho \in \mathcal{H}(G)$ es idempotente.*

(II) *Si (π, V) es una representación suave de G, luego $\pi(e_\rho)$ es la K-proyección $V \longrightarrow V^\rho$.*

En particular, $V^\rho = \pi(e_\rho)V$, y el espacio isotípico V^ρ es un módulo sobre la subálgebra $e_\rho * \mathcal{H}(G) * e_\rho$ de $\mathcal{H}(G)$. Vale entonces la Proposición 2.7.10 reemplazando e_ρ por e_K y V^ρ por V^K.

Ejemplo 2.7.13. Si $\dim \rho = 1$, i.e. ρ es un caracter de K. El álgebra $e_\rho * \mathcal{H}(G) * e_\rho$ es el espacio de funciones $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que $f(kgk') = \rho(kk')^{-1} f(g),\ k, k' \in K,\ g \in G$.

Si G es un grupo finito, el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ es **semisimple**. Como $\mathbb{C}[G]$ tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, esto equivale a que el radical de Jacobson sea trivial, o equivalentemente, que si $x \in \mathbb{C}[G], x \neq 0$, luego existe un $\mathbb{C}[G]$-módulo M tal que $xM \neq 0$.

Para todos los grupos localmente profinitos que satisfacen la Hipótesis 2.5.24, existe una propiedad análoga para el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G)$. Ver la Sección 4.5. de [BH06].

Capítulo 3

Representaciones de Galois

Recordemos la definición del grupo de Galois absoluto G_K de un cuerpo K arbitrario que aparece en el Ejemplo 2.3.3.

Sea V es un k-espacio vectorial de dimensión n, con k un cuerpo topológico. Fijamos una base de V. El grupo $\mathrm{Aut}_k(V)$ es isomorfo como grupo a $\mathrm{GL}_n(k)$, luego hereda la topología de $\mathrm{GL}_n(k)$, que lo convierte en un grupo topológico. Esta topología no depende de la base de V elegida.

Definición 3.0.1. Una **representación de Galois** es un morfismo continuo

$$\rho : \mathrm{G}_K \to \mathrm{Aut}_k(V).$$

Se dice **n-dimensional** si la k-dimensión de V es n. Se dice **abeliana** si la imagen de ρ es un subgrupo abeliano.

Definición 3.0.2. Decimos que ρ es **no ramificado** si es trivial en $\mathcal{I}_K$.

3.1. Representaciones complejas y ℓ-ádicas

En esta sección nos va a interesar estudiar las **representaciones de Galois complejas** que es el caso $k = \mathbb{C}$, y las **representaciones ℓ-ádicas** que es el caso $k = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.[1]

Las representaciones complejas son representaciones suaves de G_K sobre espacios $\mathbb{C}$-vectoriales de dimensión finita, de hecho vale la recíproca por el ítem (vi) de la Proposición 2.5.4. Entonces vale todo lo que vimos en la Sección 2.5. Por otro lado, las representaciones suaves de G_K sobre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espacios vectoriales de dimensión finita son representaciones ℓ-ádicas por la Proposición 2.5.4, sin embargo la recíproca es falsa como se explica en Ejemplo 3.6.2.

La proposición principal de esta sección vale en el caso complejo pero no en el ℓ-ádico, pues la imagen en este último no tiene por qué ser finita: por ejemplo 3.6.2.

La proposición será consecuencia de dos lemas previos:

Lema 3.1.1 (No hay subgrupos chicos)**.** *Sea G un grupo de Lie complejo. Entonces no tiene subgrupos pequeños, es decir, existe un abierto $1 \in U \subset G$ que no contiene subgrupos no triviales.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, consideremos el mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. Se restringe a un difeomorfismo para algún abierto $V \subset \mathfrak{g}$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $V \subset \{ v \in \mathfrak{g} \mid \|v\| < 1 \}$. Luego afirmamos que $U = \exp(V)$ no tiene subgrupos no triviales. Efectivamente, sea $H \subset U$ subgrupo, sea $h \in H$ entonces $h = \exp(v)$ para algún $v \in V$. Entonces $2v \in V$, pues $h^2 \in H = \exp(V)$ luego $h^2 = \exp(v')$ con $v' \in V$. Con lo cual, $\exp(v') = h^2 = \exp(v)^2 = \exp(2v)$ entonces por ser el mapa exponencial un difeomorfismo tenemos que $2v = v' \in V$. Pero repitiendo este argumento inductivamente tenemos que $2^n v \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $2^n \|v\| = \|2^n v\| < 1$ se tiene que $v = 0$ tomando límite. Pero $h = \exp(v) = \exp(0) = 1$, como h era arbitrario se tiene que H es trivial. $\square$

Con esto demostraremos el segundo lema:

[1] En algunos lados la frase *representación ℓ-ádica* puede referirse a una representación con $k = \mathbb{Q}_\ell$ o una extensión finita de este cuerpo.

Lema 3.1.2. *Sean P un grupo profinito, G un grupo de Lie complejo y $\rho : P \longrightarrow G$ una representación continua. Entonces la imagen de ρ es finita.*

Demostración. Basta ver que el núcleo de ρ es abierto, pues al ser un subgrupo de un grupo compacto tiene índice finito; cocientando obtendríamos que la imagen es finita. Para esto copiamos la demostración del segundo ítem de la Proposición 2.5.4. □

En particular, si tomamos en el lema anterior $P = \mathrm{G}_K$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y ρ una representación compleja, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.1.3. *Si $\rho : \mathrm{G}_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ es una representación compleja, entonces ρ se factoriza por una extensión finita Galois L/K. Es decir, existe $\overline{\rho} : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ una representación de grupos finitos inyectiva tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_K \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \\ & \mathrm{Gal}(L/K) \arrow[ur, "\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

Como consecuencia inmediata de la proposición obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.1.4. *La imagen de una representación compleja es un subgrupo de orden finito.*

Como las representaciones de Galois son un caso particular de representaciones de grupos profinitos, en particular lo son las representaciones complejas y ℓ-ádicas, luego deducimos las siguientes propiedades:

Proposición 3.1.5. *Las representaciones de Galois son semisimples.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.13, ya que el grupo de Galois absoluto es un grupo profinito. □

Proposición 3.1.6. *Una representación de Galois irreducible con k no numerable y algebraicamente es abeliana si y solo si es de dimensión* 1.

Demostración. Las representaciones de k-dimensión 1 son abelianas porque tienen su imagen contenida en $k^\times$ y son irreducibles por dimensión. Recíprocamente, las representaciones irreducibles abelianas tienen dimensión 1 por el Corolario 2.5.30 y la Observación 2.5.27. □

Observación 3.1.7. Cuando ρ es una representación abeliana se tiene que la extensión L/K que aparece en la Proposición 3.1.3 es abeliana.

3.2. El grupo de Weil

Sea K un cuerpo local no arquimediano con característica residual p y cuerpo residual k de orden q. Los siguientes hechos son un caso particular de los corolarios del Teorema 7, Capítulo I-4 de [Wei73]. Para cada $m \geqslant 1$ existe una única extensión no ramificada sobre K de orden m, más aún se tiene que $K_m = K(\zeta_{q^m-1})$ con ζ_{q^m-1} una raíz (q^m-1)-ésima primitiva de la unidad. La unión de todos los K_m, denotada como K^{unr}, es la única extensión no ramificada maximal de K en K^{sep}. Cada extensión K_m/K es de Galois con $\mathrm{Gal}(K_m/K)$ cíclico. Si llamamos k_m al cuerpo residual y $\mathfrak{P}_m$ el único ideal maximal de K_m, tenemos un único elemento $\varphi_m \in \mathrm{Gal}(K_m/K) \cong \mathrm{Gal}(k_m/k) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tal que $\varphi_m(x) \equiv x^{q^{m-1}}$ mód $\mathfrak{P}_m$ y a su vez genera el grupo. Además tenemos un isomorfismo canónico $\mathrm{Gal}(K_m/K) \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ definido como $\varphi_m \mapsto -1$. Tomando límite inverso sobre m, obtenemos el isomorfismo canónico de grupos topológicos:

$$\mathrm{Gal}(K^{unr}/K) \cong \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{Z}}, \tag{3.1}$$

que nos define un único elemento $\varphi_K \in \mathrm{Gal}(K^{unr}/K)$ tal que $\phi_K(x) \equiv x^{q^{m-1}}$ mód $\mathfrak{P}_m$ para todo $m \geqslant 1$ y el subgrupo generado por φ_K es denso, i.e. es un **generador topológico**. Si $\sigma \in \mathrm{G}_K$ se restringe a K^{unr} como φ_K lo llamamos **elemento de Frobenius geométrico**.

Definimos $\mathcal{I}_K := \mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{unr})$, el **grupo de inercia** de K (el núcleo del morfismo $\sigma \mapsto \sigma|_{K^{unr}}$), es un subgrupo cerrado de G_K y por lo tanto profinito. Tenemos la siguiente sucesión exacta corta de grupos topológicos:

$$1 \to \mathcal{I}_K \to \mathrm{G}_K \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 0, \tag{3.2}$$

donde la flecha sobreyectiva es restringir $\sigma \in \mathrm{G}_K$ a K^{unr} y componer con el isomorfismo anterior. Notar que siempre podemos elegir un elemento de Frobenius geométrico Φ, y a partir de ahora usaremos esa notación para describir al elemento, pero no es único, sino que es único salvo multiplicación por un elemento de $\mathcal{I}_K$.

Definición 3.2.1. Definimos el **grupo de Weil** como

$$\mathcal{W}_K := \mathcal{I}_K\langle\Phi\rangle \subset \mathrm{G}_K\,.$$

Notar que esta definición no depende de la elección de Frobenius geométrico Φ.

Se tiene que $\mathcal{W}_K$ es normal en G_K y es denso. En efecto, si miramos un abierto de G_K en el cociente $\mathrm{G}_K/\mathcal{I}_K \cong \mathrm{Gal}(K^{unr}/K) \cong \widehat{\mathbb{Z}}$, debe incluir un elemento de $\mathbb{Z}$, que corresponde a una potencia de Φ. Además de todo esto, el grupo de Weil encaja en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{I}_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{W}_K \arrow[r, "v_K"] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{I}_K \arrow[r] & \mathrm{G}_K \arrow[r] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le vamos a otorgar a $\mathcal{W}_K$ la topología más fina tal que

(I) $\mathcal{I}_K$ es un subgrupo abierto de $\mathcal{W}_K$.

(II) La topología subespacio de $\mathcal{I}_K$ en $\mathcal{W}_K$ coincide con la topología heredada de G_K como subespacio.

(III) Multiplicar por un elemento de Frobenius Φ es un homeomorfismo.

Así $\mathcal{W}_K$ es un grupo localmente profinito y la inclusión $\iota_K : \mathcal{W}_K \hookrightarrow \mathrm{G}_K$ es un monomorfismo continuo, sin embargo no es subespacio ya que si lo fuera, $\mathcal{I}_K$ sería un abierto de G_K (no lo es pues tiene índice infinito). Además, $\mathcal{I}_K$ es un subgrupo compacto maximal, pues $\mathcal{W}_K/\mathcal{I}_K$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ con la topología discreta.

La flecha sobreyectiva de sucesión exacta corta (3.2) nos induce un morfismo continuo componiendo con ι_K:

$$\begin{aligned} v_K : \mathcal{W}_K &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \tau\Phi_K^n &\longmapsto n, \quad \tau \in \mathcal{I}_K. \end{aligned}$$

Con esto nos podemos construir un morfismo continuo

$$|x| = q^{-v_K(x)}, x \in \mathcal{W}_K.$$

Notar que $\mathcal{I}_K = \mathrm{Ker}\,|\cdot|$.

En la literatura esta no es la definición de grupo de Weil que se usa en casos más generales. De hecho se llama grupo de Weil a una terna $(W_K, \varphi, \{\mathrm{Art}_L\}_{L/K})$ que cumple ciertas propiedades, y es única salvo isomorfismo. Esto se explica con detalle en artículo de Tate [Tat79] en la sección del grupo de Weil.

En nuestro caso, K local no arquimediano, tenemos $W_K = \mathcal{W}_K$, $\varphi = \iota_K$, y como Art_L tomamos los mapas de reciprocidad de Artin α_L^{-1} que aparecen en 4.1 y como ley de reciprocidad tomamos los morfismos $\theta_K : K^\times \longmapsto \mathrm{G}_K^{ab}$ [2] que aparecen en [CF67] página 141. La elección de mapas locales no es canónica, hay que decidir a dónde manda un elemento uniformizador de K, este se envía al Frobenius geométrico.

[2] Ver la definición de G^{ab} en 4.1.1

Para todo entero $m \geqslant 1$, $p \nmid m$ el cuerpo K^{unr} tiene una única extensión de grado m, digamos L_m/K^{unr}. Más aún, si ϖ es un elemento uniformizante de K, $L_m = K^{unr}(\varpi^{\frac{1}{m}})$. Tenemos un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(L_m/K^{unr}) &\longrightarrow \mu_m \\ \sigma &\longmapsto \sigma(\varpi^{\frac{1}{m}})/\varpi^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

que llega al grupo μ_m de raíces m-ésimas de la unidad de K^{unr} (el cual está contenido en K^{unr} pues $p \nmid m$). En particular, $\mathrm{Gal}(L_m/K^{unr})$ es cíclico.

El cuerpo generado por la unión de todas las extensiones L_m es la extensión **mansamente ramificada** maximal de K y la denotamos como K^{tr}. Tomando límite inverso de los isomorfismos sobre m coprimo con p, obtenemos un isomorfismo de grupos topológicos

$$\mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{unr}) \cong \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m \cong \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell.$$

Notar que el último isomorfismo es único salvo multiplicación por un elemento de $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ pues así sucede con el isomorfismo $\mu_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Definimos $\mathcal{P}_K := \mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{tr})$ al **grupo de inercia salvaje** de K (el cual es un subgrupo de $\mathcal{I}_K$). Toda extensión finita de K^{tr} tiene grado una potencia de p, luego $\mathcal{P}_K$ es un grupo p-profinito. Es el único subgrupo p-profinito de Sylow de $\mathcal{I}_K$.

Proposición 3.2.2. *Existe un isomorfismo topológico $t_0 : \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K \to \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ que cumple*

$$t_0(\sigma\tau\sigma^{-1}) = |\sigma|^{-1}\, t_0(\tau),\ \tau \in \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K, \sigma \in \mathcal{W}_K.$$

Además, t_0 está determinado de manera única salvo multiplicación por un elemento de $\prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_\ell^\times$.

Demostración. Tenemos que

$$\mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K \cong \mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{unr}),$$

donde como vimos antes $\mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{unr}) \cong \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ no es un isomorfismo canónico, si no que está determinado de manera única salvo multiplicación por un elemento de $\prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$. Componiendo con la proyección $\mathcal{I}_K \longrightarrow \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K$ obtenemos t_0.

Para probar la identidad, basta separar en dos casos: $\sigma \in \mathcal{I}_K$ y $\sigma = \Phi$, pues $\mathcal{W}_K$ está generado por ambos. Ahora, si $\sigma \in \mathcal{I}_K$ entonces nos reducimos a probar que $t_0(\sigma\tau\sigma^{-1}) = t_0(\tau)$, lo cual sucede pues la imagen es un grupo abeliano. Cuando $\sigma = \Phi$, la ecuación equivale a probar que $t_0(\Phi\tau^q\Phi^{-1}) = t_0(\tau)$, donde $q = |\Phi|^{-1}$. Para esto, es suficiente probar que $\Phi\tau^q \cong \tau\Phi \mod \mathcal{P}_K$. Como $\mathcal{P}_K = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{unr})$, esto equivale a que $\Phi(\tau^q(\varpi^{\frac{1}{m}})) = \tau(\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}}))$ para cualquier elección de raíz m-ésima de ϖ, con m coprimo con p. Si escribimos $\tau(\varpi^{\frac{1}{m}}) = \zeta\varpi^{\frac{1}{m}}$ para alguna raíz m-ésima de la unidad ζ. Como τ deja fijo $\zeta \in K^{unr}$, tenemos que $\tau^q(\varpi^{\frac{1}{m}}) = \zeta^q\varpi^{\frac{1}{m}}$. Como además se tiene que $\Phi(\zeta^q) = \zeta$, obtenemos

$$\Phi(\tau^q(\varpi^{\frac{1}{m}})) = \Phi(\zeta^q\varpi^{\frac{1}{m}}) = \zeta\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}}).$$

Por otro lado

$$\tau(\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}})) = \tau\left(\frac{\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}})}{\varpi^{\frac{1}{m}}}\varpi^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}})}{\varpi^{\frac{1}{m}}}\tau(\varpi^{\frac{1}{m}}) = \frac{\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}})}{\varpi^{\frac{1}{m}}}\zeta\varpi^{\frac{1}{m}} = \zeta\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}}).$$

En la segunda igualdad utilizamos que $\frac{\Phi(\varpi^{\frac{1}{m}})}{\varpi^{\frac{1}{m}}}$ es una raíz m-ésima de la unidad y por ende queda fijo por τ.

□

Observación 3.2.3. Vamos a denotar como t a la composición de t_0 con el morfismo natural $\mathcal{I}_K \longrightarrow \mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K$. Notar que hereda una propiedad análoga a la proposición anterior.

3.2.1. El grupo de Weil de un cuerpo local arquimediano

Cuando el cuerpo local K es arquimediano se tiene una descripción más sencilla del grupo de Weil $\mathcal{W}_K$. En el caso $K = \mathbb{C}$ definimos $\mathcal{W}_K := \mathbb{C}^\times$ y se tiene que $\mathrm{G}_K = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{C}) = \{1\}$, con lo cual $\mathcal{W}_K^{ab} = \mathrm{G}_K$ y θ_K es la identidad. En el caso $K = \mathbb{R}$ definimos $\mathcal{W}_\mathbb{R}$ para que sea una extensión que no se escinda

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathcal{W}_\mathbb{R} \longrightarrow G_\mathbb{R} \longrightarrow 1.$$

Más explícitamente, $\mathcal{W}_\mathbb{R} = \mathbb{C}^\times \rtimes G_\mathbb{R}$ con el producto

$$(z_1, \tau_1) \cdot (z_2, \tau_2) = (z_1 \tau_1(z_2), \tau_1 \circ \tau_2),$$

donde $G_\mathbb{R} = \{1, \bar{\cdot}\}$ tiene dos automorfismos: la identidad y la conjugación compleja. Se tiene que $\mathcal{W}_\mathbb{R}^{ab} \cong \mathbb{R}^\times$.

3.3. Representaciones del grupo de Weil

Recordemos algunas cosas sobre la teoría de representaciones de grupos localmente profinitos que se aplican a $\mathcal{W}_K$. El grupo G_K es profinito, en particular sus representaciones suaves son semisimples (ver la Proposición 2.5.13). Por otro lado, $\mathcal{W}_K$ tiene al grupo discreto $\mathbb{Z}$ como un cociente, luego tiene representaciones suaves no semisimples porque $\mathbb{Z}$ tiene[3]. Veremos que las representaciones irreducibles de $\mathcal{W}_K$ están relacionadas con las de G_K, $\mathcal{W}_K$ pero va a tener más variedad de representaciones reducibles.

En general para grupos localmente profinitos, las representaciones irreducibles suaves tienen dimensión a lo sumo numerable. Pero para representaciones de $\mathcal{W}_K$ se tiene un poco más:

Lema 3.3.1. *Sea (ρ, V) una representación suave irreducible de $\mathcal{W}_K$, entonces ρ tiene dimensión finita.*

Demostración. Sea $v \in V$, $v \neq 0$. Como V es irreducible, V está generado por $\rho(g)(v)$, $g \in \mathcal{W}_K$. Como ρ es suave, existe un subgrupo abierto $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}_K$ que fija v. Con $\mathcal{J} = \mathcal{I}_K \cap \mathrm{G}_L$, para una extensión finita L/K. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que L/K es Galois, luego $\mathcal{J}$ es normal en $\mathcal{W}_K$. Se sigue que $\mathcal{J} \subset \operatorname{Ker} \rho$.

Tomemos un elemento de Frobenius $\Phi \in \mathcal{W}_K$. Actúa por conjugación sobre el grupo finito $\mathcal{I}_K/\mathcal{J}$, luego existe $d \geqslant 1$ tal que Φ^d actúa trivialmente. Entonces $\rho(\Phi^d)$ conmuta con $\rho(\mathcal{W}_K)$ y como ρ es irreducible, $\rho(\Phi^d)$ debe ser un escalar por el lema de Schur 2.5.26. Con lo cual los vectores $\rho(g)v, g \in \mathcal{W}_K/\langle \mathcal{J}, \Phi^d \rangle$ generan un espacio vectorial de dimensión finita U. Este subespacio es estable por $\rho(\mathcal{W}_K)$, luego por irreducibilidad debe ser que $U = V$, ya que también $U \neq 0$. □

En la bibliografía se suele definir la **representación del grupo de Weil** $\mathcal{W}_K$ como un morfismo continuo

$$\mathcal{W}_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(V)$$

para un F-espacio vectorial V de dimensión finita n. Además, generalmente $F = \mathbb{C}$ o $F = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ en el caso de **representaciones del grupo de Weil ℓ-ádicas**; en ambos casos $\mathrm{Aut}_F(V) \cong \mathrm{GL}_n(F)$ posee la topología usual heredada de la topología de F.

Cuando $F = \mathbb{C}$ y V es un F-espacio vectorial de dimensión finita, la definición anterior de representación del grupo de Weil equivale a la definición de representación suave, pues $\mathcal{W}_K$ es un grupo localmente profinito, ergo podemos aplicar el ítem (vi) de la Proposición 2.5.4. Cuando $F = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ y V es de dimensión finita, una representación suave de V inmediatamente es una representación del grupo de Weil pues vale la implicación $(v) \Rightarrow (vi)$ en la Proposición 2.5.4, sin embargo no vale la vuelta.

Por ejemplo, en la Subsección 3.9.2 se ve que la representación ℓ-ádica $\rho'_{E/K,\ell}$ del grupo de Weil proveniente de una curva elíptica con reducción potencialmente multiplicativa no puede ser suave, de lo contrario seguiría siendo suave al restringirse al subgrupo de inercia $\mathcal{I}$, ser suave implica que la representación es continua con la topología discreta (ver el ítem (v) de la

[3] Por ejemplo, considerar la acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}^2$ dada por $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Claramente es indescomponible, pero no es irreducible pues un subespacio invariante es el generado por e_1. Luego no puede ser semisimple.

Proposición 2.5.4), luego el núcleo es abierto, como $\mathcal{I}$ es profinito el núcleo tiene índice finito, entonces la imagen de la representación es finita, pero esto no pasa por lo visto en esa subsección.

Obviamente, dado ρ una representación suave irreducible del grupo profinito G_K, podemos construirnos una representación suave $\rho \circ \iota_K$ de $\mathcal{W}_K$ vía la inclusión continua $\iota_K : \mathcal{W}_K \hookrightarrow \mathrm{G}_K$.

Lema 3.3.2. *Valen las siguientes afirmaciones:*

(I) *Sea ρ una representación suave irreducible de G_K. Entonces $\rho \circ \iota_K$ es también irreducible.*

(II) *Si ρ_1, ρ_2 son dos representaciones suaves irreducibles de G_K, entonces $\rho_1 \cong \rho_2$ si y solo si $\rho_1 \circ \iota_K \cong \rho_2 \circ \iota_K$.*

Demostración. Como $\operatorname{Ker}\rho$ es un subgrupo abierto de G_K y $\mathcal{W}_K$ es denso en G_K, tenemos que $\mathrm{G}_K = \mathcal{W}_K \cdot \operatorname{Ker}\rho$ y por lo tanto $\rho(\mathcal{W}_K) = \rho(\mathrm{G}_K)$. Esto nos prueba (i). Ahora, para probar (ii) basta con notar que cualquier $\mathcal{W}_K$-isomorfismo $\rho_1 \circ \iota_K \to \rho_2 \circ \iota_K$ es un G_K-isomorfismo nuevamente por densidad. □

Definición 3.3.3. Decimos que una representación del grupo de Weil es **no ramificado** si es trivial en $\mathcal{I}_K$.

Proposición 3.3.4. *Sea τ una representación suave irreducible de $\mathcal{W}_K$. Son equivalentes:*

(I) *El grupo $\tau(\mathcal{W}_K)$ es finito.*

(II) *$\tau \cong \rho \circ \iota_K$ para alguna representación suave irreducible ρ de G_K.*

(III) *El caracter $\det\tau$ tiene orden finito.*

Además, siempre existe un caracter no ramificado χ de $\mathcal{W}_K$ tal que $\chi \otimes \tau$ satisface una (y por lo tanto todos) de los ítem $(i) - (iii)$.

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{W}_K$ un elemento de Frobenius.

$(i) \Rightarrow (ii)$. El automorfismo $\tau(\Phi)$ tiene orden finito d. Para $a \in \widehat{\mathbb{Z}}$ existe un entero $\overline{a}$ tal que $\overline{a} \equiv a \mod d\widehat{\mathbb{Z}}$, y $\overline{a}$ esta unívocamente determinado módulo $d\mathbb{Z}$. Por la sucesión exacta corta (3.2), un elemento $g \in \mathrm{G}_K$ se puede escribir de manera única como $g = \Phi^a\sigma$, para algún $a \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y $\sigma \in \mathcal{I}_K$. Definamos la representación ρ de G_K como $\rho(\Phi^a\sigma) = \tau(\Phi)^{\overline{a}}\tau(\sigma)$. La representación ρ es suave e irreducible y satisface $\rho \circ \iota_K = \tau$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Las representación suave ρ de G_K tiene imagen subgrupo de orden finito por el Corolario 3.1.4.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Existe $k \geqslant 1$ tal que $\tau(\Phi)^k$ conmuta con el grupo finito $\tau(\mathcal{I}_K)$, y en consecuencia con todo $\tau(\mathcal{W}_K)$. Entonces $\tau(\Phi)^k$ es un escalar por el Lema 2.5.26. Si $\det\tau$ tiene orden finito, entonces también lo tiene $\tau(\Phi)^k$. La imagen de $\tau(\mathcal{I}_K)$ es finita porque la representación es suave y $\mathcal{I}_K$ es compacto. Luego $\tau(\mathcal{W}_K)$ es finita.

En cualquier caso, existe $k \geqslant 1$ tal que $\tau(\Phi)^k$ es un escalar, digamos c. Tomemos χ un caracter no ramificado de $\mathcal{W}_K$ tal que $\chi(\Phi)^k = c^{-1}$, luego la representación $\chi \otimes \tau$ satisface (i). □

Si L/K es una extensión finita separable, tenemos que $\mathcal{W}_L \subset \mathcal{W}_K$ y notamos como $\operatorname{Ind}_{L/K}$ a $\operatorname{Ind}_{\mathcal{W}_L}^{\mathcal{W}_K}$. Si ρ es una representación suave de $\mathcal{W}_K$, escribimos $\rho_L = \operatorname{Res}_{L/K}\rho = \rho|_{\mathcal{W}_L}$.

Nos interesa ahora discutir la semisimplicidad de algunas representaciones del grupo de Weil. Traducimos ahora el Lema 2.5.32.

Lema 3.3.5. *Sea L/K una extensión finita separable.*

(I) *Sea ρ una representación suave de $\mathcal{W}_K$, luego ρ es semisimple si y solo si ρ_L es semisimple.*

(II) *Sea τ una representación suave de $\mathcal{W}_L$, luego τ es semisimple si y solo si $\operatorname{Ind}_{L/K}\tau$ es semisimple.*

Para cada $n \geqslant 1$, denotemos como $\mathcal{G}_n^{ss}(K)$ al conjunto de clases de isomorfismos de representaciones suaves semisimples de $\mathcal{W}_K$ de dimensión n. Denotemos como $\mathcal{G}_n^0(K)$ al conjunto de clases de isomorfismos de representaciones suaves irreducibles de $\mathcal{W}_K$ de dimensión n. Por último, escribimos $\mathcal{G}^{ss}(K) = \bigcup_{n\geqslant 1}\mathcal{G}_n^{ss}(K)$.

Si L/K es una extensión finita separable, el lema anterior nos dice que tenemos funtores

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{L/K} &: \mathcal{G}_n^{ss}(L) \longrightarrow \mathcal{G}_{nd}^{ss}(K), \\ \mathrm{Res}_{L/K} &: \mathcal{G}_n^{ss}(K) \longrightarrow \mathcal{G}_n^{ss}(L), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $d = [L : K]$.

La siguiente proposición es bastante práctica.

Proposición 3.3.6. *Sea (ρ, V) una representación suave de $\mathcal{W}_K$, y $\Phi \in \mathcal{W}_K$ un elemento de Frobenius. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *La representación ρ es semisimple.*

(II) *El automorfismo $\rho(\Phi)$ es semisimple.*

(III) *El automorfismo $\rho(\Psi)$ es semisimple para todo $\Psi \in \mathcal{W}_K$.*

Demostración.
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Es claro.
$(ii) \Rightarrow (i)$. El grupo $\rho(\mathcal{I}_K)$ es finito, con lo cual existe $d \geqslant 1$ tal que $\rho(\Phi)^d$ conmuta con con este grupo. El automorfismo $\rho(\Phi)$ es semisimple, luego $\rho(\Phi)^d$ también. La restricción de ρ al subgrupo abierto generado por Φ^d y $\mathcal{I}_K$ es semisimple. Por el lema anterior ρ es semisimple.
$(i) \Rightarrow (iii)$. Sea $\Psi \in \mathcal{W}_K$. Si Ψ es un elemento del grupo profinito $\mathcal{I}_K$, entonces $\rho(\Psi)$ es semisimple, luego podemos asumir que $\Psi \notin \mathcal{I}_K$. Entonces existe una extensión finita L/K tal que $\Psi \in \mathcal{W}_L$ y $\mathcal{W}_L$ es el subgrupo generado por Ψ y por $\mathcal{I}_L$. La representación $\rho|_{\mathcal{W}_L}$ es semisimple por el lema anterior, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $L = K$. Además, no perdemos nada por asumir que ρ sea irreducible. Por la última afirmación de la Proposición 3.3.4 existen $c \in \mathbb{C}^\times$ y ϕ de orden finito tales que $\rho(\Psi) = c\phi$. Con lo cual $\rho(\Psi)$ es semisimple. □

3.4. Representación de Weil-Deligne

Definición 3.4.1. Una **representación de Weil-Deligne**, es una terna (ρ, V, N) con (ρ, V) una representación suave de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ y $N \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ nilpotente que satisface

$$\rho(\sigma) N \rho(\sigma)^{-1} = |\sigma|\, N, \quad \sigma \in \mathcal{W}_K.$$

Sean (ρ_i, V_i, N_i), $i = 1, 2$ dos representaciones de Weil-Deligne, un morfismo $f : V_1 \longmapsto V_2$, entre estas representaciones, es una transformación $\mathbb{C}$-lineal tal que

$$\begin{aligned} f \circ \rho_1 &= \rho_2 \circ f, \\ f \circ N_1 &= N_2 \circ f. \end{aligned}$$

Definición 3.4.2. Decimos que (ρ, V, N) es **semisimple** si la representación suave (ρ, V) de $\mathcal{W}$ es semisimple.

Vamos a denotar como $\mathcal{G}_n(K)$ al conjunto de clases de isomorfismo de representaciones de Weil-Deligne semisimples de $\mathcal{W}_K$ de dimensión n. A su vez, vamos a identificar al conjunto $\mathcal{G}_n^{ss}(K)$ de representaciones suaves semisimples del grupo de Weil (ρ, V) con el conjunto de clases de representaciones de Weil-Deligne $(\rho, V, 0) \in \mathcal{G}_n(K)$, y de la misma manera vamos a identificar al conjunto de representaciones suaves irreducibles del grupo de Weil $\mathcal{G}_n^0(K)$ de manera que se tiene:

$$\mathcal{G}_n^0(K) \subset \mathcal{G}_n^{ss}(K) \subset \mathcal{G}_n(K).$$

En lo que sigue, reduciremos un poco la notación y escribiremos (ρ, N) en vez de (ρ, V, N) para las representaciones de Weil-Deligne.

Tenemos la siguiente proposición/definición que describe las operaciones que se pueden hacer entre representaciones de Weil-Deligne, la única parte que requiere demostración es la buena definición:

Proposición 3.4.3. *Sean $\sigma' = (\sigma, N)$ y $\tau' = (\tau, P)$ dos representaciones de Weil-Deligne sobre espacios vectoriales V y W, respectivamente. Definimos*

(I) $\sigma' \oplus \tau' := (\sigma \oplus \tau, N \oplus P)$.

(II) $\sigma' \otimes \tau' := (\sigma \otimes \tau, N \otimes id + id \otimes P)$.

(III) *Sea $\check{\sigma}'$ la representación contragradiente en el espacio dual $\check{V}$ de V. Entonces $\check{\sigma}' := (\check{\sigma}, \check{N})$, donde*

$$\langle \check{\sigma}(g) f, v \rangle = \langle f, \sigma(g^{-1}) v \rangle$$

y

$$\langle \check{N} f, v \rangle = -\langle f, N v \rangle,$$

para $g \in \mathcal{W}_K$, $f \in \check{V}$, y $v \in V$.

(IV) *Sea L/K una extensión finita separable, notamos como $\mathrm{Res}_{L/K} := \mathrm{Res}_{\mathcal{W}_L}^{\mathcal{W}_K}$ e $\mathrm{Ind}_{L/K} := \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_L}^{\mathcal{W}_K}$ a los funtores restricción e inducción de representaciones. Sea $\rho' = (\rho, M)$ actuando sobre un espacio vectorial U. Luego definimos*

$$\mathrm{Res}_{L/K}\, \sigma' := (\mathrm{Res}_{L/K}\, \sigma, N)$$

y

$$\mathrm{Ind}_{L/K}\, \rho' := (\mathrm{Ind}_{L/K}\, \rho, M_{L/K}),$$

donde $M_{L/K}$ es un endomorfismo nilpotente definido de la siguiente manera:

Sea $G = \mathcal{W}$ y $H = \mathcal{W}_L$, miramos al espacio vectorial U como un $\mathbb{C}[H]$-módulo a izquierda vía la representación ρ. Definimos la representación de G como la extensión de escalares $\mathrm{Ind}_{L/K}\, \rho = \mathrm{Ind}_H^G := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} U$. Entonces se define

$$M_{L/K}(g \otimes u) := |g|^{-1} (g \otimes Mu), \quad g \in G,\ u \in U.$$

Demostración. Ver la Sección 3 de [Roh94]. □

3.4.1. L-función y constante local para representaciones de Weil-Deligne

L-función

Sea $\sigma' = (\sigma, V, N)$ una representación de Weil-Deligne. Definimos

$$V^{\mathcal{I}_K} = \{\, v \in V \mid \sigma(g) v = v,\ \forall g \in \mathcal{I}_K \,\},$$
$$V_N = \mathrm{Ker}\, N,\ V_N^{\mathcal{I}_K} = V^{\mathcal{I}_K} \cap V_N.$$

Los subespacios $V^{\mathcal{I}_K}, V_N^{\mathcal{I}_K} \subset V$ son invariantes por la acción de σ. Más aún, si Φ es un elemento de Frobenius geométrico, entonces las restricciones $\sigma(\Phi)\big|_{V^{\mathcal{I}_K}}, \sigma(\Phi)\big|_{V_N^{\mathcal{I}_K}}$ son independientes de la elección de Φ.

Definición 3.4.4. La **L-función** de σ' es la función meromorfa

$$L(\sigma', s) := \frac{1}{\det\left(1 - q^{-s} \sigma(\Phi)\big|_{V_N^{\mathcal{I}_K}}\right)}.$$

Notar que cuando $N = 0$, i.e. ρ' es una representación del grupo de Weil, se tiene que $V_N^{\mathcal{I}_K} = V^{\mathcal{I}_K}$.

Posee las siguientes propiedades:

Proposición 3.4.5. *(L1)* $L(\sigma' \oplus \tau', s) = L(\sigma', s) L(\tau', s)$.

(L2) $L(\mathrm{Ind}_{L/K}\, \rho', s) = L(\rho', s)$.

Demostración. La propiedad $(L1)$ es inmediata, el polinomio característico se factoriza en la suma directa como producto de los polinomios característicos en cada sumando.

Para $(L2)$, hace falta usar dos lemas[4]:

[4] Ver la Proposición 3.8. en [Del75].

Lema 3.4.6. *Sean W un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathrm{End}(W)$. Sea $T_f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^f \otimes W)$ con $f \in \mathbb{N}$ definido como*

$$\begin{aligned} T_f(e_j \otimes w) &:= e_{j+1} \otimes w, \quad w \in W,\ 0 \leqslant j \leqslant f-2, \\ T_f(e_{f-1} \otimes w) &:= e_0 \otimes T(w). \end{aligned}$$

Entonces

$$\det(1 - xT_f) = \det(1 - x^f T).$$

En lo que sigue, vamos a trabajar con de $\mathbb{C}[G]$-módulos y $\mathbb{C}[H]$-módulos. Vamos a considerar en el funtor inducción $\mathrm{Ind}_H^G V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$.

Lema 3.4.7. *Sean G un grupo, H un subgrupo de G de índice finito, e I un subgrupo normal de G. Tomamos $J := I \cap H$. Dados un $\mathbb{C}[H]$-módulo U, tenemos un isomorfismo de G/I-módulos*

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G U\right)^I \cong \mathrm{Ind}_{H/J}^{G/I} U^J,$$

donde H/J lo identificamos con el subgrupo HI/I de G/I.

Consideramos ahora $G = \mathcal{W}_K$, $H = \mathcal{W}_L$, $J = \mathcal{I}_K \cap H = \mathcal{I}_L$. Sea U el espacio de la representación de Weil-Deligne $\rho' = (\rho, M)$ del grupo H y sea $\sigma' = (\sigma, N)$ la representación de Weil-Deligne de la representación inducida por U. Por la fórmula explícita de N en la parte (iv) de la Proposición 3.4.3 podemos identificar

$$V_N = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} U_M = \mathrm{Ind}_{L/K} U_M,$$

de manera que

$$V_N^I = \mathrm{Ind}_{H/J}^{G/I} U_M^J \tag{3.4}$$

por el Lema 3.4.7. Entonces se tiene que

$$L(\sigma', s) = \frac{1}{\det\left(1 - q^{-s}\sigma(\Phi)\big|_{\mathrm{Ind}_{H/J}^{G/I} U_M^J}\right)}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, si tomamos $W = U_M^J$, luego

$$\mathrm{Ind}_{H/J}^{G/I} U_M^J = \mathbb{G}[G/I] \otimes_{\mathbb{C}[H/J]} W. \tag{3.6}$$

Sea $f = f(L/K)$ el grado de inercia, identificamos el lado derecho de (3.6) con $\mathbb{C}^f \otimes W$, haciendo corresponder al coset de Φ^j en G/I con la base canónica e_j en $\mathbb{C}^f$. Con lo cual si Φ_L es un elemento de Frobenius geométrico de L (de la forma $\Phi^f \xi$ con $\xi \in I$) y el endomorfismo es $T = \Phi_L\big|_W$, luego el Lema 3.4.6 nos da

$$\det\left(1 - x\Phi\big|_{\mathrm{Ind}_{H/J}^{G/I} U_M^J}\right) = \det\left(1 - xT_f\right) = \det\left(1 - x^f T\right).$$

Evaluamos en $x = q^{-s}$ y reemplazamos la igualdad anterior en (3.5), obtenemos $(L2)$. □

Como corolario, podemos calcular L-funciones de representaciones semisimples a partir de los L-funciones de representaciones semisimples indescomponibles utilizando la propiedad $(L1)$. A su vez, el caso semisimple indescomponible se puede calcular gracias a la siguiente proposición:

Proposición 3.4.8. *Supongamos que $\sigma' = \pi \otimes \mathrm{Sp}(n)$, donde π es una representación irreducible de $\mathcal{W}_K$ y n es un entero positivo. Entonces*

$$L(\sigma', s) = L(\pi, s + n - 1),$$

Demostración. Sea W el espacio de π, con lo cual $V = W \otimes \mathbb{C}^n$ es el espacio de σ'. Entonces $V_N^{\mathcal{I}_K} = W^{\mathcal{I}_K} \otimes e_{n-1}$, y Φ actúa sobre $W^{\mathcal{I}_K} \otimes e_{n-1}$ vía el automorfismo $(\pi(\Phi)\big|_{W^{\mathcal{I}_K}}) \otimes q^{1-n}$. □

Constante local

Primero veamos el caso $\rho \in \mathcal{G}_n^{ss}(K)$: la definición de **constante local de Langlands-Deligne** (o simplemente para nosotros **constante local**) de una representación del grupo de Weil semisimple es complicada de definir. Su existencia y los siguientes dos resultados se prueban en la Sección 30 de [BH06].

Sea L/K una extensión finita separable. Para $\psi \in \widehat{K}$, tomamos $\psi_L := \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K} \in \widehat{L}$.

Teorema 3.4.9. *Sean $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$, y sea L/K recorriendo las extensiones finitas separables. Existe una única familia de funciones*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ss}(L) &\longmapsto \mathbb{C}[q^s, q^{-s}]^\times, \\ \rho &\longmapsto \epsilon(\rho, s, \psi_L), \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(I) *Si χ es un caracter de $L^\times$, se tiene que*

$$\epsilon(\chi \circ \alpha_L, s, \psi_L) = \epsilon(\chi, s, \psi_L).^5$$

(II) *Si $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{G}^{ss}(L)$, se tiene que*

$$\epsilon(\rho_1 \oplus \rho_2, s, \psi_L) = \epsilon(\rho_1, s, \psi_L)\epsilon(\rho_2, s, \psi_L).$$

(III) *Si $\rho \in \mathcal{G}_n^{ss}(L)$ y $L/T/K$, se tiene que*

$$\frac{\epsilon(\mathrm{Ind}_{L/T}\, \rho, s, \psi_T)}{\epsilon(\rho, s, \psi_L)} = \frac{\epsilon(R_{L/T}, s, \psi_T)^n}{\epsilon(1_L, s, \psi_L)^n}.$$

Proposición 3.4.10. *Sea $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$ y $\rho \in \mathcal{G}_2^{ss}(K)$.*

(I) *Existe un entero $n(\rho, \psi)$ tal que*

$$\epsilon(\rho, s, \psi) = q^{n(\rho,\psi)(\frac{1}{2}-s)}\epsilon(\rho, \frac{1}{2}, \psi).$$

(II) *Sea $a \in K^\times$. Entonces*

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho, s, a \cdot \psi) &= \det \rho(a)\, |a|^{\dim(\rho)(s-\frac{1}{2})}\, \epsilon(\rho, s, \psi), \\ n(\rho, a \cdot \psi) &= n(\rho, \psi) + v_K(a) \dim \rho. \end{aligned}$$

En particular, $n(\rho, \psi)$ solo depende de ρ y del nivel de ψ (ver la Proposición 2.3.13).

(III) *La constante local satisface la Ecuación funcional*

$$\epsilon(\rho, s, \psi)\epsilon(\check{\rho}, 1-s, \psi) = \det \rho(-1).$$

(IV) *Existe un entero n_ρ tal que si χ es un caracter de $K^\times$ de nivel $k \geqslant n_\rho$, entonces*

$$\epsilon(\chi \otimes \rho, s, \psi) = \det \rho(a(\chi))^{-1}\epsilon(\chi, s, \psi)^{\dim \rho},$$

para cualquier $a(\chi) \in K^\times$ tal que $\chi(1+x) = \psi(a(\chi)x)$, $x \in \mathfrak{P}^{[k/2]+1}$.

La **constante local** $\epsilon(\sigma', s, \psi)$ de una representación de Weil-Deligne $\sigma' = (\sigma, V, N)$ también depende de un caracter $\psi \in \widehat{K}$ no trivial, y se define como

$$\epsilon(\sigma', s, \psi) := \epsilon(\sigma, s, \psi)\frac{L(\check{\sigma}, 1-s)}{L(\sigma, s)}\frac{L(\sigma', s)}{L(\check{\sigma}', 1-s)}, \tag{3.7}$$

donde $\check{\sigma}' = (\check{\sigma}, \check{V}, \check{N})$ es la representación contragradiente de σ'.

Notar que cuando $N = 0$ esta definición coincide con la constante local de una representación del grupo de Weil.

También cumple varias propiedades que no necesitamos enunciar pero se pueden consultar en la Sección 11 de [Roh94].

[5] α_L es el mapa local de Artin que veremos en 4.1.4.

3.4.2. La representación especial

Ejemplo 3.4.11. Sea $V = \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Tomemos $N \in M_n(\mathbb{C})$ como el bloque de Jordan de rango $n-1$: si $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es la base de canónica de V, tenemos que $Ne_{n-1} = 0$ y $Ne_i = e_{i+1}, 0 \leqslant i < n-1$. Definimos la representación suave ρ_0 de $\mathcal{W}_K$ como $\rho_0(x)e_i = |x|^i e_i, 0 \leqslant i \leqslant n-1,\ x \in \mathcal{W}_K$. Y por último ponemos

$$\rho(x) = |x|^{(1-n)/2} \rho_0(x).$$

La terna $(\rho, \mathbb{C}^n, N)$ es una representación de Weil-Deligne semisimple llamada la **representación especial**. La denotamos como $\mathrm{Sp}(n)$).

Ejemplo 3.4.12. Si $(\rho, V, N) = \mathrm{Sp}(2)$. Tomamos $\zeta_K(s) = (1-q^{-s})^{-1}$, se tiene que

$$L(\rho, s) = \zeta_K(s - \frac{1}{2})\zeta_K(s + \frac{1}{2}) = L(\check{\rho}, s),$$

y por otro lado

$$L(\rho_N, s) = \zeta_K(s + \frac{1}{2}) = L(\check{\rho}_{\check{N}}, s).$$

Con lo cual si ψ tiene nivel uno, debe ser que $\epsilon(\rho, s, \psi) = q^{2s-1}$ (ver la Proposición 2.4.7), y nos va a quedar finalmente

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathrm{Sp}(2), s, \psi) &= q^{2s-1} \frac{\zeta_K(\frac{1}{2} - s)\zeta_K(\frac{3}{2} - s)\zeta_K(s + \frac{1}{2})}{\zeta_K(s - \frac{1}{2})\zeta_K(s + \frac{1}{2})\zeta_K(\frac{3}{2} - s)} \\ &= q^{2s-1} \frac{1 - q^{\frac{1}{2}-s}}{1 - q^{s-\frac{1}{2}}} = -q^{s-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Teorema 3.4.13. *Sea σ' una representación de Weil-Deligne semisimple. Entonces tiene una descomposición de la forma*

$$\sigma' \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \sigma_j \otimes \mathrm{Sp}(n_j),$$

donde σ_j es una representación irreducible del grupo de Weil. Más aún, esta escritura es única, i.e. si $\sigma' \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \rho_j \otimes \mathrm{Sp}(t_j)$ entonces $s = m$ y luego de permutar los índices se tiene que $\rho_j \cong \sigma_j$ y $t_j = n_j$ para todo j.

Demostración. Ver el Corolario 2 de la Sección 5 de [Roh94]. □

3.4.3. La constante de Langlands

Sea L/K una extensión finita separable y $\psi \in \widehat{K},\ \psi \neq 1$, definimos

$$\lambda_{L/K}(s, \psi) := \frac{\epsilon(R_{L/K}, s, \psi)}{\epsilon(1_L, s, \psi_L)}.$$

Donde 1_L es el caracter trivial de $\mathcal{W}_L$ y $R_{L/K} = \mathrm{Ind}_{L/K} 1_L$.

Proposición 3.4.14. *Se tiene que $\lambda_{L/K}(s, \psi)$ es constante en s.*

Demostración. En la Sección 30.4 de [BH06] se prueba que si ϕ es un caracter no ramificado de $K^\times$ de orden finito, entonces $\epsilon(\phi_L \otimes \rho, \psi_L, s) = \epsilon(\rho, \psi_L, s + s(\phi))$, donde $s(\phi) \in \mathbb{C}$ es tal que $\phi(\varpi) = q^{-s(\phi)}$. En particular vale si tomamos $\rho = \mathrm{Ind}_{L/K} 1_L$.

Usaremos esto de la siguiente manera, por el tercer ítem del Teorema 3.4.9 tenemos que $\lambda_{L/K}(s, \psi) = \frac{\epsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}\phi_L, \psi, s)}{\epsilon(\phi_L, \psi_L, s)}$. Como $\mathrm{Ind}_{L/K}\phi_L \cong \phi \otimes \mathrm{Ind}_{L/K} 1_L = \phi \otimes R_{L/K}$ nos queda

$$\lambda_{L/K}(s, \psi) = \frac{\epsilon(R_{L/K}, \psi, s + s(\phi))}{\epsilon(1_L, \psi_L, s + s(\phi))} = \lambda_{L/K}(s + s(\phi), \psi).$$

O sea, $\lambda_{L/K}(s, \psi) = \lambda_{L/K}(s + s(\phi), \psi)$ para todo caracter ϕ no ramificado de orden finito. Eso es, $\lambda_{L/K}(s, \psi) = \lambda_{L/K}(s + \zeta, \psi)$ para todas las raíces de la unidad $\zeta \in \mathbb{C}$. Como $\lambda_{L/K}(s, \psi)$ es una constante multiplicada por una potencia de $q^{\frac{1}{2}-s}$ se sigue el resultado. □

Definición 3.4.15. La constante $\lambda_{L/K}(\psi) = \lambda_{L/K}(s, \psi)$ la llamaremos **constante de Langlands**.

Observación 3.4.16. El tercer ítem del Teorema 3.4.9 se puede traducir en términos de la constante de Langlands:

$$\frac{\epsilon(\mathrm{Ind}_{L/T}\,\rho, \psi_T, s)}{\epsilon(\rho, \psi_L, s)} = \lambda_{L/T}(\psi_T)^n, \quad \rho \in \mathcal{G}_n^{ss}(L).$$

Y la ecuación funcional del tercer ítem de la Proposición 3.4.10 se traduce como

$$\lambda_{L/K}(\psi)^2 = \kappa_{L/K}(-1),$$

y por ende $\lambda_{L/K}(\psi)$ es una raíz cuarta de la unidad.

Proposición 3.4.17. *Sea $\psi \in \widehat{K}$ de nivel uno y L/K una extensión cuadrática mansamente ramificada. Se tiene que*

(I) *Si L/K es no ramificada, luego $\kappa_{L/K}$ es no ramificado de orden 2 y*

$$\lambda_{L/K}(\psi) = -1.$$

(II) *Si L/K es totalmente ramificada, luego $\kappa_{L/K}$ es el caracter no trivial de $K^\times/N_{L/K}(L^\times)$ y*

$$\lambda_{L/K}(\psi) = \tau(\kappa_{L/K}, \psi)/q^{1/2}.$$

En particular, $\lambda_{L/K}(\psi)^2 = \kappa_{L/K}(-1)$.

Demostración. Tenemos que

$$R_{L/K} = \mathrm{Ind}_{L/K}\,1_L = 1_K \oplus \kappa_{L/K}.$$

Las fórmulas se deducen del Teorema 2.4.9 y de la Proposición 2.4.7. La última afirmación se deduce de la observación anterior. □

Observación 3.4.18. Observemos que en (ii), $\kappa_{L/K}$ tiene orden 2, y es ramificado de nivel cero. Luego $\kappa_{L/K}(-1)$ está dada por el símbolo de Jacobi:

$$\kappa_{L/K}(-1) = \left(\frac{-1}{q}\right). \tag{3.8}$$

3.5. Representaciones ℓ-ádicas

Una razón por la cual nos interesa entender las representaciones de Weil-Deligne es para hablar de representaciones ℓ-ádicas, que aparecen en los grupos de cohomología étale y en la geometría aritmética. Vamos a asumir en esta sección que $\ell \neq p$, con p la característica del cuerpo residual $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$. El caso $\ell = p$ es mucho más complicado y no lo vamos a mencionar acá.

Sea G un grupo localmente profinito y F un cuerpo. A la categoría de representaciones suaves de G sobre F-espacios vectoriales la denotaremos como $\mathbf{Rep}_F(G)$.

Sea F' otro cuerpo de característica cero. Sea $F \longrightarrow F'$ una inmersión de cuerpos. Si (π, V) es una representación suave de G sobre F, obtenemos una representación suave $\pi_{F'}$ de G en $F' \otimes_F V$ definida como

$$\pi_{F'} : 1 \otimes v \longmapsto 1 \otimes \pi(g)v.$$

Así, definimos el funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{Rep}_F(G) &\longrightarrow \mathbf{Rep}_{F'}(G), \\ (\pi, V) &\longmapsto (\pi_{F'}, F' \otimes_F V). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si la inmersión es un isomorfismo, nos queda que el funtor es una equivalencia de categorías. ¿Cuál es el propósito de esta discusión? Resulta que en el caso de la clausura algebraica de los números ℓ-ádicos $F = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, se tiene que $F \cong \mathbb{C}$ algebraicamente y tenemos una equivalencia de categorías para G (por ejemplo $G = \mathrm{GL}_2(K)$) entre $\mathbf{Rep}(G)$ y $\mathbf{Rep}_F(G)$. O sea que tenemos una biyección entre las clases de representaciones suaves irreducibles de G sobre $\mathbb{C}$ y las clases sobre F. Lo mismo reemplazando G por el grupo de matrices triangulares superiores $B \subset G$. Con lo

cual tenemos también una equivalencia de categorías $\mathbf{Rep}(B) \cong \mathbf{Rep}_F(B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Rep}(B) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_B^G"'] & \mathbf{Rep}_F(B) \arrow[d, "\mathrm{Ind}_B^G"] \\ \mathbf{Rep}(G) \arrow[r, "\cong"] & \mathbf{Rep}_F(G) \end{tikzcd}$$

Lo mismo pasa para el funtor de inducción compacta. Entonces cualquier teorema que clasifique representaciones suaves irreducibles de G en términos de Ind o $c-$Ind no depende del cuerpo de los coeficientes. Por ejemplo ver las Secciones 9.11 y el Teorema 6.2.4.

Similarmente podemos definir representaciones de Weil-Deligne de $\mathcal{W}_K$ sobre cualquier cuerpo de característica cero F: son las ternas (ρ, V, N) con (ρ, V) una representación suave del grupo de Weil sobre un F-espacio vectorial V y $N \in \mathrm{End}_F(V)$ un endomorfismo nilpotente que satisface

$$\rho(\sigma)N\rho(\sigma)^{-1} = |\sigma|\, N, \quad \sigma \in \mathcal{W}_K.$$

Notemos que tiene sentido la última ecuación porque $|\sigma|$ es una potencia de q en F. Por último se definen los morfismos de representaciones de Weil-Deligne como antes: son transformaciones F-lineales que conmutan con la acción y con el endomorfismo nilpotente. Notamos a la categoría de representaciones de Weil-Deligne de $\mathcal{W}_K$ sobre F como $\mathbf{D\text{-}Rep}_F(\mathcal{W}_K)$.

Nuevamente una inmersión de cuerpos $F \longrightarrow F'$ induce un funtor

$$\begin{aligned} \mathbf{D\text{-}Rep}_F(\mathcal{W}_K) &\longrightarrow \mathbf{D\text{-}Rep}_{F'}(\mathcal{W}_K), \\ (\rho, V, N) &\longmapsto (\rho_{F'}, F' \otimes V, 1 \otimes N). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Cuando $F \longrightarrow F'$ es un isomorfismo, nos queda una equivalencia de categorías.

Para las siguientes dos demostraciones usaremos el siguiente hecho. Sea $\mathfrak{O}_\ell$ la clausura entera de $\mathbb{Z}_\ell$ en E. Definimos para todo $m \geqslant 1$ los subgrupos $G_m = 1 + \ell^m M_d(\mathfrak{O}_\ell)$ de $\mathrm{GL}_d(E)$. Luego G_m es una sucesión decreciente de grupos abiertos de $\mathrm{GL}_d(E)$, y G_m/G_{m+1} es abeliano de exponente ℓ.

Lema 3.5.1. *Sea G un grupo profinito con pro-orden coprimo con ℓ, entonces toda representación continua de dimensión finita $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_d(E)$ tiene imagen finita.*

Demostración. Vamos a ver que $\ker\rho$ es abierto y, por ende, tiene índice finito, pues G es compacto.

Tomemos ahora $H = \rho^{-1}(G_1)$, es abierto en G. Afirmamos que $H = \ker\rho$. Por un lado $\rho(H) \subset G_1$ y como H es un subgrupo abierto de G, entonces también es profinito con pro-orden coprimo con ℓ, y debe ser que $\rho(H)$ módulo G_2 es profinito de pro-orden coprimo con ℓ, pues el cociente por el núcleo sigue siendo profinito de pro-orden coprimo con ℓ. Esto solo pasa si $\rho(H) = 0$ módulo G_2, i.e. $\rho(H) \subset G_2$. En general, podemos probar por inducción que $\rho(H) \subset \bigcap_{m\geqslant 1} G_m = 1$, o sea que $H \subset \ker\rho$. La otra inclusión es obvia. □

Para el siguiente teorema vamos a definir el endomorfismo exponencial y logaritmo. Si F tiene característica cero y $N \in \mathrm{End}_F(V)$ es nilpotente, la serie

$$\exp N = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \frac{N^i}{i!}$$

tiene finitos términos y es un elemento unipotente de $\mathrm{Aut}_F(V)$. Recíprocamente, a un endomorfismo unipotente lo podemos escribir como $U = 1 + N \in \mathrm{Aut}_F(V)$, con N nilpotente, obtenemos otro elemento nilpotente

$$\log U = \sum_{j\geqslant 1} (-1)^{j+1} \frac{N^j}{j}$$

de $\mathrm{End}_F(V)$. No hay que preocuparse de hablar de convergencia en la definición porque la sumatoria tiene finitos términos. Se tienen las conocidas relaciones $\log(\exp N) = N$ y $\exp(\log U) = U$.

Teorema 3.5.2 (Grothendieck). *Sea (ρ, V) una representación continua de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ sobre $E = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\ell \neq p$. Entonces existe un único endomorfismo nilpotente $N_\rho \in \mathrm{End}_E(V)$ tal que*

$$\rho(x) = \exp(t(x)N_\rho), \tag{3.11}$$

para todo x en algún subgrupo abierto de $\mathcal{I}_K$. Además, $N_\rho = 0$ si y solo si ρ es trivial en un subgrupo abierto de $\mathcal{I}_K$.

Más aún, tenemos que

$$\rho(\sigma)N_\rho\rho(\sigma)^{-1} = |\sigma|\, N_\rho, \quad \sigma \in \mathcal{W}_K. \tag{3.12}$$

Demostración. Antes de comenzar la demostración, observemos que las dos últimas afirmaciones son consecuencia de la unicidad y la última utiliza la Observación 3.2.3.

Primero veamos la unicidad. Supongamos que tenemos dos subgrupos abiertos H_i de $\mathcal{I}_K$ tales que $\rho(x) = \exp(t(x)N_i)$ para dos endomorfismos N_i. Consideramos $H = H_1 \cap H_2$, es un subgrupo abierto y como t no contiene a H en el núcleo, existe $y \in H \backslash \operatorname{Ker} t$. Se tiene que $t(y) \neq 0$ y $t(y)N_i$ es nilpotente, entonces $N_i = t(y)^{-1} \log \rho(y)$.

Nos toca ahora probar la existencia. Denotemos como $\mathfrak{O}_\ell$ a la clausura íntegra de $\mathbb{Z}_\ell$ en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Fijemos una base de V e identifiquemos $\mathrm{Aut}_E(V)$ con $\mathrm{GL}_d(E)$.

Sea $J := \operatorname{Ker} t \cap \rho^{-1}(G_2)$. Luego J es un subgrupo abierto de $\operatorname{Ker} t$ y $\rho(J) \subset G_2$. Análogamente a la demostración del lema anterior, se tiene que $\rho(J)$ es trivial.

Debido a que J es un subgrupo abierto de $\operatorname{Ker} t$, existe un subgrupo abierto H_0 de $\mathcal{I}_K$ tal que $H_0 \cap \operatorname{Ker} t \subset J$. Achicando H_0 de ser necesario, podemos asumir que $\rho(H_0) \subset G_2$. Con lo cual existe un subgrupo abierto, normal H de $\mathcal{W}_K$, de índice finito, tal que $H \cap \mathcal{I}_K \subset H_0$.

Si restringimos ρ a $H \cap \mathcal{I}_K$, se factoriza a través de un morfismo continuo $\phi : t(H \cap \mathcal{I}_K) \longrightarrow G_2$, i.e. $\rho(h) = \phi(t(h))$, $h \in H \cap \mathcal{I}_K$. Combinamos esto con la Observación 3.2.3 obtenemos

$$\rho(\Phi h \Phi^{-1})^q = \rho(h), \quad h \in H \cap \mathcal{I}_K,$$

para cualquier elemento de Frobenius de $\mathcal{W}_K$. Si h es como antes, tomemos λ autovalor de $\rho(h)$. Por la última ecuación, λ^q también es un autovalor de $\rho(h)$. Como $\rho(h)$ es invertible, los autovalores no son cero, y como el conjunto de autovalores es finito, debe ser que los autovalores de $\rho(h)$ son raíces de la unidad en E. Como $\rho(h) \in G_2$, el elemento $(\rho(h) - id_V)/\ell^2$ es entero sobre $\mathbb{Z}_\ell$.

Antes de seguir, necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.5.3. (I) *Si $\lambda \in E$ es una raíz de la unidad tal que $(\lambda - 1)/\ell^2$ es entero sobre $\mathbb{Z}_\ell$, luego $\lambda = 1$.*

(II) *Para $h \in H \cap \mathcal{I}_K$, la matriz $\rho(h) \in \mathrm{GL}_d(E)$ es unipotente.*

Demostración. Supongamos que λ tiene orden ℓ^r, $r \geqslant 1$. La extensión $\mathbb{Q}_\ell(\lambda)/\mathbb{Q}_\ell$ sería totalmente ramificada y $\lambda - 1$ un elemento uniformizante en $\mathbb{Q}_\ell(\lambda)$. Luego $(\lambda - 1)/\ell$ no es entero salvo cuando $\ell = 2$ y $r = 1$. De cualquier manera $(\lambda - 1)/\ell^2$ nunca es entero.

Supongamos ahora que $\lambda \neq 1$ y que el orden de λ es divisible por un número primo distinto de ℓ. Escribamos $\lambda = \alpha\beta$, para raíces de la unidad $\alpha \neq 1$ y β, de orden coprimo con ℓ y una potencia de ℓ, respectivamente. Luego $\lambda - 1 = \alpha(\beta - 1) + (\alpha - 1)$. $\alpha - 1$ es una unidad en $\mathbb{Q}_\ell(\lambda)$, pero $\beta - 1$ no. Entonces $\lambda - 1$ es una unidad y $(\lambda - 1)/\ell^2$ no puede ser entero. □

Ahora elegimos $h_0 \in H \cap \mathcal{I}_K$ tal que $t(h_0) \neq 0$. Como $\rho(h_0)$ es unipotente podemos considerar $N = t(h_0)^{-1} \log \rho(h_0)$. Así se tiene que N es nilpotente y $\rho(h_0) = \phi(t(h_0)) = \exp(t(h_0)N)$.

Finalmente tomemos $A = \mathbb{Z}_\ell t(h_0) \subset \mathbb{Z}_\ell$. Tenemos que $x \mapsto \phi(x)$ y $x \mapsto \exp(xN)$ son morfismos continuos $A \to \mathrm{GL}_d(E)$; coinciden en $t(h_0)$, con lo cual coinciden en $\mathbb{Z}t(h_0)$ y luego en A por continuidad. Tomando $H' = t^{-1}(A)$ tenemos que $\rho(x) = \exp(t(x)N)$, $x \in H'$. Por supuesto que H' es abierto en $\mathcal{I}_K$, ya que A es abierto en $\mathbb{Z}_\ell$. □

Observación 3.5.4. Bajo las hipótesis del teorema, la representación (σ, V) es suave si y solo si N_ρ es nulo. En particular, cuando $\dim V = 1$, ρ es suave.

En para enunciar el siguiente teorema vamos a definir la asignación $(\rho, V) \longmapsto (\rho_\Phi, V, N_\rho)$. Notar que (3.12) implica que N_ρ conmuta con todos los elementos de $\rho(\mathcal{I}_K)$.

Definimos ahora

$$\rho_\Phi(\Phi^a x) = \rho(\Phi^a x)\exp(-t(x)N_\rho), \quad a \in \mathbb{Z},\ x \in \mathcal{I}_K.$$

De esta manera $\rho_\Phi : \mathcal{W}_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_E(V)$ es un morfismo, que por el teorema de Grothendieck es trivial en un subgrupo abierto de $\mathcal{I}_K$. Por lo tanto es una representación suave de $\mathcal{W}_K$. Como también cumple (3.12) entonces la terna (ρ_Φ, V, N_ρ) es una representación de Weil-Deligne.

Teorema 3.5.5. *Sean $\Phi \in \mathcal{W}_K$ un elemento de Frobenius y $t : \mathcal{I}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ como antes. Sea $\boldsymbol{Rep}_E^f(\mathcal{W}_K)$ la categoría de representaciones continuas de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ sobre $E = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Entonces existe una equivalencia de categorías*

$$\boldsymbol{Rep}_E^f(\mathcal{W}_K) \longrightarrow \boldsymbol{D\text{-}Rep}_E(\mathcal{W}_K) \tag{3.13}$$

$$(\rho, V) \longmapsto (\rho_\Phi, V, N_\rho). \tag{3.14}$$

Más aún, la clase de isomorfismos de la representación de Weil-Deligne (ρ_Φ, V, N_ρ) solo depende de la clase de isomorfismos de (ρ, V), y no depende de la elección de Φ o t.

Demostración. Veamos que es funtor. Si (τ, U) es una representación continua de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ en E, y $\phi : V \longrightarrow U$ es un $\mathcal{W}_K$-morfismo, la unicidad del Teorema 3.5.2 nos da

$$N_\tau \circ \phi = \phi \circ N_\rho.$$

Luego, ϕ induce un morfismo de representaciones de Weil-Deligne $(\rho_\Phi, V, N_\rho) \longmapsto (\tau_\Phi, U, N_\tau)$.

Recíprocamente, si (σ, V, N) es una representación de Weil-Deligne, la fórmula

$$\sigma^\Phi(\Phi^a x) = \sigma(\Phi^a x)\exp(t(x)N), \quad a \in \mathbb{Z},\ x \in \mathcal{I}_K,$$

define una representación de $\mathcal{W}_K$ en V. Esta es continua porque σ es suave y el morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K &\longrightarrow \mathrm{Aut}_E(V), \\ x &\longmapsto \exp(t(x)N), \end{aligned}$$

es continuo. También se tiene que $N = N_\varphi$, con $\varphi := (\sigma^\Phi)_\Phi$.

Si (τ, U, M) es otra representación de Weil-Deligne y $\phi : (\sigma, V, N) \longrightarrow (\tau, U, M)$ es un morfismo de representaciones de Weil-Deligne, luego $\phi : V \longrightarrow U$ induce un morfismo $(\sigma^\Phi, V) \longrightarrow (\tau^\Phi, U)$. Luego $(\sigma, V, N) \longmapsto (\tau^\Phi, V)$ también es un funtor, y de hecho es un funtor inverso del primero.

Ahora, sea Φ' otro elemento de Frobenius y escribamos $\Phi' = \Phi \cdot x$ con $x \in \mathcal{I}_K$. Definimos $A \in \mathrm{Aut}_E(V)$ como

$$A = \exp(\alpha t(x) N_\rho),$$

con $\alpha = \frac{1}{q-1}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} A \circ \rho_\Phi(y) \circ A^{-1} &= \rho(y)\exp((\alpha t(x) - t(y) - \alpha t(x))N_\rho) = \rho_{\Phi'}(y), \quad y \in \mathcal{I}_K \\ &= \exp(\alpha t(x) N_\rho)\rho(\Phi)\exp(-\alpha t(x) N_\rho) \\ &= \rho(\Phi)\exp(\alpha t(x) q N_\rho)\exp(-\alpha t(x) N_\rho) \\ &= \rho(\Phi)\exp(\alpha(q-1)t(x)N_\rho) \\ &= \rho(\Phi)\exp(t(x)N_\rho). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\rho_{\Phi'}(\Phi) = \rho_{\Phi'}(\Phi' x^{-1}) = \rho(\Phi)\exp(t(x)N_\rho) = A \circ \rho_\Phi(\Phi) \circ A^{-1}.$$

Por ende $A \circ \rho_\Phi(g) \circ A^{-1} = \rho_{\Phi'}(g)$ para todo $g \in \mathcal{W}_K$. O sea que salvo isomorfismo, (ρ_Φ, V, N_ρ) no depende de Φ.

Veamos ahora el otro caso, tenemos que ver que la clase de isomorfismo de (ρ_Φ, V, N_ρ) no cambia si reemplazamos t por βt con $\beta \in \mathbb{Z}_\ell^\times$. Para esto, basta ver que existe $B \in \mathrm{A}_E(V)$ que conmute con ρ y tal que $BN_\rho B^{-1} = \beta N_\rho$.

Elijamos $a \in \mathbb{Z}$ positivo tal que $\rho(\Phi^a)$ sea central en $\rho(\mathcal{W}_K)$. Sea V_λ el autoespacio generalizado de la matriz $\rho(\Phi^a)$ respecto de λ, i.e. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\rho(\Phi^a) - \lambda)^{\dim V}$. La relación $\Phi^a N_\rho = |\Phi|^a N_\rho \Phi^a$ implica que $N_\rho V_{\lambda q^a} \subset V_\lambda$. Cada V_λ es un $\rho(\mathcal{W}_K)$-subespacio de V. Definimos entonces a B como

$$Bv = \mu_\lambda v, \quad v \in V_\lambda,$$

para una familia de elementos $\mu_\lambda \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ que satisface $\beta\mu_{\lambda q^a} = \mu_\lambda$. □

De manera análoga a la Sección 3.5, si elegimos un isomorfismo $E \cong \mathbb{C}$, obtenemos una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismos de representaciones sobre E y $\mathbb{C}$.

Definición 3.5.6. Decimos que una representación de Weil-Deligne (ρ, V, N) sobre E es **semisimple** si la representación suave (ρ, V) es semisimple.

Una representación (ρ, V) continua de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ se dice **Φ-semisimple** si su representación de Deligne (ρ_Φ, V, N_ρ) asociada vía el Funtor (3.13) es semisimple.

Notar que ρ es Φ-semisimple si y solo si ρ_Φ es semisimple como representación suave de $\mathcal{W}_K$.

Proposición 3.5.7. *Sea (ρ, V) una representación continua de dimensión finita de $\mathcal{W}_K$ sobre E. Son equivalentes:*

(I) *(σ, V) es Φ-semisimple.*

(II) *Existe un elemento de Frobenius $\Psi \in \mathcal{W}$ tal que $\rho(\Psi)$ es semisimple.*

(III) *$\rho(g)$ es semisimple para todo $g \in \mathcal{W}_K \backslash \mathcal{I}_K$.*

Demostración. Veamos primero que ítem (i) y (ii) son equivalentes. Por un lado (ρ, V) es Φ-semisimple si y solo si (ρ_Φ, V, N_ρ) es semisimple, pero recordemos que la última afirmación del Teorema 3.5.2 esta representación es isomorfa a (ρ_Ψ, V, N_ρ). Por otro lado (ρ_Ψ, V, N_ρ) es semisimple si y solo si (ρ_Ψ, V) es semisimple, y esto último sucede si y solo si $\rho_\Psi(\Psi) = \rho(\Psi)$ es semisimple por el ítem (ii) de la Proposición 3.3.6 aplicado al elemento de Frobenius Ψ.

Claramente $(iii) \Rightarrow (ii)$. Recíprocamente, si $g \in \mathcal{W} \backslash \mathcal{I}_K$ lo dividimos en dos casos. El primer caso es cuando $g = \Phi x,\ x \in \mathcal{I}_K$. De la demostración del Teorema 3.5.2 tenemos que ρ_Φ y ρ_Ψ son representaciones conjugados para elementos de Frobenius arbitrarios $\Phi, \Psi \in \mathcal{W}_K$. Con lo cual tomando $\Psi = g$ y evaluando las representaciones en g se tiene que $\rho(g) = \rho_\Psi(g)$ es conjugado a $\rho_\Phi(g)$, que es semisimple si y solo si $\rho(\Phi) = \rho_\Phi(\Phi)$ es semisimple por el ítem (iii) de la Proposición 3.3.6. El segundo caso es cuando $g = \phi^a x,\ x \in \mathcal{I}_K$ con $a \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Restringiéndonos a $\mathcal{W}_L$ con L/K una extensión no ramificada de grado $|a|$, por el ítem (i) del Lema 3.3.5 se puede asumir sin pérdida de generalidad que estamos otra vez en el primer caso. $\square$

Un corolario de esta proposición es:

Teorema 3.5.8. *Sea ℓ un número primo distinto de p y sea $n \geqslant 1$. El conjunto de clases de isomorfismos de los siguientes conjuntos corresponden de manera canónica.*

(I) *Las representaciones continuas Φ-semisimples de dimensión n de $\mathcal{W}_K$ sobre E, y*

(II) *las representaciones de Deligne semisimples de dimensión n de $\mathcal{W}_K$ sobre E.*

Notar que elegir un isomorfismo $E \cong \mathbb{C}$ induce una biyección entre estos conjuntos y el conjunto de clases de isomorfismos de representaciones de Deligne semisimples de dimensión n de $\mathcal{W}_K$ sobre $\mathbb{C}$.

3.6. El módulo de Tate de un grupo abeliano

En esta sección construiremos ejemplos de representaciones ℓ-ádicas provenientes de la geometría aritmética.

Definición 3.6.1. Sea A un grupo abeliano y ℓ un número primo positivo. El **módulo de Tate de A** es

$$\mathrm{T}_\ell(A) := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A[\ell^n].$$

Donde $A[\ell^n]$ es la ℓ^n torsión de A, o sea el núcleo del morfismo multiplicar por ℓ^n, y el sistema inverso de morfismos está dado por

$$\begin{aligned} A[\ell^{n+1}] &\longrightarrow A[\ell^n], \\ a &\longmapsto \ell \cdot a. \end{aligned}$$

El módulo de Tate es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo vía la acción

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

que está bien definido, pues $\lambda \in \mathbb{Z}_\ell$ entonces $\lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \mod \ell^n$. Extendiendo escalares obtenemos un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espacio vectorial

$$V_\ell(A) := \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes \mathrm{T}_\ell(A).$$

Notar que si G es un grupo que actúa sobre A de manera compatible con el sistema inverso de morfismos, entonces $\mathrm{T}_\ell(A)$ y $V_\ell(A)$ heredan la acción natural de G.

Existen varios ejemplos de módulos de Tate, en las siguientes subsecciones veremos un par.

3.6.1. Módulo de Tate del grupo multiplicativo

Uno de los más simples es el módulo de Tate del grupo multiplicativo $A = (K^{sep})^\times$. Tenemos que los submódulos de ℓ^n-torsión son

$$A[\ell^n] = \mu_{\ell^n} = \left\{ a \in K^{sep} \;\middle|\; a^{\ell^n} = 1 \right\}.$$

Luego en nuestro caso $\varprojlim_n \mu_{\ell^n} \cong \mathbb{Z}_\ell$ si la característica de K es distinta de ℓ, y es $\cong \{1\}$ cuando la característica coincide con ℓ. En el primer caso, tenemos los morfismos

$$\begin{aligned} \mu_{\ell^{n+1}} &\longrightarrow \mu_{\ell^n}, \\ a &\longmapsto a^\ell \end{aligned}$$

que forman un sistema inverso. Llamamos **módulo de Tate del grupo multiplicativo** a

$$\mathrm{T}_\ell(\mu) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\ell^n}. \tag{3.15}$$

El módulo de Tate es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo libre de rango 1. En efecto, sea un elemento $\epsilon = (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{T}_\ell(\mu)$ tal que

$$\epsilon_1 \neq 1,\ \epsilon_{n+1}^\ell = \epsilon_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Luego ϵ genera el módulo de Tate como $\mathbb{Z}_\ell$-módulo con la $\mathbb{Z}_\ell$-acción sobre un elemento genérico $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{T}_\ell(\mu)$

$$\lambda \cdot (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\epsilon_n^{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

con $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_\ell$, $\lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \mod \ell$.

El grupo de Galois absoluto G_K actúa sobre $\mathrm{T}_\ell(\mu)$, pues en este caso G_K actúa naturalmente sobre K.

Si fijamos una base $\{\epsilon\}$ de $\mathrm{T}_\ell(\mu)$ como $\mathbb{Z}_\ell$-módulo, la acción continua de G_K en $\mathrm{T}_\ell(\mu)$ nos induce un caracter

$$\chi_\ell : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times,$$

llamado el **ℓ-ésimo caracter ciclotómico**. Este caracter está determinado por

$$\sigma \cdot (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\epsilon_n^{(\chi_\ell(\sigma))_n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ejemplo 3.6.2. Extendiendo escalares obtenemos la representación

$$\mathrm{V}_\ell(\mu) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{T}_\ell(\mu)$$

ℓ-ádica de dimensión 1. Cuando la característica de K es distinta de ℓ, el caracter $1 \otimes \chi_\ell$ tiene imagen infinita, pues eso mismo le sucede a χ_ℓ.

Además, $V_\ell(\mu)$ es un ejemplo de una representación ℓ-ádica que no es suave. En efecto, probar que no es suave equivale a probar que el núcleo no es abierto por la Proposición 2.5.4. Si el núcleo fuera abierto tendría índice finito porque G_K es compacto, luego la imagen sería finita.

3.6.2. Módulo de Tate de una curva elíptica

Más ejemplos de módulos de Tate provienen de **variedades abelianas**, variedades suaves proyectivas de dimensión finita equipadas con una estructura de grupo abeliano. El caso más simple es el de dimensión uno, o sea, **curvas elípticas**. En la Sección 3.7 veremos un poco más sobre curvas elípticas.

Sea E/K una curva elíptica sobre K. El módulo de Tate ℓ-ádico de E es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo libre de rango 2 equipado con una acción natural de G_K.

Antes de definirlo, necesitamos ver cómo actúa G_K sobre E. Sea $\sigma \in \mathrm{G}_K$, actúa sobre los puntos $P = (x, y) \in E$:

$$\sigma \cdot P = (\sigma(x), \sigma(y)).$$

Esta acción es compatible con la estructura aditiva de E, i.e. $\sigma \cdot (P + Q) = \sigma \cdot P + \sigma \cdot Q$. En efecto, la suma $+ : E \times E \longrightarrow E$ está dada por funciones racionales con coeficientes en K. Además, se tiene que en general σ preserva la n-torsión: $\sigma(E[n]) = E[n]$. En particular, podemos definir **el módulo de Tate de una curva elíptica** E tomando $A = (E, +)$ y $A[\ell^n] = E[\ell^n]$. Cuando $\ell \neq \mathrm{char}(K)$ se tiene que $E[\ell^n] \cong (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^2$, en otros casos es isomorfo a $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, o es isomorfo a 0 por la Proposición 7.1 de la Sección 7 del Capítulo III de [Sil09].

Definición 3.6.3. El módulo de Tate ℓ-ádico de E es $\mathrm{T}_\ell(E) = \varprojlim_n E[\ell^n]$.

Observación 3.6.4. El módulo de Tate de E nos induce una representación $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-ádica del grupo de Galois absoluto $\mathrm{V}_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{T}_\ell(E)$ de dimensión 2.

3.7. Curvas elípticas sobre cuerpos de valuación discreta

3.7.1. Generalidades sobre curvas elípticas

Lo que sigue es una breve introducción a curvas elípticas definidas sobre un cuerpo arbitrario K. Para una introducción más profunda a las curvas elípticas se recomiendan: [ST92], [Sil09] y [Sil94].

Definición 3.7.1. Una **curva elíptica** E/K es una curva algebraica sobre K proyectiva suave y de género uno, con al menos un punto sobre K denotado como O.

Toda curva elíptica admite un modelo plano; más aún, es isomorfa sobre K a la curva dada por la ecuación

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

con $a_i \in K$. En este isomorfismo el punto O corresponde al $[0 : 1 : 0]$ en el plano proyectivo. Esta escritura se llama **forma de Weierstrass**.

Definición 3.7.2. Tenemos las cantidades:

- $b_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad b_4 = 2a_4 + a_1a_3, \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6, \quad b_8 = a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2.$
- $c_4 = b_2^2 - 24b_4, \quad c_6 = b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6.$
- $\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6, \quad j(E) = c_4^3/\Delta.$

Definición 3.7.3. A la cantidad Δ se la llama **discriminante** de la forma de Weierstrass asociada a E. A $j(E)$ se la llama **j-invariante** de la curva elíptica E.

La discriminante depende de la forma de Weierstrass, pero $j(E)$ no.

Si además la característica es distinta de 2 y 3, luego de un cambio lineal de variables se tiene que

$$E : y^2 = x^3 - 27c_4x - 54c_6.$$

Definición 3.7.4. La Ecuación anterior, sustituyendo $-27c_4 = a_4$ y $-54c_6 = a_6$, se llama **forma de Weierstrass reducida**.

Definición 3.7.5. La curva dada por la forma de Weirstrass se clasifica de la siguiente manera:

(I) Es **no singular** si y solo si $\Delta \neq 0$.

(II) Tiene un **nodo** si y solo si $\Delta = 0$ y $c_4 \neq 0$.

(III) Tiene una **cúspide** si y solo si $\Delta = c_4 = 0$.

Proposición 3.7.6. *(a) Cuando una curva tiene un nodo o una cúspide la curvas es singular, además existe un único punto singular.*

(b) Dos curvas elípticas son isomorfas sobre $\overline{K}$ si y solo si sus j-invariantes coinciden.

Demostración. Ver la Proposición 1.4 del Capítulo III de [Sil09]. □

Definición 3.7.7. Los puntos $(x, y) \in K \times K$ que son solución de la forma de Weierstrass se llaman **puntos K-racionales**. O simplemente **racionales** cuando sea claro cuál es el cuerpo base. El punto O se considera racional. El conjunto de puntos K-racionales junto con O se denota como $E(K)$.

El interés de estudiar curvas elípticas es que el conjunto $E(K)$ posee una estructura de grupo abeliano que se puede definir de forma geométrica. Con lo cual se puede estudiar la *aritmética* de una curva elíptica.

Definición 3.7.8. El subgrupo $E[n]$ es el subgrupo de n-torsión de $E(\overline{K})$.

3.7.2. Twist cuadrático

Solamente por esta subsección, asumiremos que K es un cuerpo arbitrario con característica distinta de 2.

Sea E/K una curva elíptica. Como la característica es distinta de 2, podemos escribir, luego de un cambio lineal de variables, la forma de Weierstrass

$$E : y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Dado $d \in K^\times$ no cuadrado, tenemos una extensión cuadrática separable (y Galois) $L = K(\sqrt{d})$. Esta extensión define un caracter cuadrático

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) &\longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \{1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto \frac{\sigma(\sqrt{d})}{\sqrt{d}}. \end{aligned}$$

Definición 3.7.9. El **twist cuadrático** de E es una curva elíptica E^χ, definida por la ecuación

$$E^\chi : y^2 = x^3 + da_2x^2 + d^2a_4x + d^3a_6.$$

Las curvas elípticas E y E^χ no son isomorfas sobre K, pero sí sobre L.

3.7.3. Curvas elípticas sobre cuerpos de valuación discreta

Sea K un cuerpo local no arquimediano con valuación v y valor absoluto $|\cdot|$. De ahora en adelante vamos a suponer por simplicidad que la característica de K es cero, i.e. es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, de todas formas los resultados que enunciaremos se darán con un poco más de generalidad y aclararemos cuándo se puede asumir una característica distinta.

Las demostraciones de los próximos resultados se pueden encontrar en el Capítulo VII de [Sil09]. En este caso, la forma de Weierstrass de E se puede asumir que los coeficientes están en $\mathcal{O}_K$ luego de hacer un cambio de variables. Cuando además $v(\Delta)$ sea minimizado diremos que la forma de Weierstrass es **minimal**. Resulta que esta siempre existe y dos formas minimales son isomorfas sobre K.

Entonces siempre podemos reducir los coeficientes de la forma de Weierstrass minimal módulo ϖ. Así obtendremos una curva sobre el cuerpo residual k, posiblemente singular

$$\tilde{E} : y^2 + \tilde{a}_1xy + \tilde{a}_3y = x^3 + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_4x + \tilde{a}_6.$$

Llamamos a la curva $\tilde{E}/k$ la **reducción de E módulo ϖ**.

3.7.4. Reducción buena y mala

Clasificaremos a E según si la curva reducida $\tilde{E}$ es una de tres tipos distintos.

Definición 3.7.10. Decimos que:

(a) E tiene **reducción buena** sobre K si $\tilde{E}$ es *no singular*.

(b) E tiene **reducción multiplicativa** sobre K si $\tilde{E}$ tiene un *nodo*.

(c) E tiene **reducción aditiva** sobre K si $\tilde{E}$ tiene una *cúspide*.

En los casos (b) y (c) decimos que E tiene **reducción mala**. Si E tiene reducción multiplicativa, diremos que la reducción es **partida** si las pendientes de las rectas tangentes en el nodo están en k. Cuando esto no sucede decimos que E tiene reducción multiplicativa **no partida**.

Definición 3.7.11. Decimos que E tiene **reducción potencialmente buena** sobre K si existe una extensión finita K'/K tal que E tiene reducción buena sobre K'.

Análogamente definimos **reducción potencialmente multiplicativa** sobre K.

Teorema 3.7.12. *(I) Sea K'/K una extensión no ramificada. Entonces el tipo de reducción de E sobre K es el mismo que el de E sobre K'.*

(II) Sea K'/K una extensión finita. Si E tiene reducción buena o multiplicativa sobre K, entonces tiene el mismo tipo de reducción sobre K'.

(III) Existe una extensión finita K'/K tal que E tiene reducción buena o multiplicativa partida sobre K'.

Proposición 3.7.13. *La curva E tiene reducción potencialmente buena si y solo si su j-invariante es entero (i.e. $j(E) \in \mathcal{O}_K$).*

Teorema 3.7.14 (Criterio de Néron-Ogg-Shafarevich)**.** *Sea E/K una curva elíptica. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(I) E tiene buena reducción sobre K.

(II) El módulo de Tate $T_\ell(E)$ es trivial en $\mathcal{I}_L$ para algún $\ell \neq p$.

(III) El módulo de Tate $T_\ell(E)$ es trivial en $\mathcal{I}_L$ para todo $\ell \neq p$.

3.8. La curva de Tate y el teorema de uniformización

Como en la Sección anterior, sea K un cuerpo local no arquimediano. Para $q \in K$ denotemos como $q^{\mathbb{Z}}$ al subgrupo generado por q en $K^\times$.

Las demostraciones de los próximos resultados se pueden encontrar en el Capítulo V de [Sil94].

Teorema 3.8.1 (Tate)**.** *Sea $q \in K^\times$ con $|q| < 1$ y sean*

$$S_m(q) = \sum_{i \geqslant 1} \frac{i^m q^i}{1 - q^i},$$

$$a_4(q) = -5S_3(q),\ a_6(q) = \frac{-5S_3(q) + 7S_5(q)}{12}.$$

Entonces se tiene que:

*(I) Las series $a_4(q)$ y $a_6(q)$ convergen en K y definen **la curva de Tate***

$$E_q : y^2 + xy = x^3 + a_4(q)x + a_6(q).$$

(II) *E_q es una curva elíptica sobre K con Δ-invariante*

$$\Delta = q\prod_{i\geqslant 1}\left(1-q^i\right)^{24},$$

y j-invariante

$$j(E_q) = \frac{1}{q} + \sum_{i\geqslant 0} c(i)q^i,$$

donde los $c(i)$ son enteros.

(III) *Las series*

$$X(u,q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{q^i u}{(1-q^i u)^2} - 2S_1(q),$$
$$Y(u,q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{q^{2i}u^2}{(1-q^i u)^3} + S_1(q),$$

convergen para todo $u \in \overline{K}\backslash q^{\mathbb{Z}}$. Además, estas series definen un morfismo continuo sobreyectivo $\phi : \overline{K}^\times \longrightarrow E_q(\overline{K})$, definido como

$$u \longmapsto \begin{cases} (X(u,q), Y(u,q)) & u \notin q^{\mathbb{Z}} \\ 0 & u \in q^{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

El núcleo de ϕ es $q^{\mathbb{Z}}$. En particular ϕ induce un isomorfismo continuo $\overline{K}^\times/q^{\mathbb{Z}} \cong E_q$.

(IV) *Para todo $\sigma \in \mathrm{G}_K$ se tiene que*

$$\phi(\sigma(u)) = \sigma(\phi(u)),\ \forall u \in \overline{K}^\times.$$

En particular ϕ induce también un isomorfismo de G_K-módulos

$$\phi : L^\times/q^{\mathbb{Z}} \longrightarrow E_q(L)$$

para toda extensión algebraica L/K.

La curva de Tate tiene j-invariante entera.

3.8.1. Teorema de uniformización

Volvemos al caso K local no arquimediano con característica cero. Para ver la demostración de estos resultados se pueden consultar el Capítulo VII y la Sección 7 del Apéndice C de [Sil09].

Lema 3.8.2. *Sea E/K una curva elíptica sobre un cuerpo K con $\mathrm{char}(K) \neq 2,3$. Sean c_4 y c_6 las constantes asociadas a la forma de Weierstrass de E. Supongamos que $j(E) \neq 0,1728$. Definimos*

$$\gamma(E/K) := -c_4/c_6 \in K^\times/{K^\times}^2.$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

(I) *La constante $\gamma(E/K)$ está bien definido y no depende de la elección de la forma de Weierstrass.*

(II) *sea E'/K otra curva elíptica con $j(E') \neq 0,1728$. Entonces E y E' son isomorfas sobre K si y solo si $j(E) = j(E')$ y $\gamma(E/K) = \gamma(E'/K)$.*

(III) *Sean E/K y E'/K dos curvas elípticas con $j(E') = j(E) \neq 0,1728$, y supongamos que $\gamma(E/K) \neq \gamma(E'/K)$, con lo cual $d = \frac{\gamma(E/K)}{\gamma(E'/K)}$ define una extensión cuadrática*

$$L = K(\sqrt{d}).$$

Sea χ su caracter cuadrático asociado. Luego existe un isomorfismo de G_K-módulos

$$E(\overline{K}) \longrightarrow \chi \otimes E'(\overline{K}).$$

Teorema 3.8.3 (El teorema de uniformización). *Sea E/K una curva elíptica con $j(E)$ no entero*[6] *y $\gamma(E/K) \in K^\times / \left(K^\times\right)^2$. Entonces*

(a) Existe un único $q \in \overline{K}$ con $|q| < 1$ y tal que E es isomorfa sobre $\overline{K}$ a la curva de Tate E_q.

(b) Sea q como en el ítem anterior. Son equivalentes:

(I) E es isomorfa a E_q sobre K.

(II) $\gamma(E/K) = 1$.

(III) E tiene reducción multiplicativa partida.

Observación 3.8.4. Si $\gamma(E/K) \neq 1$, considerando $L = K(\sqrt{\gamma(E/K)})$, se tiene que $\gamma(E/L) = 1$, con lo cual $E(L) \cong E_q(L) \cong L^\times / q^{\mathbb{Z}}$.

Proposición 3.8.5. *Sea E/K una curva elíptica con $j(E)$ no entero. Sean $d = \gamma(E/K)$ y la extensión $L = K(\sqrt{d})$. Vale la siguiente clasificación:*

(I) E/K tiene reducción multiplicativa partida si y solo si $L = K$.

(II) E/K tiene reducción multiplicativa no partida si y solo si L/K es no ramificada de grado 2.

(III) E/K tiene reducción aditiva si y solo si L/K es ramificada de grado 2.

Más aún, en los casos (ii) e (iii) se tiene un isomorfismo de G_K-módulos

$$E(\overline{K}) \longrightarrow \chi \otimes E^\chi,$$

donde χ es el caracter cuadrático del twist cuadrático E^χ de E proveniente de la extensión L/K como vimos en la Subsección 3.7.2.

3.9. La representación de Weil-Deligne asociada a una curva elíptica

El objetivo de esta sección es construir canónicamente una representación de Weil-Deligne con coeficientes complejos que provenga del módulo de Tate de una curva elíptica y ver que su clase de equivalencia no dependa del primo ℓ elegido ni del isomorfismo algebraico $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \mathbb{C}$. En particular, esta sección constituye un ejemplo de cómo aplicar el Teorema 3.5.5 a una representación ℓ-ádica proveniente de una curva elíptica. Estudiaremos invariantes de esta representación de Weil-Deligne.

Primero sea $\rho'_{E/K,\ell} : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\ell(E)^*)$[7] la representación contragradiente de la representación de Galois ℓ-ádica proveniente de una curva elíptica, podemos asociarle una representación de Weil-Deligne compleja $\rho'_{E/K,\ell,\iota} = (\rho_{E/K,\ell,\iota}, N_{E/K,\ell,\iota})$. Simplemente aplicamos el siguiente procedimiento general a $\rho'_\ell := \rho'_{E/K,\ell}$.

Sea $\rho'_\ell : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\ell)$ una representación continua de un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial de dimensión finita V_ℓ, es el siguiente. Primero nos restringimos al grupo de Weil $\mathcal{W}_K$, luego aplicamos el Funtor (3.9) y extendemos los coeficientes a $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, aplicamos (3.13), y finalmente usamos el isomorfismo ι para conseguir una representación con coeficientes complejos vía el Funtor (3.10). Obteniendo así una representación de Weil-Deligne compleja $\rho'_{\ell,\iota} = (\rho_{\ell,\iota}, N_{\ell,\iota})$.

Por el Teorema 3.7.12 solamente hay que distinguir dos casos: el caso de reducción potencialmente buena, y el caso de reducción potencialmente multiplicativa. Veremos que en ambos casos, la representación $\rho'_{E/K,\ell,\iota}$ no depende de la elección de ℓ y ι. La notaremos entonces simplemente como $\rho'_{E/K}$.

[6] Eso es, E/K tiene reducción potencialmente multiplicativa por la Proposición 3.7.13.

[7] La razón por la cual tomamos la representación contragradiente en vez de la acción natural, es porque queremos imitar lo que se hace en el caso general, donde tenemos una variedad proyectiva suave X sobre K, la cual no posee módulo de Tate, sino que tiene representaciones de Galois provenientes de los grupos de cohomología ℓ-ádicos de X. En el caso de una curva elíptica, $H^1_\ell(E)$ es dual a $V_\ell(E)$.

3.9.1. Reducción potencialmente buena

Proposición 3.9.1. *Sea E/K con reducción potencialmente buena. Luego la clase de equivalencia de $\rho'_{E/K,\ell,\iota}$ no depende de ℓ ni de ι, luego escribimos $\rho'_{E/K} = (\rho_{E/K}, N_{E/K})$ en lugar de $\rho'_{E/K,\ell,\iota}$. Además, $N_{E/K} = 0$ y $\rho_{E/K}$ es semisimple. Más aún, $\rho_{E/K}$ es no ramificado si y solo si E/K tiene buena reducción.*

Demostración. Sea $L \subset \overline{K}$ una extensión finita de K donde E consigue buena reducción, y sea $\mathcal{I}_L$ el subgrupo de inercia correspondiente a L. Luego por el criterio de Néron-Ogg-Shafarevich 3.7.14 se tiene que $\rho'_{E/K,\ell}$ es trivial en $\mathcal{I}_L$, el cual es un subgrupo abierto de $\mathcal{I}_K$, y por lo tanto $N_{E/K,\ell} = 0$ por la última afirmación de Teorema 3.5.2. Con lo cual la clase de isomorfismo solo depende de $\rho_{E/K,\ell,\iota}$, el cual veremos no depende de ℓ ni de ι. Pero como la clase de una representación ρ compleja semisimple de dimensión finita de un grupo está determinado por su caracter $\operatorname{tr}\rho$ (ver el Lema de la página I-11 de [Ser97]) y por la teoría de Serre-Tate, $\operatorname{tr}\rho_{E/K,\ell}(g)$ es un número racional independiente de ℓ para todo $g \in \mathcal{W}_K$ (ver el corolario del Teorema 3 de la página 499 de [ST68]). Entonces nos basta con ver que $\rho_{E/K,\ell,\iota}$ es semisimple. De hecho, basta ver que $\rho_{E/L,\ell,\iota}$ es semisimple, pues una representación compleja de dimensión finita es semisimple si solo si su restricción a un subgrupo de índice finito es semisimple. Luego sin pérdida de generalidad, supongamos que E tiene buena reducción sobre K. Finalmente, por la Proposición 3.5.7 basta ver que para algún elemento de Frobenius Φ, el operador $\rho_{E/K,\ell,\iota}(\Phi)$ es semisimple, lo cual sucede por la Sección 14 de [Roh94].

La última afirmación se deduce nuevamente del criterio de Néron-Ogg-Shafarevich. □

Sea $L \subset \overline{K}$ la mínima extensión de K^{unr} donde E consigue buena reducción. Por el Corolario 3 de la Sección 2 de [ST68] sabemos que $L = K^{unr}(E[m])$ para todo $m \geqslant 3$ coprimo con p, tomando $m = \ell^n$ para n arbitrariamente grande, se deduce que el núcleo de $\rho'_{E/K}$ es $\operatorname{Gal}(\overline{K}/L)$, con lo cual $\rho'_{E/K}$ se puede ver como una representación fiel de $\mathcal{W}_K/\operatorname{Gal}(\overline{K}/L)$. Tenemos la identificación $\mathcal{W}_K/\operatorname{Gal}(\overline{K}/L) \cong \mathcal{W}_{L/K}$, donde $\mathcal{W}_{L/K}$ es el grupo de elementos de $\operatorname{Gal}(L/K)$ que inducen una potencia del mapa de Frobenius $x \mapsto x^q$ en el cuerpo residual l/k. Si Φ es un elemento de Frobenius inverso en $\mathcal{W}_{L/K}$ (pensado como la imagen en $\mathcal{W}_{L/K}$ de cualquier elemento de Frobenius inverso de $\mathcal{W}_K$) entonces tenemos el isomorfismo

$$\mathcal{W}_{L/K} \cong \Lambda \rtimes \langle \Phi \rangle.$$

Si llamamos $\Lambda = \operatorname{Gal}(L/K^{unr})$, tenemos exactamente 4 posibilidades:

(I) $\Lambda \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, con $e = 1, 2, 3, 4$ o 6.

(II) $p = 3$ y $\Lambda \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, donde el producto semidirecto está dado por la única acción no trivial de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(III) $p = 2$ y $\Lambda \cong H_8$, el grupo de cuaterniones de orden 8.

(IV) $p = 2$ y $\Lambda \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Ver la Sección 5.6 de [Ser72]. Notemos que en particular Λ es abeliano si y solo si $p \neq 2, 3$.

Proposición 3.9.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *E consigue buena reducción sobre una extensión finita abeliana de K.*

(II) *$\mathcal{W}_{L/K}$ es abeliano.*

(III) *$\rho'_{E/K}$ es reducible.*

(IV) *E consigue buena reducción sobre una extensión cíclica totalmente ramificada de K de grado $|\Lambda|$.*

Demostración. Primero observemos lo siguiente: sea F una extensión finita de K, luego por el criterio de Néron-Ogg-Shafarevich, E tiene reducción buena sobre F si y solo si $\operatorname{Gal}(\overline{K}/F) \cap \mathcal{I}_K \subset \operatorname{Ker}\rho'_{E/K}$.

Como $\mathcal{I}_K = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K^{unr})$ y $\operatorname{Ker}\rho'_{E/K} = \operatorname{Gal}(\overline{K}/L)$, la equivalencia anterior es lo mismo que decir que E tiene buena reducción sobre F si y solo si $L \subset FK^{unr}$ (usando la correspondencia de Galois).

Ahora supongamos que E tiene reducción buena sobre una extensión abeliana F/K, luego L está contenido en la composición de dos extensión abelianas de K, o sea que es también abeliano sobre K. Esto prueba que (i) implica (ii).

Supongamos que $\mathcal{W}_{L/K}$ es abeliano. Entonces Λ es abeliano y la acción de $\langle\Phi\rangle$ sobre Λ es trivial. Recordemos que por la Proposición 3.9.1 tenemos cuatro posibilidades para Λ y se tiene que $\mathcal{W}_{L/K} \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \times \langle\Phi\rangle$. Sea F la subextensión de L fija por la clausura de $\langle\Phi\rangle$ en $\mathrm{Gal}(L/K)$. Se tiene que F es una extensión cíclica totalmente ramificada de K con grado $e = 1, 2, 3, 4$ o 6, y E tiene reducción buena sobre F por lo visto al comienzo. Esto nos dice que (ii) implica (iv). Notemos que (iv) implica trivialmente a (i), con lo cual (i), (ii) y (iv) son equivalentes.

Finalmente, una representación compleja de dimensión 2 de un grupo, que además es semisimple y fiel, es reducible si y solo si el grupo es abeliano. Esto prueba la equivalencia entre (ii) y (iii). □

Para más equivalencias se puede ver la Proposición 2, Sección 2 de [Roh93].

3.9.2. Reducción potencialmente multiplicativa

Ahora supongamos que E tiene reducción potencialmente multiplicativa. Luego por la Proposición 3.8.5 existe una extensión L/K a lo sumo cuadrática donde E alcanza reducción multiplicativa partida, además existe un caracter cuadrático χ de G_K, i.e. $\chi^2 = 1$, tal que E^χ, tiene reducción multiplicativa partida sobre K. La proposición nos dice que existe un isomorfismo de G_K-módulos

$$E(\overline{K}) \cong \chi \otimes \overline{K}^\times / q^{\mathbb{Z}},$$

entonces tenemos un isomorfismo de representaciones de Galois ℓ-ádicas

$$V_\ell(E) \cong \chi \otimes V_\ell(\overline{K}^\times / q^{\mathbb{Z}}).$$

Podemos elegir como base de $V_\ell(\overline{K}^\times / q^{\mathbb{Z}})$ sobre $\mathbb{Q}_\ell$ los vectores

$$e_0 = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots) \quad \text{y} \quad e_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots),$$

donde ζ_n es una raiz ℓ^n-ésima primitiva de la unidad, $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$, $q_1^\ell = q$ y $q_{n+1}^\ell = q_n$. Usando esta base podemos identificar la acción de G_K en $V_\ell(E)$ con la representación

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_K &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell) \\ g &\longmapsto \begin{pmatrix} \chi(g)\chi_\ell(g) & * \\ 0 & \chi(g) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde, χ_ℓ es el ℓ-ésimo caracter ciclotómico. Transponiendo y tomando inversa obtenemos una representación equivalente a $\rho'_{E/K,\ell}$, con lo cual

$$\rho'_{E/K,\ell}(g) \cong \begin{pmatrix} \chi(g)\chi_\ell^{-1}(g) & 0 \\ * & \chi(g) \end{pmatrix}.$$

En particular, $\rho'_{E/K,\ell}(\mathcal{I}_K)$ es infinito porque $|q| < 1$, luego $\rho'_{E/K,\ell}$ no puede ser trivial en un subgrupo abierto de $\mathcal{I}_K$, con lo cual $N_{E/K,\ell} \neq 0$ por la última afirmación del Teorema 3.5.2.

Finalmente, escribimos la representación de Weil-Deligne proveniente del Teorema 3.5.5

$$\rho_{E/K,\ell}(g) = \rho'_{E/K,\ell}(g) \exp(-t_\ell(i) N_{E/K,\ell})$$

donde $g = \Phi^n i \in \mathcal{W}_K$. Reemplazando $g = \Phi$ vemos que

$$\rho_{E/K,\ell}(\Phi) = \pm \begin{pmatrix} q & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que $\rho_{E/K,\ell}(\Phi)$ tiene distintos autovalores, entonces es semisimple. Luego $\rho_{E/K,\ell,\iota}$ es semisimple por la Proposición 3.3.6. Como también es 2-dimensional y tiene $N_{E/K,\ell,\iota} \neq 0$, entonces es indescomponible. Ahora, la clasificación de representaciones indescomponibles semisimples de

la Sección 5 de [Roh94] nos dice que $\rho'_{E/K,\ell,\iota} \cong \xi \otimes \mathrm{Sp}(2)$ para un caracter ξ de $\mathcal{W}_K$. Comparando trazas de las dos representaciones, vemos que

$$\chi(g)(|g|^{-1}+1) = \xi(g)(1+|g|), \quad g \in \mathcal{W}_K.$$

Entonces $\xi = \chi|\cdot|^{-1}$, donde χ lo vemos ahora como caracter de $\mathcal{W}_K$ en vez de G_K. Por lo tanto $\rho'_{E/K,\ell,\iota}$ es isomorfo a $\chi|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{Sp}(2)$, el cual no depende de ℓ ni de ι. Esto concluye la demostración de la siguiente proposición, donde quitamos ℓ e ι de la notación:

Proposición 3.9.3. *Si E/K tiene reducción potencialmente multiplicativa y χ es el caracter de $\mathcal{W}_K$ cuadrático asociado a E^χ que aparece en la Subsección 3.7.2. Luego podemos escribir $\rho'_{E/K} \cong \chi|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{Sp}(2)$. En particular, $N_{E/K} \neq 0$ y $\rho'_{E/K}$ es ramificado. Más aún, χ es trivial, no ramificado y no trivial, o ramificado según E/K tiene reducción multiplicativa partida, reducción multiplicativa no partida, o reducción aditiva, respectivamente.*

La última afirmación se deduce la Proposición 3.8.5.

3.9.3. El determinante de la representación

Una consecuencia del *pairing de Weil* es el siguiente lema que se encuentra demostrado en la Sección 16 de [Roh94] y la Sección 8 del Capítulo III de [Sil09].

Lema 3.9.4. *Se tiene que*

$$\det(\rho'_{E/K}) = |\cdot|^{-1}.$$

Donde $\rho'_{E/K}$ denota a la representación de Weil-Deligne asociada a una curva elíptica, la cual gracias a las dos subsecciones anteriores vimos que no dependen de ℓ ni de ι.

3.10. La L-función

Ahora vamos a definir una L-función de E sobre K, esta va a ser la L-función asociada a la representación $\rho'_{E/K}$:

$$L(E/K,s) := L(\rho'_{E/K}, s).$$

Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.10.1. (I) *Si E tiene reducción buena. Sea $\tilde{E}$ la curva reducida sobre k, pongamos $a = 1 - \#\tilde{E}(k) + q$. Luego*

$$L(E/K,s) = (1 - aq^{-s} + q^{1-2s})^{-1}.$$

(II) *Si E tiene reducción multiplicativa, entonces*

$$L(E/K,s) = (1 - \alpha q^{-s})^{-1},$$

donde α es 1 o -1 dependiendo de si E tiene reducción multiplicativa partida o no, respectivamente.

(III) *Si E tiene reducción aditiva, entonces $L(E/K,s) = 1$.*

Demostración. (I) Sabemos que $L(\rho'_{E/K}, s) = P(q^{-s})^{-1}$ con

$$P(x) = \det(1 - x\rho'_{E/K,\ell}(\Phi)\big|_{(V_\ell(E)^*)^{\mathcal{I}_K}}),$$

pues es lo mismo calcular la L-función de $\rho'_{E/K}$ que de $\rho'_{E/K,\ell}$ y luego aplicar el isomorfismo ι (ver la Sección 9 de [Roh94]). En este caso tenemos $\mathcal{I}_K$ actúa trivialmente sobre $V_\ell(E)^*$, luego tenemos que $P(x)$ es de la forma:

$$P(x) = 1 - *x + qx^2$$

ya que sabemos que $\det(\rho'_{E/K,\ell})(\Phi) = \chi_{,\ell}^{-1}(\Phi) = q$. Sea F el endomorfismo de Frobenius de $\tilde{E}$. En la identificación $V_\ell(\tilde{E}) = V_\ell(E)$, la acción de F en el lado izquierdo corresponde con la acción de Φ^{-1} en el lado derecho. Con lo cual

$$P(x) = \det(1 - xF|_{V_\ell(\tilde{E})}),$$

entonces

$$P(1) = \det(1 - F|_{V_\ell(\tilde{E})}) = \deg(1 - F) = \#\tilde{E}(k)$$

por la Proposición 2.3 de [Sil09]. O sea que,

$$P(x) = 1 - ax + qx^2.$$

(II) Supongamos que E tiene reducción potencialmente multiplicativa, y que χ es un caracter de $\mathcal{W}_K$ cuadrático y E^χ es el twist de E que tiene reducción multiplicativa partida. Vimos que $\rho'_{E/K} \cong \chi|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{Sp}(2)$. Entonces

$$L(\rho'_{E/K}, s) = L(\chi|\cdot|^{-1}, s+1) = L(\chi, s)$$

por la Proposición de la Sección 8 de [Roh94]. Ahora, si E tiene reducción multiplicativa sobre K, entonces χ es no ramificada por la Proposición 3.9.3, entonces $L(\chi, s) = (1 - \chi(\Phi)q^{-s})^{-1} = (1 - \alpha q^{-s})^{-1}$ con α igual a 1 o -1 dependiendo de si E tiene reducción multiplicativa partida o no partida, respectivamente. Por otro lado, si E tiene reducción aditiva, entonces χ es ramificado por la Proposición 3.9.3, con lo cual $L(\chi, s) = 1$, probando el ítem (iii) en el caso de que E tenga reducción potencialmente multiplicativa.

(III) Nos queda probar el ítem (iii) cuando E no tiene buena reducción, pero si tiene reducción potencialmente buena. En este caso vimos que $\rho'_{E/K} = (\rho_{E/K}, 0)$, con $\rho_{E/K}$ ramificado: si V es el espacio de $\rho_{E/K}$, luego $V^{\mathcal{I}_K} \neq V$. Con lo cual $V^{\mathcal{I}}$ tiene dimensión 0 o 1. Si $V^{\mathcal{I}}$ tuviera dimensión 1, podríamos elegir una base $\{e_0, e_1\}$ de V tal que e_0 genera $V^{\mathcal{I}}$. Con esta base nuestra representación se vería como $\mathcal{W}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Como $\det \rho_{E/K} = |\cdot|^{-1}$ es trivial en $\mathcal{I}_K$, se tiene que $\rho_{E/K}(\mathcal{I})$ es finito, además es un subgrupo no trivial de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}$. Pero este grupo no tiene subgrupos finitos no triviales. Por lo tanto $V^{\mathcal{I}}$ tiene dimensión 0, con lo cual $L(\rho'_{E/K}, s) = 1$.

□

3.11. El conductor

En la Sección 10 de [Roh94] se definen el conductor $\mathfrak{f}(\rho')$ de una representación de Weil-Deligne ρ' y el exponente del conductor $a(\rho')$. Además se prueban varias propiedades que poseen. A partir de este conductor vamos a definir el conductor de E sobre K como el ideal

$$\mathfrak{f}(E/K) := \mathfrak{f}(\rho'_{E/K})$$

y vamos a definir el exponente del conductor de E como

$$a(E/K) := a(\rho'_{E/K}).$$

Entonces tenemos que $\mathfrak{f}(E/K) = \varpi^{a(E/K)}\mathcal{O}_K$. Vale la siguiente proposición:

Proposición 3.11.1. *(I) E tiene reducción buena si y solo si $a(E/K) = 0$.*

(II) Supongamos que E tiene reducción potencialmente multiplicativa. Si E tiene reducción multiplicativa sobre K, entonces

$$a(E/K) = 1.$$

Si E tiene reducción aditiva, sea ξ el caracter cuadrático de $\mathcal{W}_K$ tal que E^ξ tiene reducción multiplicativa. Entonces

$$a(E/K) = 2a(\xi).$$

(III) Supongamos que $p \neq 2, 3$ y E tiene reducción potencialmente buena. Entonces

$$a(E/K) = 2.$$

Demostración. (I) Se sigue de que una representación ρ' de Weil-Deligne es no ramificada si y solo si $a(\rho') = 0$, y de que $\rho'_{E/K}$ es no ramificado si y solo si E tiene buena reducción.

(II) Sea χ un caracter de $\mathcal{W}_K$ cuadrático y E^χ el twist con reducción multiplicativa partida. Sabemos que $\rho'_{E/K} \cong \chi|\cdot|^{-1} \otimes \mathrm{Sp}(2)$. Entonces $a(\rho'_{E/K})$ es $2a(\chi)$ o 1 dependiendo de si χ es ramificado o no ramificado por la Proposición de la Sección 10 de [Roh94], i.e. dependiendo de si E tiene reducción aditiva o multiplicativa, respectivamente. Si E tiene reducción aditiva entonces $a(\chi) = a(\xi)$, porque ambos E^χ y E^ξ tienen reducción multiplicativa y por ende χ/ξ es no ramificado.

(III) Sea L la extensión minimal de K^{unr} en $\overline{K}$ sobre el cual E obtiene buena reducción (ver el Corolario 3 de la página 498 de [ST68]). Entonces $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ es el núcleo de $\rho_{E/K}$, y podemos ver a $\rho_{E/K}$ como una representación fiel de

$$\mathcal{W}_{L/K} = \mathcal{W}_K / \mathrm{Gal}(\overline{K}/L).$$

Denotemos a la imagen de Φ en $\mathcal{W}(L/K)$ simplemente como Φ, podemos escribir a $\mathcal{W}(L/K)$ como el producto semidirecto

$$\mathcal{W}_{L/K} = \mathrm{Gal}(L/K^{unr}) \rtimes \langle \Phi \rangle,$$

y como $p \neq 2, 3$ sabemos que $\mathrm{Gal}(L/K^{unr})$ es un grupo cíclico de orden $2, 3, 4$ o 6 por lo comentado previamente a la Proposición 3.9.2. Consideraremos dos casos, dependiendo de si el producto semidirecto anterior es o no directo.

Si el producto es directo, luego $\mathcal{W}_{L/K}$ es abeliano. Como $\rho_{E/K}$ es semisimple, podemos escribirlo como la suma directa de caracteres de $\mathcal{W}_K$ triviales en $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$: $\rho_{E/K} = \chi \oplus \chi'$. De hecho, $\chi' = |\cdot|^{-1}\chi^{-1}$, porque $\det \rho_{E/K} = |\cdot|^{-1}$. Entonces $a(\rho_{E/K}) = a(\chi) + a(\chi') = 2a(\chi)$. Sin embargo, la restricción de χ a $\mathcal{I}$ tiene orden $2, 3, 4$ o 6, mientras que $p \geqslant 5$. Por lo tanto χ es mansamente ramificado, i.e. $a(\chi) = 1$.

Si el producto no es directo, entonces $\mathcal{W}_{L/K}$ no es abeliano, luego $\mathrm{Gal}(L/K^{unr})$ es cíclico de orden $3, 4$ o 6, su grupo de automorfismos tiene orden 2, entonces Φ^2 centraliza a $\mathrm{Gal}(L/K^{unr})$. Sea F la extensión cuadrática de K dentro de K^{unr}. Se tiene que el grupo

$$\mathcal{W}_{L/F} = \mathrm{Gal}(L/K^{unr}) \times \langle \Phi^2 \rangle$$

es un subgrupo abeliano normal de $\mathcal{W}_{L/K}$ y por lo tanto $\rho_{E/K}$ está inducido por un caracter 1-dimensional de $\mathcal{W}_{L/F}$, denotamos $\rho_{E/K} = \mathrm{Ind}_{F/K}\chi$. Veamos a χ como un caracter de $\mathcal{W}_{\overline{K}/F}$ trivial en $\mathrm{Gal}(K^{unr}/L)$. Como la restricción de χ a $\mathcal{I}$ tiene orden $3, 4$ o 6, se tiene que χ es mansamente ramificado. Entonces por la formula del conductor de una representación inducida $(a2)$ que aparece en la Sección 10 de [Roh94] se tiene que $a(\rho_{E/K}) = a(\mathrm{Ind}_{F/K}\chi) = 2a(\chi) = 2$.

□

Capítulo 4

Teoría de cuerpos de clases

Este capítulo es un resumen de la teoría de cuerpos de clases, esta se divide en dos partes: una local y otra global, ambos son compatibles en un sentido que veremos más adelante (ver Proposición 4.2.2). Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden encontrar en [Neu13] y [CF67]. Luego en cada caso se traduce la teoría de cuerpos de clases en una correspondencia de Langlands para dimensión $n = 1$.

4.1. Teoría de cuerpos de clases local

En esta sección K es un cuerpo local.

4.1.1. Reciprocidad local de Artin

Definición 4.1.1. Si G es un grupo topológico localmente compacto, denotamos por $G^{ab} = G/\overline{[G,G]}$ a **la abelianización** de G, donde estamos cocientando por la clausura topológica del subgrupo generado por los conmutadores de G.

Teorema 4.1.2 (Reciprocidad local de Artin)**.** *Sea K un cuerpo local. Existe un único morfismo continuo*

$$\theta_K : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

con la propiedad de que para cada extensión abeliana finita L/K, el morfismo

$$\theta_{L/K} : K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

dado por la composición de θ_K con el mapa natural $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ satisface:

(I) *Si K es no arquimediano y L/K es no ramificado luego $\theta_{L/K}(\pi) = \mathrm{Frob}_{L/K}$*[1] *para todo uniformizador π de $\mathcal{O}_K$.*

(II) *$\theta_{L/K}$ es sobreyectivo con núcleo $N_{L/K}(L^\times)$.*

Demostración. Ver [Tat79]. □

Observemos que el último ítem $\theta_{L/K}$ induce un isomorfismo $K^\times/N_{L/K}(L^\times) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$.

El morfismo θ_K que aparece en el teorema se llama **morfismo local de Artin** o **mapa de reciprocidad de Artin**.

Proposición 4.1.3. *Sea L/K una extensión finita no ramificada y sea v la valuación normalizada de K. Entonces $\theta_{L/K}(\alpha) = \mathrm{Frob}_{L/K}^{v(\alpha)}$.*

Demostración. Ver Proposición 2, Sección 2.5 del Capítulo VI de [CF67]. □

Corolario 4.1.4. *La composición de θ_K y $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$ manda $\alpha \mapsto \mathrm{Frob}^{v(\alpha)}$.*

[1] Ver 2.1.9 para una definición de $\mathrm{Frob}_{L/K}$.

Demostración. Es claro, pues $\mathrm{Gal}(K_{nr}/K) = \varprojlim_{L/K} \mathrm{Gal}(L/K)$, donde el límite recorre todas las extensiones finitas no ramificadas de K. □

Corolario 4.1.5. *Sea L/K una extensión abeliana finita. La imagen $\theta_K(U_K)$ coincide con el subgrupo de inercia de $G_{L/K}$*

Demostración. Ver el Corolario, Sección 2.5 del Capítulo VI de [CF67]. □

4.1.2. Grupos norma

Definición 4.1.6. Un **grupo norma** de un cuerpo local K es un subgrupo de la forma

$$N(L^\times) := N_{L/K}(L^\times) \subset K^\times,$$

para alguna extensión finita abeliana L/K.

Podríamos haber quitado la palabra *abeliana* y no habría cambiado la definición. Pues si L/K es una extensión finita separable, luego $N(L^\times) = N(F^\times)$, donde F es la extensión abeliana maximal de K en L; este resultado se conoce con el nombre **teorema de limitación de la norma** (ver la Proposición 4 de la Sección 2.6. del Capítulo VI de [CF67]). Este teorema muestra que los grupos norma no nos dicen nada sobre extensiones no abelianas de K.

El Teorema 4.1.2 nos dice que el grupo de Galois de una extensión finita abeliana L/K es canónicamente isomorfo al cociente $K^\times/N_{L/K}(L^\times)$. Para entender las extensiones finitas abelianas de un cuerpo local K, tenemos que entender los grupos norma.

Proposición 4.1.7. *La función $L \longmapsto N(L^\times)$ define una biyección que invierte inclusiones entre el conjunto de extensiones finitas abelianas L/K en K^{ab} y los grupos norma en $K^\times$. Más aún, esta biyección satisface lo siguiente:*

(I) $N((L_1L_2)^\times) = N(L_1^\times) \cap N(L_2^\times)$.

(II) $N((L_1 \cap L_2)^\times) = N(L_1^\times)N(L_2^\times)$.

En particular, cada grupo norma de K tiene índice finito en $K^\times$, y todo subgrupo de $K^\times$ que contiene un grupo norma es un grupo norma.

Demostración. Ver el Capítulo XI, Sección 4 de [Ser13]. □

4.1.3. Teorema de existencia

Tenemos la siguiente caracterización de subgrupos norma de $K^\times$:

Teorema 4.1.8. *Sea M un subgrupo de $K^\times$. Se tiene que M es un subgrupo norma si y solo si satisface las siguientes dos condiciones:*

(I) *M tiene índice finito en $K^\times$.*

(II) *M es un subgrupo abierto en $K^\times$.*

Demostración. Ver el Teorema 3, Sección 2.7 del Capítulo VI de [CF67]. □

Notar que si se satisface la condición (i), luego la condición (i) equivale a que M sea cerrado en $K^\times$.

Este teorema equivale a:

Teorema 4.1.9. *El mapa $\theta_K|_{U_K} : U_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K_{nr})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ver el Teorema 3a, Sección 2.7 del Capítulo VI de [CF67]. □

4.1.4. Mapa de reciprocidad local de Artin

Mapa transfer

Sean G es un grupo topológico localmente compacto y $H \leqslant G$ un subgrupo cerrado de índice finito de G. Fijamos una función $s : G/H \to G$ que sea sección de la función $G \to G/H$ entre G y las coclases a izquierda G que manda $g \in G \mapsto gH$ a una coclase. Se define el morfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{ver}_{G/H} : G^{ab} &\longrightarrow H^{ab} \\ g[G,G] &\longmapsto \prod_{x \in G/H} \left(s(gx)^{-1} g s(x) \right) [H,H], \end{aligned}$$

y se toma la clausura topológica sobre los subgrupos conmutadores $[G,G]$ y $[H,H]$. A este morfismo $\mathrm{ver}_{G/H}$ se lo llama **mapa transfer** o **mapa Verlagerung**, y es un morfismo continuo de grupos abelianos.

En particular podemos definir para L/K una extensión de cuerpos finita separable el mapa transfer $\mathrm{ver}_{L/K} : \mathcal{W}_K^{ab} \to \mathcal{W}_L^{ab}$.

Mapa de reciprocidad local de Artin

Existe un morfismo de grupos continuo llamado el **mapa de reciprocidad local de Artin**

$$\alpha_K : \mathcal{W}_K \to K^\times$$

Teorema 4.1.10. *El mapa de reciprocidad local cumple las siguientes propiedades:*

(I) *El morfismo α_K induce un isomorfismo topológico $\mathcal{W}_K^{ab} \cong K^\times$.*

(II) *Un elemento $x \in \mathcal{W}_K$ es un Frobenius geométrico si y solo si $\alpha_K(x)$ es un elemento uniformizante de K.*

(III) *Tenemos que $\alpha_K(\mathcal{I}_K) = U_K$ y $\alpha_K(\mathcal{P}_K) = U_K^1$.*

(IV) *Si L/K es una extensión finita separable, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}_L \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_L"] & \mathcal{W}_K \arrow[d, "\alpha_K"'] \\ L^\times \arrow[r, "N_{L/F}"] & K^\times \end{tikzcd}$$

(V) *Sea $\alpha : K \to K'$ un isomorfismo de cuerpos. El morfismo α induce un isomorfismo $\alpha : \mathcal{W}_K^{ab} \to \mathcal{W}_{K'}^{ab}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}_K^{ab} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha_K"'] & \mathcal{W}_{K'}^{ab} \arrow[d, "\alpha_{K'}"] \\ K^\times \arrow[r, "\alpha"'] & K'^\times \end{tikzcd}$$

(VI) *(Teorema transfer) Si L/K es una extensión finita separable, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}_L^{ab} \arrow[r, "\alpha_L"] & L^\times \\ \mathcal{W}_K^{ab} \arrow[u, "\mathrm{ver}_{L/K}"] \arrow[r, "\alpha_K"'] & K^\times \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $K^\times \hookrightarrow L^\times$ es la inclusión.

Corolario 4.1.11. *El mapa de reciprocidad de Artin α_K da un isomorfismo $\chi \mapsto \chi \circ \alpha_K$ entre el grupo de caracteres de $K^\times$ y los del grupo $\mathcal{W}_K$.*

Más aún, los caracteres no ramificados de $K^\times$ corresponden con los caracteres no ramificados de $\mathcal{W}_K$ y los caracteres de $K^\times$ mansamente ramificados con los caracteres de $\mathcal{W}_K$ triviales en $\mathcal{P}_K$.

4.1.5. Correspondencia local de Langlands cuando $n = 1$

Vamos a entender cómo se ven ambos lados de la correspondencia local de Langlands cuando $n = 1$ y K es local no arquimediano. Por un lado, $\mathcal{A}_1(K)$ es el conjunto de representaciones suaves irreducibles de $\mathrm{GL}_1(K) = K^\times$, como $K^\times$ es abeliano, este conjunto es el conjunto de representaciones 1-dimensionales $\chi : K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ por el Corolario 2.5.30, y la admisibilidad equivale a que sean morfismos continuos con la topología usual de $\mathbb{C}$ por la Proposición 2.5.4. Por otro lado, el conjunto $\mathcal{G}_1(K)$ es el conjunto de morfismos continuos $\rho : \mathcal{W}_K \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ con la topología usual de $\mathbb{C}$, pues las representaciones de Weil-Deligne 1-dimensionales tienen $N = 0$. Ahora, estos dos conjuntos están en biyección: como ρ es abeliana se factoriza por $\overline{\rho} : \mathcal{W}_K^{ab} \longmapsto \mathbb{C}^\times$ y luego componiendo por α_K obtenemos un morfismo continuo

$$\chi_\rho = \overline{\rho} \circ \alpha_K^{-1} : K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times,$$

donde $\alpha_K : \mathcal{W}_K^{ab} \longrightarrow K^\times$. Recíprocamente, si tenemos $\chi \in \mathcal{A}_1(K)$, luego $\chi \longmapsto \rho_\chi = \chi \circ \alpha_K \circ \pi$, donde $\pi : \mathcal{W}_K \longmapsto \mathcal{W}_K^{ab}$ es la proyección al cociente. Obtenemos así el siguiente teorema:

Teorema 4.1.12 (Correspondencia local de Langlands caso $n = 1$)**.** *La siguiente biyección preserva L-funciones y constantes locales:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_1(K) \\ \rho &\longmapsto \chi_\rho \end{aligned}$$

Demostración. Solo nos falta ver que preserva L-funciones y constantes locales. Para esto, vamos a comparar las L funciones y constantes locales de ρ y χ_ρ, primero en el caso ramificado y luego en el caso no ramificado, y por el momento lo haremos en el caso K local no arquimediano. Antes debemos probar la siguiente afirmación: ρ es no ramificado si y solo si χ es no ramificado. En efecto, que ρ sea no ramificado quiere decir que es trivial en $\mathcal{I}_K$, que a su vez equivale a que $\overline{\rho}$ sea trivial en la imagen de $\mathcal{I}_K$ vía $\mathcal{W}_K \longrightarrow \mathcal{W}_K^{ab}$, ahora esta imagen se corresponde con $U_K \subset K^\times$ vía el isomorfismo α_K, luego tenemos que χ es no ramificado si solo si χ_ρ es trivial en $U_K \subset K^\times$, i.e. es no ramificado.

Comparemos entonces las L funciones de χ_ρ y ρ. Si ambos son ramificados, tenemos por un lado que $L(\chi_\rho, s) = 1$ por definición, y por otro lado

$$L(\rho, s) = \frac{1}{\det(1 - \rho(\mathrm{Frob})|_{\mathbb{C}^{\mathcal{I}_K}} q^{-s})} \tag{4.1}$$

se vuelve 1, porque como ρ es ramificado, $\rho|_{\mathcal{I}_K}$ no es trivial, luego $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_K} = 0$, además las representación es 1-dimensional, así que el determinante en la fórmula es redundante y la podemos omitir.

En el otro caso, si ambos son no ramificados,

$$L(\chi_\rho, s) = \frac{1}{\chi_\rho(\varpi) q^{-s}} = \frac{1}{\rho(\mathrm{Frob}) q^{-s}}$$

donde, ϖ es un uniformizador de K, y donde la primera igualdad es por definición y la segunda es porque $\chi_\rho = \overline{\rho} \circ \alpha_K^{-1}$ y las propiedades de α_K. Veamos que ambos denominadores coinciden. En (4.1) se tiene que $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_K} = \mathbb{C}$ porque al ser no ramificado, ρ es trivial en el grupo de inercia. Esto prueba que las L-funciones en el caso no ramificado son iguales.

Ahora demostraremos el caso K cuerpo local arquimediano, i.e. $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Cuando K es el cuerpo de números complejos ambas representaciones son iguales y no hay nada que probar. Cuando K es el cuerpo de los números reales, los caracteres del grupo de Weil se parten por el cociente y se vuelven caracteres de $\mathbb{R}^\times$, como en el caso complejo, las L-funciones de representaciones que correspondan entre sí se imponen que sean iguales, según [Tat79].

Las constantes locales se definen para que coincidan según [Tat79]. □

4.2. Teoría de cuerpos de clases global

En lo que sigue de esta sección K es un cuerpo global.

4.2.1. Morfismo global de Artin

Vamos a construir el **morfismo global de Artin** usando los morfismos locales de Artin que definimos en la Sección 4.1. Según dicha sección, tenemos morfismos

$$\theta_{K_v} : K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_v^{ab}/K_v)$$

para cada lugar v. Por cada extensión finita abeliana L/K y cada lugar $w \mid v$ de L, componiendo θ_{K_v} con el morfismo natural $\mathrm{Gal}(K_v^{ab}/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_w/K_v)$ conseguimos morfismos sobreyectivos

$$\theta_{L_w/K_v} : K_v^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_w/K_v),$$

con núcleo $N_{L_w/K_v}(L_w^\times)$. Cuando K_v es no arquimediano y L_w/K_v es no ramificado tenemos que $\theta_{L_w/K_v}(\pi_v) = \mathrm{Frob}_{L_w/K_v}$ para todos los uniformizantes π_v de K_v.

Para cada v de K los L_w con w sobre v son isomorfos, luego lo que sigue no depende de la elección que hagamos de w. A $\mathrm{Gal}(L_w/K_v)$ lo vamos a identificar con el grupo de descomposición contenido en $\mathrm{Gal}(L/K)$ como vimos en la Proposición 2.1.55.

Como antes, sea L/K una extensión finita abeliana. Para cada lugar v de K, tomemos un lugar w de L sobre v y definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \theta_{L/K} : \mathbb{A}_K^\times &\longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \\ (a_v) &\longmapsto \prod_v \varphi_w(\theta_{L_w/K_v}(a_v)). \end{aligned}$$

El producto es finito, porque para casi todo v se tiene que

$$\varphi_w(\theta_{L_w/K_v}(a_v)) = \mathrm{Frob}_v^{v(a_v)} = 1,$$

pues $a_v \in \mathcal{O}_v^\times$ y v es no ramificado en L para dichos v. Este morfismo es continuo debido a que el núcleo es un abierto básico de $\mathbb{A}_K^\times$.

Si $L_1 \subset L_2$ son dos extensiones finitas abelianas de K, luego $\theta_{L_2/K}\big|_{L_1} = \theta_{L_1/K}$ para todo $a \in \mathbb{A}_K^\times$ por la compatibilidad local de los morfismos locales 4.1.2. Entonces los $\theta_{L/K}$ forman un sistema compatible de morfismos continuos. Luego determinan un morfismo continuo:

Definición 4.2.1. Sea K un cuerpo global. El **morfismo global de Artin** es el morfismo continuo

$$\theta_K : \mathbb{A}_K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K), \quad \theta_K = \varprojlim_{L/K} \theta_{L/K}.$$

Proposición 4.2.2. *El morfismo θ_K es el único morfismo continuo $\mathbb{A}_K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ con la propiedad de que para cada extensión finita abeliana L/K y para cada lugar w de L sobre v de K el diagrama*

$$\begin{tikzcd} K_v^\times \arrow[r, "\theta_{L_w/K_v}"] \arrow[d, hook, "\iota_v"] & \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \arrow[d, hook, "\varphi_w"] \\ \mathbb{A}_K^\times \arrow[r, "\theta_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L/K) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la definición de $\theta_{L/K}$. □

4.2.2. Reciprocidad global de Artin

La demostración de los siguientes resultados se encuentra en la Sección 5 del Capítulo VII del libro [CF67].

Teorema 4.2.3 (Reciprocidad global de Artin)**.** *El núcleo del mapa global de Artin θ_K contiene a $K^\times$, luego se induce un morfismo continuo*

$$\theta_K : C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K),$$

Más aún, para cada extensión finita abeliana L/K el morfismo

$$\theta_{L/K} : C_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$$

obtenido al componer θ_K con el morfismo natural $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ es sobreyectivo con núcleo $N_{L/K}(C_L)$.

Observemos que la última afirmación nos dice que $\theta_{L/K}$ induce un isomorfismo $C_K/N_{L/K}(C_L) \cong \mathrm{Gal}(L/K)$.

Teorema 4.2.4. *Sea L/K una extensión finita separable (no necesariamente abeliana). Luego el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_L \arrow[r, "\theta_L"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L^{ab}/L) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ C_K \arrow[r, "\theta_K"] & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K). \end{tikzcd}$$

Demostración. Se sigue del caso local. □

Teorema 4.2.5 (Teorema de existencia)**.** *Para todo subgrupo abierto M de índice finito en C_K existe una única extensión abeliana L/K tal que $N_{L/K}(C_L) = M$.*

Demostración. Ver [CF67]. □

Como antes, llamamos a M **subgrupo norma**.

4.2.3. Correspondencia entre caracteres de Hecke de orden finito y representaciones de Galois 1-dimensionales

Teorema 4.2.6. *Sea F/K una extensión finita Galois de un cuerpo de números K, existe una correspondencia entre caracteres de Hecke de orden finito y representaciones de Artin de dimensión 1 dada por la teoría de cuerpos de clases global. Además, esta correspondencia es compatible con la correspondencia local 4.1.12 y preserva L-funciones y constantes locales.*

Demostración. La teoría de cuerpos de clases global dice que existe un isomorfismo

$$\theta_K : \mathbb{A}_K^\times / K^\times \longrightarrow G_K^{ab}$$

el cual es compatible con la teoría de cuerpos de clases local. Usando este isomorfismo obtenemos una biyección

$$\rho \longmapsto \chi_\rho = \overline{\rho} \circ \theta_K$$

entre caracteres de Hecke de orden finito y representaciones de Artin de dimensión 1. Donde $\overline{\rho}$ es el morfismo ρ que pasa al cociente por G_K^{ab}.

Las L-funciones y constantes locales de ambos lados de la correspondencia se factorizan como producto es factores locales

$$L(\rho, s) = \prod_v L(\rho_v, s) \text{ y } L(\chi_\rho, s) = \prod_v L((\chi_\rho)_v, s) = \prod_v L(\chi_{\rho_v}, s)$$
$$\epsilon(\rho, \psi, s) = \prod_v L(\rho_v, \psi_v, s) \text{ y } \epsilon(\chi_\rho, \psi, s) = \prod_v \epsilon((\chi_\rho)_v, \psi_v, s) = \prod_v \epsilon(\chi_{\rho_v}, \psi_v, s),$$

los cuales coinciden, pues los factores locales coinciden por el Teorema 4.1.12. □

Capítulo 5

Representaciones de GL_2

Sea K un cuerpo local no arquimediano. En esta sección vamos a estudiar las representaciones suaves irreducibles de $G = \mathrm{GL}_2(K)$. Más precisamente vamos a clasificar las representaciones irreducibles no cuspidales y mencionar resultados sobre la L-función y constante local de representaciones suaves de G.

5.1. Subgrupos de $GL_2(K)$

Los subgrupos B, N, T de $G = \mathrm{GL}_2(K)$ se definen como:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in K^\times,\ b \in K \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in K^\times \right\}.$$

El subgrupo B se llama el **subgrupo estándar de Borel** de G y a N se lo llama el **radical unipotente de** B. Al subgrupo T se lo llama **el toro split maximal estándar** en G. Además, $B = T \ltimes N$. Por último tenemos el centro de G

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\},$$

que es canónicamente isomorfo a $K^\times$, vía $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Lema 5.1.1 (Descomposición de Iwasawa)**.** *Sean B y G. Entonces $L := \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ cumple que*

$$G = BL.$$

Demostración. Sea $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in G$. Si $g_{21} = 0$, entonces $g \in B$. Si no, de ser necesario multiplicamos a derecha por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L$, para que nos quede $v_K(g_{21}) \geqslant v_K(g_{22})$. Finalmente, multiplicamos a derecha por $\begin{pmatrix} \frac{g_{21}}{g_{22}} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in L$, de manera que nos queda $g_{21} = 0$. $\square$

5.2. Módulo de Jacquet y representaciones inducidas

Sea (π, V) una representación suave de G. Luego tenemos que $V(N) = \{ v - \pi(x)v \mid v \in V,\ x \in N \}$. Consideremos $V_N = V/V(N)$ y π_N la acción de $B/N = T$ sobre V_N (la cual es suave).

Definición 5.2.1. Llamamos **módulo de Jacquet** de (π, V) en N a la representación (π_N, V_N) de T.

Observación 5.2.2. Tenemos el **funtor de Jacquet**

$$\begin{aligned} \mathbf{Rep}(G) &\longrightarrow \mathbf{Rep}(T), \\ (\pi, V) &\longmapsto (\pi_N, V_N). \end{aligned}$$

El cual es exacto y aditivo.

Sea (σ, w) una representación suave de T. Podemos verla como una representación de B trivial en N, y luego considerar la representación inducida $\operatorname{Ind}_B^G \sigma$.

Entonces tenemos que por reciprocidad de Frobenius 2.5.19

$$\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{Ind}_B^G \sigma) \cong \operatorname{Hom}_B(\pi, \sigma).$$

Luego, como σ es trivial en N cualquier B-morfismo $\pi \longrightarrow \sigma$ pasa al cociente $\pi \longrightarrow \pi_N$. Con lo cual se induce

$$\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{Ind}_B^G \sigma) \cong \operatorname{Hom}_T(\pi_N, \sigma). \tag{5.1}$$

Esto tiene la siguiente consecuencia:

Proposición 5.2.3. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El módulo de Jacquet $V_N \neq 0$.

(2) La representación π es isomorfa a un G-subespacio de $\operatorname{Ind}_B^G \chi$ para algún caracter χ de T.

Demostración. Supongamos que el segundo ítem vale. Por (5.1) tenemos que

$$\operatorname{Hom}_T(\pi_N, \chi) \cong \operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{Ind}_B^G \chi) \neq 0,$$

con lo cual $V_N \neq 0$.

Supongamos que el primer ítem vale. Vamos a mostrar que V_N admite un T-cociente irreducible. Más aún, veremos que podemos tomar el cociente de manera que sea un caracter χ. Luego por (5.1) π debe ser isomorfo a un G-subespacio de $\operatorname{Ind}_B^G \chi$.

Sea $v \in V \neq 0$. Como V es irreducible, todo elemento de V es una combinación lineal finita de los trasladados $\pi(g)v$, para algunos $g \in G$. Sea $L := \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. Se tiene que v es fijo por un subgrupo L' de L de índice finito. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ el conjunto de los distintos elementos de la forma $\pi(g)v$ con $g \in L$. En particular, $r \leqslant [L : L']$. Por el Lema 5.1.1 $G = BL$, luego S genera V sobre B y la imagen de S genera V_N sobre T.

Por lo tanto V_N es finitamente generado como representación de T. Sea $\{u_1, \ldots, u_t\}$ un conjunto de generadores minimal. Utilizando el Lema de Zorn se puede probar inmediatamente que V_N tiene un T-subespacio U que contiene a $u_1, \ldots, u_{t-1}$ y es maximal respecto de la propiedad $u_t \notin U$. Entonces U es un T-subespacio de V_N maximal y V_N/U es una representación irreducible de T, luego es un caracter por el Corolario 2.5.30. □

Definición 5.2.4. Decimos que (π, V) es **cuspidal** si su módulo de Jacquet $V_N = 0$.[1] Si no, decimos que π está en las **series principales.**

Proposición 5.2.5. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G con un vector $v \in V \backslash \{0\}$ fijo por la acción de N. Luego $\pi \cong \phi \circ \det$, para algún caracter ϕ de $K^\times$.*

Demostración. Si $v \neq 0$ está fijo por N, luego existe un subgrupo H de G generado por N y un subgrupo abierto compacto L. Como H contiene una una matriz triangular inferior unipotente, entonces también contiene a $\mathrm{SL}_2(K)$. □

Proposición 5.2.6. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G de dimensión finita. Luego $\mathrm{SL}_2(K)$ está en el núcleo de π.*

[1] En la literatura, a veces se llama representación **supercuspidal** o **absolutamente cuspidal** a una representación cuspidal.

Demostración. Comencemos con la primera afirmación. Como V tiene dimensión finita, cada vector de la base tiene un subgrupo abierto compacto que lo deja fijo, luego la intersección es un subgrupo abierto compacto de G que actúa trivialmente sobre V, con lo cual está en el núcleo de π. Entonces el núcleo contiene dos elementos de la forma $\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$ con $|g| \neq 0$ lo suficientemente chico. Pero el subgrupo normal generado por estos dos elementos genera también $SL_2(K)$. Como el núcleo es normal esto nos dice que $SL_2(K)$ está contenido en el núcleo de π. □

Corolario 5.2.7. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G de dimensión finita. Entonces $\pi \cong \phi \circ \det$ para un caracter ϕ de $K^\times$.*

En particular, los caracteres de G son de la forma $\phi \circ \det$.

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos una representación suave irreducible de $G/\operatorname{SL}_2(K)$, que es un grupo abeliano. Por el Lema 2.5.26 V es dimensión 1, y se escribe como $\phi \circ \det$ para algún morfismo ϕ de $K^\times$. Como det continua y sobreyectiva ϕ es un caracter. □

Definición 5.2.8. Si (π, V) es una representación suave de G y ϕ es un caracter de $K^\times$, definimos el **twist** de π por ϕ como la representación suave $(\phi\pi, V)$ de G, donde

$$\phi\pi(g) := \phi(\det g)\pi(g), \quad g \in G.$$

Similarmente, si $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ es un caracter de T y ϕ es un caracter de $K^\times$, luego definimos $\phi \cdot \chi := \phi\chi_1 \otimes \phi\chi_2$.

Por otro lado, sea $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz permutación de G. Si σ es una representación suave de T, podemos construir la representación

$$\sigma^w : t \longmapsto \sigma(wtw^{-1})$$

y verla como representación de B trivial en N.

Definición 5.2.9. La **representación de Steinberg** de G, denotada como St_G, es el cociente irreducible de $\operatorname{Ind}_B^G 1_T$:

$$0 \longrightarrow 1_G \longrightarrow \operatorname{Ind}_B^G 1_T \longrightarrow \mathrm{St}_G \longrightarrow 0.$$

Las representaciones de la forma $\phi \cdot \mathrm{St}_G$ se llaman **representaciones especiales**.

Es una representación de dimensión infinita no cuspidal pues $(\mathrm{St}_G)_N \cong \delta_B^{-1}$[2].

Definición 5.2.10. Sea σ una representación suave de T, definimos la **inducción suave normalizada** o **inducción suave unitaria**:

$$\iota_B^G \sigma := \operatorname{Ind}_B^G(\delta_B^{-1/2} \otimes \sigma).$$

Como se ve en la Sección 9.11 de [BH06], es un funtor exacto $\mathbf{Rep}(T) \longrightarrow \mathbf{Rep}(G)$, que cumple la siguiente identidad:

$$(\iota_B^G \sigma)^\vee \cong \iota_B^G \check{\sigma}.$$

Teorema 5.2.11. *Tenemos el siguiente criterio de irreducibilidad:*

(1) Sea $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caracter de T. La representación $\iota_B^G \chi$ es reducible si y solo si $\chi_1 = |\cdot|^{\pm 1} \chi_2$.

(2) Sean χ, ξ caracteres de T. El espacio $\operatorname{Hom}_G(\iota_B^G \chi, \iota_B^G \xi)$ es no nulo si y solo si $\xi = \chi$ o $\xi = \chi^w$.

Además, tenemos la siguiente lista de clases de isomorfismo de representaciones suaves irreducibles no cuspidales de G está completa:

(I) Las representaciones irreducibles $\iota_B^G \chi$, donde $\chi_1 \neq |\cdot|^{\pm 1} \chi_2$.

(II) Las representaciones de dimensión uno $\phi \circ \det$, donde ϕ es un caracter de $K^\times$.

(III) Las representaciones especiales $\phi \cdot \mathrm{St}_G$, donde ϕ es un caracter de $K^\times$.

Además, las clases en esta lista son todas distintas, excepto por (i), donde se tiene que $\iota_B^G \chi \cong \iota_B^G \chi^w$.

[2] Ver la Sección 9.10 de [BH06].

5.3. L-función y constante local para $GL_2(K)$

Se pueden generalizar las ideas de la Sección 2.4 a representaciones suaves irreducibles de G, y definir L-funciones $L(\pi, s)$ y constantes locales, también llamadas **constantes locales de Godement-Jacquet** $\epsilon(\pi, s, \psi)$ con $\psi \in \widehat{K}$ no trivial. Sin embargo, en esta sección solo enunciaremos resultados importantes sobre estas invariantes.

Proposición 5.3.1 (La ecuación funcional de Godement-Jacquet)**.** *Se cumple la ecuación funcional*

$$\epsilon(\pi, s, \psi)\epsilon(\check{\pi}, 1-s, \psi) = \omega_\pi(-1).$$

Más aún, existen $a \in \mathbb{C}^\times$ y $b \in \mathbb{Z}$ tales que $\epsilon(\chi, s, \psi)\pi = aq^{bs}$.

Demostración. Ver el Corolario de la Sección 24 de [BH06]. □

Escribimos

$$\epsilon(\pi, s, \psi) = q^{n(\pi,\psi)(\frac{1}{2}-s)}\epsilon(\pi, \frac{1}{2}, \psi),$$

para un entero $n(\pi, \psi)$.

Proposición 5.3.2. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. Sea $\psi \in \widehat{K}$ no trivial. Luego*

$$\epsilon(\pi, s, a\psi) = \omega_\pi(a)\,|a|^{2s-1}\,\epsilon(\chi, s, \psi), \quad \forall a \in K^\times$$

Demostración. Ver la Sección 24 de [BH06]. □

En la siguiente proposición ψ_A denota a $\psi \circ \operatorname{tr} A$ donde $A = \mathrm{M}_2(K)$. Notamos al grupo de caracteres ψ_A de A como $\widehat{A}$.

Proposición 5.3.3. *Sea $(\mathfrak{U}, J, \Lambda)$ un tipo cuspidal*[3] *de G. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ mínimo tal que $U_{\mathfrak{U}}^{n+1} \subset \operatorname{Ker}\Lambda$. Dado $c \in J$ tal que $\Lambda\big|_{U_{\mathfrak{U}}^{[n/2]+1}}$ es un múltiplo de ψ_c. Luego*

$$\epsilon(c\text{-}\operatorname{Ind}_J^G \Lambda, \frac{1}{2}, \psi) = q^a \sum_{x \in U_{\mathfrak{U}}^{[(n+1)/2]}/U_{\mathfrak{U}}^{[n/2]+1}} \operatorname{tr}\Lambda^\vee(cx)\psi_A(cx),$$

donde

$$q^a \dim \Lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ [\mathfrak{U} : \mathfrak{R}]^{-1/2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Ver el Corolario 25.5 de [BH06]. □

Teorema 5.3.4 (Teorema de estabilidad)**.** *Sea π una representación irreducible cuspidal de G y sea χ un caracter de $K^\times$ de nivel $m > 2\ell(\pi)$*[4]*. Sean $\mu \in \widehat{K}, \mu \neq 1$ y $a \in K^\times$ tal que $\chi(1+x) = \mu(cx), \forall x \in \mathfrak{P}^{[m/2]+1}$. Entonces*

$$\epsilon(\chi\pi, s, \mu) = \omega_\pi(a)^{-1}\epsilon(\chi \circ \det, s, \mu).$$

Demostración. Ver la Sección 25.7 de [BH06]. □

Teorema 5.3.5. *Sea $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caracter del subgrupo T de G, y sea π un factor de G-composición de $\iota_B^G\chi$. Luego para cualquier $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$, tenemos*

$$L(\pi, s) = L(\chi_1, s)L(\chi_2, s),$$

$$\epsilon(\pi, s, \psi) = \epsilon(\chi_1, s, \psi)\epsilon(\chi_2, s, \psi),$$

salvo cuando $\pi \cong \phi \cdot \mathrm{St}_G$, para un caracter no ramificado ϕ de $K^\times$. En ese caso tenemos

$$L(\pi, s) = L(\phi, s + \frac{1}{2}),$$

$$\epsilon(\pi, s, \psi) = -\epsilon(\phi, s, \psi).$$

[3] Definido en la Sección 6.1.3.

[4] La notación $\ell(\pi)$ denota el *nivel normalizado* de π, el cual se define en la Sección 6.1.2.

Demostración. Ver la Sección 26.1 de [BH06]. □

Proposición 5.3.6. *Sea $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ un caracter de T tal que $\pi = \iota_B^G \chi$ es irreducible. Entonces*

$$L(\pi, s) = L(\chi_1, s)L(\chi_2, s),$$
$$\epsilon(\pi, s, \psi) = \epsilon(\chi_1, s, \psi)\epsilon(\chi_2, s, \psi),$$

para cualquier $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$.

Demostración. Ver la Sección 26.4 de [BH06]. □

Proposición 5.3.7. *Sea ϕ un caracter no ramificado de $K^\times$. Dado $\pi = \phi \circ \det$, se tiene que*

$$L(\pi, s) = L(\phi, s - \frac{1}{2})L(\phi, s + \frac{1}{2}),$$
$$\epsilon(\pi, s, \psi) = \epsilon(\phi, s - \frac{1}{2}, \psi)\epsilon(\phi, s + \frac{1}{2}, \psi).$$

En particular si ψ tiene nivel uno, entonces

$$\epsilon(\phi \circ \det, s, \psi) = \phi(\varpi)^{-2} q^{2s-1},$$

para todo elemento uniformizante ϖ de K.

Demostración. Ver la Sección 26.7 de [BH06]. □

5.4. El Teorema inverso

Teorema 5.4.1 (El Teorema inverso)**.** *Sea $\psi \in \widehat{K}$ no trivial. Sean π_1, π_2 representaciones suaves irreducibles de $\mathrm{GL}_2(K)$. Supongamos que*

$$L(\chi\pi_1, s) = L(\chi\pi_2, s) \quad y \quad \epsilon(\chi\pi_1, \psi, s) = \epsilon(\chi\pi_2, \psi, s),$$

para todo caracter χ de $K^\times$. Luego tenemos que $\pi_1 \cong \pi_2$.

Demostración. Ver la Sección 27.1 de [BH06]. □

Proposición 5.4.2. *Una representación suave irreducible π de $\mathrm{GL}_2(K)$ es cuspidal si y solo si $L(\chi\pi, s) = 1$ para todo caracter χ de $K^\times$.*

Demostración. Ver la Proposición de la Sección 27.2 de [BH06]. □

Capítulo 6

Correspondencia local de Langlands para GL_2

En este capítulo vamos a denotar $\mathcal{G}_2^0(K)$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones suaves irreducibles de $\mathcal{W}_K$ de dimensión 2, y $\mathcal{G}_2^1(K)$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones semisimples de Weil-Deligne (ρ, V, N) de dimensión 2 con ρ reducible. De manera similar, vamos denotar $\mathcal{A}_n(K)$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones suaves irreducibles de $\mathrm{GL}_n(K)$. En particular, notaremos también $\mathcal{A}_2^0(K) \subset \mathcal{A}_2(K)$ al subconjunto de clases de equivalencia de representaciones cuspidales, y $\mathcal{A}_2^1(K) \subset \mathcal{A}_2(K)$ al subconjunto de clases de equivalencia de representaciones no cuspidales de $\mathrm{GL}_2(K)$.

6.1. Preliminares

6.1.1. Ordenes de cadena

Vamos a definir una familia de subgrupos abiertos compactos de $G = \mathrm{GL}_2(K)$.

Sea $V = K \oplus K$, con lo cual $G = \mathrm{Aut}_K(V)$ y $A = \mathrm{End}_K(V)$. Una **cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados** en V es una cadena no vacía $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_K$-reticulados en V, ordenada vía la inclusión y estable por por multiplicación de $K^\times$. Numeramos a los elementos de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \{ L_i \mid i \in \mathbb{Z} \}, \quad L_{i+1} \subsetneq L_i.$$

La estabilidad bajo multiplicación por $K^\times$ implica la existencia de $e := e_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}$ tal que

$$xL_i = L_{i+e \cdot v_K(x)},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$ y $x \in K^\times$. En efecto, multiplicar por elementos de U_K no cambia L_i, y multiplicar por un elemento uniformizante ϖ transforma a L_i en L_{i+e} para algún $e \in \mathbb{N}$.

Los reticulados de cadena son fáciles de describir completamente:

Proposición 6.1.1. *Sea $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados en V. Entonces $e_{\mathcal{L}} = 1$ o 2. Más aún:*

(I) Si $e_{\mathcal{L}} = 1$. Entonces existe $g \in G$ tal que

$$gL_i = \mathfrak{P}^i \oplus \mathfrak{P}^i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

(II) Si $e_{\mathcal{L}} = 2$. Entonces existe $g \in G$ tal que

$$\begin{aligned} gL_{2i} &= \mathfrak{P}^i \oplus \mathfrak{P}^i, \\ gL_{2i+1} &= \mathfrak{P}^i \oplus \mathfrak{P}^{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Demostración. Sea $e = e_{\mathcal{L}}$. El cociente $L_0/L_e = L_0/\mathfrak{P}L_0$ es un k-espacio vectorial de dimensión 2. Los cocientes $L_i/L_e, 0 \leqslant i \leqslant e$ forman una bandera de subespacios de L_0/L_e, con lo cual $1 \leqslant e \leqslant 2$.

El reticulado L_0 es el $\mathcal{O}_K$-módulo generado por una K-base de V, entonces existe $g \in G$ tal que $gL_0 = \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$. Por lo tanto $gL_{ei} = \mathfrak{P}^i \oplus \mathfrak{P}^i, i \in \mathbb{Z}$. Con esto probamos el caso $e = 1$.

Si $e = 2$, tenemos que $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P} \subset gL_1 \subset \mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K$, y $U = gL_1/(\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P})$ es un k-subespacio de dimensión uno de $k \oplus k = (\mathcal{O}_K \oplus \mathcal{O}_K)/(\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P})$. Existe $\overline{h} \in \mathrm{GL}_2(k)$ tal que $\overline{h}U = k \oplus 0$. Si $h \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ tiene imagen $\overline{h}$ en $\mathrm{GL}_2(k)$, entonces $hgL_1 = \mathcal{O}_K \oplus \mathfrak{P}$, y el resultado se sigue. □

Sea $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados en V, definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\mathcal{L}} &= \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L_i) = \bigcap_{0 \leqslant i \leqslant e-1} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(L_i) \\ &= \{\, x \in A : xL_i \subset L_i, i \in \mathbb{Z} \,\}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ es un anillo con unidad además de un $\mathcal{O}_K$-reticulado en A (i.e. un **$\mathcal{O}_K$-orden en** A). Los $\mathcal{O}_K$-reticulados $L \in \mathcal{L}$ son $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$-módulos. La proposición anterior anterior se traduce en términos de $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$:

Corolario 6.1.2. *Sea $\mathcal{L}$ una cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados en V, y sea $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$. Existe $g \in G$ tal que*

$$g\mathfrak{U}g^{-1} = \begin{cases} \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} & \text{si } e_{\mathcal{L}} = 1, \\ \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{P} & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} & \text{si } e_{\mathcal{L}} = 2. \end{cases}$$

Un $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$-reticulado en V va a ser, por definición, un $\mathcal{O}_K$-reticulado en V que también es un $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$-módulo.

Proposición 6.1.3. *Sea $\mathcal{L}$ una cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados en V y L un $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$-reticulado en V. Entonces $L \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Por el corolario anterior basta con tratar los casos que aparecen allí. Empecemos con $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}} = \mathfrak{J}$. El orden $\mathfrak{J}$ contiene las matrices idempotentes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $e_1L + e_2L \subset L$, con lo cual $L = e_1L \oplus e_2L$. Eso es, $L = \mathfrak{P}^a \oplus \mathfrak{P}^b$ para un par de enteros a, b. El reticulado L es invariante bajo la acción del grupo de matrices triangulares superiores unipotentes en $\mathfrak{J}$, entonces $a \leqslant b$. Además es invariante bajo la acción del grupo de matrices triangulares inferiores unipotentes en $\mathfrak{J}$, entonces $b \leqslant a + 1$. Por lo tanto las únicas posibilidades son $L = \mathfrak{P}^a \oplus \mathfrak{P}^a$ o $L = \mathfrak{P}^a \oplus \mathfrak{P}^{a+1}$, para un entero a. Todos estos yacen en $\mathcal{L}$. El caso $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}} = \mathfrak{M}$ es similar. □

En resumen, $\mathcal{L}$ es el conjunto de todos los $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$-reticulados en V, así que podemos recuperar $\mathcal{L}$ (luego de indexar nuevamente los elementos) a partir del anillo $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$.

Va a ser más conveniente trabajar con el anillo $\mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$, por ende introducimos la siguiente terminología:

Definición 6.1.4. Un **orden de cadena** en $A = \mathrm{M}_2(K)$ es un anillo de la forma $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$, para alguna cadena de $\mathcal{O}_K$-reticulados $\mathcal{L}$ en V. Notamos $e_{\mathfrak{U}} = e_{\mathcal{L}}$.

Notaremos por $\mathfrak{R}$ al radical de Jacobson del anillo $\mathfrak{U}$.

A su vez, vamos a definir

$$U_{\mathfrak{U}}^0 = U_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^\times, U_{\mathfrak{U}}^n = 1 + \mathfrak{R}^n, \quad n \geqslant 1.$$

En general, estos subgrupos de G son abiertos compactos, y son normales en $U_{\mathfrak{U}}$. Notar que si $1 \leqslant m < n \leqslant 2m$ entonces el morfismo $x \longmapsto 1 + x$ induce un isomorfismo

$$\mathfrak{R}^m/\mathfrak{R}^n \longrightarrow U_{\mathfrak{U}}^m/U_{\mathfrak{U}}^n.$$

La demostración es análoga a la demostración de la Proposición 2.1.24.

Vamos a necesitar a su vez definir el grupo

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{U}} := \{ g \in G \mid g\mathfrak{U}g^{-1} = \mathfrak{U} \}.$$

Si $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\mathcal{L}}$ se tiene que

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{U}} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{L}) = \{ g \in G \mid gL \in \mathcal{L}, \forall L \in \mathcal{L} \}.$$

Se tiene que $\mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$ es un producto semidirecto (ver la Sección 12.3 de [BH06]). En particular, es un subgrupo abierto de G, contiene al centro Z de G y $\mathcal{K}_{\mathfrak{U}}/Z$ es compacto. También normaliza a los grupos $U^n_{\mathfrak{U}}, n \geqslant 0$.

6.1.2. El nivel normalizado de una representación suave irreducible

Definición 6.1.5. Sea K un subgrupo abierto compacto de G, y sea (π, V) una representación suave de G. Decimos que π **contiene** a ρ si $\mathrm{Hom}_K(\rho, \pi) \neq 0$.

Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. Si llamamos $\mathcal{S}(\pi)$ al conjunto de pares $(\mathfrak{U}, n)$, con $\mathfrak{U}$ un orden de cadena en A y $n \geqslant 0$, tales que π contiene al caracter trivial de $U^{n+1}_{\mathfrak{U}}$.

Definición 6.1.6. Definimos el **nivel normalizado** $\ell(\pi)$ de π como

$$\ell(\pi) = \text{mín} \{ \frac{n}{e_{\mathfrak{U}}} \mid (\mathfrak{U}, n) \in \mathcal{S}(\pi) \}.$$

Notar que $2\ell(\pi) \geqslant 0$.

Definición 6.1.7. Un **estrato** en A es una terna $(\mathfrak{U}, n, a)$, donde $\mathfrak{U}$ es un orden de cadena en A, con radical $\mathfrak{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, y $a \in \mathfrak{R}^{-n}$.

Decimos que dos estratos $(\mathfrak{U}, n, a_1)$ y $(\mathfrak{U}, n, a_2)$ son equivalentes si $a_1 \equiv a_2 \mod \mathfrak{R}^{1-n}$.

Si $n \geqslant 1$, podemos asociarle a un estrato $(\mathfrak{U}, n, a)$ el caracter $\psi_a(x) = \psi \circ \mathrm{tr}\, A(a(1+x))$ de $U^n_{\mathfrak{U}}$, el cual es trivial en $U^{n+1}_{\mathfrak{U}}$. Este caracter solo depende de ψ y de la elección de clase de equivalencia de estrato.

Antes de la siguiente definición necesitamos definir un término previo:

Definición 6.1.8. Sean K_1, K_2 subgrupos abiertos compactos de G y sean $\psi_1 \in \widehat{K}_1, \psi_2 \in \widehat{K}_2$ dos caracteres. Decimos que $g \in G$ **entrelaza** a ψ_1 con ψ_2 si

$$\mathrm{Hom}_{g^{-1}K_1 g \cap K_2}(\psi_1^g, \psi_2) \neq 0,$$

donde ψ_1^g denota el caracter $x \longmapsto \psi_1(gxg^{-1})$ de $g^{-1}K_1 g$.

Definición 6.1.9. Decimos que $g \in G$ **entrelaza** $(\mathfrak{U}_1, n_1, a_1)$ con $(\mathfrak{U}_2, n_2, a_2)$, si g entrelaza el caracter ψ_{a_1} de $U^{n_1}_{\mathfrak{U}_1}$ con el caracter ψ_{a_2} de $U^{n_2}_{\mathfrak{U}_2}$.

Definición 6.1.10. Sea $\mathfrak{U}$ un orden de cadena en A. Un estrato $(\mathfrak{U}, n, a)$ en A se dice **fundamental** si la coclase $a + \mathfrak{R}^{1-n}$ no contiene elementos nilpotentes de A.

Definición 6.1.11. Sea (π, V) una representación suave irreducible de G. Decimos que π contiene el estrato $(\mathfrak{U}, n, a)$ si $n \geqslant 1$ y π contiene el caracter ψ_a de $U^n_{\mathfrak{U}}$.

Notar que en este caso se tiene que $\frac{n}{e_{\mathfrak{U}}} \geqslant \ell(\pi)$ por definición.

Definición 6.1.12. Un **estrato simple ramificado** es un estrato fundamental $(\mathfrak{U}, n, a)$ en el cual $e_{\mathfrak{U}} = 2$ y n es impar.

Si un estrato fundamental $(\mathfrak{U}, n, a)$ tiene $e_{\mathfrak{U}} = 1$, podemos definir estrato fundamental **no ramificado simple**, **partida**, **esencialmente escalar**. Sin embargo, la definición es técnica y no la necesitaremos.[1]

Decimos que un estrato fundamental es **simple** si es ramificado o no ramificado simple.

[1] Se puede ver la definición formal en la Sección 13.2 de [BH06].

6.1.3. Tipo cuspidal

Definición 6.1.13. Un **tipo cuspidal** en G es una terna $(\mathfrak{U}, J, \Lambda)$ de alguno de los siguientes tipos:

(I) $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{M}$, $J = ZU_{\mathfrak{U}}$, y $\Lambda|_{U_{\mathfrak{U}}}$ es la inflación de una representación irreducible cuspidal de $U_{\mathfrak{U}}/U^1_{\mathfrak{U}} \cong \mathrm{GL}_2(k)$.

(II) Existe un estrato simple $(\mathfrak{U}, n, \alpha)$ con $n \geqslant 1$, tal que $J = J_\alpha$ y $\Lambda \in C(\psi_\alpha, \mathfrak{U})$.

(III) Existe una terna $(\mathfrak{U}, J, \Lambda_0)$ que satisface el ítem (i) o (ii), y un caracter χ de $K^\times$, tal que $\Lambda \cong \Lambda_0 \otimes \chi \circ \det$.

Observación 6.1.14. Si $(\mathfrak{U}, J, \Lambda)$ es un tipo cuspidal de G, la representación $c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G$ es irreducible cuspidal por el Teorema 15.3 de [BH06].

Ahora, vamos a fijar un estrato simple $(\mathfrak{U}, n, \alpha)$ en A con $n \geqslant 1$. El álgebra $E = K[\alpha]$ es un cuerpo $[E : K] = 2$, $E^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$, y α minimal sobre K (ver la Proposición de [BH06]). La función $\psi_\alpha = \psi_{A,\alpha}$ define un caracter de $U_{\mathfrak{U}}^{[n/2]+1}$ que es trivial en $U_{\mathfrak{U}}^{n+1}$.

Vamos a definir

$$J_\alpha := E^\times U_{\mathfrak{U}}^{[(n+1)/2]},$$
$$H^1_\alpha := U^1_E U_{\mathfrak{U}}^{[n/2]+1}, \quad J^1_\alpha := J_\alpha \cap U^1_{\mathfrak{U}} = U^q_E U_{\mathfrak{U}}^{[(n+1)/2]}.$$

Con lo cual $J_\alpha \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$ es abierto en G, contiene a Z y es compacto módulo Z. Notar que $J^1_\alpha = H^1_\alpha$ si y solo si n es impar.

Definición 6.1.15. El conjunto $C(\psi_\alpha, \mathfrak{U})$ denota las clases de equivalencia de representaciones irreducibles Λ del grupo J_α tales que $\Lambda|_{U_{\mathfrak{U}}^{[n/2]+1}}$ es un múltiplo de ψ_α.

6.2. Correspondencia entre pares admisibles y representaciones cuspidales irreducibles de $GL_2(K)$

Necesitamos ahora hablar un poco más sobre pares admisibles y de cómo se corresponden con representaciones cuspidales irreducibles de $G = \mathrm{GL}_2(K)$.

Notaremos como $A = \mathrm{M}_2(K)$ al grupo aditivo de las matrices de 2×2 con coeficientes en K.

Sea L/K una extensión finita de cuerpos. Se dice que L/K es mansamente ramificada si $p \nmid e(L/K)$. Equivalentemente, L/K es mansamente ramificada si y solo si $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_K$. En particular, gracias a la Proposición 2.1.41, cada extensión cuadrática L/K es mansamente ramificada si $p \neq 2$, mientras que si $p = 2$, una extensión cuadrática L/K es mansamente ramificada si y solo si es no ramificada.

Definición 6.2.1. Sea L/K una extensión cuadrática mansamente ramificada y χ un caracter de $L^\times$. Decimos que el par $(L/K, \chi)$ es **admisible** si

(1) χ no se factoriza a través de la norma $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$.

(2) $\chi|_{U^1_L}$ solamente no se puede factorizar a través de $N_{L/K}$ cuando la extensión L/K es no ramificada.

Decimos que dos pares admisibles $(L/K, \chi)$, $(L'/K, \chi')$ son K-isomorfos si existe un isomorfismo de extensiones $j : L/K \to L'/K$ tal que $\chi = \chi' \circ j$. Si $L = L'$ esto equivale a pedir que $\chi' = \chi^\sigma = \chi \circ \sigma$, para algún $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Denotamos como $\mathbb{P}_2(K)$ al conjunto de clases de equivalencia de K-isomorfismos de pares admisibles $(L/K, \chi)$. Si $(L/K, \chi)$ es un par admisible, y si ϕ es un caracter de $K^\times$, el par $(L/K, \chi \otimes \phi_L)$ es también admisible, con $\phi_L = \phi \circ N_{L/K}$. Sea $(L/K, \chi)$ un par admisible, y n el nivel de χ. Decimos que $(L/K, \chi)$ es **minimal** si $\chi|_{U^n_L}$ no se factoriza por $N_{L/K}$. Claramente, cualquier par admisible $(L/K, \chi)$ es isomorfo a uno de la forma $(L/K, \chi' \otimes \phi_L)$, para un caracter ϕ de $K^\times$ y un par minimal $(L/K, \chi')$.

Ahora, empezamos asignando a cada par admisible $(L/K, \chi)$ una representación irreducible cuspidal π_χ de G.

6.2.1. Nivel cero

Empezamos con el caso $(L/K, \chi)$, χ con nivel cero. Luego por definición, L/K es una extensión no ramificada.

Lema 6.2.2. *Sea L/K una extensión cuadrática no ramificada, sea χ un caracter de $L^\times$ de nivel cero, sea $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\sigma \neq 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *El par $(L/K, \chi)$ es admisible.*

(II) $\chi \neq \chi^\sigma$.

(III) $\chi|_{U_L} \neq \chi^\sigma|_{U_L}$.

Demostración. Como L/K es no ramificada, se tiene que $L^\times = K^\times U_L$, luego $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Como L/K es cíclico, el núcleo de $N_{L/K}$ consiste de los elementos x^σ/x, $x \in L^\times$ por el Teorema 90 de Hilbert. Luego χ se factoriza a través de $N_{L/K}$ si y solo si $\chi = \chi^\sigma$. La segunda condición en la definición de par admisible es vacíamente verdadera, luego $(i) \Leftrightarrow (ii)$. □

Volvemos nuevamente al par admisible $(L/K, \chi)$ de nivel cero, escribimos $k_L = \mathcal{O}/\mathfrak{P}_L$, tenemos que k_L/k es una extensión cuadrática. Elegimos una K-inmersión $L \to A$, y $\mathfrak{U}$ el único orden de cadena con $K^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$[2]. Conjugando por un elemento de G, podemos tomar $\mathfrak{U} = \mathfrak{M} = M_2(\mathcal{O}_K)$. Esto nos da una inmersión de $\mathcal{O}_L$ en $\mathfrak{M}$ y consecuentemente una k-inmersión de k_L en $M_2(k)$.

El caracter $\chi|_{U_L}$ es la inflación de un caracter $\tilde{\chi}$ de $k_L^\times$. La condición (iii) del lema es equivalente a que $\tilde{\chi}$ sea un caracter *regular* de $k_L^\times$[3]. Como en el Ejemplo 6.4 de [BH06], $\tilde{\chi}$ nos da lugar a una representación irreducible cuspidal $\tilde{\lambda}$ de $\mathrm{GL}_2(k)$ ($\tilde{\lambda} = \pi_{\tilde{\chi}}$ en la notación del capítulo 6 de [BH06]). Sea λ la inflación de $\tilde{\lambda}$ a una representación de $U_{\mathfrak{M}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. La restricción de λ a U_K es un múltiplo de $\chi|_{U_K}$[4], con lo cual podemos extender λ a una representación Λ de $\mathcal{K}_M = K^\times U_{\mathfrak{M}}$, definiendo $\Lambda|_{K^\times}$ como un múltiplo de χ.

La terna $(\mathfrak{M}, \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}, \Lambda)$ es luego del tipo cuspidal. Definimos

$$\pi_\chi = c\text{-}\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_{\mathfrak{M}}}^G \Lambda.$$

Nos queda que π_χ es una representación irreducible cuspidal de G tal que $\ell(\pi_\chi) = 0$. También, pares isomorfos $(L/K, \chi)$ de nivel cero nos dan lugar pares conjugados $(k_L^\times, \tilde{\chi})$ en $\mathrm{GL}_2(k)$, luego la clase de equivalencia de π_χ solo depende de la clase de $(L/K, \chi)$.

Denotemos como $\mathbb{P}_2(K)_0$ al conjunto de clases de equivalencia de pares admisibles $(L/K, \chi)$ de nivel cero. De manera análoga, denotamos como $\mathcal{A}_2^0(K)_0$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles cuspidales π de G tal que $\ell(\pi) = 0$.

Para la demostración de la siguiente proposición es necesario entender los resultados de la Sección 6.4 de [BH06] sobre representaciones de $\mathrm{GL}_2(k)$ con k un cuerpo finito de q elementos. Además, necesitamos dos teoremas:

Teorema 6.2.3. *Sea (π, V) una representación suave irreducible de G tal que $\ell(\pi) \leqslant \ell(\chi\pi)$ para todo caracter χ de $K^\times$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) La representación π es cuspidal.

(2) Se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) $\ell(\pi) = 0$ y π contiene una representación de $U_{\mathfrak{M}} \cong \mathrm{GL}_2(k)$.

(b) $\ell(\pi) > 0$ y π contiene un estrato simple.

Demostración. Ver la Sección 14.5 de [BH06]. □

Teorema 6.2.4. *La función*

$$(\mathfrak{U}, J, \Lambda) \longmapsto \pi_\Lambda = c\text{-}\mathrm{Ind}_J^G \Lambda$$

induce una biyección entre el conjunto de clases de conjugación de tipos cuspidales en G y el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles cuspidales de G.

[2] Ver el Ejemplo 12.4 de [BH06].
[3] Ver el Ejemplo 6.4 de [BH06].
[4] Se sigue de las identidades (6.4.1) de la Sección 6.4 de [BH06].

Proposición 6.2.5. *La función* $(L/K,\chi) \mapsto \pi_\chi$ *induce una biyección*

$$\mathbb{P}_2(K)_0 \to \mathcal{A}_2^0(K)_0. \tag{6.1}$$

Más aún, si $(L/K,\chi) \in \mathbb{P}_2(K)_0$*, luego:*

(I) *si* ϕ *es un caracter de* $K^\times$ *de nivel cero, luego* $\pi_{\chi\phi_L} = \phi\pi_\chi$*,*

(II) *si* $\pi = \pi_\chi$*, luego* $\omega_\pi = \chi|_{K^\times}$*,*

(III) *el par* $(L/K,\check{\chi})$ *es admisible y* $\check{\pi}_\chi = \pi_{\check{\chi}}$*.*

Demostración. Usando el análisis de representaciones cuspidales de $\mathrm{GL}_2(k)$ que aparece en 6.4 [BH06] junto con el lema anterior, podemos mostrar que cualquier tipo cuspidal de nivel cero proviene de un par admisible $(L/K,\chi) \in \mathbb{P}_2(K)_0$. Por el teorema anterior la función (6.1) es sobreyectiva.

Para ver la inyectividad, supongamos que tenemos pares $(L_i/K,\chi_i)$, $i = 1,2$ tal que las representaciones π_{χ_i} sean equivalentes. Las extensiones L_i/K son no ramificadas, entonces K-isomorfas, luego sin pérdida de generalidad tomamos $L_i = L$. De la relación entre caracteres centrales tenemos que $\chi_1|_{K^\times} = \chi_2|_{K^\times}$. El Teorema 6.2.4 implica que las representaciones cuspidales $\pi_{\tilde{\chi}_i}$ de $\mathrm{GL}_2(k)$ son equivalentes. Los caracteres $\tilde{\chi}_i$ de $k_L^\times$ son entonces Galois conjugados[5]. Se sigue entonces que los caracteres $\chi_i|_{U_L}$ son Galois conjugados y entonces los pares admisibles $(L/K,\chi_i)$ son K-isomorfos. Probando la inyectividad.

Las propiedades (i) y (ii) se deducen inmediatamente de la construcción, mientras que (iii) proviene de la construcción y de la siguiente observación:

Observación 6.2.6. El Teorema 11.4 de [BH06] dice lo siguiente:

Sea L un subgrupo abierto de G, conteniendo a Z y compacto módulo Z. Sea (σ, W) una representación suave irreducible de L y supongamos que $g \in G$ se entrelaza con σ si y solo si $g \in L$. Entonces la representación $c\text{-}\mathrm{Ind}_L^G\,\sigma$ es irreducible y cuspidal.

En este contexto, el dual suave $(c\text{-}\mathrm{Ind}_L^G\,\sigma)^\vee$ es irreducible. Además, es isomorfo a $\mathrm{Ind}_L^G\,\check{\sigma}$. Con lo cual deducimos que $\mathrm{Ind}_L^G\,\check{\sigma} = c\text{-}\mathrm{Ind}_L^G\,\check{\sigma} \cong (c\text{-}\mathrm{Ind}_L^G\,\sigma)^\vee$. Dualizando nuevamente obtenemos $c\text{-}\mathrm{Ind}_L^G\,\sigma \cong \mathrm{Ind}_L^G\,\sigma$.

Demostración. Ver el Teorema 11.4 y la Observación 3 de dicho teorema de [BH06]. □

□

6.2.2. Nivel $n \geqslant 1$

Fijemos un caracter $\psi \in \widehat{K}$ de nivel uno. Sea $(L/K,\chi)$ un par admisible minimal con χ de nivel $n \geqslant 1$. Definimos $\psi_A := \psi \circ \mathrm{tr}_A$.

Luego agarramos un elemento $\alpha \in \mathfrak{P}_L^{-n}$ tal que $\chi(1+x) = \psi_L(\alpha x)$, $x \in \mathfrak{P}_L^{[n/2]+1}$. Tomemos una K-inmersión de L en $A = M_2(K)$ y sea $\mathfrak{U}$ el único orden de cadena en A tal que $L^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$[6]. Entonces $e_{\mathfrak{U}} = e(L/K)$ y la terna $(\mathfrak{U}, n, \alpha)$ es un estrato simple (ver las Secciones 18.2 y 13.5 de [BH06]).

Asociados a un estrato simple $(\mathfrak{U}, n, \alpha)$, tenemos subgrupos $J_\alpha, J_\alpha^1, H_\alpha^1$. Ahora vamos a definir una representación irreducible $\Lambda \in C(\psi_\alpha, \mathfrak{U})$.

Supongamos ahora que $n = 2m+1$ es impar. La representación Λ que estamos buscando va a ser el caracter $J_\alpha = L^\times U_{\mathfrak{U}}^{m+1}$ dado por

$$\Lambda|_{U_{\mathfrak{U}}^{m+1}} = \psi_\alpha, \quad \Lambda|_{L^\times} = \chi.$$

Como $\mathrm{tr}_A|_L = \mathrm{Tr}_{L/K}$ y $L \cap U^{m+1} : \mathfrak{U} = U_L^{m+1}$, estas dos condiciones son consistentes. La terna $(\mathfrak{U}, J_\alpha, \Lambda)$ es de tipo cuspidal en G, y luego

$$\pi_\chi = c\text{-}\mathrm{Ind}_{J_\alpha}^G\,\Lambda$$

[5] Ver el ítem (2) del Teorema de la Sección 6.4 de [BH06].
[6] Ver 12.4 en [BH06].

es una representación irreducible cuspidal de G conteniendo al estrato fundamental $(\mathfrak{U}, n, \alpha)$. Consecuentemente

$$\ell(\pi_\chi) = n/e(L/K), \quad \omega_{\pi_\chi} = \chi|_{K^\times}.$$

Por otro lado, si $n = 2m > 0$ es par, L/K es no ramificada. Definimos el caracter θ de $H^1_\alpha = U^1_L U^{m+1}_{\mathfrak{U}}$ por

$$\theta(ux) = \chi(u)\psi_\alpha(x), \quad x \in U^{m+1}_{\mathfrak{U}},\ u \in U^1_L.$$

De vuelta, estas condiciones son consistentes. Tomemos $\eta = \eta_\theta$ la única representación irreducible de $J^1_\alpha = U^1_L U^m_{\mathfrak{U}}$ que contiene a θ (ver el Lema 15.6 de [BH06]).

El grupo cíclico μ_L compuesto por las raíces de la unidad de orden coprimo con p en L, actúa sobre J^1_α por conjugación, y deja fijo a la representación η (ver la Proposición 2 de la Sección 15.6 de [BH06]). Y el subgrupo μ_K actúa trivialmente.

Proposición 6.2.7. *Existe una única representación irreducible $\tilde{\eta}$ de $\mu_L/\mu_K \ltimes J^1_\alpha$ tal que $\tilde{\eta}|_{J^1_\alpha} \cong \eta$ y*

$$\operatorname{tr} \tilde{\eta}(\zeta u) = -\theta(u),$$

para $u \in H^1_\alpha$ y todo $\zeta \in \mu_L/\mu_K$, $\zeta \neq 1$.

Demostración. Ver capítulo 22 de [BH06]. □

Corolario 6.2.8. *Existe una única representación irreducible Λ de J_α tal que*

(I) $\Lambda|_{J^1_\alpha} \cong \eta$,

(II) $\Lambda|_{K^\times}$ *es un múltiplo de* $\chi|_{K^\times}$,

(III) *para todo $\zeta \in \mu_L/\mu_K$, se tiene que* $\operatorname{tr} \Lambda(\zeta) = -\chi(\zeta)$.

Demostración. Las condiciones $(i) - (iii)$ determinan la unicidad de Λ. Veamos la existencia. Identifiquemos μ_L/μ_K con $L^\times/K^\times U^1_L$. Tomamos la representación $\tilde{\eta}$ dada por la proposición y la vemos como una representación de $\mu_L/\mu_K \ltimes J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$. Inflamos la representación ν del grupo $L^\times \ltimes J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$ (en el cual $L^\times$ actúa en $J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$ vía el isomorfismo $L^\times/U^1_L K^\times \cong \mu_L/\mu_K$). Luego definimos un caracter $\tilde{\chi}$ de $L^\times \ltimes J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$ definiéndolo de manera trivial en $J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$ y que coincida con χ en $L^\times$. Formamos la representación $\tilde{\Lambda} = \tilde{\chi} \otimes \nu$ de $L^\times \ltimes J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$.

Existe un morfismo de grupos sobreyectivo $L^\times \ltimes J^1_\alpha/\operatorname{Ker}\theta \to J_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$ dado por $(x, j) \mapsto xj$ mód $\operatorname{Ker}\theta$. El núcleo de este morfismo es el grupo de elementos

$$(x^{-1}, x\operatorname{Ker}\theta), \quad x \in U^1_L.$$

La representación $\tilde{\Lambda}$ es trivial en este grupo, luego $\tilde{\Lambda}$ es la inflación de una representación irreducible Λ_1 de $J_\alpha/\operatorname{Ker}\theta$. La inflación de Λ_1 a J_α es la representación Λ que buscábamos. □

Esta representación Λ del Corolario yace en $C(\psi_\alpha, \mathfrak{U})$. Definimos

$$\pi_\chi = c\text{-}\operatorname{Ind}^G_{J_\alpha} \Lambda.$$

Se tiene que π_χ es una representación irreducible cuspidal de G que satisface

$$\ell(\pi_\chi) = n, \quad \omega_{\pi_\chi} = \chi|_{K^\times}.$$

Proposición 6.2.9. *Sea $(L/K, \chi)$ un par minimal en el cual χ tiene nivel positivo. La representación π_χ depende, salvo equivalencia, solo en la clase de equivalencia del par $(L/K, \chi)$. En particular, es independiente de la elección de ψ, α y de la inmersión $L \to A$. Más aún, si ϕ es un caracter de $K^\times$ tal que $(L/K, \chi\phi_L)$ es también minimal, luego $\pi_{\chi\phi_L} = \phi\pi_\chi$.*

Demostración. Elegir otro ψ y α, pero dejando la inmersión intacta, no cambia el grupo J_α ni la representación Λ. Dadas dos K-inmersiones de L en A son G-conjugadas, luego dan lugar a tipos cuspidales conjugados $(\mathfrak{U}, J_\alpha, \Lambda)$. Más aún, si tenemos pares minimales $(L_i/K, \chi_i)$ que sean K-isomorfos, y $j_i : L_i \to K$ es una K-inmersión, el isomorfismo $(L_1/K, \chi_1) \to (L_2/K, \chi_2)$ se puede realizar por una G conjugación mandando $j_1(L_1)$ en $j_2(L_2)$ y caracter en caracter.

Para la última afirmación, el caracter $\chi\phi_L$ nos da el tipo cuspidal $(\mathfrak{U}, J_\alpha, \Lambda \otimes \phi \circ \det)$ □

Sea $(L/K, \chi)$ un par admisible. Existe un caracter ϕ de $K^\times$ y un caracter χ' de $L^\times$ tal que $(L/K, \chi')$ es minimal y que $\chi = \chi'\phi_L$. Definimos

$$\pi_\chi = \phi\pi_{\chi'}.$$

Esto no depende de la elección de descomposición $\chi = \chi'\phi_L$ debido a la última afirmación de la Proposición 6.2.2. Además,

$$\ell(\pi_\chi) = \frac{n}{e(L/K)}, \quad \omega_{\pi_\chi} = \chi|_{K^\times},$$

donde n es el nivel de χ.

En cualquier caso, la clase de equivalencia de π_χ depende solamente de la clase de equivalencia del par $(L/K, \chi)$. Acabamos de fabricarnos una correspondencia

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_2^0(K), \\ (L/K, \chi) &\longmapsto \pi_\chi, \end{aligned} \tag{6.2}$$

que no depende de las elecciones hechas previamente.

6.2.3. Teorema de la parametrización Mansa

Sea π una representación irreducible cuspidal de G, decimos que π es **no ramificada** si existe un caracter no ramificado $\phi \neq 1$ de $K^\times$ tal que $\phi\pi \cong \pi$. También, vamos a denotar por $\mathcal{A}_2^{\mathrm{nr}}(K) \subset \mathcal{A}_2^0(K)$ al conjunto de clases de representaciones no ramificadas. Y a una representación $\pi \in \mathcal{A}_2^0(K) \backslash \mathcal{A}_2^{\mathrm{nr}}(K)$ la vamos a llamar **totalmente ramificada**.

Teorema 6.2.10 (Teorema de la parametrización Mansa)**.** *La función $(L/K, \chi) \mapsto \pi_\chi$ de (6.2) induce una correspondencia*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_2^0(K), \quad \textit{si } p \neq 2 \\ \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_2^{\mathrm{nr}}(K), \quad \textit{si } p = 2. \end{aligned}$$

Si $(L/K, \chi) \in \mathbb{P}_2(K)$, luego:

(I) *si χ tiene nivel $\ell(\chi)$, luego $\ell(\pi_\chi) = \ell(\chi)/e(L/K)$,*

(II) $\omega_{\pi_\chi} = \chi|_{K^\times}$,

(III) *el par $(L/K, \check{\chi})$ es admisible y $\pi_{\check{\chi}} = \check{\pi}_\chi$,*

(IV) *si ϕ es un caracter de $K^\times$, luego $\pi_{\chi\phi_L} = \phi\pi_\chi$.*

Las propiedades $(i), (ii), (iv)$ ya fueron probadas. Para ver (iii), escribimos $\pi_\chi = c - \mathrm{Ind}_J^G \Lambda$ para el tipo cuspidal $(\mathfrak{U}, J_\alpha, \Lambda)$ construido a partir de $(L/K, \chi)$. El par $(L/K, \check{\chi})$ nos construye un tipo $(\mathfrak{U}, J, \Lambda^\vee)$, luego (iii) se deduce de la Observación 6.2.6. Luego solo tenemos que probar que esta correspondencia es una biyección.

Demostración. Una demostración del Teorema de la parametrización mansa aparece en la sección 21 "Tame Intertwining Properties"del libro [BH06]. □

6.3. La correspondencia local de Langlands para GL_2

La correspondencia local de Langlands consiste de dos lados. Por un lado está el conjunto de clases de equivalencia de representaciones 2-dimensionales semisimples de Weil-Deligne $\mathcal{G}_2(K)$. Por otro lado, el conjunto de clases de equivalencia $\mathcal{A}_2(K)$ de representaciones irreducibles suaves de $G = \mathrm{GL}_2(K)$.

Teorema 6.3.1 (Correspondencia local de Langlands)**.** *Existe una única correspondencia biyectiva*

$$\mathcal{L}_{loc,2}(K) : \mathcal{G}_2(K) \longrightarrow \mathcal{A}_2(K) \tag{6.3}$$

$$\sigma \longmapsto \pi_\sigma \tag{6.4}$$

tal que

$$L(\chi \otimes \sigma, s) = L(\chi \pi_\sigma, s)$$
$$\epsilon(\chi \otimes \sigma, \psi, s) = \epsilon(\chi \pi_\sigma, \psi, s),$$

para todo caracter χ de $F^\times$ y todo $\psi \in \widehat{K}$ no trivial.

Si χ es un caracter de $K^\times$, hacemos un abuso de notación y denotamos de la misma manera como χ al caracter $\chi \circ \alpha_K$ de $\mathcal{W}_K$. Además, si π es una representación de GL y χ es un caracter notamos como $\chi\pi = \chi \circ \det \pi$.

Antes que nada observar que la unicidad de la correspondencia se deduce del Teorema Inverso 5.4.1.

Tenemos las descomposiciones

$$\mathcal{G}_2(K) = \mathcal{G}_2^1(K) \cup \mathcal{G}_2^0(K),$$
$$\mathcal{A}_2(K) = \mathcal{A}_2^1(K) \cup \mathcal{A}_2^0(K).$$

Luego, para demostrar la correspondencia, vamos a separar ambos lados en dos casos: primero vamos a ver que vale la correspondencia entre $\mathcal{G}_2^1(K)$ y $\mathcal{A}_2^1(K)$, y luego vamos a ver que vale para $\mathcal{G}_2^0(K)$ y $\mathcal{A}_2^0(K)$.

Proposición 6.3.2. *(1) Sea $\pi \in \mathcal{A}_2(K)$, luego $\pi \in \mathcal{A}_2^0(K)$ si y solo si $L(\chi\pi, s) = 1$ para todo χ caracter de $K^\times$.*

(2) Sea $\rho \in \mathcal{G}_2(K)$, luego $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$ si y solo si $L(\chi \otimes \rho, s) = 1$ para todo χ caracter de $K^\times$.

Demostración. El primer ítem es por la Proposición 5.4.2 y el segundo ídem se deduce de que $L(\rho, s) = 1$ para todo $\rho \in \mathcal{G}_n^0(K)$ con $n \geqslant 2$, pues si ρ es irreducible entonces $V^{\mathcal{I}_K} = 0$ y recíprocamente, podemos usar el Teorema 3.4.13 y las propiedades de la L-función. □

Por lo tanto $\mathcal{L}_{loc,2}(K)$ tiene que mandar $\mathcal{A}_2^1(K)$ en $\mathcal{G}_2^1(K)$ y $\mathcal{A}_2^0(K)$ en $\mathcal{G}_2^0(K)$. Ahora lidiaremos con el primer caso.

Teorema 6.3.3. *Existe una única correspondencia*

$$\Pi^1 : \mathcal{G}_2^1(K) \to \mathcal{A}_2^1(K),$$

tal que

$$L(\chi \Pi^1(\rho), s) = L(\chi \otimes \rho, s),$$

para todo $\rho \in \mathcal{G}_2^1(K)$ y todo caracter χ de $K^\times$. La función Π^1 es biyectiva y satisface

$$\Pi^1(\chi \otimes \rho) = \chi \Pi^1(\rho),$$
$$\epsilon(\Pi^1(\rho), s, \psi) = \epsilon(\rho, s, \psi),$$

para todo ρ, χ, y $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$.

Demostración. Vamos a definir explícitamente a la función Π^1. Las propiedades que cumple Π^1 se deducen inmediatamente de las propiedades de las L-funciones y constantes locales y del Teorema 5.3.5.

Sea $(\rho, V, N) \in \mathcal{G}_2^1(K)$. Como ρ es semisimple, se escribe como $\chi_1 \oplus \chi_2$, para caracteres χ_i de $K^\times$. Escribimos el caracter $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ del subgrupo $T \leqslant G$, y consideramos la representación inducida $\pi = \iota_B^G \chi$ de G. Si π es irreducible, luego por el Teorema 5.2.11 se tiene que $\chi_1/\chi_2 \neq |\cdot|^{\pm 1}$, en consecuencia se tiene que $N = 0$ por el Teorema 3.4.13. Luego definimos $\Pi^1(\rho) = \pi = \iota_B^G \chi$.

Nos queda el caso cuando $\iota_B^G \chi$ no es irreducible. Luego existe un caracter ϕ de $K^\times$ tal que $\chi_1(x) = \phi(x)\,|x|^{-1/2}$ y $\chi_2(x) = \phi(x)\,|x|^{1/2}$. Existen dos elementos (ρ, V, N) de $\mathcal{G}_2^1(K)$ en los cuales ρ tiene $\mathcal{W}_K$-factores de composición χ_1, χ_2, y se distinguen dependiendo de si N es cero o no. Tomamos

$$\Pi^1(\rho, V, 0) = \phi \circ \det$$

en el primer caso y

$$\Pi^1(\rho, V, N) = \phi \cdot \mathrm{St}_G, \ N \neq 0$$

En el segundo. □

Ahora la parte principal a demostrar es

Teorema 6.3.4. *Sea $\psi \in \check{K}$, $\psi \neq 1$. Existe una única correspondencia*

$$\Pi : \mathcal{G}_2^0(K) \to \mathcal{A}_2^0(K)$$

con la propiedad

$$\epsilon(\chi \otimes \rho, s, \psi) = \epsilon(\chi \Pi(\rho), s, \psi), \tag{6.5}$$

para todo $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$, todo caracter χ de $K^\times$.

Más aún, Π es una biyección y vale (6.5) para todo $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$.

La unicidad ya la mencionamos: es consecuencia del Teorema inverso 5.4.1 y la Proposición 5.4.2.

De existir una correspondencia como en el teorema anterior, se cumplirían las siguientes proposiciones:

Proposición 6.3.5. *Sea Π una función que satisface (6.5) para algún $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$ fijo. Entonces*

(1) Si $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$ y $\pi = \Pi(\rho)$, entonces $\omega_\pi = \det \rho$.

(2) La función Π satisface (6.5) para cualquier $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia del Teorema 5.3.4 junto con el cuarto ítem de la Proposición 3.4.10. La segunda se sigue de la Proposición 5.3.2 y el segundo ítem de la Proposición 3.4.10. □

Proposición 6.3.6. *Sea Π una función que satisface las mismas propiedades que el teorema anterior. Luego*

(1) $\Pi(\chi \otimes \rho) = \chi \Pi(\rho)$, para $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$ y cualquier caracter χ de $K^\times$.

(2) Si $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$, luego $\Pi(\check{\rho}) = \widetilde{\Pi(\rho)}$.

Demostración. Notar que por el Teorema inverso 5.4.1 basta probar para el primer ítem que $\chi\pi(\rho)$ y $\pi(\chi \otimes \rho)$ multiplicadas por cualquier twist por un caracter coinciden las L-funciones y constantes locales; análogamente en el segundo ítem hay que probar lo mismo pero para $\pi(\check{\rho})$ y $\widetilde{\pi(\rho)}$. Comparando y usando 6.5 para el primero ítem y la ecuación funcional en el segundo se sigue la proposición. □

6.3.1. Caso $p \neq 2$

En esta subsección probaremos el teorema anterior en el caso de que la característica p del cuerpo residual $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$ sea $p \neq 0$. Vamos a definir el subconjunto $\mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K) \subset \mathcal{G}_2^0(K)$ como los $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$ tales que existe un caracter no ramificado $\chi \neq 1$ de $\mathcal{W}_K$ tal que $\chi \otimes \rho \cong \rho$. Si $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K) \backslash \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$, decimos que ρ es una representación **totalmente ramificada**.

Si $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$, podemos ver a ξ como un caracter de $\mathcal{W}_L$ y construir la representación inducida $\rho_\xi = \mathrm{Ind}_{L/K}\, \xi$ de $\mathcal{W}_K$.

Teorema 6.3.7. *Si $(L/K, \xi)$ es un par admisible, la representación ρ_ξ de $\mathcal{W}_K$ es irreducible. La función $(L/K, \xi) \mapsto \rho_\xi$ induce una biyección*

$$\mathbb{P}_2(K) \to \mathcal{G}_2^0(K), \text{ si } p \neq 2$$

$$\mathbb{P}_2(K) \to \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K), \text{ si } p = 2.$$

Demostración. Primero, veamos la buena definición de esta función, i.e. que la imagen es una representación irreducible y que la función no depende de la clase de equivalencia de $(L/K, \xi)$. Sea $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$ y $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\sigma \neq 1$. Como ξ no se factoriza a través de $N_{L/K}$, los caracteres ξ, ξ^σ de $L^\times$ son distintos. El mapa de Artin $\mathcal{W}_L^{ab} \cong L^\times$ es $\mathrm{Gal}(L/K)$-equivariante (Propiedad (v) del mapa de Artin), entonces los caracteres ξ, ξ^σ de $\mathcal{W}_L$ son distintos y la representación $\rho_\xi = \mathrm{Ind}_{L/K}\, \xi$ es luego irreducible. La equivalencia de clases de ρ_ξ solo depende de la clase de equivalencia de isomorfismos de $(L/K, \xi)$.

Antes de seguir, necesitamos el siguiente lema.

Lema 6.3.8. *Sean $(L/K, \xi)$ un par admisible, $\rho_\xi = \mathrm{Ind}_{L/K}\,\xi$. Sea $\kappa = \kappa_{L/K}$ el caracter no trivial de $K^\times$ que es trivial en $N_{L/K}(L^\times)$. Luego se tiene que $\rho_\xi \cong \kappa \otimes \rho_\xi$. Y en particular, $\rho_\xi \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$ si y solo si L/K es una extensión no ramificada.*

Demostración. Sabemos que $\kappa \otimes \rho_\xi \cong \mathrm{Ind}_{L/K}(\kappa_L \otimes \xi)$, donde $\kappa_L = \kappa \circ N_{L/K} = 1$. Esto nos da una implicación. Recíprocamente, si $\rho_\xi \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$ y χ es un caracter no ramificado cuadrático de $K^\times$. Si σ genera $\mathrm{Gal}(L/K)$, luego $\xi^\sigma/\xi = \chi_L$. Luego $\xi|_{U_L^1}$ se factoriza a través de $N_{L/K}$, por definición de par admisible esto significa que la extensión L/K es no ramificada. □

Continuamos con la demostración del teorema. Veamos ahora la inyectividad de la función. Sea $(L_i/K, \xi_i) \in \mathbb{P}_2(K)$, $i = 1, 2$, y supongamos que $\rho_{\xi_1} \cong \rho_{\xi_2}$. Si $L_1/K \cong L_2/K$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $L_1 = L_2 = L$. La restricción $\rho_{\xi_1}|_{\mathcal{W}_L}$ es $\xi_1 \oplus \xi_1^\sigma$, donde $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, $\sigma \neq 1$. Se sigue que $\xi_2 = \xi_1$ o ξ_1^σ, y $(L/K, \xi_2) \cong (L/K, \xi_1)$ en cualquier caso. Ahora asumimos que $L_1 \neq L_2$, tomemos $L = L_1L_2$. Al menos uno de los L_i/K es totalmente ramificado, luego $[L : K] = 4$ y la subextensión no ramificada maximal E/K de L/K tiene grado 2. Sea $\kappa_i = \kappa_{L_i/K}$. La representación $\rho = \rho_{\xi_i}$ es fijado cuando tensorizamos por κ_i, luego también por $\kappa_{E/K}$. Eso es, $\rho \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$. El lema anterior implica que L_i/K es no ramificado, absurdo. Luego tenemos inyectividad.

Veamos ahora la sobreyectividad. Si $\rho \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$, algunas consideraciones elementales muestran que ρ es inducida por un caracter ξ de $\mathcal{W}_L$, donde L/K es una extensión cuadrática no ramificada. El par $(L/K, \xi)$ es luego admisible y $\rho \cong \rho_\xi$. En otro caso, si ρ es totalmente ramificado, en particular $p \neq 2$. Como $\dim \rho = 2$, la restricción de ρ al pro p-grupo $\mathcal{P}_K$ se descompone como suma de caracteres. Se sigue que existe una extensión finita Galois mansamente ramificada E/K tal que $\rho|_{\mathcal{W}_E}$ se descompone como suma de caracteres, digamos

$$\rho|_{\mathcal{W}_E} = \theta \oplus \theta',$$

Primero supongamos que $\theta \neq \theta'$. Luego el $\mathcal{W}_K$-estabilizador de θ es $\mathcal{W}_M$, para alguna extensión cuadrática M/K contenida en E. La representación natural de $\mathcal{W}_K$ en el subespacio θ-isotípico de ρ nos da un caracter ξ de $\mathcal{W}_K$ tal que $\rho = \mathrm{Ind}_{M/K}\,\xi$. Veamos a ξ como un caracter de $M^\times$, tenemos que mostrar que el par $(M/K, \xi)$ es admisible. Sea $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$, $\sigma \neq 1$. El caracter $\xi^\sigma|_{\mathcal{W}_E}$ es θ', luego $\xi \neq \xi^\sigma$ y ξ no se factoriza por $N_{M/K}$. Consideremos ahora $\xi|_{U_M^1}$. La extensión M/K es totalmente ramificada, pues ρ es totalmente ramificada. Entonces si $\xi|_{U_M^1}$ se factoriza a través de $N_{M/K}$, el caracter ξ^σ/ξ es trivial en $U_M = U_K U_M^1$, y es no ramificado: $\xi^\sigma = \chi_M \xi$, para algún caracter χ no ramificado de $K^\times$, $\chi \neq 1$. Por lo tanto, tenemos que $\rho \cong \chi \otimes \rho$, y $\rho \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$, contradiciendo nuestra hipótesis. Esto concluye que en este caso, el par $(M/K, \xi)$ es admisible y $\rho \cong \rho_\xi$.

Finalmente, nos queda por excluir el caso $\theta = \theta'$. Sea M/K la subextensión no ramificada maximal de E/K. Como E/M es cíclico, θ admite una extensión a un caracter ξ de $\mathcal{W}_M$, tal que ξ aparece en $\rho|_{\mathcal{W}_M}$. En otras palabras, podíamos tomar E/K no ramificada. Pero eso significaría que $\rho \in \mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)^{nr}(K)$, absurdo.

□

Ahora, hemos conseguido para $p \neq 2$ dos correspondencias canónicas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_2^0(K), & \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathcal{G}_2^0(K), \\ (L/K, \xi) &\longmapsto \pi_\xi, & (L/K, \xi) &\longmapsto \rho_\xi, \end{aligned}$$

dados por el Teorema 6.3.7 y el Teorema de la parametrización mansa 6.2.10. Esto nos da la correspondencia

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^0(K) &\longrightarrow \mathcal{A}_2^0(K), \\ \rho_\xi &\longmapsto \pi_\xi, \end{aligned}$$

que no es la correspondencia buscada en el Teorema 6.3.4. Vamos a modificarla y a utilizar la Subsección 3.4.3 de la constante de Langlands.

Vamos a tomar ahora un caracter admisible $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$ y asociarle un caracter $\Delta = \Delta_\xi$ de $L^\times$ de nivel cero. Pero antes, tenemos la siguiente definición:

Definición 6.3.9. Sea $(L/K, \xi)$ un par admisible con L/K no ramificada. Definimos el caracter Δ_ξ asociado al par, eligiéndolo de manera que sea no ramificada y de orden 2.

Veamos ahora como se elige explícitamente Δ_ξ.

El caso L/K ramificada es más complicado. Sea μ_K el grupo de raíces de la unidad en K de orden coprimo con p. Sea L/K una extensión cuadrática totalmente mansamente ramificada, sea ϖ un elemento uniformizante de L, sea $\beta \in L^\times$. Como $U_L = \mu_L U_L^1 = \mu_K U_L^1$, existe una única raíz de la unidad $\zeta(\beta, \varpi) \in \mu_K$ tal que

$$\beta \varpi^{-v_L(\beta)} \equiv \zeta(\beta, \varpi) \mod U_L^1. \tag{6.6}$$

Proposición/Definición 6.3.10. *Sea $\psi \in \widehat{K}$ de nivel uno.*

(1) Sea $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$ un par admisible tal que L/K es totalmente ramificada. Sea n el nivel de ξ y sea $\alpha \in \mathfrak{P}_L^{-n}$ tal que $\xi(1+x) = \psi_L(\alpha x)$, $x \in \mathfrak{P}_L^n$. Existe un único caracter $\Delta = \Delta_\xi$ de $L^\times$ tal que:

$$\begin{aligned} \Delta|_{U_L^1} = 1, \quad \Delta|_{K^\times} = \kappa_{L/K}, \\ \Delta(\varpi) = \kappa_{L/K}(\zeta(\beta, \varpi))\lambda_{L/K}(\psi)^n, \end{aligned} \tag{6.7}$$

para cualquier elemento uniformizante ϖ de L. La definición de Δ_ξ no depende de la elección de ψ ni de α.

(2) Sea $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$ y supongamos que L/K es totalmente ramificada. Como $\xi = \xi' \cdot \chi_L$, para un par admisible minimal $(L/K, \xi')$ y un caracter χ de $K^\times$. Definimos ahora

$$\Delta_\xi = \Delta_{\xi'}.$$

La definición de Δ_ξ no depende de la elección de descomposición $\xi = \xi' \cdot \chi_L$.

Demostración. Sin lugar a dudas existe como mucho un caracter Δ de $L^\times$ que satisface las condiciones anteriores (6.7). Si dejamos el caracter ψ fijo, la definición de Δ solo depende de la coclase αU_L^1. Si reemplazamos a ψ por otro caracter $\psi' \in \widehat{K}$ de nivel uno, luego $\psi' = u\psi$, para algún $u \in U_K$. El elemento α es reemplazado por $u^{-1}\alpha$ y

$$\kappa_{L/K}(\zeta(u^{-1}, \varpi))\lambda_{L/K}(u\psi)^n = \kappa_{L/K}(\zeta(\alpha, \varpi))\lambda_{L/K}(\psi)^n \kappa_{L/K}(u)^{n-1},$$

mientras que $\kappa_{L/K}(u)^{n-1} = 1$ porque n es impar. En otras palabras, el caracter (si es que existe) está definido de manera independiente a una elección de ψ o de α.

Para probar la existencia, debemos verificar que las condiciones sean consistentes

$$\begin{aligned} \Delta(u\varpi) &= \Delta(u)\Delta(\varpi), \quad u \in U_L, \\ \Delta(\varpi^2) &= \Delta(\varpi)^2. \end{aligned}$$

Para la primera ecuación, escribimos $u = \eta v$, con $\eta \in \mu_K$ y $v \in U_L^1$. Esto nos da $\zeta(\alpha, u\varpi) \equiv \eta\zeta(\alpha, \varpi) \mod \mu_K^2$ y

$$\Delta(u\varpi) = \kappa_{L/K}(\eta)\kappa_{L/K}(\zeta(\alpha, \varpi))\lambda_{L/K}(\psi)^n = \Delta(u)\Delta(\varpi).$$

Para la segunda ecuación, notemos que $\varpi^2 = -N_{L/K}(\varpi) \mod U_L^1$, entonces por (6.6),

$$\Delta(\varpi^2) = \Delta(-N_{L/K}(\varpi)) = \kappa_{L/K}(-1) = \Delta(\varpi)^2,$$

como queríamos.

La última afirmación se sigue inmediatamente. □

Lema 6.3.11. *Valen las siguientes afirmaciones.*

(1) Si $(L/K, \xi)$ es un par admisible, el par $(L/K, \Delta_\xi \xi)$ es admisible y su clase de equivalencia depende solamente de la de $(L/K, \xi)$. El caracter Δ_ξ satisface $\Delta_\xi^2 = 1$, salvo cuando L/K es totalmente ramificado y $q \equiv 3 \mod 4$. En esa excepción, Δ_ξ tiene orden 4.

(II) *La correspondencia*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(K) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(K), \\ (L/K, \xi) &\longmapsto (L/K, \Delta_{\tilde{\xi}}\xi), \end{aligned}$$

es biyectiva.

Demostración. El primer ítem se sigue directamente de las definiciones y de la Proposición 3.4.17 y de (3.8). Para el segundo ítem observemos que $\Delta_{\tilde{\xi}}$ es mansamente ramificado y depende solamente de L/K y de $\xi|_{U_L^1}$. □

Teorema 6.3.12 (La correspondencia de Langlands mansa)**.** *Valen las siguientes afirmaciones.*

(1) Supongamos $p \neq 2$. Para $\rho \in \mathcal{G}_2^0(K)$, definimos $\Pi(\rho) = \pi_{\Delta_{\tilde{\xi}}\xi}$ para cualquier par admisible $(L/K, \xi) \in \mathbb{P}_2(K)$ tal que $\rho \cong \rho_{\tilde{\xi}}$. La correspondencia

$$\Pi : \mathcal{G}_2^0(K) \longrightarrow \mathcal{A}_2^0(K)$$

es una biyección que satisface

$$\epsilon(\chi \otimes \rho, s, \psi) = \epsilon(\chi\Pi(\rho), s, \psi), \tag{6.8}$$

para todos los caracteres χ de $K^\times$ y $\psi \in \widehat{K}$, $\psi \neq 1$.

(2) En el caso $p = 2$, la correspondencia

$$\begin{aligned} \Pi : &\mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K) \longrightarrow \mathcal{A}_2^{\mathrm{nr}}(K) \\ &\rho_{\tilde{\xi}} \longmapsto \pi_{\Delta_{\tilde{\xi}}\xi}, \end{aligned}$$

es una biyección que satisface el análogo de (6.8).

(3) En ambos casos, la función Π satisface también

$$\Pi(\chi \otimes \rho) = \chi\Pi(\rho) \quad y \quad \Pi(\check{\rho}) = \widetilde{\Pi(\rho)}, \tag{6.9}$$

para todo ρ y χ de $K^\times$.

Observación 6.3.13. Por la unicidad de la correspondencia 6.3.1, se tiene que Π es la correspondencia de Langlands cuando $p \neq 2$, y es la restricción a $\mathcal{G}_2^{\mathrm{nr}}(K)$ de la correspondencia de Langlands cuando $p = 2$.

Demostración. Primero notemos que Π es biyectiva por el lema anterior, el Teorema 6.3.7 y el Teorema 6.2.10. Además, por construcción y el tercer ítem del Teorema 6.2.10 se tiene (6.9).

La construcción nos da también que $\omega_{\Pi(\rho)} = \det\rho$ por lo que solo debemos verificar (6.8) para un solo $\psi \in \widehat{K}$, el cual tomaremos de nivel uno.

También tenemos que $n(\rho, \psi) = n(\Pi(\rho), \psi)$ por el primer ítem del Teorema 6.2.10, con lo cual solo tenemos que checkear (6.8) en $s = \frac{1}{2}$. Separemos en tres casos.

Caso 1. Sea $\rho = \mathrm{Ind}_{L/K}\,\xi$, con $(L/K, \xi)$ minimal y L/K totalmente ramificada.

Luego ξ tiene nivel impar $n = 2m + 1$. Tomemos α tal que $\xi(1 + x) = \psi_L(\alpha x)$, $x \in \mathfrak{P}_L^{m+1}$. Usando la Proposición 2.4.10, obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi, \frac{1}{2}, \psi_L) &= \check{\xi}(\alpha)\psi_L(\alpha), \\ \epsilon(\rho, \frac{1}{2}, \psi) &= \epsilon(\xi, \frac{1}{2}, \psi_L)\lambda_{L/K}(\psi) \\ &= \check{\xi}(\alpha)\psi_L(\alpha)\lambda_{L/K}(\psi). \end{aligned}$$

Tomando $\pi = \Pi(\rho)$, la Proposición 5.3.3 nos da

$$\epsilon(\pi, \frac{1}{2}, \psi) = \check{\Delta}_{\tilde{\xi}}(\alpha)\check{\xi}(\alpha)\psi_A(\alpha).$$

Chequeemos que $\check{\Delta}_{\check{\xi}}(\alpha) = \lambda_{L/K}(\psi)$.

Tomemos un elemento uniformizante ϖ de L y $\zeta \in \mu_K$ tal que $\alpha\varpi^n \equiv \zeta \mod U_L^1$. La definición de $\Delta = \Delta_{\check{\xi}}$ nos da

$$\Delta(\alpha) = \kappa_{L/K}(\zeta)\Delta(\varpi^{-n}).$$

Como n es impar y $\lambda_{L/K}(\psi)$ es una raíz cuarta de la unidad, conseguimos

$$\kappa_{L/K}(\zeta)\Delta(\varpi^{-n})\lambda_{L/K}(\psi) = \kappa_{L/K}(\zeta)^{1-n}\lambda_{L/K}(\psi)^{1-n^2} = 1,$$

como queríamos.

Caso 2. Sea $\rho = \mathrm{Ind}_{L/K}\,\xi$ como en el Caso 1, y sea χ un caracter de $K^\times$ de nivel $l \geqslant 1$.

Consideremos la representación $\chi \otimes \rho$. Esta se consigue por inducción, a partir del par admisible $(L/K, \xi\chi_L)$. Si $l \leqslant m$, el par $(L/K, \xi\chi_L)$ es minimal y no hay nada más que hacer. Si no, χ_L tiene nivel $2l > n$ y existe $c \in K$ tal que $\chi(1+x) = \psi(cx)$, $x \in \mathfrak{P}_K^{[l/2]+1}$. Entonces, $\chi_L(1+y) = \psi_L(cy)$, $y \in \mathfrak{P}_L^{l+1}$. Más aún, $\xi(1+x) = \psi_L(\alpha x)$, $x \in \mathfrak{P}_L^l$. A partir de la Proposición 2.4.10, conseguimos

$$\begin{aligned}
\epsilon(\xi\chi_L, \frac{1}{2}, \psi_L) &= q^{-1/2} \sum_{y \in \mathfrak{P}_L^l / \mathfrak{P}_L^{l+1}} \check{\xi}\check{\chi}_L((\alpha+c)(1+y))\psi_L((\alpha+c)(1+y)) \\
&= q^{-1/2}\check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}_L(1+c^{-1}\alpha)\psi_L(\alpha)\sum_y \check{\chi}_L(c(1+y))\psi_L(c(1+y)) \\
&= \check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}_L(1+c^{-1}\alpha)\psi_L(\alpha)\epsilon(\chi_L, \frac{1}{2}, \psi_L).
\end{aligned}$$

Con lo cual, usando la Observación 3.4.16 y la Proposición 2.4.10,

$$\begin{aligned}
\epsilon(\chi\otimes\rho, \frac{1}{2}, \psi) &= \check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}_L(1+c^{-1}\alpha)\psi_L(\alpha)\epsilon(\chi_L, \frac{1}{2}, \psi_L)\lambda_{L/K}(\psi) \\
&= \check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}_L(1+c^{-1}\alpha)\psi_L(\alpha)\epsilon(\chi, \frac{1}{2}, \psi)\epsilon(\chi\kappa_{L/K}, \frac{1}{2}, \psi) \\
&= \check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}_L(1+c^{-1}\alpha)\psi_L(\alpha)\epsilon(\chi, \frac{1}{2}, \psi)^2\kappa_{L/K}(c).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\pi = \Pi(\rho)$ como antes, las mismas técnicas, usando el Teorema 2.4.9, la ecuación $\frac{\tau_{\mathfrak{U}}(\chi,\psi)}{[\mathfrak{U}:\mathfrak{R}^{el+1}]^{1/2}} = \frac{\tau(\chi,\psi)^2}{q^{l+1}}$[7] y la Proposición 5.3.3 nos queda

$$\epsilon(\chi\pi, \frac{1}{2}, \psi) = \check{\Delta}\check{\xi}(c+\alpha)\check{\chi}(\det(1+c^{-1}\alpha))\psi_A(\alpha)\epsilon(\chi, \frac{1}{2}, \psi)^2.$$

Sin embargo, $\psi_A(\alpha) = \psi_L(\alpha)$, y como Δ es mansamente ramificado, tenemos que $\check{\Delta}(c+\alpha) = \check{\Delta}(c) = \kappa_{L/K}(c)$. De donde deducimos

$$\epsilon(\chi\otimes\rho, \frac{1}{2}, \psi) = \epsilon(\chi\pi, \frac{1}{2}, \psi),$$

como queríamos.

Caso 3. Sea $\rho = \mathrm{Ind}_{L/K}\,\xi$ con $(L/K, \xi)$ minimal y L/K no ramificada.

Si el nivel n de ξ es impar, el argumento es una versión simplificada del Caso 1. Supongamos entonces que n es par. Si $n = 0$, se sigue la demostración de la identidad (25.4.1) que aparece en [BH06] junto con simples manipulaciones. Ahora supongamos que $n = 2m > 0$. Por la Proposición 2.4.10 y el Teorema 2.4.9,

$$\epsilon(\xi, \frac{1}{2}, \psi_L) = q^{-1} \sum_{x \in \mathfrak{P}_L^m / \mathfrak{P}_L^{m+1}} \check{\xi}(\alpha(1+x))\psi_L(\alpha(1+x)),$$

[7] Sea $\mathfrak{U}$ un orden de cadena con radical $\mathfrak{R}$ y $e = e_{\mathfrak{U}}$. Sea χ un caracter de $K^\times$ de nivel $l \geqslant 1$. Vemos a $\chi \circ \det$ como un caracter de $\mathcal{K}_{\mathfrak{U}}$ cuando este tiene nivel el. Se define la suma de Gauss $\tau_{\mathfrak{U}}(\chi,\psi) = \sum_{x \in U_{\mathfrak{U}}/U_{\mathfrak{U}}^{el+1}} \check{\chi}(\det cx)\psi_A(cx)$ para cualquier $c \in K$ con orden $-l$.

Se puede probar la identidad mediante un cálculo directo.

para α elegido de manera adecuada. Por otro lado, por la Proposición 5.3.3

$$\epsilon(\pi, \frac{1}{2}, \psi) = q^{-3} \sum_{y \in \mathfrak{P}^m \mathfrak{M} / \mathfrak{P}_K^{m+1} \mathfrak{M}} \operatorname{tr} \Lambda^\vee(\alpha(1+y)) \psi_A(\alpha(1+y)).$$

Lema 6.3.14. *Sea $x \in U_{\mathfrak{M}}^m$, entonces $\operatorname{tr} \Lambda(\alpha x) = 0$ a menos que αx sea $U_{\mathfrak{M}}^m$-conjugado a un elemento de $\alpha U_L^m U_{\mathfrak{M}}^{m+1}$.*

Esto es simplemente una reescritura de la afirmación del Lema 22.3 de [BH06]. Tomando en cuenta el número de elementos de cada clase de conjugación, obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon(\pi, \frac{1}{2}, \psi) &= -q^{-1} \sum_{y \in \mathfrak{P}_L^m / \mathfrak{P}_L^{m+1}} \check{\xi}(\alpha(1+y)) \psi_A(\alpha(1+y)). \\ &= \epsilon(\rho, \frac{1}{2}, \psi), \end{aligned}$$

como queríamos.

Para los casos restantes, las representaciones $\chi \otimes \rho$, con ρ no ramificada y dados por un par minimal son muy parecidos y siguen la misma línea de razonamiento que el Caso 2, por eso omitiremos los detalles.

Esto prueba el Teorema 6.3.10 y finaliza la demostración de la correspondencia local de Langlands 6.3.1 cuando $p \neq 2$. □

6.4. Ejemplo: aplicación de la correspondencia local de Langlands sobre una representación proveniente de una curva elíptica

La demostración del Teorema 6.3.3 construye la correspondencia de manera explícita y muestra que las representaciones (ρ, V, N) de Weil-Deligne reducibles, de la forma $\chi_1 \oplus \chi_2$ con caracteres χ_i de $K^\times$, corresponden con las representaciones suaves π_ρ no cuspidales. Usaremos la clasificación de representaciones irreducibles no cuspidales que aparece en la Sección 9.11 de [BH06]. Cuando $\chi_1/\chi_2 \neq |\cdot|^{\pm 1}$ se tiene que $\pi_\rho = \iota_B^G(\chi_1, \chi_2)$, además debe ser que $N = 0$. Cuando $\chi_1/\chi_2 = |\cdot|^{\pm 1}$ hay dos posibilidades, antes tomemos un caracter ϕ de $K^\times$ tal que $\chi_1(x) = \phi(x)|x|^{-1/2}$ y $\chi_2(x) = \phi(x)|x|^{1/2}$, luego el primer caso es $\pi_\rho = \phi \circ \det$ cuando $N = 0$, y el segundo caso es $\pi_\rho = \phi \operatorname{St}_G$ cuando $N \neq 0$.

Esto prueba la siguiente correspondencia entre representaciones de Weil-Deligne complejas provenientes de una curva elíptica E/K (que estudiamos en la Sección 3.9) y representaciones irreducibles suaves vía la correspondencia local de Langlands:

Ejemplo 6.4.1. La representación $\rho'_{E/K}$ corresponde a alguna de las siguientes representaciones suaves:

(I) Si E/K tiene reducción potencialmente buena:

(1) Si E/K tiene reducción buena, entonces $\pi_{\rho'_{E/K}} = \iota_B^G(\chi_1, \chi_2)$ (irreducible), con $\rho'_{E/K} = \chi_1 \oplus \chi_2$.

(2) Si E/K no tiene reducción buena y $\rho'_{E/K}$ es reducible, entonces $\pi_{\rho'_{E/K}} = \iota_B^G(\chi_1, \chi_2)$ si la inducción parabólica es irreducible, o $\pi_{\rho'_{E/K}} = \phi \circ \det$ con $\phi = \chi_1 |\cdot|^{1/2}$ si no.

(3) Si E/K no tiene reducción buena y $\rho'_{E/K}$ es irreducible, entonces $\pi_{\rho'_{E/K}}$ es cuspidal.

(II) Si E/K tiene reducción potencialmente multiplicativa, entonces $\pi_{\rho'_{E/K}} = \phi \operatorname{St}_G$ con $\phi = \chi|\cdot|^{-1/2}$ y χ es el caracter cuadrático de la Proposición 3.9.3.

Demostración. Vamos a separar la demostración los casos (i) y (ii), según E/K tenga reducción potencialmente buena o potencialmente multiplicativa, y aplicaremos los resultados de las subsecciones 3.9.1 y 3.9.2, respectivamente. Por la Proposición 3.9.2 sabemos cuándo $\rho'_{E/K}$ es reducible, por ejemplo si E/K tiene reducción buena, luego por la Proposición 6.3.2 sabemos que $\pi_{\rho'_{E/K}}$ es no cuspidal si y solo si $\rho'_{E/K}$ es reducible. Utilizando lo comentado al principio de la

sección se deducen $(1), (2)$ y (3), particularmente el caso (1) se deduce de que el conductor de E/K es cero y la representación principal es la única con conductor cero de las no cuspidales.

EL caso (ii) se deduce utilizando el mismo razonamiento, por la Proposición 3.9.3 sabemos que $\rho'_{E/K}$ es reducible, luego se corresponde con una representación no cuspidal, la única posibilidad es la que aparece en el ítem (ii), pues $N_{E/K} \neq 0$. $\square$

Observación 6.4.2. Podemos saber cuándo $\rho'_{E/K}$ es reducible en el caso de reducción potencialmente buena gracias a la Proposición 3.9.2, luego en el caso (i) cuando E/K tiene reducción potencialmente buena, sabemos que $\pi_{\rho'_{E/K}}$ no es cuspidal, i.e. estamos en el caso (2) si y solo si E consigue buena reducción sobre una extensión finita abeliana de K.

Bibliografía

[BH06] Colin J Bushnell and Guy Henniart. *The local Langlands conjecture for GL (2)*, volume 335. Springer Science & Business Media, 2006.

[CF67] John William Scott Cassels and Albrecht Fröhlich. *Algebraic Number Theory*. London Mathematical Society London, 1967.

[Del75] Pierre Deligne. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions l. In *Modular functions of one variable II*, pages 501–597. Springer, 1975.

[FH13] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*, volume 129. Springer Science & Business Media, 2013.

[Har97] Michael Harris. Supercuspidal representations in the cohomology of drinfel'd upper half spaces: elaboration of carayol's program. *Inventiones mathematicae*, 129(1):75–119, 1997.

[Hen00] Guy Henniart. Une preuve simple des conjectures de langlands pour gl (n) sur un corps p-adique. *Inventiones mathematicae*, 139(2):439–455, 2000.

[HT01] M. Harris and R. Taylor. *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties.*, volume 151. Princeton university press, 2001.

[JL70] H Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on GL(2)*. Springer-Verlag, 1970.

[Kar89] Gregory Karpilovsky. *Topics in field theory*. Elsevier, 1989.

[Kut80] Philip Kutzko. The langlands conjecture for gl2 of a local field. *Annals of Mathematics*, pages 381–412, 1980.

[Kut84] PC Kutzko. The exceptional representations of gl2. *Compositio Mathematica*, 51(1):3–14, 1984.

[LRS93] Gérard Laumon, Michael Rapoport, and Ulrich Stuhler. $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the langlands correspondence. *Inventiones mathematicae*, 113(1):217–338, 1993.

[Mil08] James S Milne. *Algebraic number theory*. JS Milne, 2008.

[MS77] Daniel A Marcus and Emanuele Sacco. *Number fields*, volume 1995. Springer, 1977.

[Neu13] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322. Springer Science & Business Media, 2013.

[Roh93] David E. Rohrlich. Variation of the root number in families of elliptic curves. *Compositio Mathematica*, 87(2):119–151, 1993.

[Roh94] David E Rohrlich. Elliptic curves and the weil-deligne group. In *Elliptic curves and related topics*, volume 4, pages 125–157. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1994.

[Ser72] Jean-Pierre Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. math*, 15:259–331, 1972.

[Ser97] Jean-Pierre Serre. *Abelian l-adic representations and elliptic curves*. AK Peters/CRC Press, 1997.

[Ser13] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2013.

[Sil94] Joseph H Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151. Springer Science & Business Media, 1994.

[Sil09] Joseph H Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106. Springer, 2009.

[ST68] Jean-Pierre Serre and John Tate. Good reduction of abelian varieties. *Annals of Mathematics*, pages 492–517, 1968.

[ST92] Joseph H Silverman and John Torrence Tate. *Rational points on elliptic curves*, volume 9. Springer, 1992.

[Str06] Markus Stroppel. *Locally compact groups*, volume 3. European Mathematical Society, 2006.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part*, volume 2, pages 3–26, 1979.

[Wei73] André Weil. *Basic number theory*, volume 144. Springer Science & Business Media, 1973.