



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Fórmulas de valor medio sobre árboles

Rodrigo S. Gilardoni

Director: Julio D. Rossi

2022

Índice general

1	Introducción	4
1.1	Descripción del árbol	4
1.2	Problemas a abordar	5
1.2.1	Operadores acotados por promedios	8
1.2.2	Laplaciano	9
1.2.3	Autovalores de la matriz Hessiana. l -autovalores.	11
1.2.4	Diferencias entre el Laplaciano y el l -autovalor	15
1.2.5	Monge-Ampere	16
1.3	Referencias previas	18
2	Operadores acotados por promedios	20
3	El Laplaciano	25
3.1	Existencia y unicidad	26
3.2	Principio del máximo fuerte	28
4	Problema del l-autovalor	30
4.1	Existencia y unicidad de solución	32
4.2	Fórmula cerrada de la solución para dato monótono	34
4.2.1	Conjuntos «estilo» Cantor	34
4.2.2	Promediar sobre $\mathcal{C}$	36
4.3	m -autovalor no homogéneo	48
4.3.1	Funciones sumables sobre subárboles binarios	48
4.3.2	solución del problema no homogéneo	54
4.3.3	l -autovalor no homogéneo	64
5	Diferencias entre soluciones del l autovalor y el laplaciano	69
5.1	Principio de comparación fuerte	69
5.2	Principio del máximo fuerte	70
5.3	Soluciones con límite nulo en casi todo punto	72

6	Monge-Ampere	75
6.1	El operador de Monge-Ampere	75
6.2	Existencia y unicidad de solución	81

1 Introducción

Esta tesis de Licenciatura se dedica al estudio de fórmulas del valor medio sobre una clase especial de grafos dirigidos (árboles). En particular nos interesa demostrar existencia y unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet para ciertas ecuaciones que son posibles análogos discretos sobre el árbol de ecuaciones clásicas en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^N$: el Laplaciano, los autovalores de la matriz Hessiana o la ecuación de Monge-Ampere.

1.1. Descripción del árbol

Para empezar describamos el espacio ambiente en el cual vamos a trabajar. Un árbol regular con m ramas (m -branching) es un grafo infinito dirigido en el cual hay un nodo raíz, que no tiene antecesor y tiene m sucesores, y donde cada nodo que no es la raíz tiene un número m de sucesores y un único antecesor.

Un esquema de un árbol regular $\mathbb{T}$ con 3-branching es el siguiente:

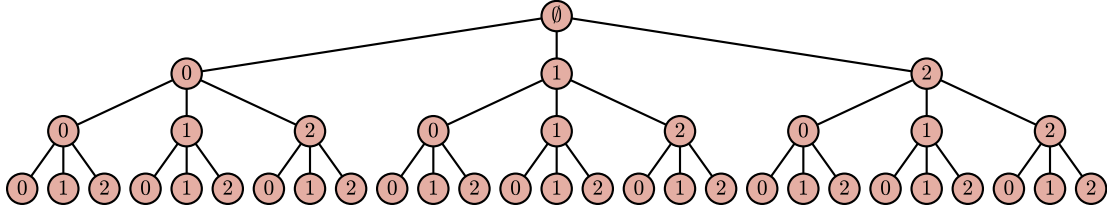


Figura 1.1: Primeros 4 niveles de un árbol con 3-branching.

En este esquema hemos numerado los vértices siguiendo los dígitos en base 3, un 0 a la izquierda un 1 al centro y un 2 a la derecha.

Veamos esto en general. Dado $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, un árbol $\mathbb{T}$ con m -branching regular es un grafo infinito que consiste en un nodo raíz (que denotaremos por $\emptyset$) y todas las sucesiones finitas de la forma $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ con $N \in \mathbb{N}$, con coordenadas a_n elegidas en el conjunto $\{0, 1, \dots, m-1\}$ (pensamos estos a_n como dígitos en base m).

Los elementos de $\mathbb{T}$ son los vértices del grafo. Cada vértice $x \in \mathbb{T}$ tiene exactamente m sucesores, que se obtienen añadiendo otra coordenada a las coordenadas de x . Vamos

a denotar por

$$S(x) := \{x_k \mid k \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$$

al conjunto de sucesores del vértice x . Usaremos entonces la notación x_k para denotar un sucesor de x (en el esquema anterior para el árbol con 3-branching x_2 denota el sucesor de x a la derecha, x_1 el del medio y x_0 el de la izquierda). Si x no es la raíz entonces x tiene solo un predecesor inmediato, que denotamos por $\hat{x}$. El segmento que une un nodo x con su predecesor $\hat{x}$ se denomina una arista y se denota por $(\hat{x}, x)$.

Un vértice $x \in \mathbb{T}$ tiene nivel $n \in \mathbb{N}$ si x se escribe como $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, y tiene nivel 0 si es la raíz del árbol, $x = \emptyset$. El nivel de un nodo x se denota por $|x|$.

Una rama en el árbol $\mathbb{T}$ es una secuencia infinita de vértices $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tales que el primer término de la secuencia es la raíz del árbol, $x^0 = \emptyset$, y cada uno de los vértices en la secuencia tiene como siguiente término en la sucesión un sucesor inmediato, $x^{n+1} \in S(x^n) \forall n \in \mathbb{N}_0$. Entonces una rama es una secuencia de tiras finitas de dígitos en base m , donde al avanzar en la secuencia se van agregando dígitos nuevos y conservando los previos, $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $a_n \in \{0, 1, \dots, m-1\} \forall n$. La unión de todas las ramas forma el borde del árbol, para el cual usaremos la notación estándar $\partial\mathbb{T}$. Observemos que la aplicación $\psi : \partial\mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\psi(\pi) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{m^n}$$

es sobreyectiva, donde $\pi = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in \partial\mathbb{T}$ y $a_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma asociamos elementos del borde del árbol $\partial\mathbb{T}$ (ramas infinitas) con puntos del intervalo $[0, 1]$ usando el desarrollo en base m . La definición de ψ se puede extender a $\mathbb{T}$ de la siguiente forma, si $x = (a_1, \dots, a_N)$ es un vértice, pondremos

$$\psi(x) := \psi(a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots, 0, \dots) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{m^n}.$$

O sea, se usa la rama que pasa por el vértice x y baja por los nodos con dígito 0.

1.2. Problemas a abordar

Ahora presentaremos brevemente los problemas que vamos a abordar.

Nos interesa estudiar fórmulas del valor medio en un árbol. Por una fórmula del valor medio nos referimos a una fórmula del tipo que describimos a continuación.

Sea $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que F es un operador de promedios si verifica

$$\begin{aligned} F(0, \dots, 0) &= 0 \quad \text{y} \quad F(1, \dots, 1) = 1; \\ F(tu_0, \dots, tu_{m-1}) &= tF(u_0, \dots, u_{m-1}); \\ F(t + u_0, \dots, t + u_{m-1}) &= t + F(u_0, \dots, u_{m-1}), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$;

$$F(u_0, \dots, u_{m-1}) < \max\{u_0, \dots, u_{m-1}\},$$

si no todos los u_j son iguales; F es no-decreciente con respecto a cada variable; además vamos a asumir que F es invariante bajo permutaciones, es decir,

$$F(u_0, \dots, u_{m-1}) = F(u_{\tau(0)}, \dots, u_{\tau(m-1)})$$

para cualquier permutación τ de $\{0, \dots, m-1\}$ y que existe $0 < \kappa < 1$ tal que

$$F(u_0 + c, \dots, u_{m-1}) \leq F(u_0, \dots, u_{m-1}) + c\kappa \quad (1.1)$$

para todo $(u_0, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ y para todo $c > 0$.

Como ejemplos de operadores de promedios tenemos los siguientes: el primer ejemplo fue estudiado en [10], para $1 < p < +\infty$, el operador $F^p(u_0, \dots, u_{m-1}) = t$ de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}$ definido en forma implícita por

$$\sum_{k=0}^{m-1} (u_k - t)|u_k - t|^{p-2} = 0$$

es un operador de promedios invariante bajo permutaciones. Otros ejemplos de operadores de promedios son los siguientes, para $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 < \beta \leq 1$ con $\alpha + \beta = 1$ consideremos

$$\begin{aligned} F_0(u_0, \dots, u_{m-1}) &= \frac{\alpha}{2} \left(\max_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} + \min_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} \right) + \frac{\beta}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k, \\ F_1(u_0, \dots, u_{m-1}) &= \alpha \operatorname{med}_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} + \frac{\beta}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k, \\ F_2(u_0, \dots, u_{m-1}) &= \alpha \operatorname{med}_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} + \frac{\beta}{2} \left(\max_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} + \min_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} \right), \end{aligned}$$

donde med es la mediana, dada por

$$\text{med}_{0 \leq k \leq m-1} \{u_k\} := \begin{cases} y_{\frac{m+1}{2}} & \text{si } m \text{ es impar,} \\ \frac{y_{\frac{m}{2}} + y_{(\frac{m}{2}+1)}}{2} & \text{si } m \text{ es par,} \end{cases}$$

con $\{y_0, \dots, y_{m-1}\}$ una reordenación no-decreciente de los valores $\{u_0, \dots, u_{m-1}\}$.

Un caso particular de F_0 es cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, que corresponde al promedio usual

$$F_0(u_0, \dots, u_{m-1}) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k.$$

Los operadores F_0 , F_1 y F_2 son operadores de promedio invariantes bajo permutaciones. Observemos que F_0 y F_1 verifican (1.1) pero F_2 no.

Para este tipo de ecuaciones estudiaremos el problema de Dirichlet asociado, es decir, dada una función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ buscamos una función $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique la propiedad del valor medio

$$u(x) = F(u(x_0), \dots, u(x_{m-1})) \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

(aquí los x_k son los sucesores de x en el árbol $\mathbb{T}$) y tal que tome el dato de borde g de alguna de las siguientes formas. La primera forma, que denominaremos «convergencia puntual», ocurrirá cuándo sobre cada rama $\pi = (x^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \partial \mathbb{T}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(x^n) - g(\psi(x^n))| = 0,$$

esto es, $\forall \varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, que podría depender de la rama π , tal que

$$|u(x^n) - g(\psi(x^n))| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Es decir, los valores de u al descender el árbol por una rama se asemejan a los de g . La segunda noción de convergencia es «por niveles» y es un análogo a convergencia uniforme. Diremos que u converge a g por niveles sobre $\partial \mathbb{T}$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un nivel inicial $n_0 \in \mathbb{N}$, independiente de rama alguna, donde u y g distan menos de ε sobre nodos de nivel mayor a n_0 :

$$|u(x) - g(\psi(x))| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{T}, \quad |x| \geq n_0.$$

Para reducir la notación usaremos

$$u|_{\partial\mathbb{T}} = g$$

para estos conceptos de convergencia.

En el caso particular donde g es una función continua, la noción de convergencia puntual es equivalente a que fijada una rama $\pi = (x^n)_n \in \partial\mathbb{T}$ con $r = \psi(\pi)$, u converge al valor $g(r)$ al avanzar sobre la rama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x^n) = g(r).$$

Para reducir la notación usaremos

$$\lim_{x \rightarrow r \in \partial\mathbb{T}} u(x) = g(r) \quad \forall r \in [0, 1]$$

donde $x \rightarrow r \in \partial\mathbb{T}$ resume la convergencia sobre una rama π que identifica al punto $r \in [0, 1]$ mediante ψ .

En particular en los siguientes capítulos vamos a estudiar tres operadores de promedios particulares: el Laplaciano usual en el grafo dirigido, un posible análogo a los autovalores de la matriz Hessiana y un operador de tipo Monge-Ampere.

1.2.1. Operadores acotados por promedios

Como primera instancia introduciremos propiedades generales de los operadores a trabajar, a partir de las que obtendremos resultados comunes a todos ellos.

La primera propiedad común será la de «operadores acotados por promedios». Dado Φ un operador de funciones sobre el árbol, diremos que es acotado por promedios si fijadas funciones $u, v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y un $x \in \mathbb{T}$ existe un promedio pesado entre las diferencias $u - v$ sobre los sucesores de x tal que la diferencia de Φ entre u y v se acota por este promedio:

$$\exists c_1, \dots, c_{m-1} \geq 0 \mid \sum_{k=0}^{m-1} c_k = 1 \quad \text{y} \quad \Phi(u)(x) - \Phi(v)(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k (u(x_k) - v(x_k)),$$

donde $S(x) = \{x_0, \dots, x_{m-1}\}$.

La segunda propiedad común es «sacar constantes». Diremos que el operador Φ cumple esta propiedad si para cualquier función $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ocurre

$$\Phi(u + \alpha)(x) = \Phi(u)(x) + \alpha \quad \forall x \in \mathbb{T}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para operadores que cumplen estas dos propiedades se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1. Sean $\Phi : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T})$ un operador acotado por promedios, y $\bar{u}, \underline{u} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ súper- y subsoluciones del problema $u = \Phi(u)$ respectivamente, tales que se comparan en el borde en el siguiente sentido:

$$\lim_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} \bar{u}(x) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} \underline{u}(x) \quad \forall \pi \in \partial \mathbb{T}.$$

Entonces, $\bar{u}$ y $\underline{u}$ se comparan de igual modo en todo el árbol:

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Proposición 2. Supongamos que se tiene un operador Φ acotado por promedios y que saca constantes. Entonces valen los enunciados del siguiente listado.

(1) Dependencia continua con el dato.

Sean $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y $u_1, u_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ las soluciones de $u = \Phi(u)$ con dato en $\partial \mathbb{T}$ g_1 y g_2 respectivamente. Entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

(2) Sea $(g_i)_i$ una sucesión de funciones acotadas tales que convergen uniformemente a una g ; y sea u_i la solución del problema $u = \Phi(u)$ con dato (puntual o por niveles) g_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe una solución del problema $u = \Phi(u)$ con dato (puntual o por niveles según corresponda) g .

1.2.2. Laplaciano

El Laplaciano en $\mathbb{R}^N$ es el operador de segundo orden dado por

$$\Delta u(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$$

para $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Un resultado clásico es que una función u es armónica, es decir, solución de $\Delta u = 0$ en un dominio Ω si y solo si se verifica la propiedad de la media

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y) dy$$

para toda bola $B_r(x) \subset \Omega$.

En el contexto del árbol, dada una función $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar el siguiente operador de promedio

$$L(u)(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k).$$

Es decir, el valor de u en un nodo x debe ser el promedio de u en los sucesores de x . Notemos que la fórmula

$$\frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k)$$

es análoga al promedio usual

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Nuestro primer problema a estudiar será entonces el problema de Dirichlet para el Laplaciano usual en el árbol $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k) & x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Para este problema clásico se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3. *Para el problema*

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k) & x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (1.2)$$

se tienen los siguientes resultados:

1. Dada $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, existe una única solución de (1.2).
2. Más aún, hay una fórmula cerrada para la única solución de (1.2),

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} g(r) dr, \quad (1.3)$$

donde $I_x \subset [0, 1]$ es el intervalo que contiene los números cuyo desarrollo en base m

comienza con los mismos dígitos que x ,

$$I_x = \left\{ r \in [0, 1] \mid r = 0, a_1, \dots, a_N, \star, \dots \right\}$$

con $x = (a_1, \dots, a_N)$.

3. Las soluciones de (1.2) tienen un principio de comparación: si $g_1(r) \geq g_2(r)$ para todo $r \in [0, 1]$ entonces las correspondientes soluciones u_1, u_2 están ordenadas en el árbol

$$u_1(x) \geq u_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

4. Finalmente, las soluciones dependen continuamente del dato de borde. Se tiene que si u_1, u_2 son soluciones con datos g_1 y g_2 respectivamente, entonces se verifica

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

1.2.3. Autovalores de la matriz Hessiana. l -autovalores.

Un resultado clásico de álgebra lineal nos dice que si $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una matriz simétrica entonces sus autovalores, ordenados de mayor a menor son

$$\lambda_1(M) = \max_{S, \dim(S)=1} \min_{v \in S, |v|=1} \langle Mv, v \rangle = \max_{|v|=1} \langle Mv, v \rangle,$$

$$\lambda_2(M) = \max_{S, \dim(S)=2} \min_{v \in S, |v|=1} \langle Mv, v \rangle,$$

.....

$$\lambda_l(M) = \max_{S, \dim(S)=l} \min_{v \in S, |v|=1} \langle Mv, v \rangle,$$

.....

$$\lambda_N(M) = \max_{S, \dim(S)=N} \min_{v \in S, |v|=1} \langle Mv, v \rangle = \min_{|v|=1} \langle Mv, v \rangle.$$

Visto esto, dada una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ podemos pensar en los autovalores de la matriz Hessiana de u , D^2u , definidos como

$$\lambda_l(D^2u(x)) = \sup_{S, \dim(S)=l} \inf_{v \in S, |v|=1} \langle D^2u(x)v, v \rangle.$$

El correspondiente problema de Dirichlet para estos operadores fue estudiado en [3], ver también [4].

Notemos que

$$\lambda_N(D^2u(x)) = \min_{|v|=1} \langle D^2u(x)v, v \rangle$$

esta asociado al concepto de convexidad. De hecho una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es convexa si y solo si verifica

$$\lambda_N(D^2u(x)) = \min_{|v|=1} \langle D^2u(x)v, v \rangle \geq 0$$

en sentido viscoso. Además la envolvente convexa de un dato de borde g en Ω (un dominio estrictamente convexo) se caracteriza como la única solución de

$$\begin{cases} \lambda_N(D^2u)(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \quad (1.4)$$

ver [16].

En el árbol, podemos pensar como un posible análogo al l -ésimo autovalor al operador dado por

$$\Lambda_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x).$$

En esta fórmula el máximo se toma sobre subconjuntos S de cardinal l del conjunto de sucesores $S(x)$ y el mínimo sobre pares de elementos distintos en el subconjunto seleccionado S . Notemos que al menos necesitamos que S tenga dos elementos distintos, así que consideramos solo $l \geq 2$. Los casos extremos son $l = 2$ y $l = m$. Para $l = 2$ el mínimo es redundante y nos queda

$$\Lambda_2(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=2}} \min_{y \neq z} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x) = \max_{\substack{y,z \in S(x) \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x).$$

Es el mayor autovalor. Y para $l = m$, el máximo es redundante y queda

$$\Lambda_m(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=m}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x) = \min_{\substack{y,z \in S(x) \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x).$$

El menor autovalor. Todos estos autovalores están ordenados también de mayor a menor:

$$\Lambda_2(u)(x) \geq \Lambda_3(u)(x) \geq \cdots \geq \Lambda_m(u)(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

La ecuación $\Lambda_l(u)(x) = 0$ se puede reescribir como

$$u(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)),$$

donde en el lado derecho aparece el operador de promedio

$$F_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)).$$

Nuestro siguiente paso es estudiar el problema de Dirichlet para este operador en el árbol, es decir,

$$\begin{cases} u(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)), & x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Para este problema se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4. *Para el problema*

$$\begin{cases} u(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)), & x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g, \end{cases} \quad (1.5)$$

valen los siguientes resultados:

1. Dada $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua, existe una única solución de (1.5).
2. Más aún, cuando el dato g es monótono hay una fórmula cerrada para la única solución de (1.5),

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} g(r) df(r), \quad (1.6)$$

donde $I_x \subset [0, 1]$ es el intervalo que contiene los números cuyo desarrollo en base m comienza con los mismos dígitos que x ,

$$I_x = \left\{ r \in [0, 1] \mid r = 0, a_1, \dots, a_n, \star, \dots \right\}$$

con $x = (a_1, \dots, a_n)$ y df es una medida autosimilar, singular respecto a la medida de Lebesgue, y soportada en un conjunto tipo Cantor.

3. Las soluciones de (1.5) tiene un principio de comparación: si $g_1(r) \geq g_2(r)$ para $r \in [0, 1]$ entonces las correspondientes soluciones u_1, u_2 están ordenadas en el árbol

$$u_1(x) \geq u_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

4. Finalmente, las soluciones dependen continuamente del dato de borde. Se tiene que si u_1, u_2 son soluciones con datos g_1 y g_2 respectivamente, entonces se verifica

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

También nos planteamos el problema de Dirichlet para el m -autovalor no homogéneo, $\Lambda_m(u)(x) = h(x)$, es decir,

$$\begin{cases} u(x) = \min_{y, z \in S(x)} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (1.7)$$

Donde $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa que nos da la parte no homogénea del problema. Para analizar este problema pedimos una condición extra sobre h , que sea sumable sobre subárboles binarios. Esto significa que el siguiente supremo es finito

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}},$$

donde el supremo se toma sobre subárboles binarios de $\mathbb{T}$ (subárbol tomando solamente dos sucesores por nivel) con raíz en x .

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5. Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y sumable sobre subárboles binarios. Entonces

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

converge por niveles a 0 sobre $\partial \mathbb{T}$ si y solo si existe solución del problema no homogéneo:

$$\begin{cases} u(x) = \min_{y, z \in S(x)} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Este resultado se generaliza para el problema no homogéneo asociado a cualquier l -autovalor (pidiendo una condición adecuada de sumabilidad a h).

El problema no homogéneo para el m -autovalor nos resultará de gran utilidad para estudiar la ecuación de Monge-Ampere.

1.2.4. Diferencias entre el Laplaciano y el l -autovalor

Los teoremas previos sobre existencia, unicidad, el principio de comparación y la dependencia continua de las soluciones respecto de los datos de borde, son similares para el Laplaciano usual y para el l -autovalor. Para ambos operadores el problema de Dirichlet esta bien planteado en el conjunto de datos continuos.

Sin embargo, estos dos operadores de promedios tienen notables diferencias.

Principio del máximo fuerte y principio de comparación fuerte

A continuación demostraremos que esta ecuación tiene un principio del máximo fuerte en el siguiente sentido: si u es una solución no negativa de

$$u(x) = L(u)(x)$$

y se anula en un nodo x particular entonces $u \equiv 0$ en todos los nodos del subárbol completo de $\mathbb{T}$ con raíz en x , $\mathbb{T}^x$. En particular, si $u(\emptyset) = 0$ entonces $u \equiv 0$ en todo el árbol.

La primera diferencia entre ambos operadores es la validez del principio del máximo fuerte y del principio de comparación fuerte.

El principio del máximo fuerte para la ecuación $u = \Phi(u)$ indica que si se tiene una solución no negativa y un nodo x donde se anula, entonces se anula en todos los nodos descendientes de x .

Por otra parte, el principio de comparación fuerte dice que para dos funciones continuas $\tilde{g}$ y g , una mayor que la otra, $\tilde{g} \geq g$, y no idénticamente iguales, se tiene que sus soluciones del problema de Dirichlet $u_{\tilde{g}}$ y u_g se comparan de forma estricta en el nodo primogénito, $u_{\tilde{g}}(\emptyset) \geq u_g(\emptyset)$.

Teorema 6.

- (1) *El Laplaciano usual en el árbol verifica el principio del máximo fuerte, pero el l -autovalor no lo verifica para $l \geq 3$.*
- (2) *El Laplaciano usual en el árbol verifica el principio de comparación fuerte, pero el l -autovalor no lo verifica.*

Soluciones con límite nulo en casi todo punto

Otra diferencia importante entre ambos operadores es la siguiente.

Teorema 7. *Para cualquier conjunto $A \subset [0,1]$ con medida de Lebesgue cero, $|A| = 0$ la solución del Laplaciano usual en el árbol con dato de borde $g = \chi_A$ es $u \equiv 0$.*

Sin embargo, existe un conjunto $A \subset [0,1]$ con medida cero, $|A| = 0$, y una solución no idénticamente nula del l -autovalor que toma como dato de borde $g = \chi_A$.

1.2.5. Monge-Ampere

Finalmente, vamos a estudiar una ecuación de tipo Monge-Ampere en el árbol.

En $\mathbb{R}^N$ la ecuación de Monge-Ampere es:

$$\det(D^2u(x)) = h(x).$$

El problema de Dirichlet esta bien planteado en dominios estrictamente convexos, lados derechos $h \geq 0$ continuos, y en el marco de soluciones convexas, $D^2u \geq 0$. Ver [5, 6].

Observar que para una matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $M \geq 0$, se tiene

$$N(\det(M))^{1/N} = \inf_{\det(A)=1} \text{traza}(AMA^t)$$

Como vimos anteriormente, para el árbol, los autovalores de la matriz Hessiana son

$$\Lambda_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - u(x).$$

Entonces, podemos definir un posible análogo a la ecuación de Monge Ampere en el árbol como

$$MA(u)(x) = \prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) = \prod_{l=2}^m \left[\max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - u(x) \right].$$

Y nos proponemos estudiar el correspondiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} MA(u)(x) = h(x) & x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (1.8)$$

Como en el caso Euclídeo, asumiremos que el lado derecho h es no-negativo, $h \geq 0$, y buscaremos soluciones convexas, es decir con

$$\Lambda_m(u)(x) = \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - u(x) \geq 0.$$

Observemos que esta condición es necesaria para tener unicidad de soluciones. Por ejemplo, si $h \equiv 0$ y no pedimos $\Lambda_m(u)(x) \geq 0$, las soluciones del problema del l -autovalor homogéneo con dato de borde g serán soluciones de (1.8) para cualquier l . Ahora bien, si $h \equiv 0$ y pedimos $\Lambda_m(u)(x) \geq 0$, la única solución de (1.8) es la única solución de $\Lambda_m(u)(x) = 0$ con dato g (esto es debido a que $\prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) = 0$ es equivalente a $\Lambda_m(u)(x) = \min_l \Lambda_l(u)(x) = 0$ si todos los $\Lambda_l(u)(x)$ son no negativos).

El primer resultado que veremos es que el problema planteado en (1.8) es equivalente a otro cuyo operador asociado es más sencillo para deducir el principio de comparación.

Lema 8. Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa. Se tiene que $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de

$$MA(u)(x) = \prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

si y solo si

$$u(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_{l=2}^m a_l \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y, z \in S} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) - \tilde{h}(x) \right] \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Donde el ínfimo se toma sobre $(m-1)$ -uplas con coordenadas positivas, $(a_2, \dots, a_m)$, y

$$\tilde{h} = (m-1)h^{\frac{1}{m-1}}.$$

Nuevamente aparecen las condiciones utilizadas en el Teorema 5 de la sección del m -autovalor no homogéneo para h , sumabilidad sobre subárboles binarios y existencia de solución del problema no homogéneo. Para este problema auxiliar, y para Monge-Ampere por equivalente, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 9. *Para el problema*

$$\begin{cases} u(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_{l=2}^m a_l \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - \tilde{h}(x) \right] & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases} \quad (1.9)$$

valen los siguientes resultados:

1. *Dada $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, sumable sobre subárboles binarios y cuyo límite al problema del m -autovalor no homogéneo sea continuo, existe una única solución de (1.9).*
2. *Las soluciones de (1.9) tienen un principio de comparación: si $g_1(r) \geq g_2(r)$ para todo $r \in [0, 1]$, entonces las correspondientes soluciones u_1 y u_2 están ordenadas en el árbol*

$$u_1(x) \geq u_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

3. *Dependencia continua con el dato. Sean $g_1, g_2 \in C[0, 1]$ y u_1, u_2 las soluciones de Monge-Ampere con dato g_1 y g_2 respectivamente. Entonces*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|g_1 - g_2\|_{\infty}.$$

1.3. Referencias previas

Para terminar la introducción a esta tesis, hacemos un breve recuento de resultados previos para ecuaciones en árboles.

Ecuaciones en árboles es un tema clásico en análisis. Esto es debido a que los árboles proveen un marco discreto que es análogo a una bola unitaria en el espacio Euclídeo, pero que permite cálculos explícitos. Ver, por ejemplo, [2].

Como antecedentes de los resultados incluidos en esta tesis citamos: [1, 9, 8, 7, 10, 11, 12, 18, 17]. En estas referencias se pueden encontrar algunos de los resultados incluidos aquí para el Laplaciano (aunque con una escritura ligeramente diferente), así como resultados para el p -Laplaciano y el ∞ -Laplaciano.

Los resultados concernientes a las ecuaciones del l -autovalor y la de Monge-Ampere son originales de esta tesis.

Ecuaciones que involucran fórmulas del valor medio están relacionadas con teoría de juegos debido a que el valor del juego es solución de una ecuación que involucra

un operador de promedios (estas ecuaciones se conocen como Dynamic Programming Principles en la literatura), ver [4, 13, 15, 14].

2 Operadores acotados por promedios

En este capítulo desarrollaremos propiedades comunes a todos los operadores que usaremos y son útiles para demostrar toda la teoría.

Definición 10 (Operador acotado por promedios). Denotemos con $B(\mathbb{T})$ al conjunto de funciones acotadas $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y por $\Phi : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T})$ a un operador. Se dice que el operador es acotado por promedios si fijadas funciones $u, v \in B(\mathbb{T})$ y $x \in \mathbb{T}$, existen $c_0, \dots, c_{m-1} \geq 0$ (dependientes de u, v y x) tales que $\sum_k c_k = 1$ y

$$\Phi(u)(x) - \Phi(v)(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k (u(x_k) - v(x_k)),$$

donde $S(x) = \{x_0, \dots, x_{m-1}\}$. Esto es, la diferencia entre el operador aplicado a dos funciones está acotado por un promedio pesado por los c_k entre las diferencias de las funciones sobre los sucesores.

Definición 11 (Sub- y supersoluciones). El objetivo de este trabajo es encontrar soluciones de la ecuación

$$u(x) = \Phi(u)(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

con distintos operadores Φ . Diremos que la función $\bar{u} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es supersolución del problema si

$$\bar{u}(x) \geq \Phi(\bar{u})(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

En cambio una función $\underline{u} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es subsolución del problema si

$$\underline{u}(x) \leq \Phi(\underline{u})(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Definición 12. Se dice que un operador $\Phi : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T})$ saca constantes si

$$\Phi(u + \alpha) = \Phi(u) + \alpha \quad \forall u \in B(\mathbb{T}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teorema 13 (Principio de Comparación). Sean $\Phi : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T})$ un operador acotado por promedios, y $\bar{u}, \underline{u} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ súper- y subsoluciones del problema $u = \Phi(u)$ respectivamente,

tales que se comparan en el borde en el siguiente sentido:

$$\lim_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} \overline{u}(x) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} \underline{u}(x) \quad \forall \pi \in \partial \mathbb{T}.$$

Entonces, $\overline{u}$ y $\underline{u}$ se comparan de igual modo en todo el árbol,

$$\overline{u}(x) \geq \underline{u}(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Demostración. Si existiera un $x^0 \in \mathbb{T}$ donde ocurre la desigualdad opuesta,

$$\delta = \underline{u}(x^0) - \overline{u}(x^0) > 0,$$

entonces ya que $\overline{u}$ es supersolución y $\underline{u}$ es subsolución tenemos que

$$\delta = \underline{u}(x^0) - \overline{u}(x^0) \leq \Phi(\underline{u})(x^0) - \Phi(\overline{u})(x^0).$$

Como Φ es acotado por promedios, existen $c_0, \dots, c_{m-1} > 0$ tales que $\sum_k c_k = 1$ y

$$\delta \leq \Phi(\underline{u})(x^0) - \Phi(\overline{u})(x^0) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\underline{u}(x_k^0) - \overline{u}(x_k^0)).$$

Gracias a que es una combinación lineal convexa, debe existir algún sucesor x_k^0 donde $\delta \leq \underline{u}(x_k^0) - \overline{u}(x_k^0)$, de ocurrir lo contrario se tendría

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k (\underline{u}(x_k^0) - \overline{u}(x_k^0)) < \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta = \delta.$$

Es decir, se encontró que si en un nodo x la subsolución y supersolución se diferencian de forma $0 < \delta = \underline{u}(x) - \overline{u}(x)$, entonces existe un sucesor de x donde se mantiene esta diferencia. Partiendo de x^0 y repitiendo el argumento sucesivamente se consigue una sucesión de nodos $(x^n)_n \subseteq \mathbb{T}$ tales que $x^n \in S(x^{n-1}) \forall n$ y

$$\delta \leq \underline{u}(x^n) - \overline{u}(x^n) \quad \forall n.$$

A partir de esta secuencia se puede armar una rama del árbol completando los nodos de nivel inferior al de x^0 , y al tomar límite superior se obtiene

$$\delta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\underline{u}(x^n) - \overline{u}(x^n)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \underline{u}(x^n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{u}(x^n).$$

Esta contradicción prueba que $\bar{u} \geq \underline{u}$ en todo $\mathbb{T}$. □

La siguiente proposición enumera propiedades sobre las soluciones del problema $u = \Phi(u)$ que se desprenden del principio de comparación.

Proposición 14 (Propiedades de las soluciones). *Denotaremos $B[0, 1]$ al espacio de Banach de funciones reales acotadas con norma infinito. Supongamos además que se tiene un operador Φ acotado por promedios y que saca constantes. Entonces valen los enunciados del siguiente listado.*

(1) *Si u es solución de $u = \Phi(u)$, entonces $u + \alpha$ también es solución del problema $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

(2) *Dependencia continua con el dato.*

Sean $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y $u_1, u_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ las soluciones de $u = \Phi(u)$ con dato en el borde g_1 y g_2 respectivamente. Entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

(3) *Sean $(g_i)_i \subseteq B[0, 1]$ una sucesión de funciones acotadas, y u_i la solución del problema $u = \Phi(u)$ con dato $g_i \forall i$. Si $(g_i)_i$ es de Cauchy, entonces $(u_i)_i$ también lo es, es decir $\forall \varepsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} \mid$*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_i(x) - u_j(x)| < \varepsilon \quad \forall i, j \geq i_0.$$

(4) *Sea $(u_i)_i$ una sucesión de soluciones del problema $u = \Phi(u)$ tales que convergen puntualmente a $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces u es solución también.*

(5) *Sea $(g_i)_i \subseteq B[0, 1]$ una sucesión de funciones acotadas tales que convergen a $g \in B[0, 1]$ con métrica infinito, esto es, convergencia uniforme; y sea u_i la solución del problema $u = \Phi(u)$ con dato (puntual o por niveles) g_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe una solución del problema $u = \Phi(u)$ con dato (puntual o por niveles según corresponda) g .*

Demostración.

1. Se deduce gracias a que el operador Φ saca constantes

$$\Phi(u + \alpha) = \Phi(u) + \alpha = u + \alpha.$$

2. Denotemos $\alpha = \|g_1 - g_2\|_\infty$, entonces

$$g_2(x) - \alpha \leq g_1(x) \leq g_2(x) + \alpha \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Por el resultado anterior, $u_2 \pm \alpha$ es solución del problema con dato inicial $g_2 \pm \alpha$. Entonces u_1 y $u_2 \pm \alpha$ son sub- y supersoluciones (porque son soluciones) cuyos límites en $\partial\mathbb{T}$ se ordenan, gracias al criterio de comparación, la desigualdad se mantiene en todo $\mathbb{T}$ para u_1 y u_2 , es decir

$$u_2(x) - \alpha \leq u_1(x) \leq u_2(x) + \alpha \iff |u_1(x) - u_2(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

3. Dado $\varepsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} \mid \|g_i - g_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i, j \geq i_0$. Usando el resultado del ítem 2 se obtiene

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |u_i(x) - u_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall i, j \geq i_0.$$

4. Se probará que fijado $x \in \mathbb{T}$ se tiene $|\Phi(u)(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $i_0 \in \mathbb{N} \mid |u(\tilde{x}) - u_{i_0}(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \tilde{x} \in \{x\} \cup S(x)$. Usando desigualdad triangular se puede acotar

$$|\Phi(u)(x) - u(x)| \leq |\Phi(u)(x) - \Phi(u_{i_0})(x)| + |u_{i_0}(x) - u(x)|.$$

El segundo término se acota por $\frac{\varepsilon}{2}$ y para acotar el primer término, se usa que Φ es acotado por promedios

$$\Phi(u)(x) - \Phi(u_{i_0})(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k (u(x_k) - u_{i_0}(x_k)) < \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

donde $c_0, \dots, c_{m-1} \geq 0$ y suman 1. Para la resta opuesta, existen $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{m-1} \geq 0$ que suman 1 donde

$$\Phi(u_{i_0})(x) - \Phi(u)(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{c}_k (u_{i_0}(x_k) - u(x_k)) < \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{c}_k \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces el módulo $|\Phi(u_{i_0})(x) - \Phi(u)(x)|$ también se acota por $\frac{\varepsilon}{2}$. Se consigue finalmente

$$|\Phi(u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5. Como $(g_i)_i$ converge a g uniformemente, es una sucesión de Cauchy en $B[0, 1]$. Gracias al ítem 3, las $(u_i)_i$ también son de Cauchy y al ser $\mathbb{R}$ un espacio métrico completo, convergen a una función límite $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que es solución del problema gracias al ítem 4. Falta ver que si las u_i convergen puntualmente o por niveles a g_i en $\partial\mathbb{T}$, entonces u converge de la misma forma a g .

Comencemos con el caso donde las u_i convergen puntualmente a g_i . La demostración se basa en la siguiente cota

$$\begin{aligned} |u(x) - g(\psi(x))| &\leq |u(x) - u_{i_0}(x)| + |u_{i_0}(x) - g_{i_0}(\psi(x))| + |g_{i_0}(\psi(x)) - g(\psi(x))| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{T}} |u_{i_0}(x) - u(x)| + |u_{i_0}(x) - g_{i_0}(\psi(x))| + \sup_{r \in [0,1]} |g_{i_0}(r) - g(r)|. \end{aligned}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y una rama $\pi \in \partial \mathbb{T}$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{r \in [0,1]} |g_{i_0}(r) - g(r)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sup_{x \in \mathbb{T}} |u_{i_0}(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para el par u_{i_0} y g_{i_0} , y la rama π , existe un nivel $n_0 \in \mathbb{N}$, eventualmente dependiente de la rama π , donde

$$|u_{i_0}(x) - g_{i_0}(\psi(x))| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $|x| \geq n_0$ y forma parte de la rama. De esta forma, tomando un x en estas condiciones,

$$|u(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

El caso donde u_i converge por niveles a g_i es similar al anterior, salvo por el orden en el que se mencionan la rama π y el n_0 . Fijado $\varepsilon > 0$, existe también un $i_0 \in \mathbb{N}$ donde ocurre al igual que antes,

$$\sup_{r \in [0,1]} |g_{i_0}(r) - g(r)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sup_{x \in \mathbb{T}} |u_{i_0}(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para el par u_{i_0} y g_{i_0} , existe un nivel inicial $n_0 \in \mathbb{N}$ ahora independiente de rama alguna, tal que para cualquier $x \in \mathbb{T}$ de nivel $|x| \geq n_0$ se tiene

$$|u_{i_0}(x) - g_{i_0}(\psi(x))| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siguiendo los pasos finales al caso anterior se obtiene

$$|u(x) - g(\psi(x))| < \varepsilon$$

eligiendo cualquier x en el árbol de nivel $|x| \geq n_0$.

□

3 El Laplaciano

En este capítulo estudiaremos el problema de Dirichlet para el Laplaciano usual en el árbol $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (3.1)$$

El operador es el promedio sobre los sucesores $L : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T})$

$$L(u)(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k).$$

Proposición 15. *El operador L es acotado por promedios y saca constantes.*

Demostración. Dadas $u, v \in B(\mathbb{T})$ y $x \in \mathbb{T}$,

$$L(u)(x) - L(v)(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k) - \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} v(x_k) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} (u(x_k) - v(x_k)).$$

La combinación lineal convexa es con $c_k = m^{-1} \geq 0 \forall 0 \leq k \leq m-1$, $\sum_{k=0}^{m-1} c_k = 1$.

Y además saca constantes

$$L(u + \alpha)(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} (u(x_k) + \alpha) = \left(\frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} u(x_k) \right) + \alpha = L(u)(x) + \alpha$$

$$\forall x \in \mathbb{T}, \forall u \in B(\mathbb{T}), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gracias a estas observaciones, se deduce el principio de comparación y todas las propiedades vistas en el Capítulo 2. $\square$

3.1. Existencia y unicidad

Teorema 16 (Existencia y unicidad del problema de Dirichlet para el Laplaciano). *Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Existe una única solución para el problema*

$$\begin{cases} u(x) = L(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

que está dada por

$$u(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} g(r) dr, \quad (3.2)$$

donde $I_x \subset [0, 1]$ es el intervalo que contiene los números cuyo desarrollo en base m comienza con los mismos dígitos que x ,

$$I_x = \left[\psi(x), \psi(x) + \frac{1}{m^{|x|}} \right) = \left\{ r \in [0, 1] \mid r = 0, a_1, \dots, a_N, \star, \dots \right\} \quad (3.3)$$

donde $x = (0, a_1, \dots, a_N)$.

Además, la convergencia en $\partial\mathbb{T}$ es por niveles.

Demostración.

Existencia

Primero veamos que $u(x)$ definida como en (3.2) es una solución de la ecuación. Esto se deduce de que I_x es la unión de los intervalos que corresponden a los sucesores de x

$$I_x = \bigcup_{k=0}^{m-1} I_{x_k}$$

y cada uno de estos intervalos tiene medida

$$|I_x| = \frac{1}{m^{|x|}}, \quad |I_{x_k}| = \frac{1}{m^{|x_k|}} = \frac{1}{m^{|x|+1}}, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Con esto podemos escribir

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} g(r) dr = m^{|x|} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{I_{x_k}} g(r) dr = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} m^{|x|+1} \int_{I_{x_k}} g(r) dr \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u(x_k) = L(u)(x) \end{aligned}$$

y concluimos que u es solución de la ecuación.

Ahora veamos que toma el dato de borde por niveles, es decir que $\forall \varepsilon > 0$ existe un nivel inicial $n_0 \in \mathbb{N}$ donde $|u(x) - g(\psi(x))| < \varepsilon$ si $|x| \geq n_0$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y apelamos a la continuidad uniforme de g ,

$$\exists \delta > 0 \mid |r - s| < \delta \implies |g(r) - g(s)| < \varepsilon.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ que asegure $m^{-n_0} < \delta$ y tomemos $x \in \mathbb{T}$ de nivel $|x| \geq n_0$. Entonces tendremos que

$$|u(x) - g(\psi(x))| = \left| \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} (g(r) - g(\psi(x))) dr \right| \leq \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |g(r) - g(\psi(x))| dr.$$

Como la integral es sobre $r \in I_x = [\psi(x), \psi(x) + m^{-|x|})$, entonces

$$|r - \psi(x)| < m^{-|x|} \leq m^{-n_0} < \delta \implies |g(r) - g(\psi(x))| < \varepsilon.$$

Se tiene finalmente,

$$|u(x) - g(\psi(x))| < \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} \varepsilon dr = \varepsilon.$$

Y concluimos que u es solución de nuestro problema.

Unicidad

La unicidad se deduce del lema de comparación. Si hubieran dos soluciones u_1, u_2 , en particular se tiene que con $\bar{u} = u_1$ y $\underline{u} = u_2$ se cumplen las hipótesis del lema de comparación. Por lo tanto se llega a $u_1 \geq u_2$. Como los roles de u_1 y u_2 son simétricos, se obtiene la igualdad: $u_1 = u_2$ y se concluye la unicidad de solución. $\square$

La fórmula cerrada para la solución permite extender la existencia y unicidad de soluciones a datos g que no son continuos.

Observación. Si g es una función absolutamente integrable, $g \in L^1[0, 1]$, la función defi-

nida por la fórmula (1.3) sigue siendo la única solución de la ecuación

$$u(x) = L(u)(x),$$

con la condición de borde

$$u|_{\partial\mathbb{T}} = g \quad (\text{c.t.p.})$$

entendida con el limite

$$\lim_{x \rightarrow r \in \partial\mathbb{T}} u(x) = g(r)$$

para casi todo $r \in [0, 1]$ respecto a la medida de Lebesgue.

3.2. Principio del máximo fuerte

A continuación demostraremos que esta ecuación tiene un principio del máximo fuerte en el siguiente sentido: si u es una solución no negativa de

$$u(x) = L(u)(x)$$

y se anula en un nodo x particular entonces $u \equiv 0$ en todos los nodos del subárbol completo de $\mathbb{T}$ con raíz en x , $\mathbb{T}^x$. En particular, si $u(\emptyset) = 0$ entonces $u \equiv 0$ en todo el árbol.

Teorema 17. *Si u es solución de*

$$u(x) = L(u)(x)$$

y verifica que existe $y \in \mathbb{T}$ tal que

$$u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^y, \quad y \quad u(y) = 0,$$

entonces

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^y.$$

Demostración. Tenemos

$$0 = u(y) = L(u)(y) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u(y_k) \geq 0.$$

Entonces debemos tener

$$u(y_k) = 0$$

para todos los sucesores de y . Generalizando este razonamiento, mostramos que si u es nula sobre un nodo, entonces también se anula en todos sus sucesores. Iterando este resultado se obtiene que

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^y,$$

como queríamos demostrar.

Observar además que los pasos anteriores son válidos incluso con una u que en su persolución no negativa de la ecuación.

Otra forma de ver este principio es decir que si u es solución de

$$\begin{cases} u(x) = L(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

con un dato de borde $g \geq 0$ y no nula, entonces $u(\emptyset) \neq 0$. Esto se deduce fácilmente de la fórmula explícita para la solución ya que tenemos

$$u(\emptyset) = \int_0^1 g(r) dr > 0,$$

pues g es no negativa y no nula. □

Entonces obtenemos el siguiente Principio de Comparación fuerte: si dos soluciones ordenadas se tocan en la raíz del árbol entonces son idénticas en todo el árbol.

Teorema 18. *Si u y v son soluciones de $u(x) = L(u)(x)$ que verifican*

$$u(x) \geq v(x) \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} I) & \quad u(\emptyset) > v(\emptyset), \\ II) & \quad u \equiv v \quad \text{en } \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Demostración. Se deduce aplicando el resultado anterior a $u - v$. Por hipótesis, $u - v \geq 0$ y como el operador L es lineal,

$$L(u - v)(x) = L(u)(x) - L(v)(x) = (u - v)(x).$$

Si no ocurre que $u(\emptyset) > v(\emptyset)$, o sea, $(u - v)(\emptyset) = 0$, entonces $u - v \equiv 0$. □

4 Problema del l -autovalor

En este capítulo estudiaremos el problema de Dirichlet para un análogo a los autovalores del Hessiano en el árbol, es decir,

$$\begin{cases} u(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x), \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g, \end{cases} \quad (4.1)$$

para $2 \leq l \leq m$. Los operadores de promedios a trabajar son

$$F_l(u)(x) := \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) \quad 2 \leq l \leq m.$$

Observamos que estos operadores son acotados por promedios y sacan constantes para deducir que valen todas las propiedades vistas en el Capítulo 2.

Proposición 19. *Los operadores F_l con $2 \leq l \leq m$, son todos acotados por promedios y sacan constantes.*

Demostración. Tomemos dos funciones $u, v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y un $x \in \mathbb{T}$, entonces

$$F_l(u)(x) - F_l(v)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(v(y) + v(z))$$

El máximo de $F_l(u)(x)$ se alcanza con algún subconjunto $S \subseteq S(x)$ particular,

$$F_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) = \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)).$$

Por otro lado, el máximo de $F_l(v)(x)$ se puede acotar inferiormente usando este S hallado

$$F_l(v)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(v(y) + v(z)) \geq \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(v(y) + v(z)).$$

Resulta que

$$F_l(u)(x) - F_l(v)(x) \leq \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(v(y) + v(z)).$$

Ahora el mínimo sobre los promedios con v se alcanza en un par de sucesores particulares y, z ; mientras tanto el mínimo de los promedios con u se puede acotar superiormente con el promedio usando este par.

$$\begin{aligned} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) &\leq \frac{1}{2}(u(y) + u(z)), \\ \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(v(y) + v(z)) &= \frac{1}{2}(v(y) + v(z)). \end{aligned}$$

Y así se obtiene

$$F_l(u)(x) - F_l(v)(x) \leq \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - \frac{1}{2}(v(y) + v(z)) = \frac{1}{2}(u(y) - v(y)) + \frac{1}{2}(u(z) - v(z))$$

Esta última cota es la combinación lineal convexa necesaria para ver que los operadores son acotados por promedios. Se tiene

$$\begin{aligned} c_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } x_k \notin \{y, z\}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x_k \in \{y, z\}, \end{cases} \\ F_l(u)(x) - F_l(v)(x) &\leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k(u(x_k) - v(x_k)). \end{aligned}$$

Estos coeficientes dependen fuertemente de x y las funciones u y v que se usaron para hallar los máximos y mínimos anteriores.

Además, los operadores F_l sacan constantes

$$\begin{aligned} F_l(u + \alpha)(x) &= \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + \alpha + u(z) + \alpha) = \left[\max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) \right] + \alpha \\ &= F_l(u)(x) + \alpha. \end{aligned}$$

□

En las próximas dos secciones trataremos el problema homogéneo

$$\begin{cases} u(x) = F_l(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

y para ahorrar notación fijaremos un $2 \leq l \leq m$ y obviaremos el subíndice l de F_l . Es decir, solamente en las próximas dos secciones usaremos $F \equiv F_l$.

4.1. Existencia y unicidad de solución

Lema 20. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces la función constante sobre el árbol $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \alpha$ es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = \alpha. \end{cases}$$

Demostración. Fijemos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u(x) = \alpha \forall x$. Es claro que u sobre cualquier rama de $\partial\mathbb{T}$ toma el valor α al ser constante. Y para ver que resuelve el problema del autovalor fijamos $x \in \mathbb{T}$

$$F(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(\alpha + \alpha) = \alpha = u(x).$$

□

Teorema 21 (Existencia y unicidad del problema de Dirichlet para el l -ésimo autovalor). Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Existe una única solución para el problema del l -ésimo autovalor:

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Además, la convergencia en $\partial\mathbb{T}$ es por niveles.

Demostración.

Existencia

Tomemos $g \in C[0, 1]$ función continua. El objetivo será ver que hay solución con límite g y para eso usaremos que las funciones constantes son soluciones del problema y las propiedades de la Proposición 14 en la página 22. La idea será aproximar la g con funciones escalón y armar una solución para cada función escalón.

Se arma para cada $i \in \mathbb{N}$ una partición del intervalo $[0, 1]$ de m^i porciones de igual longitud

$$I_k = \left[\frac{k}{m^i}, \frac{k+1}{m^i} \right) \quad 0 \leq k \leq m^i - 2,$$

$$I_{m^i-1} = \left[\frac{m^i-1}{m^i}, 1 \right].$$

Sobre la clausura de cada uno de estos intervalos, $\overline{I_k}$, se toma el mínimo de g :

$$\mu_k = \min_{r \in \overline{I_k}} g(r) \quad 0 \leq k \leq m^i - 1.$$

Y se define la función escalón $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_i(r) = \sum_{k=0}^{m^i-1} \mu_k \chi_{I_k}(r).$$

Aumentando el $i \in \mathbb{N}$ se refina la partición y se modifican los escalones obteniendo una sucesión de funciones acotadas $(g_i)_i \subset B[0, 1]$.

Construimos entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ una solución u_i del problema

$$\begin{cases} u_i(x) = F(u_i)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u_i|_{\partial\mathbb{T}} = g_i. \end{cases}$$

Sean $x_0, x_1, \dots, x_{m^i-1}$ los nodos de $\mathbb{T}$ de nivel i y, para cada $0 \leq k \leq m^i - 1$, sea $\mathbb{T}^k$ el subárbol de $\mathbb{T}$ con raíz en x_k que contiene a todos los nodos descendientes de x_k . Nos concentraremos momentáneamente en el problema del l -autovalor sobre cada subárbol $\mathbb{T}^k$; como las constantes son solución, tenemos que $\tilde{u}_k = \mu_k$ resuelve el problema sobre cada subárbol aislado

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(x) = F(\tilde{u}_k)(x) & \forall x \in \mathbb{T}^k, \\ \tilde{u}_k|_{\partial\mathbb{T}} = \mu_k. \end{cases}$$

Podemos «pegar» estas $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{m^i-1}$ para armar la solución u_i sobre el árbol completo. Definimos u_i de forma recursiva: para $|x| \geq i$ existe un único $0 \leq k \leq m^i - 1$ tal que $x \in \mathbb{T}^k$ y se asigna $u_i(x) = \tilde{u}_k(x) = \mu_k$; para $|x| = i - 1$, como u_i ya tiene definición en $S(x)$, $F(u_i)(x)$ está bien definido y se asigna $u_i(x) = F(u_i)(x)$. Se continúa esta construcción decreciendo el nivel. Si u_i tiene definición sobre todos los nodos de nivel n y superior (con $1 \leq n < i$ fijo), fijado un $x \in \mathbb{T}$ con $|x| = n - 1$, $F(u_i)(x)$ está bien definido y se asigna

$$u_i(x) = F(u_i)(x).$$

Es claro que con esta construcción vale que $u_i(x) = F(u_i)(x) \forall x \in \mathbb{T}$ ya que si $|x| \geq i$, $u_i(x) = \mu_k = F(\mu_k)(x) = F(u_i)(x)$ para algún único k , y si $|x| < i$ se asignó $u_i(x) = F(u_i)(x)$.

También es directo ver que u_i converge por niveles a g_i en $\partial\mathbb{T}$, ya que para un $x \in \mathbb{T}$ con nivel $|x| \geq i$, existe un único $0 \leq k \leq m^i - 1$ donde $x \in \mathbb{T}^k$ y entonces $\psi(x) \in I_k$, lo que implica $u_i(x) = \mu_k$ y $\mu_k = g_i(\psi(x))$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{T}^k \implies u_i(x) = \mu_k \\ \psi(x) \in I_k \implies g_i(\psi(x)) = \mu_k \end{array} \right\} \rightarrow u_i(x) = g_i(\psi(x))$$

Inmediatamente se tiene que para $|x| \geq i$,

$$|u_i(x) - g_k(\psi(x))| = 0,$$

mostrando la convergencia por niveles en $\partial\mathbb{T}$.

Por último, las funciones escalón $(g_i)_i \subseteq B[0, 1]$ convergen uniformemente a $g \in C[0, 1]$ y armamos soluciones a su problema de Dirichlet asociado, $(u_i)_i$, entonces gracias a la propiedad (5) en la página 22, el límite sobre i de estas u_i será la solución del problema de Dirichlet con dato por niveles sobre $\partial\mathbb{T}$, g .

Unicidad

Si se tuvieran dos soluciones u_1, u_2 , con el mismo dato de borde g , en particular se tiene que con $\bar{u} = u_1$ y $\underline{u} = u_2$ se cumplen las hipótesis del lema de comparación, teorema 13 en la página 20. Por lo tanto se llega a $u_1 \geq u_2$. Como los roles de u_1 y u_2 son simétricos, se obtiene la igualdad: $u_1 = u_2$. $\square$

4.2. Fórmula cerrada de la solución para dato monótono

4.2.1. Conjuntos «estilo» Cantor

Para dar una fórmula cerrada para la solución del problema de autovalores con dato monótono es necesario introducir una variante del conjunto ternario de Cantor. Se realizarán dos construcciones análogas que servirán para resolver los problemas con dato creciente o decreciente. La descripción siguiente es para dato decreciente y entre paréntesis se indicarán los cambios para realizar la variante creciente.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ y $2 \leq l \leq m$. $J_0 = [0, 1]$ es el intervalo de partida y se lo divide en m

intervalos cerrados de longitud m^{-1} cada uno:

$$I_k = \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right] \quad 0 \leq k \leq m-1$$

Para el siguiente paso se conservan solamente los intervalos $l-2$ y $l-1$ (para dato creciente se conservan los intervalos $m-l$ y $m-l+1$),

$$J_1 = I_{l-2} \cup I_{l-1}.$$

Notar que J_1 es unión casi disjunta de 2 intervalos cerrados, cada uno de longitud m^{-1} . Luego se subdividen I_{l-2} e I_{l-1} en m intervalos cerrados de longitud m^{-2} :

$$\begin{aligned} I_{l-2,k} &= \left[\frac{l-2}{m} + \frac{k}{m^2}, \frac{l-2}{m} + \frac{k+1}{m^2} \right] \\ I_{l-1,k} &= \left[\frac{l-1}{m} + \frac{k}{m^2}, \frac{l-1}{m} + \frac{k+1}{m^2} \right] \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq m-1$$

y se conservan los intervalos con subíndices $l-2$ y $l-1$ (en caso creciente se conservarán los de subíndices $m-l$ y $m-l+1$). La unión de ellos se la nombra J_2

$$J_2 = I_{l-2,l-2} \cup I_{l-2,l-1} \cup I_{l-1,l-2} \cup I_{l-1,l-1}.$$

Es unión de 4 intervalos casi disjuntos de longitud m^{-2} cada uno. El siguiente paso es dividir los 4 intervalos anteriores en m subintervalos de longitud m^{-3} y conservar los de índices $l-2$ y $l-1$ ($m-l$ y $m-l+1$). J_3 es la unión de los 8 intervalos que se conservan.

Repitiendo el proceso de forma recursiva se obtiene una familia de conjuntos

$$J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \cdots$$

Cada J_n es una unión de 2^n intervalos cerrados casi disjuntos de longitud m^{-n} . El conjunto «estilo» Cantor es la intersección de los J_n ,

$$\mathbb{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} J_n.$$

A J_n se lo llamará nivel n del conjunto $\mathbb{C}$.

Notar que el intervalo $I_k = \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right]$ contiene todos los números cuya expresión en base m tiene a k como primer dígito, osea es de la forma $0, k * * * \dots$ (admitiendo cola infinita de $m-1$). Entonces J_1 tiene todos los números cuya expresión en base m co-

mienza con los dígitos $l-2$ o $l-1$ ($m-l$ o $m-l+1$). De forma análoga, los intervalos $I_{l-2,l-2}, I_{l-2,l-1}, I_{l-1,l-2}, I_{l-1,l-1}$ contienen todos los números cuyos primero y segundo dígitos en base m son $l-2$ o $l-1$. Siguiendo este argumento, J_n tiene los números cuyos primeros n dígitos en base m son $l-2$ o $l-1$ ($m-l$ o $m-l+1$). Como $\mathcal{C}$ es la intersección de todos los J_n , se llega entonces a que contiene todos los números cuya expresión en base m tiene únicamente los dígitos $l-2$ o $l-1$ ($m-l$ o $m-l+1$). Debido a esta observación se puede ver que $\mathcal{C}$ está en biyección con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y por ende el cardinal de $\mathcal{C}$ es el del continuo, al igual que el ternario de Cantor.

Finalmente, la medida (de Lebesgue, λ) de esta intersección es nula porque

$$\mathcal{C} \subseteq J_n \quad \forall n \implies \lambda(\mathcal{C}) \leq \lambda(J_n) = \left(\frac{2}{m}\right)^n \quad \forall n \xrightarrow{m>2} \lambda(\mathcal{C}) = 0.$$

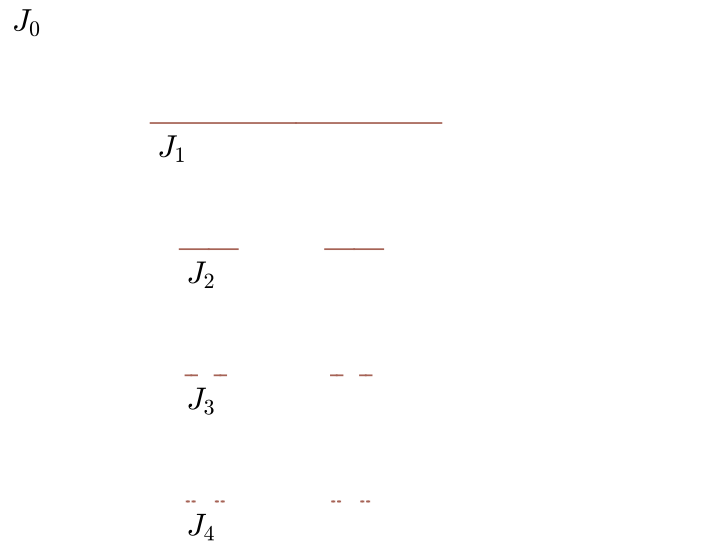


Figura 4.1: Primeros 5 niveles del conjunto «estilo» Cantor con $m = 5$ y $l = 3$. Construcción decreciente.

4.2.2. Promediar sobre $\mathcal{C}$

En esta sección se construirá una medida con soporte en $\mathcal{C}$ que permitirá dar sentido a tomar un promedio sobre el conjunto $\mathcal{C}$.

Se notará $P_A(g)$ al promedio de una función continua $g \in C[0,1]$ sobre un conjunto

de medida positiva $A \subseteq [0, 1]$:

$$P_A(g) = \int_0^1 g(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr$$

donde $\lambda(A)$ es la medida de Lebesgue del conjunto A .

Observación. P_A define un funcional en el espacio dual de las funciones continuas, $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)^*$.

Claramente es lineal pues

$$\begin{aligned} P_A(g_1 + g_2) &= \int_0^1 (g_1(r) + g_2(r)) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr \\ &= \int_0^1 g_1(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr + \int_0^1 g_2(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr \\ &= P_A(g_1) + P_A(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in C[0, 1] \end{aligned}$$

y

$$P_A(\alpha g) = \int_0^1 \alpha g(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr = \alpha P_A(g) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, g \in C[0, 1].$$

Y es continuo al ser un operador de norma 1. Esto se debe a que el valor absoluto del operador aplicado a cualquier función g se acota por su norma infinito,

$$\begin{aligned} |P_A(g)| &= \left| \int_0^1 g(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| g(r) \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} \right| dr \\ &\leq \|g\|_\infty \int_0^1 \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr \\ &= \|g\|_\infty \quad \forall g \in C[0, 1] \implies \|P_A\| \leq 1, \end{aligned}$$

y, además,

$$P_A(1) = \int_0^1 \frac{\chi_A(r)}{\lambda(A)} dr = 1 \implies \|P_A\| \geq 1.$$

Ahora recordemos el siguiente resultado que caracteriza al espacio $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)^*$ como las funciones de variación acotada, $BV[a, b]$.

Teorema de Riesz-Markov. Sea $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)^* \equiv C[a, b]^*$ el espacio dual de las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$. Para una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada

($g \in BV[0, 1]$) se notará $V(g)$ a su variación:

$$V(g) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |g(r_{i+1}) - g(r_i)| \mid a = r_0 < \dots < r_N = b \right\}.$$

Entonces dada $\varphi \in C[a, b]^*$, existe una función de variación acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(f) = \|\varphi\|$ y

$$\varphi(g) = \int_a^b g \, df$$

donde la integral es Riemann-Stieltjes.

Para encontrar una solución para el problema del l -autovalor se tomarán promedios sobre los conjuntos J_n . Aplicando el teorema anterior a P_{J_n} encontramos que una posible función de variación acotada asociada a estos promedios es

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(r) = \int_0^r \frac{\chi_{J_n}(s)}{\lambda(J_n)} \, ds.$$

Estas funciones son derivables en todo $[0, 1]$ salvo finitos puntos y aplicando un conocido resultado de integrales Riemann-Stieltjes observamos que

$$\int_0^1 g(r) \, df_n(r) = \int_0^1 g(r) \frac{\chi_{J_n}(r)}{\lambda(J_n)} \, dr = P_{J_n}(g) \quad \forall g \in C[0, 1].$$

Proposición 22 (Propiedades de f_n). *Valen las siguientes propiedades.*

a)

$$\int_0^1 1 \, df_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

b) f_n es una función creciente $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

c) *Fórmula de recursión*

$$f_0(r) = r, \quad f_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \frac{l-2}{m} \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(mr - (l-2)) & \text{si } \frac{l-2}{m} < r \leq \frac{l-1}{m} \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(mr - (l-1)) + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{l-1}{m} < r \leq \frac{l}{m} \\ 1 & \text{si } \frac{l}{m} < r \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$

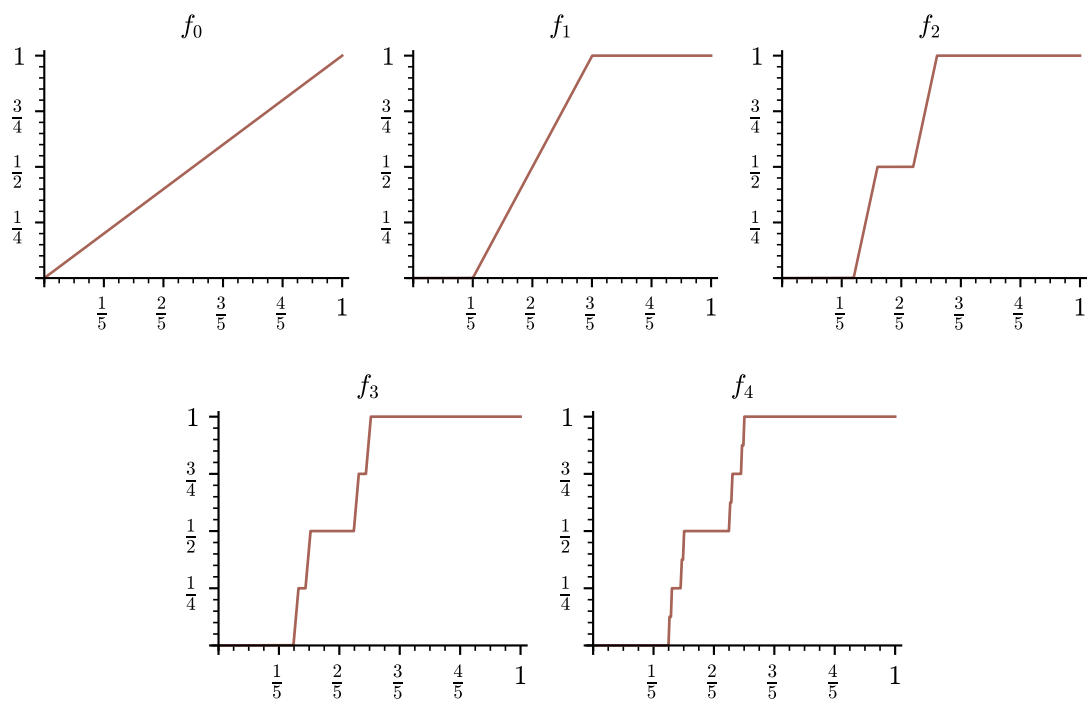


Figura 4.2: Gráficos de las primeras f_n para $m = 5$ y $k = 3$. Construcción decreciente.

d)

$$\max_{r \in [0,1]} |f_n(r) - f_{n-1}(r)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \max_{r \in [0,1]} |f_1(r) - f_0(r)| \quad \forall n \geq 1.$$

e) $(f_n)_n \subseteq C[0,1]$ es una sucesión de Cauchy.

En el caso decreciente se obtienen resultados análogos pero cambiando los $l-2$ y $l-1$ por $m-l$ y $m-l+1$ respectivamente.

Demostración. Las primeras dos propiedades son directas

$$\int_0^1 1 df_n = \int_0^1 \frac{\chi_{J_n}(r)}{\lambda(J_n)} dr = 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Y como la derivada de f_n es

$$f'_n = \frac{\chi_{J_n}}{\lambda(J_n)} \geq 0,$$

salvo finitos puntos, f_n es creciente.

El primer paso de la fórmula de recursión también es directo:

$$f_0(r) = \int_0^r \frac{\chi_{J_0}(s)}{\lambda(J_0)} ds = \int_0^r 1 ds = r \quad \forall r \in [0,1].$$

Para $n \geq 1$ se comienza con un $r \leq \frac{l-2}{m}$, y por construcción

$$J_n \subseteq J_1 = \left[\frac{l-2}{m}, \frac{l}{m} \right] \quad \forall n \geq 1 \implies J_n \cap \left[0, \frac{l-2}{m} \right] = \left\{ \frac{l-2}{m} \right\},$$

luego $\chi_{J_n}(s) = 0$ para casi todos $s \in [0, r]$, lo que implica

$$f_n(x) = \int_0^r \frac{\chi_{J_n}(s)}{\lambda(J_n)} ds = 0.$$

Con $r > \frac{l}{m}$, ocurre de forma similar $J_n \cap \left(\frac{l}{m}, 1 \right] = \emptyset$ y $\chi_{J_n}(s) = 0$ si $r \leq s \leq 1$.

$$f_n(r) = \int_0^r \frac{\chi_{J_n}(s)}{\lambda(J_n)} ds = \int_0^1 \frac{\chi_{J_n}(s)}{\lambda(J_n)} ds - \int_r^1 \frac{\chi_{J_n}(s)}{\lambda(J_n)} ds = 1 - 0 = 1.$$

Con $r \in \left(\frac{l-2}{m}, \frac{l-1}{m} \right]$ se calcula

$$\frac{1}{2} f_{n-1}(mr - (l-2)) = \frac{1}{2} \int_0^{mr-(l-2)} \frac{\chi_{J_{n-1}}(s)}{\lambda(J_{n-1})} ds.$$

Aplicando un cambio de variables $t = \frac{1}{m}(s + l - 2)$ se obtiene

$$\frac{1}{2}f_{n-1}(mr - (l - 2)) = \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-2}{m}}^r \chi_{J_{n-1}}(mt - (l - 2)) dt = \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-2}{m}}^r \chi_{[\frac{1}{m}(J_{n-1}+l-2)]}(t) dt.$$

Hay que interpretar el conjunto $\frac{1}{m}(J_{n-1} + l - 2)$. Observar que J_{n-1} contiene todos los números cuyos primeros $n - 1$ dígitos en base m son $l - 1$ o $l - 2$:

$$J_{n-1} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{m^i} + \frac{s}{m^n}, \quad s \in [0, 1], \quad d_i \in \{l - 2, l - 1\}, \forall i \right\}.$$

Luego, al aplicarle la transformación resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}(J_{n-1} + l - 2) &= \left\{ \frac{l-2}{m} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{m^{i+1}} + \frac{s}{m^{n+1}}, \quad s \in [0, 1], \quad d_i \in \{l - 2, l - 1\}, \forall i \right\} \\ &= I_{l-2} \cap J_n. \end{aligned}$$

Además como $r \in \left(\frac{l-2}{m}, \frac{l-1}{m} \right] \subset I_{l-2}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_{n-1}(mr - (l - 2)) &= \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-2}{m}}^r \chi_{I_{l-2} \cap J_n}(t) dt \\ &= \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-2}{m}}^r \chi_{J_n}(t) dt \\ &= \underbrace{\frac{m\lambda(J_n)}{2\lambda(J_{n-1})}}_{=1} \int_0^r \frac{\chi_{J_n}(t)}{\lambda(J_n)} dt \\ &= f_n(r). \end{aligned}$$

Resta ver el caso $r \in \left(\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m} \right]$. Se siguen pasos parecidos al anterior pero con cambio de variables $t = \frac{1}{m}(s + l - 1)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_{n-1}(mr - (l - 1)) &= \frac{1}{2} \int_0^{mr-(l-1)} \frac{\chi_{J_{n-1}}(s)}{\lambda(J_{n-1})} ds \\ &= \frac{m}{2\lambda(J_n)} \int_{\frac{l-1}{m}}^r \chi_{J_{n-1}}(mt - (l - 1)) dt \\ &= \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-1}{m}}^r \chi_{[\frac{1}{m}(J_{n-1}+l-1)]}(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}(J_{n-1} + l - 1) &= \left\{ \frac{l-1}{m} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{m^{i+1}} + \frac{s}{m^{n+1}}, \quad s \in [0, 1], \quad d_i \in \{l-2, l-1\} \quad \forall i \right\} \\ &= I_{l-1} \cap J_n,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f_{n-1}(mr - (l-1)) &= \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-1}{m}}^r \chi_{I_{l-1} \cap J_n}(t) dt \\ &= \frac{m}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-1}{m}}^r \chi_{J_n}(t) dt \\ &= \frac{m\lambda(J_n)}{2\lambda(J_{n-1})} \int_{\frac{l-1}{m}}^r \frac{\chi_{J_n}(t)}{\lambda(J_n)} dt \\ &= \int_0^r \frac{\chi_{J_n}(t)}{\lambda(J_n)} dt - \int_0^{\frac{l-1}{m}} \frac{\chi_{J_n}(t)}{\lambda(J_n)} dt \\ &= f_n(r) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Gracias a la recursión se pueden probar las propiedades restantes. La cota entre términos consecutivos se ve por inducción; el caso base, $n = 1$, se ve inmediatamente y para el paso inductivo se usa

$$\begin{aligned}|f_n(r) - f_{n-1}(r)| &= \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \frac{l-2}{m} \\ \frac{1}{2} |f_{n-1}(mr - (l-2)) - f_{n-2}(mr - (l-2))| & \text{si } \frac{l-2}{m} < r \leq \frac{l-1}{m} \\ \frac{1}{2} |f_{n-1}(mr - (l-1)) - f_{n-2}(mr - (l-1))| & \text{si } \frac{l-1}{m} < r \leq \frac{l}{m} \\ 0 & \text{si } \frac{l}{m} < r \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{s \in [0,1]} |f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-2}} \max_{s \in [0,1]} |f_1(s) - f_0(s)| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \max_{s \in [0,1]} |f_1(s) - f_0(s)|.\end{aligned}$$

Finalmente, veamos el carácter Cauchy de la sucesión $(f_n)_n$. Sean $\varepsilon > 0$ y

$$v = \max_{s \in [0,1]} |f_1(s) - f_0(s)| > 0.$$

Entonces $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2v}$$

y luego para $M > N \geq N_0$ y cualquier $r \in [0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned} |f_M(r) - f_N(r)| &\leq \sum_{n=N+1}^M |f_n(r) - f_{n-1}(r)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^M \frac{v}{2^{n-1}} \\ &\leq v \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$\|f_M - f_N\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_0.$$

□

Proposición 23 (Propiedades de f). Sea $f \in C[0, 1]$ la función límite de la sucesión $(f_n)_n$. Valen las siguientes propiedades para esta función:

a) $f \in C[0, 1]$ y se pueden integrar funciones con df .

b)

$$\int_0^1 1 df = 1.$$

c) Autosimilitud

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq \frac{l-2}{m}, \\ \frac{1}{2} f(mr - (l-2)) & \text{si } \frac{l-2}{m} < r \leq \frac{l-1}{m}, \\ \frac{1}{2} f(mr - (l-1)) + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{l-1}{m} < r \leq \frac{l}{m}, \\ 1 & \text{si } \frac{l}{m} < r. \end{cases}$$

Otra vez, en el caso creciente se intercambian $l-2$ y $l-1$ por $m-l$ y $m-l+1$.

Demostración. a) f es límite uniforme de funciones continuas $(f_n)_n$, es también continua. Al ser continua sobre compacto, resulta también de variación acotada en $[0, 1]$ y es válido integrar df .

b) Para mostrar que integra 1 se puede usar que como f_n es creciente $\forall n$, f también resulta creciente y así la integral es

$$\int_0^1 1 df = V(f) = f(1) - f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) - f_n(0) = 1.$$

c) La autosimilitud se concluye tomando límite de la fórmula recursiva de las f_n . $\square$

Definición 24 (Función de Cantor y promedio sobre $\mathcal{C}$). Se nombra «función de Cantor» a la función límite de la sucesión $(f_n)_n$, $f \in C[0, 1]$.

Como consecuencia del teorema de Riesz-Markov se tiene que el promedio de una función continua g sobre J_n coincide con la integral respecto de f_n ,

$$P_{J_n}(g) = \int_0^1 g df_n.$$

Y gracias a que las f_n convergen uniformemente, se obtiene usando integración por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 g df_n &= g(1)f_n(1) - g(0)f_n(0) - \int_0^1 f_n dg \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(1)f(1) - g(0)f(0) - \int_0^1 f dg = \int_0^1 g df. \end{aligned}$$

Es decir, los promedios de cualquier función continua g sobre los niveles del conjunto estilo Cantor convergen. A este valor límite lo llamaremos el promedio de g sobre $\mathcal{C}$. De esta forma se puede extender la noción de promedio a este conjunto de medida nula.

Teorema 25 (Fórmula cerrada para dato continuo y monótono). Sean $\mathbb{T}$ el árbol de m sucesores; y sea $I_x = [\psi(x), \psi(x) + m^{-|x|}]$ el intervalo de nivel $|x|$ para $x \in \mathbb{T}$. Sea $g \in C[0, 1]$ una función monótona, y $f \in C[0, 1]$ la función de Cantor construida previamente según la monotonía de g .

Sea $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r).$$

Entonces u es solución del problema del l -autovalor con dato g :

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

donde la convergencia en $\partial\mathbb{T}$ es por niveles.

Antes de la demostración del teorema damos una interpretación de la expresión de la solución. Esta es el promedio de la función $g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right)$ sobre el conjunto «estilo» Cantor armado en base a su monotonía. Aplicando un cambio de variables $s = \frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)$, se obtiene

$$u(x) = \int_{I_x} g(s) df(m^{|x|}(s - \psi(x))).$$

Este cambio convierte el intervalo $[0, 1]$ en I_x , entonces la integral sobre I_x respecto de la composición $f(m^{|x|}(s - \psi(x)))$ es el promedio de g sobre el conjunto «estilo» de Cantor creado dentro de I_x .

Demostración.

Cumple el límite en $\partial\mathbb{T}$

Sea $\varepsilon > 0$, se busca un nivel $n_0 \in \mathbb{N}$ donde $|u(x) - g(\psi(x))| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}$ con $|x| \geq n_0$. Nos basaremos en la siguiente cota

$$\begin{aligned} |u(x) - g(\psi(x))| &= \left| \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) - g(\psi(x)) \right| \\ &= \left| \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) - \int_0^1 g(\psi(x)) df(r) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left[g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) - g(\psi(x)) \right] df(r) \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) - g(\psi(x)) \right| df(r). \end{aligned}$$

Los pasos anteriores son válidos ya que $\int_0^1 1 df = 1$ y f es creciente.

Como g es uniformemente continua, existe un $\delta > 0$ tal que si s y t distan menos que δ , entonces $g(s)$ y $g(t)$ distan menos de ε :

$$\exists \delta > 0 \mid |s - t| < \delta \implies |g(s) - g(t)| < \varepsilon.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m^{-n} < \delta$ con cualquier $n \geq n_0$. Entonces si $|x| \geq n_0$ y $r \in [0, 1]$, se

tendrá que con $s = \frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)$ y $t = \psi(x)$,

$$|s - t| = \frac{r}{m^{|x|}} \leq \frac{1}{m^{n_0}} < \delta.$$

Luego los valores de g en s y t difieren menos que ε ,

$$\left| g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) - g(\psi(x)) \right| < \varepsilon.$$

Retomando con la cota inicial obtenemos que los valores de $u(x)$ y $g(\psi(x))$ también difieren menos que ε .

$$|u(x) - g(\psi(x))| \leq \int_0^1 \left| g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) - g(\psi(x)) \right| df(r) \leq \varepsilon \int_0^1 1 df = \varepsilon.$$

Resuelve la ecuación

Se completará la demostración con g decreciente, para el caso creciente se siguen pasos análogos pero cambiando $l - 2$ y $l - 1$ por $m - l$ y $m - l + 1$ respectivamente.

Sea $x \in \mathbb{T}$, $S(x) = \{x_0, \dots, x_{m-1}\}$. Como g es decreciente se obtendrá $u(x_0) \geq \dots \geq u(x_{m-1})$ esto es porque para $0 \leq k \leq m - 2$ y $r \in [0, 1]$

$$\frac{r}{m^{|x_k|}} + \psi(x_k) \leq \frac{r}{m^{|x_{k+1}|}} + \psi(x_{k+1}) \implies g\left(\frac{r}{m^{|x_k|}} + \psi(x_k)\right) \geq g\left(\frac{r}{m^{|x_{k+1}|}} + \psi(x_{k+1})\right).$$

Como f es creciente, integrando de ambos lados se preserva la desigualdad,

$$u(x_k) = \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x_k|}} + \psi(x_k)\right) df(r) \geq \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x_{k+1}|}} + \psi(x_{k+1})\right) df(r) = u(x_{k+1}).$$

Gracias a este ordenamiento podemos determinar que el máximo y mínimo dentro de $F(u)(x)$ se obtiene con los sucesores $l - 2$ y $l - 1$.

$$F(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)) = \frac{1}{2} (u(x_{l-2}) + u(x_{l-1})).$$

Ahora veremos que partiendo de la expresión integral de $u(x)$ se la puede reescribir como el promedio entre las expresiones para x_{l-2} y x_{l-1} .

$$u(x) = \int_0^1 g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) = \int_0^{\frac{l-2}{m}} g(\cdot) df + \int_{\frac{l-2}{m}}^{\frac{l-1}{m}} g(\cdot) df + \int_{\frac{l-1}{m}}^{\frac{l}{m}} g(\cdot) df + \int_{\frac{l}{m}}^1 g(\cdot) df$$

f es constante en $\left[0, \frac{l-2}{m}\right]$ y $\left[\frac{l}{m}, 1\right]$ por lo que el primer y último término de la suma anterior son nulos. En el segundo término, donde se integra en $\frac{l-2}{m} \leq r \leq \frac{l-1}{m}$, la autosimilitud de f indica $f(r) = \frac{1}{2}f(mr - (l-2))$. Aplicando un cambio de variables

$$\begin{aligned} s &= \phi(r) = mr - (l-2) \\ df(r) &= d\left(\frac{1}{2}f \circ \phi\right)(r) = \frac{1}{2}df(s) \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\frac{l-2}{m}}^{\frac{l-1}{m}} g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) &= \frac{1}{2} \int_0^1 g\left(\frac{1}{m^{|x|}} \left(\frac{1}{m}(s+l-2)\right) + \psi(x)\right) df(s) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 g\left(\frac{s}{m^{|x|+1}} + \frac{l-2}{m^{|x|+1}} + \psi(x)\right) df(s). \end{aligned}$$

Notar que

$$\frac{l-2}{m^{|x|+1}} + \psi(x) = \psi(x_{l-2}),$$

y por lo que se obtiene

$$\int_{\frac{l-2}{m}}^{\frac{l-1}{m}} g\left(\frac{s}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) = \frac{1}{2} \int_0^1 g\left(\frac{s}{m^{|x_{l-2}|}} + \psi(x_{l-2})\right) df(s) = \frac{1}{2}u(x_{l-2}).$$

Falta observar que el tercer término, integrando en $\frac{l-1}{m} \leq r \leq \frac{l}{m}$, está relacionado con $u(x_{l-1})$. Esta vez la autosimilitud indica

$$f(r) = \frac{1}{2}f(mr - (l-1)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}f \circ \varphi(r) + \frac{1}{2},$$

con un cambio de variable

$$\begin{aligned} s &= \varphi(r) \\ df(r) &= d\left(\frac{1}{2}f \circ \varphi + \frac{1}{2}\right)(r) = \frac{1}{2}df(s) \end{aligned}$$

se llega a

$$\int_{\frac{l-1}{m}}^{\frac{l}{m}} g\left(\frac{r}{m^{|x|}} + \psi(x)\right) df(r) = \frac{1}{2} \int_0^1 g\left(\frac{s}{m^{|x|+1}} + \frac{l-1}{m^{|x|+1}} + \psi(x)\right) df(s) = \frac{1}{2}u(x_{l-1}).$$

Lo que concluye

$$u(x) = \frac{1}{2}(u(x_{l-2}) + u(x_{l-1})).$$

□

4.3. m -autovalor no homogéneo

Antes de abordar el problema de existencia y unicidad de solución para Monge-Ampere, estudiaremos un problema auxiliar que será útil en los resultados siguientes. Este es el problema del m -autovalor no homogéneo sobre un árbol de m ramas $\mathbb{T}$,

$$\begin{cases} u(x) = \min_{y,z \in S(x)} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases} \quad (4.2)$$

Donde $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva y es la parte no homogénea del problema.

El operador de este problema es

$$F_m - h : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T}) \quad (F_m - h)(u)(x) = F_m(u)(x) - h(x).$$

Y para simplificar notación, en esta sección usaremos $F \equiv F_m$.

Observemos primero que el operador saca constantes

$$(F - h)(u + \alpha)(x) = F(u + \alpha)(x) - h(x) = F(u)(x) + \alpha - h(x) = (F - h)(u)(x) + \alpha.$$

Y el ser acotado por promedios se hereda del operador F :

$$(F - h)(u)(x) - (F - h)(v)(x) = F(u)(x) - F(v)(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k(u(x) - v(x)).$$

Debido a esto, valen todas las propiedades mencionadas en el Capítulo 2, incluso el principio de comparación.

Para este problema nos interesará particularmente mostrar la existencia de una solución imponiendo ciertas condiciones sobre h .

4.3.1. Funciones sumables sobre subárboles binarios

Definición 26 (Árbol binario). Sea $x \in \mathbb{T}$, un subárbol binario con raíz en x es un subárbol $\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}$ con nodo primogénito x y donde cada nodo tiene exactamente dos sucesores.

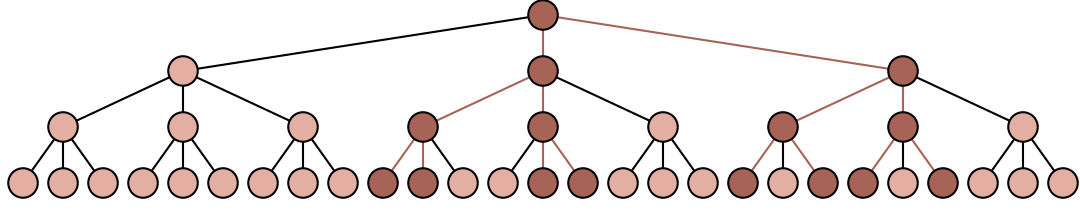


Figura 4.3: Primeros 4 niveles de un árbol de 3 ramas. Sombreado con **color oscuro** se denota un subárbol binario.

Definición 27 (Funciones sumables sobre subárboles binarios). Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva. Decimos que h es sumable sobre subárboles binarios si

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} < \infty \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

donde el supremo se toma sobre todos los subárboles binarios de $\mathbb{T}$ con raíz en x , y la suma está bien definida al ser de términos positivos.

Equivalentemente, h es sumable sobre subárboles si y solo si el supremo sobre los subárboles binarios con raíz en el nodo $\emptyset$ está acotado:

$$\sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} < \infty.$$

Esto es porque si es sumable sobre subárboles binarios con raíz en cualquier nodo, en particular la suma con raíz en $\emptyset$ está acotada. Y si la suma está acotada en el nodo raíz, dado $x \in \mathbb{T}$ y un subárbol binario $\mathbb{T}_b^x$, entonces existe subárbol binario $\mathbb{T}_b^\emptyset$ que contiene al anterior y

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \leq 2^{|x|} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} \leq 2^{|x|} \sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}}.$$

La cota vale independientemente del subárbol binario $\mathbb{T}_b^x$ inicial por lo que el supremo se acota igual

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \leq 2^{|x|} \sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} < \infty.$$

Proposición 28. Exponemos algunas propiedades que tienen las funciones sumables sobre subárboles binarios.

1. Si h es sumable sobre subárboles binarios, entonces

$$\inf_{y \in \mathbb{T}^x} h(y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

donde $\mathbb{T}^x$ es el subárbol completo de $\mathbb{T}$ con raíz en x , sin descartar sucesores. Dicho de otro modo, h necesariamente debe tomar valores pequeños sin importar que tan grande sea el nivel sobre el árbol.

2. Sean $(a_n)_n \in l^1$ una sucesión sumable y positiva, y $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(y) \leq a_{|y|} \quad \forall y \in \mathbb{T}$. Entonces h es sumable sobre subárboles binarios.

Demostración. Para ver 1, supongamos que ocurre lo contrario y que para cierto $x \in \mathbb{T}$ se tiene que $\inf_{y \in \mathbb{T}^x} h(y) = \eta > 0$, entonces $h(y) \geq \eta \quad \forall y \in \mathbb{T}^x$. Eligiendo cualquier subárbol binario $\mathbb{T}_b^x$ se obtiene que

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = \sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}} \geq \sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{\eta}{2^{n-|x|}}.$$

Hay $2^{n-|x|}$ nodos en $\mathbb{T}_b^x$ de nivel n , entonces en la segunda sumatoria se repite $2^{n-|x|}$ veces el mismo término, lo que da

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \geq \sum_{n \geq |x|} \eta = \infty.$$

Veamos 2. Dado un subárbol binario $\mathbb{T}_b^\emptyset$, se tiene

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} \leq \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{a_{|y|}}{2^{|y|}} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ |y|=n}} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n \geq 0} a_n.$$

La cota vale para cualquier subárbol por lo que el supremo preserva la cota y h resulta sumable sobre subárboles binarios. $\square$

Ejemplo 29. Veamos algunos ejemplos de funciones sumables y no sumables sobre subárboles binarios.

1. Si $h(y) = c > 0$, constante, entonces no es sumable sobre subárboles binarios. Esto es porque $\inf_{y \in \mathbb{T}} h(y) = c > 0$.

2. Si h es sumable (a secas), es decir

$$\sum_{y \in \mathbb{T}} h(y) < \infty,$$

entonces es sumable sobre subárboles binarios. Esto es porque dado $\mathbb{T}_b^\emptyset$ subárbol binario, entonces

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} \leq \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} h(y) \leq \sum_{y \in \mathbb{T}} h(y) < \infty.$$

Luego el supremo sobre todos los $\mathbb{T}_b^\emptyset$ es finito.

Notar además que el límite de h en cualquier rama de $\partial\mathbb{T}$ es 0 (tomar límite por una rama es tomar algunos términos de la suma de h).

3. El siguiente ejemplo es una aplicación de la propiedad 2 anterior. Se define $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ del siguiente modo

$$h(y) = \frac{1}{2^{|y|}}.$$

$(a_n)_n = (2^{-n})_n \in l^1$, por lo tanto h resulta sumable sobre subárboles binarios.

4. Veamos un cuarto ejemplo de función sumable sobre subárboles binarios pero donde el límite en $\partial\mathbb{T}$ no sea completamente nulo. Se eligen de $\partial\mathbb{T}$ las ramas asociadas a $\{0, m^{-1}, m^{-2}, \dots, m^{-k}, \dots\}$, los nodos que conforman estas ramas son aquellos cuyos dígitos en base m tienen a lo sumo un único 1 y todo el resto son 0. Sobre estos nodos se define $h(y) = |y|$ y sobre los otros nodos no involucrados $h(y) = 0$. Por ejemplo, $h(\emptyset 0001) = 4$ y $h(\emptyset 0011) = 0$. Notar que el límite sobre las ramas seleccionadas es ∞ .

Veamos que h es sumable sobre subárboles binarios. Dado $\mathbb{T}_b^\emptyset$ subárbol binario con raíz en $\emptyset$, calculamos

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ |y|=n}} h(y).$$

En la sumatoria sobre nodos de nivel n hay como mucho $n+1$ términos donde h vale $|y| = n$ y el resto son 0. Son los asociados a los nodos con n dígitos (100...00), (010...00), (001...00), ..., (000...10), (000...01) y (000...00), aquellos cuyo 1

apareció entre los primeros n dígitos o no apareció. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ |y|=n}} h(y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} n(n+1) < \infty.$$

La cota vale con todo subárbol $\mathbb{T}_b^\emptyset$, entonces h es sumable sobre subárboles binarios.

El ejemplo se puede modificar para admitir una cantidad finita de ramas con límite ∞ .

En base a esto parece ser que el límite de h sobre casi todas las ramas de $\partial\mathbb{T}$ es nulo. La siguiente proposición muestra que si h varía de forma «suave» sobre el árbol, entonces el límite sobre todas las ramas es nulo. Antes debemos darle un sentido a una función suave, necesitamos una métrica sobre $\mathbb{T}$.

Definición 30 (Métrica sobre $\mathbb{T}$). Un camino γ entre un par de nodos x e y de $\mathbb{T}$ es una secuencia finita de nodos, $\gamma = (x^n)_{n=1}^N$ donde $x^0 = x$ y $x^N = y$ o viceversa, y cada nodo en la secuencia es sucesor o pariente del nodo anterior, $x^n \in S(x^{n+1})$ si el camino está subiendo por el árbol, o $x^{n+1} \in S(x^n)$ si está bajando.

La longitud de un camino, $l(\gamma)$, se define de forma recursiva en base a la cantidad de nodos de la secuencia. Si la secuencia posee solamente 2 nodos y son iguales, entonces $l(\gamma) \equiv l(x, x) := 0$. Si γ posee solamente dos nodos y son distintos, $\gamma = (x, y)$, entonces x e y son parientes directos, digamos que y está debajo de x , o sea $y \in S(x)$, entonces la longitud del camino será

$$l(x, y) := m^{-|y|}.$$

Para un camino con más nodos intermedios, $\gamma = (x^n)_{n=1}^N$, la longitud será la suma de las distancias entre pares consecutivos de nodos

$$l(\gamma) = \sum_{n=1}^{N-1} l(x^n, x^{n+1}).$$

Definimos ahora la distancia entre dos pares de nodos x e y como el mínimo de las longitudes de caminos entre x e y :

$$d(x, y) := \min_{\gamma} l(\gamma).$$

Observación. Observar que esta métrica es discreta ya que fijado un $x \in \mathbb{T}$, el único nodo

del árbol a distancia estrictamente menor que $m^{-(|x|+1)}$ es solamente x . Esto es porque el nodo pariente de x está a distancia $m^{-|x|}$ y los sucesores de x están a distancia $m^{-(|x|+1)}$.

$$\left\{ y \in \mathbb{T} \mid d(x, y) < \frac{1}{m^{|x|+1}} \right\} = \{x\}.$$

De esta forma se concluye que cualquier función $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ será continua.

Una segunda observación es que el subárbol de $\mathbb{T}$ completo con raíz en un x , $\mathbb{T}^x$, es el conjunto de nodos a distancia menor que la suma de todas las distancias desde x hacia sus sendos descendientes,

$$\mathbb{T}^x = \left\{ y \in \mathbb{T} \mid d(x, y) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{|x|+n}} = \frac{1}{m^{|x|}(m-1)} \right\}.$$

Proposición 31. Si $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua, positiva y sumable sobre subárboles binarios, entonces converge a 0 en $\partial\mathbb{T}$

$$\lim_{y \rightarrow \pi \in \partial\mathbb{T}} h(y) = 0 \quad \forall \pi.$$

Demostración. La idea de la demostración será suponer que el límite superior es estrictamente positivo para alguna rama, eso implica que existirá una sucesión de nodos donde h será positiva. Usando la continuidad uniforme se podrá ver que h se mantiene positiva en todos los descendientes de alguno de los nodos de la sucesión y eso hará que no sea sumable sobre subárboles binarios.

Como h es positiva, alcanza con ver que

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \pi \in \partial\mathbb{T}} h(y) = 0 \quad \forall \pi.$$

Supongamos que existe una rama $\pi = (x^n)_n \in \partial\mathbb{T}$ tal que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h(x^n) = \eta > 0.$$

Entonces existe una subsucesión $(x^{n_i})_i$ con $|x^{n_i}| \geq i$ tal que $h(x^{n_i}) \geq \frac{\eta}{2}$.

Por otro lado, h es uniformemente continua y existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $|h(x) - h(y)| < \frac{\eta}{4}$. Hay que buscar un $i \in \mathbb{N}$ donde todos los sucesores de x^{n_i} estén a distancia menor que δ . Por la observación previa sabemos que todos los sucesores de x^{n_i} están a distancia $m^{-|x^{n_i}|}(m-1)^{-1}$, entonces tomando i suficientemente grande como

para que esta distancia sea menor a δ se obtendrá que para $y \in \mathbb{T}^{x_{n_i}}$ se tiene

$$h(y) > h(x^{n_i}) - \frac{\eta}{4} > \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{4} > 0.$$

Entonces

$$\inf_{y \in \mathbb{T}^{x_{n_i}}} h(y) \geq \frac{\eta}{4} > 0$$

y no puede ser sumable sobre subárboles binarios porque se contradice con la propiedad 1 de la proposición anterior. $\square$

A continuación mostraremos el teorema de existencia de solución del problema auxiliar, luego estudiaremos el comportamiento de la solución sobre el árbol.

4.3.2. solución del problema no homogéneo

Lema 32. Sean $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa y $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ solución de

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = 0, \end{cases}$$

con convergencia por niveles en $\partial\mathbb{T}$. Entonces la función $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

está bien definida, es decir h es sumable sobre subárboles binarios y, además, v converge por niveles a 0 en $\partial\mathbb{T}$.

Demostración. Sea $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $u(x) = F(u)(x) - h(x) \forall x$ y converge por niveles a 0 en $\partial\mathbb{T}$. Fijado un $x \in \mathbb{T}$, veamos que existe un subárbol binario $\mathbb{T}_b^{x*}$ tal que

$$u(x) = - \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x*}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Para este x vale $u(x) = F(u)(x) - h(x)$, donde

$$F(u)(x) = \min_{y, z \in S(x)} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)),$$

y el mínimo se alcanzará en dos sucesores de x , digamos x^0 y x^1 . Por lo que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}(u(x^0) + u(x^1)) - h(x) \\ &= \frac{1}{2}(F(u)(x^0) - h(x^0) + F(u)(x^1) - h(x^1)) - h(x) \\ &= \frac{1}{2}(F(u)(x^0) + F(u)(x^1)) - \left(h(x) + \frac{1}{2}(h(x^0) + h(x^1))\right). \end{aligned}$$

Con $F(u)(x^0)$ y $F(u)(x^1)$ se procede parecido, cada uno es un mínimo y por lo tanto existen sucesores $x^{00}, x^{01} \in S(x^0)$ e $x^{10}, x^{11} \in S(x^1)$ donde se alcanzan los mínimos de $F(u)(x^0)$ y $F(u)(x^1)$ respectivamente. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(u(x^{00}) + u(x^{01})) + \frac{1}{2}(u(x^{10}) + u(x^{11})) \right) - \left(h(x) + \frac{1}{2}(h(x^0) + h(x^1)) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^1 F(u)(x^{ij}) - \left(h(x) + \frac{1}{2}(h(x^0) + h(x^1)) + \frac{1}{4}(h(x^{00}) + h(x^{01}) + h(x^{10}) + h(x^{11})) \right). \end{aligned}$$

Si se siguen sucesivamente los mínimos originados en los $F(u)$ a partir del nodo x se obtendrá un subárbol binario con raíz x , $\mathbb{T}_b^{x*}$, donde para cada $y \in \mathbb{T}_b^{x*}$ los sucesores de este y en el subárbol, $\{y^0, y^1\} = S(y) \cap \mathbb{T}_b^{x*}$, cumplen $F(u)(y) = \frac{1}{2}(u(y^0) + u(y^1))$. Entonces repitiendo el argumento previo inductivamente se obtiene que

$$u(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^{x*} \\ |y|=|x|+n}} u(y) - \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^{x*} \\ |y| < |x|+n}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como u converge por niveles a 0, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ donde $|u|$ es menor a ε :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |u(y)| < \varepsilon \quad \forall |y| \geq n_0.$$

Entonces de la última expresión aplicada a $n \geq n_0 - |x|$ se obtiene

$$\left| u(x) + \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^{x*} \\ |y| < |x|+n}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^{x*} \\ |y|=|x|+n}} |u(y)| \leq \varepsilon,$$

debido a que hay 2^n nodos en $\mathbb{T}_b^{x*}$ de nivel $|x| + n$. Esto prueba que

$$-u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^{x*} \\ |y| < |x| + n}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x*}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Notar además que esta igualdad es independiente del nodo $x \in \mathbb{T}$ inicial, vale $\forall x \in \mathbb{T}$.

Volvamos a tomar un $x \in \mathbb{T}$ fijo y armemos su subárbol binario $\mathbb{T}_b^{x*}$ siguiendo los mínimos de $F(u)$ como antes. Veamos que este subárbol es donde se alcanza el supremo de $v(x)$, o sea

$$-u(x) = \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x*}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = v(x).$$

Como $\mathbb{T}_b^{x*}$ es un subárbol binario con raíz en x , es inmediato que $-u(x) \leq v(x)$. Supongamos que la desigualdad es estricta y por ende existe otro subárbol binario, $\mathbb{T}_b^{x**}$, donde

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x**}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} > -u(x). \quad (4.3)$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} -u(x) &= h(x) - F(u)(x) \\ &= h(x) + \max_{z^0, z^1 \in S(x)} \frac{1}{2} (-u(z^0) - u(z^1)) \\ &= h(x) + \max_{z^0, z^1 \in S(x)} \left(\sum_{y \in \mathbb{T}_b^{z^0*}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|z^0|}} + \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{z^1*}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|z^1|}} \right). \end{aligned}$$

Y por otro lado si llamamos x^0 y x^1 a los sucesores de x en $\mathbb{T}_b^{x**}$, podemos pensar a este subárbol como un nodo raíz adjunto a dos subárboles binarios con raíces en x^0 y x^1 ,

$$\mathbb{T}_b^{x**} = \{x\} \sqcup \mathbb{T}_b^{x^0**} \sqcup \mathbb{T}_b^{x^1**}.$$

Entonces podemos descomponer el promedio sobre $\mathbb{T}_b^{x**}$ separando en $h(x)$ y promedios sobre los subárboles binarios $\mathbb{T}_b^{x^0**}$ y $\mathbb{T}_b^{x^1**}$:

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x**}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = h(x) + \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^0**}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^0|}} + \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^1**}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^1|}}.$$

Entonces la desigualdad (4.3) se reescribe de esta forma

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^0}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^0|}} + \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^1}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^1|}} > \max_{z^0, z^1 \in S(x)} \left(\sum_{y \in \mathbb{T}_b^{z^0}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|z^0|}} + \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{z^1}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|z^1|}} \right).$$

Esto es una contradicción que termina de mostrar que el supremo en $v(x)$ es un máximo en realidad y se alcanza con el subárbol binario que rastrea los mínimos en $F(u)(x)$.

En resumen,

$$-u(x) = v(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Como u toma valores reales y converge por niveles a 0, se infiere de la igualdad que v sigue las mismas propiedades. $\square$

Lema 33. Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y sumable sobre subárboles binarios. Se define $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_x^b} \sum_{y \in \mathbb{T}_x^b} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Entonces, existe solución del problema

$$u(x) = F(u)(x) - h(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Además, si v converge puntualmente o por niveles a 0 en $\partial\mathbb{T}$, entonces la solución tiene el mismo tipo de convergencia.

Demostración. El candidato a solución es

$$u(x) = -v(x).$$

Es claro que u y v tendrán el mismo tipo de convergencia en $\partial\mathbb{T}$. Lo que resta ver es que $u(x) = F(u)(x) - h(x) \quad \forall x$.

Fijado $x \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T}_b^x$ subárbol binario, sean $x^0, x^1 \in S(x) \cap \mathbb{T}_b^x$ los sucesores de x que forman parte del árbol binario. Entonces se descompone al subárbol de la siguiente forma

$$\mathbb{T}_b^x = \{x\} \sqcup \mathbb{T}_b^{x^0} \sqcup \mathbb{T}_b^{x^1},$$

donde $\mathbb{T}_b^{x^0}$ y $\mathbb{T}_b^{x^1}$ son subárboles binarios con raíces en x^0 y x^1 respectivamente. Por lo tanto

$$-u(x) = \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = h(x) + \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^0}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^0|}} + \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^1}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^1|}}.$$

La descomposición del subárbol binario en raíz y dos subárboles binarios con raíces en los sucesores permite descomponer el supremo sobre todos los $\mathbb{T}_x^b$ en supremos sobre subárboles binarios con raíz en los sucesores y luego máximo entre los sucesores, es decir,

$$\begin{aligned} -u(x) &= h(x) + \max_{x^0, x^1 \in S(x)} \sup_{\mathbb{T}_b^{x^0}, \mathbb{T}_b^{x^1}} \left[\frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^0}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^0|}} + \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^{x^1}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x^1|}} \right] \\ &= h(x) + \max_{x^0, x^1 \in S(x)} \frac{1}{2} (-u(x^0) - u(x^1)). \end{aligned}$$

Resulta

$$u(x) = -h(x) + \min_{x^0, x^1 \in S(x)} \frac{1}{2} (u(x^0) + u(x^1)) = F(u)(x) - h(x)$$

como se quería mostrar. $\square$

Teorema 34 (Existencia de solución del problema auxiliar con límite nulo). *Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y sumable sobre subárboles binarios. Entonces, existe solución con convergencia por niveles del problema*

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = 0, \end{cases}$$

si y solo si $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

converge a 0 por niveles.

Demostración. Se sigue de los Lemas 32 y 33. $\square$

Corolario 35. *Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa. Entonces existe solución del problema con límite por niveles constante $c \in \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = c, \end{cases}$$

si y solo si h es sumable sobre subárboles binarios y $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

converge a 0 por niveles.

Demostración. Si hay solución para cualquier $c \in \mathbb{R}$, en particular hay solución con $c = 0$. Y si hay solución u con límite nulo, dado un $c \in \mathbb{R}$ la función $u + c$ es solución del problema con límite c . $\square$

Teorema 36 (Existencia y unicidad de solución del problema auxiliar con límite continuo). Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y sumable sobre subárboles binarios. Entonces $v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$ converge por niveles a 0 si y solo si existe solución del problema no homogéneo con convergencia por niveles en $\partial\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} u(x) = F(u)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Demostración. Asumamos primero que hay solución del problema no homogéneo con cualquier función continua. En particular con la función constante 0 habrá solución, y, por el teorema 34, v converge por niveles a 0.

Ahora asumamos que v converge por niveles y tomemos $g \in C[0, 1]$ una función continua, el objetivo será ver que hay solución con límite g . Usaremos el mismo argumento usado en la demostración del problema del l -autovalor homogéneo donde se aproximó g por funciones escalón, se encontró solución para estas funciones y luego se tomó límite.

Se define para cada $i \in \mathbb{N}$ una partición del intervalo $[0, 1]$ de m^i porciones de igual longitud

$$I_k = \left[\frac{k}{m^i}, \frac{k+1}{m^i} \right) \quad 0 \leq k < m^i - 1, \\ I_{m^i-1} = \left[\frac{m^i-1}{m^i}, 1 \right].$$

Sobre la clausura de cada uno de estos intervalos se toma el mínimo de g :

$$\mu_k = \min_{r \in \overline{I_k}} g(r) \quad 0 \leq k \leq m^i - 1.$$

Y se define una función acotada $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_i(r) = \sum_{k=0}^{m^i-1} \mu_k x_{I_k}(r).$$

Construimos para cada $i \in \mathbb{N}$ una solución u_i del problema (con convergencia por niveles)

$$\begin{cases} u_i(x) = F(u_i)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u_i|_{\partial\mathbb{T}} = g_i. \end{cases}$$

Sean $x_0, x_1, \dots, x_{m^i-1}$ los nodos de $\mathbb{T}$ de nivel i y para cada $0 \leq k \leq m^i - 1$, $\mathbb{T}^k$ el subárbol de $\mathbb{T}$ con raíz en x_k y que contiene a todos los nodos debajo de x_k . Por hipótesis, hay solución del problema partiendo de $\mathbb{T}^k$ para todo k .

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(x) = F(\tilde{u}_k)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}^k, \\ \tilde{u}_k|_{\partial\mathbb{T}^k} = \mu_k. \end{cases}$$

Se define u_i de forma recursiva. Para $|x| \geq i$ existe un único $0 \leq k \leq m^i - 1$ tal que $x \in \mathbb{T}^k$ y se asigna $u_i(x) = \tilde{u}_k(x)$. Para $|x| = i - 1$, como u_i ya tiene definición en $S(x)$, $F(u_i)(x)$ es calculable y se puede asignar $u_i(x) = F(u_i)(x) - h(x)$. Se continúa esta construcción decreciendo el nivel, si u_i está definida para los nodos de nivel n y superior (con $1 \leq n < i$ fijo), entonces fijado un $x \in \mathbb{T}$ con $|x| = n - 1$, $F(u_i)(x)$ está bien definido y se asigna $u_i(x) = F(u_i)(x)$.

Es claro que con esta construcción vale que $u_i(x) = F(u_i)(x) \forall x \in \mathbb{T}$ ya que si $|x| \geq i$, $u_i(x) = \tilde{u}_k(x) = F(\tilde{u}_k)(x)$ para algún único k , y si $|x| < i$ se asignó $u_i(x) = F(u_i)(x)$.

Veamos que u_i converge por niveles a g_i en $\partial\mathbb{T}$. Sea $\varepsilon > 0$, para cada $0 \leq k \leq m^i - 1$, $\tilde{u}_k$ converge por niveles a μ_k y existe n_k nivel en el árbol $\mathbb{T}^k$ donde

$$|\tilde{u}_k(x) - \mu_k| < \varepsilon$$

si $|x| \geq n_k$ y $x \in \mathbb{T}^k$. Estos n_k son niveles relativos a los nodos x_k que tienen nivel i sobre $\mathbb{T}$, vistos en el árbol original $\mathbb{T}$ serían niveles $i + n_k$. Tomemos entonces el más grande de estos niveles $n = i + \max_{0 \leq k \leq m^i-1} n_k$ y $x \in \mathbb{T}$ con $|x| \geq n$, este x vivirá en un único $\mathbb{T}^k$ ($0 \leq k \leq m^i - 1$) y se tendrán que $\psi(x) \in I_k$ y $g_i(\psi(x)) = \mu_k$. Así,

$$|u_i(x) - g_i(\psi(x))| = |\tilde{u}_k(x) - \mu_k| < \varepsilon.$$

Como $g_i \Rightarrow g$ y armamos soluciones del problema u_i con dato g_i . Gracias al enunciado (5) de la Propiedad 14 en la página 22 existirá una $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ solución del problema que converge por niveles a g en $\partial\mathbb{T}$.

Por último, la unicidad del problema se deduce a partir del principio de comparación de la misma forma que en las pruebas anteriores de unicidad. Si se tuvieran dos soluciones u_1, u_2 , con el mismo dato de borde g , en particular se tiene que con $\bar{u} = u_1$ y $\underline{u} = u_2$ se cumplen las hipótesis del lema de comparación, Teorema 13 en la página 20. Por lo tanto se llega a $u_1 \geq u_2$. Como los roles de u_1 y u_2 son simétricos, se obtiene la igualdad: $u_1 = u_2$. $\square$

Corolario 37. Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva. Se define la siguiente sucesión que suma los valores de h por niveles

$$a_n = \sum_{|y|=n} h(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Si $\left(\frac{a_n}{2^n}\right)_n \in l^1$, entonces h es sumable sobre subárboles binarios. Y si además $(a_n)_n \in l^1$, entonces la solución del m -autovalor no homogéneo tiene límite nulo y por niveles.

Demostración. Para ver que es sumable, se elige un $\mathbb{T}_b^\emptyset$ subárbol binario con raíz en $\emptyset$ y

$$\sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^n} \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n} < \infty.$$

Tomando supremo sobre los $\mathbb{T}_b^\emptyset$ se llega a lo buscado.

Para el límite, veamos que

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

converge por niveles a 0. Observar que podemos escribir

$$v(x) = \sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}}.$$

Dado $\mathbb{T}_b^x$ un subárbol binario cualquiera con raíz en x , se puede acotar la suma sobre

$\mathbb{T}_b^x$ por la suma en todo el árbol:

$$\sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}} \leq \sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}} = \sum_{n \geq |x|} \frac{a_n}{2^{n-|x|}} \leq \sum_{n \geq |x|} a_n.$$

La cota vale $\forall \mathbb{T}_b^x$, entonces pasa al supremo,

$$v(x) \leq \sum_{n \geq |x|} a_n \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

A partir de aquí se ve rápidamente que la convergencia de v a 0 en $\partial\mathbb{T}$ es por niveles. $\square$

Ejemplo 38. Veremos ejemplos de h definidas por niveles y obtendremos condiciones suficientes y necesarias para el problema no homogéneo.

1. Sea $(c_n)_n$ una sucesión de términos no negativos y $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por niveles,

$$h(x) = c_{|x|} \quad \forall x.$$

Calculemos $v(x)$. Fijado un $x \in \mathbb{T}$ y cualquier subárbol binario $\mathbb{T}_b^x$ se tiene que

$$\sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = \sum_{n \geq |x|} c_n.$$

Esto vale independientemente del árbol, entonces

$$v(x) = \sum_{n \geq |x|} c_n.$$

Así, se concluye que habrá solución del problema no homogéneo con límite continuo si y solo si $(c_n)_n \in l^1$.

- a) Con $c_n = \frac{1}{\theta^n}$ y $\theta \in \mathbb{R} > 1$, $(c_n)_n \in l^1$ y la solución con límite nulo es

$$-v(x) = - \sum_{n \geq |x|} \frac{1}{\theta^n} = \frac{1}{\theta^{|x|}(\theta - 1)}.$$

- b) Con $c_n = \frac{1}{n^k}$ y $k \geq 2$, también hay solución pero la expresión de la solución es más compleja.

2. Modifiquemos sutilmente el ejemplo anterior. Fijamos un subárbol binario $\mathbb{T}_b^\emptyset$ cualquiera y tomamos $(c_n)_n$ una sucesión no negativa. Definimos $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ concentrada en $\mathbb{T}_b^\emptyset$:

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin \mathbb{T}_b^\emptyset \\ c_{|y|} & \text{si } y \in \mathbb{T}_b^\emptyset \end{cases}.$$

Al igual que el ejemplo anterior, se puede calcular exactamente el valor de v en cada nodo. Tomemos $x \notin \mathbb{T}_b^\emptyset$, entonces h sobre todo el subárbol completo $\mathbb{T}^x$ es nula y por ello $v(x) = 0$. Sea ahora $x \in \mathbb{T}_b^\emptyset$, veamos que el supremo dentro de $v(x)$ es en realidad un máximo y se alcanza en $\mathbb{T}_b^x = \mathbb{T}^x \cap \mathbb{T}_b^\emptyset$, el subárbol binario con raíz x que está contenido en $\mathbb{T}_b^\emptyset$. Fijado algún otro subárbol binario con raíz x , $\widetilde{\mathbb{T}}_b^x$, como h es nula fuera de $\mathbb{T}_b^\emptyset$ se tiene que

$$\sum_{y \in \widetilde{\mathbb{T}}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} = \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x \cap \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \leq \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

La cota vale para cualquier $\widetilde{\mathbb{T}}_b^x$, entonces

$$v(x) = \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Podemos calcular de forma exacta el valor de v en cada nodo de $\mathbb{T}_b^\emptyset$

$$v(x) = \sum_{\substack{n \geq |x| \\ |y|=n}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}} = \sum_{n \geq |x|} c_n.$$

En total,

$$v(x) = \begin{cases} \sum_{n \geq |x|} c_n & \text{si } x \in \mathbb{T}_b^\emptyset, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por lo que habrá solución con límite continuo si y solo si $(c_n)_n \in l^1$. Veamos otros ejemplos.

a) Con $c_n = \frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha > 0$ la solución con límite por niveles nulo es

$$-v(x) = \begin{cases} -\sum_{n \geq |x|} c_n & \text{si } x \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2^{|x|-1}} & \text{si } x \in \mathbb{T}_b^\emptyset \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

b) Con $c_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, la solución es

$$-v(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|} & \text{si } x \in \mathbb{T}_b^\emptyset, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

3. El siguiente ejemplo es una última modificación del anterior. Ahora se fija una rama $\pi \in \partial \mathbb{T}$, y también se toma $(c_n)_n$ sucesión de términos no negativos. Se define $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ concentrada en la rama π

$$h(x) = \begin{cases} c_{|x|} & \text{si } x \in \pi, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Al igual que en el ejemplo anterior se concluye que si $x \notin \pi$, $v(x) = 0$; pero si $x \in \pi$

$$v(x) = \sum_{n \geq |x|} \sum_{\substack{y \in \mathbb{T}_b^x \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^{n-|x|}} = \sum_{n \geq |x|} \frac{c_n}{2^{n-|x|}}.$$

Si esta función converge a 0 (y lo hará por niveles porque depende solamente de $|x|$), entonces $c_n \leq \sum_{i \geq n} \frac{c_i}{2^{i-n}} \rightarrow 0$ también. Y si $c_n \rightarrow 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ donde $c_n < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_0$. Entonces usando $n \geq n_0$

$$\sum_{i \geq n} \frac{c_i}{2^{i-n}} \leq \sum_{i \geq n} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2^{i-n}} = \varepsilon.$$

O sea, que hay solución del problema no homogéneo con límite por niveles y continuo si y solo si $(c_n)_n \in c_0$.

4.3.3. l -autovalor no homogéneo

Los resultados del m -autovalor no homogéneo son los estrictamente necesarios para abordar el problema de Monge-Ampere. Sin embargo, notamos que se pueden generalizar al caso del l -autovalor, con $2 \leq l \leq m$, de forma inmediata.

El problema a tratar es

$$\begin{cases} u(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (4.4)$$

Con $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva al igual que antes. Y el operador asociado es

$$F_l - h : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T}) \quad (F_l - h)(u)(x) = F_l(u)(x) - h(x).$$

Siendo F_l el operador del l -autovalor

$$F_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)).$$

Al igual que el operador del m -autovalor no homogéneo, es inmediato ver que este operador es acotado por promedios y saca constantes, por lo tanto también valen todas las propiedades del Capítulo 2.

Para el problema del m -autovalor no homogéneo, el operador es

$$F_m(u)(x) = \min_{y,z \in S(x)} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)),$$

y la estructura con la que derivamos los resultados fue el supremo de sumas de promedios sobre subárboles binarios,

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Notar el paralelismo entre las expresiones: una tiene un mínimo y en la otra aparece un supremo, y como el mínimo elige dos sucesores de cada x , el supremo se toma sobre subárboles binarios. Siguiendo este paralelismo, la estructura a usar en esta sección tendrá que tomar primero una elección de l sucesores y luego tomar 2 entre ellos. Introducimos la definición de un l -subárbol con la que tomaremos esta primera elección de l sucesores.

Definición 39 (l -subárbol). Sea $\mathbb{T}$ un árbol de m ramas, $x \in \mathbb{T}$ y $2 \leq l \leq m$. Un subárbol de l ramas (o simplemente l -subárbol) con raíz en x es un subárbol con raíz en x y donde cada nodo tiene exactamente l sucesores. Notaremos $\mathbb{T}_l^x$ a estos subárboles.

La estructura clave de esta sección es, fijado un $x \in \mathbb{T}$,

$$\inf_{\mathbb{T}_l^x \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_l^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

Donde el primer ínfimo se toma sobre todos los l -subárboles dentro de $\mathbb{T}$, y el supremo se toma sobre los subárboles binarios dentro del l -subárbol anterior. Esta expresión refleja la elección de 2 sucesores entre l que aparece en el operador del l -autovalor.

Definición 40 (Función l -sumable). Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa. Diremos que h es l -sumable si

$$\inf_{\mathbb{T}_l^x \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_l^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Notar que en el caso particular $l = m$, una función m -sumable es una sumable sobre subárboles binarios.

Al igual que con subárboles binarios, se tiene que una función es l -sumable con raíz en cualquier x si y solo si es l -sumable con raíz en el nodo primogénito

$$\inf_{\mathbb{T}_l^0 \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^0 \subseteq \mathbb{T}_l^0} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^0} \frac{h(y)}{2^{|y|}} < +\infty.$$

Proposición 41. Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa. Entonces si h es l -sumable, también es $(l-1)$ -sumable $\forall 3 \leq l \leq m$. En particular, las funciones sumables sobre subárboles binarios son l -sumables $\forall 2 \leq l \leq m$.

Demostración. Sea $3 \leq l \leq m$, $x \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}_l^x$ un l -subárbol y a partir de este se extrae un $(l-1)$ -subárbol $\mathbb{T}_{l-1}^x$. Entonces como todo subárbol binario dentro de $\mathbb{T}_{l-1}^x$ es un subárbol binario dentro de $\mathbb{T}_l^x$, se tiene

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_l^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \geq \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_{l-1}^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \geq \inf_{\mathbb{T}_{l-1}^x} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_{l-1}^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

La cota vale para todo $\mathbb{T}_l^x$ l -subárbol, entonces pasa al ínfimo

$$+\infty > \inf_{\mathbb{T}_l^x} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_{l-1}^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}} \geq \inf_{\mathbb{T}_{l-1}^x} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_{l-1}^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}.$$

□

Ejemplo 42. Este es un ejemplo de una función h sobre un árbol con 3 sucesores que es 2-sumable pero no 3-sumable. Fijemos del árbol a $\widetilde{\mathbb{T}}_b^\emptyset$ el subárbol binario que siempre toma los sucesores con dígitos 0 y 1, los dos de la izquierda, y definimos

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \widetilde{\mathbb{T}}_b^\emptyset, \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Es inmediato notar que h es 2-sumable. Como $k = 2$, se toma ínfimo sobre 2-subárboles y luego supremo sobre subárboles binarios dentro del 2-subárbol, el supremo es redundante.

$$\inf_{\mathbb{T}_2^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}_2^\emptyset} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \inf_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}}$$

Y usando en particular el subárbol $\widetilde{\mathbb{T}}_b^\emptyset$, se obtiene

$$\inf_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} \leq \sum_{y \in \widetilde{\mathbb{T}}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = 0$$

mostrando que h es 2-sumable.

Notar que con $k = 3$, hay que tomar ínfimo sobre 3-subárboles dentro del árbol de 3 ramas $\mathbb{T}$, hay un único 3-subárbol dentro de $\mathbb{T}$ y es todo $\mathbb{T}$, ahora el ínfimo es redundante.

$$\inf_{\mathbb{T}_3^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}_3^\emptyset} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}}.$$

Por la definición de h , este supremo se alcanza armando un subárbol binario $\widehat{\mathbb{T}}_b^\emptyset$ que contenga todos los sucesores de dígito 3, entonces

$$\sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{y \in \widehat{\mathbb{T}}_b^\emptyset \\ |y|=n}} \frac{h(y)}{2^n}.$$

Como hay 2^{n-1} nodos de nivel n donde h no es nula dentro de $\widehat{\mathbb{T}}_b^\emptyset$,

$$\sup_{\mathbb{T}_b^\emptyset \subseteq \mathbb{T}} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^\emptyset} \frac{h(y)}{2^{|y|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Es decir, h no es 3-sumable.

Este ejemplo se puede generalizar a un árbol de m sucesores para mostrar la existen-

cia de funciones h que sean $(l-1)$ -sumables pero no l -sumables $\forall 3 \leq l \leq m$.

De forma análoga y con similares demostraciones al problema del m autovalor no homogéneo, se obtienen resultados análogos a los anteriores. El más importante de ellos es el siguiente teorema de existencia y unicidad que enunciaremos sin demostración.

Teorema 43. *Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa. Entonces existe una única solución del problema con convergencia por niveles en $\partial\mathbb{T}$*

$$\begin{cases} u(x) = F_l(u)(x) - h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

$\forall g \in C[0,1]$ si y solo si h es l -sumable y la función $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \inf_{\mathbb{T}_l^x \subseteq \mathbb{T}} \sup_{\mathbb{T}_b^x \subseteq \mathbb{T}_l^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}},$$

converge por niveles a 0 en $\partial\mathbb{T}$.

5 Diferencias entre soluciones del l autovalor y el laplaciano

En este capítulo veremos algunas diferencias notables entre los problemas de Dirichlet para el Laplaciano y el l -autovalor.

5.1. Principio de comparación fuerte

La primera diferencia a analizar es el principio de comparación fuerte, es decir, nos preguntamos si para dos funciones continuas $\tilde{g}$ y g , una mayor que la otra $\tilde{g} \geq g$, y no idénticamente iguales, se tiene que sus soluciones del l -autovalor asociadas, $u_{\tilde{g}}$ y u_g , se comparan de forma estricta en el nodo raíz, $u_{\tilde{g}}(\emptyset) \succ u_g(\emptyset)$.

Teniendo la expresión de la solución del l -autovalor para datos monótonos, es sencillo ver que este principio no vale a diferencia de lo que pasa para el problema del Laplaciano. Supongamos que g es creciente, entonces su solución evaluada en el nodo primogénito es

$$u_g(\emptyset) = \int_0^1 g(r) df(r)$$

con f la función de Cantor, construcción creciente. Como $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$ es unión de numerables intervalos, se puede escoger alguno de ellos y sobre él modificar sutilmente la función g a una $\tilde{g}$ manteniendo el carácter creciente y logrando $\tilde{g} \geq g$. Como la modificación se realiza en un intervalo donde f es constante, la integral sobre ese intervalo es nula y las soluciones asociadas serán iguales en este nodo.

Tomemos un ejemplo puntual. Sea $g(x) = x$ función continua y creciente, $m = 5$ y $l = 3$. Un intervalo disjunto con el conjunto $\mathcal{C}$ asociado es $[0, \frac{1}{5}]$ y allí se puede alterar g del siguiente modo:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 5x\left(\frac{2}{5} - x\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{5}\right], \\ x & \text{si } x \in \left(\frac{1}{5}, 1\right]. \end{cases}$$

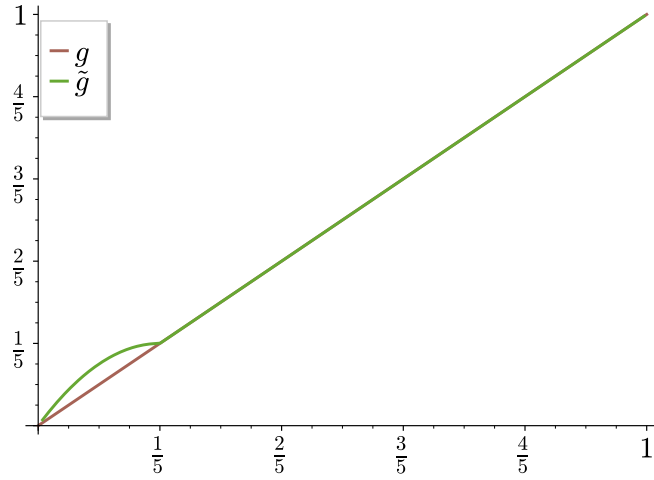


Figura 5.1: Gráfico de g y $\tilde{g}$

Esta función $\tilde{g}$ es continua, creciente, $\tilde{g} \geq g$ y son distintas. Sin embargo, se tiene

$$u_g(\emptyset) = \int_0^1 g(r) df(r) = \int_{\frac{1}{5}}^1 g(r) df(r) = \int_{\frac{1}{5}}^1 \tilde{g}(r) df(r) = \int_0^1 \tilde{g}(r) df(r) = u_{\tilde{g}}(\emptyset).$$

5.2. Principio del máximo fuerte

Hemos mostrado en el Capítulo 3 que para la ecuación del Laplaciano se cumple el principio del máximo fuerte. En el caso del l -autovalor, este principio solamente vale en el caso particular $l = 2$, con $3 \leq l \leq m$ no es válido.

Proposición 44. *La ecuación del 2-autovalor cumple el principio del máximo fuerte. Es decir, si u es una solución no negativa de*

$$u(x) = F_2(u)(x),$$

y existe un $x \in \mathbb{T}$ donde $u(x) = 0$, entonces u es nula en todo el subárbol con raíz en x , $\mathbb{T}^x$.

Demostración. Sean u y x como en las hipótesis. Entonces

$$0 = u(x) = F_2(u)(x) = \max_{\substack{y, z \in S(x) \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)).$$

El máximo se obtiene usando los dos nodos donde u es mayor, como $u \geq 0$ obtenemos

en particular

$$0 = \max_{y \in S(x)} u(y).$$

De lo que se concluye inmediatamente $u(y) = 0$ sobre todo $y \in S(x)$. Aplicando este razonamiento a todos los descendientes de x se obtiene $u(y) = 0$ en $\mathbb{T}^x$. $\square$

Como adelantamos, este principio no es cierto con $3 \leq l \leq m$. Definimos

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x) \text{ tiene un dígito en base } m \text{ que es } \geq m+2-l, \\ 0 & \text{si no ó } x = \emptyset. \end{cases}$$

Observar que como $l \geq 3$, $m+2-l \leq m-1$ y u está bien definida. Para fijar ideas, usando $m = 5$ y $l = 4$ esta u se traduce a

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x) \text{ tiene un dígito 3 o 4 en base } m, \\ 0 & \text{si no ó } x = \emptyset. \end{cases}$$

Veamos que esta u es solución de $u = F_l(u)$. Empecemos tomando un x donde $\psi(x)$ tiene un dígito $\geq m+2-l$ en base m (3 o 4 del ejemplo), entonces todos los descendientes comparten este mismo dígito mayor a $m+2-l$ y $u(y) = 1$ debajo de x , para todo $y \in \mathbb{T}^x$.

Por otro lado, si tomamos un x tal que los dígitos de $\psi(x)$ son todos $\leq m+1-l$ (0, 1 o 2 del ejemplo), entonces ψ sobre los sucesores $x_0, x_1, \dots, x_{m+1-l}$ (x_0, x_1 y x_2) tampoco tienen dígitos $\geq m+2-l$ y obtenemos

$$u(x_k) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq m+1-l.$$

En cambio con los sucesores $x_{m+2-l}, \dots, x_{m-1}$ (x_3 y x_4) ocurre lo opuesto,

$$u(x_k) = 1 \quad \forall m+2-l \leq k \leq m-1.$$

Así en el operador

$$F_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (u(y) + u(z)),$$

el máximo se tomará con los últimos l sucesores, donde u toma los valores más grandes, $x_{m-l}, x_{m-l+1}, \dots, x_{m-1}$; y el mínimo se alcanzará con los primeros dos sucesores dentro

de estos l , donde u toma los valores más chicos, x_{m-l} y x_{m-l+1} .

$$u(x_0) = 0, u(x_1) = 0, \dots, \underbrace{u(x_{m-l}) = 0, u(x_{m-l+1}) = 0}_{F_l=0}, \overbrace{u(x_{m-l+2}) = 1, \dots, u(x_{m-1}) = 1}^S.$$

Entonces

$$F_l(u)(x) = \frac{1}{2}(u(x_{m-l}) + u(x_{m-l+1})) = 0 = u(x).$$

Verificar el caso con $x = \emptyset$ es muy parecido al anterior.

Es claro que esta u es un contraejemplo para el principio del máximo fuerte. Por ejemplo, $u(\emptyset) = 0$ pero u no es nula en todo el árbol.

5.3. Soluciones con límite nulo en casi todo punto

El propósito de este apartado es construir soluciones del l -autovalor cuyo límite en $\partial\mathbb{T}$ sea una función nula en casi todo punto (Lebesgue), luego calcular la solución del Laplaciano con esta función límite y compararlas.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ y $l < m$. Se define la siguiente función $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si alguno de los dígitos de } \psi(x) \text{ en base } m \text{ es nulo,} \\ 1 & \text{si todos los dígitos de } \psi(x) \text{ en base } m \text{ son no nulos,} \\ 1 & \text{si } x = \emptyset. \end{cases}$$

Veamos que u es solución del l -autovalor:

$$u(x) = F_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y, z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)).$$

Se toma un $x \in \mathbb{T}$, si $\psi(x)$ tiene algún dígito nulo en su escritura en base m , entonces todos los sucesores de x también tendrán un dígito nulo, $u(y) = 0 \forall y \in S(x) \cup \{x\} \implies F_l(u)(x) = 0 = u(x)$. Si $\psi(x)$ no tiene ningún dígito nulo, entonces solamente $\psi(x_0)$, el primer sucesor, tendrá un dígito nulo. Se tiene que $u(x) = 1$, $u(x_k) = 1$, $1 \leq k \leq m-1$ y

$u(x_0) = 0$; gracias a que $l < m$ se llega a $F_l(u)(x) = 1 = u(x)$.

$$u(x_0) = 0, u(x_1) = 1, \dots, u(x_{m-l-1}) = 1, \underbrace{u(x_{m-l}) = 1, u(x_{m-l+1}) = 1, \dots, u(x_{m-1}) = 1}_{F_l=1}.$$

Es directo notar que el límite de esta función es la función indicadora del conjunto

$$A = \left\{ r \in [0, 1] \mid \text{ningún dígito de } r \text{ en base } m \text{ es nulo} \right\}.$$

Para calcular su medida se nota que para cada $i \in \mathbb{N}$, A está incluido en

$$A \subseteq \left\{ r \in [0, 1] \mid \text{ninguno de los primeros } i \text{ dígitos de } r \text{ es nulo} \right\}.$$

Este conjunto se puede reescribir como la unión casi disjunta de intervalos de la forma $r + [0, m^{-i}]$ donde $r = \sum_{j=1}^i \frac{d_j}{m^j}$, $d_j \in \{1, \dots, m-1\}$. Al tener i posiciones y $m-1$ posibles dígitos para cada posición, hay $(m-1)^i$ posibles r y la medida de la unión sobre todos los r es $(m-1)^i m^{-i}$. Entonces

$$|A| \leq (m-1)^i m^{-i} \quad \forall i \implies |A| = 0.$$

Tenemos una función no idénticamente nula que es solución del problema del l -autovalor en el árbol y cuyo límite es nulo en casi todo punto.

Sin embargo, para el Laplaciano usual vimos que existe una única solución del problema

$$\begin{cases} v(x) = \frac{1}{m} \sum_{x_k \in S(x)} v(x_k) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ v|_{\partial \mathbb{T}} = \chi_A \end{cases}$$

que viene dada por

$$v(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} \chi_A(r) dr. \quad (5.1)$$

Como χ_A es cero en casi todo punto, la solución resulta ser $v \equiv 0$ en todo el árbol.

Observamos que estas dos soluciones incluso se diferencian en el nodo primogénito ya que $u(\emptyset) = 1$ y $v(\emptyset) = 0$.

En el caso $l = m$ se usa

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si todos los dígitos de } \psi(x) \text{ en base } m \text{ son } 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{si } x = \emptyset \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $l = m$ el máximo del operador es redundante y la ecuación que debería resolver es

$$u(x) = F_m(u)(x) = \min_{\substack{y, z \in S(x) \\ y \neq z}} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)).$$

Sea $x \in \mathbb{T}$ con $\psi(x)$ que tiene algún dígito distinto a 0 o 1, entonces todos los sucesores de x también tendrán un dígito así y $u(y) = 1 \ \forall y \in S(x) \cup \{x\}$ y $F_m(u)(x) = 1 = u(x)$. En cambio si todos los dígitos de $\psi(x)$ son 0 o 1, solamente sobre los sucesores x_0 y x_1 se conserva esta propiedad, con el resto no; $u(x) = u(x_0) = u(x_1) = 0$ y $u(x_k) = 1, \ 2 \leq k \leq m-1$. Luego, $F_m(u)(x) = 0 = u(x)$.

$$\underbrace{u(x_0) = 0, \quad u(x_1) = 0, \quad u(x_2) = 1, \quad \dots, \quad u(x_{m-1}) = 1}_{F_m=0}.$$

Definiendo

$$B = \left\{ r \in [0, 1] \mid \text{todos los dígitos de } r \text{ en base } m \text{ son } 0 \text{ o } 1 \right\}$$

se ve que $u|_{\partial\mathbb{T}} = 1 - \chi_B$. Esta vez,

$$B \subseteq \left\{ r \in [0, 1] \mid \text{los primeros } i \text{ dígitos de } r \text{ son } 0 \text{ o } 1 \right\}$$

que es unión de 2^i intervalos de longitud m^{-i} , entonces $|B| = 0$. En este caso, se obtuvo una solución no constantemente 1 pero cuyo límite es 1 en casi todo punto.

Usando $1 - \chi_B$ como función dato para el problema del Laplaciano, la solución que resulta de la fórmula explícita es

$$v(x) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} (1 - \chi_B)(r) dr \equiv 1.$$

En este caso, las dos soluciones también se diferencian en el primer nodo, ya que se tiene $u(\emptyset) = 0$ y $v(\emptyset) = 1$.

6 Monge-Ampere

6.1. El operador de Monge-Ampere

En este capítulo estudiamos la ecuación de Monge-Ampere en el árbol,

$$\begin{cases} \prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) = h(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (6.1)$$

con

$$\Lambda_l(u)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - u(x) = F_l(u)(x) - u(x)$$

el operador del l -autovalor ($2 \leq l \leq m$) y $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa. Particularmente buscamos soluciones convexas, es decir con

$$\Lambda_m(u)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Como a partir de un $S \subseteq S(x)$ de cardinal l se puede extraer un $\tilde{S}$ de cardinal $l-1$,

$$\begin{aligned} \Lambda_{l-1}(u)(x) &= \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l-1}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - u(x) \\ &\geq \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{y,z \in S} \frac{1}{2}(u(y) + u(z)) - u(x) = \Lambda_l(u)(x). \end{aligned}$$

Es decir, los operadores se ordenan del siguiente modo

$$\Lambda_m \leq \Lambda_{m-1} \leq \cdots \leq \Lambda_3 \leq \Lambda_2,$$

y buscar soluciones convexas es equivalente a $\Lambda_l(u)(x) \geq 0 \ \forall l$.

Proposición 45 (Operador equivalente a MA). *Sea $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa.*

Se tiene que $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de

$$\prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{T} \quad (6.2)$$

si y solo si

$$u(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_{l=2}^m a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Donde $\tilde{h} = (m-1)h^{(m-1)^{-1}}$.

Demostración. La demostración se basa en una identidad sobre vectores con coordenadas no negativas de $\mathbb{R}^{m-1}$. Para un vector $(b_2, \dots, b_m)$ con $b_l \geq 0 \forall l$ vale

$$(m-1)(b_2 \cdots b_m)^{\frac{1}{(m-1)}} = \inf_{\substack{a_2 \cdots a_m = 1 \\ a_l > 0}} \sum_{l=2}^m a_l b_l. \quad (6.3)$$

Esta igualdad se deriva fijando los b_l y encontrando el mínimo de la función $f(a_2, \dots, a_m) = \sum_{l=2}^m a_l b_l$ restringida a la región $\{(a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid a_l \geq 0 \forall l, \prod_{l=2}^m a_l = 1\}$, con el método de multiplicadores de Lagrange.

Aplicando este resultado con $b_l = \Lambda_l(u)(x) \geq 0$ se obtiene

$$(m-1) \left(\prod_{l=2}^m \Lambda_l(u)(x) \right)^{\frac{1}{m-1}} = \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l \Lambda_l(u)(x).$$

Por lo que (6.2) es equivalente a

$$\tilde{h}(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l \Lambda_l(u)(x),$$

con $\tilde{h}(x) := (m-1)(h(x))^{\frac{1}{m-1}}$.

gracias a que $\Lambda_l(u)(x) \geq 0$.

Veamos que son equivalentes

$$\tilde{h}(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)) \iff u(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right].$$

Primero veamos que

$$\tilde{h}(x) \leq \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)) \iff u(x) \leq \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right].$$

La desigualdad del lado izquierdo es equivalente a que $\tilde{h}(x)$ sea cota de cualquier suma:

$$\tilde{h}(x) \leq \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x))$$

y reordenando esta desigualdad se llega a que $u(x)$ es cota de cualquier suma de su lado derecho:

$$u(x) \leq \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right].$$

Ahora veamos que las igualdades son equivalentes. Empecemos viendo que si $\tilde{h}$ cumple la igualdad de su lado, entonces u cumplirá la del suyo. Gracias al párrafo anterior, solamente resta ver que u es la mejor cota de los elementos de su correspondiente ínfimo. Dado $\varepsilon > 0$, existen unos $a_2, \dots, a_m > 0$ con $\prod_l a_l = 1$ tales que

$$\sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)) \leq \tilde{h}(x) + (m-1)\varepsilon.$$

Despejando u se llega a

$$\frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] \leq u(x) + \varepsilon \frac{m-1}{\sum_l a_l}.$$

Y como $\sum_l a_l \geq m-1$ si $\prod_l a_l = 1$ y $a_2, \dots, a_m > 0$ (usando la fórmula (6.3) con $b_2 = \dots = b_m = 1$),

$$\frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] \leq u(x) + \varepsilon.$$

Queda mostrado que efectivamente $u(x)$ es igual al ínfimo de las sumas $\frac{1}{\sum_l a_l} [\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x)]$. Ahora veamos al revés, si del lado de $u(x)$ hay una igualdad, entonces del lado de $\tilde{h}$ también. Usaremos sucesiones para esta implicación: existen sucesiones de términos positivos $(a_l^i)_i$ para cada $2 \leq l \leq m$ tales que

$$\prod_l a_l^i = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_l a_l^i} \left[\sum_l a_l^i F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] = u(x).$$

Analizaremos dos casos. El primero es si la suma de los a_l^i está acotada, es decir $\exists M > 0 \mid \sum_l a_l^i \leq M \forall i$, entonces cada $(a_l^i)_i$ está acotada porque $a_l^i \leq \sum_l a_l^i$ y se puede extraer una subsucesión convergente de todas ellas,

$$a_l^{i_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a_l.$$

Donde $a_l \in [0, M] \forall l$. Definimos

$$u_j = \frac{1}{\sum_l a_l^{i_j}} \left[\sum_l a_l^{i_j} F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right],$$

sucesión que por hipótesis converge a $u(x)$. Y despejando de la misma definición se obtiene

$$\tilde{h}(x) = \sum_l a_l^{i_j} (F_l(u)(x) - u_j).$$

Como todas las $(a_l^{i_j})_j$ y $(u_j)_j$ convergen, tomando límite $j \rightarrow \infty$ se llega a

$$\tilde{h}(x) = \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)).$$

Ya que $\prod_l a_l^{i_j} = 1 \forall j$, vale que $\prod_l a_l = 1$ y al final el ínfimo de $\tilde{h}(x)$ es un mínimo.

El segundo caso es con $(\sum_l a_l^i)_i$ no acotada. De esta forma existe una subsucesión, que notaremos de igual forma, que tiende a $+\infty$. Pero así, en el límite que llega a $u(x)$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_l a_l^i} \left[\sum_l a_l^i F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] = u(x),$$

el término con $\tilde{h}(x)$ no está aportando. Dicho de otra forma, el término izquierdo de este límite también es $u(x)$.

$$\frac{1}{\sum_l a_l^i} \sum_l a_l^i F_l(u)(x) = \underbrace{\frac{1}{\sum_l a_l^i} \left[\sum_l a_l^i F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right]}_{\rightarrow u(x)} + \underbrace{\frac{\tilde{h}(x)}{\sum_l a_l^i}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u(x).$$

Entonces la sucesión $(a_l^i)_i$ también sirve para acercarse a $u(x)$ vía $\frac{1}{\sum_l a_l^i} \sum_l a_l^i F_l(u)(x)$. Gracias a esto, podemos ver que $u(x)$ es también el ínfimo de estas expresiones. Como $u(x)$

es menor o igual a su ínfimo original,

$$u(x) \leq \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - \tilde{h}(x) \right] \stackrel{\tilde{h}(x) > 0}{\leq} \frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_l(u)(x) \quad \forall \prod_l a_l = 1,$$

$u(x)$ también es cota inferior de los elementos $\frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_l$. Y junto con la sucesión que llega él, se tiene que es el ínfimo

$$u(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_l(u)(x).$$

Este nuevo ínfimo es calculable y su valor es F_m ya que

$$\frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_l(u)(x) \geq \frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_m(u)(x) = F_m(u)(x) \quad \forall \prod_l a_l = 1$$

y usando $a_2 = \dots = a_{m-1} = \frac{1}{i}$, $a_m = i^{m-2}$ se verifica $\prod_l a_l = 1$ y

$$\frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l F_l(u)(x) = \frac{\frac{1}{i} F_2(u)(x) + \dots + \frac{1}{i} F_{m-1}(u)(x) + i^{m-2} F_m(u)(x)}{\frac{1}{i} + \dots + \frac{1}{i} + i^{m-2}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F_m(u)(x).$$

Conclusión, se obtiene

$$u(x) = F_m(u)(x).$$

Y usando otra vez (6.3) se ve que

$$\inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)) = (m-1) \left(\prod_{l=2}^m (F_l(u)(x) - u(x)) \right)^{\frac{1}{m-1}} = 0$$

y junto con

$$0 \leq \tilde{h}(x) \leq \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x))$$

se llega a

$$\tilde{h}(x) = 0 = \inf_{\prod_l a_l = 1} \sum_l a_l (F_l(u)(x) - u(x)).$$

□

Trabajaremos con este nuevo operador

$$\Theta : B(\mathbb{T}) \rightarrow B(\mathbb{T}) \quad \Theta(u)(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - h(x) \right],$$

con h función no negativa. Y abordaremos el problema equivalente

$$\begin{cases} u(x) = \Theta(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial\mathbb{T}} = g. \end{cases} \quad (6.4)$$

Lema 46. Θ saca constantes y es acotado por promedios.

Demostración. Para ver que saca constantes, tomamos $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y fijamos un $x \in \mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} \Theta(u + \alpha)(x) &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u + \alpha)(x) - h(x) \right] \\ &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) + a_l \alpha - h(x) \right] \\ &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - h(x) \right] + \alpha \\ &= \Theta(u)(x) + \alpha. \end{aligned}$$

Como la igualdad vale para todos $x \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, se obtiene lo buscado.

Veamos que Θ es acotada por promedios. Tomemos $u, v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y acotamos la diferencia $\Theta(u)(x) - \Theta(v)(x)$ para un $x \in \mathbb{T}$ fijo. $\Theta(v)(x)$ es un ínfimo, entonces para $\varepsilon > 0$ existen $a_2, \dots, a_m > 0$ tales que

$$\frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(v)(x) - h(x) \right] < \Theta(v)(x) + \varepsilon.$$

Por su parte, $\Theta(u)(x)$ se puede acotar superiormente con la misma combinación $a_2, \dots, a_m$; gracias a esto se obtiene

$$\Theta(u)(x) - \Theta(v)(x) \leq \varepsilon + \frac{1}{\sum_l a_l} \sum_l a_l [F_l(u)(x) - F_l(v)(x)].$$

La diferencia entre los F_l se puede acotar por la mayor de todas, que se alcanza con l^* .

$$F_l(u)(x) - F_l(v)(x) \leq \max_{1 \leq l \leq m} [F_l(u)(x) - F_l(v)(x)] = F_{l^*}(u)(x) - F_{l^*}(v)(x)$$

Y como F_{l^*} es un operador acotado por promedios, existen $c_0, \dots, c_{m-1}$ que dependen exclusivamente de x , u y v , tales que

$$\Theta(u)(x) - \Theta(v)(x) \leq \varepsilon + F_l(u)(x) - F_l(v)(x) \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{m-1} c_k(u(x_k) - v(x_k)).$$

La independencia de los c_k con ε permite llegar al promedio necesario para Θ

$$\Theta(u)(x) - \Theta(v)(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} c_k(u(x_k) - v(x_k)).$$

□

Debido a este lema, valen todas las propiedades del Capítulo 2 y el principio de comparación.

6.2. Existencia y unicidad de solución

Teorema 47 (Existencia y unicidad del problema de Dirichlet para Monge-Ampere). Sean $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa, sumable sobre subárboles binarios y tal que la función

$$\sup_{\mathbb{T}_b^x} \sum_{y \in \mathbb{T}_b^x} \frac{h(y)}{2^{|y|-|x|}}$$

converge por niveles a 0. Entonces existe una única solución para el problema equivalente a Monge-Ampere:

$$\begin{cases} u(x) = \Theta(u)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ u|_{\partial \mathbb{T}} = g, \end{cases}$$

con convergencia por niveles en $\partial \mathbb{T}$.

Demostración.

Existencia

Se utilizará el método de Perron buscando un supremo al conjunto de subsoluciones,

$$\mathcal{A} = \left\{ w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \mid w(x) \leq \Theta(u)(x) \ \forall x \in \mathbb{T} \text{ y } \overline{\lim}_{x \rightarrow r} w(x) \leq g(r) \ \forall r \in \partial\mathbb{T} \right\}.$$

Definimos $v : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(x) := \sup_{w \in \mathcal{A}} w(x),$$

y veremos que es la solución del problema.

Cotas de Θ

Previo a probar que v está bien definida y cumple todas las propiedades necesarias para ser la solución, veremos dos cotas para el operador Θ que serán muy útiles en los próximos pasos. Veremos que el operador Θ está acotado superiormente por F_2 e inferiormente por $F_m - \frac{h}{m-1}$, es decir $\forall u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\forall x \in \mathbb{T}$ vale

$$F_m(u)(x) - \frac{h(x)}{m} \leq \Theta(u)(x) \leq F_2(u)(x).$$

Para ver esto alcanzará recordar que los operadores de los l -autovalores son decrecientes $F_m \leq F_{m-1} \leq \dots \leq F_l \leq F_{l-1} \leq \dots \leq F_2$. Así, fijada $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{T}$, en la definición de Θ

$$\Theta(u)(x) = \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(u)(x) - h(x) \right]$$

se acotan todos los F_l superiormente por F_2 e inferiormente por F_m y se obtiene

$$\begin{aligned} F_m(u)(x) + \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{-h(x)}{\sum_l a_l} &\leq \Theta(u)(x) \leq F_2(u)(x) + \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{-h(x)}{\sum_l a_l} \leq F_2(u)(x) \\ F_m(u)(x) - \frac{h(x)}{m-1} &\leq \Theta(u)(x) \leq F_2(u)(x). \end{aligned}$$

Buena definición de v

Veremos que $\mathcal{A}$ es no vacío y que $\{w(x), w \in \mathcal{A}\}$ es un conjunto acotado superiormente $\forall x \in \mathbb{T}$.

Sea w_1 solución del problema del m -autovalor no homogéneo con dato g y parte no

homogénea $\frac{h}{m-1}$,

$$\begin{cases} w_1(x) = F_m(w_1)(x) - \frac{h(x)}{m-1} & \forall x \in \mathbb{T}, \\ w_1|_{\partial\mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Entonces con la cotas anteriores para Θ se tiene

$$\Theta(w_1)(x) \geq F_m(w_1)(x) - \frac{h(x)}{m-1} = w_1(x),$$

es decir, w_1 es una subsolución de Monge-Ampere con límite g . $w_1 \in \mathcal{A}$, y no es un conjunto vacío.

Por otro lado, sea $w_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ solución del 2-autovalor con dato g ,

$$\begin{cases} w_2(x) = F_2(w_2)(x) & \forall x \in \mathbb{T}, \\ w_2|_{\partial\mathbb{T}} = g. \end{cases}$$

Esta función es supersolución de Monge-Ampere por la observación previa,

$$\Theta(w_2)(x) \leq F_2(w_2)(x) = w_2(x) \quad \forall x.$$

Entonces para cualquier $w \in \mathcal{A}$ se tendrá que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow r \in \partial\mathbb{T}} w(x) \leq g(r) = \underline{\lim}_{x \rightarrow r \in \partial\mathbb{T}} w_2(x) \quad \forall r \in [0, 1],$$

y por el principio de comparación

$$w(x) \leq w_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Por lo tanto $\{w(x), w \in \mathcal{A}\}$ está acotado superiormente $\forall x \in \mathbb{T}$.

Convergencia en $\partial\mathbb{T}$

Conseguimos $w_1 \in \mathcal{A}$ y por ello

$$w_1(x) \leq v(x) \quad \forall x.$$

También conseguimos w_2 supersolución la cual es cota superior de toda función en $\mathcal{A}$,

$$w(x) \leq w_2(x) \quad \forall w \in \mathcal{A} \quad \forall x,$$

tomando supremo sobre $\mathcal{A}$ para x fijo se tiene

$$v(x) \leq w_2(x) \quad \forall x.$$

Como w_1 y w_2 convergen por niveles a g , dado $\varepsilon > 0$ existe un nivel inicial $n_0 \in \mathbb{N}$ donde ambas se parecen a g ,

$$\max \left\{ |w_1(x) - g(\psi(x))|, |w_2(x) - g(\psi(x))| \right\} < \varepsilon \quad \forall |x| \geq n_0.$$

Entonces, v está encerrada por estas dos funciones y también tomará límite g por niveles. Usando $|x| \geq n_0$ se obtiene

$$|v(x) - g(\psi(x))| < \varepsilon.$$

La propiedad restante, $v = \Theta(v)$

Se probará la doble desigualdad. Fijado $x \in \mathbb{T}$, se toma una $w \in \mathcal{A}$ y entonces

$$F_l(w)(x) = \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (w(y) + w(z)) \stackrel{w \leq v}{\leq} \max_{\substack{S \subseteq S(x) \\ \#S=l}} \min_{\substack{y,z \in S \\ y \neq z}} \frac{1}{2} (v(y) + v(z)) = F_l(v)(x) \quad \forall l.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} w(x) &\leq \Theta(w)(x) \\ &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(w)(x) - h(x) \right] \\ &\leq \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(v)(x) - h(x) \right] \\ &= \Theta(v)(x). \end{aligned}$$

Se llegó a una cota independiente de w y pasando al supremo se tiene

$$v(x) \leq \Theta(v)(x).$$

Ahora veamos la otra desigualdad. Por el absurdo suponemos que $\exists \tilde{x} \in \mathbb{T}$ tal que

$$0 < \delta = \Theta(v)(\tilde{x}) - v(\tilde{x}).$$

Con esta diferencia podemos construir una nueva función $\tilde{v} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ superior a v :

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \neq \tilde{x}, \\ v(\tilde{x}) + \delta & \text{si } x = \tilde{x}. \end{cases}$$

Veamos que $\tilde{v} \in \mathcal{A}$, empezando por $\tilde{v}(x) \leq \Theta(\tilde{v})(x)$ para todo x . Tomando un $x \neq \tilde{x}$, $\tilde{v}$ coincide con v que ya es subsolución: $\tilde{v}(x) = v(x) \leq \Theta(v)(x)$. Como $v \leq \tilde{v}$, los operadores de los l -autovalores preservan este orden, $F_l(v) \leq F_l(\tilde{v}) \forall l$ y al acotar dentro del ínfimo de Θ se llega a lo buscado

$$\tilde{v}(x) = v(x) \leq \Theta(v)(x) \leq \Theta(\tilde{v})(x).$$

Mientras que si $x = \tilde{x}$, por hipótesis

$$\tilde{v}(\tilde{x}) = v(\tilde{x}) + \delta = \Theta(v)(\tilde{x})$$

y ya que $v = \tilde{v}$ en todos los sucesores de $\tilde{x}$,

$$\begin{aligned} \Theta(v)(\tilde{x}) &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(v)(\tilde{x}) - h(\tilde{x}) \right] \\ &= \inf_{\prod_l a_l = 1} \frac{1}{\sum_l a_l} \left[\sum_l a_l F_l(\tilde{v})(\tilde{x}) - h(\tilde{x}) \right] \\ &= \Theta(\tilde{v})(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Juntando,

$$\tilde{v}(\tilde{x}) = \Theta(\tilde{v})(\tilde{x}).$$

En resumen, $\tilde{v}$ es subsolución.

Por último, como solamente se modificó el valor de v en un nodo del árbol, el límite por cualquier rama se preserva:

$$\lim_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} \tilde{v}(x) = \lim_{x \rightarrow \pi \in \partial \mathbb{T}} v(x) = g(\psi(\pi)).$$

Obtenemos $\tilde{v} \in \mathcal{A}$ y es superior al supremo sobre este conjunto, v , en $\tilde{x}$. La contradicción surge de suponer que v es estrictamente menor a $\Theta(v)$ por lo que se llega a

$$v(x) = \Theta(v)(x).$$

Ya habíamos probado el límite en $\partial\mathbb{T}$ y concluimos que v es solución del problema.

Unicidad

Si se tuvieran dos soluciones u_1, u_2 , con el mismo dato de borde g , en particular se tiene que con $\bar{u} = u_1$ y $\underline{u} = u_2$ se cumplen las hipótesis del lema de comparación. Por lo tanto se llega a $u_1 \geq u_2$. Como los roles de u_1 y u_2 son simétricos, se llega a la igualdad: $u_1 = u_2$. □

Bibliografía

- [1] Venancio Alvarez, José M. Rodríguez y Dmitry V. Yakubovich. “Estimates for nonlinear harmonic “measures” on trees”. En: *Michigan Mathematical Journal* 49.1 (2001), págs. 47-64. doi: [10.1307/mmj/1008719035](https://doi.org/10.1307/mmj/1008719035) (vid. pág. 18).
- [2] Anders Björn y col. “Geometric analysis on Cantor sets and trees”. En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2017.725 (2017), págs. 63-114. doi: [10.1515/crelle-2014-0099](https://doi.org/10.1515/crelle-2014-0099) (vid. pág. 18).
- [3] Pablo Blanc y Julio D. Rossi. “Games for eigenvalues of the Hessian and concave/convex envelopes”. En: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 127 (2019), págs. 192-215. issn: 0021-7824. doi: [10.1016/j.matpur.2018.08.007](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2018.08.007) (vid. pág. 11).
- [4] Pablo Blanc y Julio Daniel Rossi. *Game Theory and Partial Differential Equations*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2019. isbn: 9783110621792. doi: [10.1515/9783110621792](https://doi.org/10.1515/9783110621792) (vid. págs. 11, 19).
- [5] L. Caffarelli, L. Nirenberg y J. Spruck. “The dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations I. Monge-ampère equation”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 37.3 (1984), págs. 369-402. doi: [10.1002/cpa.3160370306](https://doi.org/10.1002/cpa.3160370306) (vid. pág. 16).
- [6] L. Caffarelli y col. “The dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex monge-ampère, and uniformaly elliptic, equations”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 38.2 (1985), págs. 209-252. doi: [10.1002/cpa.3160380206](https://doi.org/10.1002/cpa.3160380206) (vid. pág. 16).
- [7] Leandro M. Del Pezzo, Nicolas Frevenza y Julio D. Rossi. “Convex envelopes on Trees”. 2019. doi: [10.48550/ARXIV.1904.05322](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1904.05322) (vid. pág. 18).
- [8] Leandro M. Del Pezzo, Carolina A. Mosquera y Julio D. Rossi. “Estimates for nonlinear harmonic measures on trees”. En: *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series* 45.3 (sep. de 2014), págs. 405-432. issn: 1678-7714. doi: [10.1007/s00574-014-0056-8](https://doi.org/10.1007/s00574-014-0056-8) (vid. pág. 18).
- [9] Leandro M. Del Pezzo, Carolina A. Mosquera y Julio D. Rossi. “The unique continuation property for a nonlinear equation on trees”. En: *Journal of the London Mathematical Society* 89.2 (2014), págs. 364-382. doi: [10.1112/jlms/jdt067](https://doi.org/10.1112/jlms/jdt067) (vid. pág. 18).
- [10] Robert Kaufman, José G. Llorente y Jang-Mei Gloria Wu. “Nonlinear harmonic measures on trees”. En: *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* 28 (nov. de 2003), págs. 279-302. issn: 1239-629X. url: <https://www.emis.de/journals/AASF/Vol28/kaufman.pdf> (vid. págs. 6, 18).

- [11] Robert Kaufman y Jang-Mei Wu. “Fatou theorem of p -harmonic functions on trees”. En: *The Annals of Probability* 28.3 (2000), págs. 1138-1148. doi: [10.1214/aop/1019160328](https://doi.org/10.1214/aop/1019160328) (vid. pág. 18).
- [12] Oberman Adam M., Sviridov Alexander P. y Manfredi Juan J. “Nonlinear elliptic Partial Differential Equations and p -harmonic functions on graphs”. En: *Differential and Integral Equations* 28.1/2 (2015), págs. 79-102. doi: [10.57262/die/1418310422](https://doi.org/10.57262/die/1418310422) (vid. pág. 18).
- [13] Ashok P. Maitra y William D. Sudderth. “Discrete Gambling and Stochastic Games”. En: *Journal of the American Statistical Association* 92.439 (1997), págs. 1223-1224. issn: 01621459. url: <http://www.jstor.org/stable/2965604> (vid. pág. 19).
- [14] Yuval Peres y Scott Sheffield. “Tug-of-war with noise: A game-theoretic view of the p -Laplacian”. En: *Duke Mathematical Journal* 145.1 (2008), págs. 91-120. doi: [10.1215/00127094-2008-048](https://doi.org/10.1215/00127094-2008-048) (vid. pág. 19).
- [15] Yuval Peres y col. “Tug-of-war and the infinity Laplacian”. En: *Journal of the American Mathematical Society* 22.1 (jul. de 2008), págs. 167-210. doi: [10.1090/s0894-0347-08-00606-1](https://doi.org/10.1090/s0894-0347-08-00606-1) (vid. pág. 19).
- [16] Luis Silvestre y Adam Oberman. “The Dirichlet problem for the convex envelope”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 363 (jul. de 2010). doi: [10.1090/S0002-9947-2011-05240-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05240-2) (vid. pág. 12).
- [17] Alexander Petrovich Sviridov. “Elliptic equations in graphs via stochastic games”. Jul. de 2011. url: <http://d-scholarship.pitt.edu/9581/> (vid. pág. 18).
- [18] Alexander Petrovich Sviridov. “ p -harmonious functions with drift on graphs via games”. En: *Electronic Journal of Differential Equations* 2011.114 (2011), págs. 1-11. url: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2011/114/sviridov.pdf> (vid. pág. 18).