UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Representaciones del álgebra de Yokonuma

Emiliano Liwski

Director: Dr. Martín Mereb

Fecha de Presentación: 19/12/2022

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, Ana y Juan. Ellos siempre me apoyaron en todo momento, siempre estuvieron conmigo. Les agradezco por los valores que me transmitieron y por el cariño de todos los días.

A toda mi familia por su apoyo y amor incondicional.

A mis amigos del colegio Lihuen y David por todos los momentos compartidos.

A Patricia Fauring y Flora Gutiérrez por su gran trabajo en OMA, y a toda la gente de la organización, especialmente a Mati Saucedo. La olimpíada fue una etapa muy linda e importante para mí.

A mis amigos de OMA, por todos los viajes y experiencias: Fausto, Juli Masliah, Carlos, Camila, Bruno, Gonzalo, Juli Garbulsky, Agus, Lucía, Alesio, Franco Bongiovanni, Franco de Rico, Martín Vacas Vignolo, Ori, Zoe, Ivo, Joaquín, Marchi, Mati Raimundez, Brunito, Chino, Nico Ferres, Mateo, Edu, Turko, Ian.

A mis alumnos de OMA, por aprender a dar clases y por los lindos momentos: Pili, Iván, Fede, Dai.

A mis entrenadores de olimpíadas. A Lauti Decara por haberme ayudado tanto. A Lucas Andisco por haberme enseñado a pensar distinto, por su enorme calidad como persona y por haber sido un apoyo para mí tanto en Olimpiadas como en la parte humana.

A mis amigos de la facultad con los que compartí cursadas: Julián, Carlos, Santiago, Octavio, Joaquín, Ivo, Franco, Alan, Enzo.

A Martín, por haberme propuesto un tema tan lindo. Por haber sido un gran director, y una gran persona. Por todos los consejos y charlas y por todo el tiempo dedicado desinteresadamente.

A Leandro Vendramin y Marco Farinati por tomarse el tiempo de ser jurados, y por todos los comentarios y sugerencias. También quiero agradecer a Leandro por todas las charlas, recomendaciones y oportunidades que me dio el último año, y por su gran predisposición.

A toda la gente que vino a la defensa de forma presencial o virtual.

A la UBA, que me dio la oportunidad de formarme en una institución pública.

Introducción

El objetivo de esta tesis es calcular el valor de los caracteres del álgebra de Yokonuma en ciertos elementos. Describamos como surge esta álgebra. Para eso primero introducimos los grupos de Coxeter, que consisten de un par (W, I) donde W es un grupo y $I = \{s_1, s_2, \dots s_r\}$ un conjunto de generadores de orden 2 con relaciones

$$s_i s_j s_i \cdots = s_j s_i s_j \cdots$$

donde hay $m_{i,j}$ factores de cada lado (el orden de $s_i s_j$) , estas relaciones se conocen como relaciones de trenzas. Un ejemplo es el grupo simétrico, con generadores $(i, i+1)$.

Dentro de los grupos de Coxeter se encuentran los grupos de Weyl, los cuales surgen como el grupo generado por simetrías que dejan fijo un conjunto ϕ (este conjunto es llamado sistema de raíces). Los grupos de Weyl aparecen en diversos lugares, como en las álgebras de Lie y grupos algebraicos.

Relacionado con el grupo de Weyl surge el concepto de álgebra de Iwaori–Hecke. Dado un grupo de Coxeter (W, I) se puede tomar el álgebra de Iwaori–Hecke con generadores indexados en los elementos de I, los cuales notamos $T_1, T_2, \dots T_r$, manteniendo las relaciones cuadráticas pero cambiando la relación $s_i^2 = 1$ por

$$T_i^2 = a_i T_i + b_i \ .$$

Los grupos de Weyl, álgebras de Iwaori–Hecke que veremos van a ser sobre los sistemas de raíces clásicos A, B, C, D.
Relacionado con estos conceptos aparece el álgebra de Hecke, que se denota $\mathcal{H}(G, H)$ si H es un subgrupo de G. Esta se define como el anillo de funciones de G a $\mathbb{C}$ que son H bi-variantes, el producto en este anillo se obtiene al reescalar el producto en el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$.

Vamos a trabajar sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. A modo de ejemplo tomemos el grupo $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ de matrices inversibles, dentro de este grupo tomemos el subgrupo de Borel B de matrices triangulares superiores y el grupo de Weyl que aparece en el álgebra de Lie (el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$). Podemos considerar el álgebra de grupo $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ y el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, B)$. El teorema de deformación de Tits (una herramienta que nos permite relacionar los caracteres de dos álgebras distintas) nos va a dar una biyección entre los caracteres irreducibles de $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ y $\mathcal{H}(G, B)$, que también van a estar en biyección con los caracteres $\mathrm{Irr}(G : B)$, que son los caracteres irreducibles de G tales que su restricción a B tiene como uno de sus factores al caracter trivial $\mathbb{1}_B$. El puente para relacionar las álgebras $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ y $\mathcal{H}(G, B)$ es el álgebra de Iwaori–Hecke en tipo A, la cual se especializa en estas dos. Esta es la situación en tipo A, para los restantes tipos tendremos la misma estructura.

El álgebra de Yokonuma surge al tensorizar el álgebra de Iwaori–Hecke por un grupo cíclico, se define como el álgebra de Hecke de $\mathcal{H}(G, U)$ donde U es el unipotente maximal, en el caso de GL_n el grupo U son las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. En forma análoga al caso del álgebra de Iwaori–Hecke se puede usar el teorema de deformación de Tits para obtener una biyección entre $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G, U))$ y $\mathbb{C}[N]$ donde N es el normalizador del toro (en tipo A nos queda el producto semidirecto entre $\mathbb{S}_n$ y $(\mathbb{F}_q^\times)^n$). Estos también van a estar en biyección con los caracteres $\mathrm{Irr}(G : U)$. Para los restantes tipos vamos a hallar las relaciones del álgebra de Yokonuma usando la estructura de grupo de Chevalley, las relaciones de estos grupos están en las notas [1].

Se pueden encontrar muchos resultados sobre el álgebra de Yokonuma en tipo A, como por ejemplo [2] donde se caracterizan las representaciones irreducibles.

En [3] se presenta el álgebra de Yokonuma en tipo B junto con sus relaciones, mientras que en [4] se muestran las relaciones de las álgebras de Iwaori–Hecke y Yokonuma en tipo A junto con las biyecciones que provienen al usar el teorema de deformación de Tits. En este artículo también se calcula el valor de los caracteres irreducibles del álgebra de Yokonuma en el cuadrado del elemento de longitud máxima del grupo de Weyl. Esto último se hace siguiendo un argumento parecido al de [5, Teorema 9.2.2].

En esta tesis vamos a obtener un resultado análogo para los otros sistemas de raíces. Esto va a ser útil, por ejemplo para hallar cuantas matrices conjugadas a una matriz dada tienen descomposición LU.

En el capítulo 1 vamos a mencionar los preliminares que van a ser importantes en el resto de la tesis. Vamos a definir los sistemas de raíces, grupos de Weyl, teorema de deformación de Tits y grupos y álgebras de Lie.

En el capítulo 2 vamos a empezar viendo como es la construcción de un grupo de Chevalley en general para luego construir los grupos de Chevalley en los tipos clásicos. Vamos a ver que grupos obtenemos con esta construcción y cuales son sus relaciones. También vamos a describir las relaciones del álgebra de Yokonuma en cada uno de los tipos y las deformaciones de estas, estas deformaciones nos van a dar una biyección entre los caracteres irreducibles del álgebra de Yokonuma y el álgebra de grupo del normalizador del toro.

También vamos a ver la demostración de la descomposición de Bruhat, como consecuencia de este teorema vamos a obtener que el álgebra de Iwaori–Hecke se especializa en el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, B)$ con G el grupo de Chevalley. Esto nos da una biyección entre los caracteres irreducibles del álgebra $\mathcal{H}(G, B)$ y el álgebra de grupo del grupo de Weyl.
Los resultados principales del capítulo 2 es la deformación del álgebra de Yokonuma en cada uno de los tipos (2.6.1) y la relación con el normalizador del toro usando el teorema de deformación de Tits (2.10.2). Estos resultados son una generalización a los restantes tipos de lo ya hecho en tipo A.

En el capítulo 3 vamos a hallar las representaciones irreducibles del grupo de Weyl y del normalizador del toro en cada uno de los tipos (3.3). Para eso vamos a ver como son las representaciones irreducibles de un producto semidirecto con un grupo abeliano y las representaciones irreducibles de un subgrupo con cociente cíclico. Como consecuencia de esto vamos a obtener una lista completa de las representaciones irreducibles de la deformación del álgebra de Yokonuma, esto nos va a servir para probar que es split sobre $\mathbb{C}(u)$. Los cálculos de este capítulo son originales y son una generalización a los restantes tipos de lo hecho en tipo A .

En el capítulo 4 vamos a calcular los valores de los caracteres del álgebra de Yokonuma en los elementos T_0, T_0^2 donde T_0 es el elemento de longitud máxima en el grupo de Weyl (4.3,4.2,4.4). Los cálculos de este capítulo son originales y son una generalización de lo hecho en tipo A en [4] a los restantes tipos. Finalmente, veremos una aplicación de este cálculo para la descomposición LU (4.5).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sistemas de raíces:

Para entender varios aspectos de los próximos capítulos va a ser necesario entender la teoría básica de los sistemas de raíces, grupos de Coxeter. Los sistemas de raíces y los grupos de Weyl van a aparecer en las álgebras y grupos de Lie. El objetivo de esta sección es estudiar algunas propiedades de los sistemas de raíces, como la acción del grupo de Weyl en las raíces o el hecho de que este sea un grupo de Coxeter. También vamos a definir una longitud en el grupo de Weyl y veremos cual es el elemento de longitud máxima.

1.1.1. Propiedades de los sistemas de raíces

Sea V un espacio euclídeo con un producto interno sobre $\mathbb{R}$. Si $0 \neq a \in V$ entonces la reflexión con respecto al plano perpendicular a a es r_a dada por:

$$r_a(x) = x - \frac{2\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a \ .$$

Definición 1. Un **sistema de raíces** es un subconjunto finito de **raíces** $\phi \subset V$ que cumple que si $a \in \phi$ entonces $r_a(\phi) = \phi$ y si $a, b \in \phi$ entonces

$$\frac{2\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle} \in \mathbb{Z}$$

El sistema se dice reducido si cada vez que $b = \lambda a$ se tiene $\lambda = \pm 1$. Los sistemas que van a aparecer en la tesis son reducidos. Sea V_0 el subespacio generado por las raíces, se llama el rango de ϕ a $\dim(V_0)$. El sistema se dice irreducible si no puede ser escrito como $V = V_1 \oplus V_2$, con V_1, V_2 ortogonales y $\phi = \phi_1 \cup \phi_2$ con ϕ_i sistema en V_i, los sistemas serán irreducibles. Vamos a usar los sistemas clásicos A, B, C, D.

Tipo A Si $V = \mathbb{R}^n$, y ϕ está compuesto por los $n^2 - n$ vectores de la forma $e_i - e_j$ con $i \neq j$, el rango es $n - 1$ ya que generan el subespacio donde la suma de las coordenadas es 0.

Tipo B Si $V = \mathbb{R}^n$ consideremos ϕ compuesto por los $2n^2$ vectores $e_i \pm e_j, i \neq j$ y $\pm e_i$, el rango es máximo, en este caso.

Tipo C Sea $V = \mathbb{R}^n$ y ϕ consiste de los $2n^2$ vectores $e_i \pm e_j, i \neq j$ y $\pm 2e_i$, el rango es máximo en este caso.

Tipo D Sea $V = \mathbb{R}^n$ y ϕ consiste de los $2n^2 - 2n$ vectores $e_i \pm e_j, i \neq j$ y nuevamente el rango es máximo.

Podemos elegir un $p_0 \in V$ tal que $\langle a, p_0 \rangle \neq 0$ para todo $a \in \phi$ ya que ϕ es finito. Una vez elegido p_0 definimos las raíces positivas ϕ^+ como las que $\langle a, p_0 \rangle > 0$ y llamamos las raíces negativas $\phi^- = -\phi^+$. Notemos que si $a, b \in \phi^+$ y $a + b \in \phi$ entonces $a + b \in \phi^+$. También notemos que las raíces positivas y negativas se encuentran en semiplanos opuestos con respecto a una recta, vale que al cambiar esta recta le aplicaría a las raíces un isomorfismo, por lo que la elección de p_0 es indiferente.
Definimos $\sum$ como el conjunto de raíces positivas que no puede ser expresada como suma de otras raíces positivas, a estas raíces las llamamos **raíces simples**. Si a es una raíz simple denotamos con s_a a la reflexión que le corresponde y la llamamos simetría simple. La siguiente proposición se puede encontrar en [6, Proposición 12]:

Proposición 2. *a. Si a es una raíz simple y $b \in \phi, b \neq a$ entonces $b \in \phi^+$ si y solo sí $s_a(b) \in \phi_+$.*

b. Los elementos de $\sum$ son linealmente independientes,

c. si $a \neq b \in \sum$ entonces $\langle a, b \rangle \leq 0$

d. Todo elemento $a \in \phi$ puede ser escrito de única manera como combinación lineal entera de raíces simples,

$$a = \sum_{b \in \sum} n_b \cdot b,$$

donde todos los $n_b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si $a \in \phi^+$, y todos los $n_b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ si $a \in \phi^-$.

Definimos el **grupo de Weyl** W como el grupo generado por todas las $s_a, a \in \sum$, y si $w \in W$ definimos su **longitud** $l(w)$ como el cardinal de la menor descomposición de w como producto de simetrías simples con $l(w) = 0$ si $w = 1$. Por otro lado definimos $l'(w)$ como la cantidad de raíces en ϕ^+ que w envía a ϕ^-. El objetivo de las siguientes proposiciones es probar que $l = l'$.

Proposición 3. *Sea $s = s_a$ reflexión simple y $w \in W$. Entonces se tiene*

$$l'(ws) = \begin{cases} l'(w)+1 \text{ si } w(a) \in \phi^+, \\ l'(w) \text{ en caso contrario,} \end{cases}$$

$$l'(sw) = \begin{cases} l'(w)+1 \text{ si } w^{-1}(a) \in \phi^+, \\ l'(w) \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que $s(\phi^-)$ se obtiene de ϕ^- sacando $-a$ y agregando a, luego $(sw)^{-1}(\phi^-) = w^{-1}(s\phi^-)$ se obtiene de $w^{-1}(\phi^-)$ sacando $-w^{-1}(a)$ y agregando $w^{-1}(a)$. Como $l'(w)$ es el cardinal de $\phi^+ \cap w^{-1}(\phi^-)$ entonces tenemos la segunda igualdad. La primera se deduce de manera similar. □

Notemos que si w es un endomorfismo ortogonal entonces

$$wr_a w^{-1} = r_{w(a)}. \tag{1.1}$$

Proposición 4 (**Propiedad de intercambio**). *Sean $s_1, s_2, \ldots s_k, s_a$ reflexiones simples tales que $w = s_1 s_2 \ldots s_k$ y $l'(ws_a) < l'(w)$, entonces existe $1 \leq j \leq k$ tal que $s_1 s_2 \ldots s_k = s_1 \ldots \hat{s_j} \ldots s_k s_a$.*

Demostración. Por la proposición anterior tenemos $w(a) \in \phi^-$, luego existe un $1 \leq j \leq k$ mínimo tal que $s_{j+1} \dots s_k(a) \in \phi^+$ y por minimalidad tenemos $s_j s_{j+1} \dots s_k(a) \in \phi^-$. Pero como la única raíz que s_j manda de ϕ^+ a ϕ^- es a_j eso implica $a_j = s_{j+1} \dots s_k(a)$, pero luego por (1.1) tenemos

$$(s_{j+1} \dots s_k) s_a (s_{j+1} \dots s_k)^{-1} = s_j$$

usando que $s_j s_{j+1} \dots s_k = s_{j+1} \dots s_k s_a$ tenemos la igualdad. □

Proposición 5. *Sean $s_i = s_{a_i}$ reflexiones simples para $1 \leq i \leq k$. Supongamos $l'(s_1 s_2 \dots s_k) < k$, entonces existen $i \neq j$ tales que*

$$s_1 s_2 \dots s_k = s_1 \dots \hat{s_i} \dots \hat{s_j} \dots s_k$$

Demostración. Tomemos j mínimo tal que $l'(s_1 \dots s_j) < j$, es claro que $j > 1$, luego tenemos $l'(s_1 \dots s_{j-1}) = j - 1$ y por la proposición 3 tenemos $s_1 \dots s_{j-1}(a_j) \in \phi^-$, por la proposición anterior existe i tal que $s_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_j$, lo que nos da la igualdad del enunciado. □

Proposición 6. *Las longitudes l y l' coinciden*

Demostración. Empecemos viendo $l'(w) \leq l(w)$. Veámoslo por inducción en $l(w)$, el caso base es por la proposición 3. Supongamos ahora $l(w) > 0$, entonces escribamos $w = sw'$ con $l(w') = l(w) - 1$, luego por inducción tenemos $l'(w) \leq l'(w') + 1 \leq l(w') + 1 = l(w)$.
Probemos la otra desigualdad por el absurdo. Supongamos que tenemos $w = s_1 s_2 \dots s_k$ tal que $l(w) = k$ y $l'(w) < k$, luego por la proposición anterior la descomposición de w no sería irreducible, lo cual es una contradicción. □

Observación 1. Se puede ver en [6, Proposición 20.8] que W está generado por las reflexiones simples. Por la proposición anterior tenemos que $w(\phi^+) = \phi^+$ si y solo si $l(w) = 0$, o sea si $w = 1$. Lo que nos dice que un elemento de W queda determinado por como está definido en ϕ^+, en especial como ϕ es finito esto implica que W también lo es.

Teorema 7 (**Matsumoto**,1.2.2,[5])**.** *Llamemos S al conjunto de simetrías simples, M un monoide y $f : S \to M$ una función tal que*

$$\operatorname{Prod}(f(s), f(t), m_{st}) = \operatorname{Prod}(f(t), f(s), m_{st})$$

si m_{st} es el orden de st en el grupo de Weyl. En este caso existe un único mapa $F : W \to M$ tal que

$$F(ww') = F(w)F(w') \text{ si } l(ww') = l(w) + l(w')$$

Teorema 8. *Sea W el grupo de Weyl de un sistema ϕ, S el conjunto de reflexiones simples, entonces (W, I) es un sistema de Coxeter, lo que quiere decir que W tiene una presentación:*

$$W = \langle s \in S \mid s^2 = 1, (st)^{m_{st}} \rangle$$

donde m_{st} es el orden de st en W.

Demostración. Sea G un grupo definido con esta presentación. Como W satisface las relaciones que definen G entonces existe un morfismo $\eta : G \to W$ que manda generadores en generadores y por lo tanto es sobreyectivo. Por otro lado tomemos la función $f : S \to G$ que manda s en si mismo, esta función satisface las hipótesis de Matsumoto, luego existe una función $F : W \to G$ tal que

$$F(ww') = F(w)F(w') \quad \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w')$$

Veamos que F es un morfismo, es suficiente con ver $F(sw) = F(s)F(w)$ con $s \in S$, si $l(sw) > l(w)$ vale por construcción de F. Si $l(sw) < l(w)$ entonces tenemos $l(s \cdot sw) = l(sw) + l(s)$ por lo que $F(w) = F(s)F(sw)$ y también $F(s)F(w) = F(sw)$. Además sabemos que F es un morfismo sobreyectivo porque manda generadores en generadores.
El cardinal de W es finito por 1, como η es sobreyectivo tenemos $|G| \geq |W|$ y como F también lo es se tiene $|W| \geq |G|$, por lo que $|G| = |W|$ y ambos morfismos son isomorfismos. □

1.1.2. Grupos de Weyl tipos A,B,C,D y diagramas de Dynkin

Ahora queremos ver como es el grupo de Weyl en cada uno de los tipos y como son las relaciones en su presentación como grupo de Coxeter.

Tipo A

Tomemos $p_0 = (1, 2, \dots n)$, con esta elección tenemos que las raíces positivas son las de la forma $e_j - e_i, j > i$. Es fácil notar que las raíces simples son

$$a_1 = e_2 - e_1, a_2 = e_3 - e_2, \dots a_{n-1} = e_n - e_{n-1}.$$

Notemos que las reflexiones simples que les corresponden a estas raíces son las transposiciones $s_1, s_2, \dots s_{n-1}$ respectivamente, por lo que el grupo de Weyl en tipo A es el generado por estas, el cual es $\mathbb{S}_n$. Además tenemos las relaciones:

$$s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i - j| > 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i^2 = 1. \tag{1.2}$$

Luego por el teorema 8 tendremos que $\mathbb{S}_n$ tiene una presentación con generadores $s_1, s_2, \dots s_{n-1}$ y estas relaciones.

Tipo B

Volvamos a considerar $p_0 = (1, 2, \dots n)$, las raíces positivas son

$$\phi^+ = \{e_j \pm e_i, j > i\} \cup \{e_i\}.$$

Es fácil notar que las raíces simples son:

$$a_0 = e_1, a_1 = e_2 - e_1, a_2 = e_3 - e_2, \dots a_{n-1} = e_n - e_{n-1}.$$

Las reflexiones simples que les corresponden a $e_{i+1} - e_i$ son s_i al igual que antes, mientras que la reflexión correspondiente a e_1 la llamamos t y está representada por la matriz $\mathrm{Diag}(-1, 1, 1, \dots 1)$.
Llamemos t_i a la matriz diagonal que tiene un -1 en la entada $i + 1$ y 1 en las restantes, notemos que $t = t_0$, y llamemos $W_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ al subgrupo de matrices que tienen exactamente una entrada no nula en cada fila y cada columna siendo esas entradas ± 1. Veamos que el grupo de Weyl en tipo B es W_n. Llamemos N_n al subgrupo de matrices diagonales y $\mathbb{S}_n$ al subgrupo de matrices de permutación. Notemos que N_n es normal en W_n y tiene cardinal 2^n y además $N_n \cap \mathbb{S}_n = \{1\}$. Como el cardinal de W_n es $2^n n!$ entonces se tiene que $W_n = N_n \rtimes \mathbb{S}^n$.
Observemos que los elementos t_i son conjugados, ya que $t_i = s_i t_{i-1} s_i$, en particular $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ pertenecen al subgrupo generado por los elementos $t, s_1, \dots, s_{n-1}$. Luego como $\mathbb{S}_n$ está generado por $s_1, s_2, \dots s_{n-1}$ y N_n por $t_0, t_1, \dots t_{n-1}$ entonces W_n está generado por las reflexiones simples, lo que implica que es el grupo de Weyl en tipo B.

Además tenemos las relaciones:

$$s_1 t s_1 t = s_1 t s_1 t, \quad t s_i = s_i t \text{ si } i \neq 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ } si \text{ } |i - j| > 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \tag{1.3}$$

Luego por el teorema 8 tendremos que W_n tiene una presentación con generadores $t, s_1, \dots s_{n-1}$ y estas relaciones, agregando las cuadráticas.

Tipo C

Tomamos nuevamente $p_0 = (1, 2, \dots n)$, las raíces positivas son:

$$\phi^+ = \{e_j \pm e_i, j > i\} \cup \{2e_i\}.$$

Es fácil notar que las raíces simples son:

$$a_0 = 2e_1, a_1 = e_2 - e_1, a_2 = e_3 - e_2, \dots a_{n-1} = e_n - e_{n-1}.$$

Como la reflexión simple con respecto a $2e_1$ es la misma que la correspondiente a e_1 entonces las simetrías simples son las mismas que en tipo B, y por lo tanto también lo será el grupo de Weyl.

Tipo D

Empecemos definiendo un subgrupo $W'_n \subset W_n$. Viendo como son las relaciones que definen W_n vemos que existe un morfismo $\epsilon : W_n \to \{\pm 1\}$ tal que $\epsilon(t) = -1$ y $\epsilon(s_i) = 1$ para todo i, definimos W'_n como el núcleo de ϵ. Luego W'_n es un subgrupo normal de índice 2, y un elemento $w \in W_n$ pertenece a W'_n si y solo si contiene una cantidad par de -1. Definamos

$$N'_n = N_n \cap W'_n \quad \text{y} \quad u = ts_1t,$$

y llamemos u_i a la matriz diagonal que tiene un -1 en las posiciones $1, i+1$ y 1 en los restantes lugares. Tenemos que

$$u_1 = us_1, \qquad u_i = s_i u_{i-1} s_i.$$

Tenemos que N'_n es un subgrupo de índice 2 de N_n y nuevamente se tiene un producto semidirecto $W'_n = N'_n \rtimes \mathbb{S}^n$. El subgrupo N'_n está generado por $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, por lo que W'_n está generado por $\{u, s_1, s_2, \dots s_{n-1}\}$. Volvemos a elegir $p_0 = (1, 2, \dots n)$ y las raíces positivas son:

$$\phi^+ = \{e_j \pm e_i : i < j\}.$$

Las raíces simples son:

$$a'_0 = e_1 + e_2,\ a'_1 = e_2 - e_1, \dots, a'_{n-1} = e_n - e_{n-1}.$$

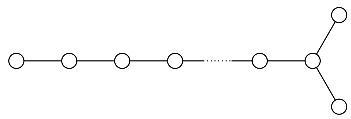
Y las simetrías simples correspondientes son $\{u, s_1, s_2, \dots s_{n-1}\}$, por lo que W'_n es el grupo de Weyl. Además tenemos las relaciones

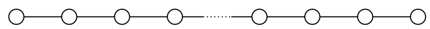
$$us_1 = ts_1ts_1 = s_1ts_1t = s_1u, \quad us_2u = s_2us_2, \quad us_i = s_iu \text{ si } i > 2, \quad s_is_j = s_js_i \ \ si\ \ |i-j| > 1, \quad s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1},$$

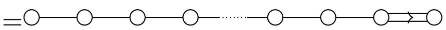
luego usando el teorema 8 tenemos que W'_n tiene una presentación dada por generadores $u, s_1, \dots s_{n-1}$ y estas relaciones, además de las cuadráticas.

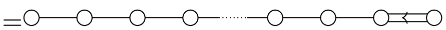
Diagramas de Dynkin

Para cada uno de los sistemas de raíces A, B, C, D podemos considerar el Diagrama de Dynkin. Notemos que en cada uno de los tipos si s, t son simetrías simples distintas entonces el orden de st es $2, 3$ o 4. Luego podemos definir el diagrama de Dynkin como un grafo cuyos vértices representan las simetrías simples, dos vértices de simetrías s, t están unidos con una arista simple si el orden de st es 3 y unidos con una arista doble si el orden de st es 4.

$D_n=$ 

$A_n=$ 

$B_n=$ 

$C_n=$ 

El diagrama de Dynkin nos describe exactamente las relaciones que determinan los grupos de Weyl. En general vamos a denotar con ϕ o R a un sistema de raíces. Definimos ahora algunos subconjuntos especiales de un sistema de raíces y un algoritmo para encontrarlos.

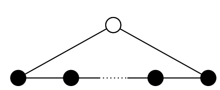
Definición 9 (**Conjuntos cerrados**)**.** Decimos que $\Delta \subset R$ un subconjunto de las raíces es **cerrado** si cumple que cada vez que $a, b \in \Delta$ con $a + b \in R$ se tiene que $a + b \in \Delta$. Una definición equivalente es que si $a, b \in \Delta$ con $ia + jb \in R$, $i, j > 0$ entonces $ia + bj \in \Delta$.
Decimos que un subconjunto $I \subset \Delta$ es un ideal en Δ si cada vez que $a \in I, b \in \Delta$ y $a + b \in \Delta$ se tiene $a + b \in I$.

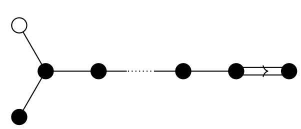
Definición 10 (**Subsistemas de raíces**)**.** Decimos que $\phi \subset R$ es un **subsistema de raíces** si $\mathbb{Z}\phi \cap R = \phi$, en particular notemos que es un sistema de raíces. Una definición equivalente de subsistema de raíces es que sea cerrado y que además $a \in \phi$ si y solo sí $-a \in \phi$. Tenemos por [5, § 1.3.1] que todo sistema de raíces se descompone como una unión disjunta de subsistemas irreducibles ortogonales dos a dos.

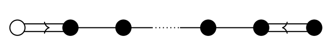
Definición 11 (**Diagrama de Dynkin extendido**)**.** En cualquier sistema de raíces se les puede dar a las raíces un orden parcial donde $\lambda \geq \mu$ si

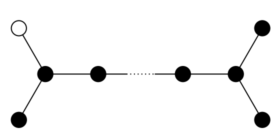
$$\lambda - \mu = \sum_i k_i a_i,$$

donde las a_i son raíces simples y los k_i positivos. Hay una única raíz máxima con respecto a este orden y llamemos a_0 esta raíz. Le adjuntamos $-a_0$ al diagrama de Dynkin formado por las raíces simples y trazamos aristas entre $-a_0$ y las raíces simples dependiendo del orden de las simetrías en el grupo de Weyl, como lo hacíamos en el diagrama de Dynkin. Tenemos $a_0 = e_n - e_1, e_n + e_{n-1}, 2e_n, e_n + e_{n-1}$ en los tipos A, B, C, D respectivamente. Mostramos como son los diagramas extendidos en cada tipo:

A_n 

B_n 

C_n 

D_n 

En caso de que el sistema de raíces no sea irreducible hacemos lo mismo en cada componente conexa.

Algoritmo 1 (**Borel–Siebenthal**)**.** Presentamos un algoritmo que determina todos los subsistemas de raíces salvo por conjugación del grupo de Weyl. Describimos los pasos del algoritmo:

1 Se forma el digrama de Dynkin extendido $\bar{D}$

2 Se toma un subconjunto de vértices que contiene al menos un vértice de cada componente conexa de $\bar{D}$. Sea ψ el subsistema generado por las raíces de $\bar{D}$ que no están en S.

3 Finalizar o repetir el procedimiento con $R = \psi$.

Observación 2. Con esto obtenemos algunos subsistemas de raíces como por ejemplo en tipo C un subsistema que tiene dos componentes de tipo C y las restantes de tipo A, o lo mismo en tipo D. En tipo B podemos obtener un subsistema que tiene una componente de tipo D, una de tipo B y las restantes de tipo A. Estos se obtienen al finalizar el algoritmo en el paso 3. También notemos que si $\Delta \subset R$ es un subconjunto de raíces simples entonces al sacar estas raíces obtenemos un subsistema de raíces, el cual denotamos R_Δ y los llamamos **subsistemas parabólicos**.

Lema 1. *Si R_Δ es un subsistema parabólico entonces $R^+ \cup R_\Delta$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. No es difícil corroborar esta afirmación en cada uno de los tipos usando la descripción de las raíces. □

Lema 2. *Todo conjunto cerrado Δ es unión disjunta de su parte simétrica $\Delta^r = \{a \in \Delta : -a \in \Delta\}$ y su parte especial $\Delta^u = \{a \in \Delta : -a \notin \Delta\}$. Se tiene que Δ^r es un subsistema y Δ^u es un ideal en Δ. En particular Δ^u es cerrado.*

Demostración. Empecemos probando lo primero. Si $a \in \Delta^r$ es claro que $-a \in \Delta^r$. Supongamos ahora que $a, b \in \Delta^r$ y $a + b \in R$, en este caso también tenemos $-a, -b \in \Delta$ y $-a - b \in R$ y como Δ es cerrado sabemos que $a + b, -a - b \in \Delta$. Luego se obtiene $a + b \in \Delta^r$ y Δ^r es un subsistema.
Veamos ahora lo segundo. Sea $a \in \Delta^u, b \in \Delta$ con $a + b \in \Delta$, hay que ver que $-a - b \notin \Delta$. Supongamos lo contrario, en ese caso $-a - b, b \in \Delta$ por lo que $-a = -a - b + b \in \Delta$, lo cual es absurdo porque $a \in \Delta^u$.
Veamos que Δ^u es cerrado, supongamos $a, b \in \Delta^u, a + b \in R$, como Δ es cerrado se tiene $a + b \in \Delta$ y como Δ^u es un ideal en Δ se tiene $a + b \in \Delta^u$. □

1.1.3. Elemento de longitud máxima

Como W es finito entonces existe algún elemento w_0 cuya longitud es máxima, vamos a ver que $w_0^2 = 1$ y hallar este elemento de longitud máxima en cada tipo.

Proposición 12. *El elemento w_0 es el único con la propiedad de tener longitud máxima y $l(w_0) = |\phi^+|$. Además w_0 queda determinado por la propiedad $l(w_0 s) < l(w_0)$ para toda reflexión simple s y además cumple $w_0^2 = 1$.*

Demostración. Como w_0 tiene longitud máxima sabemos que para toda reflexión simple s_a se cumple $l(w_0 s_a) < l(w_0)$, luego por 3 sabemos que $w_0(a) \in \phi^-$ por lo que w_0 envía todas las raíces simples a ϕ^- y por lo tanto todas las raíces positivas. Como w_0 envía todas las raíces positivas en raíces negativas se tiene $l(w_0) = |\phi^+|$.
Si w' fuese otro elemento tal que $l(w') = |\phi^+|$ entonces también enviaría todas las raíces positivas en raíces negaivas, luego $w_0^{-1} w'$ envía raíces positivas en raíces positivas y por 1 tenemos $w' = w_0$.
Como w_0^{-1} manda las raíces positivas en raíces negativas y el elemento maximal es único tenemos $w_0^{-1} = w_0$ por lo que $w_0^2 = 1$. □

Lema 3. *Si $w \in W$ se tiene $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$, además la conjugación por w_0 define un automorfismo que preserva S.*

Demostración. Para ver la primera afirmación alcanza con ver que existen $s_1, s_2, \dots s_k \in S$ tales que $w_0 = (s_k \dots s_1)w$ y $l(w_0) - l(w) = k$, en ese caso tendríamos $ww_0 = (s_1 \dots s_k)^{-1} w_0 w_0 = (s_k \dots s_1)$, por lo que valdría la propiedad.
Veamos como construir la secuencia. Si $l(w) < l(w_0)$ sabemos por la proposición 12 que existe $s_1 \in S$ tal que $l(w) < l(s_1 w)$, si $l(s_1 w) < l(w_0)$ volvemos a aplicar la proposición 12 y tenemos un s_2 tal que $l(s_2 s_1 w) > l(s_1 w)$. Repitiendo este proceso llegamos a la situación de que $l(s_k \dots s_1 w) = l(w_0)$ y por la unicidad de w_0 tendremos $s_k \dots s_1 w = w_0$. Si s es una simetría simple, aplicando el resultado recién demostrado tenemos

$$l(w_0 s w_0) = l(w_0) - l(s w_0) = l(w_0) - (l(w_0) - l(s)) = 1,$$

lo que demuestra $w_0 s w_0 \in S$. □

Elemento de longitud máxima en cada tipo

A) Consideremos la matriz antidiagonal, la que tiene 1 en la antidiagonal y 0 en las restantes posiciones, notemos que la antidiagonal envía $e_j - e_i$ en $e_{n+1-j} - e_{n+1-i}$ por lo que envía las raíces positivas en raíces negativas, lo que implica que es el elemento de longitud máxima w_0. Además por la proposición 12 sabemos

$$l(w_0) = |\phi^+| = \binom{n}{2}$$

y podemos expresar a w_0 como

$$w_0 = s_1(s_2 s_1)\dots(s_{n-1}\dots s_1).$$

Como en esta expresión hay $\binom{n}{2}$ transposiciones entonces es una descomposición irreducible de w_0.

B) Para los tipos B, C es lo mismo ya que tienen mismo grupo de Weyl. El elemento $-\mathrm{Id}$ envía las raíces positivas en raíces negativas, por lo que es el elemento de longitud máxima, y $l(w_0) = |\phi^+| = n^2$. Notemos que

$$-\mathrm{Id} = t\ t_1 t_2 \dots t_{n-1} \quad \text{y} \quad t_i = s_i s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_i,$$

por lo que tenemos una descomposición:

$$w_0 = t(s_1 t s_1)\dots(s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1 t s_1 \dots s_{n-1}).$$

Como en esta expresión tenemos n^2 reflexiones simples entonces es la descomposición irreducible de w_0.

D) Si n es par entonces $-\mathrm{Id} \in W_n'$ y como envía raíces positivas en negativas entonces $w_0 = -\mathrm{Id}$, tenemos $l(w_0) = |\phi^+| = n^2 - n$. Sabemos que $-\mathrm{Id} = u_1 u_2 \dots u_{n-1}$ y $u_i = s_i u_{i-1} s_i$,$u_1 = u s_1$, por lo que tenemos una descomposición:

$$-\mathrm{Id} = (u s_1)(s_2 u s_1 s_2)\dots(s_{n-1}\dots s_2 u s_1 s_2 \dots s_{n-1}).$$

Como en esta expresión tenemos $n^2 - n$ términos entonces es la descomposición irreducible de $-\mathrm{Id}$. Si n es impar podemos considerar el elemento $\mathrm{Diag}(1, -1, -1, \dots, -1) \in W_n'$, por la descripción de las raíces es fácil ver que envía raíces positivas en negativas, por lo que es el elemento de longitud máxima w_0. Al igual que en el caso par $l(w_0) = n^2 - n$, y nuevamente tenemos la descomposición irreducible de w_0

$$w_0 = (u s_1)(s_2 u s_1 s_2)\dots(s_{n-1}\dots s_2 u s_1 s_2 \dots s_{n-1}),$$

porque $w_0 = u_1 u_2 \dots u_{n-1}$.

1.1.4. Monoide de trenzas

Definimos el **monoide de trenzas** $B^+ = B^+(W, S)$ asociado a un grupo de Coxeter (W, S) por:

> **generadores**: $s \in S$
> **relaciones**: $\mathrm{Prod}(s, t, m_{st}) = \mathrm{Prod}(t, s, m_{st})$ si m_{st} es el orden de st.

Observación 3. Por el teorema de Matsumoto,7, existe un único mapa $r : W \to B^+$ tal que

$$r(s_1 s_2 \dots s_k) = r(s_1) r(s_2) \dots r(s_k)$$

si $s_1 s_2 \dots s_k$ es una expresión reducida, además se cumple que $r(w_1 w_2) = r(w_1) r(w_2)$ si $l(w_1 w_2) = l(w_1) + l(w_2)$. Denotemos

$$B^+_{red} = \{r(w) \mid w \in W\}.$$

Notemos que podemos expresar cada $g \in B^+$ como $g = g_1 g_2 \dots g_n$ con $g_i \in B^+_{red}$, por lo que B^+_{red} genera B^+.

Definición 13. Sea w_0 el elemento de longitud máxima, definamos

$$\Delta = r(w_0) \in B^+_{red},$$

que es llamado el **elemento fundamental** en B^+ y que cumple la siguiente propiedad:

Lema 4. *Tenemos $r(w)\Delta = \Delta r(\bar{w})$ para $w \in W$, donde con $\bar{w}$ nos referimos a la conjugación por w_0. En particular el elemento Δ^2 es central en B^+.*

Demostración. Para probar la primera afirmación es suficiente con ver

$$r(s)\Delta = \Delta r(\bar{s})$$

para s una simetría simple. Sabemos que $l(w_0) = l(s w_0) + 1$, por lo que $\Delta = r(s) r(s w_0)$. Por otro lado tenemos $s w_0 = w_0 \bar{s}$ y haciendo un razonamiento similar tenemos $\Delta = r(s w_0) r(\bar{s})$. Luego se tiene:

$$r(s)\Delta = r(s) r(s w_0) r(\bar{s}) = \Delta r(\bar{s}).$$

Por 12 sabemos que $w \mapsto \bar{w}$ tiene orden 2, luego se tiene

$$\Delta^2 r(w) = \Delta r(\bar{w}) \Delta = r(\bar{\bar{w}}) \Delta^2 = r(w) \Delta^2,$$

por lo tanto Δ^2 conmuta con los elementos de B^+_{red}, pero estos generan B^+ por lo que Δ^2 es central en B^+. $\square$

1.2. Álgebras de Iwahori–Hecke

En esta sección vamos a introducir el álgebra de Iwaori–Hecke de un grupo de Coxeter W, seguimos las definiciones y propiedades de [7, Capítulo 7]. El propósito del álgebra de Iwaori–Hecke es que sea una deformación de otras dos álgebras, digamos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Si nos encontramos en las hipótesis del teorema de deformación de Tits podremos afirmar que hay una biyección entre las representaciones irreducibles de $\mathcal{H}_1$ y las de $\mathcal{H}_2$, para eso vamos a introducir también los conceptos de especializaciones y el teorema de Deformación de Tits.

1.2.1. Definiciones y propiedades

Fijemos (W,S) un sistema de Coxeter y A un anillo conmutativo con unidad y llamemos $A[B^+]$ al álgebra de monoide correspondiente a B^+.

Definición 14. Sean $\{a_s, b_s \mid s \in S\} \subset A$ y sea $\mathcal{J} \subset A[B^+]$ el ideal bilátero generado por los elementos de la forma:

$$s^2 - a_s - b_s s,$$

donde B^+ es el monoide de trenzas. Definimos

$$H = H_A(W,S,\{a_s,b_s\}) = A[B^+]/\mathcal{J},$$

que se llama el **álgebra de Iwahori–Hecke** de (W,S) sobre el anillo A con parámetros (a_s,b_s). Para cada $s \in S$ la imagen de s en H se denota T_s.

Observación 4. Notemos que si los a_s son 1 y los b_s son 0 entonces H es isomorfa al álgebra de grupo $A[W]$.

Lema 5. *Sea $H = H_A(W,S,(a_s,b_s))$ un álgebra de Iwahori–Hecke sobre A. Se tiene*

a. Para cada $w \in W$ hay un elemento bien definido $T_w \in H$ tal que $T_w = T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_k}$ si $w = s_1 s_2 \dots s_k$ es una expresión reducida.

b. Para $s \in S, w \in W$ tenemos

$$T_sT_w = \begin{cases} T_{sw} & si\ l(sw) > l(w), \\ a_sT_{sw} + b_sT_w & si\ l(sw) < l(w). \end{cases}$$

c. Como A módulo H está generado por $\{T_w : w \in W\}$.

Demostración. Si llamamos $\mathcal{M}$ al monoide que generan los T_s con $s \in S$ tenemos que el mapa $S \to \mathcal{M}, s \mapsto T_s$ satisface las hipótesis de Matsumoto, lo cual prueba a. Si $w = s_1s_2\dots s_k$ es una expresión reducida y $l(sw) > l(w)$ entonces la expresión $ss_1s_2\dots s_k$ también lo es, luego

$$T_{sw} = T_{ss_1s_2\dots s_k} = T_sT_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_k} = T_sT_w.$$

Si $l(sw) = l(w) - 1$ entonces w tiene una expresión reducida de la forma $w = ss_1s_2\dots s_k$, luego tenemos

$$\begin{aligned} T_sT_w =& T_s^2T_{s_1}\dots T_{s_k} = (a_s + b_sT_s)T_{s_1}\dots T_{s_k} \\ =& a_sT_{s_1}\dots T_{s_k} + b_sT_sT_{s_1}\dots T_{s_k} \\ =& a_sT_{sw} + b_sT_w. \end{aligned}$$

Definamos H' como el A submódulo generado por los T_w, por el punto b tenemos que es invariante a izquierda y derecha por la multiplicación de los T_s, por lo que es un ideal. Como además contiene a los T_s entonces $H' = H$, lo cual prueba c. ☐

Este lema se puede generalizar con lo que dice el siguiente teorema.

Teorema 15. [5, pág. 4.4.6] *Sea $H = H_A(W,S,(a_s,b_s))$ el álgebra de Iwaori–Hecke sobre un anillo conmutativo A. Si se cumple que $a_s = a_t$ cada vez que las simetrías simples s,t son conjugadas en W entonces H es libre como A módulo y los elementos $\{T_w\}_{w\in W}$ forman una A base de H.*

A partir de ahora tendremos H una A álgebra finitamente generada y libre sobre A y K un cuerpo que contiene a A. Llamemos $KH = H \otimes_A K$ al álgebra que se obtiene al extender escalares de A a K.

Definición 16. Definimos $R_0^+(KH)$ como el conjunto formado por las clases de isomorfismo de KH módulos. O sea si V es un KH módulo consideramos $[V] \in R_0^+(KH)$, donde la clase es salvo isomorfismo, y le damos estructura de grupo abeliano con la relación $[V] = [V'] + [V'']$ si $V = V' \otimes V''$ como KH módulos.
También denotemos $\mathrm{Maps}\,(H, K[x])$ a la K álgebra de mapas de H a $K[x]$ con multiplicación puntual. Definimos un mapa

$$p_K : R_0^+(KH) \to \mathrm{Maps}\,(H, K[x])$$

que envía un KH módulo V al elemento $p_k(V) \in \mathrm{Maps}\,(H, K[x])$, el cual evaluado en $h \in H$ nos da el polinomio característico de $p_V(h)$, donde p_V es la representación proporcionada por V.

Lema 6. *Sea $K \subset K'$, se tiene un mapa canónico $d_K^{K'} : R_0^+(KH) \to R_0^+(KH')$ dado por $V \mapsto V \otimes K'$ y un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} R_0^+(KH) \arrow[r, "p_k"] \arrow[d, "d_K^{K'}"] & \mathrm{Maps}\,(H, K[X]) \arrow[d, "t_K^{K'}"] \\ R_0^+(K'H) \arrow[r, "p_{k'}"] & \mathrm{Maps}\,(H, K'[X]) \end{tikzcd}$$

donde $t_K^{K'}$ es la inclusión canónica. Si KH es split entonces $d_K^{K'}$ es un isomorfismo que preserva clases de módulos simples.

Demostración. La conmutatividad del diagrama se sigue del hecho de que al tensorizar con K' el polinomio minimal de h no se modifica.
Ahora supongamos que KH es split, como $K \subset K'$ entonces $K'H$ también es split. Como KH es split entonces cada $K'H$ módulo se obtiene de un KH módulo al tensorizar con K' lo que prueba la sobreyectividad. Por otro lado usando que

$$\mathrm{Hom}_{K'H}(K'V_1, K'V_2) \cong \mathrm{Hom}_{KH}(V_1, V_2) \otimes K'$$

tenemos que si V_1, V_2 son simples no isomorfos entonces $K'V_1, K'V_2$ tampoco lo son. Esto prueba la inyectividad. □

Definición 17 (Anillos de valuación). Un subanillo $\mathcal{O} \subset K$ es un **anillo de valuación** si para cada $x \neq 0 \in K$ tenemos $x \in \mathcal{O}$ o $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Los anillos de valuación son anillos locales, o sea con un único ideal maximal $J(\mathcal{O})$. Algunas propiedades que cumple son:

a. Si $I \subset A$ es un ideal primo entonces existe un anillo de valuación $\mathcal{O}$ tal que $I = A \cap J(\mathcal{O})$.

b. Todo módulo finitamente generado y libre de torsión sobre $\mathcal{O}$ es libre.

c. La intersección de todos los anillos de valuación que contienen a A es la clausura integral de A.

Lema 7. *Sea $\mathcal{O} \subset K$ un anillo de valuación, luego todo KH módulo se realiza sobre $\mathcal{O}$.*

Demostración. Sea V un KH módulo, sea $(v_1, v_2, \dots v_n)$ una K base de V y $\mathcal{B}$ una A base de H. Sea $\bar{V}$ el $\mathcal{O}$ submódulo de V generado por el conjunto finito $\{bv_i : b \in \mathcal{B}\}$. Luego $\bar{V}$ es un $\mathcal{O}H$ submódulo finitamente generado, y como $\mathcal{O}$ está contenido en K, que es un cuerpo, es libre de torsión. Luego por el lema 17 tenemos que $\bar{V}$ es un $\mathcal{O}H$ lattice tal que $\bar{V} \otimes K \cong V$. Podemos tomar una $\mathcal{O}$ base de $\bar{V}$, que será una K base de V ya que K es el anillo de fracciones de $\mathcal{O}$. En esta base tenemos $p(h) \in M_n(\mathcal{O})$ para todo $h \in H$, por lo que la representación se realiza sobre $\mathcal{O}$. □

Proposición 18. *Sea V un KH módulo y A^* la clausura integral de A, tenemos que $p_K(V)(h) \in A^*[x]$, por lo que el mapa p_K se puede definir como un mapa*

$$p_K : R_0^+(KH) \to \text{Maps } (H, A^*[x])$$

Demostración. Por el lema anterior podemos tomar una base de V tal que $p(h) \in M_n(\mathcal{O})$ para todo $h \in H$, lo cual implica que $p_K(V)(h) \in \mathcal{O}[x]$ para todo h, como esto vale para todos los anillos de valuación y su intersección es A^* por el lema 17 tenemos el resultado. □

1.2.2. Especializaciones y teorema de deformación de Tits

Empecemos planteando la situación que tendremos en los mapas de descomposición y el teorema de deformación de Tits: sea H una A álgebra libre con $A \subset K$ donde K es un cuerpo tal que A es integralmente cerrado en K. Sea $\theta : A \to L$ un morfismo a un cuerpo L de modo que L es el anillo de fracciones de $\theta(A)$. Además sea $\mathcal{O} \subset K$ un anillo de valuación tal que $A \subset \mathcal{O}$ y $J(\mathcal{O}) \cap A = \text{Ker}(\theta)$ (donde $J(\mathcal{O})$ es su único ideal maximal) el cual existe porque $\text{Ker}(\theta)$ es un ideal primo de A usando el lema 17. Tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \subset & O & \subset & K \\ \big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ L & \subset & k & & \end{array}$$

donde $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ y π es el mapa cociente.

Si restringimos π a A el núcleo es $J(\mathcal{O}) \cap A = \text{Ker}(\theta)$, como L es el anillo de fracciones de $\theta(A)$ entonces podemos ver a L como un subcuerpo de k usando

$$\text{Im}(\theta) \cong A/\text{Ker}\,\theta = A/\mathcal{J}(\mathcal{O}) \cap A = A/\text{Ker}(\pi|_A) \cong \text{Im}(\pi|_A).$$

Teorema 19 (**Existencia de mapas de descomposición**).

a. *Bajo las condiciones anteriores y siendo LH split, existe un mapa $d_\theta : R_0^+(KH) \to R_0^+(LH)$ que cumple $d_\theta\left([K\bar{V}]\right) = [k\bar{V}]$ donde $\bar{V}$ es un $\mathcal{O}H$ lattice y $[k\bar{V}]$ es pensado como un elemento de $R_0^+(LH)$ ya que $L \subset k$ y LH es split.*

b. *Además se tiene un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(KH) & \xrightarrow{p_K} & \text{Maps}(H, A[X]) \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_\theta} & & \big\downarrow{\scriptstyle t_\theta} \\ R_0^+(LH) & \xrightarrow{p_L} & \text{Maps}(H, L[X]) \end{array}$$

Demostración. Sea $\bar{V}$ un $\mathcal{O}H$ lattice, usando que especializar conmuta con tomar polinomio característico se puede ver la siguiente relación:

$$p_L(k\bar{V}) = t_\theta \circ p_K(K\bar{V}). \tag{1.4}$$

También sabemos por el lema 7 que todo KH módulo es de la forma $K\bar{V}$ con $\bar{V}$ un $\mathcal{O}H$ módulo. Luego si $K\bar{V}$ es un KH módulo podemos definir

$$d_\theta(V) = d_\theta(\bar{V} \otimes_{\mathcal{O}} K) = k\bar{V} = \bar{V} \otimes_{\mathcal{O}} k,$$

si $\bar{V}$ es el $\mathcal{O}$ módulo que realiza a V. Este mapa está definido sobre todo $R_0^+(KH)$ por 7, cumple a por la forma en que está construido y cumple b por la ecuación (1.4). Solo quedaría ver que d_θ está bien definido. Hay ver que si $\bar{V}, \bar{V}'$ son dos $\mathcal{O}H$ lattices tales que $K\bar{V} = K\bar{V}'$ entonces $L\bar{V} = L\bar{V}'$. Como $K\bar{V} = K\bar{V}'$ entonces tenemos

$$p_K(K\bar{V})(h) = p_K(K\bar{V}')(h)$$

para todo $h \in H$, luego usando la ecuación (1.4) tenemos: $p_L(L\bar{V})(h) = p_L(L\bar{V}')(h)$. Pero al ser LH split eso implica que $L\bar{V} = L\bar{V}'$, que era lo que queríamos ver. $\square$

Observación 5. Si $\lambda : H \to A$ es un mapa A lineal entonces definamos un mapa L lineal

$$\lambda^L : LH \to L \quad , \qquad h \otimes 1 \mapsto \theta(\lambda(h)).$$

Sea V es un KH módulo, por la proposición 18 el caracter χ_V se restringe a una función $\chi_V : H \to A$. Sabemos que $\chi_V(h)$ aparece como el coeficiente $n-1$ del polinomio característico $p_V(h)$, luego por la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que χ_V^L es el caracter de $d_\theta(V)$. En otras palabras tenemos

$$d_\theta(V)(h \otimes 1) = \theta(\chi_V(h)).$$

En particular $d_\theta(1) = \chi_V(1)$, por lo que d_θ preserva la dimensión.

El siguiente teorema nos da condiciones para que el mapa d_θ sea una biyección.

Teorema 20 (Teorema de deformación de Tits). *Supongamos que tenemos las mismas hipótesis del teorema anterior pero además que KH es split y LH es semisiple, en ese caso se tiene que KH también es semisimple y d_θ es un isomorfismo que preserva los módulos simples.*

Demostración. Sea V un KH módulo simple, se tiene una expresión

$$d_\theta(V) = \sum_{V'} d_{V,V'} V',$$

donde los V' son los LH módulos simples, por lo tanto tenemos

$$\dim_K V = \sum_{V'} d_{V,V'} \dim_L V'$$

y obtenemos

$$(\dim_K V)^2 = \left(\sum_{V'} d_{V,V'} \dim_L V'\right)^2 \geq \sum_{V'} d_{V,V'}^2 (\dim_L V')^2.$$

Ahora sumemos todas estas desigualdades sobre todos los KH módulos simples. Como KH es split y $KH/\operatorname{rad}(KH)$ es semisimple entonces usando el teorema de Wedderburn tenemos que el lado izquierdo es igual a $\dim_K(KH/\operatorname{rad}(KH))$. Mientras que el lado derecho es igual a

$$\sum_V \sum_{V'} d_{VV'}^2 (\dim_L V')^2 = \sum_{V'} (\sum_V d_{V,V'}^2)(\dim_L V')^2.$$

Por como definimos d_θ tenemos que d_θ es sobreyectiva, por lo que para cada V' existe algún V tal que $d_{V,V'} \neq 0$, por lo cual

$$\sum_V d_{V,V'}^2 \geq 1.$$

Usando esto llegamos a

$$\dim_K(KH/\operatorname{rad}(KH)) = \sum_V (\dim_K V)^2 = \sum_{V'} (\sum_V d_{V,V'}^2)(\dim_L V')^2 \geq \sum_{V'} (\dim_L V')^2.$$

Como LH es semisiple el último término es igual a $\dim_L LH$. Además sabemos que $\dim_K KH = \dim_L LH$ ya que H es libre como A módulo, entonces todas las desigualdades previas tienen que ser igualdades y también debe ocurrir que $\mathrm{rad}(KH) = 0$, lo cual implica que KH es semisiple.
Para que se den las igualdades previas tiene que pasar que para cada LH módulo simple V' existe un único KH simple V tal que $d_{V,V'} \neq 0$, lo cual nos dice que la matriz de d_θ con respecto a los módulos simples tiene exactamente un 1 en cada columna.
Cada fila tiene alguna entrada no nula también porque $d_\theta(V) \neq 0$ para cualquier V. Por lo tanto la matriz d_θ es una matriz de permutación, que es lo que queríamos ver. □

Observación 6. Supongamos que tenemos un álgebra de Iwaori–Hecke $H_A(W, S, (a_s, b_s))$ y $\theta : A \to B$ un morfismo, luego podemos pensar a B como un A módulo y considerar la especialización $H_A \otimes B$. Por la definición del álgebra H_A tenemos que el álgebra especializada $H_A \otimes B$ es isomorfa a

$$H_B(W, S, (\theta(a_s), \theta(b_s))),$$

con el isomorfismo

$$H_A \otimes B \to H_B \quad T_w \otimes 1 \mapsto T'_w.$$

Un escenario para argumentos sobre especialización

Sea W un grupo de Coxeter finito y tomemos el álgebra de Iwaori–Hecke con $b_s = a_s - 1$. A partir de ahora vamos a asumir que $a_s = a_t$ cada vez que s, t son simetrías simples conjugadas para que el álgebra de Iwaori–Hecke sea libre y podamos usar el teorema de deformación de Tits.
Sea $A = \mathbb{C}\left[a_s^{\pm 1}\right]$ y supongamos que tenemos un morfismo $\theta : \mathbb{C}[a_s^{\pm 1}] \to \mathbb{C}$ que envía todos los a_s a q. Sea $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}[a_s^{\pm 1}]$ y A^* la clausura integral de A en $\mathbb{K}$, afirmamos que θ tiene una extensión a A^* la cual llamaremos θ^*.

Sea $\mathcal{O}$ un anillo de valuación tal que $J(\mathcal{O}) \cap A = \mathrm{Ker}(\theta)$. Sea k el cuerpo residual de $\mathcal{O}$ y π la proyección canónica, podemos ver a k como una extensión de $\mathbb{C}$ de modo que θ es la restricción de π a A. Sabemos que $A^* \subset \mathcal{O}$ y si $x \in A^*$ es integral sobre A esto implica que $\pi(x)$ es algebraico sobre $\mathbb{C}$, por lo tanto tenemos $\pi(A^*) \subset \mathbb{C}$ y la restricción de π a A^* es el mapa que buscamos. Como el álgebra especializada H_q es split entonces por el teorema 19 tenemos un mapa de descomposición

$$d_\theta : R_0^+ KH \to R_0^+ H_q.$$

A nivel de caracteres se tiene que a un caracter χ de KH le asigna un caracter χ_q de H_q definido por:

$$\chi_q : H_q \to \mathbb{C}, \quad T_w \mapsto \theta^*(\chi(T_w)).$$

Notemos que el mapa $\chi \mapsto \chi_q$ depende de la elección del mapa $\theta^* : A^* \to \mathbb{C}$.

Lema 8. *Sean $\{e_s\}_{s \in S}$ números naturales y $\{v_s\}_{s \in S} \subset \mathbb{K}$, con $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}[a_s^{\pm 1}]$, tales que $v_s^{e_s} = a_s$. Luego la especialización $\theta^* : A^* \to \mathbb{C}$ que envía todos los a_s a 1 puede ser elegida de modo que $\theta^*(v_s) = 1$ para todo s.*

Demostración. Consideremos $A' = \mathbb{C}[v_s]$, como todos los v_s son íntegros sobre A entonces $A' \subset A^*$, luego podemos extender θ a $\theta' : A' \to \mathbb{C}$ de forma que los v_s vayan a 1. Después elegimos un anillo de valuación $\mathcal{O}$ tal que $J(\mathcal{O}) \cap A' = \mathrm{Ker}(\theta')$ y haciendo el mismo argumento que arriba pero con este anillo de valuación obtenemos el morfismo deseado. □

Teorema 21. *Sea (W, S) un grupo de Coxeter finito y H la correspondiente álgebra de Iwaori–Hecke que cumple que $a_s = a_t$ si s, t son conjugados. Luego existe una extensión de Galois finita $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}[a_s^{\pm 1}]$*

tal que $\mathbb{K}H$ *es split semisimple. Además si* $0 \neq q \in \mathbb{C}$ *es tal que* $\mathcal{H}_q$ *es semisimple entonces se tiene una biyección*

$$\operatorname{Irr}(\mathbb{K}H) \to \operatorname{Irr}(\mathcal{H}_q), \quad \chi \mapsto \chi_q,$$

lo cual por ejemplo vale para $q = 1$

Demostración. Empecemos tomando $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}[a_s^{\pm 1}]$ una extensión de Galois finita tal que $\mathbb{K}H$ es split, lo cual siempre se puede hacer, ver por ejemplo [8, Proposición 7.5]. Como $\mathcal{H}_q$ es semisimple, split y usando el teorema 15 estamos en las condiciones de Tits, el cual nos da la biyección deseada. En especial vale para $q = 1$ ya que $H_1 = \mathbb{C}[W]$ que es semisimple. □

Observación 7. Gracias a este teorema tenemos una biyección entre los caracteres de $\mathbb{C}[W]$ y $\mathbb{K}H$ para algún $\mathbb{K}$ suficientemente grande. Si para algún q se tiene que $\mathcal{H}_q$ es semisiple entonces tendremos una biyección entre $\operatorname{Irr}(\mathcal{H}_q)$ y $\operatorname{Irr}(W)$. Como esta biyección preserva las dimensiones entonces por el teorema de Wedderburn son isomorfas como $\mathbb{C}$ álgebras.

Ejemplo 1. Consideremos las álgebras $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ y $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]$ donde $\mathbb{Q}_8$ es el grupo de cuaterniones. Queremos ver que existe un álgebra que se deforma en estas dos mediante dos especializaciones distintas. Llamemos ω al $\mathbb{C}[u]$ módulo libre en T_r, T_s cocientado por las relaciones:

a. $T_s^2 = u + (1 - u)T_r^2$.

b. $T_r^4 = 1$.

c. $T_r T_s T_r = T_s$.

Notemos también que $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ se puede presentar como la $\mathbb{C}$ álgebra libre en T_r, T_s cocientada por las relaciones:

a. $T_s^2 = 1$.

b. $T_r^4 = 1$.

c. $T_r T_s T_r = T_s$.

Y $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]$ es la $\mathbb{C}$ álgebra libre en T_r, T_s cocientada por las relaciones:

a. $T_s^2 = T_r^2$.

b. $T_r^4 = 1$.

c. $T_r T_s T_r = T_s$.

Consideremos $A_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[u]$ y sea $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita tal que $\mathbb{K}\omega$ es split. Tomemos el morfismo $\theta^1 : A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tal que $u \mapsto 1$, por lo visto en 1.2.2 sabemos que se extiende a un morfismo $\theta^1 : (A_{\mathbb{C}})^* \to \mathbb{C}$. Como $\mathbb{K}\omega$ es split y $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ es split y semisimple entonces nos encontramos en las hipótesis del teorema de deformación de Tits que nos da una biyección entre los caracteres de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ y los de $\mathbb{K}\omega$.

Por otro lado si hacemos un razonamiento análogo con el morfismo $\theta^2 : A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tal que $u \mapsto 0$ notando que las relaciones de ω se convierten en las de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]$ obtenemos una biyección entre los caracteres de $\mathbb{K}\omega$ y los de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]$, por lo que los caracteres de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]$ y los de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ están en biyección.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{K}\omega \arrow[dl, "d_\theta^1"'] \arrow[dr, "d_\theta^2"] & \\
\mathbb{C}[\mathbb{D}_4] & & \mathbb{C}[\mathbb{Q}_8]
\end{tikzcd}$$

Ahora encontremos explícitamente las representaciones de $\mathbb{K}\omega$. Sabemos que hay una biyección entre los caracteres de $\mathbb{K}\omega$ y los de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$ que además preserva la dimensión. Llamemos $n_1, n_2 \dots n_k$ a las dimensiones de las representaciones simples de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_4]$, por el teorema de Artin–Wedderburn sabemos que $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2 = 8$, ya que 8 es el cardinal del grupo. Luego hay 3 posibilidades para estos valores:

- $n_1 = n_2 = \dots n_8 = 1$, en este caso tendríamos que $\mathbb{C}\left[\mathbb{D}_4\right]$ tendría 8 clases de conjugación, lo que implicaría que es abeliano, lo cual es falso.
- $n_1 = n_2 = 2$, no es posible este caso ya que la representación trivial es de grado 1.
- la única posibilidad restante es $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, n_5 = 2$.

Empezemos encontrando las representaciones de grado 1, para esto necesitamos números complejos a, b que cumplan $a^4 = 1,\ b^2 = u + (1-u)a^2,\ aba = b$. Estas ecuaciones nos dan los posibles valores de $a = \pm 1,\ b = \pm 1$, y son las 4 representaciones de grado 1. Para hallar la representación irreducible de grado 2 hay que encontrar dos matrices

$$A, B \in M_2(\mathbb{K})$$

tales que

$$A^4 = \mathrm{Id},\ B^2 = u + (1-u)A^2 \quad y \quad ABA = B,$$

y que no tengan ningún autovector en común (eso nos diría que la representación es irreducible). LLamemos $A' = A^2$, luego tendríamos

$$(A')^2 = \mathrm{Id},\ B^2 = u + (1-u)A',\ A'BA' = B.$$

Como las matrices A' y B conmutan entonces existe una base en la que se diagonalizan mutuamente, luego aplicando un cambio de base podemos suponer que A' y B son diagonales. Como

$$(A')^2 = \mathrm{Id},\ B^2 = u + (1-u)A'$$

y son diagonales entonces podemos encontrar todos los pares de matrices A', B que cumplen esto. Se ve fácilmente que las siguientes matrices cumplen las condiciones:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} \sqrt{2u-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2u-1} \end{pmatrix}.$$

Luego es una representación de grado 2. Los autovectores de B son los vectores canónicos y los de A son $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Como no tienen autovectores en común esta representación es irreducible. Notemos también que $\mathbb{C}\left(\sqrt{2u-1}\right)$ es un cuerpo de descomposición.

Ejemplo 2. Mostremos ahora un ejemplo donde no funciona el teorema de Deformación de Tits, consideremos las álgebras de grupo $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$ y $\mathbb{C}[\mathbb{D}_3]$. Tenemos que $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$ puede presentarse como la $\mathbb{C}$ álgebra libre en T_r, T_s cocientada por las relaciones

a. $T_r^3 = 1$.

b. $T_s^2 = 1$.

c. $T_r T_s = T_s T_r$.

mientras que $\mathbb{C}[\mathbb{D}_3]$ es la $\mathbb{C}$ álgebra generada por T_r, T_s cocientada por las relaciones

a. $T_r^3 = 1$.

b. $T_s^2 = 1$.

c. $T_r T_s T_r T_s = 1$.

Para tratar de relacionar estas dos álgebras definimos κ el $\mathbb{C}[u]$ módulo libre en T_r, T_s cocientado por las relaciones

a. $T_r^3 = 1$.

b. $T_s^2 = 1$.

c. $u(T_r T_s - T_s T_r) = (1-u)(T_r T_s T_r T_s)$.

Al tomar la especialización en $u = 0$ las relaciones de κ se convierten en las de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_3]$ y la especialización en $u = 1$ nos las relaciones de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$. Por lo que si seguimos los pasos del ejemplo anterior obtendríamos una biyección entre los caracteres irreducibles de $\mathbb{C}[\mathbb{D}_3]$ y $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}]$, pero esto claramente no ocurre ya que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es abeliano. Entonces el argumento está fallando en alguna parte. El problema en este caso es que κ no es libre sobre $\mathbb{C}[u]$ y el lema 7 y el teorema 19 dejan de ser ciertos.

1.3. Algunas propiedades de grupos y álgebras de Lie y grupos algebraicos

Vamos a repasar algunos conceptos de grupos y álgebras de Lie para poder entender luego la construcción y propiedades de un grupo de Chevalley, el cual es un grupo algebraico que se construye a partir del álgebra de Lie de un grupo de Lie.

1.3.1. Álgebras de Lie

Enunciamos sin demostración algunos de los conceptos y definiciones que involucran álgebras de Lie. Solamente vamos a hablar de álgebras de Lie de dimensión finita. Las demostraciones se encuentran en [9]. Un **álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ de dimensión finita es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un mapa $\mathbb{C}$ bilineal

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie entonces un $\mathfrak{g}$ módulo o una representación de $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial V con un morfismo de álgebras de Lie (respeta el corchete)

$$p : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V.$$

Definición 22. Si ad denota la representación adjunta de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo K, definimos la **forma de Killing** como la forma bilineal $k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$

$$k(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x \circ \operatorname{ad}_y),$$

la forma de Killing va a jugar el rol de producto interno.

Definición 23. La **serie derivada** de $\mathfrak{g}$ es la sucesión de ideales definida recursivamente:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{j+1} = \left[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j\right].$$

Decimos que $\mathfrak{g}$ es **soluble** si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j. La **sucesión central descendente** de $\mathfrak{g}$ es la sucesión

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{j+1} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^j\right].$$

Decimos que $\mathfrak{g}$ es **nilpotente** si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j. Es fácil probar inductivamente que $\mathfrak{g}^j \supset \mathfrak{g}_j$ por lo que nilpotente implica soluble. Definimos también el **radical** de $\mathfrak{g}$, el cual se denota $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ como el único ideal soluble maximal, el cual se obtiene como la suma de todos los ideales solubles.

Definición 24. Decimos que $\mathfrak{g}$ es **simple** si es no abeliana y no contiene ideales propios. Si $\dim \mathfrak{g} < \infty$ decimos que $\mathfrak{g}$ es **semisimple** si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, o sea si no tiene ideales solubles propios.

Proposición 25. *Las siguientes son definiciones equivalentes de que $\mathfrak{g}$ sea semisimple:*

a. $\mathfrak{g}$ *es semisimple.*

b. $\mathfrak{g}$ *es suma de simples.*

c. La forma de Killing es no degenerada.

Si $\mathfrak{g}$ es simple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ porque no tiene ideales propios y no es abeliana, luego si $\mathfrak{g}$ es semisimple vale la misma propiedad ya que es suma de simples. Además se ve fácilmente que $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ es semisimple por el teorema de correspondencia.

Definición 26. Decimos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **reductiva** si todo ideal se complementa. Además esta definición es equivalente a que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ con $\mathfrak{z}$ el centro de $\mathfrak{g}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semisimple. Una propiedad equivalente es que sea completamente reducible en la representación adjunta.

Descomposicón en espacio de raíces

En toda álgebra de Lie reductiva y compleja va a aparecer una **descomposición en espacio de raíces**, la cual definirá un grupo de Weyl. Explicamos como aparecen estos objetos. Todas las álgebras de Lie tratadas aquí serán complejas y de dimensión finita.

Definición 27 (Subálgebra de Cartan). Decimos que $\mathfrak{h}$ es una **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{h}$ es nilpotente y es su propio normalizador. Toda álgebra de Lie de dimensión finita tiene una subálgebra de Cartan, y además son únicas salvo conjugación. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{h}$ se caracteriza por ser maximal con respecto a las propiedades de ser abeliana y actuar diagonalmente en la representación adjunta (condición bien definida por la preservación de la descomposición de Jordan). Se define el **rango** de $\mathfrak{g}$ como la dimensión de $\mathfrak{h}$.

Supongamos de ahora en adelante que $\mathfrak{g}$ es semisimple.

- Sea V es una representación de $\mathfrak{g}$, como $\mathfrak{h}$ actúa diagonalmente se tiene una descomposición en autoespacios

$$V = \bigotimes_{a \in \mathfrak{h}^*} V_a,$$

  donde $V_a = \{v \in V : hv = a(h)v \text{ para todo } h \in H\}$, los a son llamados los **pesos de la representación** y los V_a son los **autoespacios asociados** a esos pesos. Las raíces a serían una noción generalizada de autovalor.

- En particular si tomamos la representación adjunta obtenemos una **descomposición de Cartan**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigotimes_{a \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_a,$$

donde los $\mathfrak{g}_a$ son los autoespacios de $\mathfrak{h}$ con autovalor a en la representación adjunta. Los $\mathfrak{g}_a$ se llaman los espacios de raíces y los a se llaman raíces, el conjunto de ellas se denota R. El hecho de que $\mathfrak{h}$ sea su propio normalizador asegura que el autoespacio de autovalor 0 es $\mathfrak{h}$.

- Enunciamos algunos hechos más,

  a. Cada $\mathfrak{g}_a$ tiene dimensión 1.
  b. $R = -R$.
  c. R genera un sublattice Λ de $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ de igual rango que la dimensión de $\mathfrak{h}$.
  d. Se tiene un espacio vectorial real $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \Lambda_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ generado por las raíces, cuya complexificación es h^*.
  e. Bajo un cálculo sencillo puede verse que

  $$[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] \subset \mathfrak{g}_{a+b}$$

  si $a+b$ es raíz, si $a+b$ no es raíz entonces $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] = 0$, y si $b = -a$ se tiene $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{-a}] \subset \mathfrak{h}$. En general si V es una representación se tiene $\mathfrak{g}_a(V_b) \subset V_{a+b}$.

- Definimos la **subálgebra distinguida** correspondiente a la raíz a como

$$s_a = \mathfrak{g}_a \oplus \mathfrak{g}_{-a} \oplus [\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{-a}].$$

Estas subálgebras s_a son isomorfas a sl_2. Sabemos que $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{-a}]$ tiene dimensión 1 y actúa diagonalmente en $\mathfrak{g}_{\pm a}$ (porque está en $\mathfrak{h}$), luego hay un único elemento aquí que actúa con autovalor 2 en $\mathfrak{g}_a$ y un único con autovalor -2 en g_{-a} (como ocurre en sl_2). Definimos H_a el elemento con esta propiedad, o equivalentemente $a(H_a) = 2$. Estos $H_a \in \mathfrak{h}$ se llaman **elementos distinguidos**.

- Se define $\Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$ el **lattice de pesos** como

$$\Lambda_W = \{a \in \mathfrak{h}^* : a(H_b) \subset \mathbb{Z} \text{ para toda } a \in R\}.$$

Los pesos de cualquier representación están en Λ_W, en particular $R \subset \Lambda_W$ si miramos la representación adjunta.

- Definimos los hiperplanos $\omega_a = \{b \in \mathfrak{h}^* : b(H_a) = 0\}$ y se tiene una descomposición en suma directa

$$\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}a \oplus \omega_a.$$

Definimos w_a como la reflexión con autovalor 1 en ω_a y autovalor -1 en $\mathbb{C}a$. El grupo generado por las w_a se llama **Grupo de Weyl**. Los pesos de cualquier representación son invariantes bajo el grupo de Weyl, si tomamos la representación adjunta tenemos que las raíces son invariantes bajo el grupo de Weyl.

- Se descompone R en raíces positivas y negativas como

$$R = R^+ \amalg R^-,$$

eligiendo un hiperplano que no contenga a ninguna raíz y haciendo que las raíces positivas y negativas se encuentren en distintos semiplanos. Esto también nos determina las **raíces simples** con la condición de que no se pueden escribir como suma de otras raíces positivas. La elección de este semiplano es indistinta ya que cualesquiera dos elecciones difieren de un automorfismo del álgebra de Lie.

- Sea k la forma de Killing. Sean $X, Y \in \mathfrak{h}$, usando que $\mathfrak{h}$ actúa diagonalmente en los espacios de raíces tenemos que actúan en X, Y por escalares $a(X), a(Y)$ en $\mathfrak{g}_a$, por lo que se tiene que

$$k(X,Y) = \sum_{a\in R} a(X)a(Y).$$

Es una forma bilineal simétrica en $\mathfrak{h}$ (y nos da una en $\mathfrak{h}^*$ que además es definida positiva en $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$). La forma de Killing es invariante bajo el grupo de Weyl, y los w_a son reflexiones con respecto a este producto interno dado por k que además cumple

$$\frac{2k(a,b)}{k(a,a)} \in \mathbb{Z}.$$

- Si Δ es un sistema de raíces simples, $\Delta = \{a_1, a_2, \ldots a_l\}$ se define la **matriz de Cartan** A por

$$A_{ij} = \frac{2k(a_i a_j)}{k(a_i a_i)}.$$

La matriz de Cartan tiene entradas enteras.

- Llamamos un **Sistema de Datos** una cuádrupla $(\Lambda, \phi, \Lambda^*, \phi^*)$ tal que Λ es un lattice y $\Lambda^* = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ es el lattice dual, dentro de cada lattice hay un conjunto finito $\phi \subset \Lambda, \phi^* \subset \Lambda^*$ junto con una biyección $a \mapsto a^*$ que cumple $a^*(a) = 2$ y $a^*(\phi) \subset \mathbb{Z}$. En nuestro caso tenemos que las raíces a y los elementos distinguidos H_a junto con Λ, Λ_W forman un Sistema de Datos.

Definición 28. Si elegimos un sistema $\{x_a \in \mathfrak{g}_a, h_{a_i} : a \in R, a_i \in \Delta\}$ se definen las **constantes de estructura** como los c_{a+b} tales que $[x_a, x_b] = c_{a+b}\ x_{a+b}$ y los valores $a(h_{a_i})$ que cumplen $[h_{a_i}, x_a] = a(h_{a_i})x_a$.

El siguiente teorema nos da la base con la que construiremos el grupo de Chevalley

Teorema 29 (**Base de Chevalley**). *Es posible construir una base de $\mathfrak{g}$ con la propiedad de que todas las constantes de estructura sean números enteros. Una base de Chevalley es de la forma*

$$\{x_a,\ h_{a_i}, a \in R, a_i \in \Delta\}$$

que satisface:

A) $[x_a, x_{-a}] = H_a$ *y* $H_a \in \mathbb{Z}\ \mathrm{span}\{h_{a_i}, a_i \in \Delta\}$.

B) Si $a \neq \pm b \in R$ definimos la $a-$cuerda que contiene a b como los p, q maximales tales que $a \neq \pm b$ y $b - pa, \ldots b + qa \subset R$, entonces

$$[x_a, x_b] = \begin{cases} \pm(p+1)x_{a+b} & si\ a+b \in R, \\ 0\ si\ no. \end{cases}$$

C) $[h_i, x_a] = \dfrac{2k(a, a_i)}{k(a_i, a_i)} x_a$.

Proposición 30. *Si los elementos $x_a, a \in R$ cumplen la propiedad A y además cumplen que $c_{-a,-b} = -c_{a,b}$ cada vez que a, b son raíces tales que $a + b$ es raíz, entonces también se satisface B. Esto se puede encontrar en* [10, Proposición 22].

1.3.2. Algunas propiedades de los grupos de Lie

Enunciamos algunas propiedades de los grupos de Lie, recordemos también que el mapa exponencial nos permite ir del álgebra de Lie al grupo de Lie.

Proposición 31 (**Naturalidad de la exponencial**). *Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie, llamemos $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ a sus respectivas álgebras de Lie, y sea $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ el diferencial en la identidad. Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\exp_G"] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

Notemos que si aplicamos esta propiedad para $f = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (cuya diferencial en 1 es ad) obtenemos la igualdad $\mathrm{Ad}_{e^v} = e^{\mathrm{ad}\ v}$

Lema 9. *Si $G = \mathrm{GL}_n$ entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n$ son las matrices de $n \times n$ y vale que $L_g v = gv$, donde con L_g nos referimos al diferencial de la multiplicación a izquierda por g.*

Corolario 1. *Usando la proposición 31 con $G = \mathrm{GL}_n$ obtenemos la expresión $\mathrm{Ad}_{e^v}(w) = e^{\mathrm{ad}(v)}(w)$, luego usando el lema anterior tenemos*

$$e^v w e^{-v} = e^{\mathrm{ad}(v)}(w),$$

donde $\mathrm{ad}(v)(w') = [v, w']$.

Proposición 32. *Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie y H_1 un subgrupo de H, luego $G_1 = f^{-1}(H_1)$ es un subgrupo con álgebra de Lie $f_*^{-1}(\mathfrak{h}_1)$, donde $\mathfrak{h}_1$ es el álgebra de Lie de H_1. En particular el núcleo de f tiene álgebra de Lie igual a $\mathrm{Ker}(f_*)$.*

Proposición 33 (**Revestimientos**). *Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie. Son equivalentes:*

a. *f es un revestimiento.*

b. *f es abierta con núcleo discreto.*

c. *f_* es un isomorfismo.*

Además si $f : G_1 \to H_1$ es un revestimiento de grupos topológicos tal que G o H es un grupo de Lie entonces al otro se le puede dar una única estructura de grupo de Lie tal que f sea revestimiento de grupos de Lie.

Observación 8. [**Revestimiento universal**] Sea G es un grupo de Lie, la construcción de su revestimiento universal $\bar{G}$ nos da una estructura de grupo topológico en $\bar{G}$, por lo que se le puede dar estructura de Lie de modo que el revestimiento también lo sea de grupos de Lie. En particular las álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ y $\bar{\mathfrak{g}}$ son isomorfas.

Definición 34. Sea $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y G un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. El **grupo adjunto** de $\mathfrak{g}$ se define como la imagen de la representación adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. El grupo adjunto no depende de la elección del grupo conexo G. En particular podemos tomar $\bar{G}$ el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el núcleo de Ad es $Z(\bar{G})$, por lo que tenemos $\mathrm{Im}(\mathrm{Ad}(\bar{G})) \cong \bar{G}/Z(\bar{G})$.

Proposición 35. *Decimos que un grupo de Lie conexo G es* ***semisimple*** *si y sólo si su álgebra de Lie es semisimple, en ese caso G y su grupo adjunto tienen álgebras de Lie isomorfas.*

Demostración. Sea $\bar{G}$ el revestimiento universal, por 33 alcanza con ver que $\bar{G}$ y $\bar{G}/Z(\bar{G})$ tienen álgebras de Lie isomorfas. Sea $q : \bar{G} \to \bar{G}/Z(\bar{G})$ la proyección, por 33 alcanzaría con ver q es un revestimiento.
Veamos que q es abierta, sea $U \subset \bar{G}$ un abierto, queremos ver que $q(U)$ es abierto, pero como el cociente tiene la tipología final hay que ver que $q^{-1}(q(U))$ es abierto, pero

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{z \in Z(\bar{G})} zU$$

que es abierto por ser unión de abiertos.

Por otro lado el núcleo de q es $Z(\bar{G})$ que es el núcleo de la representación adjunta, luego por 32 su álgebra de Lie es el núcleo de ad, el cual es $Z(\mathfrak{g}) = 0$ porque $\mathfrak{g}$ es semisimple. Esto nos dice que $Z(\bar{G})$ es discreto. Luego usando 33 tenemos que q es un revestimiento. □

1.3.3. Ejemplos en los tipos clásicos

Para cada tipo de raíces tendremos varios grupos de Lie tales que sus álgebras de Lie tengan un sistema de raíces de ese tipo. Para cada tipo tenemos un único grupo de Lie semisimple y también el grupo adjunto, el único grupo de Lie simple, el cual se obtiene al cocientar el grupo simplemente conexo por su centro. En el caso de que el grupo sea semisimple todos estos grupos tendrán la misma álgebra de Lie gracias a las proposiciones 33,35.

La siguiente tabla ilustra la situación en la versión compleja de los grupos clásicos y además tenemos que todos los grupos de ella tienen álgebras de Lie reductivas:

Tipo de Cartan	Simplemente conexo	Grupo adjunto	otro grupo
A_n	SL_{n+1}	PSL_n	GL_n (no es semisimple)
B_n	$\mathrm{Spin}(2n+1)$	$\mathrm{SO}(2n+1)$	
C_n	$\mathrm{Sp}(2n)$	$\mathrm{Sp}(2n)/\{\pm Id\}$	
D_n	$\mathrm{Spin}(2n)$	$\mathrm{SO}(2n)/\{\pm Id\}$	$\mathrm{SO}(2n)$

Empecemos diciendo que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie reductiva y $\mathfrak{g}_s = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es su parte semisiple con subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_s$ entonces $\mathfrak{g}$ tiene una subálgebra de Cartan dada por

$$\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_s.$$

Sabemos que $\mathfrak{g}$ es semisimple si y solo si $Z(G) = 0$, lo cual ocurre si y solo si $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_s$, como $\mathfrak{g}_s$ es semisimple vimos en 1.3.1 que el rango del lattice generado por las raíces $\Lambda \subset \mathfrak{h}_s^*$ es igual a la dimensión de $\mathfrak{h}_s^*$. Luego se tiene

$$Z(\mathfrak{g}) = 0 \iff \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_s \iff \dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}_s) \iff \dim(\mathfrak{h}^*) = \mathrm{Rank}(\Lambda),$$

por lo que el álgebra de Lie es semisimple si y solo si el rango del lattice generado por las raíces coincide con la dimensión de la subálgebra de Cartan.

En tipo A consideremos GL_n cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}_n$ de matrices de $n \times n$, en este caso el sistema de raíces es de tipo A formado por las raíces $e_i - e_j$ que generan el subespacio de vectores con suma

de coordenada 0, el cual tiene rango $n-1$. Mientras que la subálgebra de Cartan son las matrices diagonales, cuya dimensión es n, por lo que no es es semisimple.
También podemos considerar SL_n el cual es simplemente conexo, el álgebra de Lie de SL_n es sl_n compuesto por las matrices de traza 0. El sistema de raíces es un sistema de tipo A con raíces $e_i - e_j$ las cuales generan la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ formada por las matrices diagonales de traza 0, por lo que el álgebra de Lie es semisimple. Como SL_n es semisimple tiene misma álgebra de Lie que el grupo adjunto

$$\mathrm{PSL}_n = \mathrm{SL}_n / Z(\mathrm{SL}_n).$$

En los tipos B, C, D los grupos de la tabla son semisimples, ya que los sistemas de raíces generan la subálgebra de Cartan, o equivalentemente porque los centros son triviales.
En tipo B el grupo $\mathrm{SO}(2n+1)$ tiene álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n+1)$ la cual tiene un sistema de raíces de tipo B. Por otro lado el grupo $\mathrm{SO}(2n)$ tiene álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n)$ con sistema de raíces de tipo D.
El revestimiento simplemente conexo de $\mathrm{SO}(n)$ es un revestimiento de dos hojas dado por la sucesión exacta corta de grupos de Lie:

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n) \to 1.$$

El centro de $\mathrm{SO}(2n+1)$ es trivial por lo que el grupo adjunto en este caso es $\mathrm{SO}(2n+1)$, mientras que el centro de $\mathrm{SO}(2n)$ es $\{\pm Id\}$ por lo que el grupo adjunto en tipo D es $\mathrm{SO}(2n)/\{\pm Id\}$.
En tipo C el grupo simpléctico definido por $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{M \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} : M^t \Omega M = \Omega\right\}$ donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

tiene álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n)$ la cual tiene un sistema de raíces de tipo C. El grupo simpléctico es simplemente conexo y el grupo adjunto proviene de cocientarlo por su centro, el cuál es $\{\pm Id\}$.

1.3.4. Grupos algebraicos

Los grupos de la tabla de la subsección anterior son también grupos algebraicos, cuando construyamos el grupo de Chevalley obtendremos grupos algebraicos sobre otros cuerpos, como por ejemplo los cuerpos finitos. Dentro de un grupo algebraico hay algunos subgrupos importantes que ahora enunciamos.

Definición 36. Un **grupo algebraico** es una variedad algebraica G tal que la multiplicación y tomar inversa en el grupo son morfismos de variedades algebraicas.

Observación 9. Los grupos $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p), \mathrm{SO}_n(\mathbb{F}_p), \mathrm{Sp}(\mathbb{F}_p)$ son grupos algebraicos. El grupo

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

también es un grupo algebraico, que es isomorfo al grupo multiplicativo, el cual se denota G_m.

Definición 37. Un grupo algebraico es llamado un toro si es isomorfo a G_m^n para algún n. Se dice **toro maximal** de G a un subgrupo maximal con respecto a esta propiedad.

Definición 38. Sea G un grupo algebraico

a. Denotamos $D(G)$ al subgrupo $[G, G]$ y definimos por inducción

$$D^{i+1}(G) = D(D^i(G)) = [D^i(G), D^i(G)].$$

b. Denotamos por inducción $C^{i+1}(G) = [G, C^i(G)]$ con $C^1(G) = D^1(G)$.

c. El grupo G se dice **soluble** (**nilpotente**) si $D^i(G) = \{1\}$, respectivamente $C^i(G) = \{1\}$, para algún i.

Definición 39. Un subgrupo es unipotente si todos sus elementos son unipotentes, equivalentemente si existe una representación donde todos sus elementos son unipotentes. Se define el **radical unipotente** como un subgrupo normal, conexo, cerrado, unipotente maximal. Se define el **radical** como un subgrupo normal, cerrado, conexo, soluble, maximal.

Definición 40. Un **Subgrupo de Borel** es un subgrupo que es conexo, cerrado, soluble, maximal.

Definición 41. El grupo algebraico G se dice **semisimple** si el radical soluble es trivial, y se dice **reductivo** si el radical unipotente es trivial.

Definición 42. Se define el **Grupo de Weyl** como el cociente entre el normalizador del toro maximal y el toro.

Proposición 43. *Si B es un subgrupo de Borel, entonces B tiene una descomposición $B = U \rtimes T$ donde U es un subgrupo unipotente maximal y T un toro maximal contenidos en B.*

Capítulo 2

Grupos de Chevalley y objetos relacionados

En este capítulo empezaremos viendo como es la construcción del grupo de Chevalley, luego construiremos el grupo de Chevalley sobre un cuerpo finito sobre los tipos de Cartan clásicos y veremos que grupo obtenemos. Vamos a ver como son las relaciones que definen un grupo de Chevalley y usaremos argumentos de especialización para tener biyecciones entre distintas álgebras definidas a partir de un grupo de Chevalley, para eso será necesario comprender la descomposición de Bruhat y otros objetos relacionados. La mayoría de estas construcciones se pueden encontrar en [1].

2.1. Construcción del grupo de Chevalley

El objetivo de esta sección es ver como es la construcción de un **grupo de Chevalley** a partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ reductiva. Comenzaremos con $\mathfrak{g}$ semisimple y construiremos el grupo de Chevalley adjunto en $\mathbb{F}_p$ a modo de ejemplo. Luego lo haremos para cualquier representación y sobre cualquier cuerpo, finalmente veremos como construirlo en el caso de que $\mathfrak{g}$ no sea semisimple.

Reducción módulo un primo

El $\mathbb{Z}$ span $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ de una base de Chevalley $\{x_a, h_i\}$ es un lattice en $\mathfrak{g}$, independiente de la elección de las raíces simples Δ. Es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{Z}$ con el corchete de Lie restringido al lattice. Luego podemos considerar $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_p) = \mathfrak{g}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p$ definido por: $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_p)$ es el espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$ que se obtiene al tensorizar con este, tiene la base $\{x_a \otimes 1, h_{a_i} \otimes 1\}$, y la operación de corchete en $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ nos da una operación de corchete en $\mathfrak{g}(\mathbb{F}_p)$, que consiste en reducir módulo p a las constantes de estructura.

Las siguientes construcciones se pueden encontrar en [11] o en [1], el álgebra de Lie será semisimple en estas proposiciones.

Construcción del grupo de Chevalley adjunto

Proposición 44. *Si los x_a son los elementos de la base de Chevalley entonces $\mathrm{ad}(x_a)^m/m!$ deja $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ invariante.*

Gracias a esta proposición podemos afirmar que el lattice $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ es invariante bajo los morfismos

$$\exp(t \cdot \mathrm{ad}(x_a)) = \sum_{n \geq 0} t^n \,\mathrm{ad}(x_a)^n / n!,$$

con $t \in \mathbb{Z}$, esta suma es finita porque los x_a son nilpotentes (ya que $[x_a, x_{-a}]$ es isomorfo a sl_2 y allí eso vale). Luego el subgrupo generado por los

$$\exp(t \cdot \mathrm{ad}(x_a)), t \in \mathbb{Z}, a \in R$$

deja $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ invariante, por lo que está formado por matrices inversibles de deteminante 1. En particular si p es un primo y reducimos todas las matrices módulo p obtenemos un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}(\mathbb{F}_p))$, el cuál llamamos $G(\mathbb{F}_p)$, y es el Grupo de Chevalley adjunto en $\mathbb{F}_p$.

Construcción del Grupo de Chevalley en el caso semisimple

En general sea ϕ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V de dimensión finita. Resulta que V tiene un lattice (subgrupo abeliano que tiene una base que además es base de V) que es invariante bajo los operadores $\phi(x_a)^n/n!$, a este lattice lo llamamos $V(\mathbb{Z})$. Luego $V(\mathbb{Z})$ es invariante bajo los operadores

$$\exp(t \cdot \phi(x_a)) = \sum_{n \geq 0} \phi(x_a)^n/n!.$$

Notemos que son finitos sumandos porque ϕ es morfismo de álgebras de Lie, por lo que $\phi(x_a)$ es nilpotente. Luego el subgrupo generado por los $\exp(t \cdot \phi(x_a)), t \in \mathbb{Z}$ deja invariante $V(\mathbb{Z})$. Reduciendo módulo p el lattice obtenemos

$$V_p = V \otimes \mathbb{F}_p,$$

y reduciendo las matrices módulo p obtenemos un subgrupo de $\mathrm{Aut}(V_p)$ el cual llamamos $G(V_p)$, y es el grupo de Chevalley correspondiente a V.
Notemos que si $\phi = \mathrm{ad}$ nos queda el grupo de Chevalley adjunto y el lattice en ese caso es $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$, también observemos que es indiferente el orden en que se toma la exponencial o se reduce módulo p.
Más en general podemos construir el grupo de Chevalley sobre cualquier cuerpo k. Los operadores $\phi(x_a)^n/n!$ se pueden representar como matrices con coeficientes enteros en la base $V(\mathbb{Z})$, luego si t es una indeterminada las matrices $\exp(t \cdot \phi(x_a))$ son matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}[t]$. Luego podemos evaluar estas indeterminadas en los elementos de k y el grupo generado por estas matrices es el grupo de Chevalley en el cuerpo k.

Grupos de Chevalley en el caso no semisimple

Sea $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie reductiva, si $\mathfrak{h}_s$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_s$ entonces $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_s$ es una subálgebra de Cartan de g. Como un $\mathfrak{h}_s$ módulo $\mathfrak{g}_s$ se descompone como:

$$\mathfrak{g}_s \cong \mathfrak{h}_s \oplus \bigoplus_{0 \neq a \in \mathfrak{h}_s^*} (\mathfrak{g}_s)_a \qquad \text{con} \qquad (\mathfrak{g}_s)_a = \{X \in \mathfrak{g}_s : [H, X] = a(H)X \ , \forall H \in \mathfrak{h}_s\}$$

Sea $\{a_1, a_2 \dots a_l\}$ un conjunto de raíces simples de R. Como $\mathfrak{g}_s$ es un álgebra de Lie semisimple podemos construir una base de Chevalley

$$\{x_a, \ a \in R, h_{a_i}, 1 \leq i \leq l\}$$

como en 29. El siguiente paso en la construcción es análogo a 2.1, donde dada una representación de $\mathfrak{g}$ había un lattice invariante.

Sea V un $\mathfrak{g}$ módulo de dimensión finita con representación ϕ tal que V tiene una base $\{v_1, v_2 \dots v_r\}$ que satisface

a) Existe una base $\{H_1, H_2 \dots H_n\}$ de $\mathfrak{h}$ tal que

   1) $h_{a_i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ span $\{H_1, H_2 \dots H_n\}$.

2) $H_i v_j \in \mathbb{Z} v_j$ para todos los $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r$.

3) $\mathrm{Rank}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \ \mathrm{span}\{H_1, H_2 \dots H_n\}) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$.

b) $\dfrac{x_a^n}{n!} \ v_i \in \mathbb{Z} \ \mathrm{span}\{v_1, v_2 \dots v_r\}$ si $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in R$.

c) $\mathrm{Rank}_{\mathbb{Z}} \ (\mathbb{Z} \ \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_r\}) \leq \dim_{\mathbb{C}} V$.

Notemos que $\{v_1, v_2, \dots v_r\}$ generan un lattice $V(\mathbb{Z})$ invariante por los $\exp(t \cdot \phi(x_a)), \phi(H_i)$ donde ϕ es la representación de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ es semisiple la existencia de este lattice está garantizada. Sean

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \ \mathrm{span}\{H_1, H_2, \dots H_n\}$$

y

$$V_q = \mathbb{F}_q \ \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_r\}.$$

El grupo de Chevalley $G_V \in \mathrm{GL}(V_q)$ se define por

$$G_V = \langle x_a(t), h_H(s) : a \in R, H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, t \in \mathbb{F}_q, s \in \mathbb{F}_q^\times \rangle,$$

donde

$$x_a(t) = \sum_{n \geq 0} t^n \frac{\phi(x_a^n)}{n!}.$$

$$h_H(s) = \mathrm{Diag}(s^{\lambda_1(H)}, s^{\lambda_2(H)}, \dots s^{\lambda_r(H)}) \text{ si } H v_i = \lambda_i(H) v_i.$$

Notemos que la construcción del grupo de Chevalley es análoga a la de 2.1 pero agregando los elementos $h_H(s) \in \mathrm{Aut}(V_q)$. Al igual que antes se puede tomar la representación de definición o adjunta siempre y cuando exista el lattice, y más en general podemos hacer lo mismo sobre cualquier cuerpo k sobre $V(\mathbb{Z}) \otimes k$ al igual que en 2.1.

Observación 10. (a) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s$ se tiene $G_V = \langle x_a(t), a \in R \rangle$.

(b) Pedimos las hipótesis a, b para que al mirar las matrices $x_a(t), h_H(s)$ en la base $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ tengan coeficientes en $\mathbb{Z}$, para ver como son estas matrices en G_V simplemente hay que hacer la reducción módulo q de los coeficientes enteros.

(c) Podemos pensar que la construcción del grupo de Chevalley es una forma de pasar de álgebras de Lie a grupos algebraicos. La forma natural de hacerlo es con la exponencial, ya que es la forma en la que pasamos de un álgebra de Lie compleja a un grupo de Lie. Para eso podemos tomar la exponencial de un elemento nilpotente (debe serlo para que haya finitos sumandos) y luego tomar el subgrupo generado por estos elementos.
En el caso de que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sea el álgebra de Lie de un grupo de Lie complejo como $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ si construimos el grupo de Chevalley con la representación de definición sobre un cuerpo K obtendremos un subgrupo de $\mathrm{SO}_{2n+1}(K), \mathrm{SL}_n(K)$ respectivamente.

2.2. Álgebras de Hecke

Sean $H \leq G$ subgrupos finitos, llamamos **álgebra de Hecke** al álgebra $\mathcal{H}(G,H)$ de funciones H bivariantes de G a $\mathbb{C}$ con suma puntual. El producto está dado por la convolución

$$(\phi_1 * \phi_2)(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\phi_1(x)\phi_2(x^{-1}g).$$

El álgebra $\mathcal{H}(G,H)$ tiene una base indexada en las coclases dobles de H en G. Si $W \subset G$ es un sistema completo de representantes de coclases dobles de H en G entonces las indicadoras de las clases

$$\phi_w = \mathbb{1}_{HwH} \tag{2.1}$$

forman una base de $\mathcal{H}(G,H)$. Notemos que $\mathbb{1}_H$ es la identidad con este producto de convolución, no es difícil ver que el álgebra es asociativa. El siguiente lema nos da un isomorfismo entre $\mathcal{H}(G,H)$ y $\operatorname{End}_G \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$.

Lema 10. *Si G es un grupo finito y H un subgrupo se tiene:*

$$\mathcal{H}(G,H) \cong \operatorname{End}_G \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H.$$

Demostración. Primero notemos que por la definición de inducción $\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$ es isomorfo a $\mathbb{C}[G,H]$, que es el espacio de funciones H invariantes a derecha de G a $\mathbb{C}$.
Si $F \in \mathcal{H}(G,H)$ consideremos la función $F^* \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G,H]$ dada por

$$f \mapsto F * f.$$

No es difícil ver que la imagen está incluida en $\operatorname{End}_G\ \mathbb{C}[G,H]$, luego podemos considerar la función $* : \mathcal{H}(G,H) \to \operatorname{End}_G \mathbb{C}[G,H]$ dada por

$$F \mapsto F^*.$$

Notemos que como la convolución es asociativa entonces $*$ es un morfismo, veamos que es isomorfismo. Tenemos

$$\operatorname{End}_G \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H = \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H, \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H) = \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Res}_H^G(\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H), \mathbb{1}_H) = \operatorname{Hom}_H(\mathbb{C}[G,H], \mathbb{C}),$$

donde usamos reciprocidad de Frobenius. El último término es igual a las funciones H bivariantes de G a $\mathbb{C}$, por lo que ambas álgebras tienen igual dimensión, para ver que es un isomorfismo alcanza con ver que es inyectiva.
Supongamos $F^* = 0$, en ese caso tendríamos

$$\sum_{x\in G} F(x)f(x^{-1}g) = 0$$

para toda $f \in \mathbb{C}[G,H]$ y para todo g, si tomamos $f = \mathbb{1}_H$ tenemos que

$$\sum_{h\in H} F(gh) = 0$$

para cualquier $g \in G$, como F es H bivariante obtenemos que $F(g) = 0$, por lo que es nula y, por lo tanto, $*$ es inyectiva. $\square$

Ahora veamos otra forma de pensar a $\mathcal{H}(G,H)$ en el caso de que H sea finito. Un idempotente e es un elemento que cumple $e^2 = e$, si H es finito podemos considerar el elemento

$$e_1 = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h,$$

que es un idempotente. No es difícil ver que este idempotente cumple

$$\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H \cong \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H \cong \mathbb{C}Ge_1,$$

y el mapa

$$\begin{aligned}\theta_1 : e_1\mathbb{C}Ge_1 &\to \mathcal{H}(G,H),\\ e_1ge_1 &\mapsto \phi_g,\end{aligned}$$

donde ϕ_g está definido por

$$\begin{aligned}\phi_g : \mathbb{C}Ge_1 &\to \mathbb{C}Ge_1,\\ ke_1 &\mapsto ke_1ge_1,\end{aligned}$$

es un anti-isomorfismo.

Observación 11 (**Relación con el álgebra de grupo**). El álgebra de grupo se puede pensar como el espacio de funciones de G a $\mathbb{C}$ con el producto de convolución $*_G$ dado por

$$(\sigma_1 *_G \sigma_2)(x) = \sum_{a\in G}\sigma_1(a)\sigma_2(a^{-1}x).$$

Es claro que $\mathcal{H}(G,H)$ se puede ver incluido en $\mathbb{C}[G]$, con esta inclusión la relación entre $*$ (el producto de convolución en $\mathcal{H}(G,H)$) y $*_G$ está dada por

$$\sigma_1 *_G \sigma_2 = |H|\,\sigma_1 * \sigma_2 \tag{2.2}$$

Ahora probemos un lema que será útil luego.

Lema 11. *Sea G_1 un subgrupo de índice 2 de un grupo G y sean $H_1 \le G_1, H \le G$ subgrupos tales que $H_1 \subset H$ y $H \notin G_1$. Supongamos además que $\dim\mathcal{H}(G,H) = \dim\mathcal{H}(G_1,H_1)$ y que un sistema de representantes de coclases dobles de H en G también es un sistema de H_1 en G_1. En ese caso se tiene $\mathcal{H}(G,H) \cong \mathcal{H}(G_1,H_1)$.*

Demostración. Denotemos con W al conjunto de representantes de ambas coclases dobles y tomemos $g \in H$ un elemento que no está en G_1. Sea HwH una coclase doble de H en G, sabemos que $H_1wH_1 \amalg H_1wH_1g \subset HwH$, la unión es disjunta porque $H_1wH_1 \subset G_1$ y $g \notin G_1$. Entonces tenemos

$$G_1 \amalg G_1g = \coprod_{w\in W} H_1wH_1 \amalg H_1wH_1g \subset \coprod_{w\in W} HwH = G.$$

Como $(G:G_1) = 2$ tenemos que la última inclusión tiene que ser una igualdad, en particular tenemos que

$$HwH = H_1wH_1 \amalg H_1wH_1g \tag{2.3}$$

Llamemos ϕ_w, T_w a las funciones características de las coclases de w en G_1, G respectivamente. Definamos

$$\sigma : \mathcal{H}(G,H) \to \mathcal{H}(G_1,H_1) \qquad T \mapsto T|_{G_1}.$$

Como $H_1 \subset H$ y T es H bivariante se tiene que $T|_{G_1}$ también lo es, por lo que la función está bien definida. Usando la ecuación (2.3) se tiene que $T_w \mapsto \phi_w$, por lo que σ es una función sobreyectiva y como las dimensiones son iguales es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para ver que es un isomorfismo de álgebras alcanza con ver que σ respeta el producto de convolución. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G,H)$ y $w \in W$, se tiene

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(w) &= \frac{1}{|H|}\left(\sum_{x\in G_1} f_1(x)f_2(x^{-1}w) + \sum_{y\in G_1 g} f_1(y)f_2(y^{-1}w)\right) \\ &= \frac{1}{|H|}\left(\sum_{x\in G_1} f_1(x)f_2(x^{-1}w) + \sum_{y\in G_1 g} f_1(yg)f_2(g^{-1}y^{-1}w)\right) \\ &= \frac{1}{|H|}\, 2\sum_{x\in G_1} f_1(x)f_2(x^{-1}w) = \frac{2\,|H_1|}{|H|}\sigma(f_1) * \sigma(f_2)(w) \end{aligned}$$

por lo que σ respeta la convolución si reescalamos. □

Representaciones del álgebra de Hecke

Sean $H \leq G$ grupos, queremos ver como son las representaciones irreducibles de $\mathcal{H}(G,H)$. Sea (V,π) una representación irreducible de G y sea V^H el subespacio fijado por H. Luego V^H es una representación de $\mathcal{H}(G,H)$ vía la acción

$$\phi.v = \frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\phi(a)\ a\cdot v$$

para $\phi \in \mathcal{H}(G,H),\ v \in V^H$. Es fácil ver que la acción está bien definida.
Notemos que podemos identificar

$$\mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}_H, \mathrm{Res}_H^G V) \cong V^H.$$

Luego tenemos definido un mapa $D_H : \mathrm{Rep}\ G \to \mathrm{Rep}\ \mathcal{H}(G,H)$

$$(V,\pi) \to V^H.$$

Llamemos por otro lado

$$\mathrm{Irr}(G:H) = \left\{\eta \in \mathrm{Irr}(G) : (\eta, \mathbb{1}_H^G) > 0\right\};$$

notemos que esto es equivalente a que $\mathbb{1}_H$ sea un factor irreducible de Res_H^G si usamos la reciprocidad de Frobenius. En [12, Proposición 2.10] se prueba que:

Proposición 45. *Sea (V,π) una representación irreducible de G tal que $V^H \neq 0$, luego V^H es una representación irreducible de $\mathcal{H}(G,H)$, y de hecho todas provienen de esta forma, por lo que D_H se restringe a una biyección $D_H : \mathrm{Irr}(G:H) \to \mathcal{H}(G,H)$.*

2.3. Subgrupos importantes del Grupo de Chevalley

Ahora describimos como son algunos subgrupos del grupo de Chevalley como el toro maximal, el unipotente maximal, el normalizador del toro maximal y el grupo de Weyl.

2.3.1. Los grupos U,N,T,W

El grupo de Chevalley G contiene un subgrupo U dado por

$$U = \langle x_a(t) : a \in R^+, t \in \mathbb{F}_q \rangle$$

que se descompone como

$$U = \prod_{a \in R^+} U_a \text{ con } U_a = \langle x_a(t) : t \in \mathbb{F}_q \rangle. \tag{2.4}$$

Para cada $a \in R^+$ la función

$$\begin{aligned} U_a &\to \mathbb{F}_q, \\ x_a(t) &\mapsto t, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. El subgrupo U es el unipotente maximal de G y además la misma definición y propiedades se mantienen para cualquier cuerpo k. Para cada $a \in R$ definimos las funciones:

$$\begin{aligned} s_a : h^* &\to h^*, \\ y &\to y - y(H_a)a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_a : h = Z(g) \oplus h_s &\to h, \\ H + H_b &\to H + H_b - a(H_b)H_a. \end{aligned}$$

En 1.3.1 habíamos dicho que $h_{\mathbb{Z}}$ se piensa como un lattice Λ y las raíces las podemos ver dentro del lattice dual $\Lambda^* = \operatorname{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$, adentro del lattice Λ tenemos los elementos $(H_a)_{a \in R}$, y dentro del lattice Λ^* tenemos las raíces $a \in R$. Se tiene una biyección $H_a \mapsto a$ que satisface $a(H_a) = 2$ (por ser ϕ_a morfismo de álgebras de Lie) y $a(H_b) \in \mathbb{Z}$ para $a, b \in R$. Esto nos dice que estos elementos conforman un Sistema de datos y que las s_a son las simetrías definidas en él.

El grupo de Weyl de G es $W = \langle s_a : a \in R \rangle$ y tiene una presentación dada por

$$W = \langle s_1, s_2, \dots s_l \mid s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ si } i \neq j \rangle,$$

$m_{ij} > 0$, $s_i = s_{a_i}$. Esto nos dice que W es un grupo de Coxeter generado por las simetrías correspondientes a las raíces simples. Si $w \in W$ definimos $l(w)$ como su longitud en este grupo de coxeter. Si $q > 3$ el grupo

$$T = \langle h_H(t) : H \in h_{\mathbb{Z}}, t \in \mathbb{F}_q^\times \rangle$$

tiene normalizador

$$N = \langle w_a(t), h \mid a \in R, h \in T, t \in \mathbb{F}_q^\times \rangle \text{ con } w_a(t) = x_a(t) x_{-a}(-t^{-1}) x_a(t).$$

Notemos que T es el toro maximal, el cual a partir de ahora llamaremos simplemente toro, y que N es el normalizador del toro, por lo que que el grupo W definido anteriormente es isomorfo a N/T. Hay un morfismo de grupos sobreyectivo

$$\begin{aligned} \pi : N &\to W, \\ w_a(t) &\mapsto s_a, \\ h &\mapsto 1 \qquad \text{si } h \in T, \end{aligned} \tag{2.5}$$

con núcleo T. LLamamos $h_a(t)$ a $h_{H_a}(t)$ y $h_i(t)$ a $h_{H_{a_i}}(t)$ si a_i es una raíz simple, y denotamos $\xi_i = w_i(1)$.

Proposición 46. [1, Teorema 6]
Al construir el grupo de Chevalley obtenemos un grupo algebraico en el cual los subgrupos U, N, T, W construidos en 2.3 son el unipotente maximal, el normalizador del toro, el toro y el grupo de Weyl respectivamente. Además si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces G también lo es.

2.3.2. El álgebra de Yokonuma

Si G es un grupo de Chevalley y U es el unipotente maximal se define el álgebra de Yokonuma como $\mathcal{H}(G, U)$. El grupo G tiene una descomposición

$$\bigsqcup_{v \in N} UvU.$$

Sea $\mathbb{1} : U \to \mathbb{C}$ es el caracter trivial y e_1 su idempotente asociado

$$e_1 = \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u.$$

Luego por lo ya visto el álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}_1 \cong e_1 \mathbb{C}G e_1$, además gracias a esta descomposición tiene una base

$$\{e_1 v e_1 : v \in N\}.$$

Para $v \in N$ escribimos $T_v = e_1 v e_1$, $T_i = T_{\xi_i}$ y $h = T_h$ si $h \in T$.
Esto va a ser importante para encontrar las ralaciones del álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G, U)$.

2.4. Relaciones en el grupo de Chevalley y teorema de Yokonuma

Sabemos que el grupo G está generado por U y N gracias a la descomposición en coclases dobles, se pueden describir las relaciones que definen a los grupos U y N y también las relaciones entre ellos, estas relaciones nos dan una descripción de G. Tenemos las relaciones en U, en N y las relaciones entre U y N.

(U1) $x_a(t)x_a(s) = x_a(t+s)$.

(U2) $x_a(t)x_b(s)x_a(t)^{-1}x_b(s)^{-1} = \prod_{y=ia+bj \in R^+ \ i,j>0} x_y(z_y t^i s^j)$;

donde las z_y son constantes que dependen de i, j, a, b.

(N1) $\xi_i^2 = h_i(-1)$

(N2) $\underbrace{\xi_i \xi_j \xi_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{\xi_i \xi_j \xi_i \dots}_{m_{ij}}$ donde m_{ij} es el orden de s_{ij} en W.

(N3) $\xi_i h_H(t) = h_{s_i(H)}(t)$.

(N4) $h_H(s)h_H(t) = h_H(st)$.

(N5) $h_H(s)h_{H'}(t) = h_H(t)h_{H'}(s)$.

(N6) $h_H(t)h_{H'}(t) = h_{H+H'}(t)$.

(N7) $h_{H_1}(t_1)h_{H_2}(t_2)\dots h_{H_k}(t_k) = 1$ si $t_1^{\lambda_j(H_1)}t_2^{\lambda_j(H_2)}\dots t_k^{\lambda_j(H_k)} = 1$ para todo $1 \le j \le n$.

(UN1) $\xi_i x_a(t)\xi_i^{-1} = x_{s_i(a)}(c_{ia}t)$, $C_{ia} = \pm 1(c_{ia_i} = -1)$.

(UN2) $hx_a(t)h^{-1} = x_a(a(h)t)$.

(UN3) $\xi_i x_i(t).\xi_i = x_i(t^{-1})h_i(t^{-1})\xi_i x_i(t^{-1})$, si $t \neq 0$.

Si $a \in R$ definimos $e_a = \frac{1}{q}\sum_{t\in\mathbb{F}_q} x_a(t)$, es fácil notar que los e_a son idempotentes y debido a la descomposición

$$U = \prod_{a\in R^+} U_a \quad \text{se tiene} \quad e_1 = \prod_{a\in R^+} e_a.$$

En particular dada $a \in R^+$ se puede elegir un orden de las raíces positivas de modo que e_a aparezca al principio o al final de la descomposición de e_1, y, por lo tanto, como e_a es un idempotente se tiene $e_1e_a = e_ae_1$. Se pueden deducir otras propiedades de estos elementos gracias a las relaciones ya mencionadas:

(E1) $\xi_i e_a \xi_i^{-1} = e_{s_i(a)}$.

(E2) $e_a h = he_a$, $h \in T$.

(E3) $e_1 x_a(t) = x_a(t)e_1 = e_1$.

El siguiente teorema nos da una presentación del álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G,U)$.

Teorema 47 (**Yokonuma**). $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(G,U)$ *está generada por* $T_i, 1 \le i \le l, h \in T$ *con relaciones:*

(Y1) $T_ih = s_i(h)T_i$.

(Y2) $\underbrace{T_iT_jT_i\dots}_{m_{ij}} = \underbrace{T_jT_iT_j\dots}_{m_{ij}}$, *con* m_{ij} *el orden de* (s_is_j) *en* W.

(Y3) $T_hT_k = T_{hk}$ *si* $h,k \in T$.

(Y4) $T_i^2 = q^{-1}h_i(-1) + q^{-1}\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} h_i(t)T_i$.

Demostración. Veamos que se cumplen estas relaciones, para ver que son suficientes se usa un argumento parecido al de [13, Teorema 3.5]. Consideremos $\xi_i\xi_j$ para $i \neq j$. Notemos que

$$\begin{aligned} e_1\xi_i\xi_je_1 &= e_1(\prod_{a\neq a_i} e_a)\xi_i\xi_j e_{s_j(a_i)}e_1 \\ &= e_1\xi_i(\prod_{a\neq a_i} e_a)e_{a_i}\xi_je_1, \quad \text{por la propiedad } E_1 \\ &= (e_1\xi_ie_1)(e_1\xi_je_1). \end{aligned}$$

Notemos que en la segunda igualdad usamos que s_i preserva la positividad de las raíces salvo por a_i (ya que tiene longitud 1 en el grupo de Weyl). Entonces si $v = v_1v_2\dots v_rv_T$ se descompone como $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_r}$ con $v_T \in T$ por lo recién visto tenemos

$$T_v = e_1v_1v_2\dots v_rv_Te_1 = T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_r}v_T; \tag{2.6}$$

esto nos dice que el álgebra de Yokonuma está generada por los T_i y los $h \in T$, la ecuación (2.6) junto con $(N2)$ nos da la relación $(Y2)$, mientras que la ecuación (2.6) junto con la $(N3)$ nos da la relación $(Y1)$ y la ecuación (2.6) junto con las restantes ecuaciones de N implican $(Y3)$. Veamos la relación $(Y4)$.

$$
\begin{aligned}
T_i^2 =& e_1\xi_i e_1 \xi_i e_1 = e_1\xi_i e_{a_i}\xi_i e_1 \text{ por } (E1)\\
=& q^{-1}\left(e_1\xi_i^2 e_1\right) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} e_1\xi_i x_{a_i}(t)\xi_i e_1\Big)\\
=& q^{-1}(e_1 h_i(-1)e_1) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} e_1 x_i(t^{-1})h_i(t^{-1})\xi_i x_i(t^{-1})e_1\Big) \text{ por (N1) y (UN3)}\\
=& q^{-1}h_i(-1) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} e_1 h_i(t^{-1})\xi_i e_1\Big) \text{ por (E3).}
\end{aligned}
$$

Por otro lado sabemos que e_1 conmuta con los $h \in T$ por la propiedad $(E2)$, luego tenemos $e_1 h_i(t^{-1}) = e_1 e_1 h_i(t^{-1}) = e_1 h_i(t^{-1})e_1$, reemplazando esto en la ecuación nos queda

$$
\begin{aligned}
T_i^2 =& q^{-1}h_i(-1) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} e_1 h_i(t^{-1})\xi_i e_1\Big)\\
=& q^{-1}h_i(-1) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} e_1 h_i(t^{-1})e_1\xi_i e_1\Big)\\
=& q^{-1}h_i(-1) + q^{-1}\Big(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} h_i(t)T_i\Big),
\end{aligned}
$$

que es la relación $(Y4)$. □

2.5. Relaciones álgebra de Yokonuma tipos A,B,C,D

En la sección anterior vimos como son las relaciones que definen el álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G,U)$, donde G es un grupo de chevalley y U su unipotente maximal. El objetivo de esta sección es ver como nos quedan estas relaciones cuando tomamos las álgebras de Lie correspondientes a los tipos A, A', B, C, D, donde con A' nos vamos a referir al álgebra de Lie de SL_n y con A a la de GL_n. Denotamos con G_V al grupo de chevalley con respecto a un sistema de raíces de tipo V. En todos los casos usaremos la representación de definición para construir el grupo de Chevalley.

2.5.1. Tipo A

Consideremos el grupo de Lie $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de matrices inversibles. Con el mapa exponencial vemos que el álgebra de Lie de G es

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}\}.$$

Tenemos que el álgebra de Lie es reductiva pero no semisimple ya que

$$Z(\mathfrak{gl}) = \lambda \ \mathrm{Id}\,.$$

Una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ son las matrices diagonales.

Tomamos la representación de definición y los elementos H_i son $E_{i,i}$. Sean los funcionales lineales $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$. Tenemos que el sistema de raíces es $R = \{e_j - e_i : 1 \leq i \neq j \leq n\}$. En la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{a \in R} g_a$ los espacios de raíces tienen los generadores

$$\{X_a\} = \{E_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq n\},$$

donde $X_{e_i - e_j} = E_{j,i}$. Las matrices $H_a = [X_a, X_{-a}]$ son

$$\{H_a\} = \{E_{j,j} - E_{i,i}\},$$

donde $H_{e_i - e_j} = E_{j,j} - E_{i,i}$.

Es claro que estos elementos cumplen $[X_a, X_{-a}] = H_a$. Definamos $\sigma(X) = -X^{\mathrm{t}}$, entonces σ es un automorfismo del álgebra de Lie que cumple $\sigma(E_{i,j}) = -E_{j,i}$, por lo que $\sigma(X_r) = -X_{-r}$, luego se cumple 30 y estos elementos forman una base de Chevalley de $\mathfrak{g}_s$.

Tenemos que si $a = e_j - e_i$ entonces $X_a^2 = 0$, por lo que

$$\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tE_{i,j}.$$

De la definición de $h_H(s) = \mathrm{Diag}(s^{\lambda_1(H)}, s^{\lambda_2(H)}, \ldots s^{\lambda_n(H)})$ tenemos que si $H = h_1 H_1 + h_2 H_2 + \ldots h_n H_n$ entonces

$$h_H(s) = \begin{bmatrix} s^{h_1} & & & & & \\ & s^{h_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & s^{h_{n-1}} & \\ & & & & & s^{h_n} \end{bmatrix}.$$

Luego el toro está generado por matrices de esta forma.

Sabemos que el grupo de Chevalley en tipo A es $G_A = \langle x_a(t), h_H(s) : a \in R, H \in \mathfrak{h}, t \in \mathbb{F}_q, s \in \mathbb{F}_q^{\times} \rangle$. Es conocido que las matrices $Id + tE_{i,j}$ generan SL_n, mientras que las $h_H(s)$ generan el grupo de matrices diagonales inversibles, por lo que $G_A = \mathrm{GL}_n$.
Recordemos que tenemos un Sistema de datos $(\Lambda, \phi, \Lambda^*, \phi^*)$ donde $\Lambda = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, $\phi = \{H_a : a \in R\}$, $\Lambda = \{\beta \in \mathfrak{h}^* : \beta(\phi) \in \mathbb{Z}\}$, y $\phi^* = R$. Se tiene

$$R = \{e_i - e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}, \; \phi^* = \{H_i - H_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Los elementos distinguidos forman un sistema de raíces de tipo A en el lattice $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, mientras que las raíces forman un sistema de raíces de tipo A en el lattice dual. Las raíces simples en este caso son $\{e_2 - e_1, e_3 - e_2, \ldots e_n - e_{n-1}\}$ mientras que las raíces positivas son $\{e_j - e_i : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Relaciones del álgebra de Yokonuma de tipo A:

Recordemos que las relaciones que determinan el álgebra de Yokonuma son $(Y1), (Y2), (Y3), (Y4)$. Veamos como nos quedan las relaciones. Sea t_g un generador de $\mathbb{F}_q^{\times}$, y ordenemos las raíces de R de la forma $\{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\} = \{e_2 - e_1, \ldots e_n - e_{n-1}\}$. Renombremos algunos elementos de la siguiente forma:

$$t_j = h_{H_j}(t_g) \text{ con } 1 \leq j \leq n, \;\; g_i = T_i = T_{\xi_i}.$$

La relación $(Y3)$ nos dice que las T_h se comportan de la misma forma que en T. Gracias a las relaciones $(N4),(N5),(N6),(N7)$ y usando que t_g es un generador de $\mathbb{F}_q^\times$ tenemos que T está generado por $t_1, t_2, \ldots t_n$ con relaciones:

$(A1)$ $t_i t_j = t_j t_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

$(A2)$ $t_i^{q-1} = 1, 1 \leq i \leq n$.

Notemos que T es isomorfo a un $(\mathbb{F}_q^\times)^n$. La relación $(Y2)$ nos dice que las relaciones entre los g_i son las mismas que en el grupo de Weyl, donde g_i se corresponde con s_i, luego las relaciones nos quedan:

$(A3)$ $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1$.

$(A4)$ $g_i g_j = g_j g_i,\ 1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| > 1$.

Veamos que nos dice la relación $(Y1)$, se tiene $T_i = g_i$ y $s_{a_i} = s_{i-1}$, luego esto nos da la relaciones:

$(A5)$ $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

Ahora veamos como nos queda la relación $(Y4)$. Se tiene que

$$h_i(t) = h_{H_{a_i}}(t) = h_{H_i - H_{i-1}}(t) = h_{H_i}(t) h_{H_{i-1}}(t^{-1}).$$

Luego si $t = t_g^j$ tenemos $h_i(t) = t_i^j t_{i-1}^{-j}$, en particular tenemos $h_i(-1) = t_i^{\frac{q-1}{2}}\ t_{i-1}^{\frac{q-1}{2}}$. Por lo tanto las relaciones nos quedan:

$(A6)$ $g_i^2 = q^{-1} t_{i+1}^{\frac{q-1}{2}}\ t_i^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} t_{i+1}^j t_i^{-j} g_i$ si $1 \leq i \leq n-1$.

Luego las relaciones de $(A1)$ a $(A6)$ son las que determinan el álgebra de Yokonuma de tipo A.

Observación 12. [**Tipo A'**] Si en vez de considerar GL_n hubiésemos tomado SL_n la mayoría de los argumentos se mantienen. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es sl_n que son las matrices de traza 0, la cual es semisiple porque el centro es trivial. La subálgebra de Cartan nos queda las matrices diagonales de traza 0 y cuando tomamos la representación de definición del álgebra de Lie los elementos H_i son iguales a $E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$.
El sistema de raíces sigue siendo el mismo, pero ahora el grupo de Chevalley está generado por los elementos $\exp(t \cdot x_a) = Id + t x_a$, los cuales generan el grupo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.
En las relaciones del álgebra de Yokonuma los generadores y relaciones son las mismas salvo por las del toro. El toro en SL_n son las matrices diagonales de determinante 1, pero no es isomorfo a $(F_q^\times)^n$, es isomorfo a $(F_q^\times)^{n-1}$ ya que se agrega la condición de que el determinante es 1. La misma situación ocurre con las relaciones de N.

2.5.2. Tipo B

Consideremos el grupo de Lie $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, de matrices de determinante 1 que preservan la forma bilineal dada por la matriz $J = \mathrm{AntiDiag}(1, 1, \ldots, 2, 1, \ldots 1)$, la matriz anti-diagonal con un 2 en la casilla central y 1 en las otras entradas.

Con el mapa exponencial vemos que el álgebra de Lie de G es

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{(2n+1)\times(2n+1)} : JA + A^t J = 0\right\}.$$

En este caso tenemos que el álgebra de Lie es semisimple, la subálgebra de Cartan es $\mathfrak{h} = \{H \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ de la forma $(*)\}$

$$(*) = \begin{bmatrix} h_1 & & & & & & \\ & h_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -h_2 & \\ & & & & & & -h_1 \end{bmatrix}.$$

Antes de seguir vamos a fijar notación. Si tenemos una matriz de $2n \times 2n$ y $i \leq n$ vamos a decir $-i$ cuando nos referimos a la coordenada $2n - i + 1$. Vamos a usar la misma notación cuando la matriz es de tamaño $2n + 1 \times 2n + 1$, en este caso nos referiremos con 0 a la coordenada central.

Definimos las matrices

$$F_{i,j} = E_{-i,j} - E_{-j,i}, \quad F_{i,0} = 2E_{-i,0} - E_{0,i}, \quad F_{j,0} = -F_{0,j}, \tag{2.7}$$

$$H_{i,j} = F_{i,-i} + F_{j,-j}, \quad H_{i,0} = 2F_{i,-i}, \quad H_{0,j} = 2F_{j,-j}. \tag{2.8}$$

Sean los funcionales lineales $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$, luego tenemos que el sistema de raíces es $R = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm e_k : 1 \leq k \leq n\}$. En la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{a \in R} \mathfrak{g}_a$ los espacios de raíces tienen los generadores

$$\{X_a\} = \{F_{ij}, i \neq -j\}.$$

Las matrices $H_a = [X_a, X_{-a}]$ son

$$\{H_a\} = \{H_{i,j}, i \neq -j\},$$

donde $X_r = F_{i,j}$ y $X_{-r} = F_{-j,-i}$ si $H_r = H_{i,j}$.
Es claro que estos elementos cumplen $[X_a, X_{-a}] = H_a$. Definamos $\sigma(X) = -P^{-1}X^tP$ con

$$P = 2E_{0,0} + \sum_{i=1}^{n}(E_{i,i} + E_{-i,-i});$$

entonces σ es un automorfismo del álgebra de Lie que cumple $\sigma(F_{i,j}) = -F_{-i,-j}$, por lo que $\sigma(X_r) = -X_{-r}$, luego se cumple 30 y estos elementos forman una base de Chevalley.
Volvemos a tomar la representación de definición y se tiene $H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$. Notemos que estos elementos distinguidos forman un sistema de raíces de tipo C en el lattice $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, mientras que las raíces forman un sistema de raíces de tipo B en el lattice dual. Las raíces simples en este caso son $\{e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \ldots e_n - e_{n-1}\}$ mientras que las raíces positivas son $\{e_j \pm e_i : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Tenemos que si $a = \pm e_i \pm e_j$ entonces $X_a^2 = 0$, por lo que

$$\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tX_a.$$

Mientras que si $X_a = F_{i,0}$ se tiene $X_a^3 = 0$ y $X_a^2 = -2E_{-i,i}$, luego

$$\exp(t \cdot X_r) = \mathrm{Id} + t(2E_{-i,0} - E_{0,i}) - t^2 E_{-i,i}.$$

Notemos que todas estas matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$, al igual que las matrices H_a, por lo que en la representación de definición el lattice está generado por la base canónica.
Como $\mathfrak{so}_{2n+1}$ es semisimple sabemos $G_B = \langle x_a(t) : a \in R, t \in \mathbb{F}_q^\times \rangle$, notemos que $x_a(t)$ vista como matriz de coeficientes complejos es $\exp(t \cdot X_a)$, como tX_a está en el álgebra de Lie entonces con la exponencial estamos volviendo al grupo de Lie, por lo que las $\exp(t \cdot X_a)$ están en $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, con la forma bilineal J. Como estas matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$ entonces al reducir módulo q caemos en $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$, con la forma bilineal dada por J.

Recordando que $h_H(t) = \mathrm{Diag}(t^{\lambda_1(H)}, t^{\lambda_2(H)}, \ldots t^{\lambda_n(H)})$ tenemos que si $H = h_1 H_1 + h_2 H_2 + \ldots h_n H_n$ entonces

$$h_H(t) = \begin{bmatrix} t^{a_1} & & & & & & \\ & t^{a_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & t^{-a_2} & \\ & & & & & & t^{-a_1} \end{bmatrix}.$$

Luego el toro son las matrices de esta forma.

Relaciones del álgebra de Yokonuma de tipo B:

Veamos como nos quedan las relaciones del álgebra de Yokonuma en este caso. Sea t_g un generador de $\mathbb{F}_q^\times$ y ordenemos las raíces de R de la forma $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} = \{e_1, e_2 - e_1, \ldots e_n - e_{n-1}\}$. Renombremos algunos elementos de la siguiente forma:

$$t_j = h_{H_j}(t_g) \text{ con } 1 \le j \le n, \;\; b_1 = T_1 = T_{\xi_1},\; g_i = T_i = T_{\xi_{i-1}}.$$

La relación $(Y3)$ nos dice que las T_h se comportan de la misma forma que en T. Gracias a las relaciones $(N4), (N5), (N6), (N7)$ y usando que t_g es un generador de $\mathbb{F}_q^\times$ tenemos que T está generado por $t_1, t_2, \ldots t_n$ con relaciones:

(B1) $t_i t_j = t_j t_i$ si $1 \le i, j \le n$.

(B2) $t_i^{q-1} = 1, 1 \le i \le n$.

Nuevamente que T es isomorfo a un $(\mathbb{F}_q^\times)^n$. La relación $(Y2)$ nos dice que las relaciones entre los g_i son las mismas que en el grupo de Weyl donde b_1 se corresponde con t y g_i se corresponde con s_i, luego las relaciones nos quedan:

$(B3)$ $b_1 g_1 b_1 g_1 = g_1 b_1 g_1 b_1$.
$(B4)$ $b_1 g_i = g_i b_1$ si $i > 1$.
$(B5)$ $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1},\; 1 \le i \le n-1$.
$(B6)$ $g_i g_j = g_j g_i,\; 1 \le i, j \le n-1$ si $|i - j| > 1$.

Veamos que nos dice la relación $(Y1)$, si $i > 1$ entonces $T_{i-1} = g_i$ y $s_{a_i} = s_i$, luego esto nos da las relaciones:

$(B7)$ $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

Si $i = 1$ entonces $T_1 = b_1$ y $s_{a_1} = t$, como $t(H_1) = -H_1, t(H_2) = H_2, \dots t(H_n) = H_n$ y usando que $h_{-H_1}(t_g) = h_{H_1}(t_g)^{-1}$ gracias a $(N6)$ tenemos las relaciones:

$(B8)$ $t_1 b_1 t_1 = b_1$.

$(B9)$ $b_1 t_j = t_j b_1$ si $j > 1$.

Ahora veamos como nos queda la relación $(Y4)$. Supongamos primero que $i > 1$. Este caso es igual que antes, si $t = t_g^j$ tenemos $h_i(t) = t_i^j t_{i-1}^{-j}$, en particular tenemos $h_i(-1) = t_i^{\frac{q-1}{2}} t_{i-1}^{\frac{q-1}{2}}$. Por lo tanto las relaciones nos quedan:

$(B10)$ $g_i^2 = q^{-1} t_{i+1}^{\frac{q-1}{2}} t_i^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} t_{i+1}^j t_i^{-j} g_i$ si $1 \leq i \leq n-1$.

Si $i = 1$ tenemos

$$h_1(t) = h_{H_{a_1}}(t) = h_{2H_1}(t) = h_{H_1}(t^2) = h_{H_1}(t)^2$$

luego obtenemos $h_1(-1) = h_{H_1}(1) = 1$ y si $t = t_g^j$ tenemos $h_1(t) = h_{H_1}(t_g^{2j}) = t_1^{2j}$, lo que nos da la relación:

$(B11)$ $b_1^2 = q^{-1} + q^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} t_1^{2j} b_1$.

Luego las relaciones de $(B1)$ a $(B11)$ son las que determinan el álgebra de Yokonuma de tipo B.

2.5.3. Tipo D

Consideremos el grupo de Lie $G = \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, de matrices de determinante 1 que preservan la forma bilineal dada por $L = \mathrm{AntiDiag}(1, 1, \dots, 1)$, la matriz con unos en la antidiagonal. Con el mapa exponencial vemos que el álgebra de Lie de G es $\mathfrak{so}_{2n} = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} : LA + A^t L = 0 \right\}$, en este caso tenemos que el álgebra de Lie es semisimple, la subálgebra de Cartan es $\mathfrak{h} = \{ H \in \mathfrak{so}_{2n}$ de la forma $(*)\}$

$$(*) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} h_1 & & & & & & \\ \hline & h_2 & & & & & \\ \hline & & h_3 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \ddots\ddots & & \\ \hline & & & & & -h_2 & \\ \hline & & & & & & -h_1 \end{array} \right].$$

Sean los funcionales lineales $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$, tenemos que el sistema de raíces es $R = \{ \pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n \}$. En la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{a \in R} \mathfrak{g}_a$ los espacios de raíces tienen los generadores X_a iguales a los $F_{i,j}$ de 2.7, mientras que los $H_a = [X_a, X_{-a}]$ son los $H_{i,j}$ de 2.8.

Definamos $\sigma(X) = -X^{\mathrm{t}}$, entonces σ es un automorfismo del álgebra de Lie que cumple $\sigma(F_{i,j}) = -\sigma(F_{-i,-j})$, por lo que $\phi(X_r) = -X_{-r}$. Luego se cumple 30 y estos elementos forman una base de Chevalley.
Nuevamente tomamos la representación de definición y los H_i de la base son $E_{i,i} - E_{-i,-i},\ i < n$. Notemos que los elementos distinguidos forman un sistema de raíces de tipo D en el lattice $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, y las

raíces forman un sistema de raíces de tipo D en el lattice dual. Las raíces simples en este caso son $\{e_1+e_2, e_2-e_1, e_3-e_2, \ldots e_n-e_{n-1}\}$ mientras que las raíces positivas son $\{e_j \pm e_i : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Tenemos que si $a = e_i \pm e_j$ entonces $X_a^2 = 0$, por lo que

$$\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tX_a$$

Nuevamente todas las matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$, por lo que en la representación de definición el lattice está generado por la base canónica.

Como $\mathfrak{so}_{2n}$ es semisimple entonces sabemos $G_D = \langle x_a(t) : a \in R, t \in \mathbb{F}_q^\times \rangle$. Como tX_a está en el álgebra de Lie entonces con la exponencial estamos volviendo al grupo de Lie, por lo que las $\exp(t \cdot X_a)$ están en $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C})$, con la forma bilineal L. Como estas matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$ entonces al reducir módulo q caemos en $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}_q)$, con la forma bilineal dada por L.

Recordemos que $h_H(b) = \mathrm{Diag}(b^{\lambda_1(H)}, b^{\lambda_2(H)}, \ldots b^{\lambda_r(H)})$, luego si $H = h_1H_1 + h_2H_2 + \ldots h_nH_n$ se tiene

$$h_H(t) = \begin{bmatrix} t^{h_1} & & & & \\ & t^{h_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & t^{-h_1} \end{bmatrix}.$$

Luego el toro está generado por matrices de esta forma.

Relaciones del álgebra de Yokonuma de tipo D:

Veamos como nos quedan las relaciones en este caso. Sea t_g un generador de $\mathbb{F}_q^\times$ y ordenemos las raíces de R de la forma $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} = \{e_1+e_2, e_2-e_1, \ldots e_n - e_{n-1}\}$. Renombremos algunos elementos de la siguiente forma:

$$t_j = h_{H_j}(t_g) \text{ con } 1 \leq j \leq n, \;\; u_1 = T_1 = T_{\xi_1},\; g_i = T_{i+1} = T_{\xi_{i+1}}.$$

Al igual que antes la condición $(Y3)$ nos da las relaciones:

(D1) $t_it_j = t_jt_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

(D2) $t_i^{q-1} = 1, 1 \leq i \leq n$.

Tenemos que T es isomorfo a un $(\mathbb{F}_q^\times)^n$. La relación $(Y2)$ nos dice que las relaciones entre los g_i son las mismas que en el grupo de Weyl, donde u_1 se corresponde con u y g_i se corresponde con s_i (los u, s_i de 1.1.2), luego las relaciones nos quedan:

$(D3)$ $u_1g_2u_1 = g_2u_1g_2$.

$(D4)$ $u_1g_i = g_iu_1$ si $i \neq 2$.

$(D5)$ $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1},\; 1 \leq i \leq n-1$.

$(D6)$ $g_ig_j = g_jg_i,\; 1 \leq i, j \leq n-1$ si $|i-j| > 1$.

Veamos que nos dice la relación $(Y1)$, si $i > 1$ entonces $T_i = g_{i-1}$ y $s_{a_i} = s_{i-1}$, luego esto nos da la relaciones:

$(D7)$ $g_it_j = t_{s_i(j)}g_i$.

Si $i = 1$ se tiene $T_1 = u_1$ y $s_{a_1} = u$, como

$$u(H_1) = -H_2, u(H_2) = -H_1, u(H_3) = H_3, \dots u(H_n) = H_n$$

y usando que $h_{-H}(t_g) = h_H(t_g)^{-1}$ gracias a $(N6)$ tenemos las relaciones:

$(D8)$ $t_1u_1t_2 = t_2u_1t_1 = u_1$

$(D9)$ $u_1t_j = t_ju_1$ si $j > 2$.

Ahora veamos como nos queda la relación $(Y4)$. Supongamos primero que $i > 1$, al igual que antes si $t = t_g^j$ tenemos $h_i(t) = t_i^j t_{i-1}^{-j}$, en particular $h_i(-1) = t_i^{\frac{q-1}{2}} t_{i-1}^{\frac{q-1}{2}}$. Por lo tanto las relaciones nos quedan:

$(D10)$ $g_i^2 = q^{-1} t_{i+1}^{\frac{q-1}{2}} t_i^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} t_{i+1}^j t_i^{-j} g_i$ si $1 \leq i \leq n-1$.

Si $i = 1$ tenemos

$$h_1(t) = h_{H_{a_1}}(t) = h_{H_1+H_2}(t) = h_{H_1}(t) h_{H_2}(t)$$

si $t = t_g^j$ tenemos $h_1(t) = h_{H_1}(t_g^j) h_{H_2}(t_g^j) = t_1^j t_2^j$, en especial $h_1(-1) = t_1^{\frac{q-1}{2}} t_2^{\frac{q-1}{2}}$ lo que nos da la relación:

$(D11)$ $u_1^2 = q^{-1} t_1^{\frac{q-1}{2}} t_2^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} t_1^j t_2^j u_1$.

Luego las relaciones de $(D1)$ a $(D11)$ son las que determinan el álgebra de Yokonuma de tipo D.

2.5.4. Tipo C

Consideremos el grupo de Lie $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Con el mapa exponencial vemos que el álgebra de Lie de G es

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{(2n)\times(2n)} : \Omega A + A^t \Omega = 0\right\}$$

en este caso tenemos que el álgebra de Lie es semisimple, la subálgebra de Cartan es $\mathfrak{h} = \{H \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ de la forma $(*)\}$

$$(*) = \begin{bmatrix} h_1 & & & & & & & \\ & h_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & h_n & & & & \\ & & & & -h_n & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -h_2 & \\ & & & & & & & -h_1 \end{bmatrix}.$$

Definimos las matrices notándolas igual que antes

$$F_{ij} = \begin{cases} E_{-i,j} + \mathrm{sgn}(ij) E_{-j,i} \text{ si } i \neq j, \\ E_{-i,i} \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} F_{i,-i} + F_{j,-j} \text{ si } i \neq j, \\ F_{i,-i} \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{2.10}$$

donde sgn es -1 si y solo si una coordenada es negativa y la otra positiva. Se tiene $X_r = F_{i,j}$ y $X_{-r} = F_{-i,-j}$ si $H_r = H_{i,j}$. Sean los funcionales lineales $e_j(H) = h_j, 1 \leq j \leq n$, luego tenemos que el sistema de raíces es $R = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{\pm 2e_k : 1 \leq k \leq n\}$. En la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{a \in R} \mathfrak{g}_a$ los espacios de raíces tienen los generadores X_a iguales a los F_{ij} de 2.9, mientras que los $H_a = [X_a, X_{-a}]$ son los de 2.10. Si definimos $\sigma(X) = -X^t$ entonces σ es un automorfismo del álgebra de Lie que cumple $\sigma(X_a) = -X_{-a}$, luego se cumple 30 y es una base de Chevalley.

Nuevamente tomamos la representación de definición y los elementos de la base son $H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$ si $i < n$. Notemos que los elementos distinguidos forman un sistema de raíces de tipo B en el lattice $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, mientras que las raíces forman un sistema de raíces de tipo C en el lattice dual. Las raíces simples en este caso son $\{2e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \ldots e_n - e_{n-1}\}$ mientras que las raíces positivas son $\{e_j \pm e_i : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Si $a = e_i \pm e_j$ entonces $X_a^2 = 0$, por lo que

$$\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tX_a$$

Nuevamente todas las matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$, por lo que en la representación de definición el lattice es la generada por la base canónica.

Como $\mathfrak{sp}_{2n}$ es semisimple sabemos que $G_C = \langle x_a(t) : a \in R, t \in \mathbb{F}_q^\times \rangle$. Como tX_a está en el álgebra de Lie entonces con la exponencial estamos volviendo al grupo de Lie, por lo que las $\exp(t \cdot X_a)$ están en $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$.Como estas matrices tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$ entonces al reducir módulo q caemos en $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$.

Teníamos $h_H(b) = \mathrm{Diag}(b^{\lambda_1(H)}, b^{\lambda_2(H)}, \ldots b^{\lambda_r(H)})$, luego si $H = h_1H_1 + h_2H_2 + \ldots h_nH_n$ obtenemos

$$h_H(t) = \begin{bmatrix} t^{h_1} & & & & & \\ & t^{h_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & t^{-h_2} & \\ & & & & & t^{-h_1} \end{bmatrix}.$$

Luego el toro está generado por matrices de esta forma.

Relaciones del álgebra de Yokonuma de tipo C:

Al igual que antes sea t_g un generador de $\mathbb{F}_q^\times$, y ordenemos las raíces de R de la forma $\{a_1, a_2, \ldots a_n\} = \{2e_1, e_2 - e_1, \ldots e_n - e_{n-1}\}$. Renombremos algunos elementos de la siguiente forma:

$$t_j = h_{H_j}(t_g) \text{ con } 1 \leq j \leq n, \;\; v_1 = T_1 = T_{\xi_1},\, g_i = T_{i+1} = T_{\xi_{i+1}}.$$

La relación $(Y3)$ al igual que antes nos da las relaciones:

(C1) $t_it_j = t_jt_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

(C2) $t_i^{q-1} = 1, 1 \leq i \leq n$.

Notemos que T es isomorfo a un $(\mathbb{F}_q^\times)^n$. La relación $(Y2)$ nos dice que las relaciones entre los T_i son las mismas que en el grupo de Weyl, donde v_1 se corresponde con t y g_i se corresponde con s_i, luego las relaciones nos quedan:

$(C3)$ $v_1g_1v_1g_1 = g_1v_1g_1v_1$.

$(C4)$ $v_1g_i = g_iv_1$ si $i > 1$.

$(C5)$ $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1$.

$(C6)$ $g_ig_j = g_jg_i,\ 1 \leq i, j \leq n-1\ con\ |i-j| > 1$.

Veamos que nos dice la relación $(Y1)$, si $i > 1$ entonces $T_i = g_{i-1}$ y $s_{a_i} = s_{i-1}$, luego esto nos da la relaciones:

$(C7)$ $g_it_j = t_{s_i(j)}g_i$.

Si $i = 1$ entonces $T_1 = b_1$ y $s_{a_1} = t$, como $t(H_1) = -H_1, t(H_2) = H_2, \ldots t(H_n) = H_n$ tenemos las relaciones:

$(C8)$ $t_1v_1t_1 = v_1$.

$(C9)$ $v_1t_j = t_jv_1$ si $j > 1$.

Ahora veamos como nos queda la relación $(Y4)$. Supongamos primero que $i > 1$, en este caso si $t = t_g^j$ se tiene $h_i(t) = t_i^j t_{i-1}^{-j}$, en particular $h_i(-1) = t_i^{\frac{q-1}{2}}\ t_{i-1}^{\frac{q-1}{2}}$. Por lo tanto las relaciones nos quedan:

$$(C10)\ g_i^2 = q^{-1}t_{i+1}^{\frac{q-1}{2}}\ t_i^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1}\sum_{j=1}^{q-1} t_{i+1}^j t_i^{-j} g_i \text{ si } 1 \leq i \leq n-1.$$

Si $i = 1$ tenemos $h_1(t) = h_{H_{a_1}}(t) = h_{H_1}(t)$, si $t = t_g^j$ nos queda $h_1(t) = h_{H_1}(t_g^j) = t_1^j$, en particular tenemos $h_1(-1) = t_1^{\frac{q-1}{2}}$ lo que nos da la relación:

$$(C11)\ v_1^2 = q^{-1}t_1^{\frac{q-1}{2}} + q^{-1}\sum_{j=1}^{q-1} t_1^j v_1.$$

Luego las relaciones de $(C1)$ a $(C11)$ son las que determinan el álgebra de Yokonuma de tipo C.

2.6. Deformación del álgebra de Yokonuma

El objetivo de esta sección es definir una deformación del álgebra de Yokonuma, la cual llamaremos $Y_{d,n}$ tal que las especializaciones en $1, 1/q$ nos den las relaciones de $\mathbb{C}[N], \mathcal{H}(G,U)$ para luego poder usar el teorema de deformación de Tits y encontrar una biyección entre $\mathrm{Irr}(N), \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G,U))$.

2.6.1. Tipo A

Consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$ álgebra $Y_{d,n}^A$ generada por los elementos $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, t_1, t_2, \ldots t_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

$(a1)$ $t_it_j = t_jt_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

$(a2)$ $t_i^d = 1,\ 1 \leq i \leq n$.

$(a3)$ $g_ig_{i+1}g_i = g_{i+1}g_ig_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1$.

$(a4)$ $g_i g_j = g_j g_i$ si $|i-j| > 1$.

$(a5)$ $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

$(a6)$ $g_i^2 = u f_i f_{i+1} + (1-u) e_i g_i$.

Donde

$$e_i = \frac{1}{d}(\sum_{j=1}^{d} t_i^j t_{i+1}^{-j}),$$

$$f_i = \begin{cases} t_i^{\frac{d}{2}} \text{ si d es par} \\ 1 \text{ si } d \text{ es impar} \end{cases}$$

Se ve fácilmente que al tomar la especialización $u = q^{-1}$ del álgebra $Y_{q-1,n}^A$ las relaciones $(a1)-(a6)$ se convierten en las relaciones $(A1)-(A6)$, luego veremos que hay un isomorfismo a nivel caracteres $Y_{q-1,n}^A \cong \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n, U)$ gracias al teorema de deformación de Tits, donde U es el unipotente maximal.

Observación 13. Podemos definir relaciones análogas para el tipo A', en este caso llamamos $Y_{d,n}^{A'}$ a la deformación. Tomamos el álgebra con mismos generadores y relaciones que $Y_{d,n}^A$ pero cambiamos las relaciones del toro de modo que sea isomorfo al conjunto de matrices diagonales en $\mathrm{SL}(C_d)$.
Si $d = q-1$ al tomar la especialización en $u = q^{-1}$ obtenemos las relaciones del álgebra de Yokonuma de SL_n.

2.6.2. Tipo B

Consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$ álgebra $Y_{d,n}^B$ generada por los elementos $b_1, g_1, g_2, \dots g_{n-1}, t_1, t_2, \dots t_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

(b1) $t_i t_j = t_j t_i$ si $1 \le i, j \le n$.

(b2) $t_i^d = 1, 1 \le i \le n$.

(b3) $b_1 g_1 b_1 g_1 = g_1 b_1 g_1 b_1$.

(b4) $b_1 g_i = g_i b_1$ si $i > 1$.

(b5) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1},\ 1 \le i \le n-1$.

(b6) $g_i g_j = g_j g_i,\ 1 \le i, j \le n-1$ *con* $|i-j| > 1$.

(b7) $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

(b8) $t_1 b_1 t_1 = b_1$.

(b9) $b_1 t_j = t_j b_1$ si $j > 1$.

(b10) $g_i^2 = u f_i f_{i+1} + (1-u) e_i g_i$ si $1 \le i \le n-1$.

(b11) $b_1^2 = u + (1-u) d_1 b_1$.

Donde $e_i = \dfrac{1}{d}(\sum_{j=1}^{d} t_i^j t_{i+1}^{-j})$, $d_1 = \dfrac{1}{d}(\sum_{j=1}^{d} t_1^{2j})$, $f_i = \begin{cases} t_i^{\frac{d}{2}} \text{ si d es par} \\ 1 \text{ si } d \text{ es impar} \end{cases}$

Se ve fácilmente que al tomar la especialización $u = q^{-1}$ del álgebra $Y_{q-1,n}^B$ las relaciones $(b1)-(b11)$ se convierten en las relaciones $(B1)-(B11)$.

2.6.3. Tipo D

Consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm1}\right]$ álgebra $Y_{d,n}^{D}$ generada por los elementos $u_1, g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, t_1, t_2, \ldots t_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

(d1) $t_i t_j = t_j t_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

(d2) $t_i^d = 1, 1 \leq i \leq n$.

(d3) $u_1 g_2 u_1 = g_2 u_1 g_2$.

(d4) $u_1 g_i = g_i u_1$ si $i \neq 2$.

(d5) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1$.

(d6) $g_i g_j = g_j g_i,\ 1 \leq i, j \leq n-1$ *con* $|i-j| > 1$.

(d7) $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

(d8) $t_1 u_1 t_2 = u_1 = t_2 u_1 t_1$.

(d9) $u_1 t_j = t_j u_1$ si $j > 2$.

(d10) $g_i^2 = u f_i f_{i+1} + (1-u) e_i g_i$ si $1 \leq i \leq n-1$.

(d11) $u_1^2 = u f_1 f_2 + (1-u) h_1 u_1$.

Donde $e_i = \dfrac{1}{d}(\sum\limits_{j=1}^{d} t_i^j t_{i+1}^{-j}),\ h_1 = \dfrac{1}{d}(\sum\limits_{j=1}^{d} t_1^j t_2^j),\ f_i = \begin{cases} t_i^{\frac{d}{2}} & \text{si d es par} \\ 1 & \text{si } d \text{ es impar} \end{cases}$

Se ve fácilmente que al tomar la especialización $u = q^{-1}$ del álgebra $Y_{q^{-1},n}^{D}$ las relaciones $(d1) - (d11)$ se convierten en las relaciones $(D1) - (D11)$.

2.6.4. Tipo C

Consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm1}\right]$ álgebra $Y_{d,n}^{C}$ generada por los elementos $v_1, g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, t_1, t_2, \ldots t_n$ sujeta a las siguientes relaciones:

(c1) $t_i t_j = t_j t_i$ si $1 \leq i, j \leq n$.

(c2) $t_i^d = 1, 1 \leq i \leq n$.

(c3) $v_1 g_1 v_1 g_1 = g_1 v_1 g_1 v_1$.

(c4) $v_1 g_i = g_i v_1$ si $i > 1$.

(c5) $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1$.

(c6) $g_i g_j = g_j g_i,\ 1 \leq i, j \leq n-1$ *con* $|i-j| > 1$.

(c7) $g_i t_j = t_{s_i(j)} g_i$.

(c8) $t_1 v_1 t_1 = v_1$.

(c9) $v_1 t_j = t_j v_1$ si $j > 1$.

(c10) $g_i^2 = uf_if_{i+1} + (1-u)e_ig_i$ si $1 \leq i \leq n-1$.

(c11) $v_1^2 = uf_1 + (1-u)n_1v_1$.

Donde $e_i = \dfrac{1}{d}(\sum_{j=1}^{d} t_i^j t_{i+1}^{-j})$, $n_1 = \dfrac{1}{d}(\sum_{j=1}^{d} t_1^j)$, $f_i = \begin{cases} t_i^{\frac{d}{2}} \text{ si } d \text{ es par,} \\ 1 \text{ si } d \text{ es impar.} \end{cases}$

Se ve fácilmente que al tomar la especialización $u = q^{-1}$ del álgebra $Y_{q-1,n}^C$ las relaciones $(c1)-(c11)$ se convierten en las relaciones $(C1)-(C11)$.

Observación 14. De ahora en adelante vamos a tomar d par. Notemos que las relaciones de $Y_{d,n}$ en cualquiera de los tipos A, B, C, D se pueden presentar como:

$(Y_{d,n}1)$ $\underbrace{\xi_i\xi_j\dots}_{m_{ij}} = \underbrace{\xi_j\xi_i\dots}_{m_{ij}}$ donde m_{ij} es el orden de (s_is_j) en el grupo de Weyl.

$(Y_{d,n}2)$ $\xi_it_j = t_{s_i(H_j)}\xi_i$.

$(Y_{d,n}3)$ $t_jt_k = t_kt_j$ para todos $1 \leq j, k \leq n$.

$(Y_{d,n}4)$ $t_j^d = 1$.

$(Y_{d,n}5)$ $\xi_i^2 = uh_i(-1) + (1-u)e_i\xi_i$.

donde $t_{a_1H_1+a_2H_2+\dots a_nH_n} = t_1^{a_1}t_2^{a_2}\dots t_n^{a_n}$, que también lo notamos $t^{\{a_1,a_2,\dots a_n\}}$, y t_g un generador, con:

$$e_i = \frac{1}{d}\sum_j (t_{H_{a_i}})^j,$$

$$h_i(-1) = t_{H_{a_i}}^{d/2}$$

Notemos que como $t_{H_{a_i}}$ tiene orden d entonces e_i es un idempotente, y también notemos que $h_i(-1)^2 = 1$.

Para el tipo A' es parecido, pero el toro son los elementos de determinante uno en el toro de tipo A, y las restantes relaciones se mantienen. Si V es alguno de los tipos nos referimos con $Y_{d,n}^V$ a la deformación del álgebra de Yokonuma en ese tipo. Si el argumento no distingue el tipo la denotamos $Y_{d,n}$.

Lema 12. *Los elementos e_i definidos en 14 conmutan con los ξ_i y además cumplen $e_ih_i(-1) = h_i(-1)e_i = e_i$.*

Demostración. Tenemos por la relación $(Y_{d,n}2)$ de 14 que

$$\left(\sum_j (t_{H_{a_i}})^j\right)\xi_i = \xi_i\left(\sum_j (t_{s_i(H_{a_i})})^j\right) = \xi_i\left(\sum_j (t_{-H_{a_i}})^j\right) = \xi_i\left(\sum_j (t_{H_{a_i}})^{-j}\right) = \xi_i\left(\sum_j (t_{H_{a_i}})^j\right)$$

donde la última igualdad es porque $t_{H_{a_i}}$ tiene orden d. Luego ξ_i y e_i conmutan. También se tiene

$$h_i(-1)\sum_j (t_{H_{a_i}})^j = t_{H_{a_i}}^{d/2}\sum_j (t_{H_{a_i}})^j = \sum_j (t_{H_{a_i}})^j$$

por lo que

$$h_i(-1)e_i = e_ih_i(-1) = e_i$$

□

Si V es alguno de los tipos de raíces definimos el grupo $S_{d,n}^V$ con los mismos generadores y relaciones que $Y_{d,n}^V$ pero cambiando la relación 5 por $\xi_i^2 = 1$.

Notemos que para cualquier sistema de raíces V el grupo $S_{d,n}^V$ es un producto semidirecto $C_d^n \rtimes W$, donde W es el grupo de Weyl de tipo V y actúa por conjugación como

$$w(t^{\{a_1,a_2,\dots a_n\}}) = t^{w(\{a_1,a_2,\dots a_n\})}$$

Mientras que en el caso de $V = A'$ la acción por conjugación es la misma pero el grupo $S_{d,n}^{A'}$ es el producto semidirecto $T' \rtimes \mathbb{S}_n$ con T' el subgrupo de C_d^n con elementos de determinante 1. En el resto de la sección llamemoslo $S_{d,n}$ sin distinguir el tipo.

Viendo las relaciones del grupo $S_{d,n}$ podemos extender la longitud del grupo de Weyl a $S_{d,n}$ definiendola como $l(wt) = l(w)$ si $w \in W, t \in C_d^n$. Notemos que los generadores de $Y_{d,n}$ están indexados en $S_{d,n}$, luego por la relación 1 y el teorema de Matsumoto podemos definir para cada $v \in S_{d,n}$ un elemento $T_v \in Y_{d,n}$. Haciendo un razonamiento análogo al lema 5 podemos dar otra presentación de $Y_{d,n}$ como el álgebra libre en los T_v cocientada por las relaciones

$$T_sT_v = \begin{cases} T_{sv} & \text{si } \; l(sv) > l(v), \\ uh_i(-1)T_{sv} + (1-u)e_iT_v & \text{si } \; l(sv) < l(v). \end{cases}$$

donde s es una raíz simple y $h_i(-1)$ lo pensamos como elemento de $\mathbb{C}[S_{d,n}]$. Además se tiene que los T_v generan $Y_{d,n}$ como $\mathbb{C}[u]$ módulo. El objetivo ahora es probar que $Y_{d,n}$ es libre sobre $\mathbb{C}[u]$ para luego poder usar el teorema de deformación de Tits, vamos a usar un argumento parecido al de [5, Teorema 4.4.6]. El siguiente lema nos va a ayudar a probar eso.

Lema 13. *Sean s,t reflexiones simples y $v \in S_{d,n}$ tales que $l(svt) = l(v)$ y $l(sv) = l(vt)$, en este caso se tiene*

a. $sve_t = e_svt$.

b. $h_s(-1)svt = svth_t(-1)$.

c. $h_s(-1)sve_t = e_svth_t(-1)$.

Demostración. Sea v' la proyección de v al grupo de Weyl, tenemos que $l(sv't) = l(v')$ y $l(sv') = l(v't)$ en el grupo de Weyl. Usando [5, Lema 1.2.6] tenemos que $sv' = v't$ en el grupo de Weyl, gracias a esto no es difícil ver a mano los primeros dos puntos en cada uno de los tipos. También se puede ver el argumento dado en [3, Lema 5] donde se prueba el primer ítem para tipo A pero que se puede generalizar a los otros casos. Usando el ítem a tenemos

$$h_s(-1)sve_t = h_s(-1)sve_th_t(-1) = h_s(-1)e_svth_t(-1) = e_svth_t(-1),$$

donde estamos usando que $h_i(-1)e_i = e_i$. □

Teorema 48. *El álgebra $Y_{d,n}$ es libre sobre $A = \mathbb{C}[u]$ con base $\{T_v\}_{v\in S_{d,n}}$*

Demostración. Como los T_v generan $Y_{d,n}$ es suficiente con ver que son linealmente independientes. Para eso definimos V un A módulo libre indexado en los elementos de $S_{d,n}$, digamos que la base es $\{a_v\}_{v\in S_{d,n}}$. Ahora definimos algunos morfismos en $\mathrm{End}_A(V)$.
Para cada $h \in C_d^n$ definimos los morfismos ρ_h, λ_h como $\rho_ha_v = a_{vh}$ y $\lambda_ha_v = a_{hv}$ y para $s \in S$ una raíz simple definimos

$$\rho_s a_v = \begin{cases} a_{vs} \text{ si } l(vs) > l(v), \\ u a_{vs} h_s(-1) + (1-u) a_v e_s \text{ si } l(vs) < l(v). \end{cases}$$

$$\lambda_s a_v = \begin{cases} a_{sv} \text{ si } l(sv) > l(v), \\ u h_s(-1) a_{sv} + (1-u) e_s a_v \text{ si } l(sv) < l(v). \end{cases}$$

donde con $h_s(-1)$ nos referimos al elemento $a_{h_s(-1)}$. No es difícil ver que si $h \in C_d^n$ el morfismo λ_h conmuta con los morfismos ρ y que ρ_h conmuta con los morfismos λ. Veamos ahora que si $s, t \in S$ los morfismos λ_s, ρ_t conmutan, para eso hay que ver $\rho_t \lambda_s a_v = \lambda_s \rho_t a_v$. Hay que distinguir en 6 casos dependiendo de las longitudes relativas entre v, sv, vt, svt.

(1) $l(sv) > l(v), l(svt) > l(sv)$, esto implica además que $l(svt) > l(vt) > l(v)$. Se tiene

$$\rho_t \lambda_s a_v = \rho_t a_{sv} = a_{svt} = \lambda_s a_{vt} = \lambda_s \rho_t a_v.$$

(2) $l(sv) > l(v), l(svt) < l(sv)$ y $l(vt) < l(v)$, también $l(svt) = l(v) > l(vt)$, se tiene

$$\rho_t \lambda_s a_v = \rho_t a_{sv} = u a_{svt} h_t(-1) + (1-u) a_{sv} e_t = \lambda_s (u a_{vt} h_t(-1) + (1-u) a_v e_t) = \lambda_s \rho_t a_v.$$

(3) $l(v) > l(sv) > l(svt)$ y de esto sale $l(v) > l(vt) > l(svt)$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} \rho_t \lambda_s a_v &= \rho_t (u h_s(-1) a_{sv} + (1-u) e_s a_v) = u^2 h_s(-1) a_{svt} h_t(-1) + (1-u)^2 e_s a_v e_t + u(1-u) e_i a_{vt} h_t(-1) \\ &+ u(1-u) h_i(-1) sv e_t = \lambda_s (u a_{vt} h_t(-1) + (1-u) a_v e_t) = \lambda_s \rho_t a_v. \end{aligned}$$

(4) $l(sv) < l(v), l(svt) > l(sv)$ y $l(vt) > l(v)$, además se obtiene $l(svt) = l(v) < l(vt)$. Luego se tiene

$$\rho_t \lambda_s a_v = \rho_t (u h_s(-1) a_{sv} + (1-u) e_s a_v) = u h_s(-1) a_{svt} + (1-u) e_s a_{vt} = \lambda_s a_{vt} = \lambda_s \rho_t a_v.$$

(5) $l(sv) > l(v) = l(svt) < l(vt)$, en este caso estamos hipótesis del lema 13 por lo que podemos usar las igualdades de esos ítems y se tiene

$$\rho_t \lambda_s a_v = \rho_t a_{sv} = u a_{svt} h_t(-1) + (1-u) a_{sv} e_t = u h_s(-1) a_{svt} + (1-u) e_s a_{vt} = \lambda_s \rho_t a_v.$$

(6) $l(sv) < l(v) = l(svt) > l(vt)$, en este caso también estamos en las hipótesis del lema 13 por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \rho_t \lambda_s a_v &= \rho_t (u h_s(-1) a_{sv} + (1-u) e_s a_v) = u h_s(-1) a_{svt} + u(1-u) e_s a_{vt} h_t(-1) + (1-u)^2 e_s a_v e_t = \\ & u a_{svt} h_t(-1) + u(1-u) h_s(-1) a_{sv} e_t + (1-u)^2 e_s a_v e_t = \lambda_s (u a_{vt} h_t(-1) + (1-u) a_v e_t) = \lambda_s \rho_t a_v. \end{aligned}$$

Afirmamos que la asignación $T_s \mapsto \lambda_s$ define un morfismo de A módulos de $Y_{d,n}$ a $\operatorname{End}_A V$. Para probar esto hay que ver que el mapa cumple las relaciones que definen $Y_{d,n}$. Empecemos con las relaciones cuadráticas

$$\lambda_s^2 a_v = \begin{cases} u h_s(-1) a_v + (1-u) e_s a_{sv} \text{ si } l(sv) > l(v), \\ u h_s(-1) a_v + (1-u) u h_s(-1) e_s a_{sv} + (1-u)^2 e_s^2 a_v \text{ si } l(sv) < l(v). \end{cases}$$

Usando que $e_s^2 = e_s = e_s h_s(-1)$ se tiene que λ_s^2 actúa de la misma forma que $u h_s(-1) + (1-u) e_s \lambda_s$. Veamos ahora las relaciones del grupo de Weyl, o sea que si $w = s_1 \cdots s_n = s_1' \cdots s_n'$ son dos expresiones reducidas de w hay que ver que

$$\lambda = \lambda_{s_1} \cdots \lambda_{s_n} - \lambda_{s_1'} \cdots \lambda_{s_n'} = 0.$$

Consideramos como actúa λ en a_1. Usando que $\lambda_s a_1 = a_s$ se tiene

$$\lambda_{s_1} \cdots \lambda_{s_n} a_1 = a_w = \lambda_{s'_1} \cdots \lambda_{s'_n} a_1.$$

Por lo que $\lambda a_1 = 0$. Para ver que $\lambda = 0$ alcanza con ver que $\lambda a_w = 0$ para todo w en el grupo de Weyl, veamoslo por inducción en $l(w)$. Si $l(w) = 0$ es cierto porque $\lambda a_1 = 0$. Si $l(w) > 0$ existe alguna simetría simple tal que $l(wt) < l(w)$. Luego $\lambda a_{wt} = 0$ por inducción y usando la conmutatividad con ρ_t tenemos $\lambda a_w = \lambda a_{wt \cdot t} = \lambda \rho_t a_{wt} = \rho_t \lambda a_{wt} = 0$.
Por lo tanto tenemos un morfismo de A módulos $\phi : Y_{d,n} \to \operatorname{End}_A V, T_s \mapsto a_s$. Vía este mapa podemos dar una acción de $Y_{d,n}$ en V por $h \cdot x = \phi(h)(x)$. Supongamos que se tiene una relación

$$\sum_{v \in S_{d,n}} n_v T_v = 0$$

Por lo visto anteriormente tenemos que $T_v a_1 = a_v$, aplicando esta relación a a_1 tenemos

$$0 = \left(\sum_{v \in S_{d,n}} n_v T_v \right) a_1 = \sum_{v \in S_{d,n}} n_v a_v.$$

Por lo que todos los n_v son nulos, lo que nos dice que los T_v son linealmente independientes.

□

2.7. Grupos de Chevalley en cada uno de los tipos

El objetivo de esta sección es ver cuál es el grupo de Chevalley en cada uno de los tipos sobre un cuerpo arbitrario k, para eso usamos los resultados de [14].
Notemos que en cada uno de los casos el álgebra de Lie es un álgebra de matrices por lo que podemos tomar su representación de definición, o sea la que $V = \mathbb{C}^n$ y la acción de $\mathfrak{g}$ es la multiplicación a izquierda. Otra posibilidad es tomar la representación adjunta del álgebra de Lie. Empecemos viendo como es el grupo de Chevalley que surge en cada caso si tomamos la representación de definición.

- Consideremos primero $G = \mathrm{SL}_n$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}_n$ que son las matrices de $n \times n$ de traza 0. Habíamos visto que $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ span $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ es el lattice correspondiente a la representación de definición.
  El grupo de Chevalley está generado por las matrices $\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tX_a$, las cuales están incluidas en $\mathrm{SL}_n(k)$. Además por [14, § 4] tenemos que generan todo el grupo.

  Si consideramos $G = \mathrm{GL}_n$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}_n$ de matrices de $n \times n$ tenemos que el grupo de Chevalley está generado por los elementos $\exp(t \cdot X_a) = \mathrm{Id} + tX_a$ y el toro (las matrices diagonales), por lo que el grupo de Chevalley que generan es $\mathrm{GL}_n(k)$.

  Con el álgebra de Lie de Sp_{2n} sucede lo mismo, ya que el lattice correspondiente a la representación de definición es $\mathbb{Z}$ span $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ por lo que el grupo de Chevalley está incluido en $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$, pero nuevamente podemos afirmar que es todo el grupo gracias a [14, § 5].

  Para tipo B y D es parecido, pero en este caso tomamos los grupos especiales ortogonales que preservan las formas bilineales dadas por las matrices

  $$J = \operatorname{AntiDiag}(1, 1, \dots, 2, 1, \dots, 1), \quad L = \operatorname{AntiDiag}(1, 1, \dots, 1, 1).$$

  En estos casos las álgebras de Lie son

  $$\{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : JA + A^t J = 0\}$$

y

$$\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : LA + A^t L = 0\},$$

respectivamente. Nuevamente los lattices $V(\mathbb{Z})$ están generados por la base canónica por lo que los grupos de Chevalley están incluidos en los subgrupos de matrices $\mathrm{SO}_{2n+1}(k), \mathrm{SO}_{2n}(k)$ que preservan las formas bilineales dadas por J y L respectivamente.

Gracias a [14, § 6, 7] sabemos que los grupos de Chevalley canónicos en los tipos B y D son los conmutadores de los grupos $\mathrm{SO}_{2n+1}(k), \mathrm{SO}_{2n}(k)$.

Llamamos $G_V(k)$ al grupo de Chevalley correspondiente a un sistema de tipo V ($V = A', A, B, C, D$) en un cuerpo k en la representación de definición, $\widetilde{G_V}(k)$ al obtenido a la representación adjunta y $\mathfrak{g}_V$ a su álgebra de Lie.

- Ahora veamos el caso de la representación adjunta. Denotemos V al tipo con el que vamos a trabajar.

Proposición 49. *Sobre cualquier cuerpo k de característica mayor que 2 tenemos que $\widetilde{G_V}(k) \cong G_V(k)/Z(G_V(k))$*

Demostración. Sea $\{X_r, h_i\}$ la base de Chevalley. Llamemos $A_r(t)$ a la matriz con coeficientes enteros que corresponde al automorfismo

$$x_r(t) = \exp(t \cdot \mathrm{ad}(X_r))$$

visto en la base de Chevalley, notemos que es una matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}[t]$. El grupo $\widetilde{G_V}(k)$ se obtenía como el generado por estas matrices al evaluar t en un elemento de k.
Por 1 el automorfismo $x_r(t)$ actúa de esta forma:

$$x_r(t) \cdot Y = e^{tX_r} Y e^{-tX_r} \qquad Y \in \mathfrak{g}_V. \tag{2.11}$$

También vimos que en cualquiera de los tipos el lattice estaba generado por la base canónica y las matrices e^{tx_r} tienen coeficientes en $\mathbb{Z}[t]$. En cada uno de los tipos la base de Chevalley son matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}$, por lo que cualquier elemento en $\mathfrak{g}_V(\mathbb{Z})$ también. Luego podemos ver a $g_V(k)$ como un álgebra de matrices sobre k y el automorfismo $x_r(t)$ está dado por la ecuación (2.11).
Como $\widetilde{G_V}(k)$ está generado por las matrices $x_r(t)$ y $G_V(k)$ por las e^{tX_r} la ecuación (2.11) nos dice que tenemos un morfismo sobreyectivo de $G_V(k)$ en $\widetilde{G_V}(k)$ dado por

$$S \mapsto S^*, \quad S^*Y = SYS^{-1}.$$

Denotemos Ω al núcleo de este morfismo, veamos que $\Omega = Z(G_V(k))$. Tenemos que S pertenece a Ω si y solo si conmuta con los elementos de $\mathfrak{g}_V(\mathbb{Z})$, pero este lattice está generado por los $\{X_r, h_i\}$ y además $h_i = [X_{a_i}, X_{-a_i}]$, por lo que un elemento está en Ω si y solo si conmuta con los X_r. Mientras que S pertenece al centro de $G_V(k)$ si y solo si conmuta con los e^{tX_r}.

Sea $S \in \Omega$, luego S conmuta con los X_r, por lo que también conmuta con

$$\exp(tX_r) = \mathrm{Id} + tX_r + \frac{t^2}{2} X_r^2,$$

ya que $X_r^3 = 0$ en cualquiera de los tipos y la característica no es 2.

Ahora sea $S' \in Z(G_V(k))$, luego S' conmuta con los e^{tX_r}, si $V = A, A', C, D$ se tiene por lo visto en 2.5 que

$$e^{X_r} = \mathrm{Id} + X_r.$$

Luego S' conmuta con los X_r. Si $V = B$ sabemos que S' conmuta con

$$\mathrm{Id} + X_r + \frac{1}{2}X_r^2.$$

Por lo tanto también conmuta con

$$(X_r + \frac{1}{2}X_r^2)^2 = X_r^2,$$

usando que $X_r^3 = 0$. Luego S' conmuta con X_r^2 y también con $\dfrac{X_r^2}{2}$ (la característica no es 2), por lo que conmuta con X_r.
Luego tenemos

$$\widetilde{G_V}(k) \cong G_V(k)/\Omega = G_V(k)/Z(G_V(k)).$$

$\square$

Gracias a la proposición anterior podemos describir como son los grupos de Chevalley adjuntos en cada tipo.

Corolario 2. *a. Para A' tenemos*

$$G_{A'}(k) = \mathrm{SL}_n(k), \quad \textit{por lo que} \quad \widetilde{G_{A'}}(k) = \mathrm{PSL}_n(k).$$

b. En tipo A tenemos

$$G_A(k) = \mathrm{GL}_n(k), \quad \textit{por lo que} \quad \widetilde{G_A}(k) = \mathrm{PGl}_n(k).$$

c. En tipo B tenemos

$$G_B(k) = (\mathrm{SO}_{2n+1}(k))',$$

con la forma bilineal dada por $J = \mathrm{AntiDiag}\,(1, 1, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ por lo que $\widetilde{G_B}(k)$ es el conmutador del espacio proyectivo ortogonal dado por esta forma bilineal.

d. En tipo D tenemos

$$G_D(k) = (\mathrm{SO}_{2n}(k))',$$

con la forma bilineal dada por $L = \mathrm{AntiDiag}\,(1, 1, \ldots, 1, 1)$, por lo que $\widetilde{G_D}(k)$ es el conmutador del espacio proyectivo ortogonal dado por esta forma bilineal.

e. En tipo C se tiene $G_C(k) = \mathrm{Sp}_{2n}(k)$, por lo que $\widetilde{G_C}(k)$ se obtiene al cocientar $\mathrm{Sp}(2n, k)$ *por su centro.*

Observación 15. En [15, Lema 6.21] se ve que si la forma cuadrática se anula en un vector no nulo entonces el conmutador de $\mathrm{SO}_n(k)$ con esta forma cuadrática tiene índice 2 por ser el núcleo del Spinor Map, que llega a $k^\times/(k^\times)^2$. Tenemos que esto ocurre para las formas cuadráticas dadas por J, L por lo que podemos afirmar que para los tipos B, D los grupos de Chevalley tienen índice 2 en SO_n.

Lema 14. *Sea G alguno de los grupos* $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ *o* $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}_q)$, *$G_1$ el grupo de Chevalley en ese tipo y U, U_1 los unipotentes maximales de G, G_1 respectivamente. Hay un isomorfismo $\mathcal{H}(G, U) \cong \mathcal{H}(G_1, U_1)$.*

Demostración. Empecemos notando que los grupos G, G_1 tienen el mismo toro maximal y los grupos de Weyl son isomorfos, usando que $N/T \cong W$ tenemos que los normalizadores del toro tienen igual cardinal. Es fácil ver que el normalizador del toro en G_1 está incluido en el de G, por lo que ambos coinciden y lo llamamos N. Usando lo visto en 2.3.2 tenemos que N es un sistema de representantes de coclases dobles de U en G y de U_1 en G_1. Es claro que $U_1 \subset U$ y la inclusión es estricta porque si no G y G_1 serían iguales. Usando la observación anterior y el lema 11 tenemos el isomorfismo. Además este isomorfismo es la restricción a G_1. □

Observación 16. Al cambiar de la representación de definición a la adjunta los grupos de Chevalley pueden no ser isomorfos, ya que la relación $(N7)$ de 2.4 cambia.

Una pregunta que surge es si podemos cambiar las formas bilineales que tenemos en los grupos de Chevalley de los tipos B y D. Si dos formas bilineales simétricas no degeneradas son equivalentes en k entonces los grupos ortogonales son conjugados y, por lo tanto, isomorfos, en este caso podemos cambiar una forma bilineal por la otra. Ahora vamos a analizar como podemos cambiar una forma bilineal no degenerada por otra no equivalente si $k = \mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos con q primo.

Hecho 1. Es conocido que sobre un cuerpo finito k con característica impar hay exactamente dos clases de equivalencias en las formas bilineales simétricas no degeneradas, y las clases de equivalencia están determinadas por el hecho de que el determinante pertenezca a $(k^\times)^2$.
O sea si B_1, B_2 son dos formas bilineales no degeneradas determinadas por las matrices J_1, J_2 se tiene que B_1, B_2 son equivalentes si y solo si $\det(J_1 J_2) \in (k^\times)^2$.

Corolario 3. *En tipo D la matriz L tiene determinante $(-1)^{\frac{n}{2}}$. Sea k es el cuerpo finito de q elementos, $(-1)^{\frac{n}{2}}$ es residuo módulo q si y solo si n es múltiplo de 4 o q es congruente a 1 módulo 4. Luego usando el hecho recién mencionado se tiene que en estos casos la forma bilineal dada por L es equivalente a la canónica, en los restantes casos no son equivalentes. En el primer caso podemos cambiar una forma bilineal por la otra, ya que los grupos son isomorfos.*
Lo mismo ocurre para tipo B, la matriz J tiene determinante $2(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, luego esta forma bilineal es equivalente a la canónica si y solo si $2(-1)^{\frac{n-1}{2}} \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$, no es difícil ver que eso solo ocurre si

- $q = 1(8)$.
- $q = 7(8)$ *y* $n = 1(4)$.
- $q = 3(8)$ *y* $n = 3(4)$.

En estos casos podemos cambiar esta forma bilineal por la canónica y los grupos serán isomorfos.

Observación 17. Si $\mathbb{F}_{q^2}$ es el cuerpo finito de q^2 elementos y $x \in \mathbb{F}_q^\times$ sabemos que $x^{q-1} = 1$, por lo que

$$x^{\frac{q^2-1}{2}} = \left(x^{q-1}\right)^{\frac{q+1}{2}} = 1.$$

Esto implica x es un cuadrado en $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. Luego si queremos cambiar las formas bilineales de los tipos B y D por la canónica en los casos donde no son equivalentes necesitamos irnos a $\mathbb{F}_{q^2}$.
Tomemos $k = \mathbb{F}_{q^2}$ y construyamos los grupos de Chevalley en los tipos B y D, $G_B(\mathbb{F}_{q^2}), G_D(\mathbb{F}_{q^2})$. Como los determinantes de J y L están en $\mathbb{F}_q$ entonces serán cuadrados en $\mathbb{F}_{q^2}$, luego podemos cambiar estas formas bilineales por la canónica (los grupos nos quedan isomorfos).
Usando el teorema 47 obtenemos las mismas relaciones pero cambiando q^{-1} con q^2 en la relación $(Y4)$. Las relaciones del toro cambian, tendremos las relaciones

$$t_i^{q^2-1} = 1,$$

por lo que nos queda isomorfo a $C^n_{q^2-1}$, salvo en el tipo A' donde quedan las de determinante 1. Luego podemos hacer los mismos argumentos en este caso, todos los argumentos que siguen se mantendran, solamente estamos cambiando el valor d de $q-1$ a q^2-1.

2.8. Grupos alfombra

En esta sección vamos a definir los grupos alfombra, los cuales tienen una descomposición en producto semidirecto que es una generalización de la descomposición de Levi para subgrupos parabólicos. Nos va a servir para entender mejor algunos argumentos en la demostración de la descomposición de Bruhat (2.9.1). La teoría desarrollada en la siguiente subsección puede encontrarse en [16].

2.8.1. Definición, propiedades y casos particulares

Vamos a denotar X_r al elemento del álgebra de Lie correspondiente a la raíz r y con $x_r(t)$ al elemento $\exp(t \cdot X_r)$ con respecto a un sistema de raíces irreducible R y denotamos $E(R,K)$ su grupo de Chevalley sobre el cuerpo K generado por los subgrupos $x_r(K), r \in R$. Una alfombra para R es una colección de subgrupos aditivos $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_r |\ r \in R\}$ de K con la condición de que

$$C_{ij,rs}\mathcal{O}_r^i\mathcal{O}_j^s \subset \mathcal{O}_{ir+js}, \quad ir + js \in R,$$

donde $\mathcal{O}_r^i = \left\{a^i |\ a \in \mathcal{O}_r\right\}$ y las constantes $C_{ij,rs}$ salen de la fórmula

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ir+js}(-t)^i u^j). \tag{2.12}$$

Toda alfombra $\mathcal{O}$ define un subgrupo alfombra $E(\mathcal{O})$ generado por los $x_r(\mathcal{O}_r), r \in R$. El subgrupo $\mathcal{O}$ se dice unipotente si todos los subgrupos aditivos indexados en raíces negativas son nulos. Para cualquier subconjunto $\Delta \subset R$ denotamos con $E(\Delta)$ al subgrupo generado por las $x_r(K), r \in \Delta$. De ahora en adelante daremos por hecho el sistema de raíces R y el cuerpo K. Enunciamos ahora algunos lemas que serán útiles.

Lema 15. [1, Lema 17] *Sea Δ un subconjunto cerrado de raíces tal que $a \in \Delta$ implica $-a \notin \Delta$, entonces cada elemento de $E(\Delta)$ puede ser escrito de manera única como*

$$\prod_{a \in S} x_a(t_a),$$

con los $t_a \in K$.

Notemos que este lama generaliza la descomposición de 2.4 ya que R^+ es un subconjunto que cumple las hipótesis.

Lema 16. *Sea I un ideal de un conjunto cerrado $\Delta \subset R$ tal que $r \in I$ implica $-r \notin \Delta$. Entonces $E(I)$ es un subgrupo normal de $E(\Delta)$.*

Demostración. Por el lema anterior tenemos una descomposición única en $E(I)$, por lo que hay que ver $[x_s(u), x_r(t)] \in E(I)$ para $r \in I, s \in \Delta$.
Supongamos que para $i, j > 0$ tenemos $ir + js \in R$, como Δ es cerrado tenemos $ir + js \in \Delta$ y como I es un ideal se tiene $ir + js \in I$. Usando esto último y la fórmula de 2.12 obtenemos lo deseado. □

Lema 17. *Todo subconjunto cerrado $\Delta \subset R$ define una alfombra $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_r, r \in R\}$ donde*

$$\mathcal{O}_r = \begin{cases} K \text{ si } r \in \Delta, \\ 0 \text{ si no.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $r, s \in \Delta$, si $i, j > 0$ cumplen que $ir + js \in \Delta$ entonces $ir + js \in \Delta$ porque Δ es cerrado. Usando esto y la fórmula 2.12 obtenemos el resultado. Esto nos dice que todo conjunto cerrado determina el grupo alfombra $E(\Delta)$. □

Lema 18. *Si Δ es cerrado entonces T normaliza a $E(\Delta)$*

Demostración. Alcanza con ver que $tx_r(K)t^{-1} \in E(\Delta)$ si $t \in T, r \in \Delta$, pero esto se deduce fácilmente de la relación $(UN2)$ de 2.4. □

Teorema 50. *Si tenemos un conjunto cerrado Δ podemos considerar sus partes especial y antisimétrica. Por el lema 3 tenemos que Δ^r es un subsistema y Δ^u es un ideal en Δ. Como Δ^u es un ideal en Δ tenemos por el lema 16 que $E(\Delta^u)$ es normal en $E(\Delta)$.*
Además en [16, Lemas 9, 13] *se ve que $E(\Delta^u) \cap E(\Delta^r) = \{1\}$ y $E(\Delta^r)$ es el producto directo de los $E(\Delta_i, K)$ donde los Δ_i se obtienen como los subsistemas irreducibles del subsistema Δ^r, en particular podemos afirmar que hay un producto semidirecto*

$$E(\Delta) = E(\Delta^u) \rtimes E(\Delta^r) \tag{2.13}$$

Observación 18. Más en general si $E(\mathcal{O})$ es un grupo alfombra sobre R se tiene que es un producto semidirecto de los subgrupos $E(\mathcal{O}^+) = \langle x_r(\mathcal{O}_r) | \, r \in R, \mathcal{O}_r \neq 0, \mathcal{O}_{-r} = 0 \rangle$ y $E(\mathcal{O}^\pm) = \langle x_r(\mathcal{O}_r) | \, \mathcal{O}_r, \mathcal{O}_{-r} \neq 0 \rangle$ con núcleo $E(\mathcal{O}^+)$, mientras que $E(\mathcal{O}^\pm)$ es el producto directo de los $E_{R_i}(\mathcal{O})$ siendo los R_i las componentes irreducibles del subsistema $\psi^\pm = \{r \in R | \, \mathcal{O}_r, \mathcal{O}_{-r} \neq 0\}$.

Observación 19. Si $\Delta \subset R$ es un subconjunto de las raíces simples podemos considerar el subsistema parabólico definido en la observación 2. Por el lema 1 sabemos que $R^+ \cup R_\Delta$ es cerrado. Sus partes antisimétrica y especial son R_Δ y $R^+ \backslash R_\Delta$.

Luego por el teorema anterior $E(R_\Delta)$ es producto directo de los $E(R_{\Delta_i}, K)$ siendo los Δ_i las componentes conexas que quedan en el diagrama de Dynkin al sacar Δ, además tenemos el producto semidirecto

$$E(R_\Delta \cup R^+) = E(R^+ \backslash R_\Delta) \rtimes E(R_\Delta),$$

por lo que obtenemos

$$E(R_\Delta \cup R^+) = E(R^+ \backslash R_\Delta) \rtimes \prod_i E(R_{\Delta_i}).$$

Además por el lema 18 sabemos que T normaliza a este grupo, por lo que podemos definir el grupo

$$P_\Delta = TE(R_\Delta \cup R^+)$$

Además $E(R^+ \backslash R_\Delta) \subset E(R^+) = U$, y como $U \cap T = \{1\}$ se tiene $E(R^+ \backslash R_\Delta) \cap T = \{1\}$. Esto nos dice que

$$P_\Delta = E(R^+ \backslash R_\Delta) \rtimes T \prod_i E(R_{\Delta_i}) = E(R^+ \backslash R_\Delta) \rtimes \prod_i T_i E(R_{\Delta_i}). \tag{2.14}$$

donde T_i es el toro correspondiente a Δ_i. Como un grupo de Chevalley está generado por el toro y los grupos $x_r(K)$ entonces los $T_i E(R_{\Delta_i})$ son grupos de Chevalley correspondientes a los subsistemas Δ_i. También notemos que P_Δ contiene a T y U por lo que es un subgrupo parabólico, además todos los subgrupos parabólicos se obtienen de esta forma y la ecuación (2.14) se llama la descomposición de Levi, mientras que la ecuación (2.13) nos da un resultado análogo a la descomposición de Levi.
También tiene sentido hacer lo mismo para cualquier subsistema S, pero el problema es que $S \cup R^+$ no es cerrado.

2.9. Descomposición de Bruhat e isomorfismos del álgebra de Iwaori–Hecke

En toda esta sección vamos a considerar el caso donde G es un grupo de Chevalley como en 2.1 y con los subgrupos U, N, T, W, B definidos de la misma forma que en 2.3.1, con $B = T \rtimes U$ un subgrupo boreliano. También definamos $C(w) = BwB$ para $w \in W$, notemos que como $T \subset B$ no hay problemas de definición.
En esta sección vamos a hacer 2 cosas. La primera es ver el grupo de Chevalley tiene una descomposición

$$G = \coprod_{w \in W} BwB,$$

la cual se llama descomposición de Bruhat. Luego usando esta descomposición veremos que hay un isomorfismo entre $\mathcal{H}(G, B)$ y $\mathcal{H}_q(W)$.

2.9.1. Descomposición de Bruhat

Los siguientes lemas y proposiciones serán útiles para la demostración de la descomposición de Bruhat.

Lema 19. *Si s_a es una reflexión simple entonces $B \cup C(s_a)$ es un subgrupo de G.*

Demostración. Lo probamos para $G = \mathrm{GL}_n$, para los otros casos es análogo. El caso $n = 2$ no es difícil ver a mano. Para el caso general consideramos

$$P_a = U^a \rtimes M_a,$$

como en la observación 19 siendo $U^a = E(R^+/a), M_a = TE(a, -a)$. Los conjuntos $C(s_a)$ y B son subconjuntos de P_a, afirmamos que la unión es todo P_a. Ambas coclases dobles son invariantes por U^a ya que $U^a \subset B$, por lo que alcanza con ver que contiene a M_a. Pasando al cociente en $P_a/U^a \cong M_a \cong \mathrm{GL}_2 \times (k^\times)^{n-2}$ se reduce al caso $n = 2$. □

Observación 20. Tenemos gracias al lema 15 que

$$U = \prod_{b \in R^+} U_b,$$

donde además la descomposición es única, y lo mismo ocurre con U^a si $a \in R^+$ es una raíz simple.

Lema 20. *Si s una simetría simple que le corresponde la raíz simple $a \in R^+$ y $w \in W$ es tal que $l(ws) = l(w) + 1$ entonces*

$$C(w)C(s) = C(ws).$$

Demostración. Es suficiente con probar

$$wBs \subset BwsB,$$

ya que esto nos daría la inclusión $\subset$ y la otra es clara. Escribamos $b \in B$ como $b = tx_a(y)u$ con $t \in T$, $u \in U^a, y \in \mathbb{F}_q$. Se tiene

$$wbs = wtx_a(y)us = (wtw^{-1})(wx_a(y)w^{-1})ws(s^{-1}us),$$

tenemos $(wtw^{-1}) \in T \subset B$ porque T es normal en N, $wx_a(y)w^{-1} \in x_{w(a)}(\mathbb{F}_q)$ usando las relaciones $(UN1), (UN2)$, pero como $l(ws) = l(w) + 1$ tenemos $w(a) \in R^+$, por lo que $wx_a(y)w^{-1} \in B$.
Además tenemos gracias a la observación 20 que $s^{-1}us$ es de la forma

$$\prod_{b \neq a} s^{-1}x_b(y_b)s,$$

el cual está en $\prod_{b\neq a} x_{s(b)}(y_b)$ si usamos las relaciones $(UN1), (UN2)$.
Como $s = s_a$ entonces $s_a(R^+ \backslash a) = R^+ \backslash a$, por lo que $s^{-1}us \in U^a \subset B$. Juntando estas cosas tenemos $wbs \in BwsB$, que era lo que queríamos. □

Corolario 4. *Si $w, w' \in W$ son tales que $l(ww') = l(w) + l(w')$ entonces $C(ww') = C(w)C(w')$.*

Demostración. Es suficiente con ver que si $w = s_1 s_2 \dots s_r$ es la descomposición de w entonces

$$C(w) = C(s_1)C(s_2)\dots C(s_r). \tag{2.15}$$

Porque si ya sabemos esto y $w = s_1 s_2 \dots s_r, w' = s'_1 s'_2 \dots s'_k$ son las descomposiciones irreducibles de w y w' entonces $s_1 s_2 \dots s_r s'_1 s'_2 \dots s'_k$ será la descomposición de ww' y

$$C(ww') = C(s_1)C(s_2)\dots C(s_r)C(s'_1)C(s'_2)\dots C(s'_k) = C(w)C(w').$$

Veamos 2.15. Si $w = s_1 s_2 \dots s_r = w_1 s_r$ con $l(w_1) < l(w)$ sabemos que $l(w_1 s_r) = l(w_1) + 1$, luego por el lema anterior tenemos $C(w) = C(w_1)C(s_r)$, luego por inducción en $l(w)$ tenemos la igualdad. □

Proposición 51. *Veamos que si G es un grupo de Chevalley se verifican los siguiente axiomas:*

(T1) *$T = B \cap N$ es normal en N.*

(T2) *Hay un conjunto I de generadores de $W = N/T$ tales que $s^2 = 1$ si $s \in W$.*

(T3)

$$C(w)C(s) \subset C(w) \cup C(ws)$$

para $s \in I$.

(T4) *G está generado por N, B.*

Demostración. Los axiomas $1, 2, 4$ se verifican fácilmente por lo visto en 2.3.1, veamos $T3$.
Si $l(ws) = l(w) + l(s)$ entonces es cierto por el corolario 4. Supongamos entonces $l(ws) = l(w) - 1$, o equivalentemente $w(a) \in R^-$ si $s = s_a$. En este caso tenemos $l(ws) + l(s) = l(w) = l(ws \cdot s)$, por lo que usando el corolario 4 tenemos

$$wsBs \subset BwB. \tag{2.16}$$

Por 19 sabemos que $B \cup BsB$ es un grupo que contiene a s, por lo que $B \cup BsB = sB \cup sBsB$ y $Bs \subset sB \cup sBsB$, luego usando la ecuación (2.16) tenemos

$$wBs \subset wsB \cup wsBsB \subset BwsB \cup BwB,$$

que era lo que queríamos. □

Un sistema (B, N, I) con estas propiedades es llamado un Sistema de Tits, y los grupos de Chevalley los tienen.

Teorema 52 (Bruhat). *Sea (B, N, I) un sistema de Tits, se tiene una descomposición*

$$G = \coprod_{w\in W} BwB. \tag{2.17}$$

Demostración. Veamos que $\bigcup_{w\in W} C(w)$ es un grupo. Es cerrado por inversas por lo que hay que ver que es cerrado por multiplicación. Veamos por inducción en $l(w_2)$ que $C(w_1)C(w_2)$ está incluido en la unión.

Si $l(w_2) = 0$ entonces $w_2 = 1$ y el resultado vale. Si $l(w_2) > 0$ entonces podemos escribir $w_2 = sw_2'$ con $l(w_2') < l(w_2), s \in I$. Luego usando el axioma $T3$ tenemos:

$$C(w_1)C(w_2) = Bw_1Bsw_2'B \subset Bw_1Bw_2'B \cup Bw_1sBw_2'B.$$

Y por inducción está incluido en la unión de las coclases dobles, entonces probamos lo que queríamos. Como G esta generado por B, N entonces la unión de las coclases dobles es todo G.
Queda ver que la unión es disjunta, sabemos que las coclases dobles son iguales o disjuntas, por lo que hay que ver que si $C(w) = C(w')$ entonces $w = w'$. Supongamos $l(w) \leq l(w')$ y hagámoslo por inducción en $l(w)$.
Si $l(w) = 0$ entonces $w = 1$ y $B = C(w')$, como $B \cap N = T$ entonces $w' = 1$. Asumamos ahora $l(w) > 0$, escribamos $w = w''s$ con $l(w'') < l(w)$, por hipótesis tenemos $w''s \subset C(w')$ por lo que $w'' \subset C(w')s \subset C(w')C(s)$. Por el axioma $T3$ tenemos $C(w'') \subset C(w')C(s) \subset C(w's) \cup C(w')$. Luego tenemos

$$C(w'') = C(w') \quad o \quad C(w'') = C(w's).$$

Por hipótesis inductiva sabemos $w'' = w'$ o $w'' = w's$, el primer caso no es posible ya que $l(w'') < l(w) \leq l(w')$, luego $w'' = w's$ y por lo tanto $w' = w''s = wss = w$. □

2.9.2. Isomorfismos del álgebra de Iwaori–Hecke

Si $w \in W$ tenemos que los subconjuntos $R^+ \cap w(R^-), R^+ \cap w(R^+)$ cumplen las hipótesis del lema 15, luego podemos definir

$$U_{R^+\cap w(R^-)} = U_w^- \qquad U_{R^+\cap w(R^+)} = U_w^+,$$

que son subgrupos de U. Notemos además que

$$R^+ \cap w(R^-) \coprod R^+ \cap w(R^+) = R^+,$$

que también cumple las condiciones, por lo que tenemos que la multiplicación

$$U_w^+ \times U_w^- \to U$$

es biyectiva.

Lema 21. *Se tiene* $|U_w^-| = q^{l(w)}$.

Demostración. Sabemos que $|R^+ \cap w(R^-)| = l(w)$. Por el lema 15 tenemos la descomposición

$$U_w^- = \prod_{a\in R^+\cap w(R^-)} U_a.$$

Como todos los U_a tiene cardinal q entonces nos queda lo que queremos. □

Proposición 53. *Se tiene la fórmula* $|BwB/B| = q^{l(w)}$.

Demostración. Veamos que la función $u^- \to u^-wB$ es una biyección $U_w^- \to BwB$, en ese caso sería cierto por el lema anterior.
Las coclases de BwB/B son de la forma bwB, sea $b = u^-u^+t \in B$, con $u^\pm \in U_w^\pm, t \in T$. Luego tenemos

$$bwB = u^-w(w^{-1}u^+w)(w^{-1}tw)B.$$

Sabemos que $w^{-1}tw \in T \subset B$, usando $(UN1),(UN2)$ tenemos $w^{-1}u^{+}w \in U_{w^{-1}(R^{+}\cap w(R^{+}))} \subset U_{R^{+}} = U \subset B$, luego $bwB = u^{-}wB$. Esto nos dice que la aplicación es sobreyectiva.
Para probar la inyectividad hay que probar que si $u_1^{-}wB = u_2^{-}wB$ con $u_1^{-}, u_2^{-} \in U^{-}$ entonces $u_1^{-} = u_2^{-}$. Si llamamos $u^{-} = (u_1^{-})^{-1}u_2^{-}$, tenemos $w^{-1}u^{-}w \in B$. Usando las relaciones $(UN1),(UN2)$ tenemos $w^{-1}u^{-}w \in U_{w^{-1}(R^{+}\cap w(R^{-}))} \subset U_{R^{-}} = U^{-}$, como tenemos $U^{-}\cap B = \{1\}$ entonces $u^{-} = 1$, y por lo tanto $u_1^{-} = u_2^{-}$. □

Definición 54. Consideremos $\mathcal{H}(G,B)$, las funciones B bivariantes de G a $\mathbb{C}$. Por Bruhat sabemos que W es un sistema completo de representantes de coclases dobles de B en G, luego por lo visto en 2.2 tenemos que

$$\{\phi_w = \mathbb{1}_{BwB}\}_{w\in W}$$

es una base de $\mathcal{H}(G,B)$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial, en particular $\dim(\mathcal{H}(G,B)) = |W|$.
La convolución está definida por

$$(f_1 * f_2)(g) = \frac{1}{|B|}\sum_{x\in G} f_1(x)f_2(x^{-1}g).$$

Definimos también el mapa de aumentación $\epsilon : \mathcal{H}(G,B) \to \mathbb{C}$ que es un morfismo y está dado por:

$$\epsilon(f) = \frac{1}{|B|}\sum_{x\in G} f(x).$$

Y por la proposición anterior tenemos $\epsilon(\phi_w) = q^{l(w)}$.

Proposición 55. *Si w, w' son tales que $l(ww') = l(w) + l(w')$ entonces*

$$\phi_{ww'} = \phi_w * \phi_{w'}.$$

Demostración. Por el corolario 4 sabemos que $C(ww') = C(w)C(w')$, luego el soporte de $\phi_w * \phi_{w'}$ está incluido en $C(ww')$. Por lo tanto existe una constante η tal que $\phi_w * \phi_{w'} = \eta\ \phi_{ww'}$. Si aplicamos el morfismo ϵ tenemos:

$$q^{l(w)}q^{l(w')} = \epsilon(\phi_w)\epsilon(\phi_{w'}) = \epsilon(\phi_w * \phi_{w'}) = \epsilon(\eta\ \phi_{ww'}) = \eta\ q^{l(ww')} = \eta\ q^{l(w)}q^{l(w')}.$$

Luego $\eta = 1$ y tenemos la igualdad. □

Lema 22. *Sea s una reflexión simple. Se tiene*

$$\phi_s * \phi_s = q\phi_1 + (q-1)\phi_s.$$

Demostración. Por el axioma $T3$ sabemos $C(s)C(s) \subset C(1)\cup C(s)$, por lo que existen constantes λ, μ tales que $\phi_s * \phi_s = \lambda\phi_1 + \mu\phi_s$. Si evaluamos ambos lados en la identidad tenemos $\lambda = q$, ya que $\phi_s(1) = 0, \phi_1(1) = 1$ y

$$\phi_s * \phi_s(1) = \frac{1}{|B|}\sum_{g\in BsB}\phi_s(g)\phi_s(g^{-1}) = \frac{|BsB|}{|B|} = q^{l(s)} = q,$$

donde la última igualdad es por la proposición 53.

Sabemos $\epsilon(\phi_s) = q^{l(s)} = q,\ \epsilon(\phi_1) = 1$, luego aplicando ϵ tenemos

$$\lambda + \mu q = \epsilon(\lambda\phi_1 + \mu\phi_s) = \epsilon(\phi_s * \phi_s) = \epsilon(\phi_s)^2 = q^2.$$

Como $\lambda = q$ tenemos $\mu = q - 1$ y llegamos a la igualdad del enunciado. □

Corolario 5. *Si $l(sw) < l(w)$ con s una reflexión simple se tiene*

$$\phi_s * \phi_w = q\phi_{sw} + (q-1)\phi_w.$$

Demostración. Como $l(sw) < l(w)$ entonces podemos expresar a w como $w = sw'$ con $l(w') < l(w)$. Como $l(w) = l(s)l(w')$ sabemos por la proposición 55 que $\phi_w = \phi_s * \phi_{w'}$, usando el lema anterior obtenemos:

$$\phi_s * \phi_w = \phi_s * \phi_s * \phi_{w'} = q\ \phi_1 * \phi_{w'} + (q-1)\phi_s * \phi_{w'} = q\phi_{sw} + (q-1)\phi_w.$$

□

Observación 21. Tenemos por el lema 5 que el álgebra de Iwaori–Hecke $\mathcal{H}_q = H_{\mathbb{C}}(W, S, (q, q-1))$ es la generada por los $T_w, w \in W$ con las relaciones:

a. $T_{ww'} = T_w T_{w'}$ si $l(ww') = l(w) + l(w')$.

b. si $s \in S$ es tal que $l(sw) < l(w)$ entonces

$$T_s T_w = q\ T_{sw} + (q-1)T_w.$$

Además se tiene que $\mathcal{H}_q$ está generada por los T_w, por lo que dim $\mathcal{H}_q \leq |W|$.

Teorema 56 (Iwahori). *El álgebra $\mathcal{H}(G, B)$ es isomorfa a $\mathcal{H}_q W$.*

Demostración. Si tomamos el morfismo $T_w \mapsto \phi_w$ está bien definido ya que por la proposición 55 y el corolario 5 los ϕ_w satisfacen las relaciones de los T_w de la observación anterior. La aplicación es suryectiva porque los ϕ_w generan $\mathcal{H}(G, B)$, pero como $\dim \mathcal{H}_q(W) \leq |W| = \dim \mathcal{H}(G, B)$ se deduce que es un isomorfismo. □

2.10. Teorema del doble centralizador y especializaciones

En esta sección enunciamos el teorema del doble centralizador cuya demostración está en [17, § 3.2], este teorema nos va a ayudar a probar que las álgebras de Iwaori–Hecke y de Yokonuma son semisiples para luego poder usar el teorema de deformación de Tits. Gracias a esto obtendremos dos biyecciones de caracteres irreducibles, una entre las de el normalizador del toro y el álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G, U)$ y la otra entre las del grupo de Weyl y el álgebra de Iwaori–Hecke $\mathcal{H}(G, B)$. También vamos a hablar sobre la traza de un endomorfismo de $\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$.

2.10.1. Teorema del doble centralizador

Teorema 57 (Teorema del doble centralizador). *Sea W un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y sea $A \in \operatorname{End}_K W$ una subálgebra semisimple, sea*

$$A' = \operatorname{End}_A W = \{b \in \operatorname{End}_K W : ab = ba\ \ \forall b \in A\}.$$

la subálgebra que centraliza a A. Luego se tiene que A' es semisimple y hay una descomposición en suma directa

$$W = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i,$$

que es la descomposición isotípica de W como un A módulo y como A' módulo. De hecho para $1 \leq i \leq r$ hay un A módulo irreducible U_i y un A' módulo irreducible U_i' tales que si $D_i = \operatorname{End}_A U_i$ (álgebra de división sobre K por lema de Schur), entonces $D_i^{\mathrm{op}} \cong \operatorname{End}_{A'} U_i'$ y

$$W_i \cong U_i \otimes_{D_i} U_i'.$$

Observación 22. Si K es algebraicamente cerrado se tiene que las álgebras de división D_i son isomorfas a K, por lo que el producto tensorial es tomado sobre K.

Corolario 6. *Si G es un grupo y H es un subgrupo entonces $\mathcal{H}(G,H)$ es semisimple.*

Demostración. Tomamos $K = \mathbb{C}$, $W = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$ y $A = \mathbb{C}[G]$ en el teorema. Como $\mathbb{C}[G]$ es semisimple entonces tenemos que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H)$ es semisimple, pero por 10 eso es $\mathcal{H}(G,H)$. □

Como $\mathbb{C}[G]$ y $\mathcal{H}(G,H)$ son semisimples podemos usar el teorema 57 con $W = \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$ el cual nos dice que

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H = \bigoplus_{V \in \mathrm{Irr}(G:H)} V \otimes V^H, \tag{2.18}$$

donde los elementos de G actúan a izquierda y los de $\mathcal{H}(G,H)$ a derecha. Viendo la demostración de 57 para probar que esta es la descomposición es necesario ver que la multiplicidad de V es la correcta, esta multiplicidad es

$$\dim \ \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{1}_H, V) = \dim \ \mathrm{Hom}_H(\mathbb{1}_H, \mathrm{Res}_H^G V) = \dim V^H,$$

por lo que coincide con la de la descomposición.

2.10.2. Especializaciones en $0,1$

Definición 58. [**Deformación del álgebra de Hecke**] Sea W el grupo de Weyl de alguno de los tipos A,B,C,D. Definimos H_n como la $\mathbb{C}[u^{\pm1}]$ álgebra con relaciones:

a. $\underbrace{s_i s_j \ldots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i \ldots}_{m_{ij}}$ si m_{ij} es el orden de $s_i s_j$ en W.

b. $s_i^2 = u + (1-u)s_i$.

Notemos que H_n consiste en tomar las relaciones de W, cambiar las relaciones cuadráticas como en (b) y mantener las relaciones no cuadráticas. También notemos que es un cociente de $Y_{d,n}$ si mandamos las t_i en 1. Cuando nos refiramos a la deformación en tipo V la llamaremos H_n^V.

Notemos que al especializar en $u = 1$ obtenemos las relaciones de $\mathbb{C}[W]$ mientras que al especializar en $u = q$ obtenemos las relaciones de $\mathcal{H}(G,B)$ por el teorema de Iwahori 56.
Luego consideramos las especializaciones en $u = 1$, $u = q$ y las llamamos $\sigma_1, \sigma_q : \mathbb{C}\left[u^{\pm1}\right] \to \mathbb{C}$. Se tiene que $H_n(u)$ es split por [18, Teorema 2.9], entonces aplicando el teorema de deformación de Tits (usando el corolario 6 y que el álgebra es libre por 15) tenemos biyecciones

$$d_{\sigma_q} : \mathrm{Irr}(H_n(u)) \to \mathrm{Irr}(H_n(q)) = \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G,B)) \quad d_{\sigma_1} : \mathrm{Irr}(H_n(u)) \to \mathrm{Irr}(H_n(1)) = \mathrm{Irr}(W).$$

Tenemos que $\mathbb{C}[u^{\pm1}] = \mathbb{C}[u]\left[\dfrac{1}{u}\right]$ es un DFU porque localizar preserva la condición de ser DFU, como su cuerpo de fracciones es $\mathbb{C}(u)$ obtenemos que $\mathbb{C}[u^{\pm1}]$ es integralmente cerrado en $\mathbb{C}(u)$. Usando la proposición 18 tenemos que los caracteres llegan a $\mathbb{C}[u^{\pm1}]$. Si $\chi : H_n \to \mathbb{C}[u^{\pm1}]$ es un caracter obtenemos los caracteres especializados

$$\chi_1 = d_{\sigma_1}(\chi), \quad \chi_q = d_{\sigma_q}(\chi),$$

y podemos definir una biyección

$$T_B = d_{\sigma_q} \circ d_{\sigma_1}^{-1} : \mathrm{Irr}(W) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G,B)).$$

En particular las dimensiones de las representaciones irreducibles de $\mathbb{C}[W]$, $\mathcal{H}(G,B)$ son las mismas, luego por el Teorema de Wedderburn el álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G,B)$ y el álgebra de grupo $\mathbb{C}[W]$ son isomorfas como $\mathbb{C}$ álgebras. Ahora especielizemos en $u = 1/q$ y $u = 1$.

Empecemos diciendo que las relaciones de $Y_{q-1,n}$ para cualquiera tipos son las mismas relaciones que las del teorema de Yokonuma para $\mathcal{H}(G,U)$ pero cambiando la relación $(Y4)$ por

$$\xi_i^2 = u\ h_i(-1) + \frac{1-u}{q-1} \sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} h_i(t)\xi_i.$$

Luego al especializar en q^{-1} nos quedan las relaciones del álgebra de Yokonuma.

Mientras que si especializamos en $u = 1$ nos quedan las relaciones de N (el normalizador del toro maximal). Sabemos también que $\mathbb{C}[N]$ es semisimple y split, y $\mathcal{H}(G,U)$ es semisimple por el corolario 6 y también es split ya que es un $\mathbb{C}$ módulo. En los casos en que $Y_{q-1,n}(u)$ es split (lo veremos luego para los tipos A,A' y B) la proposición 18 dice que los caracteres irreducibles llegan a $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$.

Si no es split en $\mathbb{C}(u)$ podemos tomar $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}(u)$ de modo que $\mathbb{K}Y_{q-1,n}$ sea split y seguimos el mismo procedimiento que en 1.2.2. Como las álgebras de Hecke son semisimples estamos en las condiciones del teorema de deformación de Tits (usando también 48) y obtenemos las siguientes biyecciones:

$$\begin{aligned} d_{\phi_q} &: \operatorname{Irr}(\mathbb{K}Y_{q-1,n}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}(\mathbb{K}Y_{q-1,n}(q^{-1})) = \operatorname{Irr}(\mathcal{H}(G,U)),\\ d_{\phi_1} &: \operatorname{Irr}(\mathbb{K}Y_{q-1,n}(u)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}(\mathbb{K}Y_{q-1,n}(1)) = \operatorname{Irr}(N). \end{aligned}$$

que provienen de las especializaciones en $1/q$ y 1. Luego esto nos da una biyección

$$T_U = d_{\phi_q} \circ d_{\phi_1}^{-1} : \operatorname{Irr} N \to \operatorname{Irr}(\mathcal{H}(G,U)). \tag{2.19}$$

LLamemos $\phi_q, \phi_1 : A^* \to \mathbb{C}$ a los morfismos que mandan u a q^{-1} y 1 respectivamente, donde A^* es la clausura integral de $A = \mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ en $\mathbb{K}$. Además por la observación 5 tenemos:

$$d_{\phi_q}(\chi) = \phi_q \circ \chi,\ \ d_{\phi_1}(\chi) = \phi_1 \circ \chi.$$

En particular las dimensiones de las representaciones irreducibles de $\mathcal{H}(G,U)$ y $\mathbb{C}[N]$ son las mismas. Luego por el teorema de Wederburn el álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G,U)$ y el álgebra de grupo $\mathbb{C}[N]$ son isomorfas como $\mathbb{C}$ álgebras.

Gracias a esto y a lo visto en la subsección anterior tenemos los siguientes diagramas de biyecciones:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Irr}(G:B) \arrow[dr, "D_B"'] & & \operatorname{Irr}(W) \arrow[dl, "T_B"] \\ & \operatorname{Irr}(\mathcal{H}(G,B)) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Irr}(G:U) \arrow[dr, "D_U"'] & & \operatorname{Irr}(N) \arrow[dl, "T_U"] \\ & \operatorname{Irr}(\mathcal{H}(G,U)) & \end{tikzcd}$$

Vamos a ver en 3.2 como están parametrizadas las representaciones irreducibles de W en cada uno de los tipos, como T_B, D_B son biyecciones entonces las de $\operatorname{Irr}(G:B)$ van a estar parametrizadas por lo mismo. También veremos en 3.3 como están parametrizadas las representaciones irreducibles de N, como T_U, D_U son biyecciones las de $\operatorname{Irr}(G:U)$ también están parametrizadas por lo mismo.

2.10.3. Trazas

Sea $W = \operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H$. Sea $X \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W$,usando la base $\{\phi_w = \mathbb{1}_{Hw}\}_{w\in W}$ con W un sistema completo de representantes de coclases a izquierda de H en G, no es difícil ver que

$$\operatorname{tr} X = \sum_{w\in W} (X(\phi_w))(w).$$

Lema 23. *Sea $g \in G, \phi \in \mathcal{H}(G,H)$ y consideremos $g\phi = \phi g \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H)$ donde g es pensado como un elemento de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{1}_H)$. Se tiene*

$$\operatorname{tr}(\phi g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x\in G} \phi\left(xgx^{-1}\right) = \sum_{V\in \operatorname{Irr}(G:H)} \chi_V(g)\ \chi_{D_H(V)}(\phi),$$

donde χ_V es el caracter de G con espacio de representación V y $\chi_{D_H(V)}$ el caracter de $\mathcal{H}(G,H)$ que sale de aplicar el operador D_H.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|H| \operatorname{tr}(\phi g) &= |H| \sum_{w\in W} (g\phi\dot{\phi}_w)(w) = |H| \sum_{w\in W} (\phi\dot{\phi}_w)(wg) = \sum_{w\in W} \sum_{y\in G} \phi(y)\phi_w(y^{-1}wg) \\
&= \sum_{w\in W} \sum_{y^{-1}wg\in Hw} \phi(y) = \sum_{w\in W} \sum_{y\in wgw^{-1}H} \phi(y) = \sum_{w\in W} \sum_{h\in H} \phi(wgw^{-1}h^{-1}) \\
&= \sum_{w\in W} \sum_{h\in H} \phi((hw)g(hw)^{-1}) = \sum_{x\in G} \phi(xgx^{-1}).
\end{aligned}$$

donde usamos que ϕ es H invariante a izquierda. Por otro lado si aplicamos $g\phi = \phi g$ en la descomposición 2.18 tenemos que

$$\operatorname{tr}(g\phi) = \sum_{V\in \operatorname{Irr}(G:H)} \chi_V(g)\ \chi_{D_H(V)}(\phi).$$

□

Capítulo 3

Representaciones del grupo de Weyl y del normalizador del toro

El objetivo de este capítulo es calcular las representaciones irreducibles del grupo de Weyl W y de N, el normalizador del toro. Caracterizar estas representaciones va a ser necesario para calcular los valores de los caracteres en ciertos elementos particulares.

3.1. Representaciones de un producto semidirecto y de subgrupos con cociente cíclico

Para calcular las representaciones irreducibles de W, N vamos a necesitar entender como son las representaciones de un producto semidirecto y las representaciones irreducibles de un subgrupo normal $H \leq G$ con cociente cíclico, sabiendo las de G.

3.1.1. Representaciones de un producto semidirecto

Veamos como calcular las representaciones irreducibles de un grupo G de la forma $G = A \rtimes H$, donde A es abeliano. Vamos a usar el argumento dado en de [19, proposición 8.2].

Como A es abeliano todos los caracteres irreducibles de A tiene grado 1 y se identifican con $X = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$. El grupo G actúa en X por

$$(s.\chi)(a) = \chi(s^{-1}as).$$

Sea $(\chi_i)_{i\in X/H}$ un sistema de representantes de las órbitas de H en X. Para cada $i \in X/H$ sea H_i el estabilizador de χ_i, o sea los $h \in H$ tales que $h\chi_i = \chi_i$, Tenemos que A es normalizado por H_i, por lo tanto podemos definir $G_i = AH_i$. Extendemos la función χ_i a G_i definiendola por

$$\chi_i(ah) = \chi_i(a), \text{ si } a \in A, h \in H_i.$$

Usando el hecho de que H_i estabiliza a χ_i no es difícil ver que esta extensión nos queda un morfismo de grupos, por lo que es un caracter de grado 1 de G_i.
Sea p una representación irreducible de H_i, como A es normalizado por G_i entonces tenemos una proyección canónica $G_i \to H_i$, y componiendo p con la proyección canónica obtenemos $\tilde{p}$ una representación irreducible de G_i. Luego tomando el producto tensorial $\chi_i \otimes \tilde{p}$ obtenemos otra representación irreducible de G_i. Notemos que como $\chi_i : G_i \to \mathbb{C}^\times$ podemos ver $\chi_i \otimes \tilde{p}$ como

$g \mapsto \chi_i(g)\tilde{p}(g)$ (donde $\tilde{p}(g) : V \to V$ y V es el espacio de representación de p). Inducimos esta representación de G_i a G y a la representación inducida la llamamos $\phi_{i,p}$.

Proposición 59. *a.* *$\phi_{i,p}$ es irreducible.*

b. *Si $\phi_{i,p}$ y $\phi_{i',p'}$ son isomorfas entonces $i = i'$ y p es isomorfa a p'.*

c. *Cada representación irreducible de G es isomorfa a alguna de las $\phi_{i,p}$.*

Luego todas las representaciones de G quedan determinadas por elegir una órbita de la acción de H en X y una representación irreducible del estabilizador de esa órbita. Usamos esta construcción para hallar las representaciones irreducibles de $(\mathbb{F}_q^\times)^n \rtimes \mathbb{S}_n$.

Caracteres de $N = (\mathbb{F}_q^\times)^n \rtimes \mathbb{S}_n$

Notemos primero que $(\mathbb{F}_q^\times)^n \rtimes \mathbb{S}_n$ es el normalizador de $\mathbb{S}_n$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, que $(\mathbb{F}_q^\times)^n$ es normal en N y además es abeliano, por lo que estamos en las hipótesis de la proposición anterior. Empecemos describiendo como es

$$X = \mathrm{Hom}\left((\mathbb{F}_q^\times)^n, \mathbb{C}^\times\right),$$

o sea los caracteres de $(\mathbb{F}_q^\times)^n$. El conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$ se identifica con C_{q-1} el grupo cíclico de orden $q-1$. Luego $\mathrm{Hom}((\mathbb{F}_q^\times)^n, \mathbb{C}^\times)$ consiste en dar una tupla de n elementos de $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times) = C_{q-1}$.

Si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots\ \psi_n)$ es una de estas tuplas entonces el caracter queda definido por

$$(t_1, t_2, \ldots t_n) \mapsto \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\cdots\psi_n(t_n).$$

Sabemos que $\mathbb{S}_n$ actúa por conjugación en $T = (\mathbb{F}_q^\times)^n$ permutando las posiciones en la diagonal, de la misma forma que actúa $\mathbb{S}_n$ en $\{1, 2, \ldots n\}$, esto nos dice que la acción de $\sigma \in \mathbb{S}_n$ en X consiste en reordenar los números de las n tuplas aplicando la permutación σ. Luego la órbita de $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)$ son todas las permutaciones de esta n tupla, por lo que podemos pensar que cada órbita queda determinada por la cantidad de veces que aparece cada elemento de C_{q-1}.

Tomemos t_g un generador de C_{q-1} y en cada órbita tomamos la tupla donde los elementos $t_g^1, t_g^2, \ldots t_g^{q-1}$ quedan en ese orden de izquierda a derecha. Luego si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)$ es uno de estos representantes entonces el estabilizador es

$$\mathbf{Stab}\ \psi = \mathbb{S}_{n_1} \times \mathbb{S}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{S}_{n_{q-1}},$$

donde n_j es la cantidad de veces que aparece t_g^j en ψ.

Sabemos que si G_1 y G_2 son grupos finitos entonces $\mathrm{Irr}(G_1 \times G_2) = \mathrm{Irr}(G_1) \times \mathrm{Irr}(G_2)$, donde cada $\chi \in \mathrm{Irr}(G_1 \times G_2)$ proviene de hacer el producto tensorial entre algunos $\chi_1 \in \mathrm{Irr}(G_1)$, $\chi_2 \in \mathrm{Irr}(G_2)$. Luego

$$\mathrm{Irr}(\mathbf{Stab}\ \psi) = \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_{n_1}) \times \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_{n_2}) \times \ldots \times \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_{n_{q-1}})$$

y los $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{Stab}\ \psi)$ son de la forma

$$\mathbb{S}_{n_1}^{\lambda_1} \otimes \mathbb{S}_{n_2}^{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{S}_{n_{q-1}}^{\lambda_{q-1}},$$

con $\lambda_i \in \mathcal{P}_{n_i}$, donde $\mathcal{P}_n$ denota las particiones de tamaño n.

Esto nos dice que las representaciones irreducibles de N están parametrizadas por las funciones $\Lambda : C_{q-1} \to \mathcal{P}$ de tamaño n, o sea que

$$\sum_{g \in C_{q-1}} |\Lambda(g)| = n,$$

donde $\mathcal{P}$ es el espacio de particiones. Ahora veamos que representación determina una función Λ.

Sea $T_i = (\mathbb{F}_q^\times)^{n_i}$, $N_i = T_i \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$. Observemos que si $\psi \in \widehat{T}$ (el dual) tiene multiplicidad n_i en ψ_i entonces $T \rtimes \mathbf{Stab}\ \psi = \prod_i N_i$. Luego ψ_i define un caracter en N_i por

$$(t_1, t_2, \dots t_{n_i}, \sigma) \mapsto \prod_j \psi_i(t_j).$$

Por otro lado $S_{n_i}^{\lambda_i}$ define una representación irreducible de $\mathbb{S}_{n_i}$ y tomando la proyección canónica obtenemos una representación irreducible de N_i. Tensorizando podemos definir

$$\chi_{\lambda_i,\psi_i}^{N_i} = \mathbb{S}_{n_i}^{\lambda_i} \otimes \psi_i \in \mathrm{Irr}(N_i).$$

Tomando el producto tensorial y induciendo a N nos da la representación irreducible

$$\chi_\Lambda = \mathrm{Ind}_{\prod N_i}^{N} \bigotimes_i \chi_{\lambda_i,\psi_i}^{N_i} \in \mathrm{Irr}(N). \tag{3.1}$$

LLamemos $\mathcal{Q}_{q-1,n}$ a las funciones $\Lambda : C_{q-1} \to \mathcal{P}$ de tamaño n, entonces tenemos una biyección entre $\mathrm{Irr}(N)$ y $\mathcal{Q}_{q-1,n}$, $\Lambda \mapsto \chi_\Lambda$.

Observemos que el mismo argumento funciona para cualquier grupo cíclico de orden d. Si C_d denota el grupo cíclico de orden d y $N = C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n$, donde $\mathbb{S}_n$ actúa por conjugación en C_d^n permutando las coordenadas como elemento de $\mathbb{S}_n$ entonces los mismos argumentos se adaptan a este caso y llamamos $\mathcal{Q}_{d,n}$ al conjunto que las parametriza.

3.1.2. Representaciones de subgrupos con cociente cíclico

Supongamos que $N \trianglelefteq G$ con G/N cíclico. Si μ es un caracter de N llamamos μ^g al caracter que se obtiene al conjugar por g. Como $N \trianglelefteq G$ podemos usar [7, Teorema 3.2] para afirmar que dado $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ y μ un factor en χ'(la restricción de χ a N) se tiene

$$\chi' = e\ (\sum_{i=1}^{t} \mu^{g_i}),$$

para algún e, donde los μ^{g_i} son todos los conjugados de u, sin que haya dos isomorfos. El número t es el índice del grupo de inercia de μ. El grupo de inercia es

$$I_G(\mu) = \{g \in G : \mu^g = \mu\}.$$

Los elementos g_i se toman como los representantes de las coclases a derecha de $I_G(\mu)$ en G. Empecemos viendo que $e = 1$, tomando el grupo de inercia de uno de los factores irreducibles en χ' podemos asumir que en la descomposición de χ' solo aparece un factor irreducible μ y queremos ver que aparece con multiplicidad 1. Como es invariante por la acción del grupo (estamos asumiendo que la inercia es todo el grupo) entonces por [7, Teorema 2.14] tenemos $e = 1$. Luego al restringir cualquier $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ nos queda suma de irreducibles distintos con multiplicidad 1, lo mismo ocurre al inducir por reciprocidad de Frobenius.

Por lo tanto tenemos una correspondencia entre los caracteres de N y los de G, si $\mu \in \mathrm{Irr}(N), \chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tenemos que μ es un factor de χ' si y solo si χ es un factor de $\mathrm{Ind}_N^G(\mu)$ y además todos los factores de χ' son los conjugados de μ.

Llamemos $d = |G/N|$ y ϵ al morfismo

$$\epsilon : G \to C_d \cong G/N,$$

y para $j \geq 0$ llamemos ϵ^j al morfismo definido por $g \mapsto \epsilon(g)^j$, notemos que es lo mismo que tensorizar j veces ϵ. El objetivo ahora es probar que si χ es un factor de $\mathrm{Ind}_N^G(\mu)$ entonces los restantes factores en la descomposición de $\mathrm{Ind}_N^G(\mu)$ son de la forma $\chi \otimes \epsilon^j$, o sea tensorizar χ con un caracter del cociente. Si usamos la propiedad

$$\mathrm{Ind}(V) \otimes W \cong \mathrm{Ind}(V \otimes \mathrm{Res}(W))$$

tenemos que

$$\operatorname{Ind}_N^G \chi' = \operatorname{Ind}_N^G (\chi' \otimes \mathbb{1}_N) \cong \chi \otimes \operatorname{Ind}_N^G \mathbb{1}_N.$$

Esto nos dice que cualquier caracter irreducible en la descomposición de $\operatorname{Ind}_N^G \chi'$ es de la forma $\chi \otimes \epsilon^j$, como μ es un factor de χ' tenemos lo que queríamos.

Luego al inducir los caracteres que aparecen difieren de tensorizar por un caracter de G/N, en particular tienen todos el mismo grado, además sabemos que χ y $\chi \otimes \epsilon^j$ se restringen a lo mismo.

Sigamos con la hipótesis de que μ es un factor de χ', k el grado de μ y $t = |I_G(\mu)|$. Sabemos que

$$\chi(1) = \chi'(1) = \sum_{i=1}^{t} \mu^{g_i}(1) = t\ \mu(1) = tk,$$

mientras que $\operatorname{Ind}_N^G \mu(1) = dk$, como todos los factores irreducibles de $\operatorname{Ind}_N^G \mu$ tienen igual grado entonces tienen que ser exactamente d/t.

Notemos, por otro lado, que la cantidad de caracteres distintos en $\operatorname{Ind}_N^G \mu$ es el orden o período mínimo en el que se repiten los caracteres de la sucesión

$$\chi, \chi \otimes \epsilon, \ldots \chi \otimes \epsilon^k, \ldots$$

con χ un caracter en $\operatorname{Ind}_N^G \mu$. Dada $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ llamemos $o(\chi)$ a este valor y notemos que $o(\chi)$ también es igual a dividir d con la cantidad de factores irreducibles en los que se descompone χ'.

Ejemplo 3. Un ejemplo donde tenemos esta situación es con

$$G = C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n,\ \ H = T' \rtimes \mathbb{S}_n,$$

donde con T' nos referimos al toro de SL_n, el cual es el subgrupo de C_d^n de matrices de determinante 1. Tenemos que $\mathbb{S}_n$ actúa por conjugación en T' de la misma forma que lo hace en C_d^n. Por lo tanto H es un subgrupo de G. Tomemos el morfismo

$$\widetilde{\det} : C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n \to C_d$$

definido por

$$s_i \mapsto 1,\ \ t \in C_d^n \mapsto (\det\ t),$$

el cual está bien definido viendo las relaciones en los generadores. Tenemos que H es el núcleo del morfismo por lo que el cociente es isomorfo a C_d y es cíclico.

Entonces podemos usar los visto para este caso. Dada $\chi_\Lambda \in \operatorname{Irr}(C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n)$ con $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ calculemos $o(\chi)$. Para eso veamos que es $\chi \otimes \widetilde{\det}$.

Gracias a lo visto en 3.1.1 se tiene

$$\chi_\Lambda = \operatorname{Ind}_{\prod N_i}^N \bigotimes_i \chi_{\lambda_i, \psi_i}^{N_i},$$

luego tenemos

$$\operatorname{Ind}_{\prod N_i}^N \bigotimes_i \chi_{\lambda_i, \psi_i}^{N_i} \otimes \widetilde{\det} = \operatorname{Ind}_{\prod N_i}^N \left(\bigotimes_i \chi_{\lambda_i, \psi_i}^{N_i} \otimes \operatorname{Res}(\widetilde{\det}) \right).$$

Si ordenamos los ψ_i de forma que $\psi_i = t_g^i$ con t_g un generador de C_d tenemos que al tensorizar con $\widetilde{\det}$ nos queda

$$\operatorname{Ind}_{\prod N_i}^N \left(\bigotimes_i \chi_{\lambda_i, \psi_{i+1}}^{N_i} \right),$$

por como están definidos estos caracteres. Al tensorizar k veces obtenemos

$$\operatorname{Ind}_{\prod N_i}^{N}\left(\bigotimes_i \chi_{\lambda_i,\psi_{i+k}}^{N_i}\right).$$

Luego el orden o período mínimo de la sucesión

$$\chi_\Lambda, \chi_\Lambda \otimes \widetilde{\det}, \dots \chi_\Lambda \otimes \widetilde{\det}^k, \dots$$

es el mismo orden que el de la sucesión

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_d),$$

donde en esta dos términos se consideran iguales si las particiones lo son, a este valor lo llamamos $o(\Lambda)$.

3.2. Representaciones de los grupos de Weyl

Usemos los argumentos de la sección anterior para entender cuáles son las representaciones de los grupos de Weyl de los tipos A, B, C, D.

Tipo A: En este caso sabemos que el grupo de Weyl de A_n es el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$ se parametrizan con las particiones de n, las representaciones irreducibles son los módulos de Spetch S^λ [20, Capítulo 10]. A la representación que depende de λ la denotamos $\mathbb{S}_n^\lambda$.

Tipos B y C: Los grupos de Weyl de los tipos B y C son iguales. El grupo de Weyl de estos tipos es W_n, el subgrupo de matrices de GL_n de matrices que contienen exactamente una entrada no nula en cada fila y en cada columna, siendo estas entradas ± 1. Sabemos que $W_n = \{\pm 1\}^n \rtimes \mathbb{S}_n$, donde $\{\pm 1\}^n$ es el subgrupo de matrices diagonales. Como $\{\pm 1\}$ es cíclico de orden 2 podemos usar el argumento del corolario 3.1.1 para afirmar que las representaciones de W_n están parametrizadas por los pares de particiones (λ_1, λ_2) tales que $|\lambda_1| + |\lambda_2| = n$. Si (λ_1, λ_2) es uno de estos pares la representación que induce es:

$$\operatorname{Ind}_{W_{n_1}\times W_{n_2}}^{W_n} \mathbb{S}_{n_1}^{\lambda_1} \bigotimes \left(\mathbb{S}_{n_2}^{\lambda_2} \otimes \operatorname{sgn}\right),$$

donde $n_1 = |\lambda_1|$, $n_2 = |\lambda_2|$ y sgn es la representación en W_{n_2} definida por

$$(t_1, t_2, \dots t_{n_2}, \sigma) \mapsto t_1 t_2 \dots t_{n_2}.$$

Las representaciones irreducibles las vamos a denotar $\chi_{\lambda,\mu}$.

Tipo D: En este caso el grupo de Weyl es W_n', el subgrupo de los elementos de W_n tales que pueden ser escritos como un producto de los generadores $t, s_1, \dots s_{n-1}$ usando una cantidad par de veces t. Sabemos de 1.1.2 que $W_n' = N_n' \rtimes \mathbb{S}_n$ donde N_n' son las matrices diagonales que tienen una cantidad par de -1 o equivalentemente de determinante 1.
Luego estamos en las condiciones de 3. Sea $\chi_{\lambda,\mu}$ una representación irreducible de W_n, se tiene

$$\begin{aligned}\chi_{\lambda,\mu} \otimes \epsilon &= \left(\operatorname{Ind}_{W_{n_1}\times W_{n_2}}^{W_n} \mathbb{S}_{n_1}^{\lambda_1} \bigotimes \left(\mathbb{S}_{n_2}^{\lambda_2} \otimes \operatorname{sgn}\right)\right) \otimes \epsilon \cong \operatorname{Ind}_{W_{n_1}\times W_{n_2}}^{W_n} \left(\mathbb{S}_{n_1}^{\lambda_1} \bigotimes \left(\mathbb{S}_{n_2}^{\lambda_2} \otimes sgn\right)\right) \otimes \operatorname{Res}\ \epsilon \\ &= \operatorname{Ind}_{W_{n_1}\times W_{n_2}}^{W_n} \left(\mathbb{S}_{n_1}^{\lambda_1} \otimes \operatorname{sgn}\right) \bigotimes \mathbb{S}_{n_2}^{\lambda_2} = \chi_{\mu,\lambda}.\end{aligned}$$

Llamemos $\chi_{\lambda,\mu}'$ a la restricción de $\chi_{\lambda,\mu}$ a W_n'. Por lo visto en 3 sabemos que los caracteres irreducibles de son:

a. $\chi_{\lambda,\mu}' = \chi_{\mu,\lambda}'$ si $\lambda \neq \mu$.

b. $\chi_{\lambda,\lambda}^+, \chi_{\lambda,\lambda}^-$, donde estos son los irreducibles en la descomposición de $\chi_{\lambda,\lambda}'$ en el caso que n sea par.

3.3. Representaciones del normalizador del toro

El objetivo de esta sección es calcular las representaciones irreducibles del normalizador del toro, pero mirando las relaciones sabemos que no es un producto semidirecto por la relación $\xi_i^2 = h_i(-1)$ de 1. Pero notamos que si esa relación fuese $\xi_i^2 = 1$ tendríamos un producto semidirecto, para eso usamos el grupo $S_{d,n}$ sobre un grupo cíclico C_d, definido por cambiar esa relación por $\xi_i^2 = 1$ y podríamos usar lo visto en 3.1.1 para calcular los caracteres.
Para relacionar las representaciones de ambos grupos definimos un álgebra sobre $\mathbb{C}[u]$ la cual llamamos $\widetilde{Y_{d,n}}$ tal que sus especializaciones en $u = 0, 1$ nos dan las álgebras de grupo de $N_{d,n}, S_{d,n}$. Luego usando el teorema de deformación de Tits tendremos una biyección entre las irreducibles de estas.
Una vez hecho esto calculamos las representaciones irreducibles de $S_{d,n}$ en cada uno de los tipos usando que es un producto semidirecto y luego vemos algunos corolarios más usando esto.

Relaciones

Sea t_g un generador de C_d y llamamos $t_1, t_2, \ldots t_n$ a los generadores de C_d^n. Para cualquiera de los tipos de raíces $V = A, B, C, D$ definimos los grupos $N_{d,n}^V$ como los grupos generados por $t_1, t_2, \ldots t_n, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_l$ sujetos a las relaciones:

(n1) $\xi_i^2 = h_i(-1)$.

(n2) $\underbrace{\xi_i \xi_j \ldots}_{m_{ij}} = \underbrace{\xi_j \xi_i \ldots}_{m_{ij}}$ donde m_{ij} es el orden de $(s_i s_j)$ en el grupo de Weyl.

(n3) $\xi_i t_j = t_{s_i(H_j)} \xi_i$.

(n4) $t_j t_k = t_k t_j$ para todos $1 \leq j, k \leq n$.

(n5) $t_j^d = 1$.

donde $t_{a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots a_n H_n} = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \ldots t_n^{a_n}$, que también lo notamos $t^{\{a_1, a_2, \ldots a_n\}}$.

En tipo A' definimos $N_{d,n}^{A'}$ con las mismas relaciones que en $N_{d,n}^A$ salvo por el toro, que son las matrices en C_d^n de determinante 1. Observemos que las relaciones de $\mathbb{C}[N_{d,n}]$, son las relaciones que obtenemos de las álgebras $Y_{d,n}$ al especializar en $u = 1$. También que si $d = q - 1$ estas son las relaciones del normalizador del toro.

El objetivo es calcular los caracteres de $\mathcal{H}(G, U)$, con G el grupo de Chevalley en cada uno de los tipos. Sabemos que la función T_U de 2.19 nos relaciona estos caracteres con los de $N_{q-1,n}$. Por otro lado tenemos una forma de calcular los caracteres de $S_{q-1,n}$ por ser un producto semidirecto, usando 3.1.1. Luego necesitamos un álgebra que nos dé una biyección entre los caracteres de $N_{q-1,n}$ y $S_{q-1,n}$, o más en general entre $N_{d,n}$ y $S_{d,n}$.

Para eso para $V = A', A, B, C, D$ consideramos la $\mathbb{C}[u]$ álgebra $\widetilde{Y_{d,n}^V}$ con mismos generadores y relaciones que $Y_{d,n}^V$ pero cambiando la relación cuadrática por

$$\xi_i^2 = u h_i(-1) + (1 - u). \tag{3.2}$$

Notemos que al especializar en $u = 1$ obtenemos $N_{d,n}^V$, mientras que al especializar en $u = 0$ obtenemos $S_{d,n}^V$. También vale que esta álgebra es libre con una base indexada en los elementos de $S_{d,n}^V$ haciendo un razonamiento análogo al del teorema 48.

Siguiendo los argumentos de 1.2.2 tomamos $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}(u)$ tal que $\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}$ y $\mathbb{K}Y_{d,n}$ sean split. Tomamos $\theta_0, \theta_1 : \mathbb{C}[u] \to \mathbb{C}$ los morfismos que mandan $u \mapsto 0, u \mapsto 1$ respectivamente. Con la especialización $u \mapsto 1$ obtenemos la $\mathbb{C}$ álgebra $\mathbb{C}[N_{d,n}]$ y con la especialización $u \mapsto 0$ obtenemos $\mathbb{C}[S_{d,n}]$. Como estos dos son split y semisimples entonces estamos bajo las hipótesis del Teorema de Deformación de Tits, el cual nos da biyecciones:

$$d_{\theta_1} : \mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\left(N_{d,n}\right), \;\; d_{\theta_0} : \mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\left(S_{d,n}\right).$$

De hecho la proposición 18 nos dice que

$$d_{\theta_1}(\chi) = (\theta_1)^* \circ \chi, \;\; d_{\theta_0}(\chi) = (\theta_0)^* \circ \chi.$$

Donde $(\theta_1)^*$,$(\theta_0)^*$ son las extensiones de (θ_1),(θ_0) a la clausura integral de $\mathbb{C}[u]$ en $\mathbb{K}$. En particular las dimensiones de las representaciones irreducibles de $\mathbb{C}[N_{d,n}]$ y $\mathbb{C}[S_{d,n}]$ coinciden, por lo que concluimos usando el teorema de Wedderburn que son isomorfas como $\mathbb{C}$ álgebras. También tenemos una biyección:

$$T_N = d_{\theta_0} \circ (d_{\theta_1})^{-1} : \mathrm{Irr}\left(S_{d,n}\right) \to \mathrm{Irr}\left(N_{d,n}\right). \tag{3.3}$$

El siguiente diagrama muestra la situación:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}Y_{d,n}\right) \arrow[dr, "d_{\phi_1}"] & & \mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}\right) \arrow[dl, "d_{\theta_1}"'] \arrow[dr, "d_{\theta_0}"] & \\
& \mathrm{Irr}\left(N_{d,n}\right) & & \mathrm{Irr}\left(S^W_{d,n}\right)
\end{tikzcd}$$

Y si $d = q - 1$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}Y_{q-1,n}\right) \arrow[dl, "d_{\phi_q}"'] \arrow[dr, "d_{\phi_1}"] & & \mathrm{Irr}\left(\mathbb{K}\widetilde{Y_{q-1,n}}\right) \arrow[dl, "d_{\theta_1}"'] \arrow[dr, "d_{\theta_0}"] & \\
\mathrm{Irr}\left(\mathcal{H}(G,U)\right) & & \mathrm{Irr}\left(N_{q-1,n}\right) & & \mathrm{Irr}(S_{q-1,n})
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

donde las flechas son biyecciones. Veamos como son las representaciones de $S_{d,n}$ en cada tipo.

Tipos A y A'

$\underline{\mathrm{GL}_n}$ En este caso $\mathbb{S}_n$ actúa por conjugación en $T = C_d^n$ de la misma forma que en 3.1.1, luego las representaciones están parametrizadas por $\mathcal{Q}^A_{d,n}$, las funciones $\Lambda : C_d \to \mathcal{P}$ de tamaño n.

$\underline{\mathrm{SL}_n}$ En este caso el grupo es $T' \rtimes \mathbb{S}_n$ con T' los elementos de determinante 1 en C_d^n. Por lo visto en el ejemplo 3 podemos afirmar que todas las representaciones irreducibles de este son factores de la restricción de alguna de $C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n$. Además tenemos que al restringir el caracter irreducible χ_Λ a $T' \rtimes \mathbb{S}_n$ se descompone en $d/o(\Lambda)$ irreducibles conjugadas no isomorfas dos a dos.

Tipos B y C

Los caracteres de C_d^n los podemos pensar como asignarle a cada t_i un elemento de C_d, y las identificamos con una tupla en C_d^n. Luego el grupo de Weyl actúa en las tuplas permutando e invirtiendo los elementos (ya que actúa en H como W_n). Sabemos que ± 1 son los únicos elementos en C_d que al invertirlos van a si mismos. Luego podemos identificar a cada órbita como la cantidad de elementos que tiene la tupla de cada uno de los siguientes grupos:

$$\{1\},\ \{-1\},\ \left\{t_g^1, t_g^{-1}\right\},\ldots,\left\{t_g^k, t_g^{-k}\right\},\ldots$$

donde t_g es un generador.

Tomamos como representante de cada órbita la tupla que ordena los números de izquierda a derecha respetando este orden de los grupos y haciendo que solo aparezca uno de los dos números de cada grupo. Supongamos que $n_1, n_2, \ldots n_k$ son las cantidades que determinan la órbita, queremos ver cual es el estabilizador. Si $j > 2$ cualquier elemento del estabilizador tiene que permutar a los n_j números del grupo j entre si, ya que en la tupla no aparece ninguno de sus inversos. Mientras que a los n_1 números del grupo 1 tiene que permutarlos entre si, con la posibilidad de invertirlos, ya que son sus propios inversos y lo mismo con los n_2 del grupo 2. Luego el estabilizador es

$$W_{n_1} \times W_{n_2} \times \mathbb{S}_{n_3} \ldots \mathbb{S}_{n_k}.$$

Por lo ya visto las representaciones de este grupo son

$$\chi_{\lambda_1,\mu_1} \otimes \chi_{\lambda_2,\mu_2} \otimes \mathbb{S}_{n_3}^{\lambda_3} \ldots \mathbb{S}_{n_k}^{\lambda_k},$$

donde son todas particiones de los tamaños correspondientes y $|\lambda_i| + |\mu_i| = n_i$ para $i = 1,2$. Sea ψ_i el caracter de C_d que aparece en las n_i posiciones del grupo i, donde por ejemplo ψ_1 es el caracter trivial y ψ_2 es el que eleva a la $d/2$.

Sea $T_i = C_d^{n_i}$ y $N_i = T_i \rtimes W_{n_i}$ para $i = 1,2$ y $N_i = T_i \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$ para $i > 2$, definamos al igual que antes para $i > 2$

$$\chi_{\lambda_i,\psi_i}^{N_i} = \mathbb{S}_{n_i}^{\lambda_i} \otimes \psi_i \in \operatorname{Irr}(N_i),$$

y para $i = 1,2$

$$\chi_{\lambda_i,\mu_i,\psi_i}^{N_i} = \chi_{\lambda_i,\mu_i} \otimes \psi_i \in \operatorname{Irr}(N_i).$$

Tomando el producto tensorial y induciendo a N nos da la representación irreducible

$$\chi_\Lambda = \operatorname{Ind}_{\prod N_i}^N \left(\chi_{\lambda_1,\mu_1,1}^{N_1} \otimes \chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}^{N_2}\right) \bigotimes_{i>2} \chi_{\lambda_i,\psi_i}^{N_i} \in \operatorname{Irr}(N).$$

Todas las representaciones de $S_{d,n}^B, S_{d,n}^C$ son de esta forma, por lo que están parametrizadas por dos pares de dos particiones y $(d-2)/2$ particiones ordenadas, de modo que la suma de todos los tamaños es n. Llamamos $\mathcal{Q}_{d,n}^B = \mathcal{Q}_{d,n}^C$ al conjunto que las parametriza y denotamos con χ_Λ a las representaciones irreducibles para $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \lambda_k)$ con $\Lambda_i = (\lambda_i, \mu_i)$ si $i = 1,2$.

Tipo D

Para describir como son las representaciones irreducibles en tipo D vamos a usar el siguiente lema.

Lema 24. *El grupo $S_{d,n}^D$ es un subgrupo de índice 2 en $S_{d,n}^B$. En particular cada representación irreducible de $S_{d,n}^D$ es un factor irreducible de alguna representación irreducible de $S_{d,n}^B$.*

Demostración. Notemos que $C_d^n \rtimes W_n'$ es un subgrupo de $C_d^n \rtimes W_n$ ya que W_n' es un subgrupo de W_n y actúan de igual forma por conjugación en C_d^n. Notemos también que por las relaciones que definen $C_d^n \rtimes W_n$ podemos extender el morfismo $\epsilon : W_n \to \{\pm 1\}$ a todo el grupo definiendo ϵ trivialmente en C_d^n. Luego tenemos que el núcleo de ϵ es $C_d^n \rtimes W_n'$ lo que nos dice que este último es un subgrupo de índice 2 en $C_d^n \rtimes W_n$. □

Como $S^D_{d,n}$ es un subgrupo de índice 2 en $S^B_{d,n}$ esto nos da una forma de presentar las representaciones irreducibles del primer grupo como los factores irreducibles de las restricciones del segundo gracias a 3.1.2. Si $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_k) \in \mathcal{Q}^B_{d,n}$ podemos considerar la representación χ_Λ de $S^B_{d,n}$

$$\chi_\Lambda = \mathrm{Ind}^N_{\prod N_i}(\chi^{N_1}_{\lambda_1,\mu_1,1} \otimes \chi^{N_2}_{\lambda_2,\mu_2,-1}) \bigotimes_{i>2} \chi^{N_i}_{\lambda_i,\psi_i},$$

donde $N_i = T_i \rtimes W_{n_i}$ para $i = 1, 2$ y $N_i = T_i \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$ para $i > 2$.
Al tensorizar con ϵ tenemos

$$\begin{aligned}
\chi_\Lambda \otimes \epsilon &= \mathrm{Ind}^N_{\prod N_i}\left(\left(\chi^{N_1}_{\lambda_1,\mu_1,1} \otimes \chi^{N_2}_{\lambda_2,\mu_2,-1}\right) \bigotimes_{i>2} \chi^{N_i}_{\lambda_i,\psi_i}\right) \otimes \epsilon = \\
&= \mathrm{Ind}^N_{\prod N_i}\left(\left(\chi^{N_1}_{\lambda_1,\mu_1,1} \otimes \chi^{N_2}_{\lambda_2,\mu_2,-1}\right) \bigotimes_{i>2} \chi^{N_i}_{\lambda_i,\psi_i} \otimes \mathrm{Res}(\epsilon)\right) \\
&= \mathrm{Ind}^N_{\prod N_i}\left(\chi^{N_1}_{\mu_1,\lambda_1,1} \otimes \chi^{N_2}_{\mu_2,\lambda_2,-1}\right) \bigotimes_{i>2} \chi^{N_i}_{\lambda_i,\psi_i},
\end{aligned}$$

ya que ϵ es trivial en cada N_i con $i > 2$ y al tensorizarlo en N_1, N_2 intercambiamos las particiones.
Luego si $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (\mu_1, \mu_2)$ la representación χ_Λ cumple $\chi_\Lambda \neq \chi_\Lambda \otimes \epsilon$ por lo que se restringe a una representación irreducible en $S^D_{d,n}$, la cual también llamamos χ_Λ. Mientras que si $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2)$ (incluyendo el caso en que no hay bloques de ± 1) tenemos $\chi_\Lambda \otimes \epsilon = \chi_\Lambda$, por lo que al restringirla a $S^D_{d,n}$ se descompone en dos factores irreducibles $\chi^{\pm}_\Lambda$. Además gracias a 3.1.2 las $\chi_\Lambda, \chi^{\pm}_\Lambda$ son todas las irreducibles de $S^D_{d,n}$. Llamamos $\mathcal{Q}^D_{d,n}$ al conjunto que parametriza las representaciones irreducibles.

Observación 23. Consideremos las álgebras $\widetilde{Y^{A'}_{d,n}}$ y $Y^{A'}_{d,n}$, las cuales son subálgebras de $\widetilde{Y^{A}_{d,n}}$ y $Y^A_{d,n}$ respectivamente. Por lo tanto podemos usar la reciprocidad de Frobenius para ver que todas las irreducibles de $\widetilde{Y^{A'}_{d,n}}$ y $Y^{A'}_{d,n}$ son restricciones de irreducibles de $\widetilde{Y^{A}_{d,n}}$ y $Y^A_{d,n}$ respectivamente.

3.4. Tensoriando con las álgebras de grupo de C_d y C_2

El objetivo de esta sección es tensorizar las álgebras de Iwaori–Hecke de los tipos A, B con las álgebras de grupo de los grupos cíclicos C_d, C_2 respectivamente. Esto nos va a servir para dar una lista completa de las representaciones irreducibles de las álgebras $Y^A_{d,n}, Y^B_{d,n}$ y también para probar que son split sobre $\mathbb{C}(u)$.

Extendamos el álgebra de Iwaori–Hecke de la siguiente manera. Para $d, n \geq 1$ consideramos la $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ álgebra definida por

$$H^A_{d,n} = H^A_n[h]/(h^d - 1) = H^A_n \otimes \mathbb{C}[C_d],$$

donde C_d es el grupo cíclico de d elelmentos y $h \in C_d$ un generador. Denotamos $H^A_{d,n}(u)$ a la $\mathbb{C}(u)$ álgebra $\mathbb{C}(u) \bigotimes_{\mathbb{C}[u^{\pm 1}]} H^A_{d,n}$. Como $H_{d,n}(u)$ es producto tensorial de semisimples entonces es semisimple y los caracteres son el producto cartesiano de los de los factores. Luego si $\lambda \in \mathcal{P}_n$ y $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}[C_d])$ definimos el producto tensorial:

$$\chi^{H^A_{d,n}}_{\lambda,\psi} = \chi^{H_n}_\lambda \otimes \psi \in H^A_{d,n}(u).$$

Existe un cociente natural

$$Y^A_{d,n} \to H^A_{d,n}, \tag{3.5}$$

definido por $t_j \mapsto h, \xi_i \mapsto s_i$. Se puede ver desde los generadores de $Y^A_{d,n}$ que el cociente está bien definido ya que los $e_i, h_i(-1)$ van a 1. La especialización en $u = 1$ nos da

$$\mathbb{C}\left[\mathbb{S}_n\right] \otimes \mathbb{C}\left[C_d\right] = \mathbb{C}\left[\mathbb{S}_n \times C_d\right].$$

Al especializar en $u = 1$ el cociente natural nos da la función sobreyectiva

$$N^A_{d,n} \to C_d \times \mathbb{S}_n. \tag{3.6}$$

Viendo las relaciones de $N^A_{d,n}$ y las de $\mathbb{S}_n$ tenemos que bajo esta función sobreyectiva $\xi_i \mapsto s_i, t \mapsto (\det\ t)$. Por esta razón podemos definir la inflación

$$\mathrm{Infl} : \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_n \times C_d) \to \mathrm{Irr}(N^A_{d,n}), \tag{3.7}$$

que obtenemos al componer con la función (3.6). Tenemos

$$\mathrm{Infl}(\chi_{\lambda,\psi})(t\sigma) = \psi(\det\ t)\ \mathbb{S}^\lambda_n(\sigma).$$

Si ahora consideramos $\widetilde{Y^A_{d,n}}$ también tenemos un cociente natural

$$\widetilde{Y^A_{d,n}} \to \mathbb{C}\left[\mathbb{S}_n \times \mathbb{C}_d\right], \tag{3.8}$$

que envía los t_j a h. Al especializar en $u = 1$ este cociente natural nos da una función sobreyectiva

$$N^A_{d,n} \to C_d \times \mathbb{S}_n. \tag{3.9}$$

Con la cual nuevamente $\xi_i \mapsto s_i, t \mapsto (\det\ t)$, por lo que es la misma función que la de la ecuación (3.6) y por esta razón si consideramos

$$\mathrm{Infl} : \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_n \times C_d) \to \mathrm{Irr}(N^A_{d,n}), \tag{3.10}$$

obtenemos la misma función que en la ecuación (3.7). Si especializamos en $u = 0$ obtenemos un mapa suryectivo

$$S^A_{d,n} \to \mathbb{C}\left[\mathbb{S}_n \times C_d\right],$$

con el cual $\xi_i \mapsto s_i,\ t \mapsto (\det\ t)$, y por esta razón podemos consideramos

$$\mathrm{Infl} : \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_n \times C_d) \to \mathrm{Irr}(S^A_{d,n}). \tag{3.11}$$

definida por

$$\mathrm{Infl}(\chi_{\lambda,\psi})(t,\sigma) = \psi(\det\ t)\ \mathbb{S}^\lambda_n(\sigma).$$

Ahora consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$ álgebra $H^B_{2,n}$ definida por

$$H^B_{2,n} = H^B_n\left[h\right]/(h^2 - 1) = H^B_n \otimes \mathbb{C}\left[C_2\right].$$

Al igual que antes $H^B_{2,n}(u)$ es semisimple y su conjunto de caracteres es el producto de los caracteres de sus factores. Como d es par y viendo como son las relaciones de $Y^B_{d,n}$ de 2.6.2 tenemos que existe un cociente natural

$$Y^B_{d,n} \to H^B_{2,n}, \tag{3.12}$$

definido por $t_j \mapsto h, g_i \mapsto g_i, b_1 \mapsto b_1$, análogamente viendo las relaciones de $\widetilde{Y^B_{d,n}}$ tenemos un cociente natural

$$\widetilde{Y^B_{d,n}} \to \mathbb{C}\left[W_n \times C_2\right], \tag{3.13}$$

tal que $t_j \mapsto h, g_i \mapsto g_i, b_1 \mapsto b_1$. Luego al especializar en $u = 1$ ambos cocientes natural nos dan la misma función sobreyectiva

$$\mathbb{C}\left[N^B_{d,n}\right] \to \mathbb{C}\left[W_n \times C_2\right],$$

definida por $\xi_i \mapsto \xi_i$ y t va a 1 o h dependiendo de que (det t) sea un cuadrado en C_d o no, respectivamente. Esta asignación la denotamos $(\det\ t)^*$. Luego si componemos con este mapa obtenemos

$$\mathrm{Infl} : \mathrm{Irr}(W_n \times C_2) \to \mathrm{Irr}(N^B_{d,n}). \tag{3.14}$$

definida por

$$\mathrm{Infl}(\chi_{\lambda,\mu,\psi})(t\sigma) = \psi\left((\det\ t)^*\right)\ \chi_{\lambda,\mu}(\sigma), \tag{3.15}$$

donde ψ queda determinada por el valor de $\psi(h) = \pm 1$. Si especializamos en $u = 0$ el cociente natural nos da un mapa suryectivo

$$\mathbb{C}\left[S^B_{d,n}\right] = \mathbb{C}\left[C^n_d \rtimes W_n\right] \to \mathbb{C}\left[W_n \times C_2\right], \tag{3.16}$$

definido $\xi_i \mapsto \xi_i$ y $t \mapsto (\det\ t)^*$. Luego si componemos con este mapa obtenemos

$$\mathrm{Infl} : \mathrm{Irr}(W_n \times C_2) \to \mathrm{Irr}(S^B_{d,n}), \tag{3.17}$$

definida por

$$\mathrm{Infl}(\chi_{\lambda,\mu,\psi})(t\sigma) = \psi((det\ t)^*)\chi_{\lambda,\mu}(\sigma), \tag{3.18}$$

donde ψ queda determinada por $\psi(h) = \pm 1$.

3.5. Viendo que algunas álgebras son split sobre $\mathbb{C}(u)$

En esta sección vamos a ver que las álgebras $Y^B_{d,n}, Y^A_{d,n}, Y^{A'}_{d,n}$ son split sobre $\mathbb{C}(u)$ y daremos una lista completa de los caracteres irreducibles en los tipos A y B.
Probar que son split sobre $\mathbb{C}(u)$ va a implicar que los caracteres de estas álgebras llegan a $\mathbb{C}[u]$ gracias a 18, esto nos va a ayudar después para simplificar el cálculo de los caracteres en algunos valores específicos.

Lema 25. *El álgebra* $\widetilde{Y^B_{d,n}}(u)$ *es split.*

Demostración. Empecemos recordando que las representaciones de $\mathbb{C}\left[C^N_d \rtimes W_n\right] = S^B_{d,n}$ están parametrizadas por el conjunto

$$\mathcal{Q}^B_{d,n} = \left\{ \Lambda = \Lambda_1 : \{\pm 1\} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \Lambda_2 : C_d \backslash \{\pm 1\} \to \mathcal{P} \text{ de tamaño total } n \right\}.$$

Dada una función $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathcal{Q}^B_{d,n}$ consideramos los pares (λ_i, ψ_i) con $\Lambda(\psi_i) = \lambda_i$ y $n_i = |\lambda_i|$, donde $i = 1, 2$ se corresponden con ± 1 respectivamente. Para $i > 2$ consideremos la representación

$$\chi^{\widetilde{Y^A_{d,n_i}}}_{\lambda_i,\psi_i}$$

de $\widetilde{Y^A_{d,n_i}}$ que proviene de inflar la representación $\mathbb{S}^{\lambda_i}_{n_i} \otimes \psi_i$ de $\mathbb{C}\left[C_d \times \mathbb{S}_n\right]$ vía el mapa (3.8). Para $i = 1, 2$ consideremos la representación $\chi_{\lambda_i, \mu_i, \psi_i}$ de $\widetilde{Y^B_{d,n_i}}$ que proviene de inflar la representación $\chi_{\lambda_i, \mu_i} \otimes \psi_i$ de $\mathbb{C}\left[C_2 \times W_n\right]$ vía el mapa 3.13.

Luego consideremos la $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$ álgebra

$$Y_{(n_i)} = \widetilde{Y^B_{d,n_1}} \otimes \widetilde{Y^B_{d,n_2}} \bigotimes_{i>2} \widetilde{Y^A_{d,n_i}}.$$

Como las álgebras $\widetilde{Y^A_{d,n_i}}$ están incluidas en $\widetilde{Y^B_{d,n_i}}$ tenemos que $Y_{(n_i)}$ está embebida en $\widetilde{Y^B_{d,n}}$ y podemos considerar la representación

$$\chi_\Lambda^{Y_{(n_i)}} = \chi_{\lambda_1,\mu_1,1}^{\widetilde{Y^B_{d,n_1}}} \otimes \chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}^{\widetilde{Y^B_{d,n_2}}} \bigotimes_{i>2} \chi_{\lambda_i,\psi_i}^{\widetilde{Y^A_{d,n_i}}},$$

donde tensorizamos sobre $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$. Definimos $\chi_\Lambda^{Y_B}$ al caracter inducido

$$\chi_\Lambda^{Y_B} = \mathrm{Ind}_{Y_{(n_i)}}^{\widetilde{Y^B_{d,n}}} \chi_\Lambda^{Y_{(n_i)}}.$$

Los caracteres inducidos $\chi_\Lambda^{Y_B}$ están definidos sobre $\mathbb{C}(u)$ ya que los $\mathbb{S}^\lambda, \chi_{\lambda,\mu}$ lo están. Luego para ver que $\chi_\Lambda^{Y_B}$ es split alcanzaría con ver que estas son todas las irreducibles.

Denotemos $N_1 = C_d^{n_1} \rtimes W_{n_1}$, $N_2 = C_d^{n_2} \rtimes W_{n_2}$ y $N_i = C_d^{n_i} \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$ para $i > 2$. Luego si especializamos en $u = 0$ la representación $\chi_\Lambda^{Y_B}$ obtenemos

$$\mathrm{Ind}_{\prod N_i}^{N} \mathrm{Infl}(\chi_{\lambda_1,\mu_1,1}) \otimes \mathrm{Infl}(\chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}) \bigotimes_{i>2} \mathrm{Infl}(\chi_{\lambda_i,\psi_i}),$$

donde las inflaciones son las ecuaciones 3.17 y 3.11. Esta representación es la misma que χ_Λ de $S^B_{d,n}$ por la construcción de 3.3. Por lo tanto al especializar en $u = 0$ las representaciones $\chi_\Lambda^{Y_B}$ obtenemos todas las representaciones irreducibles de $S^B_{d,n}$.
Tomamos $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}(u)$ tal que $\widetilde{Y^B_{d,n}}$ se vuelve split, luego al tomar la especialización en $u = 0$ obtenemos una biyección entre las representaciones irreducibles de $\mathbb{K}\widetilde{Y^B_{d,n}}$ y las de $S^B_{d,n}$. Como las especializaciones

$$d(\chi_\Lambda^{Y_B}) = \chi_\Lambda^{S^B_{d,n}}$$

son todas las irreducibles de $S^B_{d,n}$ gracias a 3.3 entonces por esta biyección tenemos que las $\chi_\Lambda^{Y_B}, \Lambda \in \mathcal{Q}^B_{d,n}$ son todas las irreducibles de $\widetilde{Y^B_{d,n}}$, que era lo que queríamos. □

Lema 26. *El álgebra $Y^B_{d,n}(u)$ es split.*

Demostración. Sea $\mathbb{K} \supset \mathbb{C}(u)$ una extensión de Galois finita tal que $\mathbb{K}Y^B_{d,n}, \mathbb{K}\widetilde{Y^B_{d,n}}$ sean split. Según vimos en 3.3 tenemos el siguiente diagrama donde las flechas son biyecciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Irr}(\mathbb{K}Y^B_{d,n}) \arrow[dr, "d_{\phi_1}"'] & & \mathrm{Irr}(\mathbb{K}\widetilde{Y^B_{d,n}}) \arrow[dl, "d_{\theta_1}"] \\
& \mathrm{Irr}(N^B_{d,n}) &
\end{tikzcd}$$

Además por lo visto en el lema anterior tenemos que las $\chi_{\Lambda}^{Y_B}, \Lambda \in \mathcal{Q}_{d,n}^B$ son un sistema completo de irreducibles de $\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}^B}$.

Consideremos una $\Lambda \in \mathcal{Q}_{d,n}^B$, sean $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots \lambda_k$ las particiones que la componen y sean $n_i = |\lambda_i|$ para $i > 2$, $n_1 = |\lambda_1 + \mu_1|$, $n_2 = |\lambda_2 + \mu_2|$, con la suma de los tamaños igual a n.

Para $i > 2$ consideremos la representación $\chi_{\lambda_i,\psi_i}^{Y_{d,n_i}^A}$ de Y_{d,n_i}^A que proviene de inflar la representación χ_{λ_i,ψ_i} de $H_{d,n}^A$ vía el cociente natural 3.5. Para $i = 1, 2$ consideramos la representación $\chi_{\lambda_i,\mu_i,\psi_i}^{Y_{d,n_i}^B}$ de Y_{d,n_i}^B que proviene de inflar la representación $\chi_{\lambda_i,\mu_i\psi_i}$ de $H_{2,n}^B$ vía el cociente natural 3.12.

Luego consideramos la $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ álgebra

$$Y'_{(n_i)} = Y_{d,n_1}^B \otimes Y_{d,n_2}^B \bigotimes_{i>2} Y_{d,n_i}^A.$$

Como las álgebras Y_{d,n_i}^A están incluidas en Y_{d,n_i}^B entonces $Y'_{(n_i)}$ está embebida en $Y_{d,n}^B$ y podemos considerar la representación

$$\chi_{\Lambda}^{Y'_{(n_i)}} = \chi_{\lambda_1,\mu_1,1}^{Y_{d,n_1}^B} \otimes \chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}^{Y_{d,n_2}^B} \bigotimes_{i>2} \chi_{\lambda_i,\psi_i}^{Y_{d,n_i}^A},$$

donde tensorizamos sobre $\mathbb{C}\left[u^{\pm 1}\right]$. Definimos $(\chi_{\Lambda}^{Y_B})'$ al caracter irreducible

$$(\chi_{\Lambda}^{Y_B})' = \operatorname{Ind}_{Y'_{(n_i)}}^{Y_{d,n}^B} \chi_{\Lambda}^{Y'_{(n_i)}}.$$

Los caracteres $(\chi_{\Lambda}^{Y_B})'$ están definidos sobre $\mathbb{C}(u)$ ya que los $\chi_{\lambda}^{H_n^A}$, $\chi_{\lambda,\mu}^{H_n^B}$ lo están por [18, Teorema 2.9]. Luego para ver que $Y_{d,n}^B$ es split alcanzaría con ver que estas son todas las irreducibles.

Definamos

$$N_1 = N_{d,n_1}^B, N_2 = N_{d,n_2}^B \text{ y } N_i = N_{d,n_i}^A \text{ para } i > 2.$$

Luego si especializamos en $u = 1$ la representación $(\chi_{\Lambda}^{Y_B})'$ obtenemos

$$\operatorname{Ind}_{\prod N_i}^{N} \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_1,\mu_1,1}) \otimes \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}) \bigotimes_{i>2} \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_i,\psi_i}),$$

donde las inflaciones son las ecuaciones 3.10,3.14 .

Recordemos que al especializar en $u = 1$ la representación $\chi_{\Lambda}^{Y_B}$ obtenemos

$$\operatorname{Ind}_{\prod N_i}^{N} \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_1,\mu_1,1}) \otimes \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_2,\mu_2,-1}) \bigotimes_{i>2} \operatorname{Infl}(\chi_{\lambda_i,\psi_i}),$$

donde son las inflaciones son las de las ecuaciones 3.14 y 3.7. Como estas inflaciones son las mismas entonces obtenemos que

$$d_{\theta_1}\left(\chi_{\Lambda}^{Y_B}\right) = (d_{\phi_1})\left((\chi_{\Lambda}^{Y_B})'\right).$$

Vimos en el lema anterior que las $\chi_{\Lambda}^{Y_B}$ son un sistema completo de irreducibles de $\widetilde{Y_{d,n}^B}$, como d_{ϕ_1}, d_{θ_1} son biyecciones entre las representaciones irreducibles entonces tenemos que las $(\chi_{\lambda}^{Y_B})'$ son un sistema completo de irreducibles en $Y_{d,n}^B$, que era lo que queríamos ver. $\square$

Observación 24. Haciendo el mismo argumento que en los dos lemas anteriores para tipo A obtenemos que $\widetilde{Y_{d,n}^A}(u)$, $Y_{d,n}^A(u)$ son split. Usando la observación 23 tenemos que las álgebras $\widetilde{Y_{d,n}^{A'}}(u)$, $Y_{d,n}^{A'}(u)$ también lo son.

Capítulo 4

Valores de los caracteres en elementos de longitud máxima

El objetivo de este capítulo es calcular los valores de los caracteres de $Y_{d,n}$ en algunos elementos particulares. El elemento fundamental $\Delta \in B^+$ nos determina un elemento $T_0 \in Y_{d,n}$, gracias al lema 4 obtenemos que T_0^2 es central en $Y_{d,n}$. Luego por el lema de Schur sabemos que T_0^2 actúa de forma escalar en cualquier representación irreducible, vamos a querer calcular el valor de este escalar para cada representación irreducible y también el valor del caracter en T_0.
Al especializar en q^{-1} obtendremos los valores de los caracteres irreducibles de $\mathcal{H}(G,U)$ en las especializaciones de T_0, T_0^2.

Sea W el grupo de Weyl de alguno de los tipos y sea $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \in W$ el elemento de longitud máxima de W, luego definimos

$$T_0 = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \in Y_{d,n},$$

$$\sigma_0 = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \in N_{d,n},$$

$$T_0' = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \in \widetilde{Y_{d,n}},$$

$$\widetilde{w_0} = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \in S_{d,n}.$$

Usando las relaciones de trenzas de W y el teorema 7 se puede ver que T_0 es independiente de la elección de la expresión reducida de w_0. Usando las relaciones de $\mathcal{H}(G,U)$ también podemos definir

$$T_{w_0} = T_{\xi_1} T_{\xi_2} \dots T_{\xi_k} \in \mathcal{H}(G,U).$$

Las deformaciones de 2.6 muestran que T_0 va a parar a T_{w_0}, σ_0 con las especializaciones en $q^{-1}, 1$ respectivamente.

Lema 27. *El elemento T_0^2 es central en $Y_{d,n}$. Se sigue por especialización que $T_{w_0}^2$ es central en $\mathcal{H}(G,U)$.*

Demostración. Siguiendo el procedimiento de [5, § 4.1] definimos el monoide B^+ (lo llamamos igual que el monoide de trenzas) generado por los ξ_i, t_j sujetos a las relaciones de $Y_{d,n}$ pero sacando las relaciones cuadráticas y las de la forma $t_j^d = 1$. Luego se puede definir el álgebra de monoide $\mathbb{C}[u^{\pm 1}][B^+]$ de la cual $Y_{d,n}$ será un cociente. Si tomamos

$$T_0 = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \in Y_{d,n} \in \mathbb{C}[u^{\pm 1}][B^+],$$

es suficiente con demostrar que T_0^2 es central en $\mathbb{C}[u^{\pm 1}][B^+]$. Siguiendo el argumento de 4 tenemos que T_0^2 conmuta con los ξ_i, y también tenemos $t_H T_0^2 = T_0^2 t_{w_0^2(H)}$, por 12 sabemos que $w_0^2 = 1$, lo que nos dice que T_0^2 es central. □

Observación 25. Haciendo un razonamiento análogo para $\widetilde{Y_{d,n}}$ se puede probar que $T_0'^2$ es central.

Lema 28. *Si m_{ij} es impar entonces ξ_i, ξ_j son conjugados en $Y_{d,n}$.*

Demostración. De la relación ($Y_{d,n}5$) tenemos que los ξ_i son inversibles con inversa

$$\xi_i^{-1} = u^{-1}(\xi_i - (1-u)e_i)h_i(-1).$$

Luego tenemos $\underbrace{(\xi_i\xi_j\ldots\xi_i)}_{m_{ij}}\xi_j\underbrace{(\xi_i\xi_j\ldots\xi_i)}_{m_{ij}}{}^{-1} = \underbrace{(\xi_i\xi_j\ldots\xi_i)}_{m_{ij}}\xi_j\underbrace{(\xi_j\xi_i\ldots\xi_j)}_{m_{ij}}{}^{-1} = \xi_i$, entonces ξ_j, ξ_i son conjugados. □

Observación 26. Observemos que el mismo argumento es válido en el grupo de Weyl , por lo que en el diagrama de Dynkin dos raíces simples unidas con una arista simple son conjugadas (ya que $m_{ij} = 3$ en ese caso). Viendo los diagramas de 1.1.2 podemos afirmar que en los tipos A y D todas las simetrías simples son conjugadas, mientras que en los tipos B, C hay dos clases de conjugación, las correspondientes a una transposición s y al elemento $t = \mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots 1)$.

4.1. Valor de los caracteres en T_0^2

En la sección anterior vimos que el elemento T_0^2 es central, ahora para cada caracter irreducible $Y_{d,n}$ queremos hallar una fórmula para el escalar con el que actúa T_0^2 que dependa de los caracteres de $S_{d,n}$, los cuales ya calculamos en 3.3. Para hacer esto seguimos un argumento similar a [5, Teorema 9.2.2] y [4, Teorema 4.3.4].

Observación 27. Tomamos $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}(u)$ tal que $\mathbb{K}Y_{d,n}$ sea split. Sea (V, π) una representación de $\mathbb{K}Y_{d,n}$. El idempotente e_i es el proyector a un subespacio V_i en el cual actúa trivialmente y hay una descomposición en suma directa $V = V_i \oplus W_i$, con $W_i = \mathrm{Ker}\ e_i$. Llamemos T_i al endomorfismo que induce ξ_i, el lema 12 nos dice que ξ_i conmuta con e_i, por lo que T_i preserva esta descomposición. Llamemos $h_i(-1)$ al endomorfismo que induce $h_i(-1)$, tenemos por el mismo lema que $h_i(-1)$ cumple $h_i(-1)e_i = e_i$ por lo que actúa trivialmente en V_i. Sobre V_i el endomorfismo T_i satisface la relación

$$T_i|_{V_i}^2 = u + (1-u)T_i.$$

Y sobre W_i satisface la relación

$$T_i|_{W_i}^2 = u\ h_i(-1)|_{W_i}^2,$$

pero como $h_i(-1)^2 = 1$ tenemos

$$T_i|_{W_i}^4 = u^2.$$

Los posibles autovalores de T_i son

$$1, -u, \pm\sqrt{u}, \pm i\sqrt{u}$$

Busquemos una descomposición análoga para $\widetilde{Y_{d,n}}$.

Observación 28. Sea (W, σ) una representación irreducible de $\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}$, llamemos T_i al endomorfismo que induce ξ_i, y llamamos $h_i(-1)$ al endomorfismo que induce $h_i(-1)$. Luego tenemos la relación

$$T_i^2 = h_i(-1)u + (1-u).$$

Como $h_i(-1)^2 = 1$ los posibles autovalores de $h_i(-1)$ son ± 1, luego los posibles autovalores de T_i^2 son $1, 1 - 2u$ y los posibles autovalores de T_i son

$$\pm 1, \pm\sqrt{1-2u}.$$

El siguiente teorema nos da, dependiendo de la representación irreducible de $\widetilde{Y_{d,n}}$, el escalar con el que actúa $T_0'^2$. Luego vamos a hacer lo mismo para $Y_{d,n}$, pero para eso vamos a usar este teorema.

Teorema 60. *Consideremos $\mathbb{K}$ de forma tal que $\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}$ es split, para $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}})$ el elemento $T_0'^2$ actúa por multiplicación escalar por*

$$y_\chi = (1-2u)^{g_\chi},$$

donde

$$g_\chi = \sum_{a_i} \chi_0(1) - \chi_0(t_{H_{a_i}}^{d/2}) / \ 2\chi_0(1)$$

y χ_0 es la especialización de χ en 0. La suma es sobre las raíces simples en la descomposición de w_0 contadas con multiplicidad.

Demostración. Sea (V,π) una representación irreducible con caracter χ. Por la observación previa los posibles autovalores de T_i son $\pm 1, \pm\sqrt{1-2u}$. Sean n_0, n_1, n^+, n^- las multiplicidades de $1, -1, \sqrt{1-2u}, -\sqrt{1-2u}$ respectivamente. Notemos que la multiplicidad de los autovalores $\pm\sqrt{1-2u}$ es la multiplicidad de -1 como autovalor de $h_i(-1)$, luego tenemos

$$n^+ + n^- = \frac{\chi(1) - \chi(h_i(-1))}{2},$$

y al especializar en 0 tenemos

$$n^+ + n^- = \frac{\chi_0(1) - \chi_0(t_{H_{a_i}}^{d/2})}{2}.$$

Por otro lado tenemos

$$\det\ T_i = 1^{n_0}(-1)^{n_1}\sqrt{1-2u}^{n^+}(-\sqrt{1-2u})^{n^-},$$

por lo que

$$(\det\ T_i)^2 = (1-2u)^{n^+ + n^-}.$$

Como $T_0'^2$ es central, el lema de Schur implica que actúa por multiplicación escalar para algún $y_\chi \in \mathbb{K}$. Tomando determinantes tenemos

$$y_\chi^{\dim V} = \det\ \pi(T_0'^2) = \prod_{a_i} \det\ \pi(T_i)^2 = (1-2u)^{\sum_i \chi_0(1) - \chi_0(t_{H_{a_i}}^{d/2})/2}.$$

Luego tomando raíces $\chi_0(1)$-esimas tenemos que existe η una raíz $\chi_0(1)$ de la unidad tal que

$$y_\chi = \eta\ (1-2u)^{g_\chi}.$$

Para ver que $\eta = 1$ especializamos en $u = 0$ y tenemos que $\theta_0(T_0^2) = \widetilde{w_0}^2 = 1$ por 12. Luego se tiene

$$\eta\ \chi_0(1) = \theta_0(\chi(T_0^2)) = \chi_0(\theta_0(T_0^2)) = \chi_0(1).$$

Por lo que $\eta = 1$. □

Corolario 7. *Si $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}})$ sabemos por el teorema anterior que $\chi(T_0'^2) = \chi(1)(1-2u)^{g_\chi}$, luego al especializar en $u = 1$ obtenemos*

$$\chi_1(\sigma_0^2) = \chi_1(\theta_1(T_0'^2)) = \theta_1(\chi(T_0'^2)) = \theta_1((1-2u)^{g_\chi}\chi(1)) = (-1)^{g_\chi}\chi(1).$$

Teorema 61. *Sea $\mathbb{K}$ tal que $\mathbb{K}Y_{d,n}$ es split, para $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}Y_{d,n})$ el elemento T_0^2 actúa por multiplicación escalar por*

$$z_\chi = u^{f_\chi}(-1)^{g_\chi},$$

donde

$$f_\chi = \sum_{a_i} 1 - \frac{\chi_0(e_i\xi_i)}{\chi_0(1)}.$$

y g_χ es el definido en el teorema anterior. Sumamos sobre las raíces simples que aparecen en la descomposición de w_0 contadas con multiplicidad .

En particular si especializamos en $u = 1/q$ el elemento $T_{w_0}^2 \in \mathcal{H}(G,U)$ actúa por el escalar $\left(\frac{1}{q}\right)^{f_\chi}(-1)^{g_\chi}$.

Demostración. Sea (V,π) una representación con caracter χ, por 27 los autovalores de T_i son $1, -u, \pm\sqrt{u}, \pm i\sqrt{u}$ y sean $m_0, m_1, m^+, m^-, m_2^+, m_2^-$ las respectivas multiplicidades. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\det\ \pi(T_i) =& 1^{m_0}(-u)^{m_1}(\sqrt{u})^{m^+}(-\sqrt{u})^{m^-}(i\sqrt{u})^{m_2^+}(-i\sqrt{u})^{m_2^-}\\ =&(-1)^{m_1+m_2^-+m^-}\sqrt{u}^{2m_1+m_2^++m_2^-+m^++m^-}i^{m_2^++m_2^-}\\ \chi_1(1) =& m_0+m_1+m^++m^-+m_2^++m_2^-.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\det\ \pi(T_i)^2 =& u^{2m_1+m_2^++m_2^-+m^++m^-}(-1)^{m_2^++m_2^-}\\ =& u^{\chi_1(1)+m_1-m_0}(-1)^{m_2^++m_2^-}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Sabemos por 12 que ξ_i conmuta con e_i, y que en $\mathrm{Ker}(e_i)$ el operador $\xi_i e_i$ es nulo, mientras que en el rango de e_i el operador $\xi_i e_i$ actúa de la misma forma que ξ_i lo hace en el rango de e_i, donde sabemos que tiene autovalores $1, -u$ con multiplicidades m_0, m_1. Luego tenemos $\chi(\xi_i e_i) = m_0 - m_1 u$, y al especializar en 1 obtenemos

$$\chi_1(\xi_i e_i) = m_0 - m_1. \tag{4.3}$$

Definimos $\chi' \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}})$ como el único tal que $\chi'_1 = \chi_1$ y llamamos χ_0 es su especialización en 0. Consideremos el elemento $\xi_i e_i \in \widetilde{Y_{d,n}}$ y S_i el operador que induce en χ'. Tenemos que en Ker e_i este operador es nulo y en el rango de e_i cumple la relación

$$S_i^2 = u\ h_i(-1) + 1 - u.$$

Usando el mismo argumento que antes vemos que $h_i(-1)e_i = e_i$ y la relación nos queda $S_i^2 = 1$ en el rango de e_i, por lo que los posibles autovalores de S_i son $0, \pm 1$. En particular tenemos $\chi'(\xi_i e_i) = \chi_1(\xi_i e_i) = \chi_0(\xi_i e_i)$ y reemplazando en la ecuación (4.3) obtenemos

$$\chi_0(\xi_i e_i) = m_0 - m_1. \tag{4.4}$$

Reemplazando esto en la ecuación (4.2) obtenemos

$$\det\ \pi(T_i)^2 = u^{\chi_0(1)-\chi_0(\xi_i e_i)}(-1)^{m_2^++m_2^-}. \tag{4.5}$$

Como T_0^2 es central, el lema de Schur implica que actúa por multiplicación escalar para algún $z_\chi \in \mathbb{K}$ Tomando determinantes tenemos

$$z_\chi^{\dim V} = \det\ \pi(T_0^2) = \prod_i \det \pi(T_i)^2 = u^{\sum_i(\chi_0(1)-\chi_0(\xi_i e_i))}(-1)^{\sum_i\ m_2^++m_2^-}.$$

Luego tomando raíces $\chi_0(1)$-esimas tenemos que existe $\eta \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_\chi = \eta\ u^{f_\chi}.$$

Para hallar η especializamos en $u = 1$, tenemos que $\phi_1(T_0^2) = \sigma_0^2$. Luego tenemos

$$\eta\ \chi_1(1) = \phi_1(\chi(T_0^2)) = \chi_1(\phi_1(T_0^2)) = \chi_1(\sigma_0^2) = (-1)^{g_\chi}\chi_1(1)$$

por el corolario 7. Por lo tanto $\eta = (-1)^{g_\chi}$ y obtenemos el resultado. □

Observación 29. Supongamos que $Y_{d,n}(u), \widetilde{Y_{d,n}}(u)$ son split (como en los tipos A, A', B gracias a 3.5) y $\chi \in \operatorname{Irr}(Y_{d,n}(u))$. Entonces por la proposición 18 tendremos que $\chi(T_i) \in \mathbb{C}[u^{\pm 1}]$. Esto implica que $m_2^+ = m_2^-, m^+ = m^-$ por lo que se tiene

$$\chi(\xi_i) = m_0 - m_1 u = \chi(e_i \xi_i).$$

Llamemos, por otro lado, n_0, n_1, n^+, n^- a las multiplicidades de $\pm 1, \pm\sqrt{1-2u}$ como autovalores de ξ_i en $\widetilde{Y_{d,n}}$ con la representación χ'. Como $\widetilde{Y_{d,n}}(u)$ es split se tiene $\chi'(\xi_i) \in \mathbb{C}[u^{\pm 1}]$, lo cual implica que $n^+ = n^-$. Luego se tiene $\chi'(\xi_i) = n_0 - n_1$ y

$$\chi'(\xi_i) = n_0 - n_1 = \chi_0(\xi_i) = \chi_1(\xi_i).$$

Por lo tanto tenemos

$$m_0 - m_1 = \phi_1(m_0 - m_1 u) = \phi_1(\chi(\xi_i)) = \chi_1(\xi_i) = \chi_0(\xi_i),$$

lo cual nos permite cambiar el $\chi_0(\xi_i e_i)$ de la expresión de f_χ por $\chi_0(\xi_i)$.

Definición 62. Las representaciones irreducibles de $S_{d,n}^V$ las parametrizamos por los conjuntos $\mathcal{Q}_{d,n}^V$, si $\Lambda \in \mathcal{Q}_{d,n}^V$ podemos definir χ_Λ^0 a la representación irreducible de $S_{d,n}^V$ correspondiente a Λ. Mirando el diagrama 3.4 podemos definir las representaciones irreducibles

$$\chi'_\Lambda, \chi_\Lambda, \chi_\Lambda^1$$

de $\widetilde{Y_{d,n}}, Y_{d,n}, N_{d,n}$ respectivamente tales que $d_{\theta_0}(\chi'_\Lambda) = \chi_\Lambda^0,\ d_{\theta_1}(\chi'_\Lambda) = \chi_\Lambda^1,\ d_{\phi_1}(\chi_\Lambda) = \chi_\Lambda^1$. También llamamos f_Λ, g_Λ a las constantes de los teoremas (61), (60) asociadas a la representación χ_Λ.

4.2. Cálculo de g_Λ

Para calcular los valores de las representaciones irreducibles en T_0^2 es necesario calcular g_Λ, f_Λ en cada uno de los tipos, empecemos calculando g_Λ. Para hacer estos cálculos vamos a usar la descripción de las representaciones de $S_{d,n}$ dada en 3.3.
En lo que sigue dada una representación χ_Λ^0 nos referiremos con $\psi \in C_d^n$ a la tupla con la que construimos χ_Λ^0, también vamos a denotar

$$N(\psi) := T \rtimes \mathbf{Stab}\ \psi = \prod_i N_i$$

y

$$\chi_\Lambda^\psi \in \operatorname{Irr}(\mathbf{Stab}\ \psi), \qquad \chi_\Lambda^{N(\psi)} \in \operatorname{Irr}(N(\psi))$$

a las representaciones irreducible de **Stab** ψ y $N(\psi)$ que construíamos en 3.3 antes de inducir.

Con esta notación tenemos $\chi_\Lambda = \mathrm{Ind}_{N(\psi)}^{N} \chi_\Lambda^{N(\psi)}$. Notemos también que

$$\chi_\Lambda^{N(\psi)}(1) = \chi_\Lambda^{\psi}(1) \qquad \text{y} \qquad [N : T \rtimes \mathbf{Stab}\ \psi] = [W : \mathbf{Stab}\ \psi]$$

por lo que

$$\chi_\Lambda(1) = \chi_\Lambda^{\psi}(1)\,[W : \mathbf{Stab}\ \psi]\,. \tag{4.6}$$

Lema 29. *En tipo A si $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k)$ y M_1, M_2 son la cantidad de elementos en $C_d^2, C_d \backslash C_d^2$ en ψ entonces $g_\Lambda = M_1 M_2$.*

Demostración. Por 1.1.3 sabemos que los $t_{H_{a_i}}^{d/2}$ son $t_i^{\frac{d}{2}} t_{i+1}^{\frac{d}{2}}$ y que además son $\binom{n}{2}$, como todos estos elementos son conjugados en $C_d^n \rtimes \mathbb{S}_n$ entonces

$$g_\Lambda = \binom{n}{2}\left(\frac{\chi_\Lambda^0(1) - \chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}})}{2\ \chi_\Lambda^0(1)}\right). \tag{4.7}$$

Como $t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}$ está en $T = C_d^n$ tenemos que al conjugarlo por un elemento de T obtenemos el mismo elemento, por lo tanto se tiene:

$$\chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = \mathrm{Ind}_{\prod N_i}^{N}(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = \frac{1}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \sum_{s \in \mathbb{S}_n} \chi_\Lambda^{N(\psi)}({}^s t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}), \tag{4.8}$$

donde con ^{s} nos referimos a la conjugación por s.
Al conjugar $t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}$ obtenemos un elemento de la forma $t_i^{\frac{d}{2}} t_j^{\frac{d}{2}}$ y al calcular el caracter $\chi_\Lambda^{N(\psi)}$ en este elemento nos da $\chi_\Lambda^{\psi}(1)$ si ambas o ninguna de las coordenadas i, j les corresponde un cuadrado y en caso contrario nos da $-\chi_\Lambda^{\psi}(1)$. Luego 4.8 nos queda:

$$\chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = \frac{\chi_\Lambda^{\psi}(1)}{n_1! n_2! \ldots n_k!}(K_1 - k_2),$$

donde K_1, K_2 son la cantidad de formas de conjugar $t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}$ y que ambas coordenadas les correspondan elementos en $C_d^2, C_d \backslash C_d^2$ o no. Como hay M_1, M_2 coordenadas correspondientes a cuadrados y no cuadrados respectivamente entonces

$$K_1 = 2\left(\binom{M_1}{2} + \binom{M_2}{2}\right)(n-2)!, \qquad K_2 = 2M_1 M_2 (n-2)!.$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{n!\ \chi_\Lambda^{\psi}(1)}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \chi_\Lambda^0(1),$$

luego obtenemos

$$\frac{\chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}})}{\chi_\Lambda^0(1)} = \frac{\binom{M_1}{2} + \binom{M_2}{2} - M_1 M_2}{\binom{n}{2}},$$

notando que $\binom{n}{2} = \binom{M_1}{2} + \binom{M_2}{2} + M_1 M_2$ y reemplazando esto en la ecuación (4.7) obtenemos el resultado. ∎

Observación 30. Consideremos ahora el tipo A' y veamos cuanto nos da g_μ para μ un irreducible de

$$S_{d,n}^{A'} = T' \rtimes \mathbb{S}_n,$$

donde T' son los elementos de C_d^n de determinante 1. Supongamos que μ es un factor irreducible de $(\chi_\Lambda^0)'$ (la restricción de χ_Λ^0) , en ese caso $(\chi_\Lambda^0)'$ tiene $d/o(\Lambda)$ factores en su descomposición gracias a 3. Luego se tiene

$$\chi_\Lambda^0(1) = (\chi_\Lambda^0)'(1) = d\ \mu(1)/o(\Lambda). \tag{4.9}$$

Por otro lado si conjugamos $t_i^{d/2}t_{i+1}^{d/2}$ por un elemento del grupo obtenemos un elemento de la misma forma y todos estos son conjugados en $T' \rtimes \mathbb{S}_n$ por lo que tenemos

$$\chi_\Lambda^0(t_1^{d/2}t_2^{d/2}) = (\chi_\Lambda^0)'(t_1^{d/2}t_2^{d/2}) = \sum_{i=1}^{d/o(\Lambda)} \mu^{g_i}(t_1^{d/2}t_2^{d/2}) = \frac{d}{o(\Lambda)}\mu(t_1^{d/2}t_2^{d/2}), \tag{4.10}$$

donde sumamos sobre los caracteres conjugados de μ. Luego reemplazando estas ecuaciones en la fórmula de g_μ obtenemos que $g_\mu = g_\Lambda = M_1M_2$. Esto nos da el valor de g para el tipo A'.

Lema 30. *En tipo B si $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \lambda_k)$ y N_1, N_2 son la cantidad de elementos en $C_d^2, C_d\backslash C_d^2$ en ψ entonces $g_\Lambda = 2N_1N_2$.*

Demostración. Sabemos que $t_{H_{a_1}}^{d/2} = t_{2H_1}^{d/2} = 1$, luego $\chi_\Lambda^0(1) = \chi_\Lambda^0(t_{H_{a_1}}^{d/2})$. Además los $t_{H_{a_i}}^{d/2}$ son $t_i^{d/2}t_{i+1}^{d/2}$, y todos estos son conjugados en $T \rtimes W_n$ y son $n^2 - n$ por lo visto en 1.1.3. Luego nos queda

$$(n^2 - n)\frac{\chi_\Lambda^0(1) - \chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}})}{2\chi_\Lambda^0(1)}. \tag{4.11}$$

Como $t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}}$ está en $T = C_d^n$ entonces al conjugarlo por un elemento de T obtenemos el mismo elemento y si lo conjugamos por un elemento de $\{\pm1\}^n \subset W_n$ invertimos los elementos de la tupla, por lo que obtenemos $t_1^{-\frac{d}{2}}t_2^{-\frac{d}{2}} = t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}}$, luego se tiene

$$\chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}}) = \frac{2^n}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\sum_{s\in\mathbb{S}_n}\chi_\Lambda^{N(\psi)}({}^s t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}}),$$

donde se extiende $\chi_\Lambda^{N(\psi)}$ como 0 fuera de $N(\psi)$ y multiplicamos por 2^n ya que conjugar por elementos de $\{\pm1\}^n$ no modifica nada. Por otro lado tenemos

$$\chi_\Lambda^0(1) = \chi_\Lambda^\psi(1)\frac{2^n n!}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}.$$

Al reemplazar estos valores en la ecuación (4.11) obtenemos

$$g_\Lambda = \frac{n^2 - n}{2}\left(1 - \frac{1}{n!\ \chi_\Lambda^\psi(1)}\sum_{s\in\mathbb{S}_n}\chi_\Lambda^{N(\psi)}\left({}^s t_1^{\frac{d}{2}}t_2^{\frac{d}{2}}\right)\right).$$

Esto se calcula de la misma forma que antes, pero en este caso el resultado queda multiplicado por 2 porque estamos multiplicando por $n^2 - n$. □

Lema 31. *En tipo D si $\mu^0 \in \mathrm{Irr}(S_{d,n}^D)$ es un factor de la restricción de $\chi_\Lambda^0 \in \mathrm{Irr}(S_{d,n}^B)$ y S_1, S_2 son la cantidad de elementos de $C_d^2, C_d\backslash C_d^2$ en ψ entonces $g_\mu = 2S_1S_2$.*

Demostración. Sabemos que $t^{d/2}_{H_{a_1}} = t^{d/2}_{H_1+H_2} = t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}$, mientras que $t^{d/2}_{H_{a_i}} = t_i^{\frac{d}{2}} t_{i+1}^{\frac{d}{2}}$ y además hay $n^2 - n$ en la descomposición del elemento maximal por lo visto en 1.1.3. Como todos estos elementos son conjugados en $C_d^n \rtimes W_n'$ entonces tenemos

$$g_\mu = (n^2 - n)\frac{\mu^0(1) - \mu^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}})}{2\mu^0(1)}.$$

Supongamos primero que μ^0 es la restricción de χ^0_Λ, en este caso la igualdad se satisface fácilmente por el lema anterior. Supongamos ahora que μ^0 es uno de los factores irreducibles de χ^0_Λ y sea η el otro factor.

Sabemos por 3.1.2 que los caracteres η, μ^0 son conjugados por algún elemento $t \in \{\pm 1\}^n$, luego se tiene $\eta = (\mu^0)^t$ y

$$\chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = (\chi^0_\Lambda)'(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = \mu^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) + (\mu^0)^t(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}) = 2\mu^0(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}),$$

ya que t actúa por conjugación invirtiendo los elementos de las tuplas en C_d^n y deja a $t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}}$ fijo. Haciendo un razonamiento análogo tenemos

$$\chi^0_\Lambda(1) = 2\mu^0(1)$$

Reemplazando esto obtenemos

$$g_\mu = (n^2 - n)\frac{\chi^0_\Lambda(1) - \chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}})}{2\chi^0_\Lambda(1)}.$$

Aplicando el lema anterior obtenemos lo deseado.

□

Lema 32. *En tipo C si* $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \lambda_k)$ *y* N_1, N_2 *las cantidades de elementos de* $C_d^2, C_d/C_d^2$ *en* ψ *entonces* $g_\Lambda = 2N_1N_2 + N_2$.

Demostración. Tenemos $t^{d/2}_{H_{a_1}} = t^{d/2}_{H_1} = t_1^{d/2}$. Si $i > 1$ se tiene que los $t^{d/2}_{H_{a_i}}$ son $t_i^{d/2} t_{i+1}^{d/2}$ y todos estos son conjugados en $C_d^n \rtimes W_n$, luego nos queda

$$(n^2 - n)\ \frac{\chi^0_\Lambda(1) - \chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}} t_2^{\frac{d}{2}})}{2\chi^0_\Lambda(1)} + n\ \frac{\chi^0_\Lambda(1) - \chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}})}{2\chi^0_\Lambda(1)}. \tag{4.12}$$

El primero de los sumandos se calcula igual que en el lema 30 y nos da $2N_1N_2$.

Calculemos $\chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}})$. Como este elemento está en C_d^n entonces al conjugarlo por un elemento de C_d^n obtenemos lo mismo y también si lo conjugamos por un elemento de $\{\pm 1\}^n \subset W_n$, por lo que se tiene

$$\chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}}) = \operatorname{Ind}^N_{\prod N_i} \chi^{N(\psi)}_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}}) = \frac{2^n}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\sum_{s \in \mathbb{S}_n} \chi^{N(\psi)}_\Lambda({}^s t_1^{\frac{d}{2}}), \tag{4.13}$$

donde extendemos $\chi^{N(\psi)}_\Lambda$ como 0 fuera de $N(\psi)$.

Al conjugar $t_1^{\frac{d}{2}}$ obtenemos un elemento de la forma $t_j^{\frac{d}{2}}$ y al calcular $\chi^{N(\psi)}_\Lambda$ en este elemento nos da $\chi^\psi_\Lambda(1)$ si j está en una coordenada correspondiente a un cuadrado y $-\chi^\psi_\Lambda(1)$ en caso contrario. La cantidad de formas de elegir una permutación de modo que ocurra el primer caso es $(n-1)!N_1$, mientras que para el segundo caso es $(n-1)!N_2$, luego tenemos

$$\chi^0_\Lambda(t_1^{\frac{d}{2}}) = \frac{2^n \chi^\psi_\Lambda(1)}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}(n-1)!(N_1 - N_2). \tag{4.14}$$

Reemplazando esto en el segundo sumando de 4.12 y usando que

$$\frac{2^n n!\ \chi_\Lambda^\psi(1)}{|\mathbf{Stab}\ \psi|} = \chi_\Lambda^0(1),$$

tenemos

$$n\ \frac{\chi_\Lambda^0(1) - \chi_\Lambda^0(t_1^{\frac{d}{2}})}{2\chi_\Lambda^0(1)} = \frac{n - (N_1 - N_2)}{2} = \frac{(N_1 + N_2) - (N_1 - N_2)}{2} = N_2. \tag{4.15}$$

Luego llegamos a la igualdad del enunciado. □

4.3. Cálculo de f_Λ

Ahora queremos calcular f_Λ en cada uno de los tipos, para eso nuevamente usamos lo visto en 3.3. Empecemos definiendo k_Λ para cualquiera de los tipos dado por

$$k_\Lambda = \sum_{a_i} \frac{\chi_\Lambda^0(e_i\xi_i)}{\chi_\Lambda^0(1)},$$

donde sumamos sobre todas las raíces simples en w_0 contadas con multiplicidad. Notemos que

$$f_\Lambda = l(w_0) - k_\Lambda,$$

por lo que hallar f_Λ es equivalente a hallar k_Λ ya que conocemos el valor de $l(w_0)$ por 1.1.3. Introducimos la siguiente definición

Definición 63. Si $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$ es una partición definimos

$$n(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \binom{\lambda_i}{2}.$$

Si $\Lambda : X \to \mathcal{P}_n$ donde $\mathcal{P}_n$ el conjunto de las particiones de tamaño n y X es un conjunto finito definimos

$$n(\Lambda) = \sum_{x \in X} n(\Lambda(x)).$$

El siguiente lema nos da el valor de k_Λ en tipo A.

Lema 33. *Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$ y $\mathbb{S}_n^\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbb{S}_n)$ el caracter que le corresponde, tenemos por* [9, Ejercicio 4.1.6] *que*

$$\binom{n}{2}\frac{\mathbb{S}_n^\lambda(s)}{\mathbb{S}_n^\lambda(1)} = \sum_i \left(\binom{b_i+1}{2} - \binom{a_i+1}{2}\right), \tag{4.16}$$

donde a_i y b_i son la cantidad de entradas hacia abajo y hacia la derecha de la i-ésima casilla de la diagonal en el diagrama de Young. Contemos esto de otra forma, si escribimos el número $j - i$ en la casilla (i, j) notamos que esta expresión nos da igual que sumar los números de todas las entradas y eso nos da $n(\lambda') - n(\lambda)$, luego tenemos

$$\binom{n}{2}\left(1 + \frac{\mathbb{S}_n^\lambda(s)}{\mathbb{S}_n^\lambda(1)}\right) = \binom{n}{2} + n(\lambda') - n(\lambda). \tag{4.17}$$

Por otro lado si $\Lambda \in \mathcal{Q}^A_{d,n}$ *sabemos por* [4, Teorema 4.3.14] *que*

$$k_\Lambda = \binom{n}{2}\frac{\chi^0_\Lambda(s)}{\chi^0_\Lambda(1)} = n(\Lambda') - n(\Lambda), \tag{4.18}$$

donde s *es una transposición simple. En particular si tenemos* $d = 2$ *y* $\Lambda = (\lambda, \mu)$ *entonces* χ^0_Λ *nos queda la representación* $\chi_{\lambda,\mu}$ *de* W_n*, por lo que tenemos*

$$\binom{n}{2}\frac{\chi_{\lambda,\mu}(s)}{\chi_{\lambda,\mu}(1)} = n(\Lambda') - n(\Lambda). \tag{4.19}$$

Ahora damos un argumento que nos ayuda a calcular χ^0_Λ *en un elemento del grupo de Weyl* $W \subset S_{d,n}$ *en cualquiera de los tipos. Sea* $\sigma \in W \subset S_{d,n}$*, escribamos* $\xi\pi \in T \rtimes W$ *para referirnos a un elemento genérico* $g \in S_{d,n}$*. Luego al inducir tenemos*

$$\chi^0_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{|T \rtimes \textbf{\textit{Stab}}\ \psi|}\sum_{g \in T \rtimes \textbf{\textit{Stab}}\ \psi} \chi^{N(\psi)}_\Lambda({}^g\sigma), \tag{4.20}$$

donde $\chi^{N(\psi)}_\Lambda$ *es extendida a 0 fuera de* $T \rtimes \textbf{\textit{Stab}}\ \psi$ *y*

$${}^g\sigma = g\sigma g^{-1} = \xi({}^\pi\sigma)\xi^{-1} = \xi^{({}^\pi\sigma)}(\xi^{-1})({}^\pi\sigma),$$

como ${}^\pi\sigma \in W$ *entonces* ${}^{({}^\pi\sigma)}(\xi^{-1}) \in T$*. Cuando* ${}^\pi\sigma \in \textbf{\textit{Stab}}\ \psi$ *tenemos*

$$\psi(\xi^{({}^\pi\sigma)}(\xi^{-1})) = \psi(\xi)\psi^{{}^\pi\sigma}(\xi^{-1}) = \psi(\xi)\psi(\xi^{-1}) = 1.$$

Luego tenemos $\chi^{N(\psi)}_\Lambda = \begin{cases} \chi^\psi_\Lambda({}^\pi\sigma) & \text{si } {}^\pi\sigma \in \textbf{\textit{Stab}}\ \psi, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ *y* 4.20 *nos queda*

$$\chi^0_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{|\textbf{\textit{Stab}}\ \psi|}\sum_{\pi \in W} \chi^\psi_\Lambda({}^\pi\sigma) = \mathrm{Ind}^W_{\textbf{\textit{Stab}}\ \psi}\, \chi^\psi_\Lambda(\sigma). \tag{4.21}$$

Observación 31. Sea $\mu \in \mathrm{Irr}(Y^{A'}_{d,n})$ y llamemos μ^0 al caracter correspondiente en $\mathrm{Irr}(S^{A'}_{d,n})$, sabemos que existe $\chi_\Lambda \in \mathrm{Irr}(Y^A_{d,n})$ tal que μ es un factor irreducible de la restricción de χ_Λ. Luego μ^0 es un factor de la restricción de χ^0_Λ. Se tiene que

$$\chi^0_\Lambda(1) = (\chi^0_\Lambda)'(1) = \frac{d}{o(\Lambda)}\mu^0(1),$$

ya que μ^0 tiene $d/o(\Lambda)$ conjugados de igual grado por 3. Además los conjugados de s (una transposición) en $S^A_{d,n}$ son de la forma $s_i t_i^j t_{i+1}^{-j}$ y todos estos son conjugados en $S^{A'}_{d,n}$, por lo que obtenemos

$$\chi^0_\Lambda(s) = (\chi^0_\Lambda)'(s) = \sum_{i=0}^{g_i}(\mu^0)^{g_i}(s) = \frac{d}{o(\Lambda)}\mu^0(s).$$

Reemplazando esto en la expresión de k_μ tenemos que $k_\mu = k_\Lambda$. Con esto tenemos la expresión de f para los tipos A, A'.

Lema 34. *Si* $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_k) \in \mathcal{Q}^B_{d,n}$*, con* $\Lambda_1 = (\lambda_1, \mu_1)$ *y* $\Lambda_2 = (\lambda_2, \mu_2)$ *entonces tenemos* $(n^2 - n)\dfrac{\chi^0_\Lambda(s)}{\chi^0_\Lambda(1)} = 2n(\Lambda_1') - 2n(\Lambda_1) + 2n(\Lambda_2') - 2n(\Lambda_2) + n(\lambda_3') - n(\lambda_3) + \dots + n(\lambda_k') - n(\lambda_k).$

Demostración. Definamos como en 3.3 los N_i y llamemos n_i a los tamaños de los bloques. Usando la fórmula 4.21 tenemos que

$$\chi^0_\Lambda(s) = \frac{1}{|\textbf{Stab } \psi|} \sum_{\pi \in W_n} \chi^\psi_\Lambda(^\pi s).$$

Como s es una transposición entonces al conjugarla obtenemos una transposición o una transposición con dos -1. Luego esto último nos queda

$$\begin{aligned}\chi^0_\Lambda(s) = \tfrac{1}{|\textbf{Stab } \psi|}(\chi_{\Lambda_1}(s)\chi_{\Lambda_2}(1)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)C_1 + \chi_{\Lambda_1}(1)\chi_{\Lambda_2}(s)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)C_2 + \\ \sum_{j>2}\chi_{\Lambda_1}(1)\chi_{\Lambda_2}(1)\chi_{\lambda_j}(s)\prod_{i>2, i\neq j}\chi_{\lambda_i}(1)C_j),\end{aligned} \tag{4.22}$$

donde $C_j = |\{\pi \in W_n : \ ^\pi s \text{ esta en el bloque j}\}|$.

Calculemos C_j para $j > 2$ donde el bloque j es $\mathbb{S}_{n_j}$. Sea $g = t\sigma, t \in \{\pm 1\}^n, \sigma \in \mathbb{S}_n$ tal que gsg^{-1} pertenece al bloque j. Tenemos que $gsg^{-1} = t\sigma s \sigma^{-1} t$, la cantidad de σ tales que $\sigma s \sigma^{-1}$ nos queda en el bloque j son

$$\binom{n_j}{2} 2(n-2)!.$$

luego para que $t\sigma s\sigma^{-1}t$ sea una transposición con dos 1 tenemos que t tiene que tener el mismo signo en las posiciones correspondientes a esa transposición, por lo que hay 2^{n-1} posibles t. Luego

$$C_j = \binom{n_j}{2} 2^n (n-2)!$$

Ahora calculemos $C_i, i = 1, 2$ donde el bloque es W_{n_i}, en este caso tenemos que $t\sigma s\sigma^{-1}t \in W_{n_i}$ si y solo si $\sigma s\sigma^{-1}$ es una transposición de este bloque, por lo que tenemos

$$C_i = \binom{n_i}{2} 2^{n+1}(n-2)!.$$

Luego reemplazando estos valores de C_j y usando 4.6 tenemos

$$(n^2 - n)\frac{\chi^0_\Lambda(s)}{\chi^0_\Lambda(1)} = \frac{n(n-1)}{2^n n!}\left(\binom{n_1}{2}2^{n+1}(n-2)!\frac{\chi_{\Lambda_1}(s)}{\chi_{\Lambda_1}(1)} + \binom{n_2}{2}2^{n+1}(n-2)!\frac{\chi_{\Lambda_2}(s)}{\chi_{\Lambda_2}(1)} + \sum_{j>2}\binom{n_j}{2}2^n(n-2)!\frac{\chi_{\lambda_j}(s)}{\chi_{\lambda_j}(1)}\right),$$

lo cual nos queda lo que queremos gracias al lema 33.

$\square$

Lema 35. *Si $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_k)$, con $\Lambda_1 = (\lambda_1, \mu_1)$ y $\Lambda_2 = (\lambda_2, \mu_2)$ entonces tenemos*

$$n \ \chi^0_\Lambda(t)/\chi^0_\Lambda(1) = (|\lambda_1| - |\mu_1|) + (|\lambda_2| - |\mu_2|),$$

donde $t \in \{\pm 1\}^n$ es el elemento que en su diagonal tiene una entrada igual a -1 y las restantes con 1.

Demostración. Empecemos calculando

$$m \ \chi_{\lambda,\mu}(t)/\chi_{\lambda,\mu}(1)$$

para particiones genéricas λ, μ con $k_1 = |\lambda|$, $k_2 = |\mu|$, $m = k_1 + k_2$. Sea $g = \sigma\pi \in \mathbb{S}_m \rtimes \{\pm 1\}^m$, luego $gtg^{-1} = \sigma\pi t \pi^{-1}\sigma^{-1} = \sigma t \sigma^{-1}$, por lo que cualquier conjugado de t consiste en permutar la coordenada donde hay un -1 y solo depende por que elemento de $\mathbb{S}_m$ conjugamos. Tenemos al inducir:

$$\chi_{\lambda,\mu}(t) = \operatorname{Ind}^{W_m}_{N_1 \times N_2} \chi^{N(\psi)}_{\lambda,\mu}(t) = \frac{1}{2^m k_1! k_2!}(\chi^{N(\psi)}_{\lambda,\mu}(t_1)C_1 + \chi^{N(\psi)}_{\lambda,\mu}(t_2)C_2),$$

donde t_1, t_2 denota cuando el conjugado de t tiene coordenada -1 en el primer o segundo bloque respectivamente y C_1, C_2 son la cantidad de veces que cada una de estas posibilidades ocurre.
Calculemos C_i para $i = 1, 2$, como el elemento $\pi \in \{\pm 1\}^m$ no influye en que caiga en el bloque i entonces tenemos 2^m posibilidades para este elemento, por otro lado la permutación σ tiene que mover el -1 a las k_i posiciones del bloque i, por lo que la cantidad de formas de hacer esto es $(m-1)!k_i$, luego tenemos

$$C_i = 2^m (m-1)!\ k_i.$$

Por otro lado como t_1 tiene el -1 en el primer bloque se tiene

$$\chi_{\lambda,\mu}^{N(\psi)}(t_1) = \chi_\lambda(1)\chi_\mu(1),$$

y como t_2 tiene un -1 en el segundo bloque

$$\chi_{\lambda,\mu}^{N(\psi)}(t_2) = -\chi_\lambda(1)\chi_\mu(1).$$

También tenemos

$$\chi_{\lambda,\mu}(1) = \mathrm{Ind}_{N_1 \times N_2}^{W_m}(1) = \frac{m!}{(k_1)!(k_2)!}\chi_{\lambda,\mu}^{N(\psi)}(1) = \frac{m!}{(k_1)!(k_2)!}\chi_\lambda(1)\chi_\mu(1).$$

Juntando todo nos queda

$$\frac{m\ \chi_{\lambda,\mu}(t)}{\chi_{\lambda,\mu}(1)} = k_1 - k_2. \tag{4.23}$$

Usando la fórmula de 4.21 tenemos que

$$\chi_\Lambda^0(t) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{Stab}\ \psi}^{W_n} \chi_\Lambda^\psi(t),$$

por lo que

$$\chi_\Lambda^0(t) = \frac{1}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\left(\chi_{\Lambda_1}(t)\chi_{\Lambda_2}(1)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)D_1 + \chi_{\Lambda_1}(1)\chi_{\Lambda_2}(t)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)D_2\right), \tag{4.24}$$

donde D_1 y D_2 es la cantidad de formas de conjugar t y que el -1 quede en el primer o segundo bloque respectivamente, ya que sabemos que no puede quedar en alguno de los restantes bloques por contener un -1. Luego usando la ecuación (4.6) nos queda

$$\frac{n\chi_\Lambda^0(t)}{\chi_\Lambda^0(1)} = \frac{n}{2^n n!}\left(\frac{\chi_{\Lambda_1}(t)}{\chi_{\Lambda_1}(1)}D_1 + \frac{\chi_{\Lambda_2}(t)}{\chi_{\Lambda_2}(1)}D_2\right). \tag{4.25}$$

Tenemos que D_i es la cantidad de formas de conjugar t y que quede en las primeras n_i posiciones, al igual que antes esto es $(n-1)!\ n_i 2^n$, luego (4.25) nos queda:

$$\frac{n\chi_\Lambda(t)}{\chi_\Lambda(1)} = \frac{\chi_{\Lambda_1}(t)}{\chi_{\Lambda_1}(1)}n_1 + \frac{\chi_{\Lambda_2}(t)}{\chi_{\Lambda_2}(1)}n_2,$$

que por la ecuación (4.23) nos queda

$$(|\lambda_1| - |\mu_1|) + (|\lambda_2| - |\mu_2|), \tag{4.26}$$

que era lo que queríamos. $\square$

Corolario 8. *Juntando los últimos dos lemas tenemos la fórmula*

$$k_\Lambda = 2n(\Lambda_1') - 2n(\Lambda_1) + 2n(\Lambda_2') - 2n(\Lambda_2) + n(\lambda_3') - n(\lambda_3) + \ldots + n(\lambda_k') - n(\lambda_k) + (|\lambda_1| - |\mu_1|) + (|\lambda_2| - |\mu_2|).$$

Demostración. Sabemos por los lemas 25, 26 que $Y_{d,n}^B(u), \widetilde{Y_{d,n}}^B(u)$ son split, entonces por la observación 29 tenemos

$$k_\Lambda = \sum_{a_i} \chi_\Lambda^0(\xi_i)/\chi_\Lambda^0(1).$$

Usando lo visto en 1.1.3 tenemos que en la descomposición de w_0 se tienen $n^2 - n$ conjugados de s y n conjugados de t, por lo que

$$k_\Lambda = (n^2 - n)\chi_\Lambda^0(s)/\chi_\Lambda^0(1) + n\chi_\Lambda^0(t)/\chi_\Lambda^0(1),$$

lo cual nos da lo que queremos gracias a los dos lemas previos. $\square$

Ahora hallemos el valor de k_μ en tipo D para $\mu \in \mathrm{Irr}(Y_{d,n}^D)$ tal que μ^0 es un factor de $\chi_\Lambda^0 \in \mathrm{Irr}(S_{d,n}^B)$. En tipo D sabemos gracias a la observación 26 que todas las simetrías simples son conjugadas y también los elementos s_ie_i, por 1.1.3 tenemos $l(w_0) = n^2 - n$, por lo que se tiene

$$k_\mu = (n^2 - n)\frac{\mu^0(s_ie_i)}{\mu^0(1)}.$$

Si μ es la restricción de χ_Λ^0 se que k_μ es igual a

$$(n^2 - n)\frac{\chi_\Lambda^0(s_ie_i)}{\chi_\Lambda^0(1)},$$

que nos da la expresión de 34 usando la observación 29. Supongamos ahora que χ_Λ^0 tiene otro factor irreducible, el cual llamamos η. Gracias a 3.1.2 sabemos que $\eta = (\mu^0)^t$, o sea μ se obtiene al conjugar η por el elemento $t = \mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Luego se tiene

$$\chi_\Lambda^0(s_ie_i) = \eta(s_ie_i) + \mu^0(s_ie_i) = \mu^0(s_ie_i) + (\mu^0)^t(s_ie_i) = \mu^0(s_ie_i) + \mu^0(ts_ie_it),$$

como los elementos ts_ie_it y s_ie_i son conjugados en $S_{d,n}^D$ se deduce que

$$\mu^0(s_ie_i) = \frac{\chi_\Lambda^0(s_ie_i)}{2}.$$

Haciendo un razonamiento análogo se tiene

$$\mu^0(1) = \frac{\chi_\Lambda^0(1)}{2}.$$

Por lo que se obtiene

$$\frac{\mu^0(s_ie_i)}{\mu^0(1)} = \frac{\chi_\Lambda^0(s_ie_i)}{\chi_\Lambda^0(1)},$$

y en este caso también nos queda la expresión del lema 34 usando la observación 29. En conclusión obtenemos que si μ^0 es un factor irreducible de la restricción de $\chi_\Lambda^0 \in \mathrm{Irr}(S_{d,n}^B)$ entonces la expresión de k_μ es la misma que la del lema 34.

Lema 36. *En tipo C tenemos que si $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \lambda_k)$ entonces*

$$k_\Lambda = 2n(\Lambda_1') - 2n(\Lambda_1) + 2n(\Lambda_2') - 2n(\Lambda_2) + \ldots + n(\lambda_k') - n(\lambda_k) + |\lambda_1| - |\mu_1|.$$

Demostración. En este caso tenemos

$$\xi_1 e_1 = b_1 \ \frac{1}{d}\sum_j t_1^j \ , \ \xi_i e_i = s_i \ \frac{1}{d}\sum_j t_i^j t_{i+1}^{-j},$$

con $b_1 \in W_n$ el elemento que tiene exactamente un -1 en la diagonal. Se ve fácilmente que los últimos son conjugados en $C_d^n \rtimes W_n$. Usando la definición de k_Λ y 1.1.3 tenemos

$$k_\Lambda = (n^2 - n) \ \chi_\Lambda^0(s_1 \ \frac{1}{d}\sum_j t_1^j t_2^{-j})/\chi_\Lambda^0(1) + n \ \chi_\Lambda^0(b_1 \ \frac{1}{d}\sum_j t_1^j)/\chi_\Lambda^0(1). \tag{4.27}$$

Como $Y_{d,n}^B$ y $\widetilde{Y_{d,n}^B}$ son split sobre $\mathbb{C}(u)$ entonces el primero de los sumandos es igual a

$$(n^2 - n)\frac{\chi_\Lambda^0(s_1)}{\chi_\Lambda^0(1)},$$

el cual calculamos en el lema 34 y nos da

$$2n(\Lambda_1') - 2n(\Lambda_1) + 2n(\Lambda_2') - 2n(\Lambda_2) + \dots n(\lambda_k') - n(\lambda_k).$$

Calculemos el segundo sumando de 4.27 siguiendo un argumento parecido al de 4.21. Tenemos que

$$\chi_\Lambda^0(b_1 e_1) = \frac{1}{\left|C_d^n \rtimes \textbf{Stab } \psi\right|} \sum_{g \in C_d^n \rtimes W_n} \chi_\Lambda^{N(\psi)}({}^g b_1 e_1).$$

Si $g = \xi\pi \in T \rtimes W_n = C_d^n \rtimes W_n$, Usando el mismo argumento que antes tenemos

$$\begin{aligned} {}^g e_1 b_1 = \ {}^g(\frac{1}{d} \ \sum_j t_1^j \ b_1) &= \frac{1}{d} \ \sum_j \xi^{({}^\pi t_1^j b_1)}(\xi^{-1})({}^\pi t_1^j b_1) \\ &= \frac{1}{d} \ \sum_j \xi^{({}^\pi t_1^j b_1)}(\xi^{-1})(t_{\pi(1)}^j \ {}^\pi b_1), \end{aligned}$$

y al evaluar $\chi_\Lambda^{N(\psi)}$ en este elemento nos da 0 a menos que ${}^\pi b_1 \in \textbf{Stab } \ \psi$, si ese es el caso tenemos

$$\begin{aligned} \chi_\Lambda^{N(\psi)}({}^g e_1 b_1) &= \frac{1}{d} \ \sum_j \chi_\Lambda^{N(\psi)}(\xi^{({}^\pi t_1^j b_1)}(\xi^{-1})(t_{\pi(1)}^j \ {}^\pi b_1)) \\ &= \frac{1}{d} \ \sum_j \psi(\xi^{({}^\pi t_1^j b_1)}(\xi^{-1})t_{\pi(1)}^j) \ \chi_\Lambda^\psi({}^\pi b_1) \\ &= \frac{1}{d} \ \sum_j \psi(\xi)\psi^{{}^\pi t_1^j b_1}(\xi^{-1})\psi(t_{\pi(1)})^j \ \chi_\Lambda^\psi({}^\pi b_1) \\ &= \frac{1}{d} \ \sum_j \psi(\xi)\psi(\xi^{-1})\psi(t_{\pi(1)})^j \ \chi_\Lambda^\psi({}^\pi b_1) \\ &= \frac{1}{d}(\sum_j \psi(t_{\pi(1)})^j)\chi_\Lambda^\psi({}^\pi b_1). \end{aligned}$$

Luego obtenemos la ecuación

$$\chi_\Lambda^0(b_1 e_1) = \frac{1}{|\textbf{Stab } \psi|}\sum_{\pi \in W_n} \chi_\Lambda^{N(\psi)}({}^\pi b_1 e_1). \tag{4.28}$$

Notemos que al conjugar e_1b_1 por un $t \in \{\pm1\}^n \in W_n$ nos queda $(te_1t^{-1})(tb_1t^{-1}) = e_1b_1$, ya que $te_1t^{-1} = e_1$ porque $\{\pm1\}$ actúa por conjugación invirtiendo los exponentes, luego la conjugación por elementos de $\{\pm1\}^n \subset W_n$ es trivial.

Si $s \in \mathbb{S}_n$ entonces $se_1b_1s^{-1} = (se_1s^{-1})(sb_1s^{-1}) = e_kb_k$ para algún k, donde llamamos b_k al elemento en $\{\pm1\}^n$ que tiene un -1 en el lugar k y 1 en los restantes lugares, y $e_k = \dfrac{1}{d}\sum_j t_k^j$. Estos son los conjugados de e_1b_1.

Luego siguiendo el mismo argumento que en lema 34 tenemos

$$\chi_\Lambda^0(e_1b_1) = \frac{1}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\left(\chi_{\Lambda_1}(b_1)\psi_1(e)\chi_{\Lambda_2}(1)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)D_1 + \chi_{\Lambda_1}(1)\chi_{\Lambda_2}(b_2)\psi_2(e)\prod_{i>2}\chi_{\lambda_i}(1)D_2\right), \quad (4.29)$$

con $D_i, i = 1, 2$ es la cantidad de formas de conjugar b_1 y que el -1 quede en el bloque i ya que no puede quedar en los otros bloques porque ${}^\pi b_1$ tiene un -1. Con e nos referimos a algún idempotente del bloque. Notemos que como ψ_1 es trivial entonces $\psi_1(e) = 1$, mientras que $\psi_2 = \mathrm{sgn}$, por lo que

$$\psi_2(e) = \mathrm{sgn}(\frac{1}{d}\sum_j t_1^j) = \frac{1}{d}\sum_j t_g^{jd/2} = 0,$$

donde t_g una raíz primitiva d-esima. Luego la ecuación nos queda:

$$\chi_\Lambda^0(e_1b_1) = \frac{1}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\ \chi_{\Lambda_1}(b_1)\ \chi_{\Lambda_2}(1)\ \prod_{i>2}\ \chi_{\lambda_i}(1)\ D_1. \quad (4.30)$$

D_1 y $\chi_{\Lambda_1}(b_1)$ se calculan de la misma forma que en lema 35 y nos quedan:

$$D_1 = (n-1)!\ n_1\ 2^n, \qquad \frac{\chi_{\Lambda_1}(b_1)}{\chi_{\Lambda_1}(1)} = \frac{|\lambda_1| - |\mu_1|}{n_1}. \quad (4.31)$$

donde $n_1 = |\lambda_1| + |\mu_1|$. Además sabemos

$$\frac{2^n n!}{|\mathbf{Stab}\ \psi|}\chi_\Lambda^\psi(1) = \chi_\Lambda^0(1). \quad (4.32)$$

Luego si reemplazamos las ecuaciones 4.32 y 4.31 en la ecuación (4.30) obtenemos

$$\frac{n\chi_\Lambda^0(e_1b_1)}{\chi_\Lambda^0(1)} = |\lambda_1| - |\mu_1|,$$

y nos queda la igualdad del enunciado. □

Corolario 9. *Teníamos que T_0^2 actúa por multiplicación escalar en χ_Λ por el elemento*

$$z_\Lambda = u^{l(w_0)-k_\Lambda}(-1)^{g_\Lambda}.$$

Ya calculamos los valores de $k_\Lambda, g_\Lambda, l(w_0)$ en 4.3,4.2,1.1.3 respectivamente. Luego reemplazando estos valores en cada uno de los tipos hallamos z_Λ en cada caso.

Ejemplo 4. Demos un ejemplo para tipo B. Supongamos que $d = 4$, $n = 26$ y la representación χ_Λ está construida con $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ con

$$\Lambda_1 = ((2,1),(3,2)), \Lambda_2 = ((3,1),(4,2)), \lambda_3 = (2,1).\lambda_4 = (3,2),$$

Tenemos que $n(\Lambda_1) = 6, n(\Lambda_1') = 5, n(\Lambda_2) = 11, n(\Lambda_2') = 7, n(\lambda_3) = 2, n(\lambda_3') = 2, n(\lambda_4) = 4, n(\lambda_4') = 3$. Por lo que se tiene que usando la fórmula 34 que $k_\Lambda = 7$. Por lo tanto tenemos $f_\Lambda = n^2 - k_\Lambda = 26^2 - 7$. Por otro lado tenemos que los bloques correspondientes a Λ_1, Λ_2 tienen a los elementos de ψ que son cuadrados en C_4. Por lo tanto usando la fórmula 30 tenemos que $g_\Lambda = 2 \cdot 18 \cdot 8 = 288$. Demos algunos ejemplos más con $d = 4$

Λ	f_Λ	g_Λ
$((1,1),(2)),((2),(1)),(2,1),(1,1)$	143	70
$((3,1),(2)),((2,1),(1)),(2,1),(1,1)$	224	100
$((1,1),(2)),((2),(1,1)),(2,2),(2)$	195	96

4.4. Valor de los caracteres en T_0

El objetivo de esta sección es hallar los valores de los caracteres χ_Λ en el elemento T_0. Vimos en la sección anterior el escalar por el que actúa T_0^2, usando esto el cálculo del caracter χ_Λ en T_0 se va a reducir a calcular el valor del caracter χ_Λ^0 en $\widetilde{w_0}$, el elemento de longitud máxima en $S_{d,n}$.

Tomemos $\mathbb{K}$ una extensión de Galois finita de $\mathbb{C}(u)$ tal que $\mathbb{K}Y_{d,n}, \mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}}$ sean split. Llamemos ϕ_1, ϕ_q a las especializaciones en $1, 1/q$ definidas en la clausura integral de $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ que determinan las biyecciones $d_{\theta_1}, d_{\theta_{\frac{1}{q}}}$ del diagrama 3.4.
Análogamente llamemos θ_1, θ_0 a las especializaciones en 1 y 0 que determinan las biyecciones $d_{\theta_0}, d_{\theta_1}$ del mismo diagrama. Fijemos $v, w \in \mathbb{K}$ tales que $v^2 = u,\ w^2 = 1 - 2u$, $\mathbb{K}$ se puede elegir lo suficientemente grande de modo que existan v, w, notemos también que v, w pertenecen a la clausura integral de $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$. Luego usando el lema 8 podemos normalizar las especializaciones de forma tal que

$$\phi_q(v) = \sqrt{\frac{1}{q}}, \quad \phi_1(v) = 1, \quad \theta_1(w) = -i, \quad \theta_0(w) = 1.$$

De ahora en adelante las especializaciones son elegidas de esta forma.

Lema 37. *Sea $\chi_\Lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}Y_{d,n})$, y llamemos también χ_Λ^q al caracter que se obtiene al especializar en $u = 1/q$. Se tiene*

$$\chi_\Lambda(T_0) = \chi_\Lambda^1(\sigma_0) v^{f_\Lambda} = \chi_\Lambda^q(T_{w_0}) v^{f_\Lambda} \sqrt{q}^{f_\Lambda},$$

donde v es el de arriba. En particular $\chi_\Lambda(T_0) = 0$ si y solo si $\chi_\Lambda^1(\sigma_0) = 0$ si y solo si $\chi_\Lambda^q(T_{w_0}) = 0$.

Demostración. Sean $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_d$ los autovalores de T_0 con la multiplicidad en el característico, luego tenemos que $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots \sigma_d^2$ son los autovalores de T_0^2 con la multiplicidad en el característico, por el teorema 61 se tiene

$$\sigma_j^2 = u^{f_\Lambda}(-1)^{g_\Lambda} = (v^{f_\Lambda} i^{g_\Lambda})^2 = a^2 \quad \text{para todo } j,\ a = v^{f_\Lambda} i^{g_\Lambda}.$$

Por lo que para cada i existe $\eta_i = \pm 1$ tal que $\sigma_i = \eta_i a$. Por lo que tenemos $\chi_\Lambda(T_0) = (\sum_i \eta_i) a$. Tomando la especialización ϕ_1 obtenemos

$$\chi_\Lambda^1(\sigma_0) = \phi_1(\chi_\Lambda(T_0)) = (\sum_i \eta_i)\phi_1(a) = (\sum_i \eta_i) i^{g_\Lambda}.$$

Luego obtenemos la primera igualdad. Si tomamos la especialización ϕ_q obtenemos

$$\chi_\Lambda^q(T_{W_0}) = \phi_q(\chi(T_0)) = (\sum_i \eta_i)\phi_q(a) = (\sum_i \eta_i) i^{g_\Lambda} \sqrt{q}^{-f_\Lambda},$$

por lo que obtenemos la segunda igualdad. □

Lema 38. *Sea $\chi'_\Lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbb{K}\widetilde{Y_{d,n}})$, luego se tiene*

$$\chi'_\Lambda(T'_0) = \chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})\ w^{g_\Lambda} = \chi_\Lambda^1(\sigma_0) w^{g_\Lambda} i^{g_\Lambda}$$

con el w de arriba. En particular son equivalentes $\chi'_\Lambda(T'_0) = 0$, $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) = 0$, $\chi_\Lambda^1(\sigma_0) = 0$, $\chi_\Lambda(T_0) = 0$.

Demostración. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_k$ los autovalores de T'_0, luego tenemos que $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots \gamma_k^2$ son los autovalores de $T_0'^2$ y por el teorema 60 se tiene

$$\gamma_i^2 = (1-2u)^{g_\Lambda} = (w^{g_\Lambda})^2 = b^2 \quad \text{para todo } i,\ b = w^{g_\Lambda}.$$

Por lo que para cada i existe $\kappa_i = \pm 1$ tal que $\gamma_i = \kappa_i b$. Luego $\chi'_\Lambda(T'_0) = (\sum_i \kappa_i) b$. Tomando la especialización θ_0 obtenemos

$$\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) = \theta_0(\chi'_\Lambda(T'_0)) = (\sum_i \kappa_i)\theta_0(b) = \sum_i \kappa_i,$$

por lo que obtenemos la primera igualdad. Si tomamos la especialización θ_1 obtenemos

$$\chi_\Lambda^1(\sigma_0) = \theta_1(\chi'_\Lambda(T'_0)) = (\sum_i \kappa_i)\phi_1(b) = (\sum_i \kappa_i)(-i)^{g_\Lambda},$$

de donde obtenemos la segunda igualdad. □

Notemos que si logramos calcular $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})$ obtendremos los restantes valores. Calculemos $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})$ en cada uno de los tipos.

Tipo A

En este caso el elemento maximal es producto de $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ transposiciones disjuntas. Sea $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$, queremos calcular χ_Λ^0 en un elemento que es producto de $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ transposiciones disjuntas. Separemos en casos:

a. **n par**: Como $\widetilde{w_0} \in \mathbb{S}_n$ podemos usar el mismo argumento que en el lema 34 para afirmar que

$$\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{Stab}\ \psi}^{\mathbb{S}_n} \chi_\Lambda^\psi(w_0). \tag{4.33}$$

Para que este valor sea no nulo tendría que pasar que algún conjugado de w_0 este en **Stab** ψ, pero cualquier conjugado de w_0 es producto de $n/2$ transposiciones disjuntas. Luego los tamaños de todos los bloques tienen que ser pares, o sea que si no todos los n_i son pares entonces $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) = 0$. Supongamos ahora que los tamaños de todos los bloques son pares. Cada vez que un conjugado de w_0 pertenece a **Stab** ψ nos queda en el bloque j un producto de $n_j/2$ transposiciones, por lo que χ_Λ^ψ vale lo mismo en todos los conjugados de w_0. Luego 4.33 nos queda:

$$\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) = \frac{C}{n_1! n_2! \dots n_k!}\ \chi_{\lambda_1}(\sigma_1)\chi_{\lambda_2}(\sigma_2)\dots\chi_{\lambda_k}(\sigma_k), \tag{4.34}$$

donde C es la cantidad de formas de conjugar w_0 y que pertenezca a **Stab** ψ, y los σ_i son productos de $n_i/2$ transposiciones.

Calculemos C. Ordenemos las transposiciones que aparecen en w_0 de la forma $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{\frac{n}{2}}$. C será la cantidad de formas de permutar los elementos $\{1, 2, \ldots n\}$ de modo que dos números de la misma transposición vayan al mismo bloque. Podemos elegir primero que transposiciones ubicar en cada bloque, en el bloque j tiene que haber $n_j/2$ transposiciones, y son $n/2$ transposiciones, luego la cantidad de formas de hacer esto es

$$\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n_1}{2}!\frac{n_2}{2}! \cdots \frac{n_k}{2}!}.$$

Una vez que decidimos que transposiciones ubicar en cada bloque tenemos que elegir el orden en que los permutamos en cada bloque, luego tenemos

$$C = \frac{\frac{n}{2}!\ n_1!n_2!\ldots n_k!}{\frac{n_1}{2}!\frac{n_2}{2}!\ldots \frac{n_k}{2}!}. \tag{4.35}$$

Reemplazando esto en 4.34 obtenemos:

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{|\lambda_1|}{2}!\frac{|\lambda_2|}{2}! \cdots \frac{|\lambda_k|}{2}!}\chi_{\lambda_1}(\sigma_1)\chi_{\lambda_2}(\sigma_2) \cdots \chi_{\lambda_k}(\sigma_k). \tag{4.36}$$

b. **n impar**:

En este caso $\widetilde{w_0}$ es producto de $(n-1)/2$ transposiciones, al igual que antes tenemos la fórmula 4.33. Para que el caracter en $\widetilde{w_0}$ sea no nulo algún conjugado de w_0 tiene que estar en **Stab** ψ, como todos los conjugados de w_0 son producto de $(n-1)/2$ transposiciones, entonces $\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = 0$ salvo que los tamaños de todos los bloques sean pares, salvo por uno. Ahora supongamos que estamos en ese caso.

Supongamos que λ_k es el bloque de tamaño impar, luego tenemos

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \frac{C'}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\chi_{\lambda_1}(\sigma_1)\chi_{\lambda_2}(\sigma_2)\ldots\chi_{\lambda_k}(\sigma_k), \tag{4.37}$$

donde C' es la cantidad de formas de conjugar w_0 para que caiga en **Stab** ψ, y los σ_i son producto de $\left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$ transposiciones.

El elemento C' se calcula de la misma forma que en el otro caso y nos queda

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n_1}{2}!\frac{n_2}{2}!\ldots \frac{n_k-1}{2}!}\chi_{\lambda_1}(\sigma_1)\chi_{\lambda_2}(\sigma_2)\ldots\chi_{\lambda_k}(\sigma_k). \tag{4.38}$$

Observación 32. Supongamos que n es impar y μ^0 un caracter irreducible de $S^{A'}_{d,n}$ tal que es un factor de la restricción $\chi^0_\Lambda \in \mathrm{Irr}(S^A_{d,n})$. Hallemos el valor de $\mu^0(\widetilde{w_0})$. Empecemos notando que si $t = (t_1, t_2, \ldots t_n) \in C^n_d$ entonces

$$t\widetilde{w_0}t^{-1} = \widetilde{w_0}t_{w_0}t^{-1} = \ \widetilde{w_0}\ (t_1^{-1}t_n, t_2^{-1}t_{n-1}, \ldots, 1, \ldots, t_2t_{n-1}^{-1}, t_1t_n^{-1}).$$

Notemos que si cambiamos solamente la coordenada central de t el elemento $t\widetilde{w_0}t^{-1}$ no cambia, usando eso podemos ver que todos los elementos $t\widetilde{w_0}t^{-1}, t \in C^n_d$ son conjugados en $S^{A'}_{d,n}$. Por lo tanto todos los conjugados de $\widetilde{w_0}$ en $S^{A}_{d,n}$ son conjugados en $S^{A'}_{d,n}$.

Supongamos que μ^0 es un factor de la restricción de χ^0_Λ, entonces se tiene

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \sum_{i=1}^{d/o(\Lambda)} (\mu^0)^{g_i}(\widetilde{w_0}) = \frac{d}{o(\Lambda)}\mu^0(\widetilde{w_0}),$$

donde sumamos sobre los conjugados de μ^0, por lo que obtenemos

$$u^0(\widetilde{w_0}) = \frac{o(\Lambda)}{d}\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}).$$

Luego si n es impar los valores de los caracteres de $S^{A'}_{d,n}$ en el elemento maximal se calculan con los de $S^{A}_{d,n}$, los cual ya hicimos.

Tipos B y C

En este caso $\widetilde{w_0} = -\mathrm{Id} \in W_n$, y además los conjugados de $-\mathrm{Id}$ en W_n son $-\mathrm{Id}$. Luego la fórmula 4.33 nos da 0 salvo que $-\mathrm{Id}$ pertenezca a **Stab** $\psi = W_{n_1} \times W_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{S}_{n_k}$, para que esto ocurra tiene que pasar que no haya bloques dependientes de una sola partición, por lo que Λ tiene que ser de la forma

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) = ((\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)).$$

En consecuencia si Λ no es de esta forma se tiene $\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = 0$, supongamos ahora $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

Si $n_1 = |\lambda_1| + |\mu_1|$, $n_2 = |\lambda_2| + |\mu_2|$ se tiene

$$\chi^0_\Lambda(-\mathrm{Id}) = \mathrm{Ind}^{W_n}_{W_{n_1}\times W_{n_2}} \chi_{\lambda_1,\mu_1} \bigotimes \chi_{\lambda_2,\mu_2}(-\mathrm{Id}),$$

usando la fórmula para $\chi_{\lambda,\mu}$ de 3.2 y que la inducción conmuta con la inducción obtenemos

$$\chi^0_\Lambda(-\mathrm{Id}) = \mathrm{Ind}^{W_n}_{\prod W_{k_i}} \ \mathbb{S}^{\lambda_1} \otimes (\mathbb{S}^{\mu_1} \otimes \mathrm{sgn}) \otimes \mathbb{S}^{\lambda_2} \otimes (\mathbb{S}^{\mu_2} \otimes \mathrm{sgn})(-\mathrm{Id}),$$

donde el producto es sobre $W_{|\lambda_i|}, W_{|\mu_i|}$ para $i = 1, 2$. Como todos los conjugados de $-\mathrm{Id}$ son $-\mathrm{Id}$ entonces esto nos queda:

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \frac{n!}{|\lambda_1|!\,|\mu_1|!\,|\lambda_2|!\,|\mu_2|!}\ \mathbb{S}^{\lambda_1}(-\mathrm{Id})\,(\mathbb{S}^{\mu_1}\otimes\mathrm{sgn})(-\mathrm{Id})\ \mathbb{S}^{\lambda_2}(-\mathrm{Id})\,(\mathbb{S}^{\mu_2}\otimes\mathrm{sgn})(-\mathrm{Id}) =$$
$$\frac{n!}{|\lambda_1|!\,|\mu_1|!\,|\lambda_2|!\,|\mu_2|!}\ \mathbb{S}^{\lambda_1}(1)\mathbb{S}^{\mu_1}(1)(-1)^{|\mu_1|}\mathbb{S}^{\lambda_2}(1)\mathbb{S}^{\mu_2}(1)(-1)^{|\mu_2|}. \tag{4.39}$$

Tipo D

En este caso tenemos que $\widetilde{w_0}$ es $-\mathrm{Id}$ si n es par, y $\widetilde{w_0} = \mathrm{Diag}(1,-1,-1,\dots-1)$ si n es impar.

Sea $\mu^0 \in \mathrm{Irr}\, S^{D}_{d,n}$ un factor irreducible de la restricción de $\chi^0_\Lambda \in \mathrm{Irr}\, S^{B}_{d,n}$ con $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \lambda_k)$ y $\Lambda_i = (\lambda_i, \mu_i)$ para $i = 1, 2$. Si μ^0 es la restricción de χ^0_Λ se tiene que $\mu^0(\widetilde{w_0}) = \chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0})$. Supongamos ahora que χ^0_Λ tiene otro factor irreducible en su restricción, el cual llamamos η. Gracias a 3.1.2 sabemos que $\eta = (\mu^0)^t$, con $t = \mathrm{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

Luego se tiene

$$\chi^0_\Lambda(\widetilde{w_0}) = \eta(\widetilde{w_0}) + \mu^0(\widetilde{w_0}) = \mu^0(\widetilde{w_0}) + (\mu^0)^t(\widetilde{w_0}) = \mu^0(\widetilde{w_0}) + \mu^0(\widetilde{w_0}),$$

ya que $\widetilde{w_0} \in \{\pm 1\}^n$ y sabemos que $t\widetilde{w_0}t^{-1} = \widetilde{w_0}$, por lo que se deduce

$$\mu^0(\widetilde{w_0}) = \frac{\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})}{2}.$$

Luego tenemos

$$\mu^0(\widetilde{w_0}) = \chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0}) \qquad \text{o} \qquad \mu^0(\widetilde{w_0}) = \frac{\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})}{2},$$

dependiendo de $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2)$ o no, por lo que es eqivalente a calcular $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})$.

En el caso de que n sea par esto ya lo tenemos calculado. Ahora hay que calcular $\chi_\Lambda^0(b)$ en el caso en que n es impar, donde llamamos $b = \mathrm{Diag}(1, -1, \ldots, -1)$.

Como $b \in W_n$ tenemos al igual que antes

$$\chi_\Lambda^0(b) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{Stab}\ \psi}^{W_n} \chi_\Lambda^\psi(b). \tag{4.40}$$

Los conjugados de b son los elementos diagonales con exactamente un 1 en ella. Luego tenemos que $\chi_\Lambda^0(b) = 0$ salvo que no haya bloques que dependan de una sola partición, o que haya un único correspondiente a una partición y que este tenga tamaño 1. Supongamos que nos encontramos en el primero de estos casos. Se tiene

$$\begin{aligned}
&\chi_\Lambda^0(b) = \mathrm{Ind}_{\prod W_{k_i}}^{W_n}\ \mathbb{S}^{\lambda_1} \otimes (\mathbb{S}^{\mu_1} \otimes \mathrm{sgn}) \otimes \mathbb{S}^{\lambda_2} \otimes (\mathbb{S}^{\mu_2} \otimes \mathrm{sgn})(b) = \\
&\frac{\mathbb{S}^{\lambda_1}(1)\mathbb{S}^{\lambda_2}(1)\mathbb{S}^{\mu_1}(1)\mathbb{S}^{\mu_2}(1)}{|\lambda_1|!\,|\mu_1|!\,|\lambda_2|!\,|\mu_2|!}\ (C_1(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|} + C_2(-1)^{|\mu_1|-1}(-1)^{|\mu_2|} + \\
&C_3(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|} + C_4(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|-1}),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

donde C_i es la cantidad de formas de conjugar a b por un elemento de $\mathbb{S}_n$ y que el 1 quede en los bloques W_{n_i} y los multiplicamos por el valor de χ_Λ^ψ en estos elementos. El producto es sobre $W_{|\lambda_i|}, W_{|\mu_i|}$ para $i = 1, 2$. Notemos que $\{\pm 1\}^n$ actúa trivialmente por conjugación en b por lo que no aparece en la expresión.

Los valores de $C_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ son

$$(n-1)!\,|\lambda_1|\,, (n-1)!\,|\mu_1|\,, (n-1)!\,|\lambda_2|\,, (n-1)!\,|\mu_2|$$

respectivamente, por lo que $\chi_\Lambda^0(b)$ nos queda:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!\ \mathbb{S}^{\lambda_1}(1)\mathbb{S}^{\lambda_2}(1)\mathbb{S}^{\mu_1}(1)\mathbb{S}^{\mu_2}(1)}{|\lambda_1|!\,|\mu_1|!\,|\lambda_2|!\,|\mu_2|!}(|\lambda_1|\,(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|} + |\mu_1|\,(-1)^{|\mu_1|-1}(-1)^{|\mu_2|} + \\
&|\lambda_2|\,(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|} + |\mu_2|\,(-1)^{|\mu_1|}(-1)^{|\mu_2|-1}).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Ahora pasemos al caso donde hay una partición de tamaño 1. En este caso al conjugar b el 1 tiene que quedar en la posición correspondiente a esta partición, luego esta situación es equivalente a tener $-\mathrm{Id}$ y $n-1$ par, lo cual ya hicimos.

Corolario 10. *Gracias al cálculo que hicimos de $\chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})$ en cada tipo obtenemos todas las expresiones que aparecen en los lemas 37,38. En particular obtenemos*

$$\chi_\Lambda^q(\sigma_0) = \chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})(-i)^{g_\Lambda}\sqrt{\frac{1}{q}}^{f_\Lambda}.$$

Como ya calculamos $g_\Lambda, f_\Lambda, \chi_\Lambda^0(\widetilde{w_0})$ en cada tipo entonces se calcula fácilmente este valor.

4.5. Aplicación para la descomposición LU

Supongamos que G es el grupo de Chevalley construido en alguno de los tipos, si R es el sistema de raíces construíamos el unipotente maximal como $U = E(R^+)$, el cual a partir de ahora llamamos U^+. Como las raíces negativas R^- forman un subconjunto cerrado entonces definen un subgrupo $E(R^-)$, el cual llamamos U^-, notemos además que si T es el toro entonces hay un mapa inyectivo $U^+ \times T \times U^- \to G$. El elemento w_0 cumple que $w_0(R^+) = R^-$, luego usando la relación 1 se tiene que $w_0\ U^+ w_0 = U^-$. Decimos que una matriz en G tiene descomposición LU si se puede escribir como el producto entre una matriz de U^- y una de U^+T. Como $U^- \cap TU^+ = \{1\}$ se tiene que en caso de existir la descomposición es única.
El objetivo de esta sección es calcular cuantas matrices conjugadas a una matriz dada $A \in G$ (conjugadas en el grupo G) tienen descomposición LU. Los argumentos aquí desarrollados se pueden encontrar en [4].

Supongamos ahora que tenemos subgrupos $H \leq G$ y $V \subset G$ es un sistema completo de representantes de coclases dobles de H en G. Si $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x \in G$ y

$$\mathrm{v} = (v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k) \in V^{2k}.$$

Para $h \in H$ definimos

$$\mathcal{N}_h(x, \mathrm{v}) = \left\{(a, a_1, \ldots, a_k) \in G \times v_1 H w_1 H \times \cdots \times v_k H w_k H : axa^{-1} = ha_1 \cdots a_k\right\},$$

y abreviamos $\mathcal{N}(x, \mathrm{v}) = \mathcal{N}_1(x, \mathrm{v})$. También definimos

$$N(x, \mathrm{v}) = |\mathcal{N}(x, \mathrm{v})|.$$

Proposición 64. *Se tiene que*

$$N(x, \mathrm{v}) = \frac{|H|^{2k}}{|Hv_1H| \ldots |Hv_kH|} \operatorname{tr}\left(x\ \phi_{v_1} * \phi_{w_1} * \cdots * \phi_{v_k} * \phi_{w_k}\right).$$

Demostración. Para $h \in H$ se tiene una biyección

$$\mathcal{N}(x, \mathrm{v}) \leftrightarrow \mathcal{N}_h(x, \mathrm{v}) \qquad (a, a_1, \ldots a_k) \leftrightarrow \left(ha, a_1, \ldots a_{k-1}, a_k h^{-1}\right),$$

por lo que $N(x, \mathrm{v}) = |\mathcal{N}_h(x, \mathrm{v})|$ y obtenemos

$$N(x, \mathrm{v}) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |\mathcal{N}_h(x, \mathrm{v})|.$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in G} \left(\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \cdots *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H}\right)(axa^{-1}) \\
&= \sum_{a \in G} \sum_{h \in H} \mathbb{1}_H(h) \left(\mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \cdots *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H}\right)(h^{-1}axa^{-1}) \\
&= \sum_{h \in H} \sum_{a \in G} \left(\mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \cdots *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H}\right)(h^{-1}axa^{-1}) = \sum_{h \in H} |\mathcal{N}_h(x, \mathrm{v})|.
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos

$$N(x, \mathrm{v}) = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in G} (\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \cdots *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H}(axa^{-1}). \tag{4.43}$$

Luego si definimos

$$\sigma_{\mathrm{v}} = \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \cdots *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H},$$

y el lema 23 aplicado a 4.43 nos dice que

$$N(x, \mathrm{v}) = \operatorname{tr}(x\sigma_{\mathrm{v}}). \tag{4.44}$$

Para calcular σ_{v} usamos el siguiente lema que puede consultarse en [4, Lema 4.2.5].

Lema 39. *Para $v, v_1, w_1 \in V$ se tiene*

(a) $\left|H \cap v^{-1} H v\right| = \dfrac{|H|^2}{|HvH|}$.

(b) $\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{vH} = \mathbb{1}_{vH} *_G \mathbb{1}_H = \dfrac{|H|^2}{|HvH|} \mathbb{1}_{HvH}$.

(c) $\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} = \mathbb{1}_{H v_1} *_G \mathbb{1}_{H w_1 H}$.

(d) $\mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \mathbb{1}_H = |H| \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H}$.

Gracias a este lema se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} = \mathbb{1}_{H v_1} *_G \mathbb{1}_{H w_1 H} &= \frac{|H w_1 H|}{|H|^2} \mathbb{1}_{H v_1} *_G \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{w_1 H} \\
&= \frac{|H w_1 H|}{|H|^3} \mathbb{1}_{H v_1} *_G \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{w_1 H} = \frac{|H|}{|H v_1 H|} \mathbb{1}_{H v_1 H} *_G \mathbb{1}_{H w_1 H} \\
&= \frac{|H|^2}{|H v_1 H|} \phi_{v_1} * \phi_{w_1},
\end{aligned} \tag{4.45}$$

donde estamos usando la relación entre los productos $*, *_G$ vista en 2.2 y que $\mathbb{1}_H = \dfrac{\mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_H}{|H|}$.
Gracias al punto (d) de 39 y la ecuación (4.45) se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{v}} &= \frac{1}{|H|^k} \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_1 H w_1 H} *_G \mathbb{1}_H *_G \cdots\cdots *_G \mathbb{1}_H *_G \mathbb{1}_{v_k H w_k H} \\
&= \frac{|H|^{2k}}{|H v_1 H| \cdots |H v_k H|} \phi_{v_1} * \phi_{w_1} \cdots * \phi_{v_k} * \phi_{w_k}.
\end{aligned}$$

Esto junto con 4.44 prueban la proposición. □

Volvamos a la situación donde G es el grupo de Chevalley en alguno de los tipos y U^+, U^- los unipotentes maximales definidos previamente. Para $g \in G, v \in T, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definamos

$$N_r^v(g) = \left| \left\{ (a, S_1, S_2, \ldots, S_{2r-1}, S_{2r}) \in G \times (U^- \times U^+)^r \mid aga^{-1} = v \prod_{i=1}^{r} \left(S_{2(r-i+1)} S_{2(r-i+1)+1} \right) \right\} \right|.$$

Para el siguiente teorema denotemos con $\mathcal{Q}_{q-1,n}$ al conjunto que parametriza las irreducibles del álgebra de Yokonuma $\mathcal{H}(G, U)$ y para $\Lambda \in \mathcal{Q}_{q-1,n}$ vamos a denotar $\chi_\Lambda^{\mathcal{H}}$ al caracter irreducible en $\mathcal{H}(G, U)$ y $\chi_\Lambda^G = D_U^{-1}(\chi_\Lambda^{\mathcal{H}}) \in \operatorname{Irr}(G : U)$.

Teorema 65. *Se tiene que*

$$N_r^v(g) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_{q-1,n}} \chi_\Lambda^G(g)\chi_\Lambda^{\mathcal{H}}(T_v)\left(\frac{1}{q}\right)^{rf_\Lambda}(-1)^{rg_\Lambda}.$$

Demostración. Sabemos que $U^-U^+ = w_0U^+w_0U^+$, por lo que se tiene que

$$\left(S_{2(r-i+1)}S_{2(r-i+1)+1}\right) \in w_0U^+w_0U^+.$$

Gracias a esto podemos afirmar que si tomamos $G = G, H = U^+, \mathrm{v} = (vw_0, w_0, w_0, \ldots, w_0)$ en la proposición 64 obtenemos

$$N_r^v(g) = N(g, \mathrm{v}).$$

Por otro lado tenemos

$$|U^+w_0U^+| = |w_0U^+w_0U^+| = |U^-U^+| = |U^+|^2.$$

Usando esta ecuación, el lema 23 y 64 tenemos

$$N_r^v(g) = \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_{q-1,n}} \chi_\Lambda^G(g)\chi_\Lambda^{\mathcal{H}}(T_v * T_{w_0}^{2r}).$$

El teorema 61 nos dice que $T_{w_0}^{2r}$ actúa por el escalar $\left(\frac{1}{q}\right)^{rf_\Lambda}(-1)^{rg_\Lambda}$, por lo que obtenemos lo deseado. □

Observación 33. Notemos que $\sum_{v \in T} N_1^v(g)$ cuenta la cantidad de triplas $(a, u_1, u_2) \in G \times U^- \times U^+$ que cumplen

$$aga^{-1} \in Tu_1u_2,$$

ya que la función $T \times U^- \times U^+ \to G$ es inyectiva. Estas son las matrices con descomposición LU y como la descomposición LU es única se tiene que $\sum_{v \in T} N_1^v(g)$ es la cantidad de formas de conjugar g y obtener una matriz con descomposición LU (contando con multiplicidad).

Llamemos $N(g)$ a la cantidad de conjugadas de g (en el grupo de Chevalley) con descomposición LU, se tiene que

$$N(g) = \frac{\sum_{v \in T} N_1^v(g)}{|C_G(g)|} = \sum_{v \in T} \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_{q-1,n}} \frac{\chi_\Lambda^G(g)\chi_\Lambda^{\mathcal{H}}(T_v)\left(\frac{1}{q}\right)^{f_\Lambda}(-1)^{g_\Lambda}}{|C_G(g)|}.$$

Bibliografía

[1] Robert Steinberg, John Faulkner y Robert Wilson. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University New Haven, 1967.

[2] F. Nathaniel Edgar Thiem. «Unipotent Hecke algebras: the structure, representation theory, and combinatorics». Tesis doct. University of Wisconsin–Madison, 2004.

[3] J.Juyumaya. *Markov trace on the Yokonuma-Hecke algebra*. Inf. téc. SIS-2003-348, 2002.

[4] Tamás Hausel, Martin Mereb y Michael Lennox Wong. «Arithmetic and representation theory of wild character varieties». *Journal of the European Mathematical Society* 21.10 (2019), págs. 2995-3052.

[5] Meinolf Geck y Götz Pfeiffer. *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*. 21. Oxford University Press, 2000.

[6] Daniel Bump. *Lie groups*. Vol. 8. Springer, 2004.

[7] Walter Feit. *The representation theory of finite groups*. Elsevier, 1982.

[8] Charles.W.Curtis e Irving Reiner. *Methods of representation theory*. Vol. 2. Wiley-Interscience, 1981.

[9] William Fulton y Joe Harris. *Representation theory: a first course*. Vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.

[10] Claude Chevalley. «Sur certains groupes simples». *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 7.1-2 (1955), págs. 14-66.

[11] James.E.Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Vol. 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] Joseph Bernstein y Andrei Vladlenovich Zelevinskii. «Representations of the group GL(n,F) where F is a non-Archimedean local field». *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 31.3 (1976), págs. 5-70.

[13] Nagayoshi Iwahori e Hideya Matsumoto. «On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups». *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 25 (1965), págs. 5-48.

[14] Rimhak Ree. «On some simple groups defined by C. Chevalley». *Transactions of the American mathematical society* 84.2 (1957), págs. 392-400.

[15] D.G.Higman y D.E.Taylor. «Classical groups». *Eindhoven University of Technology* (1978).

[16] Ya.N.Nuzhin. «Levi decomposition for carpet subgroups of Chevalley groups over a field». *Algebra and Logic* 55.5 (2016), págs. 367-375.

[17] H.Kraft y C.Procesi. «Classical Invariant Theory: A Primer (preliminary version, July 1996), available on-line at http://www. math. unibas. ch/ kraft/Papers». *KP-Primer. pdf* ().

[18] Clark.T.Benson y Charles.W.Curtis. «On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups». *Transactions of the American Mathematical Society* 165 (1972), págs. 251-273.

[19] Jean-Pierre Serre y Leonard L.Scott. *Linear representations of finite groups.* Vol. Graduate texts in mhatematics 42. Springer, 1977.

[20] Benjamin Steinberg. *Representation theory of finite groups: an introductory approach.* Springer, 2012.