



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de subastas y modelos de aprendizaje en subastas de primer precio.

Carla Johanna Crucianelli

Director: Dr. Juan Pablo Pinasco

Fecha de Presentación: Julio 2022

Índice general

Índice general	1
1 Introducción	5
1.1. Evolución histórica	5
1.2. Modelado basado en agentes (ABM)	6
1.3. Modelos continuos	6
1.4. Organización del trabajo	7
2 Preliminares	9
2.1. Curso rápido de teoría de la medida	9
2.2. Resultados de convergencia	11
2.3. Distancia de Wasserstein	12
2.4. Nociones de ecuaciones diferenciales	13
2.5. Algunas nociones de estadística	17
3 Teoría de Subastas	19
3.1. Nociones de teoría de juegos	19
3.2. Tipos de subastas	20
3.3. Teorema de Equivalencia de Ingresos	25
3.4. Aplicaciones del Teorema de Equivalencia de Ingresos	27
3.5. Otras subastas	31
3.6. Resumen	33
4 Subasta de primer precio para 2 jugadores	34
4.1. El modelo	34
4.2. Evolución discreta de los parámetros de oferta	37
4.3. Equilibrio estacionario de la dinámica discreta	39
4.4. Ecuación de transporte para los parámetros de oferta a partir de la ecuación discreta	39
4.5. Ecuación de transporte para los parámetros de oferta: Método de Ganancia y Perdida	41
4.6. Grazing limit	45
4.7. Soluciones estacionarias de la ecuación de transporte	49
5 Simulaciones	54
5.1. Riqueza	54
5.2. Algoritmo	54
5.3. Primeros resultados	56
5.4. Convergencia	57

5.5. Independencia de la condición inicial	62
5.6. Dependencia con q	64
5.7. Convergencia para $q = 0,99$	67
6 Generalización: subasta de primer precio con k jugadores	69
6.1. Modelo	69
6.2. Algoritmo	69
6.3. Equilibrio de Nash	70
7 Conclusiones y comentarios finales	75
7.1. Conclusiones	75
7.2. Posibles generalizaciones y trabajo futuro	76
Bibliografía	78

Agradecimientos

Hay mucha gente a la que tengo que agradecerle que hoy pueda presentar esta tesis. Este trabajo solo fue posible por todas las personas que pasaron por mi vida en algún momento, así que gracias a todos.

Sin lugar a dudas, las personas a las que más les debo son a mis padres, Estela y Roberto, que me acompañaron durante toda la carrera y me apoyaron en todos mis proyectos y locuras. Definitivamente, sin ellos no podría haber llegado tan lejos.

A toda mi familia que siempre me apoyó en todo este camino.

A Juan Pablo que me introdujo en esta área tan interesante y me hizo volver a enamorarme de la matemática. Por ayudarme a entender y a seguir adelante cada vez que lo necesité. Estoy convencida que sin él no estaría dedicándome a la matemática y por eso no puedo más que agradecerle.

A Pablo Balenzuela y Nicolás Saintier, por aceptar ser jurados de esta tesis.

A todos los profesores de la facultad. En particular, a Martín por los consejos y el apoyo, especialmente este último año.

A la OMA, que fue mi primer acercamiento a la matemática y me motivó a seguir esta hermosa carrera. En particular, a Flora y Patricia por todo lo que hacen para que la Olimpiada siga funcionando.

A mis amigos y compañeros de carrera (tanto de física como de matemática): Nico, Juli, Dru, Lucas, Luquitas, Mati, Tomi, Pau, Kenneth, Pato, Agus, Mati, Agus, Buso, Ian, Marchi, Deamo, Guido, Maki, Sol, Cami, Rama. Por todas las tardes de estudio, los viajes y las charlas de comedor, definitivamente estos años no hubieran sido lo mismo sin ustedes.

A mis amigos de la vida, Java, Vi, Ani, Ka, Octa, Milo, Mari, Mini, Axel, Ro y Mel, por tantas salidas y viajes.

A todos los que vinieron a escuchar la defensa.

A la UBA que me dio la oportunidad de formarme en una institución pública de primer nivel, primero en el Pelle y después en la FCEyN.

A cualquier persona que se este tomando el tiempo de leer este trabajo.

Introducción

En tema central de esta tesis son las subastas. Si bien más adelante hablaremos más formalmente de qué son y cómo las podemos estudiar, no es arriesgado afirmar que todos tenemos una idea de qué es una subasta. Lo más probable es que si le pidiéramos a alguna persona que nos cuente que son (o al menos es la respuesta que hubiese dado yo misma antes de escribir este trabajo), seguramente diría que si tenemos algún objeto, por ejemplo una obra de arte, que se quiere vender entonces un posible mecanismo de venta es una subasta: un subastador pone un valor base y posibles compradores ofertan valores cada vez más altos hasta que nadie está dispuesto a pagar más, y el ganador compra por ese precio. Esta descripción es solamente un caso muy particular de una subasta, aunque por ahora nos va a alcanzar para tener un poco de intuición.

Existen muchos mercados que hoy en día funcionan con mecanismos de subastas, por mencionar algunos ejemplos: los mercados de arte, energía, flores, publicidad, entre otros [9]. En general, las subastas resultan un buen mecanismo de compra-venta cuando el precio de un bien no es conocido [9]. Todo esto generó que las casas de subastas refinaran sus mecanismos a lo largo del tiempo y que los postores refinaran sus estrategias, ambos bandos con el objetivo de maximizar sus ganancias. Estos intentos de refinar los mecanismos y estrategias fueron los que motivaron el estudio teórico de los distintos tipos de subastas. En este capítulo mencionaremos algunos trabajos fundacionales en el área y describiremos la estructura de este trabajo. De ninguna manera esta sección pretende ser exhaustiva, pero para ahondar en el estado del arte del tema se puede consultar, por ejemplo, la guía de lectura de Paul Klemperer [8], en la cual nos basamos para realizar esta introducción.

1.1. Evolución histórica

Desde tiempos antiguos los mercados son una parte importante de las sociedades y las subastas son un tipo de mercado, es más, una de las primeras subastas de las que se tienen registro fue en Babilonia cerca del 500A.C. [8]. Solo por mencionar un ejemplo histórico, en 193A.D. la guardia Pretoriana mató al emperador Pertinax y luego, subastó públicamente el imperio romano [23] (la historia completa se puede ver en el libro de Gibbon [7]). De más está decir que hoy en día las subastas son muy distintas a lo que fueron en la antigüedad. Sin embargo, todavía hoy siguen

siendo una forma de compra-venta sumamente común para muchos tipos de bienes.

Una de las personas que indirectamente contribuyó a la teoría moderna de subastas es John Nash Jr., quién definió uno de los conceptos más importantes de la teoría de juegos: el equilibrio de Nash (trabajo por el cual ganó el premio Nobel de economía en 1994). No es difícil imaginar que una forma razonable de pensar una subasta sea un juego de información incompleta entre muchos postores. En efecto, el equilibrio de Nash es un concepto importante para entender las subastas y la gran mayoría de los resultados que discutiremos utilizan este concepto.

En 1969, William Vickrey fue el primero en tratar a las subastas con elementos de la teoría de juegos [24], trabajo que contribuyó para que ganara el Premio Nobel de economía en 1996. En este trabajo, Vickrey introdujo un modelo de subasta conocida como subasta de segundo precio donde el ganador (el jugador con mayor oferta) paga lo que ofertó el segundo. Aunque suene poco intuitivo, este tipo de subasta tiene mucha importancia teórica, como veremos más adelante.

En los años 80, Myerson [15] y Riley y Samuelson [20] propusieron el Teorema de Equivalencia de Ingresos. Este teorema nos dice que bajo ciertas condiciones, la ganancia esperada del vendedor es independiente del mecanismo de subasta.

1.2. Modelado basado en agentes (ABM)

Al querer armar un modelo para un determinado proceso (ya sean subastas o cualquier otro que nos imaginemos) debemos definir qué parámetros vamos a controlar, es decir, cuales serán las reglas que seguirá nuestra dinámica. Uno podría argumentar que la elección de dichas reglas es arbitraria y en efecto lo es. Sin embargo, nuestro objetivo es poder reproducir y estudiar fenómenos en escala macroscópica, por lo que la bondad de nuestro modelo se basará en que tan bien reproduce los procesos que queremos estudiar macroscópicamente y no microscópicamente [3]. En general, vamos a pensar que tenemos muchos elementos o *agentes* que en cada instante o interacción pueden tomar decisiones de manera inteligente [3]. Este tipo de modelos se encuadran en lo que se conoce como *Agent-based-modeling*. Esta clase de modelos permiten estudiar diversos sistemas complejos como el tráfico o los mercados [3] y tienen la ventaja de ser modelos flexibles que permiten estudiar dinámicas que emergen de las interacciones complejas entre los agentes involucrados. Esta será la clase de métodos que emplearemos en este trabajo.

1.3. Modelos continuos

Cómo describir mediante ecuaciones a distintos sistemas es un problema que los físicos estudian desde hace mucho tiempo. El tipo de modelo que se decida usar depende de la cantidad de agentes que tengamos en nuestro sistema. Por poner un ejemplo, un sistema de dos partículas que interactúan lo vamos a querer describir mediante ecuaciones diferenciales para cada partícula. Sin embargo, a medida que hay más agentes, serán necesarias más ecuaciones, por lo que existe un punto en el que es conveniente cambiar el foco y realizar modelos basados en campos; por ejemplo, en dinámica de fluidos se usan ecuaciones como Navier-Stokes para modelar la velocidad

del fluido. Este tipo de modelos son modelos continuos o macroscópicos. También podríamos encontrarnos en un régimen mesoscópico donde debemos usar distribuciones de probabilidad para realizar modelos. En general, la elección del modelo a usar no sigue criterios específicos, sino que es una elección arbitraria [17].

1.4. Organización del trabajo

En este trabajo nos concentraremos principalmente en un tipo de subastas conocidas como subastas de sobre cerrado de primer precio. Nuestro objetivo será entender cómo los postores deciden sus estrategias y diseñaremos mecanismos mediante los cuales los jugadores convergen a un equilibrio. En particular, nos interesará estudiar modelos donde los postores converjan al equilibrio de Nash. Para hacer esto usaremos un modelo basado en agentes para describir el aprendizaje de los jugadores. También, construimos ecuaciones diferenciales a partir del modelo para dos jugadores y estudiaremos sus soluciones.

En el capítulo 2 definiremos algunos conceptos sobre medidas que serán útiles, introduciremos la ecuación de transporte y describiremos un tipo de test de hipótesis que nos servirá para analizar las simulaciones.

En el capítulo 3 definiremos conceptos de teoría de juegos que nos permitirán entender el marco para estudiar subastas. Además, definiremos los tipos clásicos de subastas y hallaremos el equilibrio de Nash para subastas de primer y segundo precio. También, probaremos el teorema de equivalencia de ingresos y lo utilizaremos para hallar los posibles equilibrios de Nash en una subasta de primer precio. En la sección 3.5, se discutirán brevemente algunas variaciones a los tipos clásicos de subastas.

En el capítulo 4 describiremos el primer modelo que estudiaremos en este trabajo. Definiremos una dinámica para una subasta de primer precio para dos jugadores. En la sección 4.2, deduciremos una ecuación de evolución discreta para la dinámica. Luego, definiendo una medida apropiada pasaremos a una ecuación diferencial para el sistema (sección 4.4). En la sección 4.5 volveremos a obtener la ecuación de evolución usando funciones de pérdida y ganancia. Finalmente, en la sección 4.7, estudiaremos las soluciones estacionarias para esta ecuación. Veremos que las soluciones replican los resultados de las simulaciones, lo que nos dará un chequeo de que nuestro modelo es razonable.

En el capítulo 5 se describe un algoritmo para implementar la dinámica descrita en el capítulo 4. Con esta implementación en Python, estudiaremos la dependencia de la distribución estacionaria con diversos parámetros como por ejemplo, las estrategias iniciales de los postores. Con esto podremos inferir propiedades sobre el comportamiento de los jugadores.

En el capítulo 6, generalizaremos el modelo del capítulo 4 para subastas de primer precio pero con k jugadores. Nos concentraremos únicamente en la definición de las reglas y la implementación en Python. Y usar este algoritmo para poder corroborar si nuestro modelo replica los equilibrios que esperamos obtener para distintos valores de k .

Finalmente, en el capítulo 7, se resumen los resultados principales de este trabajo. Además, se detalla el trabajo futuro a realizar a partir de esta tesis, y se proponen posibles extensiones sobre este trabajo.

Preliminares

Antes de meternos de lleno en el estudio de la teoría de subastas, repasaremos algunos conceptos que serán necesarios para obtener ecuaciones que nos permitan describir la dinámica de nuestros modelos. Los preliminares que cubriremos en este capítulo abarcan algunas nociones de teoría de la medida (sección 2.1), la noción de convergencia débil en el contexto de medidas de probabilidad (sección 2.2), ecuaciones de transporte (sección 2.4) e introduciremos el Test de Kolmogorov-Smirnov (sección 2.5) que nos será de utilidad para estudiar los resultados numéricos de nuestros modelos. Las referencias principales de este capítulo son: el libro de Fava y Zó de medida y probabilidad [5], el apunte de Villani [25], sus libros de transporte óptimo de Villani [26, 27] y el libro de Hoolander y Wolfe [10] para la parte de estadística.

2.1. Curso rápido de teoría de la medida

Definición 2.1.1: [5]

Sea Y un conjunto. Definimos una σ -álgebra $\Sigma \subset \mathbb{P}(Y)$ que verifica:

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. si $(A_k)_k$ es una sucesión de elementos de Σ , entonces $\cup_k A_k \in \Sigma$;
3. si $A \in \Sigma$, entonces $A^c \in \Sigma$.

Decimos que $A \in \Sigma$ es medible. Además, a un conjunto Y con una σ -álgebra en $\mathcal{P}(Y)$ se lo llama un espacio de medida. Generalmente, lo notamos Y, Σ .

A modo de ejemplo, podemos mencionar la σ -álgebra de Borel, que se define como la menor σ -álgebra que contiene a los intervalos de la recta.

Una observación importante es que una σ -álgebra Σ cumple que como $\emptyset \in \Sigma$ entonces $\mathcal{Y} \in \Sigma$.

Definición 2.1.2: [25]

Sea (\mathcal{Y}, Σ) un espacio de medida. Una función $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida positiva si:

1. $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$;
2. $\mu(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$, donde $A_i, A_j \in \Sigma$ son disjuntos $\forall i, j$.

Además, una medida positiva tal que $\mu(\mathcal{Y}) = 1$, se dice de probabilidad.

Intuitivamente, lo que nos dice la definición anterior es que si μ es una medida de probabilidad, a cada conjunto medible le asignamos un tamaño, que se corresponde con la noción clásica de probabilidad.

Lo próximo que nos gustaría poder hacer, dada una medida en un espacio de medida X , es construir una medida en Y a partir de una función medible $f : X \rightarrow Y$. La siguiente proposición nos dice de que manera podemos conseguirlo.

Proposición 2.1.3: Medida Push-forward [25]

Sean (X, Σ) e (Y, Σ') espacios de medida y μ una medida positiva en (X, Σ) . Sea $f : X \rightarrow Y$ una función medible. Entonces

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \quad \forall A \in \Sigma' \quad (2.1)$$

define una medida en (Y, Σ') . A esta medida la notamos $\nu = T\#\mu$.

Demostración. Basta ver que la expresión 2.1 verifica la definición 2.1.2 y que está bien definida.

La buena definición es directa: como f medible y $A \in \Sigma'$, entonces $f^{-1}(A) \in \Sigma$, por lo que podemos evaluar esta expresión en μ .

Tenemos que $\nu(A) \geq 0$ pues lo hereda de μ . Y si $(A_k)_k \subset \Sigma$ disjuntos dos a dos:

$$\begin{aligned} \nu(\cup_k A_k) &= \mu(f^{-1}(\cup_k A_k)) \\ &= \mu(\cup_k f^{-1}(A_k)) \\ &= \sum_k \mu(f^{-1}(A_k)) \\ &= \sum_k \nu(A_k) \end{aligned}$$

donde el anteúltimo paso vale porque $(f^{-1}(A_k))_k$ son disjuntos dos a dos. □

Notemos que podemos escribir la integral de una función continua φ como [25]:

$$\int_Y \varphi d(f\#\mu) = \int_X \varphi \circ f d\mu. \quad (2.2)$$

De esta manera obtenemos un cambio de variables entre el espacio X y el espacio Y .

Una forma sencilla de definir una medida en \mathbb{R} es a partir de una función de densidad que sea integrable en el sentido de Lebesgue [25]:

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx. \quad (2.3)$$

Una medida útil en este trabajo será la medida de Dirac. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y definimos para A medible en \mathbb{R} [25]:

$$\delta_{x_0}(A) = \mathbb{1}_{\{x_0 \in A\}}. \quad (2.4)$$

No es difícil notar que si $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ se tiene [25]:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)d\delta_{x_0} = \psi(x_0). \quad (2.5)$$

Intuitivamente se puede pensar a la δ como una aplicación que es nula en todos lados, salvo en x_0 . Más aún, si se quiere definir a la δ en el sentido de distribuciones se la puede pensar como un límite de gaussianas con varianza cada vez más chica.

2.2. Resultados de convergencia

Para probar resultados de convergencia en el capítulo 4 vamos a necesitar una topología en el espacio de medidas. En general, vamos a tener convergencia débil en el espacio de medidas de probabilidad, por lo que definiremos este concepto.

Definición 2.2.1: [27]

Sea $\{\mu_k\} \subset P(X)$, donde X es un espacio polaco (un espacio métrico completo y separable), decimos que μ_k converge débilmente a $\mu \in P(X)$ si para toda $\varphi \in C_b(X)$ vale que:

$$\int \varphi d\mu_k \rightarrow \int \varphi d\mu. \quad (2.6)$$

Más aún, la noción anterior de convergencia nos define la topología débil en $P(X)$.

Un resultado que será útil es el teorema de Prokhorov, que nos da condiciones donde las medidas convergen débil (vía subsucesiones).

Definición 2.2.2: [27]

Sea \mathcal{P} una familia de medidas de probabilidad en un espacio topológico X . Decimos que la familia es tight si para todo $\epsilon > 0$, existe un compacto $K_\epsilon \subset X$ tal que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \mu(K_\epsilon^c) \leq \epsilon.$$

Una observación que nos será útil es notar que si X es compacto, entonces toda familia es tight, ya que podemos tomar como compacto a todo el espacio. Usando esta noción podemos enunciar el teorema:

Teorema 2.2.3: Teorema de Prokhorov [27]

Sea X un espacio polaco. Dada una familia \mathcal{P} tight en $\mathcal{P}(X)$, toda sucesión $\{\mu_k\} \subset \mathcal{P}$ tiene una subsucesión que converge débil a $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Es decir, para toda $\varphi \in C_b(X)$ vale que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu_{k_j} = \int_X \varphi d\mu.$$

Omitiremos la demostración, que puede verse en el libro de Billingsley [2]

2.3. Distancia de Wasserstein

Lo próximo que haremos será definir una métrica en el espacio de medidas de probabilidad. La primera distancia que podemos usar es la de *variación acotada*:

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sup_{A \text{ medible}} |\mu(A) - \nu(A)| \tag{2.7}$$

Esta noción es análoga a la distancia infinito entre espacios de funciones, donde el supremo se toma sobre los puntos en lugar de los medibles. Sin embargo, esta noción no es lo suficientemente buena. El problema con esta métrica es que si tomamos la distancia entre dos deltas de Dirac tenemos que:

$$d_{TV}(\delta_a, \delta_b) = 1$$

Por lo que no nos da una medida de que tan separadas están las deltas. Es por esto que vamos a usar otra noción de distancia.

Definición 2.3.1: [1] Distancia de Wasserstein

Si $X = \mathbb{R}^+$ y consideramos la σ -álgebra de Borel, definimos la distancia de Wasserstein de orden 1 como:

$$W[f_1, f_2] = \int |F_1(v) - F_2(v)| dv, \tag{2.8}$$

donde

$$F_i(v) = \int_v^\infty f_i(x) dx \tag{2.9}$$

Notemos en este caso que si consideramos $X = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ y queremos calcular la distancia entre las deltas en a y b tenemos:

$$F_a(v) = \int_v^\infty \delta_a(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } v > a \\ 1 & \text{si } v \leq a \end{cases} \quad \text{y} \quad F_b(v) = \int_v^\infty \delta_b(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } v > b \\ 1 & \text{si } v \leq b \end{cases}$$

Y por lo tanto [26],

$$W[\delta_a, \delta_b] = |a - b|$$

lo cual nos dice que esta medida separa las deltas mejor que la distancia de variación acotada.

Por cómo definimos esta distancia parece más restrictiva que la de variación total. Sin embargo, podemos definirla más en general:

Definición 2.3.2: [26]

Sea X un espacio polaco. Consideremos el subconjunto de medidas de probabilidad en X , $P_1(X)$ definido como:

$$P_1(X) = \left\{ \mu \in \mathbb{P}(X) : \int_X d(x, x_0) d\mu < +\infty \right\} \quad (2.10)$$

para algún $x_0 \in X$ arbitrario. En $P_1(X)$ definimos:

$$W(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f d\mu - \int_X f d\nu : f \text{ es } 1\text{-Lipschitz} \right\} \quad (2.11)$$

donde f es 1-Lipschitz si es Lipschitz con constante $L \leq 1$. A esta distancia también se la conoce como distancia de Kantorovich-Rubinstein.

Notemos que en la definición 2.3.2, nos restringimos a $P_1(X)$ para que la distancia de Wasserstein sea finita [26]. Aunque podríamos calcularla para cualquier par de medidas de probabilidad si aceptamos que la distancia puede ser infinita.

Para lo que nos interesa nos va a alcanzar con usar esta distancia, sin embargo, se puede generalizar para ordenes más altos usando nociones de transporte (por ejemplo ver [27]).

Teorema 2.3.3: [26]

Sea X un espacio polaco. Supongamos, además, que $d(x, y) \leq C$ con $C > 0$. Entonces, para todo par de medidas de probabilidad en X :

$$W(\mu, \nu) \leq C \|\mu - \nu\|_{TV} \quad (2.12)$$

El teorema anterior es un caso particular de un resultado más general para distancias de Wasserstein de orden p (por ejemplo, ver el teorema 6.15 del libro de Villani [26]).

2.4. Nociones de ecuaciones diferenciales

Para la segunda parte de nuestro estudio de modelos de subastas nos va a interesar describir la evolución de las distribuciones de ofertas, en particular, vamos a necesitar definir ecuaciones de transporte y poder hablar de sus soluciones. En este punto surgen algunos problemas, pues si procedemos sin mucho cuidado nos encontraremos con que las que llamamos "funciones de oferta" no son realmente funciones sino que son medidas. En este punto es que surgen los problemas: ¿qué significa derivar una medida? ¿cómo podemos trabajar con ecuaciones diferenciales que involucran medidas? La respuesta va a ser usar soluciones débiles. La idea será plantear la ecuación diferencial en su formulación débil, es decir, multiplicando por una función test e integrando.

Vamos a comenzar con un tipo de ecuación diferencial clásica: la ecuación de transporte, que en general representa la evolución de alguna magnitud física. Un ejemplo común en la física es la ecuación de conservación de masa donde ρ es la densidad de alguna magnitud física (por ejemplo, la densidad de un fluido o una densidad de energía). En general, estas magnitudes físicas

satisfacen una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (2.13)$$

que representa la conservación de ρ , es decir, que las variaciones de la magnitud se dan por flujo \vec{J} sobre las paredes de un recinto, ya que al tomar un recinto de integración Ω y usando el teorema de la divergencia (asumiendo que las funciones involucradas son buenas):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx + \int_{\partial\Omega} \vec{J} dS_x = 0. \quad (2.14)$$

En algunos caso se puede modelar $\vec{J} = \zeta \rho$ donde ζ es conocida, lo que nos lleva a una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta \rho) = 0 \quad (2.15)$$

Una ecuación de esta forma es lo que se conoce como ecuación de transporte. Para poder resolver clásicamente esta ecuación deberíamos pedir que ρ sea suficientemente buena. Sin embargo, nos interesaran soluciones débiles de este problema por lo que podremos pensar que el lugar de ρ lo toma una medida de probabilidad. Formalmente,

Definición 2.4.1: Ecuación de transporte [25]

Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R} y ζ un campo vectorial. Una ecuación de transporte es una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta \mu) = 0 \quad (2.16)$$

donde la solución μ verifica la ecuación en sentido débil, es decir, para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que vale:

$$\frac{d}{dt} \int \psi d\mu = - \int \psi \nabla \cdot (\zeta \mu) \equiv \int \nabla \psi \cdot \zeta d\mu \quad (2.17)$$

En la notación de la definición, estamos omitiendo el diferencial ya que sabemos que debemos integrar sobre la medida μ , esto es un abuso de notación pero no genera mayores inconvenientes si recordamos que los operadores vectoriales sobre medidas los debemos definir por dualidad (informalmente, integrando por partes y mandando el operador a la función test) [25].

Otra ecuación clásica es la *ecuación de difusión*. Un ejemplo típico es la ecuación del calor que modela la difusión del calor en una barra:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \quad (2.18)$$

Si queremos modelar un proceso con difusión y transporte podemos combinar el término que va como la divergencia de y el término que va como el laplaciano. Y como antes podemos formular el problema en forma débil por lo que podemos pedir que la incógnita sea una medida de probabilidad.

Definición 2.4.2: Ecuación de difusión[25]

Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R} . Una ecuación de difusión es una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mu) = \sigma \Delta \mu \quad (2.19)$$

con $\sigma > 0$. Esto es, para toda $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt} \int \psi d\mu - \int \nabla \psi \cdot \xi d\mu = \int \sigma \Delta \psi d\mu \quad (2.20)$$

La primera pregunta que nos puede surgir respecto a estas ecuaciones diferenciales es cuándo tienen solución y si ésta es única. Para la ecuación 2.16 tenemos un teorema de existencia y unicidad usando el método de las características.

Definición 2.4.3: [25]

Sea $\xi(t, x)$ un campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Definimos las curvas características asociadas a ξ como las soluciones maximales $x(t)$ de:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \xi(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

A esta solución la notamos $x(t) := T_t x_0$.

Una observación importante respecto de la definición 2.4.3 es que estas curvas existen. En efecto, como $\xi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, entonces ξ es localmente Lipschitz (ya que dado un compacto, las derivadas son continuas y por lo tanto están acotadas en dicho compacto). Por lo que el teorema de Picard (ver por ejemplo [28]) nos asegura que existe una única solución local al problema de valores iniciales 2.21. Formalmente, existe $\delta > 0$, tal que $x(t)$ esta bien definida y es C^1 en el intervalo $(0, \delta)$.

Lema 2.4.4: [22]

Sea ξ un campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Las curvas características asociadas a ξ cumplen:

$$T_{s+t} x_0 = T_s T_t x_0 \quad (2.22)$$

siempre y cuando la curva característica este bien definida en $t + s$.

No probaremos este resultado pero es un resultado clásico de la teoría (ver por ejemplo [22]). Intuitivamente lo que dice este lema es que es indistinto evolucionar un tiempo t y después evolucionar la solución con punto de partida $T_t x_0$ un tiempo s que hacer todo junto.

Teorema 2.4.5: [25]

Sea $\xi(t, x)$ campo vectorial de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ y T_t las curvas características asociadas que están definidas en $[0, T^*)$. Supongamos que T_t definen una familia difeomorfismos C^1 para $0 \leq t < T^*$. Sea $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Luego, existe la única solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mu) = 0 & 0 \leq t < T^* \\ \mu|_{t=0} = \mu_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

que viene dada por $\mu_t = T_t \# \mu_0$.

Demostración. [25, 27] Existencia: Veamos que μ_t es solución de 2.23. Cabe recordar que estamos pensando en soluciones en sentido débil por lo que la ecuación se verifica al multiplicar por una función de prueba e integrar, es decir, hay que verificar que si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi d\mu_t - \int \nabla \varphi \cdot \xi d\mu_t = 0. \quad (2.24)$$

En orden, vamos a necesitar los siguiente pasos: usar la propiedad 2.2 para sacar a la variable temporal de la medida, pasar adentro de la integral la derivada temporal (lo que podemos hacer pues la medida es independiente de t), usar la regla de la cadena, usar la definición 2.4.3 y reabsorber T_t en la medida μ_0 (usando de vuelta la propiedad 2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi d\mu_t &= \frac{d}{dt} \int \varphi \circ T_t d\mu_0 \\ &= \int \frac{\partial}{\partial t} (\varphi \circ T_t) d\mu_0 \\ &= \int (\nabla \varphi \circ T_t) \cdot \frac{dT_t}{dt} d\mu_0 \\ &= \int (\nabla \varphi \circ T_t) \cdot (\xi \circ T_t) d\mu_0 \\ &= \int \nabla \varphi \cdot \xi d\mu_t, \end{aligned}$$

que es exactamente lo que queríamos ver. Concluimos que $\mu_t = T_t \# \mu_0$ es solución del sistema 2.23.

Unicidad: El argumento es clásico: supongamos que hay dos soluciones de 2.23 que llamamos $\mu_t^{(1)}$ y $\mu_t^{(2)}$. Consideramos $\tilde{\mu}_t = \mu_t^{(1)} - \mu_t^{(2)}$ que satisface el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \tilde{\mu}) = 0 & 0 \leq t < T^* \\ \tilde{\mu}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Luego, alcanza ver que si el valor inicial de la medida es nulo entonces la única solución es la medida idénticamente nula, es decir, que dado $\tau < T^*$ vale que $\mu_\tau = 0$. Para hacer esto, vamos a construir una $\varphi(t, x)$ de soporte compacto que cumpla:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (2.26)$$

o equivalentemente (usando la definición de las curvas características):

$$\frac{d\varphi(t, T_t x)}{dt} = 0. \quad (2.27)$$

Esta ecuación tiene solución pues es una ecuación ordinaria. Además, por la ecuación 2.27, φ es independiente de t por lo que en particular podemos evaluar en τ :

$$\varphi(t, T_t x) = \varphi(\tau, T_\tau x)$$

Más aún, podemos mover el punto inicial de la solución notando $y = T_t x$ y obtener:

$$\varphi(t, y) = \varphi(\tau, T_{\tau-t} y).$$

Por hipótesis, T_t son difeomorfismos y por lo tanto $\varphi(t, -)$ es C_0^1 siempre y cuando $\varphi(\tau, -) \in C_0^1$. Además, como la dependencia de la primera variable es suave entonces φ es C^1 .

En resumen, obtuvimos una $\varphi \in C^1$ que es solución de:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \cdot \nabla \varphi = 0 \\ \varphi_t|_\tau = \varphi_\tau \end{cases} \quad (2.28)$$

para alguna $\varphi_T \in C_0^1$. Podemos usar esta φ como función test. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi_t d\mu_t &= \int \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} d\mu_t + \int \varphi_t d\left(\frac{\partial \mu_t}{\partial t}\right) \\ &= - \int \xi \cdot \nabla \varphi_t d\mu_t - \int \varphi_t \nabla \cdot (\xi \mu_t) \\ &= - \int \xi \cdot \nabla \varphi_t d\mu_t + \int \nabla \varphi_t \cdot \xi d\mu_t = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\int \varphi_t d\mu_t = \text{constante}, \quad (2.29)$$

pero como sabemos que $\mu_0 = 0$:

$$\int \varphi_t d\mu_t = 0, \quad (2.30)$$

y en particular vale para $t = \tau$. Pero, como φ_T es cualquier función test. Se sigue que $\mu_t = 0$. \square

2.5. Algunas nociones de estadística

Cuando simulemos los modelos numéricamente nos va a interesar cuantificar que tan parecidas son dos distribuciones entre sí. En particular, la pregunta que trataremos de responder es si dos muestras simuladas provienen de la misma distribución de probabilidad, para realizar esto usaremos un test de Kolmogorov-Smirnov.

Definición 2.5.1: [10]

Consideremos una muestra aleatoria $X_1 \dots X_m$. Definimos la función acumulada empírica como:

$$F_m(x) = \frac{\#\{i : X_i \leq x\}}{n}. \quad (2.31)$$

Supongamos que tenemos dos muestras aleatorias X_1, \dots, X_m y Y_1, \dots, Y_n , para que el test sea válido debemos asumir que [10]:

1. La muestra X_1, \dots, X_m provienen de una distribución continua y son independientes e idénticamente distribuidas. Análogamente con la muestra Y_1, \dots, Y_n .
2. Las muestras X, Y son independientes entre sí.

Definición 2.5.2: [10, 21]

Sean X_1, \dots, X_m y Y_1, \dots, Y_n muestras aleatorias que satisfacen las hipótesis 1 y 2, y denotamos F_m y G_n a las acumuladas empíricas de X e Y respectivamente. Definimos el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (bilátero y de dos muestras) como ^a:

$$D = \max_{t \in \mathbb{R}} |F_m(t) - G_n(t)|. \quad (2.32)$$

^aEn [10] se define el estadístico como $D = \frac{mn}{d} \max_{t \in \mathbb{R}} |F_m(t) - G_n(t)|$ donde $d = \text{mcd}(m, n)$. Sin embargo, la mayoría de la literatura consultada usa la definición sin ninguna normalización.

Notemos que este estimador es similar al que aparece en la distancia de Wasserstein de orden 1 entre dos medidas, en el sentido que comparamos las acumuladas (o la diferencia entre 1 y la acumulada).

El test a realizar es [10]:

$$\begin{cases} H_0 : F(t) = G(t) & \forall t \in \mathbb{R} \\ H_1 : F(t) \neq G(t) & \text{para algún } t \end{cases}$$

Además, rechazamos H_0 si $D \geq D_{\alpha, n, m}$, donde la constante se elige de manera que el error tipo 1 sea α [10]. El valor de $D_{\alpha, n, m}$ esta tabulado y para muestras grandes es:

$$D_{\alpha, n, m} = c(\alpha) \sqrt{\frac{n+m}{nm}} \quad (2.33)$$

donde $c(\alpha)$ es una constante. Incluimos los valores de esta constante para algunos valores típicos de α :

α	0,05	0,01	0,005	0,001
$c(\alpha)$	1,36	1,63	1,73	1,95

Teoría de Subastas

El marco natural para estudiar subastas es la teoría de juegos. Podemos pensar que los postores son los jugadores que van a tener como objetivo maximizar sus ganancias. Las reglas del juego van a depender del mecanismo de subasta y la estrategia de los jugadores va a cambiar dependiendo de las reglas y la información con la que cuenten. Es por esto que para poder empezar a estudiar algunos de estos modelos va a ser necesario primero familiarizarnos con algunos conceptos que surgen en teoría de juegos (sección 3.1). Luego, pasaremos a discutir algunas clases de subastas usuales y sus propiedades más importantes (sección 3.2). En la sección 3.3, probaremos el Teorema de Equivalencia de Ingresos y usaremos este resultado para obtener algunas estrategias de manera explícita (sección 3.4). Finalmente, mencionaremos brevemente algunos otros mecanismo de subastas u otras hipótesis que se han estudiado en la literatura (sección 3.5). Para esta capítulo las principales referencias son el libro de V. Krishna [9] y el libro de Maschler y Zamir [11].

3.1. Nociones de teoría de juegos

Primero, debemos introducir la noción formal de juego y la noción de equilibrio de Nash. Notaremos $\times_j A_j$ el producto cartesiano de los conjuntos A_j .

Definición 3.1.1: [9]

Un juego consiste en:

1. un conjunto de \mathcal{N} jugadores;
2. para cada jugador $i \in \mathcal{N}$ existe un conjunto de acciones \mathcal{A}_i , o estrategias puras;
3. para cada jugador $i \in \mathcal{N}$ existe una función de utilidad $u_i : \times_j \mathcal{A}_j \rightarrow \mathbb{R}$.

Para la próxima definición adoptamos la siguiente notación [9]: dado un vector \mathbf{x} llamamos \mathbf{x}_{-i} al vector \mathbf{x} sacandole la componente i -ésima. También notamos $\mathbf{x} = (x_i, \mathbf{x}_{-i})$.

Definición 3.1.2: Equilibrio de Nash [9]

En un juego (definido como en 3.1.1), un equilibrio de Nash es un vector $\mathbf{a}^* \in \times_j \mathcal{A}_j$ tal que para todo i y para todo $a_i \in \mathcal{A}_i$:

$$u_i(\mathbf{a}^*) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}).$$

Intuitivamente, la definición 3.1.2 nos dice que todos los jugadores están satisfechos jugando con \mathbf{a}^* , ya que si alguno modificase su estrategia reduciría su utilidad. Por lo tanto, no hay ningun incentivo para modificar unilateralmente la estrategia.

En lo que nos va a interesar estudiar los jugadores no tienen toda la información sobre el juego por lo que necesitamos definir un juego de información incompleta.

Definición 3.1.3: [9]

Un juego de información incompleta consiste en:

1. un conjunto de \mathcal{N} jugadores;
2. para cada jugador $i \in \mathcal{N}$ existe un conjunto no vacío de acciones \mathcal{A}_i ;
3. para cada jugador $i \in \mathcal{N}$ existe un conjunto de señales \mathcal{X}_i ;
4. para cada jugador $i \in \mathcal{N}$ existe una función de utilidad $u_i : \times_j \mathcal{A}_j \times \mathcal{X}_i \rightarrow \mathbb{R}$;
5. una distribución de probabilidad f sobre $\times_j \mathcal{X}_j$.

Además, una estrategia para un jugador $i \in \mathcal{N}$ es una función $\alpha_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{A}_i$.

La definición 3.1.3 extiende la definición de juego, pero, a diferencia de antes, en los juegos de información incompleta, la acción de un jugador i depende de una realización de la señal \mathcal{X}_i .

3.2. Tipos de subastas

Necesitamos familiarizarnos con algunos conceptos generales que van a aparecer en todos los tipos de subastas que vamos a analizar. Cabe destacar que en este trabajo nos vamos a concentrar en lo que se llama *single-object auctions*, es decir, subastas donde hay involucrado un único bien.

Para definir una subasta vamos a necesitar un conjunto de postores y un bien. Cada uno de estos postores va a tener una valuación de este bien, que es el valor que este elemento tiene para ellos y según este valor van a decidir cuánto ofertan por el mismo. También vamos a necesitar un conjunto de reglas sobre cómo se va a desarrollar la subasta y como se define al ganador.

Uno de los puntos importantes al estudiar subastas es determinar como se comportan las valuaciones. A lo largo de este trabajo vamos a asumir que las valuaciones son valores privados (*private values*), es decir, que los postores no conocen la valuación de los demás postores, y que estos valores se sortean aleatoriamente con una distribución f , que asumiremos que es conocida

por todos los jugadores [9].

Uno podría preguntarse: ¿es razonable esta hipótesis? La respuesta es que depende del objetivo de los jugadores. Por ejemplo, si el bien subastado es un conjunto de acciones que se piensan vender a futuro, el precio futuro de estas pueden afectar a la valuación de cada postor y como esta información está disponible para todos los jugadores, no es una buena idea asumir que los valores son privados ya que dependen de la información disponible. Sin embargo, si el bien es de consumo, esta hipótesis resulta razonable ya que la valuación depende únicamente de cada postor [9]. En este trabajo vamos a asumir que siempre estamos en esta hipótesis, por lo que las valuaciones serán independientes entre si.

Cabe destacar que el objetivo de los postores no incluye ganar la subasta, sino maximizar sus ganancias, por lo que nunca van a apostar más que su propia valuación. En esta situación se dice que los jugadores son *risk neutral* o *neutrales al riesgo* [9]. Este hecho nos permite pensar en la oferta de cada postor como una fracción de la valuación.

A modo de resumen, cuando nos refiramos a una subasta en este trabajo estaremos asumiendo:

1. Se sortea un único objeto indivisible.
2. Los jugadores tienen una valuación del objeto que es una variable aleatoria V_i positiva. Más aún, supondremos que todos los jugadores sortean variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
3. Los jugadores no saben cómo van a jugar los demás postores.
4. Los jugadores tienen como objetivo maximizar sus ganancias.
5. El mecanismo de subasta es conocido de antemano por todos los jugadores.
6. Las valuaciones provienen de una variable aleatoria continua. Esta hipótesis no es necesaria, pero lo asumiremos para poder demostrar los resultados de este capítulo.

Si bien hay tantos tipos de subastas como reglas de interacción se nos puedan ocurrir, existen algunos tipos de subastas estándar que nos van a permitir comenzar nuestro estudio.

Subasta inglesa

La *subasta inglesa* es la más conocida. Su mecanismo de funcionamiento es sencillo: el subastador tiene un bien a subastar y hay un conjunto de jugadores interesados en comprar dicho bien. El subastador da inicio a la puja con un precio mínimo, luego, los agentes van ofreciendo un mayor precio hasta que solamente queda una persona dispuesta a pagar dicho precio. Este jugador es el ganador y paga dicho precio. Otra variante de este tipo de subasta es que el subastador es quien va subiendo el precio de manera continua y los postores van saliendo de la subasta a medida que el precio sube más de lo que están dispuestos a pagar [9]. En este tipo de subastas los jugadores

saben en todo momento cuantos postores quedan en juego, ya que las apuestas son públicas. Es por esto que se la conoce como *open bid* (o a sobre abierto).

Este tipo de subastas son típicas, por ejemplo, en los mercados de arte [11].

Subasta holandesa

Al igual que la subasta inglesa, es una subasta con ofertas públicas. La diferencia con la subasta inglesa es que el subastador arranca con un precio suficientemente alto y luego, el precio descende hasta que alguien decide comprar, ahí se cierra la subasta y el comprador paga lo que dijo [11].

Este tipo de subastas son típicas en los mercados de bienes que van disminuyendo su valor con el tiempo, como lo son los mercados de frutas o el mercado de flores de Holanda [11].

Subasta a sobre cerrado de primer precio

En este tipo de subasta, todos los postores hacen una oferta secreta. Luego de un cierto tiempo, se leen las ofertas, se declara ganador al jugador con mayor oferta y este paga lo que apostó [9].

Este tipo de mecanismos se conocen como a *sobre cerrado*, es decir, la oferta es secreta, simultánea (o durante algún lapso de tiempo) y los postores no tienen información de las apuestas del resto. Por lo que en este tipo de subasta, los postores no cuentan con la misma información que el la subasta inglesa u holandesa, por lo que la estrategia será diferente.

En este tipo de subastas, el equilibrio de Nash es conocido y depende de la cantidad N de jugadores. En particular, nos dice que la oferta óptima es apostar una fracción $\frac{N-1}{N}$ de la valuación propia. Probaremos ahora un caso particular y el caso general se deducirá en la sección 3.3 como corolario del Teorema de Equivalencia de Ingresos.

Teorema 3.2.1

Supongamos que dos personas van a participar en una subasta a sobre cerrado de primer precio donde el postor i tiene una valuación $V_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$, $i = 1, 2$. Entonces existe un único equilibrio de Nash simétrico, creciente y derivable (es decir, donde todos los jugadores tienen la misma estrategia) que verifica:

$$\beta(v_i) = \frac{1}{2}v_i \quad (3.1)$$

donde β es la oferta del postor i dado que $V_i = v_i$.

Demostración. Existencia: [11] Supongamos que el segundo postor usa la estrategia 3.1, es decir, que oferta la mitad de su valuación. Podemos escribir la utilidad esperada del primer postor en

función del valor ofertado x como:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= (v_1 - x)\mathbb{P}(\beta(v_2) < x) \\ &= (v_1 - x)\mathbb{P}(v_2 < 2x) \\ &= (v_1 - x)\min\{1, 2x\} \\ &= \begin{cases} v_1 - x & \text{si } \frac{1}{2} < x \\ (v_1 - x)2x & \text{si } \frac{1}{2} \geq x \end{cases} \end{aligned}$$

Es fácil ver que el máximo de la función es el de la cuadrática, entonces $x = v_1/2$. Análogamente, se puede obtener el mismo resultado para el segundo jugador. Por lo que la estrategia 3.1, es un equilibrio de Nash simétrico.

Unicidad: [9]¹ Como buscamos estrategias simétricas, es decir, todos los postores juegan de la misma manera, definimos la función de oferta $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que manda la valuación al valor que se debería apostar, que es creciente y derivable. Sea a la apuesta el jugador 1.

1. Si $a > f(v_2)$, 1 gana y la utilidad esperada es $v_1 - a$.
2. Si $a < f(v_2)$, 1 pierde y la utilidad esperada es 0.
3. Si $a = f(v_2)$, es irrelevante si 1 pierde o gana, en ambos casos la utilidad es 0.

Luego, la utilidad esperada es:

$$\begin{aligned} u(a) &= (v_1 - a)\mathbb{P}(a > f(v_2)) \\ &= (v_1 - a)\mathbb{P}(f^{-1}(a) > v_2) \\ &= (v_1 - a)f^{-1}(a). \end{aligned}$$

Como queremos maximizar u , buscamos

$$u'(a) = -f^{-1}(a) + (v_1 - a)\frac{1}{f'(f^{-1}(a))} = 0,$$

y usando que $f(v_1) = a$:

$$f'(v_1) = \frac{v_1 - f(v_1)}{v_1}.$$

Notemos que necesitamos pedir que $f(0) = 0$, pues si el bien no tiene ningún valor, ofertar cualquier valor no nulo nos da pérdidas. Agregando esta condición, podemos resolver la ecuación diferencial integrando ambos lados:

$$\begin{aligned} \int_0^t v_1 f'(v_1) dv_1 &= \int_0^t v_1 - f(v_1) dv_1 \\ tf(t) - \int_0^t f(v_1) dv_1 &= \frac{t^2}{2} \\ f(t) &= \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

¹En realidad, en [9] se prueba un resultado más general, donde hay N jugadores y no se asume que las valuaciones tienen distribución uniforme. De todas formas, seguimos las ideas de esta demostración.

Con esto completamos la demostración. \square

Subasta a sobre cerrado de segundo precio

Este tipo de subasta fue introducida por Vickrey en 1961 [24], por lo que también son conocidas como subastas de Vickrey. Estas son subastas donde el mecanismo es idéntico al anterior en cómo se realizan las ofertas y cómo se determina al ganador, es decir, todos los postores hacen una oferta en un sobre cerrado y gana quien haya hecho la mayor oferta. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, el ganador paga la segunda oferta más alta [11]. Por ejemplo si hay 4 jugadores donde ofertan 2, 3, 10, 40 respectivamente, el ganador es el jugador 4 y paga 10, que es lo que ofertó el jugador 3.

Aunque este tipo de subasta parezca más compleja, el resultado análogo al Teorema 3.2.1 es bastante más sencillo, ya que el equilibrio de Nash no depende del número de jugadores.

Teorema 3.2.2: [9]

En una subasta a sobre cerrado de segundo precio, el equilibrio de Nash es ofertar:

$$\beta(v_i) = v_i \quad (3.2)$$

donde v_i es una realización de la valuación.^a

^aEn el libro de Krishna la enunciación es levemente distinta pues se introduce el concepto de estrategias dominantes y débilmente dominantes. Se sigue que la enunciación en términos de estos conceptos implica la que enunciamos en este trabajo.

Demostración. [9] Denotamos o_i a la oferta del jugador $i \neq 1$ y nos centramos en la estrategia del jugador 1 y sea $p = \max_{i \in \{2, \dots, N\}} o_i$, es decir, la mayor oferta entre los jugadores restantes. Supongamos que 1 oferta v_1 . Para calcular la ganancia tenemos que considerar tres casos:

1. Si $v_1 > p$, entonces 1 gana la subasta, paga p y tiene una ganancia de $v_1 - p$.
2. Si $v_1 < p$, entonces 1 pierde y tiene una ganancia nula.
3. Si $v_1 = p$, entonces es irrelevante si 1 gana o pierde. Si pierde, su ganancia es nula, pero si gana debe pagar p por lo que también tiene ganancia nula.

Afirmamos que si 1 oferta $y \neq v_1$ entonces no aumenta su ganancia. Debemos ver dos casos: si $y < v_1$ y si $y > v_1$

1. Supongamos que $y < v_1$: en este caso si $p \leq y < v_1$, 1 sigue ganando pero tiene una ganancia menor a la que obtendría con v_1 , ya que obtendría $y - p < v_1 - p$. Por otro lado si $y < p$, 1 pierde por lo que su ganancia es nula y, en particular, menor que la que obtendría si apostara v_1 .
2. Supongamos que oferta $v_1 < y$: en este caso si $v_1 < y \leq p$, 1 sigue perdiendo (o empata en cuyo caso siempre gana 0), por lo que ofertando v_1 o y la ganancia es la misma. En cambio,

si $p < y$, ahora 1 gana, por lo que tiene ganancia $v_1 - y < 0$ por lo que su ganancia es negativa, pero si juega v_1 la ganancia es nula.

Concluimos que sin importar como juegue 1 si oferta algo distinto que su valuación, sus ganancias son menores (o iguales) que si ofertara x . Por lo que es un equilibrio de Nash. \square

Intuitivamente podemos interpretar el Teorema 3.2.2 de la siguiente manera: si ofertamos menos que nuestra valuación, algún jugador podría ganarnos ofertando algún valor menor que nuestra valuación del bien, por lo que estaríamos perdiendo la pequeña ganancia entre su oferta y nuestra valuación. Además, al no tener que pagar lo que ofertamos, podemos tener ganancias aún apostando un valor mayor a nuestra valuación (a diferencia del caso de una subasta de primer precio). Sin embargo, algún otro jugador podría ofertar un número mayor a nuestra valuación y nosotros deberíamos pagarlo. Por lo que terminamos con pérdidas. Entonces la única forma de que no haya forma de que otro jugador se meta entre nuestra valuación y nuestra oferta es apostando exactamente nuestra valuación.

3.3. Teorema de Equivalencia de Ingresos

Hasta ahora nos preguntamos, cuál es la mejor estrategia para los postores en un determinado tipo de subasta. Sin embargo, podríamos hacernos la pregunta de que tipo de subasta es más conveniente para el subastador, es decir, dado un objeto a subastar, ¿qué tipo de subasta da mayores ganancias esperadas? Sorprendentemente, la respuesta es que es indistinto siempre que las reglas de la subasta sean suficientemente buenas. Este es un resultado clásico de la teoría que se conoce como *Teorema de equivalencia de ingresos* (o *Revenue equivalence theorem*).

Definición 3.3.1: [9]

Decimos que una subasta es estándar si el postor con la oferta más alta es quién obtiene el bien. En cambio, decimos que la subasta es no estándar en cualquier otro caso.

Notemos que las subastas de primer y segundo precio que estudiamos en la sección anterior son subastas estándar [9].

Antes de pasar al teorema recordemos una definición:

Definición 3.3.2: [9]

Si X es una variable aleatoria continua con acumulada F que supondremos derivable y función densidad f , tenemos :

$$\mathbb{E}(X|X < x) = \frac{1}{F(x)} \int_0^x t f(t) dt \quad (3.3)$$

Teorema 3.3.3: Equivalencia de Ingresos [9]

En una subasta estándar donde además se cumple que:

1. las valuaciones V_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas;
2. todos los postores son neutrales al riesgo;
3. el pago esperado de un postor con valuación 0 es 0.

Entonces en cualquier equilibrio simétrico y creciente el vendedor tiene la misma ganancia esperada.

Demostración. [9] Sea β un equilibrio creciente y como estamos considerando equilibrios simétricos, todos los jugadores utilizan la estrategia β . Sea $m(x)$ el pago esperado de un postor con valuación x . La idea de la demostración va a ser probar que $m(x)$ no depende del mecanismo de subasta, sino que depende únicamente de la distribución de V_i .

Supongamos que el jugador 1 tiene una valuación x , pero oferta $\beta(y)$. Sea $\Pi(y, x)$ su ganancia esperada en esta situación. Notemos que si $P = \max_{i \in \{2, \dots, N\}} V_i$, P resulta una variable aleatoria conocida como *estadístico de orden $n - 1$* . Denotamos G a la distribución acumulada de P . Para calcular $\Pi(y, x)$ notamos que si $y < P$ entonces 1 pierde (ya que $\beta(y) < \beta(P)$) y por lo tanto su ganancia es nula. Por otro lado, si $y > P$ entonces, 1 es el ganador (ya que $\beta(y) > \beta(P)$) y obtiene una ganancia de $x - y$. Como consecuencia tenemos que:

$$\Pi(y, x) = (x - y)\mathbb{P}(P < y). \quad (3.4)$$

Usando que $m(y) = y\mathbb{P}(P < y) = yG(y)$, obtenemos:

$$\Pi(y, x) = G(y)x - m(y). \quad (3.5)$$

Para encontrar el máximo respecto de y podemos derivar e igualar a 0:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}(y, x) = g(y)x - m'(y) = 0, \quad (3.6)$$

donde $g(y) = G'(y)$. Además, sabemos que el máximo se realiza cuando $y = x$, ya que β es un equilibrio, por lo que:

$$m'(y) = g(y)y.$$

Integrando a ambos lados entre 0 y x :

$$m(x) - m(0) = \int_0^x tg(t)dt. \quad (3.7)$$

Por otro lado,

$$G(x)\mathbb{E}(P|P < x) = G(x) \int_0^x t \frac{g(t)}{G(x)} dt = \int_0^x tg(t)dt. \quad (3.8)$$

Y como se cumple que $m(0) = 0$, se sigue que:

$$m(x) = G(x)\mathbb{E}(P|P < x), \quad (3.9)$$

pero como esta expresión no depende del proceso de subasta, entonces concluimos que el pago esperado por el jugador 1 es independiente del mecanismo de subasta. El teorema se sigue de manera inmediata notando que la ganancia esperada del vendedor es N veces el pago esperado integrado sobre todas las posibles valuaciones [11]:

$$N \int m(x)f(x)dx. \quad (3.10)$$

Es claro que como m no depende del mecanismo de subasta, entonces la ganancia esperada del vendedor tampoco. □

3.4. Aplicaciones del Teorema de Equivalencia de Ingresos

Ya probado el teorema 3.3.3, podemos obtener una demostración del equilibrio de Nash para la subasta de primer precio, o más en general para cualquier subasta que satisfaga las hipótesis del teorema 3.3.3. Probaremos este resultado como consecuencia de resultados más generales. El teorema 3.4.2 nos dará una forma explícita para un equilibrio de Nash. Luego, en el teorema 3.4.3 probaremos que en el caso de una subasta de primer precio este equilibrio es único. Finalmente, en 3.4.4 deducimos una fórmula explícita para el equilibrio de Nash en una subasta de primer precio para N jugadores [11].

Lema 3.4.1: [11]

Sea X una variable aleatoria continua con $[0, v]$ con acumulada F y función densidad f , entonces dados $a < b$ vale que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|X < b) &= \mathbb{P}(X < a|X < b)\mathbb{E}(X|X < a) \\ &+ \mathbb{P}(a < X < b|X < b)\mathbb{E}(X|a < X < b). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Demostración. Escribamos explícitamente el lado derecho de la ecuación 3.11. El primer sumando se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < a|X < b)\mathbb{E}(X|X < a) &= \frac{\mathbb{P}(\{X < a\} \cap \{X < b\})}{\mathbb{P}(X < b)} \frac{1}{F(a)} \int_0^a tf(t)dt \\ &= \frac{\mathbb{P}(X < a)}{\mathbb{P}(X < b)} \frac{1}{F(a)} \int_0^a tf(t)dt \\ &= \frac{1}{F(b)} \int_0^a tf(t)dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde en la anteúltima igualdad usamos que $\{X < a\} \subset \{X < b\}$. El segundo sumando se reescribe como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X < b|X < b)\mathbb{E}(X|a < X < b) &= \frac{\mathbb{P}(a < X < b)}{\mathbb{P}(X < b)} \frac{1}{\mathbb{P}(a < X < b)} \int_a^b tf(t)dt \\ &= \frac{1}{F(b)} \int_a^b tf(t)dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sumando ambos términos obtenemos que:

$$\frac{1}{F(b)} \int_0^a tf(t)dt + \frac{1}{F(b)} \int_a^b tf(t)dt = \frac{1}{F(b)} \int_0^b tf(t)dt = \mathbb{E}(X|X < b), \quad (3.14)$$

que es exactamente el lado izquierdo de 3.11. \square

Teorema 3.4.2: [11]

Consideremos una subasta de primer precio, simétrica, con valuaciones V_i independientes e idénticamente distribuidas entre N jugadores. Llamamos $P = \max_{i=2 \dots N} V_i$. La estrategia:

$$\beta(v) = \mathbb{E}(P|P < v) \quad (3.15)$$

define un equilibrio de Nash simétrico creciente donde $\beta(0) = 0$.

Demostración. [11]

Notemos que como V_i son independientes e idénticamente distribuidas, si llamamos $P_j = \max_{i=1,2 \dots N, i \neq j} V_i$, vale que $P_j \sim P_k$ para todo $j, k \in \{1, \dots, N\}$. Por lo tanto, el enunciado tiene sentido y la ecuación 3.15 es simétrica para todos los jugadores ².

Tenemos que ver que β define un equilibrio y que es creciente.

1. β es creciente: Consideramos v y $\delta > 0$ entonces queremos ver que $\beta(v) \leq \beta(v + \delta)$. Para eso vamos a usar el lema 3.4.1 con $a = v$ y $b = v + \delta$:

$$\begin{aligned} \beta(v + \delta) &= \mathbb{E}(P|P < v + \delta) \\ &= \mathbb{P}(P < v|P < v + \delta)\mathbb{E}(P|X < v) \\ &\quad + \mathbb{P}(v < P < v + \delta|P < v + \delta)\mathbb{E}(P|v < P < v + \delta) \\ &\geq [\mathbb{P}(P < v|P < v + \delta) + \mathbb{P}(v < P < v + \delta|P < v + \delta)] \\ &\quad \times \min \{ \mathbb{E}(P|P < v), \mathbb{E}(P|v < P < v + \delta) \} \\ &= \min \{ \mathbb{E}(P|P < v), \mathbb{E}(P|v < P < v + \delta) \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bastaría ver que este mínimo es $\mathbb{E}(P|P < v) = \beta(v)$. Notemos que podemos acotar:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P|P < v) &= \frac{1}{F(v)} \int_0^v tf(t)dt \\ &\leq \frac{v}{F(v)} \int_0^v f(t)dt \\ &= v. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P|v < P < v + \delta) &= \frac{1}{\mathbb{P}(v < P < v + \delta)} \int_v^{v+\delta} tf(t)dt \\ &\geq \frac{v}{\mathbb{P}(v < P < v + \delta)} \int_v^{v+\delta} f(t)dt \\ &= v. \end{aligned} \quad (3.18)$$

²Una enunciación equivalente podría ser definir P como el máximo entre $N - 1$ valuaciones, sin especificar que jugador se deja afuera, que es como define este valor Krishna [9]

Luego,

$$\beta(v) = \mathbb{E}(P|P < v) \leq v \leq \mathbb{E}(P|v < P < v + \delta). \quad (3.19)$$

Concluimos que $\beta(v + \delta) \geq \beta(v)$.

2. β es continua y $\beta(0) = 0$: Veamos que β es continua en $v = 0$. Por la ecuación 3.18 sabemos que:

$$0 \leq \beta(v) = \mathbb{E}(P|P < v) \leq v. \quad (3.20)$$

Como podemos tomar límite del lado derecho, se sigue que $\lim_{v \rightarrow 0} \beta(v) = 0 = \beta(0)$. Además, para $v > 0$, como:

$$\mathbb{E}(P|P < v) = \frac{\int_0^v y f_P(y) dy}{\mathbb{P}(P < v)}, \quad (3.21)$$

tenemos que es continua.

3. β es un equilibrio de Nash: Vamos a probar que si $2, \dots, N$ usan la estrategia β entonces, la mejor estrategia para 1 es β .

Supongamos que v_1 es la valuación del jugador 1 y que oferta b_1 . Luego, su ganancia esperada g es la probabilidad de ganar, es decir, que b_1 sea mayor que todas las demás ofertas, por la ganancia en este caso que es $v_1 - b_1$. Si pierde, la ganancia es nula y este término no contribuye. Por lo que obtenemos:

$$g(b_1) = \mathbb{P}(\beta(P) < b_1)(v_1 - b_1). \quad (3.22)$$

Si $b_1 > v_1$ entonces $g(b_1) < 0$. Y g se anula en 0. En cualquier otro caso, g es positiva por lo que el máximo se encuentra en $[0, v_1]$, ya que como β es continua, $\beta(P)$ es una variable aleatoria continua [6].

Si $b_1 > \max \text{Im}(\beta)$, entonces, $\mathbb{P}(P < b_1) = 1$ y la ganancia esperada es:

$$g(b_1) = v_1 - b_1. \quad (3.23)$$

Sin embargo, en este caso, $g(b_1 < g(\max \text{Im}(\beta)))$, por lo que al jugador 1 no le resulta óptimo apostar $b_1 > \max \text{Im}(\beta)$. Por lo que podemos suponer que $b_1 \in \text{Im}(\beta)$.

Como β creciente y continua vale que:

$$\mathbb{P}(\beta(P) < b_1) = \mathbb{P}(P < \beta^{-1}(b_1)) = F_P(\beta^{-1}(b_1)), \quad (3.24)$$

donde F_P denota a la acumulada de P . Entonces,

$$\begin{aligned} g(b_1) &= \mathbb{P}(\beta(P) < b_1)(v_1 - b_1) \\ &= F_P(\beta^{-1}(b_1))(v_1 - \beta(\beta^{-1}(b_1))). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si llamamos $z_1 = \beta^{-1}(b_1)$:

$$\begin{aligned}
 g(\beta(z_1)) &= F_P(z_1)(v_1 - \beta(z_1)) \\
 &= F_P(z_1)(v_1 - \mathbb{E}(P|P < z_1)) \\
 &= F_P(z_1)v_1 - F_P(z_1)\mathbb{E}(P|P < z_1) \\
 &= F_P(z_1)v_1 - \int_0^{z_1} t f_P(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Podemos integrar por partes la última integral:

$$\int_0^{z_1} t f_P(t) dt = z_1 F_P(z_1) - \int_0^{z_1} F_P(t) dt. \tag{3.27}$$

Finalmente obtenemos:

$$g(\beta(z_1)) = F_P(z_1)v_1 + -z_1 F_P(z_1) + \int_0^{z_1} F_P(t) dt. \tag{3.28}$$

Para hallar el máximo de g derivamos usando regla de la cadena:

$$[g(\beta(z_1))] = g'(b_1)\beta'(z_1). \tag{3.29}$$

Como β es creciente, su derivada no se anula. Si llamamos $h(z_1) = g(\beta(z_1))$, tenemos que

$$h'(z_1) = f_P(z_1)v_1 - F_P(z_1) - z_1 f_P(z_1) - F_P(z_1) = f_P(z_1)(v_1 - z_1). \tag{3.30}$$

Finalmente, la utilidad se maximiza cuando $z_1 = v_1$ o equivalentemente, $\beta(v_1) = b_1$.

El teorema queda demostrado. □

Teorema 3.4.3: [11]

Sea β es un equilibrio simétrico y creciente con $\beta(0) = 0$ en una subasta a sobre cerrado de primer precio, donde todos los jugadores tienen valuaciones V_i independientes e idénticamente distribuidas.

Entonces

$$\beta(v) = \mathbb{E}(P|P \leq v) \tag{3.31}$$

donde $P = \max_{i=2 \dots N} V_i$.

Demostración. [11] La idea será usar el Teorema de equivalencia de ingresos (Teorema 3.3.3) para despejar β . Para eso debemos verificar las hipótesis: el enunciado nos dice que V_i son independientes e idénticamente distribuidas y como es una subasta de primer precio es estándar con postores neutrales al riesgo. Además $\beta(0) = 0$ y es creciente y simétrico. Entonces estamos en las hipótesis del enunciado y podemos usar la expresión 3.9 para el pago esperado de un jugador con valuación v :

$$m(v) = F_P(v)\mathbb{E}(P|P < v). \tag{3.32}$$

Por otro lado, el pago esperado es la probabilidad de ganar por la oferta realizada. La oferta es $\beta(v)$ y la probabilidad de ganar es $\mathbb{P}(P < v) = F_P(v)$:

$$m(v) = F_P(v)\beta(v). \tag{3.33}$$

Al igualar las expresiones 3.32 y 3.33 obtenemos:

$$\beta(v) = \mathbb{E}(P|P \leq v). \quad (3.34)$$

□

Teorema 3.4.4: [11]

Se tienen N jugadores en una subasta a sobre cerrado de primer precio donde se cumple que las valuaciones $V_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$ (e independientes entre si). Luego, el único equilibrio de Nash simétrico es:

$$\beta(v) = \frac{N-1}{N}v. \quad (3.35)$$

Demostración. [11] Basta ver que $\beta(v) = \mathbb{E}(P|P < v) = \frac{N-1}{N}v$, ya que por el Teorema 3.4.2 sabemos que $\mathbb{E}(P|P < v)$ es un equilibrio de Nash y por el Teorema 3.4.3 es el único posible equilibrio simétrico y creciente. No es difícil notar que:

$$F_P(v) = \mathbb{P}(v < V_2)^{N-1} = v^{N-1} \quad \text{y} \quad f_P(v) = F'_P(v) = (N-1)v^{N-2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P|P < v) &= \frac{1}{F_P(v)} \int_0^v x f_P(x) dx \\ &= \frac{1}{v^{N-1}} \int_0^v x^{N-1} (N-1) dx \\ &= \frac{N-1}{N}v. \end{aligned}$$

El teorema queda demostrado. □

3.5. Otras subastas

Si bien los cuatro tipos de subastas clásicos son los que ya mencionamos, cabe destacar que existen otros tipos de subastas. Mencionaremos brevemente algunas de ellas en esta sección.

1. *All-pay*: En este tipo de subastas todos los jugadores realizan una apuesta y el ganador es el postor con la mayor oferta. Sin embargo, todos los jugadores deben pagar lo que apostaron. En este caso, perder la subasta, implica una pérdida económica. Si bien este tipo de subastas no se utiliza para vender bienes, se puede usar este mecanismo para modelar el lobbying. En esta situación, los lobbystas invierten capital para lograr su objetivo (la oferta) y solamente uno puede resultar ganador [9]. Esta aplicación se puede ver con más detalle por ejemplo en [12]. Otro ejemplo, se da en las inversiones para el desarrollo de alguna tecnología, donde varios grupos invierten pero solamente el primero en desarrollarla es quien obtiene la patente y por lo tanto el rédito económico [11].
2. *k-ésimo precio*: De la misma manera que consideramos subastas de segundo precio, podríamos considerar subastas de tercer precio, donde el ganador paga lo que ofertó el que quedó

en la posición tres. En general, podemos considerar subastas donde el ganador paga lo que ofertó el k -ésimo jugador. [13].

Más aún, las hipótesis que propusimos representan únicamente un subconjunto de casos que se podrían querer estudiar. Vamos a mencionar brevemente algunas otras hipótesis que podríamos agregar o modificar.

1. *Precios de reserva (Reserve prices)*: Es razonable suponer que para el subastador el bien tiene un valor, por lo que si lo vende por menos de ese precio va a tener pérdidas. Sería razonable permitir que el subastador pueda elegir un precio mínimo al que está dispuesto a vender el bien. Este valor se conoce como *precio de reserva* [9]. Al incluir precios de reserva, la pregunta que podríamos hacernos es, ¿cómo se elige este precio de manera óptima? Es decir, ¿Qué valor de r maximiza la ganancia del subastador? La respuesta es que se debe elegir un valor mayor a la valuación del subastador. No entraremos en detalles sobre este resultado, pero este punto se desarrolla en la sección 2.5 del libro de Krishna [9].
2. *Precios de entrada (Entry fee)*: El subastador puede también pedir que para poder ofertar sea necesario realizar un pago, por lo que los jugadores deben decidir si quieren entrar o no en la subasta, ya que en este caso, perder la subasta implica tener una ganancia negativa, por lo que los postores con valuaciones bajas podrían no querer arriesgarse a entrar [9].
3. *Interdependent values*: En nuestras hipótesis asumimos que la valuación se modela mediante variables aleatorias independientes. Sin embargo, existen casos donde esta hipótesis no es razonable, ya que los jugadores tienen información adicional que condiciona su valuación del objeto. Un caso extremo de este comportamiento es cuando todos los jugadores tienen la misma valuación (*common value*) [9]. En este tipo de modelos aparece un fenómeno que se conoce como *winner's curse*: en un modelo de valores comunes, los jugadores saben que el valor de un bien es único pero no lo conocen de antemano, por lo que para ofertar deben estimar este valor. Al darse a conocer el ganador, este se da cuenta de que fue el que estimó la mayor valuación para el bien. Por lo que el ganador se arrepiente de su decisión pues lo más probable es que haya pagado más del valor real del bien [9].
4. *Multiple object auctions*: Hasta ahora trabajamos siempre con subastas donde se subasta un único bien. Sin embargo, podemos considerar el caso donde hay múltiples objetos que se subastan, ya sean varias unidades del mismo objeto u objetos distintos cuyos valores puedan depender de ya haber adquirido otros. Hay muchas formas de realizar subastas de este tipo. En primer lugar, se debe decidir si se quiere vender estos bienes en distintas subastas secuenciales, o venderlos en una única subasta. Luego, es necesario decidir el mecanismo de cada subasta o como se van a repartir los bienes [9]. Este tipo de subastas incluye a las combinatorias, que pueden resultar muy complicadas desde el punto de vista de la complejidad computacional no sólo para seleccionar las ofertas óptimas, sino también para decidir el ganador.

3.6. Resumen

Como discutimos en este capítulo, la teoría de subastas tiene muchas variantes posibles. El modelo clásico de valores privados y objetos únicos tiene cuatro mecanismos típicos siendo las subastas de primer y segundo precio el foco de nuestro estudio. En el caso de estrategias simétricas, probamos que ambos modelos tienen un equilibrio de Nash. Con este fin probamos el Teorema de equivalencia de ingresos, que nos dice que bajo ciertas hipótesis la ganancia esperada del vendedor es independiente del mecanismo de subasta.

Además, discutimos otras variantes que no se desarrollan en detalle en este trabajo pero que ilustran la riqueza de la teoría y ponen en evidencia la relevancia de la información con la que cuentan los jugadores al momento de decidir sus estrategias.

En los siguientes capítulos nos restringiremos al caso clásico descrito en la sección 3.2. Y en particular, a subastas de primer precio.

Subasta de primer precio para 2 jugadores

Contamos con todas las herramientas necesarias para comenzar a construir modelos basados en agentes para realiza repeticiones de subastas de primer precio a sobre cerrado donde en cada iteración los jugadores pueden modificar su estrategia de juego. Buscaremos que en el largo plazo los postores aprendan cuál es la estrategia óptima, es decir, el equilibrio de Nash. En este capítulo, nos concentraremos en subastas de dos jugadores, por lo que buscaremos que el modelo reproduzca la estrategia $\beta(v) = \frac{v}{2}$.

En la sección 4.1 definiremos las reglas de la dinámica microscópica. Luego, nos dedicaremos a estudiar ecuaciones que modelen la dinámica. En primer lugar, escribiremos una ecuación discreta para la evolución de los parámetros de oferta (sección 4.2). En segundo lugar, en la sección 4.5 y 4.6, deduciremos una ecuación diferencial para el modelo. Finalmente, en la sección 4.7 estudiaremos las soluciones estacionarias de la ecuación diferencial hallada.

4.1. El modelo

Supongamos que tenemos N agentes que pueden participar en una subasta de primer precio. En cada subasta participan exactamente dos jugadores, elegidos aleatoriamente en este conjunto. Para modelar la estrategia de cada jugador le asignamos una función $p_i(t)$ dependiente del tiempo que indica que proporción de su valuación debe ofertar. A esta función la llamamos *parámetro de oferta* y cumple que $0 \leq p_i(t) \leq 1$. Tenemos la libertad de decidir la condición inicial de p_i que puede ser tanto una constante como una variable aleatoria. Este parámetro se va a actualizar con las interacciones entre agentes.

Cada subasta se puede modelar como una interacción entre dos jugadores. Primero se eligen al azar los dos jugadores que participarán y cada uno de estos sorteja una variable aleatoria V_i que representa la valuación del jugador i del bien a subastar. En este modelo consideraremos $V_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. En conclusión, la estrategia o del jugador i viene dada por:

$$o(t) = v_i p_i(t) \tag{4.1}$$

donde v_i es una realización de V_i .

Para completar el modelo resta definir la regla de actualización de los parámetros de oferta. Supongamos por simplicidad que los jugadores son 1 y 2. Si 1 le gana a 2, la ganancia de 1 resulta: $v_1 - o_1$, luego, si hubiese ofertado menos también hubiese ganado (siempre que $o_2 < o_1$) y tendría mayores ganancias, por lo que 1 está motivado para bajar p_1 , proponemos que baje en una fracción fija. Sin embargo, si $p_1 < p_2$, 1 puede asumir que ganó solamente porque tuvo suerte que su valuación fuera más alta que la de su oponente. Entonces proponemos que 1 sólo modifica su parámetro si gana y su oponente tiene un parámetro menor. De manera análoga, 2 va a querer subir su parámetro pero sólo si $p_2 < p_1$. Además, si el tiempo es una variable discreta con paso Δt , podemos actualizar los parámetros en un tiempo Δt . Con esto en mente podemos proponer la siguiente regla:

$$\begin{aligned}
 p_j(t + \Delta t) &= \begin{cases} p_j(t)q & \text{Si } o_i(t) \leq o_j(t) \text{ y } p_j(t) \geq p_i(t) \\ p_j(t) & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \\
 p_i(t + \Delta t) &= \begin{cases} 1 - q(1 - p_i(t)) & \text{Si } o_i(t) \leq o_j(t) \text{ y } p_j(t) \geq p_i(t) \\ p_i(t) & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde q es un parámetro fijo en $(0, 1)$. Podemos interpretar este parámetro q como que tan propensos son los agentes a modificar su conducta, cuanto más chico sea q mayor será la diferencia entre el parámetro en $t + \Delta t$ y en t . En cambio, si q es cercano a 1 los agentes son más conservadores y se resisten más a modificar su estrategia por factores externos. En el límite $q = 1$, los jugadores no modifican su estrategia y la dinámica no evoluciona. Si bien hay diferencias, esta clase de interacciones son similares a las que aparecen al estudiar modelos de opinión. Para ver sobre estos modelos se puede consultar [19].

La pregunta fundamental que queremos responder es: ¿Cómo evoluciona $p_i(t)$? Para responder esta pregunta deduciremos una ecuación de transporte para la distribución de parámetros de oferta. Antes de hacer esto vamos a necesitar un lema.

Lema 4.1.1

Sean $a, b \in (0, 1)$ y dos variables aleatorias $X, Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Entonces:

$$\mathbb{P}(aX < bY) = \begin{cases} \frac{b}{2a} & \text{si } b < a \\ \frac{2b-a}{2b} & \text{si } b \geq a \end{cases} \tag{4.3}$$

Demostración. Definimos nuevas variables aleatorias $X' = aX$ e $Y' = -bY$. Es fácil ver que $X' \sim \mathcal{U}([0, a])$ ya que:

$$F_{X'}(t) = \mathbb{P}(X' \leq t) = \mathbb{P}(aX \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t/a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t/a & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } a \leq t. \end{cases} \tag{4.4}$$

Análogamente, $Y' \sim \mathcal{U}([-b, 0])$, ya que:

$$\begin{aligned} F_{Y'}(t) &= \mathbb{P}(Y' \leq t) = \mathbb{P}(-bY \leq t) = \mathbb{P}(Y \geq -t/b) = 1 - F_Y\left(-\frac{t}{b}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < -b \\ \frac{t+b}{b} & \text{si } 0 \geq t > -b \\ 1 & \text{si } 0 \leq t. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Entonces, con estas nuevas variables queremos calcular $\mathbb{P}(aX < bY) = \mathbb{P}(X' + Y' < 0)$. Vamos a calcular la densidad de probabilidad de la variable $X' + Y'$ lo que se puede hacer mediante [6]:

$$f_{X'+Y'}(t) = f_{X'} * f_{Y'}(t). \quad (4.6)$$

Escribiendo explícitamente la convolución:

$$\begin{aligned} f_{X'+Y'}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y'}(u) f_{X'}(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ab} \mathbb{1}_{[-b,0]}(u) \mathbb{1}_{[0,a]}(t-u) du \\ &= \frac{1}{ab} \int_{-b}^0 \mathbb{1}_{[0,a]}(t-u) du. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por comodidad hacemos el cambio de variable $v = t - u$ y queda:

$$\begin{aligned} f_{X'+Y'}(t) &= -\frac{1}{ab} \int_{t+b}^t \mathbb{1}_{[0,a]}(v) dv \\ &= \frac{1}{ab} |[t, t+b] \cap [0, a]|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Teniendo la densidad se puede calcular directamente la probabilidad que buscamos:

$$\mathbb{P}(X' + Y' < 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{ab} |[t, t+b] \cap [0, a]| dt. \quad (4.9)$$

Para que estos intervalos se intersequen en un conjunto de medida positiva tiene que pasar que $t+b > 0$ y $a > t$, equivalentemente, $t > -b$ y $a > t$. Como $t < 0$ la segunda condición se satisface siempre. En cambio, la primera podría no cumplirse, pero si $t < -b$, la medida del conjunto $|[t, t+b] \cap [0, a]| = 0$, por lo que podemos reducir el dominio de integración:

$$\mathbb{P}(X' + Y' < 0) = \frac{1}{ab} \int_{-b}^0 |[t, t+b] \cap [0, a]| dt.$$

Esta integral se puede calcular de manera geométrica separando en dos casos.

1. Si $b < a$: para $t = 0$ el conjunto buscado es $[0, b] \cap [0, a] = [0, b]$ y para $t = -b$ el conjunto buscado es $[-b, 0] \cap [0, a] = \emptyset$. En general, el segundo intervalo está fijo y el primero es un intervalo de longitud b con un punto inicial que varía linealmente. Gráficamente podemos pensar que el eje vertical es la variable t , el rectángulo es el intervalo $[0, a]$ evolucionado en t y el intervalo móvil se representa mediante un paralelogramo. Esto se puede ver en la Figura 4.1. Entonces la medida buscada es el triángulo que corresponde a la intersección de ambos gráficos. Por lo que $\int_{-b}^0 |[t, t+b] \cap [0, a]| dt = \frac{b^2}{2}$. Luego:

$$\mathbb{P}(X' + Y' < 0) = \frac{b^2}{2ab} = \frac{b}{2a}. \quad (4.10)$$

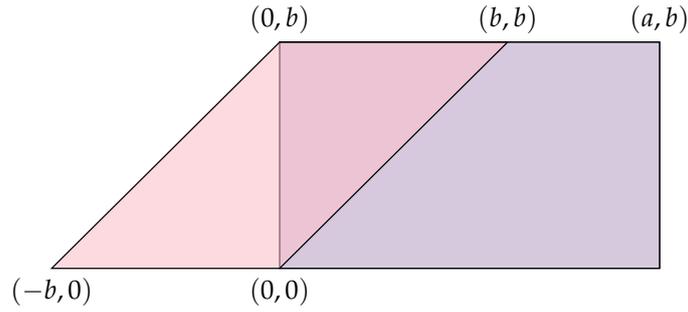


Figura 4.1: Caso $b < a$

2. Si $a \leq b$: para $t = 0$, el conjunto es $[0, b] \cap [0, a] = [0, a]$. Como antes, podemos representar a la variable t en un eje vertical, al intervalo $[0, a]$ como un rectángulo y al intervalo que depende de t con un paralelogramo, como se ve en la Figura 4.2. Por lo que el área que nos interesa es un trapecio. Notemos que en la Figura 4.2, el paralelogramo tiene ángulo de 45° por lo que el área sombreada es: $\frac{a(2b-a)}{2}$. Luego,

$$\mathbb{P}(X' + Y' < 0) = \frac{a(2b-a)}{2ab} = \frac{2b-a}{2b} = 1 - \frac{a}{2b}. \quad (4.11)$$

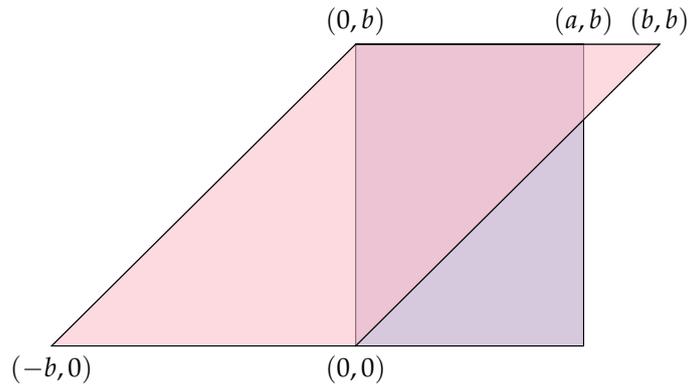


Figura 4.2: Caso $a \leq b$

Esto completa la demostración. □

4.2. Evolución discreta de los parámetros de oferta

Con este lema busquemos una ecuación para la evolución de p_i , es decir, escribamos el valor esperado de $p_i(t + \Delta t)$ a partir de $p_i(t)$. Este método es uno de los tres métodos estándar para poder escribir ecuaciones de evolución en modelos de agentes.

Fijemos un i y supongamos que la probabilidad de interactuar en un intervalo temporal Δt sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1$. Podemos entonces calcular el valor esperado de $p_i(t + \Delta t)$:

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t)\mathbb{P}(\text{no jugar}) + \sum_j p_j' \mathbb{P}(\text{jugar contra } j) \quad (4.12)$$

donde p'_i es el p_i luego de la interacción (notemos que todavía hay probabilidades involucradas en p'_i ya que este valor depende de si i perdió o ganó y si $p_i > p_j$ o no). Explícitamente, los valores de p'_i son:

1. Si $p_i \geq p_j$ e i gana:

$$p'_i = qp_i(t)\mathbb{P}(p_i(t)V_i > p_j(t)V_j). \quad (4.13)$$

2. Si $p_i > p_j$ e i pierde:

$$p'_i = p_i(t)\mathbb{P}(p_j(t)V_j > p_i(t)V_i). \quad (4.14)$$

3. Si $p_j > p_i$ e i gana:

$$p'_i = p_i(t)\mathbb{P}(p_i(t)V_i > p_j(t)V_j). \quad (4.15)$$

4. Si $p_j \leq p_i$ e i pierde:

$$p'_i = 1 - q(1 - p_i(t))\mathbb{P}(p_i(t)V_i > p_j(t)V_j). \quad (4.16)$$

Si consideramos que la probabilidad de jugar contra cada j es idéntica obtenemos que $\mathbb{P}(\text{jugar contra } j) = \frac{\Delta t}{N-1}$. Por lo que la ecuación 4.12 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} p_i(t + \Delta t) = & p_i(t)(1 - \Delta t) + \frac{\Delta t}{N-1} \left[p_i(t)q \sum_{j:p_i \geq p_j} \mathbb{P}(p_j V_j < p_i V_i) \right. \\ & + (1 - q(1 - p_i(t))) \sum_{j:p_j \geq p_i} \mathbb{P}(p_j V_j > p_i V_i) \\ & + p_i(t) \sum_{j:p_i > p_j} \mathbb{P}(p_j V_j > p_i V_i) \\ & \left. + p_i(t) \sum_{j:p_i < p_j} \mathbb{P}(p_i V_i > p_j V_j) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = & -p_i(t) + \frac{1}{N-1} \left[p_i(t)q \sum_{j:p_i \geq p_j} \mathbb{P}(p_j V_j < p_i V_i) \right. \\ & + (1 - q(1 - p_i(t))) \sum_{j:p_j \geq p_i} \mathbb{P}(p_j V_j > p_i V_i) \\ & + p_i(t) \sum_{j:p_i > p_j} \mathbb{P}(p_j V_j > p_i V_i) \\ & \left. + p_i(t) \sum_{j:p_i < p_j} \mathbb{P}(p_i V_i > p_j V_j) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando el lema 4.1.1 podemos reemplazar los valores de las probabilidades de la ecuación anterior, y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} (N-1) \frac{dp_i}{dt} = & qp_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) + (1 - (1 - p_i)q) \sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right) \\ & + p_i \sum_{j:p_i > p_j} \frac{p_j}{2p_i} + p_i \sum_{j:p_j > p_i} \frac{p_i}{2p_j} - p_i(N-1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Un punto importante a destacar de la ecuación 4.19 es que al pasar al límite estamos asumiendo que los cambios entre dos tiempos discretos no son muy abruptos. Mirando la ecuación 4.2, es fácil notar que esto sucede si y sólo si $q \approx 1$.

4.3. Equilibrio estacionario de la dinámica discreta

Nos interesará estudiar el caso estacionario, es decir, cuando $\frac{dp_i}{dt} = 0$ para todo i . Según la ecuación 4.19, queremos resolver el sistema:

$$0 = qp_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) + (1 - (1 - p_i)q) \sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right) + p_i \sum_{j:p_i > p_j} \frac{p_j}{2p_i} + p_i \sum_{j:p_j > p_i} \frac{p_i}{2p_j} - p_i(N - 1). \quad (4.20)$$

Resolver este problema de manera general es lo suficientemente difícil para que nos conformemos con buscar soluciones estacionarias y simétricas. Esperaríamos que si nuestro modelo replica una situación donde los agentes convergen al equilibrio de Nash, $p_i = \frac{1}{2}$ es una solución estacionaria. Probemos esto a modo de chequeo de consistencia.

Lema 4.3.1

La única solución simétrica y estacionaria para la dinámica 4.19 es $p_i = \frac{1}{2}$ para todo i .

Demostración. Reemplacemos en la expresión 4.20 todos los $p_i, p_j = p$. Esto hace que las últimas dos sumas se anulen, ya que suman sobre $p = p_j > p_i = p$, y queda:

$$\begin{aligned} 0 &= qp \sum_{j:j \neq i} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (1 - (1 - p)q) \sum_{j:j \neq i} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - p(N - 1). \\ &= qp \frac{N-1}{2} + (1 - q + qp) \frac{N-1}{2} - p(N - 1) \\ &= (q - 1)p(N - 1) + (1 - q) \frac{N-1}{2} \\ &= (1 - q)(N - 1) \left(\frac{1}{2} - p\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Luego, la solución simétrica tiene valor esperado $p = \frac{1}{2}$. □

Concluimos del lema 4.3.1 que la dinámica converge al equilibrio de Nash y que este equilibrio no depende de cuantos jugadores totales tengamos ni del parámetro q .

4.4. Ecuación de transporte para los parámetros de oferta a partir de la ecuación discreta

La primera forma con la que podemos derivar una ecuación diferencial para los parámetros de oferta es usando la ecuación discreta 4.19 y reescribiendo las sumatorias como integrales sobre

medidas de Dirac, como se hace en [19]. Para poder hacer esto primero tenemos que reescribir la ecuación 4.19 de manera más cómoda.

Para poder factorizar un término $1 - q$, definimos $q = 1 - \varepsilon$ y reemplazamos en la ecuación 4.19:

$$(N-1)\frac{dp_i}{dt} = (1-\varepsilon)p_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) + (1 - (1-p_i)(1-\varepsilon)) \sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right) \\ + p_i \sum_{j:p_i > p_j} \frac{p_j}{2p_i} + p_i \sum_{j:p_j > p_i} \frac{p_i}{2p_j} - p_i(N-1). \quad (4.22)$$

Notemos que $1 - (1-p_i)(1-\varepsilon) = p_i + \varepsilon(1-p_i)$. Lo que nos permite reescribir:

$$(N-1)\frac{dp_i}{dt} = (-\varepsilon)p_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) p_i \sum_{j:p_i=p_j} \frac{1}{2} + p_i \sum_{j:p_i > p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) \\ + \varepsilon(1-p_i) \sum_{j:p_i \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right) + p_i \sum_{j:p_i=p_j} \frac{1}{2} + p_i \sum_{j:p_j > p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right) \\ + p_i \sum_{j:p_i > p_j} \frac{p_j}{2p_i} + p_i \sum_{j:p_j > p_i} \frac{p_i}{2p_j} - p_i(N-1) \\ = (-\varepsilon)p_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) + \varepsilon(1-p_i) \sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right). \quad (4.23)$$

Si reescalamos la variable temporal podemos absorber las constantes ε y $N-1$. De esta manera, se obtiene:

$$\frac{dp_i}{dt} = -p_i \sum_{j:p_i \geq p_j} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) + (1-p_i) \sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_i}{2p_j}\right). \quad (4.24)$$

Para poder pasar a una ecuación diferencial, definimos la distribución de los parámetros de oferta de la misma manera que en [19]:

$$f(p, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{p_i(t)}(p). \quad (4.25)$$

Es decir, ponemos una delta en cada parámetro que corresponda a un jugador y normalizamos de manera que f sea una medida de probabilidad.

Si tomamos una función test $\varphi \in C_0^\infty$ se cumple que:

$$\int \varphi(p) df(p, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int \varphi(p) d\delta(p - p_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(p_i(t)). \quad (4.26)$$

Derivando los extremos de la expresión respecto de t :

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(p) df(p, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d\varphi}{dp}(p_i(t)) \frac{dp_i}{dt}(t) \\ = \frac{1}{N} \int \frac{d\varphi}{dp}(p) \frac{dp}{dt}(t) df(p, t). \quad (4.27)$$

Nos gustaría poder reemplazar la ecuación 4.19 en $\frac{dp}{dt}$, pero para que sea válido debemos reescribir 4.19 usando la medida $f(p, t)$. Notemos que:

$$\sum_{j:p_j \geq p_i} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) = N \int \mathbb{1}_{\{p_j \geq p_i\}} \left(1 - \frac{p_j}{2p_i}\right) df(p_j, t). \quad (4.28)$$

De manera análoga, podemos convertir las sumatorias restantes en integrales y obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(p) df(p, t) = - \int \frac{d\varphi}{dp}(p) H(p, t) df(p, t) \quad (4.29)$$

donde definimos $H(p, t)$ como:

$$H(p, t) = p \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p'\}} \left(1 - \frac{p'}{2p}\right) - (1 - p) \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p'}\right). \quad (4.30)$$

Finalmente, podemos integrar por partes la ecuación 4.29 y obtenemos la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(p, t) = \frac{\partial}{\partial p} [H(p, t) f(p, t)] \quad (4.31)$$

4.5. Ecuación de transporte para los parámetros de oferta: Método de Ganancia y Perdida

Si bien ya tenemos la ecuación de transporte, en esta sección volveremos a obtener la ecuación 4.31 calculando las funciones de pérdida y ganancia. La idea consiste en calcular la probabilidad de que luego de la interacción un agente cambie su parámetro a p o que partiendo de que tiene parámetro p lo modifique.

Consideremos la medida $f(p, t)$ que representa la distribución de probabilidad de los parámetros de oferta en cada tiempo. Es decir, la probabilidad de encontrar un jugador con parámetro $p + dp$ en el tiempo t . Al ser una distribución de probabilidad, para cada tiempo fijo vale que:

$$\int_0^1 df(p, t) = 1, \quad (4.32)$$

donde la integral es sobre los valores de p . Vamos a definir funciones de ganancia, $G(p, t)$ y pérdida, $P(p, t)$. Estas funciones representan la probabilidad de que un jugador con parámetro p' modifique su parámetro a p y la probabilidad de que un jugador con parámetro p modifique su parámetro a otro valor respectivamente.

Definición 4.5.1

Definimos la función de ganancia:

$$G(p, t) = \mathbb{P}(\text{un jugador con } p' \text{ interactúa y cambia su valor a } p \text{ en el tiempo } t) \quad (4.33)$$

y la función de pérdida:

$$P(p, t) = \mathbb{P}(\text{un jugador con } p \text{ interactúa y cambia su valor a } p' \neq p \text{ en el tiempo } t). \quad (4.34)$$

Calculemos ambas funciones. Empezamos por la función de ganancia. Fijamos p y t . Elegimos un jugador con p' con probabilidad $f(p', t)$ y queremos que luego de la interacción $p' \rightarrow p$. Como las únicas formas de modificar el parámetro de oferta es cambiando $p' \rightarrow qp'$ o $p' \rightarrow 1 - q(1 - p')$ necesitamos elegir p' de manera que alguna de estas dos expresiones sea p . Entonces,

$$G(p, t) = \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=q p'\}} \mathbb{P}(p' \text{ interactue con un } p'', p' \geq p'' \text{ y el jugador con } p' \text{ gane}) + \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=1-q(1-p')\}} \mathbb{P}(p' \text{ interactue con un } p'' \text{ y } p'' \geq p' \text{ y el jugador con } p'' \text{ gane}). \quad (4.35)$$

Para calcular estas probabilidades podemos condicionar. Llamemos $A = \{p' \text{ interactue con un } p''\}$, $B = \{p' \geq p''\}$ y $C = \{\text{el jugador con } p' \text{ gane}\}$. Entonces,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C | A) \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C | B \cap A) \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A). \quad (4.36)$$

La probabilidad de elegir un jugador con p'' es $f(p'', t)$. Por otro lado,

$$\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{1}_{\{p' \geq p\}} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(C | B \cap A) = 1 - \frac{p''}{2p'} \quad (4.37)$$

donde para la segunda expresión usamos el lema 4.1.1.

Juntando todo:

$$\mathbb{P}(\text{elegir } p'', p' \geq p'' \text{ y el jugador con } p' \text{ gane}) = \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right). \quad (4.38)$$

Análogamente, se deduce que:

$$\mathbb{P}(\text{elegir } p'' \text{ y } p'' \geq p' \text{ y el jugador con } p'' \text{ gane}) = \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right). \quad (4.39)$$

Reemplazando 4.38 y 4.39 en la expresión 4.35 se obtiene:

$$G(p, t) = \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=q p'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) + \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=1-q(1-p')\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right). \quad (4.40)$$

De manera análoga, calculamos la función de perdida. Primero, debemos multiplicar por la probabilidad de encontrar un jugador con parámetro p y luego, debemos agregar la probabilidad de que la interacción derive en una modificación del parámetro de oferta. Entonces,

$$P(p, t) = f(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) + f(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \quad (4.41)$$

de manera completamente análoga.

Usando estas funciones podemos definir la variación de f :

$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = G(p, t) - P(p, t). \quad (4.42)$$

Una forma de entender esta expresión es pensar que la función de ganancia son los jugadores que entran a p en dt (es decir, dt es el tiempo característico en el que transcurre la interacción de interacción) y la función de perdida son los jugadores que salen en dt . Luego,

$$f(p, t + dt) - f(p, t) = G(p, t)dt - P(p, t)dt. \quad (4.43)$$

Tomando límite se obtiene la expresión 4.42.

Para conseguir una ecuación de transporte, multiplicamos la ecuación 4.42 por una función test $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$ e integramos respecto a p :

$$\int dp \varphi(p) \frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = \int dp \varphi(p) (G(p, t) - P(p, t)). \quad (4.44)$$

Notemos que como φ no depende de t y la integral es sobre p , podemos sacar la derivada temporal de la integral, por lo que:

$$\frac{d}{dt} \int df(p, t) \varphi(p) = \int dp \varphi(p) (G(p, t) - P(p, t)). \quad (4.45)$$

Necesitamos reescribir el término derecho para que aparezca una derivada respecto de p y de esta manera integrar por partes y obtener una ecuación de transporte. Llamemos:

$$A = \int dp \varphi(p) \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=qp'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \quad (4.46)$$

$$B = \int dp \varphi(p) \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=1-q(1-p')\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p'}{2p''}\right) \quad (4.47)$$

$$C = \int df(p, t) \varphi(p) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \quad (4.48)$$

$$D = \int df(p, t) \varphi(p) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \quad (4.49)$$

De esta manera,

$$\frac{d}{dt} \int df(p, t) \varphi(p) = A + B - C - D. \quad (4.50)$$

Estudiaremos por separado $A - C$ y $B - D$. Primero notemos que podemos reescribir A de manera conveniente cambiando el orden de integración de p y p' para cada t fijo. Para ver esto denotamos:

$$F(p, p') = \varphi(p) f(p', t) \mathbb{1}_{\{p=qp'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right). \quad (4.51)$$

Usando que la distribución es positiva, podemos acotar:

$$|F(p, p')| \leq |\varphi(p)| f(p', t) \mathbb{1}_{\{p=qp'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left|1 - \frac{p''}{2p'}\right| \quad (4.52)$$

Como φ es de soporte compacto, esta acotada por una constante $C > 0$. Además, en el dominio $\{p' \geq p''\}$ vale que:

$$\left|1 - \frac{p''}{2p'}\right| \leq 1. \quad (4.53)$$

Luego,

$$|F(p, p')| \leq C f(p', t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \leq C f(p', t) \int df(p'', t) = C f(p', t). \quad (4.54)$$

Finalmente,

$$\int dp \int dp' |F(p, p')| \leq \int dp \int dp' C f(p', t) = C. \quad (4.55)$$

Luego, vale el teorema de Fubini y podemos reescribir A como:

$$\begin{aligned}
 A &= \int dp \varphi(p) \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=q p'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \\
 &= \int dp' \int dp \varphi(p) f(p', t) \mathbb{1}_{\{p=q p'\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \\
 &= \int dp' \varphi(q p') f(p', t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p' \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \\
 &= \int dp \varphi(q p) f(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right).
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

En el último paso cambiamos la variable de integración $p' \rightarrow p$ por comodidad.

Para que aparezca la derivada de φ vamos a usar un desarrollo de Taylor en $q = 1$ por lo que nos conviene agrupar las integrales con iguales dominios de integración. Miramos $A - C$:

$$\begin{aligned}
 A - C &= \int df(p, t) \varphi(q p) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\
 &\quad - \int df(p, t) \varphi(p) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) (\varphi(q p) - \varphi(p)).
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Podemos hacer un desarrollo de Taylor en φ :

$$\varphi(q p) - \varphi(p) = \frac{d\varphi}{dp}(p)(q - 1)p + \mathcal{O}((q - 1)^2). \tag{4.58}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
 A - C &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \left(\frac{d\varphi}{dp}(p)(q - 1)p + \mathcal{O}(p^2(q - 1)^2)\right) \\
 &\approx - \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)p,
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

donde en el último paso absorbimos $1 - q$ mediante un reescale temporal.

De manera análoga, podemos cambiar el orden de integración en B :

$$\begin{aligned}
 B &= \int dp \varphi(p) \int df(p', t) \mathbb{1}_{\{p=1-q(1-p')\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \\
 &= \int dp' \int dp \varphi(p) f(p', t) \mathbb{1}_{\{p=1-q(1-p')\}} \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right) \\
 &= \int df(p', t) \varphi(1 - q(1 - p')) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p'\}} \left(1 - \frac{p''}{2p'}\right).
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Luego, miramos $B - D$ y hacemos un desarrollo de Taylor en $q = 1$:

$$\begin{aligned}
 B - D &= \int df(p, t) \varphi(1 - q(1 - p)) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p''}\right) \\
 &\quad - \int df(p, t) \varphi(p) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p''}\right) \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p''}\right) (\varphi(1 - q(1 - p)) - \varphi(p)) \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p''}\right) \\
 &\quad \times \left(\frac{d\varphi}{dp}(p)(1 - q(1 - p) - p) + \mathcal{O}((1 - q)^2(1 - p)^2)\right) \\
 &\approx \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p''}{2p''}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)(1 - p),
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

donde usamos que $(1 - q)(1 - p) = 1 - q(1 - p) - p$. Y además, absorbemos el factor $1 - q$ en la variable temporal mediante un cambio de escala. Juntando ambas expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi(p) df(p, t) &= - \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p) p \\ &\quad + \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p) (1 - p). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Llamando:

$$\begin{aligned} H(p, t) &= \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} (1 - q) p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\ &\quad - \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1 - p), \end{aligned} \quad (4.63)$$

podemos escribir la expresión 4.62 como:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(p) df(p, t) = - \int df(p, t) H(p, t) \frac{d\varphi}{dp}(p) \quad (4.64)$$

Finalmente podemos integrar por partes y obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.5.2: Ecuación de transporte para el modelo propuesto

Para el modelo propuesto, se obtiene la ecuación de transporte:

$$\frac{df(p, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial p} (H(p, t) f(p, t)), \quad (4.65)$$

donde

$$\begin{aligned} H(p, t) &= \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\ &\quad - \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1 - p). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Podemos ver que obtuvimos la misma ecuación de transporte que en la sección 4.4, lo cual nos da una forma de chequear que nuestros argumentos son correctos.

4.6. Grazing limit

Una objeción que se podría hacer sobre esta deducción es que al tirar los términos $\mathcal{O}((1 - q)^2)$ estamos tomando un límite y deberíamos probar que las soluciones de ecuación para cada q pasan bien al límite. Notemos que aunque estuvimos diciendo que f depende de p y t esto vale solamente cuando tomamos un q fijo, ya que q es un parámetro y no una variable. Sin embargo, al tomar el límite cuando $q \rightarrow 1$, q deja de ser un parámetro y pasa a ser una variable. Es razonable entonces decir que f depende de q , y debemos escribir $f(q, p, t)$. Y por lo tanto al tomar $q \rightarrow 1$ debemos tomar el límite sobre las f . En efecto, en [14] se realiza este límite con cuidado y vamos a adaptar las ideas de [14] para nuestro modelo. Entonces, en esta sección nuestro objetivo será probar que cuando $q \rightarrow 1$, entonces existe una subsucesión tal que $f(q, p, t) \rightarrow f(p, t)$, donde denotamos $f(p, t)$ a la función límite cuando $q \rightarrow 1$. Para eso necesitamos algunos lemas:

Lema 4.6.1

Consideremos el problema dado por la ecuación 4.65. Existe una subsucesión $\{q_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ con $q_l \rightarrow 1$, tal que para toda función test $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$, vale que:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi df(q_l, p, t) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi df(p, t). \quad (4.67)$$

Demostración. Tomemos $T > 0$ y una función test $\varphi \in C_c([0, 1])$. Partimos de la expresión:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(q, p, t). \quad (4.68)$$

Y podemos integrarla entre 0 y T :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(q, p, t) = \int_0^1 \varphi df(q, p, T) - \int_0^1 \varphi df(q, p, 0) = \int_0^1 \varphi df(q, p, T) - \int_0^1 \varphi df_0(p)$$

donde notamos $f(q, p, 0) = f_0(p)$ a la condición inicial (que es independiente de q). Ahora, notemos que el espacio en el que definimos las medidas de probabilidad es $[0, 1]$ por lo que estamos en las hipótesis del Teorema de Prokhorov (Teorema 2.2.3). Además, $\varphi \in C_c^\infty([0, 1]) \subset C_b([0, 1])$, por lo que (vía subsucesiones):

$$\int_0^1 \varphi df(q, p, T) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \int_0^1 \varphi df(p, T).$$

No escribiremos el subíndice para no recargar la notación pero entendemos que la convergencia es secuencial. Luego,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(q, p, t) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \int_0^1 \varphi(p) df(p, T) - \int_0^1 \varphi(p) df_0(p) = \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(p, t)$$

Vimos entonces que para todo T fijo en $[0, T^*]$ hay una subsucesión convergente. Para completar el argumento tomamos un denso numerable $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en $[0, T]$ (por ejemplo los racionales en ese intervalo). Para cada t_i fijo existe una subsucesión convergente y podemos hacer un argumento diagonal para concluir: es decir, tomamos el primer elemento de la subsucesión convergente de t_1 , el segundo de la de t_2 y así sucesivamente. Obtenemos una sucesión convergente para todo t_i .

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(q, p, t) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi(p) df(p, t).$$

Esto completa el lema. □

Lema 4.6.2

Consideremos el problema dado por la ecuación 4.65. Entonces:

$$\int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \mathcal{O}((q-1)) \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0. \quad (4.69)$$

Demostración. Notemos que existe $C > 0$ tal que:

$$\mathcal{O}(p^2(q-1)) \leq C(q-1) \quad (4.70)$$

Entonces,

$$\left| \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \mathcal{O}(p^2(q-1)) \right| \leq \left| \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \right| C|q-1| \leq \frac{C}{2}|q-1| \quad (4.71)$$

donde la segunda desigualdad se cumple ya que

$$p \geq p'' \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{p''}{2p} \Leftrightarrow 1 - \frac{p''}{2p} \geq \frac{1}{2} \quad (4.72)$$

Notemos,

$$I_1 = \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \mathcal{O}(p^2(q-1)) \quad (4.73)$$

Entonces acotamos el módulo de la integral:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \left| \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \mathcal{O}(p^2(q-1)) \right| \\ &\leq \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \frac{C|q-1|}{2} \\ &\leq \frac{C|q-1|}{2}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Usamos que $\int df(q, p, t) = 1$ por ser f una medida de probabilidad. Finalmente, sea $\varepsilon > 0$, luego, si $|q-1| < \frac{2}{C}\varepsilon$, tenemos que:

$$|I_1| \leq \frac{C|q-1|}{2} < \varepsilon, \quad (4.75)$$

y por lo tanto,

$$I_1 \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0, \quad (4.76)$$

que completa la demostración. \square

Lema 4.6.3

Consideremos el problema dado por la ecuación 4.65. Tenemos:

$$\int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \mathcal{O}((1-p)^2(q-1)) \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0. \quad (4.77)$$

Demostración. La demostración es análoga a la del lema 4.6.2. Partimos de

$$\int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \mathcal{O}((1-p)^2(q-1))$$

y sea $C(p)$ la constante que acota al término $\mathcal{O}(q-1)$. El integrando se puede acotar de la misma manera que antes por:

$$\left| \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \mathcal{O}((1-p)^2(q-1)) \right| \leq C \left| \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \right| \leq \frac{C|q-1|}{2}, \quad (4.78)$$

por lo que podemos acotar la integral:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \left| \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \mathcal{O}((1-p)^2(q-1)) \right| \\ &\leq \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \frac{C|q-1|}{2}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

así, llegamos a la misma cota que en 2 y el mismo argumento nos dice que

$$I_2 \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0. \quad (4.80)$$

\square

Lema 4.6.4

Consideremos el problema dado por la ecuación 4.65. Las medidas $f(q, p, t)$ convergen débilmente vía subsucesiones en los términos A – C. Es decir, para toda $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$ vale que:

$$\begin{aligned} & \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)p \\ & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)p. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Análogamente, las medidas $f(q, p, t)$ convergen débilmente vía subsucesiones en los términos B – D. Es decir, para toda $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$ vale que:

$$\begin{aligned} & \int df(q, p, t) \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)(1-p) \\ & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \frac{d\varphi}{dp}(p)(1-p). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Demostración. Sea $T > 0$ y f_0 la condición inicial de la dinámica. Para cada q fijo, denotamos $\alpha_q(t) = f(q, -, t)$ que cumple: $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{P}([0, 1])$, es decir, que α devuelve la medida de probabilidad asociada a la medida que se obtiene en el tiempo t , dado que usamos el parámetro q y nuestra condición inicial es f_0 . Consideramos la familia de funciones $\{\alpha_q\}_{q \in [0, 1]}$. El plan es usar el teorema de Arzelá-Ascoli en esta familia, ya que el espacio de salida es compacto y el de llegada es métrico, usando las mismas ideas que en [14]. Veamos que valen las hipótesis para poder aplicar el teorema. La norma que usaremos en el espacio de funciones $C_c^\infty([0, 1])$ es:

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty + \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_\infty. \quad (4.83)$$

Equiacotada: Quedemos ver que hay una cota independiente del tiempo para cualquier medida:

$$\begin{aligned} \|\alpha_q(t)\| &= \sup_{\varphi \in C_c^\infty([0, 1]), \|\varphi\| \leq 1} \int_0^1 \varphi d\alpha_q(t) \\ &\leq \sup_{\varphi \in C_c^\infty([0, 1]), \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\|_\infty \int_0^1 d\alpha_q(t) \\ &= \sup_{\varphi \in C_c^\infty([0, 1]), \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\|_\infty \leq 1 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Equicontinua: Tenemos la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi df(p, t) = \int H(p, t) \frac{d\varphi}{dp} df(p, t). \quad (4.85)$$

Sean $0 < T' < T$ y podemos integrar a ambos lados:

$$\int \varphi df(p, T) - \int \varphi df(p, T') = \int_{T'}^T \int H(p, t) \frac{d\varphi}{dp} df(p, t) dt. \quad (4.86)$$

Acotemos esta expresión:

$$\begin{aligned}
 \left| \int \varphi df(q, p, T) - \int \varphi df(q, p, T') \right| &\leq \int_{T'}^T \int |H(q, p, t) \frac{d\varphi}{dp} df(q, p, t)| dt \\
 &\leq \int_{T'}^T dt \int df(q, p, t) \left| \frac{d\varphi}{dp} \right| \left[df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \int df(q, p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''} \right) \right] (1 - p) \\
 &\leq \int_{T'}^T \int df(q, p, t) \left| \frac{d\varphi}{dp} \right| \\
 &\leq \|\varphi\| |T - T'|.
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Usando esta cota podemos tomar supremo:

$$\left| \int \varphi d(f(q, p, T) - f(q, p, T')) \right| \leq \sup_{\varphi \in C^\infty, \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| |T - T'| \leq |T - T'| \tag{4.88}$$

Entonces, estamos en las hipótesis de Arzelá-Ascoli y por lo tanto la familia tiene una subsucesión que converge de manera débil y por lo tanto probamos que la ecuación de transporte 2.15 pasa bien al límite. \square

Proposición 4.6.5

Consideremos el problema dado por la ecuación 4.65. Entonces, existe una subsucesión de funciones $\{f(q_j, p, t)\}_{j \geq 1}$ que converge débilmente a una medida de probabilidad $f(p, t)$ cuando $q \rightarrow 1$.

Demostración. Con los lemas 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 y 4.6.4, podemos ver que las ecuaciones 4.59 y 4.61 pasan bien al límite. \square

4.7. Soluciones estacionarias de la ecuación de transporte

Nos interesa resolver la ecuación 4.65 para tiempos largos, es decir, queremos saber cuál es la dinámica para $t \rightarrow \infty$. Vamos a definir los momentos de la medida.

Definición 4.7.1: Momento de orden k [18]

Notamos al momento de orden k de la medida $f(p, t)$:

$$M_k(t) = \int p^k df(p, t) \tag{4.89}$$

Siguiendo la idea de [18] vamos a construir ecuaciones diferenciales ordinarias para los momentos de $f(p, t)$. Y a partir de ellas deduciremos propiedades sobre las soluciones de 4.65.

Proposición 4.7.2

Para la ecuación 4.65, vale que:

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) [1 - p - p'']. \quad (4.90)$$

Más aún, la única solución estacionaria de la forma $f(p, t) = \delta_\alpha(p)$ es $\alpha = \frac{1}{2}$.

Demostración. Notemos que la ecuación de transporte cumple que para toda función test $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(p) df(p, t) = - \int df(p, t) H(p, t) \frac{d\varphi}{dp}(p). \quad (4.91)$$

En particular, podemos tomar $\varphi(p) = p$:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} &= - \int df(p, t) H(p, t) \\ &= - \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\ &\quad + \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1 - p) \\ &= - \int df(p'', t) \int df(p, t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} p'' \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \\ &\quad + \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1 - p), \end{aligned} \quad (4.92)$$

donde en la última igualdad cambiamos los nombres de $p'' \leftrightarrow p$ en la primera integral. Además, como el integrando del primer término está acotado y es integrable, podemos por la misma cota que antes cambiar el orden de integración por el teorema de Fubini. Por lo que la ecuación diferencial toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} &= - \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} p'' \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) \\ &\quad + \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1 - p) \\ &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) [1 - p - p'']. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Lo que prueba la primera expresión.

Supongamos que $f(p, t) = \delta_\alpha(p)$. En este caso, f es estacionaria por lo que $\frac{dM_1(t)}{dt} = 0$ y se pueden calcular de manera explícita las integrales, de las cuales obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2}(1 - 2\alpha) \quad (4.94)$$

Esto nos dice que $1 - 2\alpha = 0$. Entonces, $\alpha = \frac{1}{2}$. Lo que prueba el enunciado. \square

Obtuvimos hasta acá que $\delta_{1/2}$ es la única solución estacionaria en el conjunto de distribuciones delta de la ecuación diferencial para el primer momento. Por lo cuál, es un candidato a solución del problema 4.5.2. Es razonable que esta medida sea solución ya que el modelo debería converger al equilibrio de Nash, que al pensar la estrategia del jugador i como un sumando δ_{p_i} obtenemos

que la medida $f(p) = \delta_{1/2}$. Por otro lado, con esta interpretación podemos pensar que los equilibrios de Nash simétricos corresponden a δ_α para algún α . Por lo que tiene sentido preguntarnos cuales son las soluciones estacionarias en el conjunto de δ_α .

Proposición 4.7.3

La única solución del problema 4.5.2 de la forma $f(p) = \delta_\alpha(p)$ cumple $\alpha = \frac{1}{2}$.

Demostración. La unicidad se sigue de la proposición anterior, ya que vimos que la única δ_α que cumple 4.90 es $\delta_{\frac{1}{2}}(p)$, por lo que es el único candidato a solución. Para ver que es solución debe cumplirse que para toda $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int d\delta_{\frac{1}{2}} = - \int d\delta_{\frac{1}{2}}(p) \frac{d\varphi}{dp}(p) \left[\int d\delta_{\frac{1}{2}}(p'') \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \right. \\ &\quad \left. - \int d\delta_{\frac{1}{2}}(p'') \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1-p) \right] \\ &= - \frac{d\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}{dp} \frac{1}{4} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{1}{4} = 0. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Por lo que vale el enunciado. □

Ahora que tenemos un candidato, vamos a probar que es el único. Para eso vamos a estudiar momentos de orden mayor. Para estos vale un resultado similar al que obtuvimos para M_1 .

Proposición 4.7.4

Para la ecuación 4.65, vale que:

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) k[p''^{k-1} - p^k - p''^k]. \quad (4.96)$$

Demostración. La demostración es análoga a la de 4.7.2:

Partimos de la expresión 4.64 usando como función test $\varphi(p) = p^k$

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \int p^k df(p, t) = - \int df(p, t) H(p, t) k p^{k-1} \\ &= - \int df(p, t) k p^{k-1} \left[\int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \right. \\ &\quad \left. - \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1-p) \right]. \\ &= - \int df(p, t) \int df(p'', t) k p^{k-1} \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} p \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) \\ &\quad + \int df(p, t) \int df(p'', t) k p^{k-1} \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (1-p). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Notemos que el segundo sumando se puede reescribir, cambiando $p \leftrightarrow p''$ e intercambiando el orden de integración, como:

$$\begin{aligned}
 & \int df(p, t) \int df(p'', t) k \mathbb{1}_{\{p'' \geq p\}} \left(1 - \frac{p}{2p''}\right) (p^{k-1} - p^k) \\
 &= \int df(p'', t) \int df(p, t) k \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) (p''^{k-1} - p''^k) \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) k \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) (p''^{k-1} - p''^k).
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Entonces,

$$\frac{dM_k}{dt} = \int df(p, t) \int df(p'', t) k \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) (p''^{k-1} - p''^k - p^k). \tag{4.99}$$

□

Proposición 4.7.5

La única solución estacionaria de la ecuación 4.65 es $f(p, t) = \delta_{1/2}(p)$

Demostración. Ya vimos que $f(p, t) = \delta_{1/2}(p)$ es solución. Veamos la unicidad.

Notemos que usando 4.7.4 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dM_2}{dt} - \frac{dM_1}{dt} \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) [2p'' - 2p^2 - 2p''^2 - 1 + p + p''] \\
 &= \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) [3p'' + p - 2p^2 - 2p''^2 - 1].
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Sea $g(x, y) = 3x + y - 2x^2 - 2y^2 - 1$. Afirmamos que $g(x, y) \leq 0$ en $A = \{y \geq x\}$. Usando Mathematica para reescribir la ecuación, se puede ver que el conjunto de nivel 0 se escribe como:

$$\mathcal{C} = \{g(x, y) = 0\} = \left\{ \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \right\}. \tag{4.101}$$

Este conjunto es una circunferencia con centro en $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \notin A$. Veamos que $\mathcal{C} \subset A^c$. Esto equivale a ver que $\{x = y\} \cap \mathcal{C}$ tiene a lo sumo un punto.

Notemos que:

$$g(x, x) = 4x - 4x^2 + 1 = 4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \tag{4.102}$$

tiene como única solución $x = \frac{1}{2}$. Luego, g no cambia de signo en \mathcal{C} . Basta evaluar en algún punto para concluir que $g(A) \leq 0$ con igualdad solamente en $x = y = \frac{1}{2}$.

Probemos que la única opción es que $f(p) = \delta_{1/2}(p)$. Como queremos soluciones estacionarias, estamos buscando $f(p)$ que verifiquen:

$$0 = \int df(p, t) \int df(p'', t) \mathbb{1}_{\{p \geq p''\}} h(p'', p), \tag{4.103}$$

donde llamamos

$$h(p'', p) = \left(1 - \frac{p''}{2p}\right) g(p'', p). \tag{4.104}$$

Intuitivamente, en el triángulo $\{p \geq p''\}$ el integrando es estrictamente negativo salvo en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, por lo que si la integral es nula entonces, sólo puede haber masa en $p = \frac{1}{2}$. Además, como la medida producto en el cuadrado es simétrica entonces esto nos dice que la masa de f se concentra en $\frac{1}{2}$. \square

Simulaciones

Una forma de estudiar el modelo de agentes descrito en el capítulo 4 es mediante simulaciones numéricas. En este capítulo nos dedicaremos a esto. En la sección 5.1 definiremos brevemente el concepto de riqueza, ya que aparecerá en las simulaciones. En la sección 5.2 describiremos el algoritmo mediante el cual se realizaron las simulaciones y en las secciones subsiguientes nos concentraremos en estudiar los resultados de las simulaciones a tiempos largos y variando distintos parámetros.

5.1. Riqueza

Al participar en repetidas subastas los jugadores obtienen pérdidas y ganancias. En todo lo anterior asumimos que los jugadores siempre tenían dinero para poder ofertar lo que quisieran y pagar lo que quisieran. Aunque existen casos en los que podemos suponer que todos los jugadores tienen un presupuesto suficientemente grande para hacer esto, no es difícil pensar en casos donde esto no suceda.

En este punto es donde entra en juego la riqueza de los agentes. Podemos pensar en la riqueza como la función que nos dice la cantidad de dinero que tiene cada agente. Esta función depende del tiempo, ya que luego de cada subasta se actualiza la riqueza según si el jugador gana o perdió.

Además de la riqueza de cada jugador, tiene interés conocer la *distribución de riqueza* ω que se puede modelar como una distribución de probabilidad en $[0, +\infty)$ y que nos da la densidad de jugadores con riqueza entre x y $x + dx$.

Las distribuciones de riqueza están muy estudiadas en la literatura. En [1] se puede ver una introducción más completa al tema de la que se presenta en este trabajo.

5.2. Algoritmo

Para implementar el juego debemos tener dos vectores que guarden la riqueza y el parámetro de oferta de los jugadores. Y en cada iteración realizamos N subastas eligiendo los jugadores con la siguiente metodología: se arma un vector con los números del 0 al $N - 1$ donde cada valor

representa un jugador. Este se ordena aleatoriamente y luego, participan en la $i + 1$ -ésima subasta el jugador en la posición i del vector y el jugador i . Por ejemplo: si $N = 5$ y se sortea el vector a_1 :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, las subastas van a ser entre los jugadores 3 y 0, 0 y 1, 2 y 2, 4 y 3 y 1 y 4. Es razonable hacer esto, ya que podemos suponer que en N iteraciones es poco probable que algún agente no juegue.

Una vez determinados los juegos se sortean las variables aleatorias involucradas y se actualizan los parámetros de oferta y la riqueza de cada jugador según las reglas 4.2. Este proceso se itera T veces, por lo que en total hay NT subastas. Además, al final de cada iteración se normaliza la riqueza a 1 de manera que lo que tengamos sea la distribución de riqueza.

El algoritmo se implementó en Python y el Algoritmo 1 muestra el pseudocódigo del programa. Los parámetros que controlamos son el valor de q , las condiciones iniciales del parámetro de oferta, N , y T , que se especifican al inicio del código.

Algoritmo 1 Evolución de los parámetros de oferta y la riqueza para N jugadores en la subasta de 2 jugadores

```

1: riqueza = vector de 1 de longitud N                                ▷ Inicialización
2: oferta = Condición inicial
3: juegos = vector con valores del 1 al N
4: for  $k \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$  do                                ▷ Itero  $T$  veces el algoritmo
5:   Reordeno juegos aleatoriamente
6:   for  $i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  do                                ▷ Subasta entre  $i$  y juegos[ $i$ ]
7:      $v_x$  = sorteo la valuación de  $i$ 
8:      $v_y$  = sorteo la valuación de juegos[ $i$ ]
9:      $x = v_x * oferta[i]$ 
10:     $y = v_y * oferta[juegos[i]]$ 
11:    if  $x \geq y$  then                                             ▷ Busco quién gana y actualizo acordemente
12:       $riqueza[i] = riqueza[i] + v_x - x$ 
13:       $riqueza[juegos[i]] = riqueza[juegos[i]]$ 
14:      if  $oferta[i] \geq oferta[juegos[i]]$  then
15:         $oferta[i] = oferta[i] * q$ 
16:         $oferta[juegos[i]] = 1 - (1 - oferta[juegos[i]]) * q$ 
17:      end if
18:    else
19:       $riqueza[juegos[i]] = riqueza[juegos[i]] + v_y - y$ 
20:       $riqueza[i] = riqueza[i]$ 
21:      if  $oferta[i] \leq oferta[juegos[i]]$  then
22:         $oferta[juegos[i]] = oferta[juegos[i]] * q$ 
23:         $oferta[i] = 1 - (1 - oferta[i]) * q$ 
24:      end if
25:    end if
26:  end for
27:  Normalizo la riqueza
28: end for

```

La salida del programa son los vectores de riqueza y parámetro de oferta. Para visualizar mejor estos datos en general vamos a armar histogramas para estos valores. En la Figura 5.1 se muestran los histogramas que se produjeron para para $N = 10000$, $T = 1000$ y $q = 0,9$.

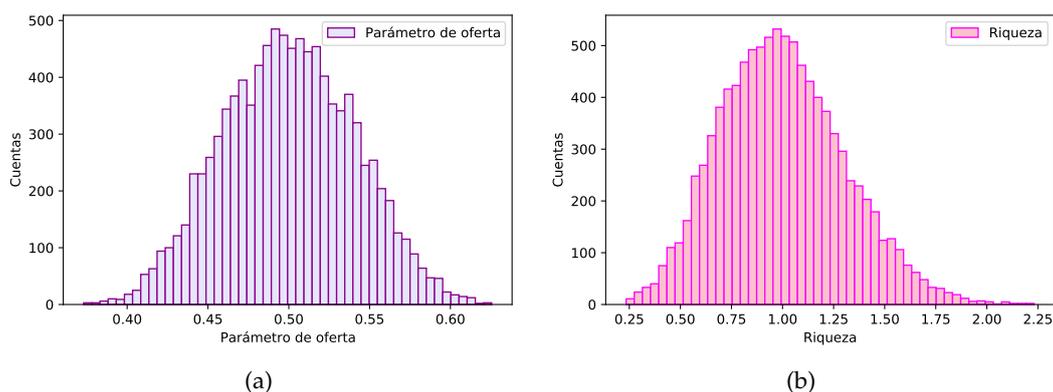


Figura 5.1: (a) Histograma para el parámetro de oferta. (b) Histograma para la riqueza.

En la Figura 5.1a, se puede observar que la distribución se concentra cerca de 0,5 y tiene una varianza pequeña ($\approx 0,17$).

En lo que sigue de este capítulo estudiaremos los resultados de las simulaciones e intentaremos inferir propiedades sobre nuestro modelo. En general, trabajaremos con cuatro condiciones iniciales:

C1 Todos los jugadores comienzan con $p_i(0) = 0,99$.

C2 Todos los jugadores comienzan con $p_i(0) = 0,1$.

C3 Los valores iniciales de $p_i(0)$ se sortean de una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

C4 La mitad de los jugadores empiezan con 0,1 y la mitad restante con 0,99.

Notar que en realidad la condición C3, permite que haya jugadores dispuestos a apostar más de su valuación y otros que no están dispuestos a pagar nada por el bien.

Además, salvo que se indique lo contrario se utilizará $q = 0,9$

5.3. Primeros resultados

En esta sección realizaremos algunas pruebas preliminares sobre el comportamiento del algoritmo a modo de chequear que el modelo propuesto replica el comportamiento esperado. Primero veremos que sin importar la condición inicial el equilibrio parece ser el mismo en todos los casos y su media coincide con el equilibrio de Nash, para ver esto realizamos las simulaciones con las cuatro condiciones iniciales (C1 a C4). En las Figuras 5.2a, 5.2b, 5.2c y 5.2d se muestran las distribuciones de los parámetros de oferta a lo largo de 50 iteraciones (empezando con la condición inicial) con las condiciones iniciales C1, C2, C3 y C4 respectivamente. Todas las simulaciones se realizaron usando $N = 10000$ y $T = 50$.

En las cuatro simulaciones se puede observar que la dinámica evoluciona acercándose cada vez más a la distribución de equilibrio. En algún sentido se podría decir que la distribución se contrae con las iteraciones y que se mueve horizontalmente hasta que su media está aproximadamente en 0,5.

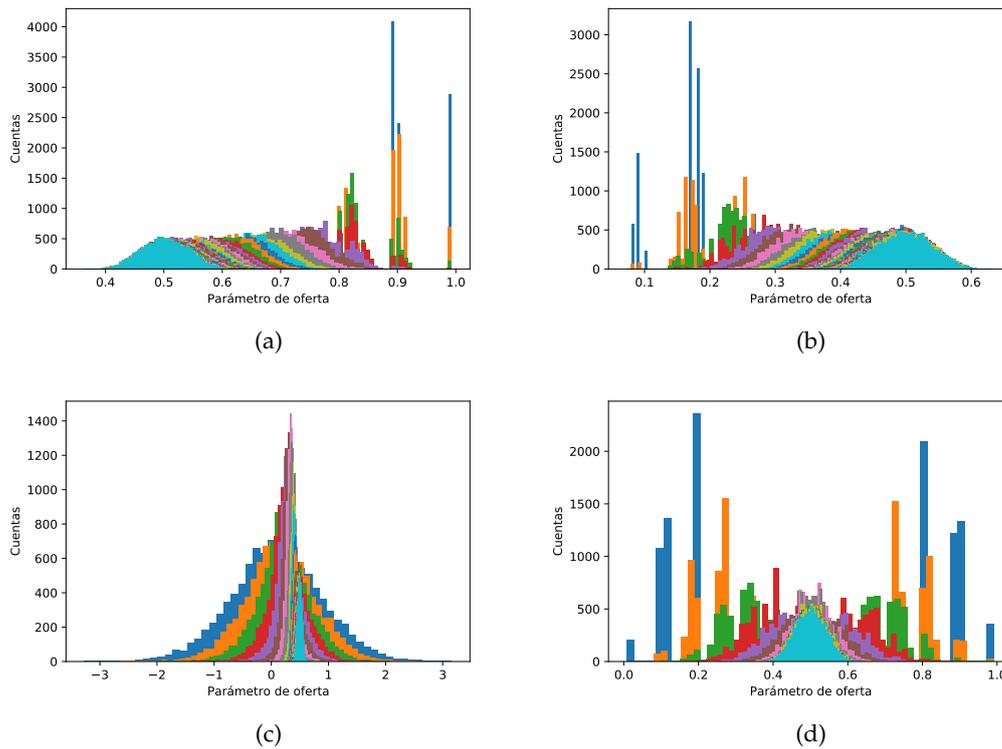


Figura 5.2: Se muestran los outputs del algoritmo para distintas condiciones iniciales. (a) Histogramas para C1. (b) Histogramas para C2 (c) Histogramas para C3. (d) Histogramas para C4.

Cabe destacar que en los gráficos de la Figura 5.2 las escalas del eje x son distintas por lo que a simple vista las distribuciones parecen tener varianzas distintas, aunque esto no es así. En la tabla 5.1, se pueden ver los valores de las medias y los desvíos estándar obtenidos para cada caso luego de 50 interacciones. Se observa que la media esta contenida en el intervalo $0,5 \pm 0,01$ y el desvío estándar esta en el intervalo $0,044 \pm 0,004$ para el desvío. El error relativo respecto de la media teórica en todos los casos es menor a 0,5%. La conclusión es que sin importar la condición inicial utilizada, todas las simulaciones evolucionan a una distribución de equilibrio con media y desvío estándar similares, que podemos estimar como $0,5 \pm 0,01$ para la media y $0,044 \pm 0,004$. Además, notamos que los agentes en valor medio juegan en el equilibrio de Nash, por lo que el modelo replica el comportamiento macroscópico.

	C1	C2	C3	C4
Media	0.5019	0.4990	0.4989	0.5001
Error relativo de la media	0.38 %	0.20 %	0.22 %	0.02 %
Desvío Estándar	0.041	0.0409	0.0409	0.0473

Cuadro 5.1: Medias y desvíos estándar para cada condición inicial.

5.4. Convergencia

El siguiente punto a estudiar es la convergencia hacia una distribución de equilibrio. En particular, queremos estudiar cuantas iteraciones son necesarias para que la dinámica converja. Observaremos la evolución de la media y del desvío de la distribución a lo largo de 500 iteraciones

y veremos si la cantidad de pasos necesarios dependen de la condición inicial utilizada. En todos los casos se utilizó $N = 10000$

Empezaremos por la condición inicial C1. Luego de 500 iteraciones se obtuvo una media de 0,5001 y desvío estándar 0,0408. En la Figura 5.3 se grafican las medias de la distribución del parámetro de oferta en función de la iteración del código. Además, se grafica en rosa la media luego de 500 iteraciones. Se muestra el mismo conjunto de datos pero variando la cantidad de iteraciones mostrada en cada caso.

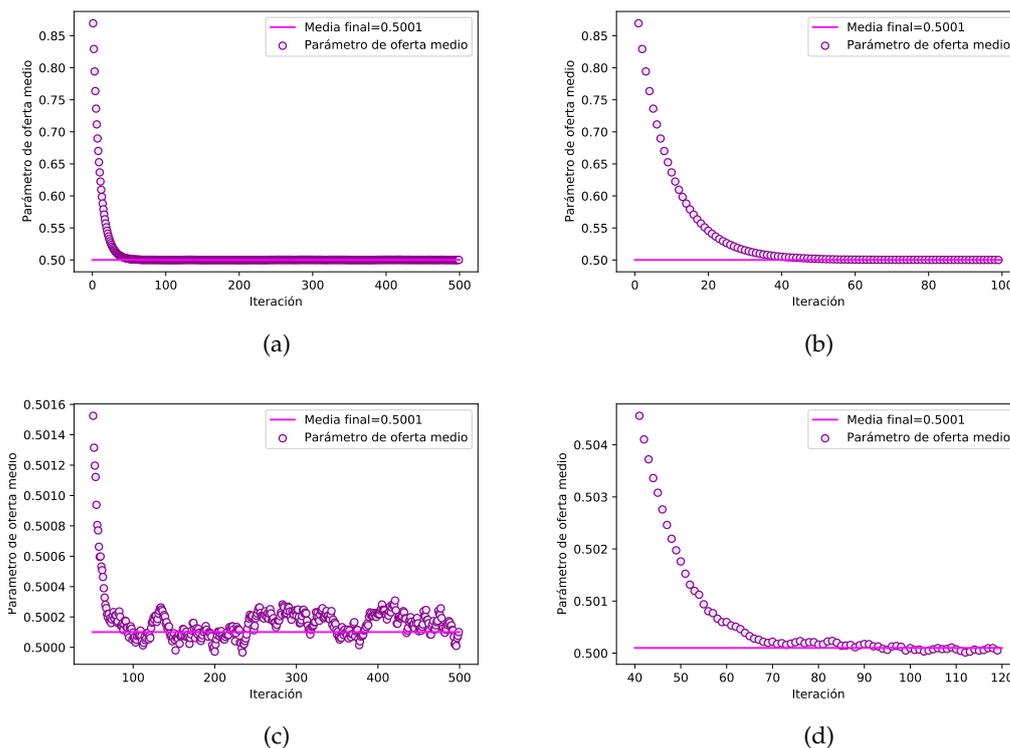


Figura 5.3: Se las medias simuladas en función del número de iteraciones iniciando con la condición C1. Los gráficos, muestran el mismo conjunto de datos pero en diferentes intervalos.

De la Figura 5.3 podemos inferir varios resultados. Mirando la Figura 5.3a vemos que las medias decaen rápidamente a un valor por debajo de 0,55. En la Figura 5.3b se observa que necesitamos al menos 40 iteraciones para obtener una media cercana a 0,50. Más aún, si miramos el comportamiento de la media luego de las 40 iteraciones, como se ve en la Figura 5.3d, podemos notar que cerca de las 70 iteraciones la media se estaciona y solo se observan fluctuaciones que se deben a que lo que estamos mirando son realizaciones de una distribución. Lo que notamos es que luego de 70 iteraciones la media varía en un intervalo de tamaño cercano a 0,0004. Esto se puede apreciar en la Figura 5.3c. Al iterar más de 100 veces, las variaciones que se observan se deben a las variaciones naturales de la dinámica propuesta que corresponden a una variación en un intervalo de tamaño $\sim 0,004$.

Podemos hacer el mismo análisis para los desvíos de la distribución que se obtiene en cada paso. En la Figura 5.4 se puede observar el desvío estándar en función de la cantidad de iteraciones. Se puede observar que este valor converge más rápido que la media. Notamos que luego de

20 iteraciones no hay más variaciones y se llega a un estado estacionario. Este punto se aprecia en la Figura 5.4c donde se ve que los desvíos obtenidos en la simulación se distribuyen sin una tendencia particular.

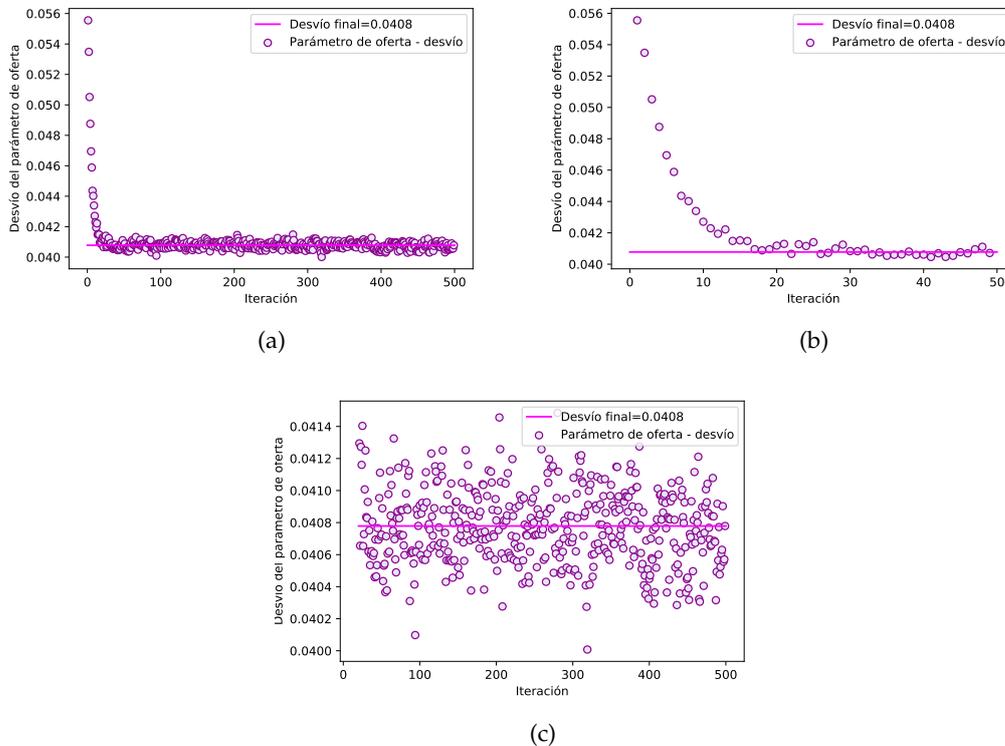


Figura 5.4: Se muestran los desvíos medios del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones para la condición inicial C1. En las tres figuras se grafica el mismo conjunto de datos variando la cantidad de iteraciones mostrada.

De manera análoga, podemos ver que sucede si comenzamos con la condición C2. En la Figura 5.5 se muestra la evolución del parámetro de oferta medio en función de la cantidad de iteraciones. Luego de 500 iteraciones se observó una media de 0,5002. De la misma manera que antes, se puede notar que al realizar más de 100 iteraciones, la dinámica se estabiliza cerca de 0,5 aunque con pequeñas fluctuaciones en un intervalo de tamaño de orden 0,0004, debidas a la aleatoriedad de la dinámica. Más aún, luego de 70 iteraciones la dinámica alcanza este estado.

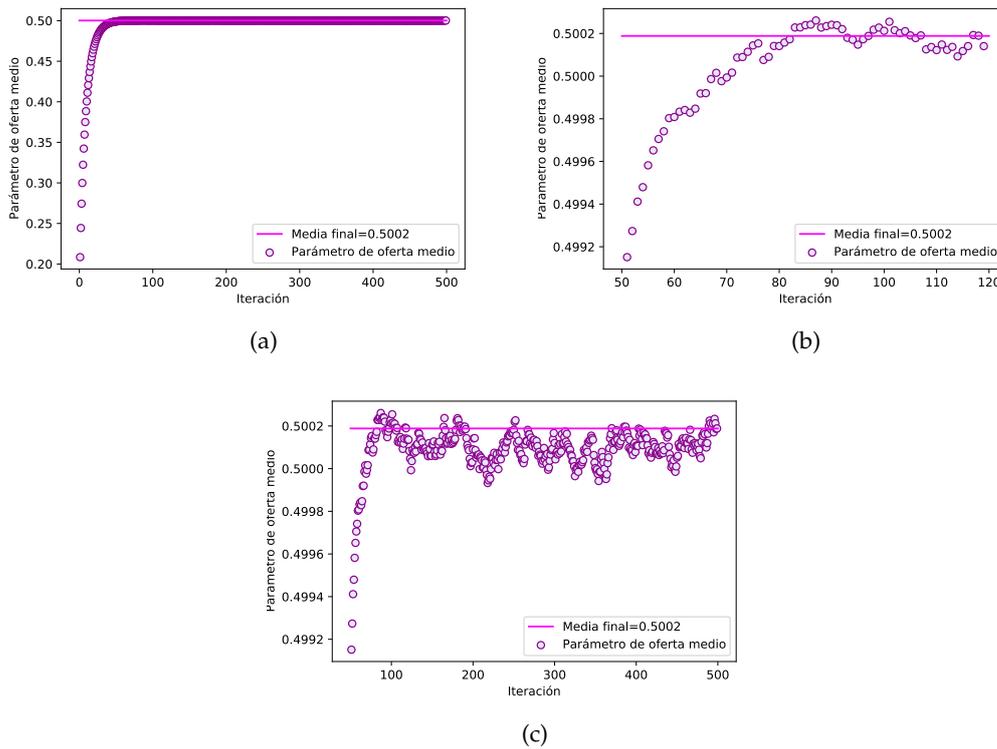


Figura 5.5: Se muestran los valores medios de la media del parámetro de oferta en función del número de iteraciones para la condición C2. Los gráficos muestran el mismo conjunto de datos pero en diferentes intervalos.

Al estudiar los desvíos estándar obtenidos con la condición C2, obtuvimos que luego de 500 iteraciones el desvío toma el valor de 0,0408. En la Figura 5.6, se ilustran los desvíos estándar en función del número de iteraciones. Se observa el mismo comportamiento que en la condición C1: el desvío converge más rápidamente que la media. En este caso se alcanza el estado final luego de 10 iteraciones. La principal diferencia que se observa entre las condiciones C1 y C2 es que en un caso la media es decreciente y en el otro resulta creciente.

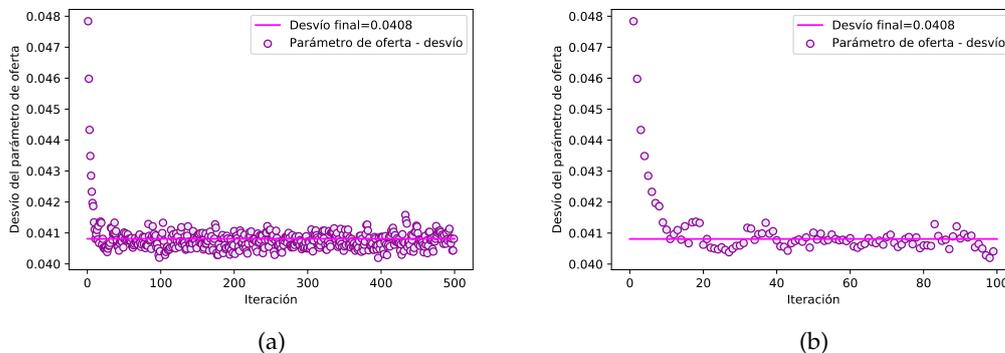


Figura 5.6: Se muestran los desvíos medios del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones para la condición inicial C2.

Para la condición C3, se realizaron los mismos análisis y los gráficos correspondientes se observan en las Figuras 5.7 y 5.8. El comportamiento resulta similar a las condiciones iniciales an-

teriores. En esta caso, se observa que la dinámica se estabiliza cerca de las 80 iteraciones para la media y cerca de las 10 iteraciones para el desvío. Obteniendo una media de 0,5000 y un desvío de 0,0404.

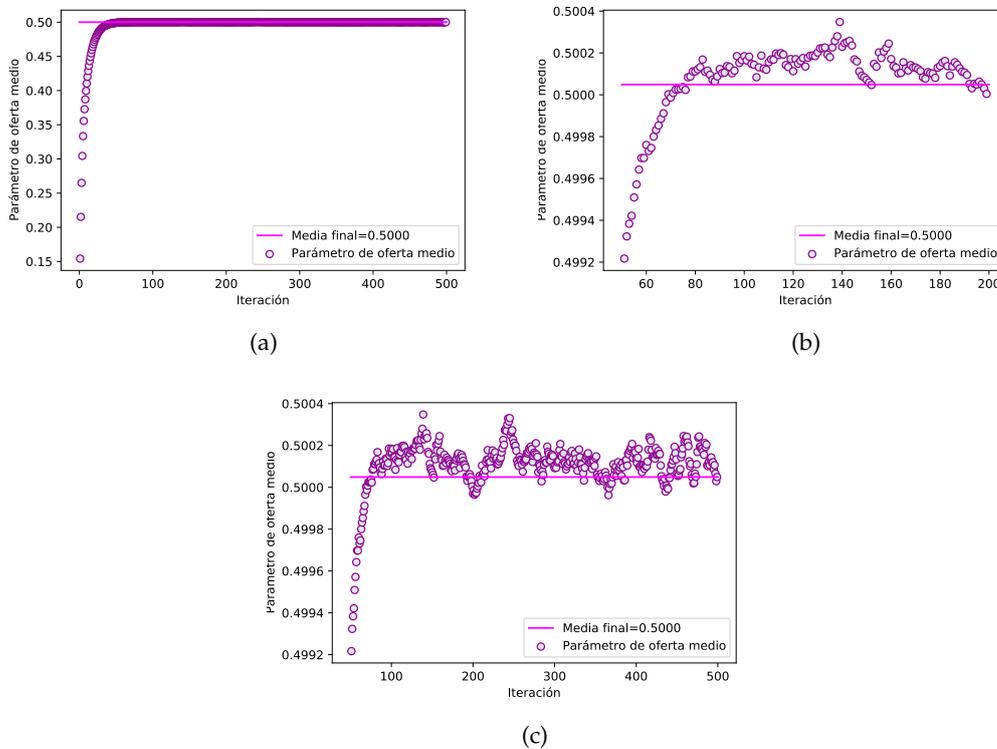


Figura 5.7: Se muestran las medias simuladas en función de la cantidad de iteraciones con la condición C3. Los gráficos muestran el mismo conjunto de datos pero en diferentes intervalos.

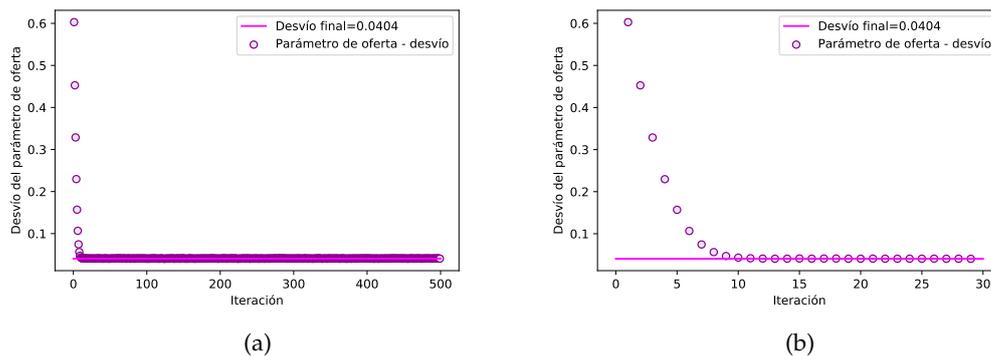


Figura 5.8: Se muestran los desvíos medidos del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones para la condición inicial C3.

Finalmente, para la condición C4 se realizó el mismo análisis que los casos anteriores y los gráficos correspondientes se observan en las Figuras 5.9 y 5.10. Se puede observar la misma tendencia que en los casos anteriores. En particular, la dinámica se estabiliza cerca de las 40 iteraciones para la media y cerca de las 10 iteraciones para el desvío, que es más rápido que antes.

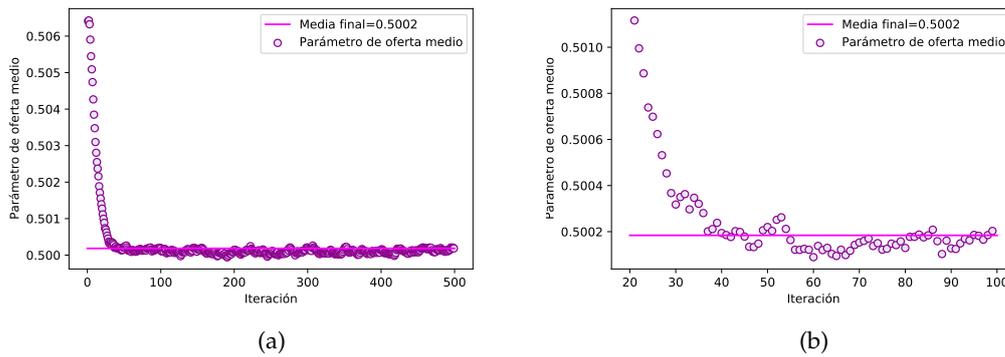


Figura 5.9: Se muestran las medias simuladas del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones para la condición inicial C4.

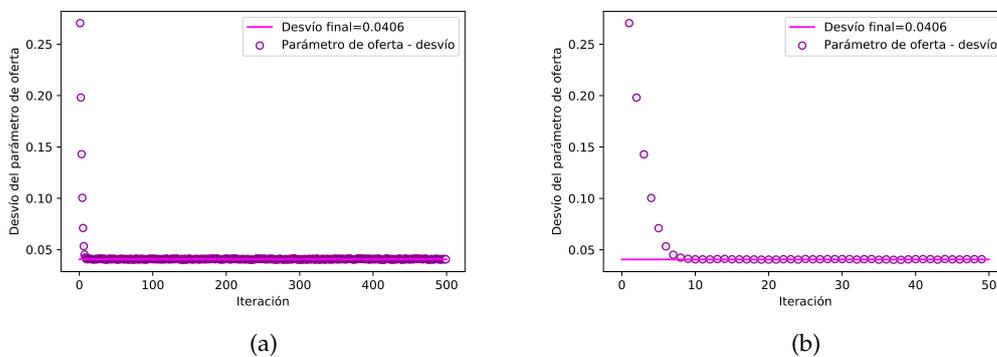


Figura 5.10: Se muestran los desvíos medios del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones para la condición inicial C4.

A modo de resumen, podemos observar que:

1. Con las cuatro condiciones iniciales se obtienen medias que se encuentran entre 0,4998 y 0,5004.
2. Las cuatro condiciones iniciales tienen desvíos que se encuentran entre 0,04 y 0,05.
3. La dinámica converge a una distribución estacionaria a tiempos largos.
4. En 100 iteraciones podemos asegurarnos que se obtiene el estado final.
5. Los desvíos se estabilizan en menos iteraciones que las medias.

5.5. Independencia de la condición inicial

Con la información que tenemos hasta ahora es razonable preguntarnos es si la convergencia depende de la condición inicial de los parámetros de oferta. Más aún, podemos conjeturar que la distribución de riqueza de los agentes no depende de la condición inicial. Consideraremos las cuatro condiciones iniciales C1, C2, C3, C4 y , para todos los casos, realizamos el Algoritmo 1 para $N = 10000$ y $T = 10000$. Obtenemos

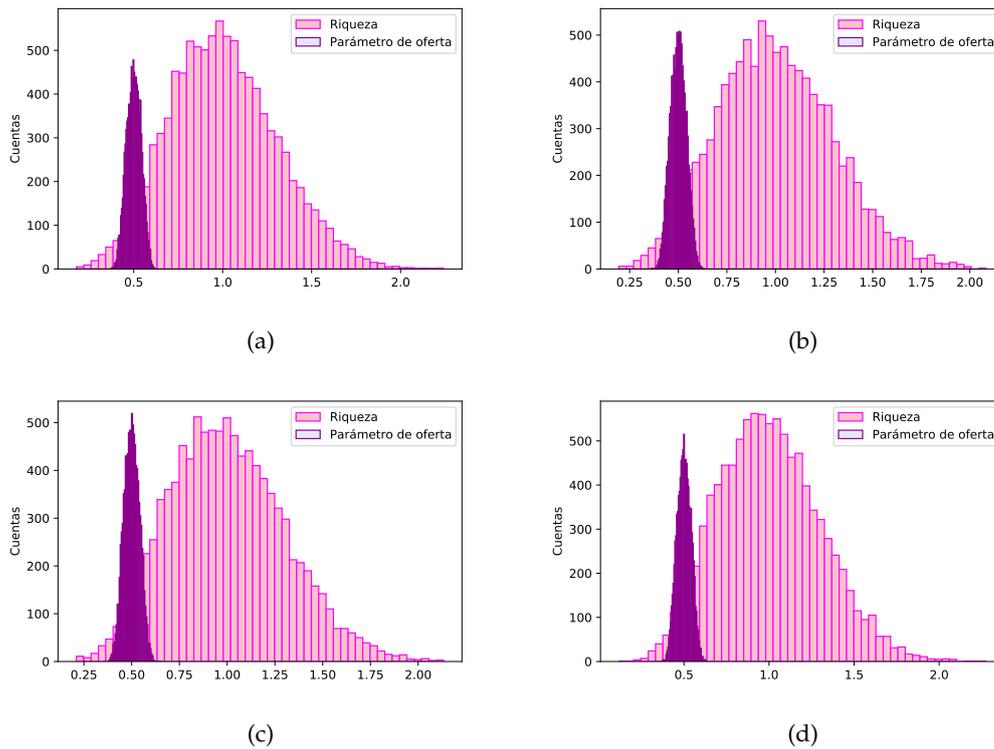


Figura 5.11: Se muestran los histogramas para distintas condiciones iniciales. En cada caso se muestra la distribución de riqueza y la distribución de los parámetros de oferta. (a) Histogramas para la condición inicial C1. (b) Histogramas para la condición inicial C2. (c) Histogramas para la condición inicial C3. (d) Histogramas para la condición inicial C4.

En la Figura 5.11 podemos ver la distribución de riqueza y la distribución de los parámetros de oferta para diferentes condiciones iniciales. En estas cuatro situaciones, parecería que las distribuciones son idénticas, lo que nos permitiría conjeturar que la dinámica converge a ciertas distribuciones independientemente de la condición inicial. Para intentar ver esto más claro, podemos comparar las acumuladas empíricas para estas distribuciones (Figura 5.12). A simple vista no se observan diferencias significativas entre las distribuciones. Una forma de cuantificar que tan similares son estas distribuciones es usando el test de Kolmogorov-Smirnov que describimos en la sección 2.5.

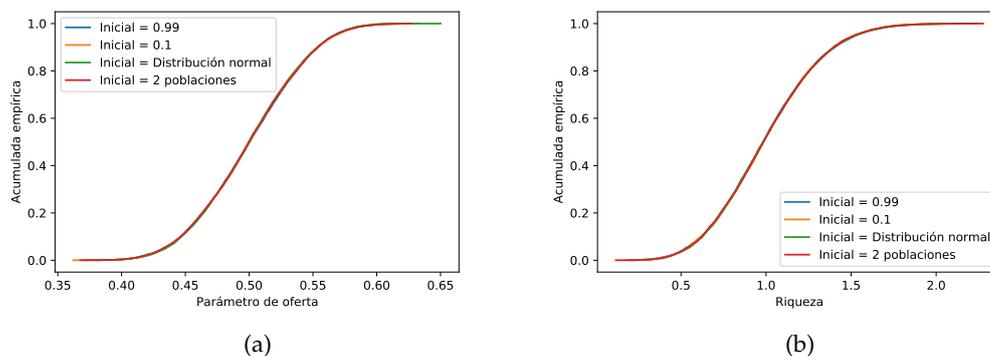


Figura 5.12: Se muestran las acumuladas empíricas para las distribuciones de la Figura 5.11. (a) Acumuladas empíricas para los parámetros de oferta. (b) Acumuladas empíricas para la riqueza.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Como ya describimos en la sección 2.5, este test es un test de hipótesis que nos permitirá decidir si las muestras que obtuvimos mediante las simulaciones provienen de la misma distribución. Usaremos la implementación de la librería SciPy de Python [4]. Comparando la muestra obtenida con la condición C1 y las restantes tres condiciones el test nos devuelve los p-valores y los estadísticos que se muestran en la Tabla 5.2.

	C1 vs C2	C1 vs C3	C1 vs C4
p-valor	0.7112026399498019	0.8629266196033867	0.8533882178607826
estadístico	0.0099	0.0085	0.0086

Cuadro 5.2: Resultados del test de Kolmogorov-Smirnov.

Según la expresión 2.33:

$$D_{\alpha,m,n} = c(\alpha) \sqrt{\frac{20000}{10000^2}} = c(\alpha)0,014 \quad (5.1)$$

Para distintos valores de α obtenemos:

α	0,05	0,01	0,005	0,001
$c(\alpha)$	1,36	1,63	1,73	1,95
$D_{\alpha,m,n}$	0,019	0,023	0,024	0,028

Por lo que, no tenemos evidencia para rechazar la hipótesis nula en ninguno de estos valores de α y por lo tanto, sostenemos que las muestras provienen de la misma distribución.

5.6. Dependencia con q

Lo siguiente que podríamos preguntarnos es qué sucede si variamos q , es decir, que si modificamos que tan drásticamente los jugadores modifican su comportamiento. Si usamos un valor de q cercano a 1, los jugadores no modifican mucho sus parámetros. Más aún, si $q = 1$, la dinámica no evoluciona. Sin embargo, si q es chico, los jugadores pueden modificar mucho sus parámetros en cada paso, por lo que esperaríamos una dinámica con mayor varianza. Cabe destacar que en la ecuación de transporte 2.15 que derivamos usamos que $q \approx 1$ por lo que, si variamos q los resultados obtenidos a partir de esta no son válidos.

En esta sección usaremos solamente la condición C1 ya que tenemos bastante evidencia que los resultados no van a depender del dato inicial.

En la Figura 5.13, se pueden observar los resultados obtenidos con la simulación variando el valor de q . Se puede observar que para q chicos la dinámica se acerca a una distribución con cuatro picos en lugar de uno central. Además, estos picos se acercan al centro al aumentar q hasta que colisionan en el centro.

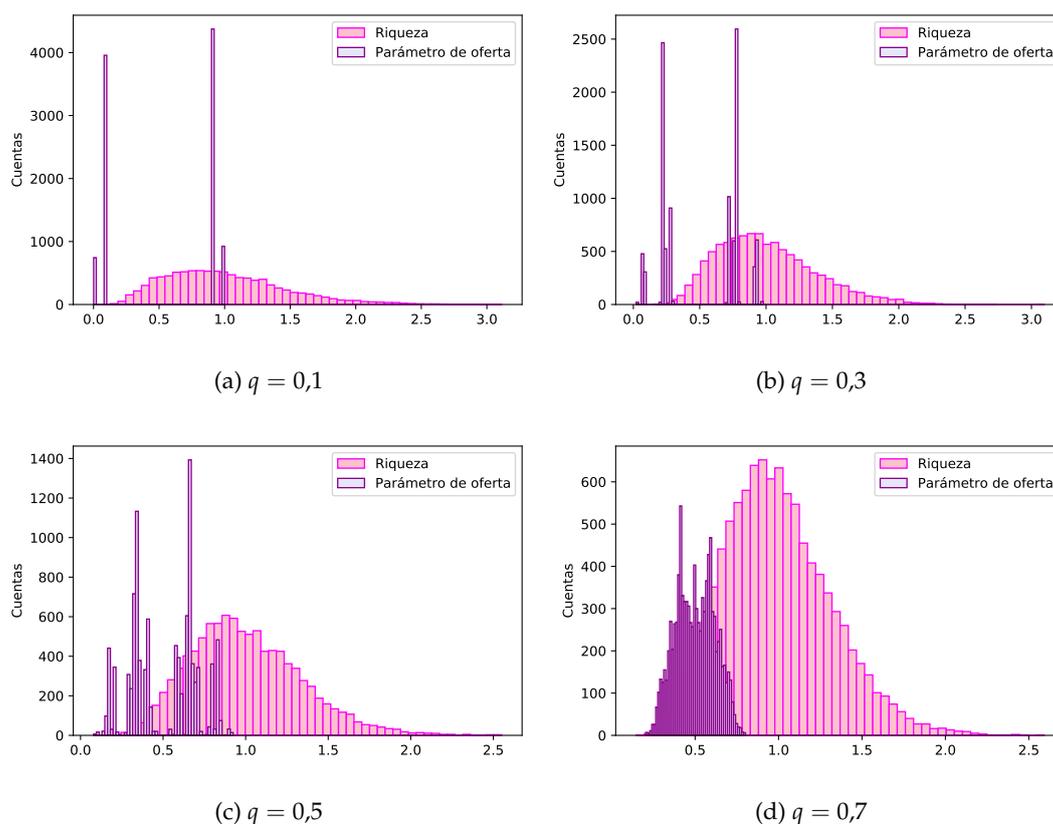


Figura 5.13: Se muestran las distribuciones para $N = 10000$, $T = 100$ y condición C1 para cuatro valores distintos de q .

Teniendo esto en cuenta es razonable preguntarse como evolucionan las distribuciones al variar q . Estudiaremos que sucede si iteramos el algoritmo variando q y analizaremos como evolucionan la media y el desvío estándar del parámetro de oferta y el desvío de la riqueza. De los gráficos de la Figura 5.13 esperamos que el parámetro de oferta disminuya su varianza al aumentar q , y su media se mantenga cercana a 0,5.

Para las simulaciones se utilizó la condición inicial C1, $N = 10000$, $T = 100$. Además, se usaron 48 valores para q equidistribuidos en $(0, 1)$.

En la Figura 5.14 podemos observar el parámetro de oferta medio en función de q . Se observa que el valor medio se ubica entre $(0,49, 0,57)$ para todos los valores de q . Y se observa una tendencia decreciente a medida que aumenta q , donde la dinámica parece tender a 0,5 cuando $q \rightarrow 1$. Notemos que hay dos puntos atípicos al acercarnos a $q = 1$, que son en $q = 0,959$ y $q = 0,980$, sería extraño que la dinámica pegue un salto tan pronunciado y dado que al llegar al equilibrio el ruido de la muestra aparece en el cuarto dígito después de la coma no podemos atribuir el salto a la variación de la muestra. Es razonable suponer que las dinámicas con q más cercanos a 1 convergen más lento, estudiaremos esta hipótesis en la próxima sección.

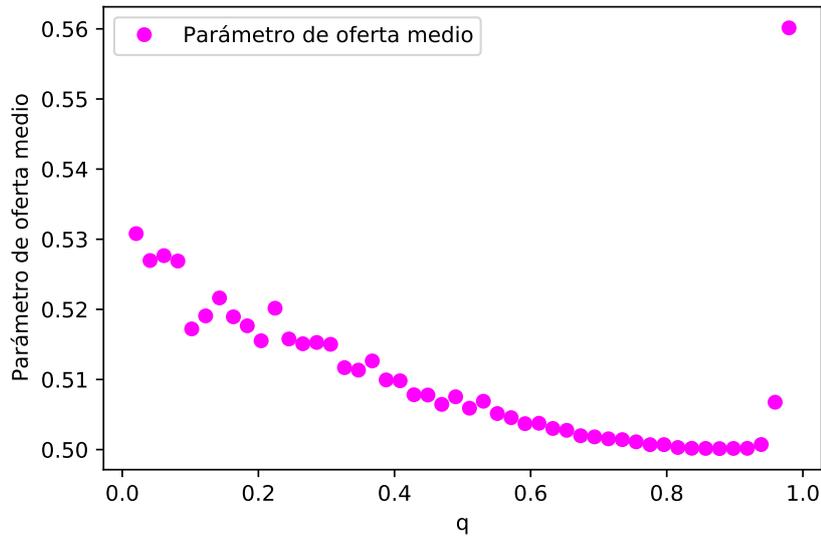


Figura 5.14: Parámetro de oferta medio en función de q .

En la Figura 5.15, se muestra el desvío estándar del parámetro de oferta en función de q . Además, se ajusta una función lineal sobre estos datos. Se puede ver que hay una tendencia decreciente a medida que q aumenta. La función ajustada es:

$$y = -0,477x + 0,455 \tag{5.2}$$

Cuando $q \rightarrow 1$, el desvío va a 0 lo cuál es consistente con el resultado del capítulo anterior donde obtuvimos que en el límite $q \rightarrow 1$, la solución estacionaria es una $\delta_{\frac{1}{2}}$.

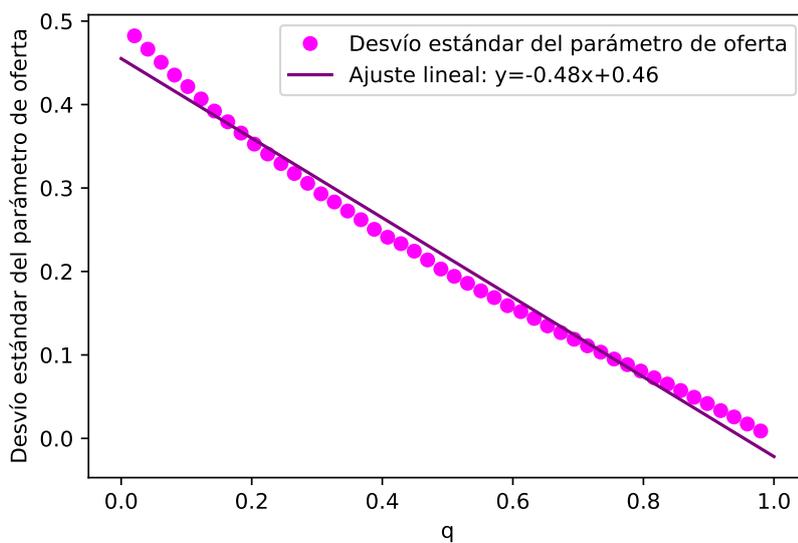


Figura 5.15: Desvío estándar del parámetro de oferta en función de q .

Finalmente, en la Figura 5.16 se muestra el desvío estándar de la riqueza en función de q . Como en los casos anteriores se puede notar que la tendencia es al decrecimiento cuando q aumenta. La

diferencia principal con el caso del parámetro de oferta es que en este caso el decrecimiento es fuertemente no lineal y a $q \rightarrow 1$ el desvío se acerca a 0,3.

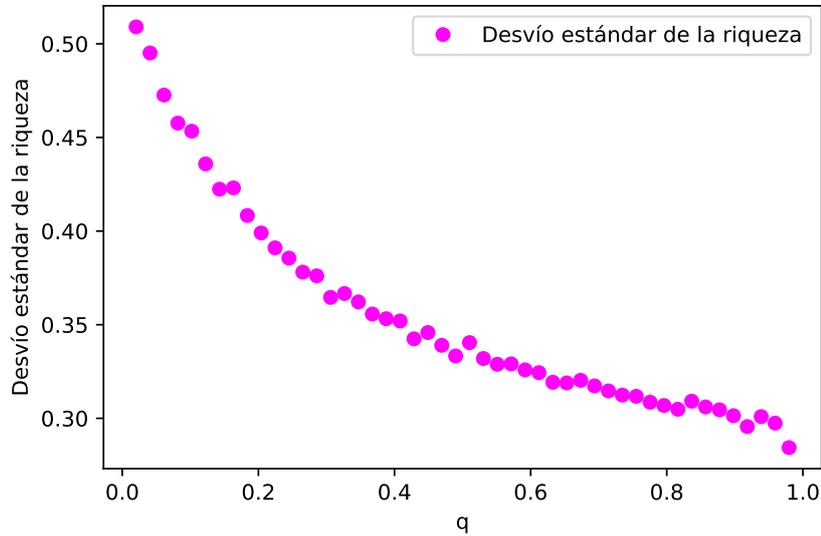


Figura 5.16: Desvío estándar de la riqueza en función de q .

5.7. Convergencia para $q = 0,99$

Finalizamos este capítulo testeando la hipótesis que hicimos en la sección anterior: cuanto más cercano a 1 este q , más lenta en la convergencia. De la misma manera que en la sección 5.4, simulamos con $C1$, $N = 10000$ y $T = 500$, pero con $q = 0,99$.

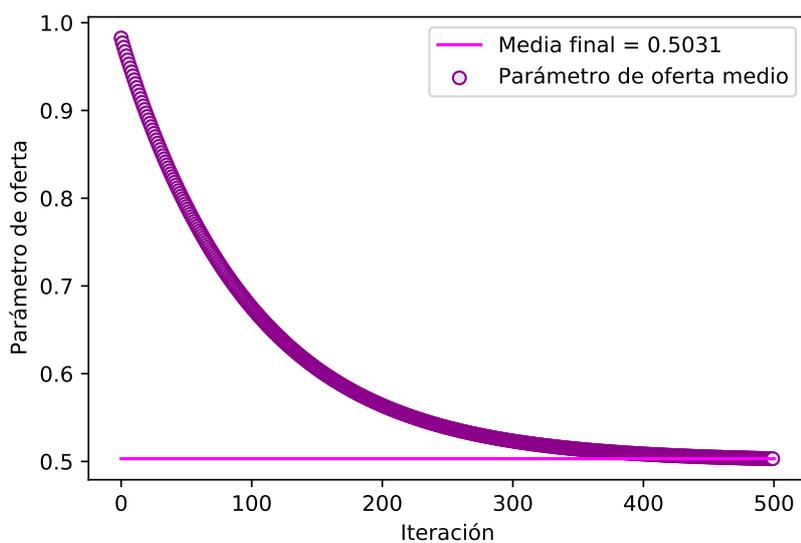


Figura 5.17: Parámetro de oferta medio en función del número de iteraciones para $q = 0,99$.

En la Figura 5.17 se muestran las medias del parámetro de oferta en función de la cantidad de iteraciones. Podemos observar que en efecto la media luego de 500 iteraciones es 0,5031, que

es más cercano a 0,5 que lo que se obtuvo en la sección anterior. Además, se aprecia que en 200 iteraciones todavía la tendencia es decreciente, por lo que tenemos evidencia de que el tiempo de convergencia depende de q y para q más cercanos a 1, la convergencia es más lenta.

Generalización: subasta de primer precio con k jugadores

En este capítulo realizaremos una generalización del modelo propuesto en el capítulo 4 para la subasta a sobre cerrado de primer precio. En este caso, propondremos un modelo donde hay k jugadores en cada subasta. No realizaremos un estudio teórico de este modelo, por lo que nos concentraremos en estudiar la simulación.

6.1. Modelo

Debemos modificar las reglas de actualización del parámetro de oferta. Recordemos que en el modelo del capítulo 4, el perdedor subía su parámetro de oferta y el ganador lo bajaba cuando el ganador tiene el parámetro de oferta más alto. Sin embargo, en este caso hay más de un perdedor y podrían querer compararse entre ellos. Vamos a proponer que los perdedores se comparan únicamente con el ganador, y que el ganador disminuye su parámetro si su oferta es mayor a al menos la de la mitad de los jugadores restantes. Proponemos, además, que la cantidad que sube o baja un jugador toma la misma forma que en el modelo anterior. Es decir, un jugador puede decidir:

1. Si p gana y hay al menos $\frac{k-1}{2}$ perdedores con un parámetro menor: $p \rightarrow qp$.
2. Si p pierde y tiene un parámetro menor que el del ganador: $p \rightarrow 1 - q(1 - p)$.
3. En cualquier otro caso, no modifica su estrategia.

6.2. Algoritmo

El algoritmo es esencialmente el mismo que el del capítulo 5. La única diferencia es como elegimos los k jugadores que van a participar en la subasta. A diferencia de la simulación del modelo de 2 jugadores, vamos a sortear filas de una matriz. Como antes, definimos k vectores con los números de los jugadores que están en un orden aleatorio. En la Figura, se ve un ejemplo para $k = 3$ y $N = 5$.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, van a jugar la primera subasta los jugadores 3, 5 y 4. La segunda, 5, 3 y 2 y así sucesivamente hasta llegar a la última columna.

A continuación mostramos el pseudocódigo del algoritmo. Como antes, el código fue implementado en Python y se controlan los parámetros q , N , T y las condiciones iniciales de las ofertas. En este caso, no estudiaremos la riqueza.

Algoritmo 2 Evolución de los parámetros de oferta para N jugadores en la subasta de k jugadores

```

1: oferta = Condición inicial                                ▷ Inicialización
2: juegos=vector con valores del 1 al N
3: for  $s \in \{0, 1, \dots, T-1\}$  do                            ▷ Itero  $T$  veces
4:   for  $i \in \{0, k-1\}$  do
5:     Reordeno juegos aleatoriamente y lo guardo en una matriz juegos[i][j]
6:   end for
7:   for  $i \in \{0 \dots N-1\}$  do
8:     Juegan los  $k$  en juegos[j][i] con  $j$  libre
9:     valor es un vector que guarda la valuación
10:    x es un vector que guarda la apuesta
11:    for  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  do
12:      Sorteo  $v$  con una uniforme y lo guardo en valor
13:      Agrego  $valor[j] * oferta[juegos[j][i]]$  a x
14:    end for
15:    ganador = máxima apuesta
16:     $x_{gan} = x[ganador]$ 
17:     $of_{gan} = oferta[juegos[ganador][i]]$ 
18:    control = 0
19:    for  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  do
20:      if  $j \neq ganador$  then
21:        if  $oferta[juegos[j][i]] \leq of_{gan}$  then
22:           $oferta[juegos[j][i]] = 1 - (1 - oferta[juegos[j][i]]) * q$ 
23:          control=control+1
24:        end if
25:      end if
26:    end for
27:    if control  $\geq (k-1)/2$  then
28:       $oferta[juegos[ganador][i]] = oferta[juegos[ganador][i]] * q$ 
29:    end if
30:  end for
31: end for

```

Mantenemos la notación del capítulo 5 para las condiciones iniciales C1, C2, C3 y C4.

6.3. Equilibrio de Nash

Lo primero que queremos estudiar es si este modelo recupera el resultado teórico: los agentes aprenden a jugar en el equilibrio de Nash dado por 3.4.4. En la Figura 6.1 se observan las distribuciones obtenidas para $N = 10000$ y $T = 100$, variando k entre 2 y 20 e inicializando los parámetros

de oferta con C1. Se observa que las distribuciones se corren hacia la derecha a medida que aumenta la cantidad de jugadores. Cualitativamente, este comportamiento es el que deberíamos recuperar.

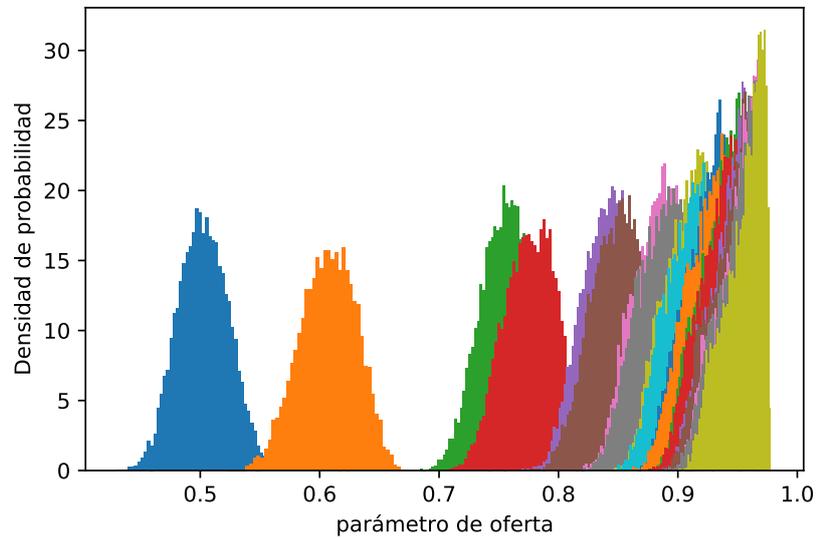


Figura 6.1: Distribuciones para los parámetros de oferta para distintos valores de k , empezando con la condición C1.

En la Figura 6.2 se pueden ver las medias de las distribuciones obtenidas en función de la cantidad de jugadores. Además, se muestran los equilibrios de Nash para cada k . Se puede ver que el modelo reproduce el resultado teórico para casi todos los k con errores significativos para $k = 3, k = 5$ y $k = 7$.

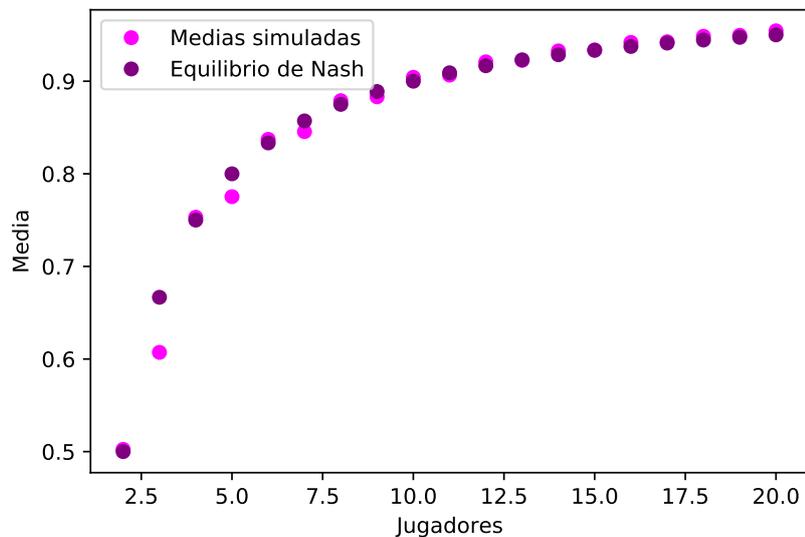


Figura 6.2: Medias simuladas de la Figura 6.1 y teóricas en función de la cantidad de jugadores.

Para cuantificar esto, en la Tabla 6.1 se calculan los errores relativos para cada k y vemos

que, a excepción de $k = 3, 5, 7$, los errores relativos son menores al 1% respecto al equilibrio de Nash. Esto nos permite inferir que el modelo reproduce de manera razonable el comportamiento esperado.

k	Media teórica	Media C1	Error porcentual C1
2	0,500	0,502	0,49 %
3	0,667	0,607	8,92 %
4	0,750	0,753	0,42 %
5	0,800	0,775	3,08 %
6	0,833	0,837	0,46 %
7	0,857	0,846	1,35 %
8	0,875	0,879	0,46 %
9	0,889	0,883	0,65 %
10	0,900	0,904	0,47 %
11	0,909	0,907	0,27 %
12	0,917	0,921	0,46 %
13	0,923	0,923	0,06 %
14	0,929	0,933	0,45 %
15	0,933	0,934	0,06 %
16	0,938	0,942	0,47 %
17	0,941	0,943	0,15 %
18	0,944	0,949	0,43 %
19	0,947	0,950	0,23 %
20	0,950	0,954	0,46 %

Cuadro 6.1: Errores para las simulaciones con la condición C1.

A continuación repetimos las simulaciones cambiando la condición inicial por C2, Figura 6.3, usando la condición inicial C3, como se ve en 6.4 y usando la condición inicial C4, como se ve en 6.5.

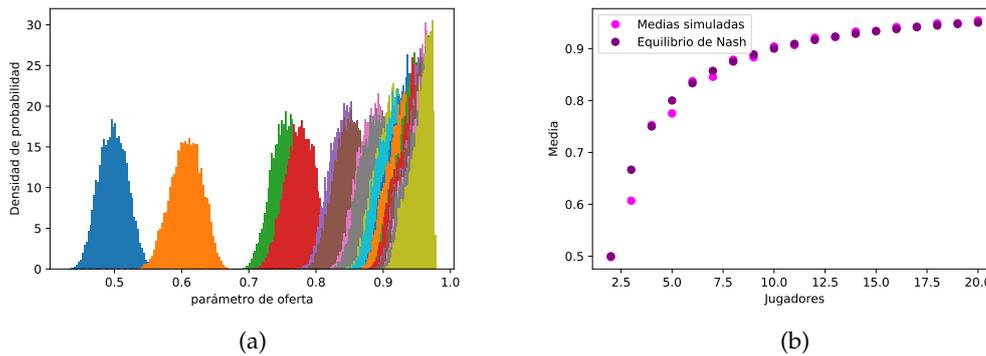


Figura 6.3: (a) Distribuciones de los parámetros de oferta variando k con la condición C2. (b) Medias simuladas y equilibrios de Nash en función de la cantidad de jugadores.

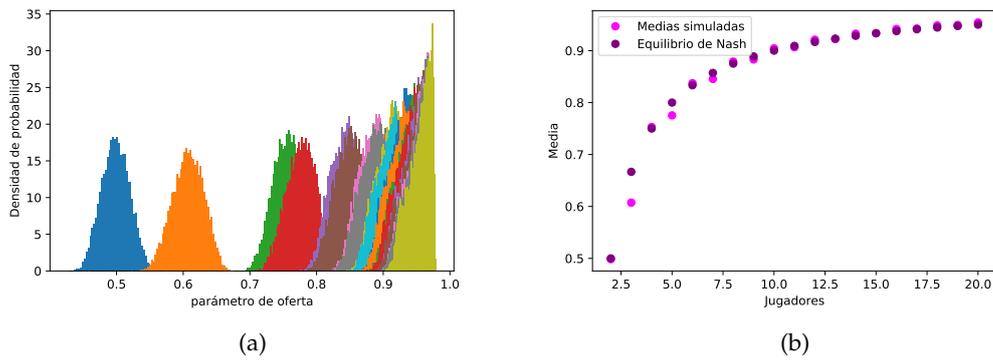


Figura 6.4: (a) Distribuciones de los parámetros de oferta variando k con la condición C3. (b) Medias simuladas y equilibrios de Nash en función de la cantidad de jugadores.

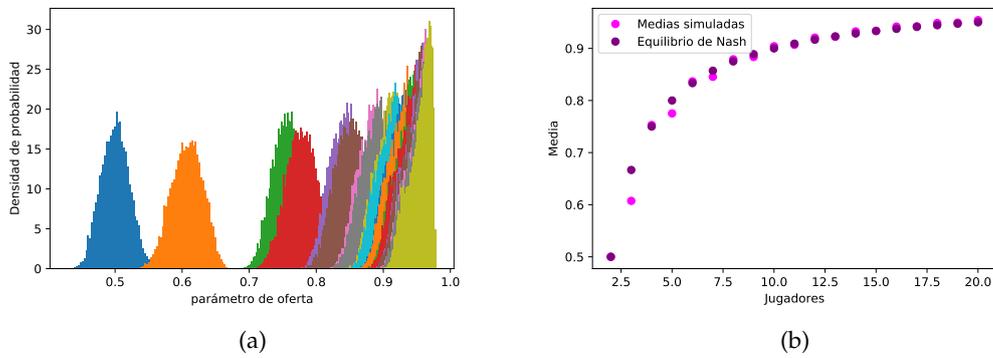


Figura 6.5: (a) Distribuciones de los parámetros de oferta variando k con la condición C4. (b) Medias simuladas y equilibrios de Nash en función de la cantidad de jugadores.

Finalmente, cuantificamos qué tan cerca estamos de la media teórica mirando el error relativo en cada caso, como se ve en la Tabla 6.2. Se puede notar que el comportamiento es similar al que se obtuvo para la condición C1: los errores son menores al 1 % para $k \neq 3, 5, 7$. Concluimos que el modelo reproduce la dinámica macroscópica buscada.

k	Media teórica	Media C2	Error C2	Media C3	Error C3	Media C4	Error C4
2	0,500	0,498	0,36 %	0,499	0,29 %	0,500	0,01 %
3	0,667	0,607	8,96 %	0,607	8,90 %	0,607	8,90 %
4	0,750	0,753	0,38 %	0,753	0,40 %	0,753	0,40 %
5	0,800	0,775	3,11 %	0,775	3,08 %	0,775	3,10 %
6	0,833	0,837	0,47 %	0,837	0,48 %	0,837	0,41 %
7	0,857	0,846	1,35 %	0,845	1,36 %	0,845	1,37 %
8	0,875	0,879	0,41 %	0,879	0,46 %	0,879	0,46 %
9	0,889	0,883	0,64 %	0,883	0,66 %	0,884	0,60 %
10	0,900	0,904	0,45 %	0,904	0,49 %	0,904	0,46 %
11	0,909	0,907	0,25 %	0,907	0,27 %	0,907	0,25 %
12	0,917	0,921	0,47 %	0,921	0,48 %	0,921	0,44 %
13	0,923	0,922	0,08 %	0,922	0,09 %	0,922	0,08 %
14	0,929	0,933	0,47 %	0,933	0,43 %	0,933	0,44 %
15	0,933	0,934	0,09 %	0,934	0,05 %	0,934	0,05 %
16	0,938	0,942	0,44 %	0,942	0,45 %	0,942	0,47 %
17	0,941	0,942	0,14 %	0,943	0,16 %	0,942	0,14 %
18	0,944	0,949	0,44 %	0,949	0,43 %	0,949	0,46 %
19	0,947	0,949	0,19 %	0,949	0,22 %	0,950	0,23 %
20	0,950	0,954	0,45 %	0,954	0,45 %	0,954	0,44 %

Cuadro 6.2: Medias y errores relativos para la condiciones C2,C3 y C4.

Conclusiones y comentarios finales

7.1. Conclusiones

A modo de resumen de los resultados obtenidos:

1. Diseñamos un modelo basado en agentes para una subasta de primer precio de dos jugadores donde los agentes aprenden qué deben jugar (en valor medio) en el equilibrio de Nash.
2. Dedujimos una ecuación de evolución discreta y una ecuación de transporte para la dinámica, en el límite $q \rightarrow 1$. Usamos dos métodos para derivarla y obtuvimos el mismo resultado en ambos casos. Además, probamos que para esta ecuación la única solución estacionaria es la $\delta_{\frac{1}{2}}$. Más aún, se deducen ecuaciones diferenciales para los momentos eligiendo apropiadamente las funciones test.
3. Pudimos simular el modelo con interacciones de dos jugadores y podemos inferir que la dinámica converge a una distribución de equilibrio. Este equilibrio no parece depender de la condición inicial.
4. Se estudió la dependencia con q de la dinámica. Se observa que para q pequeños aparecen varios picos en las distribuciones de equilibrio, a diferencia del caso de q grande donde la distribución se concentra en 0,5. Variando el parámetro q se puede ver que cuando q se acerca a 1, el parámetro de oferta decrece hasta 0,5. El desvío estándar muestra una dinámica similar pero decrece a 0, lo que es consistente con el resultado teórico de que en el límite $q \rightarrow 1$, el equilibrio es $\delta_{\frac{1}{2}}$.
5. La cantidad de iteraciones necesaria para que la dinámica converja depende del valor de q . Más aún, obtuvimos que si q es chico la dinámica converge a un equilibrio que tiene varios picos, en lugar de uno. Además, vimos que la varianza decrece para q creciente, hasta que en $q = 1$ tiende a 0.
6. Pudimos generalizar el modelo para una subasta de k jugadores. Se simuló la dinámica este caso y se obtuvo que la media de la distribución de equilibrio para los casos $k \neq 3, 5, 7$ difiere en menos del 1% con el equilibrio de Nash. Este resultado se replica al estudiar

distintas condiciones iniciales. Por lo que podemos concluir que el modelo es consistente con la teoría para esos valores de k .

7.2. Posibles generalizaciones y trabajo futuro

Quedan varios puntos que merecen ser tratados con más detalle y otros que podrían ser estudiados en futuros trabajos. No vamos a dar una lista completa de las posibles extensiones ya que modificando las hipótesis bajo las que comenzamos el modelo se podría intentar replicar el análisis.

1. *Estabilidad del modelo de 2 jugadores:* Queda pendiente la pregunta de si es posible probar la estabilidad global del problema dado por la ecuación 4.65. Una opción para hacer esto podría ser adaptar el método que se utiliza en [18] y utilizar un funcional de Lyapunov apropiado. También se podría intentar probar un resultado más débil de estabilidad local, una opción para realizar esto es adaptar las ideas de [16] para linealizar la ecuación diferencial bajo la condición de que comenzamos con una perturbación de la $\delta_{\frac{1}{2}}$ de la forma $(1 - \varepsilon(t))\delta_{\frac{1}{2}} + \varepsilon(t)\gamma(t)$ con $\gamma(t)$ una medida de probabilidad. Obtener así que la perturbación satisface una ecuación diferencial más sencilla y con esto poder probar que la perturbación evoluciona a la medida nula.
2. *Subastas de k jugadores:* En el capítulo 6 mostramos un modelo de agentes para una subasta de primer precio donde interactúan k jugadores. Lo que vimos es que este modelo reproduce numéricamente la dinámica macroscópica para varios valores de k . Sin embargo, al querer plantear una ecuación de transporte aparecen términos mucho más complicados de manejar que en el caso de 2 jugadores. Queda pendiente replicar el estudio teórico realizado para el modelo de 2 jugadores del capítulo 4. Por otro lado, se podrían estudiar los mismos resultados numéricos que se estudiaron para el modelo de 2 jugadores en el capítulo 5.
3. *Modelo para la subasta de Vickrey:* El diseño de un modelo como los que estudiamos en este trabajo para una subasta de Vickrey presenta una dificultad adicional: para los agentes puede ser bueno obtener un parámetro de oferta mayor a 1, por lo que hay que volver a pensar las reglas de interacción.
4. *Riqueza:* En el modelo de 2 jugadores, vimos que la riqueza converge a un equilibrio, por lo que se podría realizar un análisis similar al realizado para el parámetro de oferta. Además, se podría estudiar la riqueza en el modelo de k jugadores. Una dificultad adicional que puede surgir al estudiar las distribuciones de riqueza de manera teórica es que ya no se espera una convergencia a una distribución δ si no que las distribuciones de riqueza en general son más complicadas (ver por ejemplo [1]).
5. *Acoplamiento de la riqueza a la subasta de primer precio:* Otro punto que se podría estudiar es como se acopla la riqueza a una subasta de primer precio en el caso en que los jugadores

no sean completamente líquidos como asumimos en este trabajo, es decir, que cada agente puede ofertar a lo sumo su riqueza.

Bibliografía

- [1] D. Matthes B. Düring y G. Toscani. «A Boltzmann-Type Approach to the Formation of Wealth Distribution Curves». En: *Rivista di Matematica della Università di Parma. Serie 8 (0035-6298)* 1 (nov. de 2009), págs. 199-261. DOI: [10.2139/ssrn.1281404](https://doi.org/10.2139/ssrn.1281404).
- [2] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley, New York, 1968.
- [3] E. Bonabeau. «Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99.suppl_3 (2002), págs. 7280-7287. DOI: [10.1073/pnas.082080899](https://doi.org/10.1073/pnas.082080899).
- [4] The SciPy community. *SciPy documentation, v. 1.8.1*. 2022. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.ks_2samp.html.
- [5] N. Fava y F. Zó. *Medida e Integral de Lebesgue*. Cursos de grado. Departamento de Matemática FCEyN-UBA, 2013.
- [6] P. A. Ferrari. *Teóricas probabilidad y estadística M*. 2016. URL: <http://mate.dm.uba.ar/~pferrari/clases/TeoricasProbaM2016-Pablo.pdf>.
- [7] E. Gibbon. *The decline and fall of the roman empire, Volume I (a.d. 180-476)*. Modern Library, 1932.
- [8] P. Klemperer. «Auction Theory: A Guide to the Literature». En: *Journal of Economic Surveys* 13 (3 1999). DOI: [10.1111/1467-6419.00083](https://doi.org/10.1111/1467-6419.00083).
- [9] Vijay Krishna. *Auction Theory*. Elsevier, 2010.
- [10] D. A. Wolfe M. Hollander y E. Chicken. *Nonparametric Statistical Methods*. John Wiley & Sons, 2014.
- [11] E. Solan M. Maschler y S. Zamir. *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [12] D. Kovenock M. R. Baye y C. G. de Vries. «Rigging the Lobbying Process: An Application of the All-Pay Auction». En: *The American Economic Review* 83.1 (1993), págs. 289-294. DOI: [10.1007/978-3-540-79247-5_18](https://doi.org/10.1007/978-3-540-79247-5_18).
- [13] D. Monderer y M. Tennenholtz. «k-Price Auctions». En: *Games and Economic Behavior* 31.2 (2000), págs. 220-244. DOI: <https://doi.org/10.1006/game.1999.0747>.

- [14] N. Saintier M.Pérez-Llanos J.P. Pinasco y A. Silva. «Opinion Formation Models with Heterogeneous Persuasion and Zealotry». En: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 50.5 (2018), págs. 4812-4837. DOI: [10.1137/17M1152784](https://doi.org/10.1137/17M1152784).
- [15] R.B. Myerson. «Optimal Auction Design». En: *Mathematics of Operations Research* 6 (1 1981). DOI: [10.1287/moor.6.1.58](https://doi.org/10.1287/moor.6.1.58).
- [16] J.P. Pinasco N.Saintier y F.Vazquez. «A model for the competition between political mono-polarization and bi-polarization». En: *Chaos An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30 (6 2020). DOI: [10.1063/5.0004996](https://doi.org/10.1063/5.0004996).
- [17] J.A. Carrillo P. Aceves-Sánchez M. Bostan y P. Degond. «Hydrodynamic limits for kinetic flocking models of Cucker-Smale type». En: *Mathematical Biosciences and Engineering* 2019 16 (6 2019), págs. 7883-7910. DOI: [10.3934/mbe.2019396](https://doi.org/10.3934/mbe.2019396).
- [18] M. Ottobre P. Buttà F. Flandoli y B. Zegarlinski. «A non-linear kinetic model of self-propelled particles with multiple equilibria. Kinetic and Related Models». En: *American Institute of Mathematical Sciences* 12 (4 2019). DOI: [10.3934/krm.2019031](https://doi.org/10.3934/krm.2019031).
- [19] L. Pedraza. *Modelos de formación de opinion*. 2018. URL: <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2018/Pedraza.pdf>. Tesis de Licenciatura.
- [20] J. G. Riley y W. F. Samuelson. «Optimal Auctions». En: *American Economic Review* 71 (3 1981). DOI: [10.2307/1802786](https://doi.org/10.2307/1802786).
- [21] R. Sridharan. «Statistics for Research Projects». En: (2015). URL: <http://www.mit.edu/~6.s085/notes/lecture5.pdf>.
- [22] M.E. Taylor. *Partial differential equations I: basic theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2011.
- [23] Review by: V. L. Smith. «Auctions and Auctioneering by Ralph Cassady». En: *American Economic Review* 58 (4 1968). DOI: [10.2307/1815558](https://doi.org/10.2307/1815558).
- [24] W. Vickrey. «Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders». En: *The Journal of Finance* 16 (1 1961). DOI: [10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x).
- [25] C. Villani. *Limite de champ moyen*. 2001-2002. Cours de DEA.
- [26] C. Villani. *Optimal transport, old and new*. Springer, 2008.
- [27] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate Studies in Mathematics 58. American Mathematical Society, 2003.
- [28] N. Wolanski. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Cursos de grado. Departamento de Matemática FCEyN-UBA, 2007.