



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Desigualdades modulares débiles para operadores maximales
generalizados y aplicaciones al problema de diferenciación de
integrales

Iván Polasek

Director: Ezequiel Rela

Fecha de Presentación: 20/4/2022.

Resumen

En esta tesis estudiaremos operadores maximales en diferentes contextos y las desigualdades que podemos obtener para ejercer algún control sobre ellos. La motivación para estudiar estos objetos surge de un intento de ampliar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue. En este teorema, el operador maximal de Hardy-Littlewood cumple un rol crucial puesto que acota los valores de las integrales promediadas de una función en un punto. El Teorema de Hardy-Littlewood nos da un control sobre el operador maximal que resulta necesario para probar el Teorema de Diferenciación, pero descansa fuertemente en dos cuestiones: la geometría de los objetos sobre los que se calculan integrales promediadas (típicamente cubos o bolas) y ciertas propiedades específicas de la medida de Lebesgue. Entonces, ¿seguimos teniendo algún control sobre el operador maximal si pedimos hipótesis menos restrictivas?

En el capítulo de Preliminares abordaremos las nociones necesarias para emprender este trabajo. Algunas son más técnicas y otras son nodales. Entre estas últimas, queremos mencionar la relación entre Teoremas de Diferenciación, Lemas de Cubrimiento y Desigualdades Débiles, ya que aquí es donde se aprecia la relación entre la motivación original del trabajo, el núcleo que efectivamente termina teniendo y las bases en las que se sustenta.

En el Capítulo 3 estudiaremos operadores maximales obtenidos a partir de integrales promediadas sobre paralelepípedos no necesariamente cúbicos respecto de la medida de Lebesgue. Comenzaremos exponiendo un resultado clásico de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund de diferenciación para paralelepípedos con aristas libres. Después, introduciremos bases de paralelepípedos con aristas dependiendo de parámetros y estudiaremos la relación entre estas dependencias y las propiedades de diferenciabilidad de la base. Para eso presentaremos una desigualdad modular débil para la maximal, probada por Córdoba para una base específica en \mathbb{R}^3 , y un teorema de Soria ([Sor86]) que mejora el resultado original aplicándolo a casos mucho más generales. El capítulo termina estudiando una serie de casos en los que esta

estrategia no funciona.

En el Capítulo 4 volveremos a considerar operadores dados por integrales promediadas sobre bolas, pero cambiaremos la medida de Lebesgue por una medida abstracta. Esto delatará qué propiedades de la medida de Lebesgue hacían valer las desigualdades débiles estudiadas anteriormente. Concretamente, estudiaremos el caso en una dimensión, y el trabajo de Vargas en \mathbb{R}^n con $n > 1$ ([Var94]) para caracterizar todas las medidas positivas cuyo operador maximal es de tipo débil $(1, 1)$.

En el Capítulo 5 trabajaremos con medidas que no están contempladas en este caso, y será necesario recurrir aquí también a desigualdades modulares. Presentaremos aquí un trabajo de Sjögren y Soria ([SS04]), donde los autores prueban que cuando una medida es radial con una densidad que decae de una manera específica, su operador maximal satisface una desigualdad modular débil que permite probar resultados de interés. Este capítulo termina con una aplicación de este resultado y una mención a un resultado relacionado.

Palabras claves: desigualdades modulares, operador maximal, bases de diferenciación, medidas no doblantes.

Agradecimientos

A Ezequiel, por acceder a dirigirme y hacerlo siempre con buena onda, presencia y un infinito respeto.

A Victoria y Carolina, por coparse a ser jurades de este trabajo.

A mi familia, por ser mi sostén en los momentos difíciles, pero aún más importante por serlo en los buenos momentos.

A mis amigos, tanto a quienes saben de matemática e intercambiaron conmigo ideas y propuestas, como a quienes no y aún así escucharon mis monólogos interminables sobre conos y bolas.

A Jud, que es demasiado especial como para agradecerle junto a “mis amigos” sin nombrarla a ella específicamente.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. El Teorema de Diferenciación de Lebesgue	5
2.2. Operadores maximales sobre familias de conjuntos generales .	6
2.3. Operadores de tipo fuerte y débil	8
2.4. Espacios de Orlicz	8
2.4.1. Espacios de Orlicz generales	8
2.4.2. Los espacios de Orlicz $L \log^+ L$ y $L(1 + \log^+ L)$	9
2.5. Grillas diádicas	10
2.6. Medida Hausdorff y Fórmula de Área	13
2.7. La desigualdad de Young	14
2.8. Notación	16
2.8.1. Notación de Landau	16
2.8.2. Desigualdades salvo constante	16
3. Análisis multiparamétrico para la medida de Lebesgue	18
3.1. La base B_n de paralelepípedos con aristas libres	19
3.2. Aristas como funciones de parámetros	32
3.2.1. La desigualdad débil de Córdoba	34
3.2.2. Un teorema de diferenciación para el caso multiparamétrico	50
3.2.3. Limitaciones de este enfoque y comentarios adicionales	57
4. Operadores maximales de tipo débil (1,1)	62
4.1. Operadores maximales en \mathbb{R}	63
4.2. Operadores maximales en \mathbb{R}^n con $n > 1$	65
4.2.1. Definiciones y resultados geométricos previos	66
4.2.2. Demostración del tipo débil (1,1)	78

5. Desigualdades modulares para medidas no doblantes	94
5.1. El operador sobre bolas que contienen al origen	97
5.2. Una condición suficiente	101
5.3. Algunas estimaciones adicionales	122
5.4. Demostración del Teorema 5.0.2	128
5.5. Comentarios finales	137
6. Anexo	139

Capítulo 1

Introducción

El Teorema de Diferenciación de Lebesgue (TDL) es uno de los resultados más importantes de la teoría de la medida básica. En la versión que suele enseñarse en el curso de Análisis Real de esta facultad, dice que dada una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q f(y) dy = f(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde el límite $Q \searrow x$ se interpreta como valiendo para cualquier sucesión de cubos $(Q_k)_k$ centrados en x que se contrae sobre x . La motivación de este trabajo viene de hacerse las siguientes preguntas: ¿cuánto podemos generalizar este resultado? ¿Cuáles son los componentes verdaderamente importantes de la demostración? Y, ¿podemos suplirlos en contextos más generales?

Mirando con atención, vamos a notar que hay tres ingredientes que son claves para que la demostración del TDL funcione. El primero es que exista una familia de funciones “densa y buena”: el TDL se prueba primero para las funciones continuas con soporte compacto, $C_0(\mathbb{R}^n)$, y luego se prueba en el caso general usando que $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es denso. La prueba de esta última propiedad hace uso de algunas propiedades específicas de la medida de Lebesgue. No exploraremos en esta tesis cómo puede generalizarse este resultado a otras medidas, pero queremos notar que para probar un análogo del TDL es necesario probar que las funciones continuas con soporte compacto están “cerca” de la clase de funciones a la que querramos aplicar el teorema.

El segundo ingrediente fundamental en la demostración del TDL es el Lema de Cubrimiento de Vitali. Este resultado permite controlar la medida

de una familia de cubos a partir de la medida de una subfamilia disjunta. La demostración involucra algunos detalles técnicos, pero la idea geométrica que está detrás es esencialmente la siguiente: si dos cubos Q y Q' tienen intersección no vacía, al dilatar al más grande (digamos Q') por un factor de 3 respecto de su centro, el nuevo cubo dilatado contendrá completamente a Q . Esta propiedad es referida a veces como la Engulfing Property. De esta manera, la medida de un cubo dilatado controla la medida de la unión de todos los cubos de menor tamaño que se intersecan con él. Eligiendo adecuadamente una subfamilia de cubos disjuntos de acuerdo con su tamaño se prueba el Lema de Vitali. Es de notar, sin embargo, que para que la Engulfing Property funcione, tiene que haber una relación controlable entre la medida de Lebesgue de un cubo y la medida de su dilatado. Esta propiedad se llama doblantez y la introduciremos adecuadamente a partir del Capítulo 4.

El último ingrediente necesario es una desigualdad que nos permita ejercer un control sobre cualquier integral promediada. Para esto, se define el operador maximal de Hardy-Littlewood, que a cada $f \in L^1_{loc}$ le asigna la función

$$M_c^1 f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre los cubos con centro en x . La definición del operador maximal de Hardy-Littlewood emerge naturalmente en el estudio que queremos hacer: controla todas las integrales promediadas sobre cubos (centrados) como los que se contraen sobre x en el enunciado del TDL. La desigualdad que necesitamos la da el Teorema de Hardy-Littlewood, que dice que operador M_c^1 es de tipo débil $(1, 1)$, es decir, que vale

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / M_c^1 f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \quad (1.1)$$

para alguna constante $c > 0$ que no depende de f ni λ .

En general, ya está muy estudiada la relación entre los teoremas de Diferenciación, las desigualdades para la maximal y los lemas de cubrimiento. Esto hace que, en muchas situaciones, lo más importante termine siendo estudiar la existencia de desigualdades débiles. Este tipo de desigualdades constituye, a nuestro parecer, la parte más interesante de estas pruebas, y por eso serán el eje de este trabajo. Aquí veremos cómo obtener desigualdades parecidas a (1.1) en otros contextos.

Comencemos exhibiendo algunos ejemplos sencillos. Además del operador maximal para cubos centrados que ya hemos definido, podemos definir

el operador maximal M^1 que a cada $f \in L^1_{loc}$ le asigna

$$M^1 f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos que contienen a x pero no necesariamente están centrados en x . Este operador también es de tipo débil $(1, 1)$, y por lo tanto se puede probar un teorema de diferenciación idéntico al TDL pero donde los cubos que se contraen a x no necesariamente están centrados en x . De forma análoga, podemos definir los operadores maximales M^2_c dado por

$$M^2_c f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f(y)| dy,$$

donde el supremo recorre todas las bolas B centradas en x , y el operador maximal M^2 no centrado dado por

$$M^2 f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f(y)| dy.$$

En ambos casos, la Engulfing Property se cumple igual que para cubos y por lo tanto se prueba un análogo del Lema de Cubrimiento de Vitali y con él el Lema de Hardy-Littlewood. Esto permite probar un análogo del TDL para bolas centradas en x que se contraen a x y para bolas que contienen a x pero no necesariamente centradas en x que se contraen a x . Como todos estos resultados son bastante parecidos, si hablamos del Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos estamos refiriendo a cualquiera de ellos sin distinción, o al que mejor se adapte al contexto en el que estamos. De igual manera, cuando hagamos mención al “operador maximal de Hardy-Littlewood clásico”, nos estaremos refiriendo alternativamente a aquel que mejor se adapte al contexto, y lo designaremos por la letra M . De todas formas, queremos aclarar que en el cuerpo de esta tesis trabajaremos siempre con operadores maximales no centrados.

Las cosas se empiezan a poner interesantes cuando estudiamos operadores maximales que resultan de tomar supremo sobre otras familias de figuras. Un caso de especial interés es el operador $M^{\mathcal{B}_n}$ definido por

$$M^{\mathcal{B}_n} f(x) = \sup_{R \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los R en \mathcal{B}_n , la base de todos los paralelepípedos de \mathbb{R}^n con aristas paralelas a los ejes coordenados. Si tuviésemos

un resultado análogo al Teorema de Hardy-Littlewood para este operador, podríamos probar una versión mucho más fuerte del TDL. Sin embargo, esto no ocurre. La desigualdad que hemos presentado para los operadores maximales, el tipo débil $(1, 1)$, es en muchos contextos imposible de conseguir. En estos casos tendremos que recurrir a las desigualdades modulares. Por esto nos referimos a desigualdades del tipo

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / Tf(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) dx \quad (1.2)$$

donde T es la versión de el operador maximal que corresponda, y ϕ es alguna función real. En general, el nombre “modular” hace referencia a que la expresión (1.2) no define ninguna norma sobre el espacio de funciones considerado. Las desigualdades modulares son más débiles que el tipo débil $(1, 1)$, pero aún así permiten probar muchos resultados interesantes.

En el Capítulo 3 veremos cómo encarar estas cuestiones cuando miramos operadores maximales sobre familias de paralelepípedos y usando la medida de Lebesgue. Veremos primero los casos en que los teoremas de Diferenciación pueden probarse “a mano”, para ver después cómo esto no alcanza, y tendremos que recurrir a una desigualdad modular sobre una cierta familia de paralelepípedos. Las condiciones necesarias y suficientes para que se satisfaga esta desigualdad dan cuenta de una complejidad geométrica muy profunda debajo de estos problemas.

En los Capítulos 4 y 5 estudiaremos cómo obtener desigualdades débiles para operadores maximales cuando cambiamos la medida de Lebesgue por medidas μ más generales. Primero estudiaremos el caso en \mathbb{R} , donde todas las medidas dan lugar a operadores maximales M_μ de tipo débil $(1, 1)$. Luego en general, veremos qué medidas verifican desigualdades débiles en \mathbb{R}^n con $n \geq 2$. Aquí también, una vez estudiado este caso, pasaremos a un caso más complicado que requerirá el uso de una desigualdad modular sobre el operador maximal.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. El Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Comenzamos este capítulo repasando el TDL. Enunciaremos las proposiciones y definiciones que se requieren para la demostración de su versión clásica. Primero, recordemos la primera versión de este teorema.

Teorema 2.1.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q f(y) dy = f(x),$$

donde el límite se interpreta como el límite en n para cualquier sucesión de cubos $(Q_n)_n$ tales que $x \in Q_n$ y $\text{diam}(Q_n) \rightarrow 0$ en n .

Enunciamos ahora los resultados que se usan en la demostración.

Teorema 2.1.2. $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es denso con la métrica de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.1.3. (Lema de Cubrimiento de Vitali) *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no necesariamente medible cuya medida exterior es finita. Sea \mathcal{Q} una familia de cubos tal que*

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \supseteq E.$$

Entonces existe una constante positiva $\beta > 0$, que depende solamente de n , y una subfamilia finita $\{Q_1, \dots, Q_N\}$ de \mathcal{Q} tal que

$$\mathcal{L}^n_e(E) \leq \beta \sum_{j=1}^N \mathcal{L}^n(Q_j),$$

donde \mathcal{L}^n_e denota la medida Lebesgue exterior.

Definición 2.1.4. Definimos al operador maximal de Hardy-Littlewood M_c^1 como el operador que a cada función $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ le asigna la función $M_c^1 f$ dada por

$$M_c^1 f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q centrados en x .

Lema 2.1.5. Si $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $c > 0$ que depende solamente de n tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / M_c^1 f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Se puede definir el operador maximal asociado a cubos no centrados, bolas centradas y bolas no centradas. Esto permite probar versiones del TDL para conjuntos de este tipo que se contraen sobre un punto x . Como todos estos resultados son bastante parecidos, si hablamos del Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos estamos refiriendo a cualquiera de ellos sin distinción, o al que mejor se adapte al contexto en el que estamos mencionándolo. De igual manera, cuando hagamos mención al “operador maximal de Hardy-Littlewood clásico”, nos estaremos refiriendo alternativamente a aquel que mejor se adapte al contexto, y lo designaremos por la letra M . De todas formas, queremos aclarar que en el cuerpo de esta tesis trabajaremos siempre con operadores maximales no centrados.

2.2. Operadores maximales sobre familias de conjuntos generales

En esta sección haremos las primeras definiciones necesarias para ampliar los conceptos de la sección anterior y llevarlos a contextos más generales.

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{B} una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Definimos $M^{\mathcal{B}}$, el operador maximal asociado a \mathcal{B} , como el operador dado por

$$M^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los $B \in \mathcal{B}$.

Es claro que un operador así definido cumple las mismas propiedades elementales que el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico: es subaditivo y homogéneo para escalares positivos.

Definición 2.2.2. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{B}(x)$ una familia de conjuntos medibles con medida finita y positiva y que contienen a x . Llamamos $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$. Decimos que \mathcal{B} es una base de diferenciación si para cada x existe una sucesión $(B_k)_k \subset \mathcal{B}(x)$ tal que $(\text{diam}(B_k))_k$ tiende a 0 en k .

Por comodidad, de ahora en más nos referiremos a una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^n como base cuando esté construida como en la Definición 2.2.2, aunque no sea una base de diferenciación (es decir, aunque no contenga conjuntos que se contraigan sobre cualquier x).

Con la notación usada en la Definición 2.2.2, podemos definir $\mathcal{B}_c^1(x)$ como el conjunto de todos los cubos centrados en x , y con ello la base \mathcal{B}_c^1 . De esta manera, el operador $M^{\mathcal{B}_c^1}$ es exactamente el operador M_c^1 que mencionamos en el Capítulo 1. Del mismo modo, llamamos $\mathcal{B}^1(x)$ al conjunto de los cubos que contienen a x (no necesariamente centrados), \mathcal{B}^1 a la base resultante y así el operador $M^{\mathcal{B}^1}$ coincide con el operador que llamamos M^1 . Análogamente podemos definir las bases de bolas \mathcal{B}_c^2 y \mathcal{B}^2 que inducen los operadores maximales M_c^2 y M^2 respectivamente.

Entender a estos operadores en función de bases nos permitirá ejemplificar con ellos algunos conceptos como el siguiente.

Definición 2.2.3. Una base de diferenciación \mathcal{B} se dice de Busemann-Feller si todos sus elementos son abiertos y si, para cada $B \in \mathcal{B}$ y para cada $x \in B$, se tiene que $B \in \mathcal{B}(x)$.

La definición resulta más clara si notamos que las bases no centradas \mathcal{B}^1 y \mathcal{B}^2 son de Busemann-Feller, mientras que las bases centradas \mathcal{B}_c^1 y \mathcal{B}_c^2 no lo son. La comodidad de trabajar con bases de Busemann-Feller viene de que para estas bases el operador maximal asociado transforma funciones localmente integrables en funciones medibles. Esto nos permitirá asumir a lo largo de este trabajo que los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}$ son medibles, puesto que todas las bases consideradas serán de Busemann-Feller.

Definición 2.2.4. Una base \mathcal{B} se dice invariante por traslaciones cuando $B \in \mathcal{B}$ si y solo si cualquier trasladado de B es un elemento de \mathcal{B} .

A lo largo de esta tesis trabajaremos con bases invariantes por traslaciones. Un beneficio de estas bases es que, para definir completamente la base, basta definir la forma que tienen sus elementos sin decir dónde están ubicados. Por ejemplo, una base de paralelepípedos invariante por traslaciones queda completamente definida a partir de las longitudes de los paralelepípedos.

2.3. Operadores de tipo fuerte y débil

La siguiente definición aplica para operadores generales entre espacios de Lebesgue.

Definición 2.3.1. Sea T un operador lineal o sublineal y $1 \leq p, q \leq \infty$. Decimos que T es de tipo fuerte (p, q) si $T : L^p \rightarrow L^q$ es acotado, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p$.

Si $1 \leq p, q < \infty$, decimos que T es de tipo débil (p, q) si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

para todo $\lambda > 0$ y $f \in L^p$.

Si $p = q = \infty$, por convención el tipo débil se define igual que el fuerte.

Antes de continuar, queremos notar que los nombres están bien puestos.

Observación 2.3.2. Si T es de tipo fuerte (p, q) , entonces es de tipo débil (p, q) .

El siguiente teorema (llamado Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz) da una idea de las relaciones entre estas nociones.

Teorema 2.3.3. Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$ que es de tipo débil (p_0, p_0) y (p_1, p_1) . Entonces es de tipo fuerte (p, p) para todo $p \in (p_0, p_1)$.

2.4. Espacios de Orlicz

2.4.1. Espacios de Orlicz generales

El objetivo de esta sección es definir una generalización de los espacios L^p , los espacios de Orlicz, que necesitaremos para desarrollar los resultados de esta tesis.

Definición 2.4.1. Una función $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ se dice una función de Young si

- ϕ es convexa.
- $\phi(0) = 0$.
- ϕ es continua a derecha en 0.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$.

Definición 2.4.2. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y sea ϕ una función de Young. Definimos el espacio

$$\tilde{L}(\phi, \mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mu - \text{medible} : \int_{\Omega} \phi(|f|) d\mu < \infty \right\}$$

y

$$L(\phi, \mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mu - \text{medible} : \exists \alpha > 0 / \alpha f \in \tilde{L}(\phi, \mu) \right\}.$$

Este último se llama espacio de Orlicz.

Cuando resulte claro por contexto a qué medida nos referimos, notaremos a los espacios de Orlicz simplemente como $L(\phi)$, o como $\phi(L)$.

Al igual que con los espacios L^p , la aplicación de algunos conceptos requiere definir a estos espacios no como espacios de funciones, sino como espacios de funciones cocientados por la relación que identifica a dos funciones equivalentes (es decir, a aquellas que son iguales en μ -casi todo punto). Sin embargo, pasaremos de una definición a la otra alternativamente, solo haciendo la distinción cuando sea estrictamente necesario. Teniendo esto en cuenta, es fácil ver que para cada $1 \leq p < \infty$, $\phi(t) = t^p$ es una función de Young y por lo tanto que estos espacios L^p son espacios de Orlicz.

2.4.2. Los espacios de Orlicz $L \log^+ L$ y $L(1 + \log^+ L)$

En el caso particular en que $\phi(t) = t \log^+(t)$, y cuando el espacio de medida se reponga por contexto, el espacio de Orlicz asociado será notado $L \log^+ L$. Análogamente se define el espacio $L(1 + \log^+ L)$.

Una cuenta sencilla arroja que para ambos espacios, $\tilde{L}(\phi, \mu)$ coincide con $L(\phi, \mu)$. Es decir, podemos interpretar

$$L \log^+ L = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} |f| \log^+ |f| d\mu < \infty \right\}$$

y

$$L(1 + \log^+ L) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} |f|(1 + \log^+ |f|) d\mu < \infty \right\}.$$

Con esto, resulta claro que $L(1 + \log^+ L) \subset L \log^+ L$. La otra inclusión no vale en general (considerar la función $f \equiv 1$ definida sobre \mathbb{R}^n con la medida Lebesgue). Sin embargo, $L \log^+ L \subset L(1 + \log^+ L)$ sí vale cuando μ es una medida finita, y análogamente se prueba que si μ es finita sobre compactos, $L \log^+ L_{loc} = L(1 + \log^+ L)_{loc}$. Por este motivo, para la medida Lebesgue usaremos estas dos notaciones alternativamente para referirnos al mismo conjunto de funciones.

Por último, queremos mencionar que resultados análogos valen para los espacios $L(\log^+ L)^m$ y $L(1 + \log^+ L)^m$, con $m \geq 1$.

2.5. Grillas diádicas

En esta sección expondremos la teoría de los intervalos diádicos en \mathbb{R} . La definición de la grilla diádica clásica se ha extraído de [Per19]. El desarrollo de estos temas en \mathbb{R}^n y muchos otros temas asociados puede encontrarse en [LN19].

Definición 2.5.1. Llamamos \mathcal{D} a la grilla diádica clásica definida como el conjunto de intervalos

$$\mathcal{D} = \left\{ [2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)), m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definimos las generaciones \mathcal{D}_k de intervalos de longitud 2^{-k} :

$$\mathcal{D}_k = \left\{ [2^{-k}m, 2^{-k}(m+1)), m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La grilla diádica clásica satisface las siguientes tres propiedades:

(P) Propiedad de Partición. Cada generación \mathcal{D}_k constituye una partición de \mathbb{R} .

(A) Propiedad de Anidación. Si $I, J \in \mathcal{D}$, entonces o bien $I \cap J = \emptyset$, o bien $I \subset J$ o $J \subset I$.

(DH) Propiedad de Dos Hijos. Cada intervalo $I^k \in \mathcal{D}_k$ se puede escribir como la unión disjunta $I^k = I_1^{k+1} \cup I_2^{k+1}$ de dos intervalos de la $(k+1)$ -ésima generación. Solemos decir que estos dos intervalos son los dos hijos de I^k , el hijo izquierdo y el hijo derecho, o que I^k es el padre de ambos.

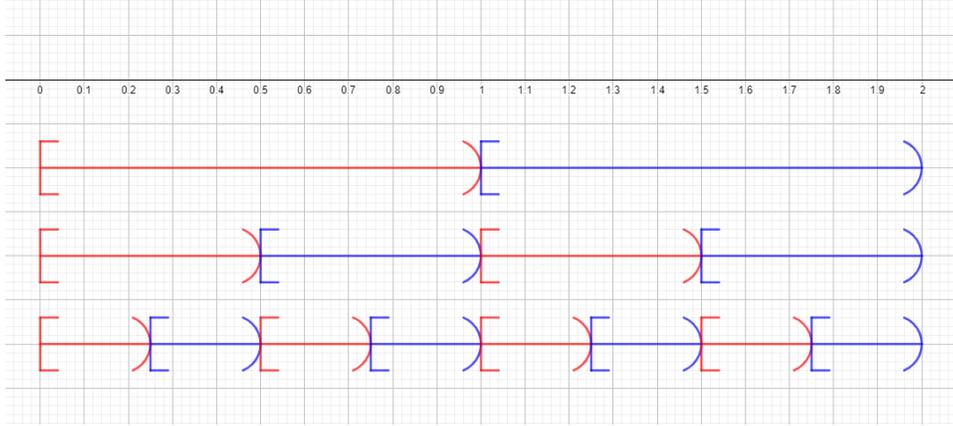


Figura 2.1: Intervalos diádicos. Hemos representado las generaciones \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 entre los números 0 y 2. Los hijos izquierdos están representados en rojo y los derechos en azul.

Extendiendo la última noción, decimos que un intervalo diádico I es descendiente de otro I' si podemos rastrear una cadena de intervalos diádicos I_1, I_2, \dots, I_j tal que I es hijo de I_1 , que a su vez es hijo de I_2 , y así sucesivamente hasta tener que I_j es hijo de I' . En este caso, decimos también que I' es ancestro de I .

Definición 2.5.2. Una grilla diádica generalizada es cualquier colección \mathcal{D} de intervalos cerrados a izquierda, organizada en generaciones y que cumple las tres propiedades (P), (A) y (DH).

A continuación enunciaremos un resultado que da cuenta de cómo cualquier intervalo puede ser aproximado por un intervalo diádico. Este resultado se basa en una construcción que Lerner y Nazarov hacen en [LN19] mientras demuestran su Teorema de las Tres Cuadrículas.

Comenzamos con la grilla clásica \mathcal{D} , y definimos

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ 2^{-k}[m, m+3], k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\tilde{\mathcal{D}}$ es el conjunto de todos los intervalos diádicos clásicos dilatados por un factor de 3 respecto de su extremo izquierdo. Este conjunto no constituye una grilla diádica generalizada, ya que sus elementos pueden intersectarse de formas que contradigan (A), pero sí está integrada por tres grillas diádicas

generalizadas distintas. En efecto,

$$\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{D}^{(j)}$$

donde

$$\mathcal{D}^{(j)} = \left\{ 2^{-k}[3m + j, 3m + j + 3), k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se puede ver que cada una de las familias $\mathcal{D}^{(j)}$ es una grilla diádica generalizada.

Teorema 2.5.3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado a izquierda. Existe un $j \in \{1, 2, 3\}$ y un $J \in \mathcal{D}^{(j)}$ tal que*

$$I \subset J \quad \text{y} \quad \frac{3}{2}\mathcal{L}^1(I) \leq \mathcal{L}^1(J) \leq 3\mathcal{L}^1(I).$$

La demostración se basa en una construcción sencilla que mostramos en la Figura 2.2.

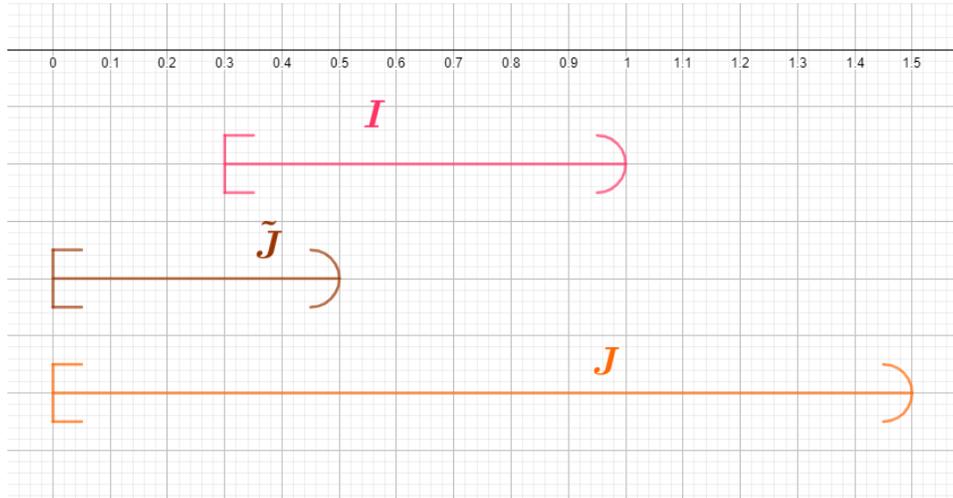


Figura 2.2: Ilustración de cómo construir el intervalo diádico generalizado J a partir de I . Primero se elige \tilde{J} como el único intervalo cerrado a izquierda que contiene al extremo izquierdo de I y tal que $\mathcal{L}^1(I)/2 \leq \mathcal{L}^1(\tilde{J}) < \mathcal{L}^1(I)$. Luego se define J como el dilatado de \tilde{J} por un factor de 3 respecto a su extremo izquierdo. J es un elemento de $\tilde{\mathcal{D}}$, contiene a I y cumple la relación de medidas deseada.

Hemos desarrollado toda la teoría de las grillas diádicas con intervalos cerrados a izquierda, para respetar la notación de las fuentes y porque simplifica algunas definiciones. Sin embargo, queremos dejar asentado que esta teoría se puede desarrollar para intervalos cerrados. Para que las propiedades funcionen en este caso, la noción de “intervalos disjuntos” debe reemplazarse por la de “intervalos esencialmente disjuntos”. Dos intervalos cerrados se dicen esencialmente disjuntos cuando su intersección tiene medida 0.

2.6. Medida Hausdorff y Fórmula de Área

En esta sección tocaremos algunos temas necesarios para entender y efectuar correctamente algunos cálculos. Comenzamos introduciendo la medida de Hausdorff s -dimensional \mathcal{H}^s . La definición de esta medida en contextos generales requiere del empleo de mucha maquinaria que no necesitaremos, así que nos limitamos a hacer la siguiente mención. Dados $n \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ una variedad de dimensión $m \leq n$, la medida Hausdorff de A coincide con la medida de A , es decir,

$$\mathcal{H}^m(A) = \int_A 1 dV,$$

con dV la forma de volumen de A . Por supuesto, esto es sumamente restrictivo, pero es suficiente para lo que necesitamos en esta tesis. Para una discusión más general y correcta sobre la medida Hausdorff, recomendamos consultar [EG92]. Notemos que, en particular, $\mathcal{H}^0(A) = \#A$.

Introducimos a su vez una versión reescalada de la medida Hausdorff que es la usual para enunciar algunos teoremas. Si ω_n es la medida Lebesgue de la bola unitaria en \mathbb{R}^n , definimos la medida m -dimensional H^m por

$$H^m(A) = \frac{\omega_n}{2^n} \mathcal{H}^m(A).$$

A continuación queremos enunciar la Fórmula de Área. Para eso, hacemos primero la siguiente definición.

Definición 2.6.1. 1. Sea $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal con $m \leq n$. Se define el Jacobiano de T como

$$JT(x) = \sqrt{\det(T^*T)}.$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal con $m \leq n$. Se define el Jacobiano de T como

$$JT(x) = \sqrt{\det(TT^*)}.$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivada acotada. Se define el Jacobiano de f como

$$Jf(x) = J(Df(x)).$$

Con esto estamos en posición de enunciar la Fórmula de Área para funciones diferenciables.

Teorema 2.6.2. *Sean $m \leq n$ y $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivada acotada. Entonces, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ medible se tiene que*

$$\int_A Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} H^0(A \cap f^{-1}(y))dH^m(y).$$

Notemos que en el caso particular en que f es inyectiva, se tiene la siguiente fórmula para la medida de A :

$$\int_A Jf(x)dx = H^m(f(A)).$$

2.7. La desigualdad de Young

La desigualdad de Young, en su versión integral clásica, dice lo siguiente.

Teorema 2.7.1. *Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función continua y estrictamente creciente tal que $h(0) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$. Entonces para todos $a, b \geq 0$ se verifica*

$$ab \leq \int_0^a h(x)dx + \int_0^b h^{-1}(y)dy. \quad (2.1)$$

La igualdad se cumple si y solo si $h(a) = b$.

La prueba es inmediata una vez que se observa la Figura 2.3. Se puede ver que vale también la siguiente desigualdad:

$$ab \leq \int_0^a \log^+ x dx + \int_0^b e^y dy. \quad (2.2)$$

Si bien $y = \log^+ x$ no es una función estrictamente creciente, su gráfico y el de $x = e^y$ coinciden en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$. Por lo tanto, una observación idéntica a la anterior prueba (2.2). De manera análoga podemos se prueba la desigualdad

$$ab \leq \int_0^a (\log^+ x)^m dx + \int_0^b e^{y^{1/m}} dy, \quad m > 0. \quad (2.3)$$

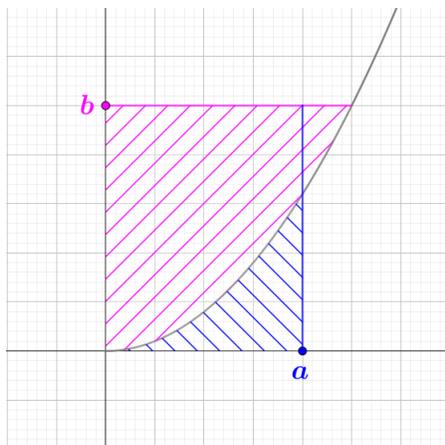


Figura 2.3: Ilustración de la desigualdad de Young. Las áreas azul y rosa representan el primer y el segundo término en el lado derecho de (2.1). El área del rectángulo determinado por el segmento azul, el segmento rosa y los ejes coordenados es exactamente ab .

A lo largo de esta tesis nos referiremos a la desigualdad (2.3) (a veces implícitamente particularizada en (2.2)) como la desigualdad de Young generalizada. Hay varias desigualdades que queremos probar en este trabajo cuya demostración detallada no haremos, pero señalaremos que la única idea importante detrás es la desigualdad de Young generalizada. A fines ilustrativos, vamos a probar una de estas desigualdades.

Observación 2.7.2. Para todos $u \geq 0, v \geq 1$ se tiene que

$$uv \leq u \log^+ u + e^v.$$

Demostración. Si $u \leq 1$, la desigualdad se cumple trivialmente. En caso contrario, invocamos (2.2) y obtenemos

$$\begin{aligned} uv &\leq \int_0^u \log^+ x dx + \int_0^v e^y dy \\ &= \int_1^u \log x dx + e^v - 1 \\ &= u(\log^+ u - 1) + e^v - 1 \leq u \log u + e^v. \end{aligned}$$

□

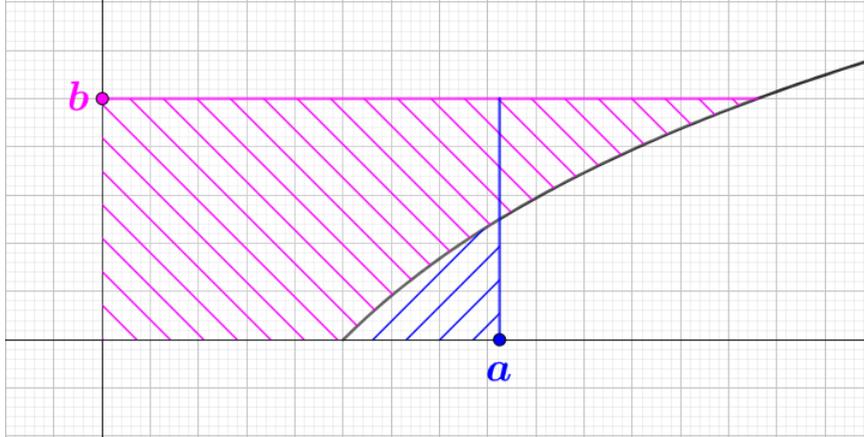


Figura 2.4: Ilustración de la desigualdad de Young generalizada.

2.8. Notación

Terminamos este capítulo con algunos comentarios notacionales.

2.8.1. Notación de Landau

Definición 2.8.1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y f y g dos funciones reales definidas en un entorno de x_0 , decimos que $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Del mismo modo, si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que f y g están definidas en $(a, +\infty)$, decimos que $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Una definición análoga puede hacerse para $-\infty$.

2.8.2. Desigualdades salvo constante

Definición 2.8.2. Dadas dos funciones reales f y g , notamos $f \lesssim g$ cuando existe una constante $C > 0$ tal que para todo x en los dominios de f y g se tiene que

$$f(x) \leq Cg(x).$$

La relación \gtrsim se define de forma análoga. Cuando $f \lesssim g$ y $f \gtrsim g$, notamos esto $f \sim g$.

Las constantes que cumplen un rol como este estarán presentes a lo largo de toda esta tesis. Usaremos distintas notaciones (C, c, c') para diferenciarlas cuando nos resulte conveniente, pero muchas veces se usará la misma letra para representar a “una constante”, cuyo valor preciso no sea importante.

Capítulo 3

Análisis multiparamétrico para la medida de Lebesgue

Este capítulo surge inspirado por la siguiente pregunta: ¿sigue valiendo el Teorema de Diferenciación de Lebesgue si tomamos el límite sobre otro tipo de “figuras”? Hemos visto que el TDL vale indistintamente para bolas y para cubos. En ambos casos, las “figuras” (y sus medidas) están determinadas por un único parámetro (el radio, en el caso de las bolas, y la longitud de la arista, en el caso de los cubos). El estudio de este problema sobre figuras que dependen de una cantidad mayor de parámetros recibe el nombre de “Análisis multiparamétrico”.

Así como está formulada la pregunta, el espectro de figuras posibles es amplísimo. En pos de reducir un poco el espectro de situaciones a encarar, nos limitaremos en esta tesis a trabajar con paralelepípedos con aristas paralelas a los ejes coordenados. Tomando la notación de [Sor86], haremos la siguiente

Definición 3.0.1. Notamos

$$\mathcal{B} \equiv [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (3.1)$$

a la base de paralelepípedos en \mathbb{R}^n definida como

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i=1}^n I_i, \quad I_i = [\alpha_i, \beta_i], \quad \beta_i - \alpha_i =: a_i > 0 \right\}. \quad (3.2)$$

Concretamente, \mathcal{B} denota a la clase de todos los intervalos de \mathbb{R}^n cuya arista paralela al eje x_i tiene longitud a_i . Siempre que usemos esta notación, los a_i serán parámetros que recorren algún subconjunto de los números reales positivos, o funciones de tales parámetros.

Amerita notar que estamos definiendo a los elementos de \mathcal{B} solamente en función de las longitudes de sus aristas; esto no constituye un problema puesto que en esta sección trabajaremos siempre con bases invariantes por traslaciones.

En un primer momento nos interesará conocer qué ocurre en los casos en que los n valores a_1, \dots, a_n son parámetros positivos libres e independientes entre sí. Posteriormente nos enfocaremos en el caso donde las longitudes de las aristas son funciones de otros parámetros. En el primer caso, contamos con un resultado ya cerrado. Jessen, Marzinkiewicz y Zygmund probaron en [JMZ35] que un análogo del TDL vale para toda $f \in L(\log^+ L)^{n-1}$. Más aún, el resultado es sharp en el sentido de que el teorema deja de valer si consideramos el espacio de Orlicz $L(\phi)$ con ϕ alguna función que verifica $\phi(t) = o(t(\log^+ t)^{n-1})$ cuando $t \rightarrow 0$.

Al querer ir más allá de este caso ya resuelto, las cosas se complican. Consideraremos funciones ϕ_1, \dots, ϕ_n , con $\phi_i : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ crecientes en cada variable, y una base

$$\mathcal{B} \equiv [\phi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_k)].$$

Cuándo estos problemas estaban empezando a ser planteados, se conjeturó que las propiedades de diferenciabilidad de la base \mathcal{B} están determinadas por la cantidad de parámetros de los que dependen las $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$.

Conjetura 3.0.2. Sean $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ como antes. La base

$$\mathcal{B} \equiv [\phi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_k)].$$

diferencia a la familia $L(\log^+ L)_{loc}^{k-1}$.

Sobre el final de este capítulo veremos que esta conjetura es falsa en general. El problema, entonces, consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre las ϕ_i para probar algún teorema de diferenciación sobre ellas.

3.1. La base B_n de paralelepípedos con aristas libres

El objetivo de esta primera sección es responder a la siguiente pregunta: ¿qué clase de funciones pueden ser diferenciadas por la base de todos los paralelepípedos de \mathbb{R}^n ? La respuesta a esta pregunta la dieron Jessen, Marzinkiewicz y Zygmund en [JMZ35], y lo que probaron es que las funciones

que son diferenciadas por esta base son “exactamente” $L(\log^+ L)_{loc}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, en un sentido de la palabra “exactamente” que quedará claro sobre el final de esta sección.

Antes de embarcarnos en esta empresa, nos interesa precisar una cuestión. En todos los resultados de [JMZ35], los autores trabajan con funciones con dominio en $[0, 1]^n$. Para iniciar el análisis mantendremos esta hipótesis, que simplifica la escritura de las demostraciones, pero queremos explicitar que resultados idénticos valen sobre cualquier otro cubo cuyas aristas midan 1. Sobre el final de la sección resultará claro cómo esto permite probar lo que buscamos.

En este contexto, será de utilidad hacer algunas definiciones.

Definición 3.1.1. Definimos $\mathcal{B}_n([0, 1]^n)$ como la familia de subconjuntos de $[0, 1]^n$ formada por todos los paralelepípedos con aristas paralelas a los ejes coordenados.

En la siguiente definición, adoptamos la notación de [JMZ35].

Definición 3.1.2. Sea $f \in L([0, 1]^n)$. Definimos $f_* : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ como la función

$$f_*(x) = \limsup_{\delta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R |f(y)| dy,$$

donde todos los R considerados verifican que $x \in R \in \mathcal{B}_n([0, 1]^n)$, y $\delta(R)$ denota el diámetro de R .

En \mathbb{R} ya tenemos el resultado que buscamos, puesto que allí coincide con el Teorema de Diferenciación de Lebesgue. A continuación, vamos a probar el análogo de este teorema en $[0, 1]^2$.

Vamos a necesitar varios resultados previos para alcanzar nuestro objetivo. Comenzamos enunciando el siguiente lema para funciones con dominio en $[0, 1]$:

Lema 3.1.3. *El operador maximal $M : L \log^+ L([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$ es acotado. Más explícitamente, existen dos constantes universales $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$\int_0^1 Mf(x) dx \leq c_1 \int_0^1 |f(x)| \log^+ |f(x)| dx + c_2. \quad (3.3)$$

La demostración de este lema requerirá a su vez de algunos resultados auxiliares. Notemos que por las propiedades de la reordenada decreciente, es suficiente probar (3.3) para f una función decreciente y no negativa sobre $[0, 1]$. Veamos que para estas funciones el operador maximal tiene una forma particular.

Observación 3.1.4. Si f definida sobre $[0, 1]$ es no negativa y decreciente,

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Demostración. Comencemos comparando esta expresión con la integral promediada sobre el intervalo $[a, x]$ con $0 < a < x$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= -\frac{1}{x} \int_0^a f(t) dt + \frac{a}{x(x-a)} \int_a^x f(t) dt \\ &\leq -\frac{1}{x} a f(a) + \frac{a}{x(x-a)} (x-a) f(a) = 0. \end{aligned}$$

En segundo lugar, comparemos esta expresión con la integral promediada sobre el intervalo $[0, b]$ con $x < b$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b f(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{b} \int_x^b f(t) dt + \frac{x-b}{xb} \int_0^x f(t) dt \\ &\leq \frac{1}{b} (b-x) f(x) + \frac{x-b}{xb} x f(x) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando estas dos desigualdades, obtenemos que para cualquier intervalo $[a, b]$ que contiene a x ,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \frac{1}{b} \int_0^b f \leq \frac{1}{x} \int_0^x f.$$

□

A continuación probaremos el siguiente lema auxiliar, cuya demostración hemos adaptado de [HL30].

Lema 3.1.5. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrable. Entonces*

$$\int_0^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt dx, \quad (3.4)$$

si alguna de las dos integrales es finita.

Demostración. Aplicando integración por partes tenemos que para todo $0 < \epsilon < 1$

$$\int_\epsilon^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt dx - \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \int_0^\epsilon f(t) dt. \quad (3.5)$$

Si la segunda integral en (3.4) es finita, entonces (3.5) arroja

$$\int_{\epsilon}^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt dx$$

y por lo tanto la primera integral es finita también. Si ahora suponemos que la primera integral en (3.4) es finita, tenemos que

$$\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \int_0^{\epsilon} f(t) dt \leq \int_0^{\epsilon} f(t) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

y por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \int_0^{\epsilon} f(t) dt = 0.$$

Con esto, (3.5) prueba el lema y la finitud de la segunda integral a partir de la finitud de la primera. \square

Demostración del Lema 3.1.3. Como $f \in L \log^+ L([0, 1])$, f es integrable. Podemos suponer que f es positiva y decreciente, y por lo tanto que la forma de Mf es la que nos da la Observación 3.1.4. Esto junto con (3.4) nos permite reescribir la desigualdad que queremos probar como

$$\int_0^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq c_1 \int_0^1 |f(x)| \log |f(x)| dx + c_2. \quad (3.6)$$

Para probar (3.6), apelaremos a una desigualdad que es consecuencia de la desigualdad de Young generalizada. Aplicamos

$$uv \leq c(u \log u + e^{v-1}), \quad u, v > 0,$$

para $u = f(x)$ y $v = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{x}\right)$ y $c > 0$ una constante que no depende de u ni v . De esta manera tenemos que

$$\frac{1}{2} f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq c f(x) \log f(x) + c e^{\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{x}\right) - 1} = c f(x) \log f(x) + \frac{c}{e\sqrt{x}}.$$

Con esto, (3.6) queda

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \log\left(\frac{1}{x}\right) dx &\leq 2 \int_0^1 \left(c f(x) \log f(x) + \frac{c}{e\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2c \int_0^1 f(x) \log f(x) dx + \frac{4c}{e}, \end{aligned}$$

y el Lema 3.1.3 queda probado. \square

A continuación, vamos a obtener un resultado parecido (aunque no análogo) al Lema 3.1.3 en \mathbb{R}^2 .

Lema 3.1.6. *Sea $f \in L \log^+ L([0, 1]^2)$. Entonces $f_* \in L^1([0, 1]^2)$. Más explícitamente,*

$$\int_{[0,1]^2} f_*(x, y) dx dy \leq c_1 \int_{[0,1]^2} |f(x, y)| \log^+ |f(x, y)| dx dy + c_2,$$

con c_1 y c_2 las mismas constantes del Lema 3.1.3.

Demostración. Esta prueba descansa fuertemente en lo siguiente: si tomamos una función integrable de n variables y la integramos sobre el cubo $[0, 1]^{n-1}$ asociado a $n - 1$ de sus variables, y luego integramos sobre la variable restante entre 0 y 1, lo que obtenemos es igual a integral de la función sobre $[0, 1]^n$, porque por Fubini esta última integral es igual a las integrales iteradas. Esta idea será retomada al generalizar este resultado a \mathbb{R}^n .

Comenzamos definiendo la maximal en la dirección y asociada a f como

$$M_y f(x, y) = \sup_{0 < t_1 < y < t_2 < 1} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(x, v)| dv.$$

Como $f \in L \log^+ L([0, 1]^2)$, para casi todo $x \in [0, 1]$ se verifica que $f(x, \cdot) \in L \log^+ L([0, 1])$ y por lo tanto podemos aplicar el Lema 3.1.3 para concluir que

$$\int_0^1 M_y f(x, v) dv \leq c_1 \int_0^1 |f(x, v)| \log^+ |f(x, v)| dv + c_2$$

para casi todo $x \in [0, 1]$. A continuación podemos integrar a ambos lados respecto de x para obtener

$$\int_{[0,1]^2} M_y f(x, v) dv dx \leq c_1 \int_{[0,1]^2} |f(x, v)| \log^+ |f(x, v)| dv dx + c_2. \quad (3.7)$$

Notemos que las constantes se preservan porque integramos sobre intervalos de longitud 1. Esto también ocurriría si en vez de este cubo estuviésemos considerando cualquier cubo cuyas aristas midiesen 1.

Ahora bien, como $M_y f(x, y)$ es integrable sobre $[0, 1]^2$, en particular $M_y f(\cdot, y) \in L^1([0, 1])$ para casi todo $y \in [0, 1]$. Luego por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se tiene que para casi todo $y \in [0, 1]$

$$\limsup_{(s_2 - s_1) \rightarrow 0} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} M_y f(u, y) du = M_y f(x, y), \quad (3.8)$$

donde todos los intervalos considerados verifican que $x \in [s_1, s_2]$. Esto nos permite estimar, para casi todo $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$\begin{aligned} f_*(x, y) &= \limsup_{\delta([s_1, s_2] \times [t_1, t_2]) \rightarrow 0} \frac{1}{(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} |f(u, v)| \, dudv \\ &\leq \limsup_{\delta([s_1, s_2]) \rightarrow 0} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} M_y f(u, y) \\ &= M_y f(x, y), \end{aligned}$$

donde todos los intervalos considerados en el primer límite superior verifican que $(x, y) \in [s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$. La primera desigualdad se sigue de la definición de $M_y f$ y la segunda igualdad se sigue de (3.8). Luego el resultado deseado se desprende de esta última desigualdad y de (3.7). \square

El Lema 3.1.6 será crucial para estudiar bajo qué condiciones se puede diferenciar a una función f . A continuación, necesitamos probar una suerte de resultado de densidad de las funciones continuas en $L(1 + \log^+ L)([0, 1]^2)$. Lo probaremos en este contexto porque es el que necesitamos, pero es claro que vale sobre cualquier dominio con medida finita.

Lema 3.1.7. *Sean $f \in L(1 + \log^+ L)([0, 1]^2)$ y $\epsilon \in (0, 1)$. Entonces, existe una función $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que*

$$\int_{[0, 1]^2} |f - \varphi| (1 + \log^+ |f - \varphi|) < \epsilon. \quad (3.9)$$

Demostración. Sabemos que $|f|(1 + \log^+ |f|) \in L^1([0, 1]^2)$. Luego por absoluta continuidad existe un $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset [0, 1]^2$ medible

$$\mathcal{L}^2(A) < \delta \implies \int_A |f| (1 + \log^+ |f|) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Elegimos a su vez un $\lambda > 1$ tal que, aplicando Tchebyshev, obtenemos

$$\mathcal{L}^2(\{|f| > \lambda\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda} < \delta, \quad (3.10)$$

y escribimos

$$f_\lambda = f \chi_{\{|f| \leq \lambda\}} \in L^\infty([0, 1]^2) \subset L^p([0, 1]^2) \quad \forall p \geq 1.$$

A continuación definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, una función $\tilde{\varphi}_k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\|f_\lambda - \tilde{\varphi}_k\|_{1 + \frac{1}{k}} < \frac{1}{k}.$$

Estas funciones necesitan ser levemente corregidas para cumplir lo que necesitamos de ellas. Por eso, definimos las funciones φ_k como

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_k(x) & \text{si } |\tilde{\varphi}_k(x)| \leq \lambda \\ \lambda & \text{si } \tilde{\varphi}_k(x) > \lambda \\ -\lambda & \text{si } \tilde{\varphi}_k(x) < -\lambda. \end{cases}$$

Ver Figura 3.1. Comencemos notando que

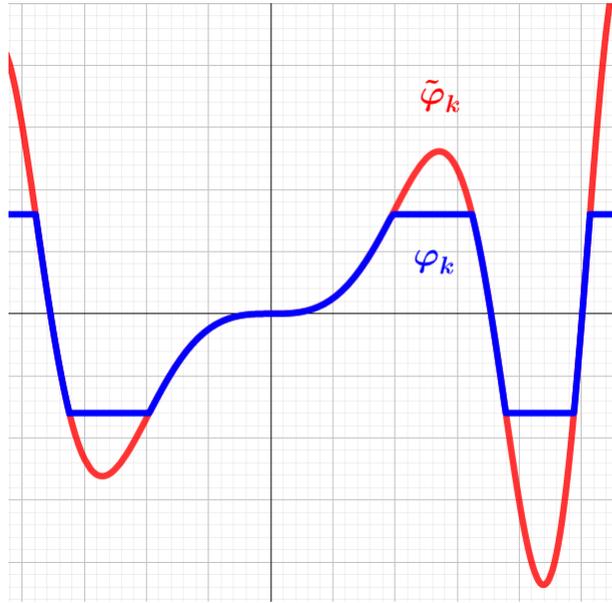


Figura 3.1: Funciones $\tilde{\varphi}_k$ y φ_k . La última es una versión de la primera truncada para nunca alcanzar valores de módulo mayor que λ .

$$|\varphi_k(x) - f_\lambda(x)| = \begin{cases} |\tilde{\varphi}_k(x) - f_\lambda(x)| & \text{si } |\tilde{\varphi}_k(x)| \leq \lambda \\ \lambda - f_\lambda(x) \leq |\tilde{\varphi}_k(x) - f_\lambda(x)| & \text{si } \tilde{\varphi}_k(x) > \lambda \\ \lambda + f_\lambda(x) \leq |\tilde{\varphi}_k(x) - f_\lambda(x)| & \text{si } \tilde{\varphi}_k(x) < -\lambda, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\|f_\lambda - \varphi_k\|_{1+\frac{1}{k}} \leq \|f_\lambda - \tilde{\varphi}_k\|_{1+\frac{1}{k}} < \frac{1}{k}.$$

A su vez, de la continuidad de $\tilde{\varphi}_k$ se obtiene que φ_k es continua. Basta ver que para todo intervalo abierto (a, b) , $\varphi_k^{-1}(a, b) \subset [0, 1]^2$ es abierto. Separamos

en casos según si (a, b) incluye o no a λ y $-\lambda$ y tenemos que

$$\varphi_k^{-1}(a, b) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_k^{-1}(a, b) & \text{si } -\lambda < a < b < \lambda \\ \tilde{\varphi}_k^{-1}(a, +\infty) & \text{si } -\lambda < a < \lambda \leq b \\ \tilde{\varphi}_k^{-1}(-\infty, b) & \text{si } a \leq -\lambda < b < \lambda \\ [0, 1]^2 & \text{si } a \leq -\lambda < \lambda \leq b, \end{cases}$$

que son todos abiertos porque $\tilde{\varphi}_k$ es continua. Luego, las φ_k cumplen las mismas propiedades que las $\tilde{\varphi}_k$, pero además su imagen está incluida en $[-\lambda, \lambda]$, como que f_λ .

A continuación, vamos a probar que las funciones $(\varphi_k)_k$ convergen a f_λ en medida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\{|f_\lambda - \varphi_k| > \eta\}) &\leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1+\frac{1}{k}} \|f_\lambda - \varphi_k\|_{1+\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1+\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{k}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{1+\frac{1}{k}} \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de Tchevycheff.

Por lo tanto existe una subsucesión de las $(\varphi_k)_k$ que converge a f_λ en casi todo punto. Para simplificar la notación, la escribimos simplemente $(\varphi_m)_m$, aclarando que m recorre un subconjunto de \mathbb{N} .

Por continuidad, es claro que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int |f_\lambda(x) - \varphi_m(x)|(1 + \log^+ |f_\lambda(x) - \varphi_m(x)|) = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Pero como

$$|f_\lambda - \varphi_m|(1 + \log^+ |f_\lambda - \varphi_m|) \leq 2\lambda(1 + \log^+(2\lambda)) \in L^1([0, 1]^2),$$

estamos en las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada, y tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{[0, 1]^2} |f_\lambda - \varphi_m|(1 + \log^+ |f_\lambda - \varphi_m|) = 0. \quad (3.11)$$

Estamos finalmente en condiciones de probar el enunciado del teorema. Elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que la integral dentro del límite en (3.11) sea menor que

$\epsilon/2$. De esta forma,

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^2} |f - \varphi_m| (1 + \log^+ |f - \varphi_m|) \\ &= \int_{\{|f|>\lambda\}} |f - \varphi_m| (1 + \log^+ |f - \varphi_m|) \\ & \quad + \int_{\{|f|\leq\lambda\}} |f - \varphi_m| (1 + \log^+ |f - \varphi_m|) = I + II. \end{aligned}$$

El primer miembro lo controlamos apelando a la definición de φ_m allí:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{f>\lambda\}} (f - \lambda) (1 + \log^+ (f - \lambda)) + \int_{\{f<-\lambda\}} (-f - \lambda) (1 + \log^+ (-f - \lambda)) \\ &\leq \int_{\{|f|>\lambda\}} |f| (1 + \log^+ (|f|)) < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a (3.10) y a la absoluta continuidad. El segundo miembro se controla por

$$\begin{aligned} II &= \int_{\{f\leq\lambda\}} |f - \varphi_m| (1 + \log^+ |f - \varphi_m|) \\ &\leq \int_{[0,1]^2} |f_\lambda - \varphi_m| (1 + \log^+ |f_\lambda - \varphi_m|) < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. \square

Finalmente, estamos en posición de probar el Teorema de Diferenciación para \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.1.8. $B_2([0, 1]^2)$ diferencia $L \log^+ L([0, 1]^2)$.

Demostración. Sea $f \in L \log^+ L([0, 1]^2)$. Nuestro objetivo es ver que la igualdad

$$\lim_{R \searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R f(y) dy = f(x)$$

se verifica para casi todo $x \in [0, 1]^2$, tomando siempre paralelepípedos R tales que $x \in R \in B_2([0, 1]^2)$.

Fijemos $\epsilon > 0$. Comenzamos notando que para cualquier función $g \in L \log^+ L([0, 1]^2)$, $(\lambda g)_* = |\lambda| g_*$, y por lo tanto la desigualdad del Lema 3.1.6 aplicada a λf queda

$$\int_{[0,1]^2} f_*(x) dx \leq c_1 \int_{[0,1]^2} |f(x)| \log^+ |\lambda f(x)| dx + \frac{c_2}{\lambda}. \quad (3.12)$$

Fijamos ahora mismo un $\lambda > e$ suficientemente grande tal que $c_2/\lambda < \epsilon/2$, e invocamos el Lema 3.1.7 para escribir a f como

$$f = \varphi + \psi$$

con $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y

$$\int_{[0,1]^2} |\psi(x)|(1 + \log^+ |\psi(x)|) < \min \left\{ \epsilon, \frac{\epsilon}{2c_1 \log \lambda} \right\}. \quad (3.13)$$

De esta manera, aplicando la desigualdad (3.12) a ψ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \psi_*(x) dx &< c_1 \int_{[0,1]^2} |\psi(x)| (\log \lambda + \log^+ |\psi(x)|) dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &< c_1 \log \lambda \int_{[0,1]^2} |\psi(x)| (1 + \log^+ |\psi(x)|) dx + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde la última desigualdad vale por (3.13).

Ahora bien, (3.13) implica también que

$$\int_{[0,1]^2} |\psi(x)| dx \leq \int_{[0,1]^2} |\psi(x)|(1 + \log^+ |\psi(x)|) < \epsilon. \quad (3.15)$$

Definimos el conjunto

$$E(\epsilon) = \{x \in [0, 1]^2 / |\psi(x)| > \sqrt{\epsilon} \text{ o } |\psi_*(x)| > \sqrt{\epsilon}\},$$

y por Tchebyshev tenemos que

$$\mathcal{L}^2(E(\epsilon)) \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{[0,1]^2} |\psi(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{[0,1]^2} |\psi_*(x)| dx < 2\sqrt{\epsilon},$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a (3.14) y (3.15).

De esta manera, obtenemos que para todo x que no pertenezca a $E(\epsilon)$ se tiene, eligiendo paralelepípedos $x \in R \in B_2([0, 1]^2)$,

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta(R) \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R f(y) dy - f(x) \right| &\leq \\ &\leq \limsup_{\delta(R) \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R \varphi(y) dy - \varphi(x) \right| + \limsup_{\delta(R) \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R \psi(y) dy - \psi(x) \right| \\ &\leq \psi_*(x) + |\psi(x)| < 2\sqrt{\epsilon}, \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a la escritura $f = \varphi + \psi$, y en la segunda a que el teorema claramente vale para funciones continuas. Haciendo tender ϵ a 0, obtenemos un conjunto E de medida 0 fuera del cual

$$\lim_{R \searrow x} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \int_R f(y) dy - f(x) \right| = 0. \quad (3.16)$$

Esto concluye la demostración del teorema. \square

Finalmente, pasamos al caso en \mathbb{R}^n , donde el resultado es el siguiente:

Teorema 3.1.9. $\mathcal{B}_n([0, 1]^n)$ diferencia $L(\log^+ L)^{n-1}([0, 1]^n)$.

La prueba es análoga al caso en \mathbb{R}^2 , aunque es meritorio dejar asentadas las diferencias. El primer paso para probar el Teorema 3.1.8 fue el Lema 3.1.3. A continuación trabajaremos con funciones en $L(\log^+ L)^{n-1}([0, 1]^n)$, por lo que necesitaremos un nuevo lema que nos permita controlar el comportamiento del operador maximal para estas funciones. Dicho lema es el siguiente.

Lema 3.1.10. *El operador $M : L(\log^+ L)^k([0, 1]) \longrightarrow L(\log^+ L)^{k-1}([0, 1])$ es acotado. Más explícitamente, existen dos constantes universales $a_k, b_k > 0$ tales que*

$$\int_0^1 Mf(x)(\log^+ Mf(x))^{k-1} dx \leq a_k \int_0^1 |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^k dx + b_k. \quad (3.17)$$

Demostración. Al igual que en el Lema 3.1.3, asumimos que f es no negativa y decreciente, y a continuación definimos $\phi(x) = x(\log^+ x)^{k-1}$. Es fácil verificar que ϕ es convexa. La Observación 3.1.4 nos permite reescribir el lado izquierdo de (3.17) de esta forma:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Mf(x)(\log^+ Mf(x))^{k-1} dx &= \int_0^1 \phi \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\int_0^x \phi(f(t)) dt \right) dx \\ &= \int_0^1 M(\phi(f))(x) dx \end{aligned}$$

donde la desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Jensen. De esta manera, podemos aplicar el Lema 3.1.3 para obtener

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Mf(\log^+ Mf)^{k-1} dx &\leq c_1 \int_0^1 \phi(f) \log^+(\phi(f)) dx + c_2 \\
&= c_1 \int_0^1 f(\log^+ f)^{k-1} \log^+(f(\log^+ f)^{k-1}) dx + c_2 \\
&\leq c_1 k \int_0^1 f(\log^+ f)^k dx + c_2,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene de aplicar dos veces la desigualdad $\log^+(w) \leq w$ para todo $w > 0$.

El siguiente paso era probar el Lema 3.1.6, que permitía ejercer un control sobre la integral de f_* sobre $[0, 1]^2$ a partir de la integral de $|f| \log^+ |f|$. Como ahora trabajamos con funciones en $L(\log^+ L)^{n-1}([0, 1]^n)$, necesitaremos adaptar los argumentos en función de esto, contando ahora con una herramienta más potente, el Lema 3.1.10.

En aras de simplificar, contaremos la idea de la adaptación. Al igual que al principio de la prueba del Teorema 3.1.6, definimos la función maximal asociada a f en una variable (por ejemplo, $M_{x_n} f$), y en virtud del Lema 3.1.10, podemos acotar

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 M_{x_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, v) (\log^+ M_{x_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, v))^{n-2} dv \\
&\leq a_{n-1} \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_{n-1}, v)| (\log^+ |f(x_1, \dots, x_{n-1}, v)|)^{n-1} dv + b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, viendo a $M_{x_n} f$ como función en otra variable, digamos x_{n-1} , podemos aplicar el Lema 3.1.10, ahora con $k = n - 2$ y tomando maximal respecto de x_{n-1} . De esta forma se ve que $M_{x_n} f \in L(\log^+ L)^{n-2}$ y obtenemos la cota que del Lema 3.1.10. De ahí en más, el resto es iterar, apelar a Fubini para asegurarse de que siempre estamos integrando funciones integrables y para convertir integrales iteradas en integrales múltiples. Después, basta recordar la segunda mitad de la prueba de 3.1.6 para concluir que

$$\int_{[0,1]^n} f_*(x) dx \leq \tilde{a} \int_{[0,1]^n} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx + \tilde{b}$$

con \tilde{a}, \tilde{b} constantes positivas. El Lema 3.1.7 se adapta agregando un exponente $n - 1$ y el resto de la prueba se sigue de manera análoga a como se hizo la del Teorema 3.1.8.

□

Hemos probado el Teorema de Diferenciación que buscábamos para funciones definidas sobre $[0, 1]^n$. Recordando el comentario que hemos hecho de que una demostración análoga vale para funciones definidas sobre cualquier cubo de \mathbb{R}^n cuyas aristas midan 1, estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 3.1.11. \mathcal{B}_n diferencia $L(\log^+ L)_{loc}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in L(\log^+ L)_{loc}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Escribimos a \mathbb{R}^n como una unión numerable de cubos cuyas aristas midan 1 (por ejemplo, se puede considerar los cubos con vértices en \mathbb{Z}^n). Tomemos un cubo Q arbitrario entre estos. Se verifica que $f|_Q \in L(\log^+ L)^{n-1}(Q)$, y por lo tanto el Teorema 3.1.9 garantiza que para casi todo $x \in Q$

$$\lim_{R \searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R f(y) dy = f(x), \quad (3.18)$$

considerando siempre $R \in \mathcal{B}_n(Q)$.

Nuestro objetivo es probar esta misma igualdad para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y con $R \searrow x$ para paralelepípedos $R \in \mathcal{B}_n$. Si x es punto interior de Q , la condición $R \searrow x$ para $R \in \mathcal{B}_n$ nos dice que cada vez que tomemos una sucesión de paralelepípedos R_k que se contrae a x , existe un k_0 a partir del cual todos los R_k son elementos de $\mathcal{B}_n(Q)$. Por lo tanto, el límite que deseamos probar vale por (3.18) para casi todo punto interior de Q .

Como el razonamiento anterior vale para todo Q , como los cubos considerados son numerables, y como la frontera de cada cubo tiene medida nula, resulta que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{R \searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R f(y) dy = f(x),$$

para $R \in \mathcal{B}_n$. □

Queremos destacar que hemos probado este teorema de diferenciación de manera directa, sin recurrir a una desigualdad modular débil para la maximal. No es que esto no pueda hacerse (ver [CF75]), pero en este caso no fue necesario. Los problemas que examinaremos en la sección siguiente sí necesitarán de estas desigualdades.

Terminamos esta sección comentando que el espacio $L(\log^+ L)_{loc}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ es de alguna forma el espacio más grande de funciones que pueden ser diferenciadas por todo \mathcal{B}_n . El resultado usado para concluir esto se enuncia también con dominio en $[0, 1]^n$.

Teorema 3.1.12. Sea $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente que verifica

$$\phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{t} > 0,$$

y sea $L_\phi([0, 1]^n)$ el espacio de Orlicz de todas las funciones tales que $\phi(|f|)$ es integrable sobre $[0, 1]^n$.

Si $\mathcal{B}_n([0, 1]^n)$ diferencia a cada $f \in L_\phi$, entonces existe una constante positiva c tal que $\phi(t) > ct(\log^+ t)^{n-1}$.

Lo que este teorema nos dice es que si $\mathcal{B}_n([0, 1]^n)$ diferencia a todas las funciones de un espacio de Orlicz $L_\phi([0, 1]^n)$, entonces $L_\phi([0, 1]^n) \subset L(\log^+ L)^{n-1}([0, 1]^n)$. No desarrollaremos la demostración de este resultado aquí, ya que consideramos que las ideas necesarias exceden los temas que esta tesis pretende abarcar. Puede encontrarse la prueba en [JMZ35, p.226].

3.2. Aristas como funciones de parámetros

Ahora ampliaremos el espectro del problema. Dadas funciones ϕ_1, \dots, ϕ_n , consideramos bases de diferenciación

$$\mathcal{B} \equiv [\phi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_k)].$$

La pregunta ahora es: ¿qué condiciones deben pedírseles a las funciones $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ para garantizar que la base \mathcal{B} diferencie a alguna clase de funciones? Esta pregunta es sumamente amplia, y por lo tanto hay muchos acercamientos posibles a una respuesta. Comenzaremos con un resultado de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund, también de [JMZ35].

Antes de enunciar el resultado, haremos una definición que simplificará la tarea de hablar de los paralelepípedos con los que trabajaremos.

Definición 3.2.1. Dado un paralelepípedo $R \subset \mathbb{R}^n$ con aristas paralelas a los ejes coordenados, definimos para cada $1 \leq i \leq n$ su x_i -sidelength como la longitud de la arista de R que es paralela al eje x_i . También usaremos la palabra sidelength para referirnos a la longitud de una arista de un paralelepípedo sin especificar la dirección de la misma.

Notemos que con esta definición, estamos diciendo que la base \mathcal{B} está compuesta por paralelepípedos cuya x_i -sidelength es igual a $\phi_i(t_1, \dots, t_k)$.

Ahora sí, enunciamos el resultado de [JMZ35]. Se trata de un teorema relativamente sencillo que aborda la situación donde todas las funciones dependen de una única variable (es decir, el caso $k = 1$).

Teorema 3.2.2. Sean para cada $1 \leq j \leq n$, $\phi_j : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes, continuas y tales que $\phi_j(0) = 0$ y $\phi_j(t) > 0$ si $t > 0$. Entonces la base de diferenciación

$$\mathcal{B} \equiv [\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)]$$

diferencia a $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. La prueba es esencialmente la misma que la del TDL. Lo único que debemos hacer es adaptar el Lema de Cubrimiento de Vitali para que, en vez aplicarse a cubos o bolas, sirva para paralelepípedos $R \in \mathcal{B}$. A continuación, explicaremos las diferencias entre la demostración para cubos y para el caso que nos compete.

En la demostración del Lema de Vitali para cubos, el n -ésimo cubo de la subfamilia elegida era el que tenía intersección vacía con todos los cubos ya elegidos y tenía la arista de mayor longitud. En el contexto de este teorema, notamos que si $R, R' \in \mathcal{B}$,

$$R = [\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)] \quad \text{y} \quad R' = [\phi_1(t'), \dots, \phi_n(t')],$$

y por el crecimiento de las ϕ_j

$$\phi_1(t) \leq \phi_1(t') \iff t \leq t' \iff \phi_j(t) \leq \phi_j(t') \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

De esta manera, la familia \mathcal{B} es “monótona” en el siguiente sentido: dados dos paralelepípedos R y R' de la familia, todas las sidelengths de alguno de los dos son mayores o iguales que las respectivas sidelengths del otro. Así, para demostrar el Lema de Vitali elegimos el n -ésimo paralelepípedo como aquel que es disjunto con los ya elegidos y que maximiza las longitudes de (todas) sus aristas.

Para dar por demostrado el teorema, amerita probar que si $R, R' \in \mathcal{B}$, $R \cap R' \neq \emptyset$ y las aristas de R' son mayores o iguales que las de R entonces $R \subset 3R'$, donde $3R'$ es el paralelepípedo que resulta de dilatar a R' por un factor 3 respecto de su centro. Llamamos $x = (x_1, \dots, x_n)$ a algún punto en $R \cap R'$ y escribimos a los paralelepípedos como productos de intervalos:

$$\begin{aligned} R &= I_1 \times \dots \times I_n \\ R' &= I'_1 \times \dots \times I'_n \\ 3R' &= 3I'_1 \times \dots \times 3I'_n, \end{aligned}$$

con $3I'_j \subset \mathbb{R}$ el intervalo con el mismo centro que I'_j y dilatado por un factor de 3. Pero entonces resulta claro que

$$x_j \in I_j \cap I'_j \implies I_j \subset 3I'_j \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

y por lo tanto

$$R \subset 3R'.$$

□

Después de obtener un resultado para funciones que dependen de un parámetro, es natural preguntarse qué ocurre para funciones que dependen de dos parámetros. En este caso, las respuestas son escasas y parciales. Es en este momento donde las desigualdades modulares débiles nos permitirán obtener conclusiones de diferenciabilidad. En particular, presentaremos ahora un resultado de Córdoba, quien en [Cór78] demostró una desigualdad modular débil en \mathbb{R}^3 para el operador maximal asociado a una familia de paralelepípedos del tipo que nos interesa. En la próxima subsección estudiaremos dicho resultado, y posteriormente investigaremos algunas formas de ampliarlo para arribar a conclusiones en casos más generales.

3.2.1. La desigualdad débil de Córdoba

El resultado que deseamos probar es el siguiente:

Teorema 3.2.3. *Sea \mathcal{B} una familia de paralelepípedos en \mathbb{R}^3 . Para cada $R \in \mathcal{B}$, notemos x_R, y_R, z_R a sus x -sidelength, y -sidelength y z -sidelength respectivamente. Si para cualesquiera dos R y R' en \mathcal{B} se verifica que*

$$z_R > z_{R'} \implies x_R \geq x_{R'} \text{ o } y_R \geq y_{R'} \quad (3.19)$$

entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^3(\{x \in \mathbb{R}^3 : M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right), \quad (3.20)$$

donde

$$M^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mathcal{L}^3(R)} \int_R |f|.$$

La desigualdad modular débil (3.20) para $M^{\mathcal{B}}$ permite afirmar que \mathcal{B} diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$, como veremos en la subsección siguiente. De esta manera, nuestro objetivo al trabajar con una base será probar que cumple la hipótesis (3.19). Notemos que esta hipótesis es equivalente a

$$x_R < x_{R'} \text{ y } y_R < y_{R'} \implies z_R \leq z_{R'}.$$

Esta condición puede ser interpretada de la siguiente manera: si la base de un paralelepípedo R' de \mathcal{B} es más grande que la de otro paralelepípedo R

de la misma familia (donde “más grande” es entendido como que ambos lados tienen longitud estrictamente mayor), la altura de R' debe ser necesariamente mayor o igual que la altura de R . En espíritu, esta condición impide la degeneración de los elementos de \mathcal{B} en paralelepípedos con bases arbitrariamente grandes y alturas arbitrariamente chicas. Ver Figura 3.2.

Por otro lado, es de notar que los roles de las variables son intercambiables en el siguiente sentido: si otra familia $\tilde{\mathcal{B}}$ verifica (3.19) cambiando el orden de las variables, también satisfará (3.20). Sin embargo, una vez fijado un orden para las variables, la validez de (3.19) no implica la validez del mismo enunciado con las variables en otro orden. Como hemos comentado

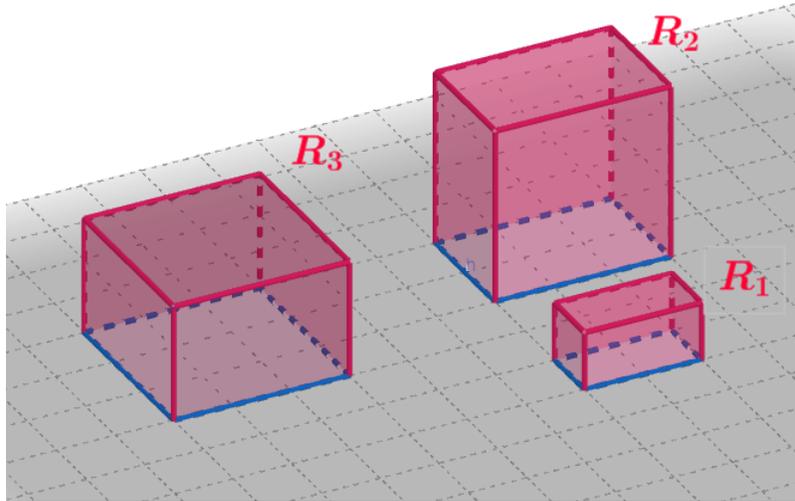


Figura 3.2: Paralelepípedos que cumplen (3.19). Como ambas sidelengths de la base de R_2 son estrictamente mayores que las respectivas sidelengths de la base de R_1 , la altura de R_2 debe ser mayor o igual que la altura de R_1 . Una relación similar se da entre R_3 y R_1 . Sin embargo, como sólo una de las sidelengths de la base de R_3 es estrictamente mayor que la respectiva sidelength de la base de R_2 , no es necesario que haya ninguna relación entre sus alturas para que estos paralelepípedos verifiquen (3.19).

en la Sección 2, se puede ver que una cota débil se obtiene como consecuencia de un lema de cubrimiento. Para obtener el lema de cubrimiento que necesitamos, tendremos que probar la siguiente versión preliminar. Antes de enunciarla, queremos aclarar que, desde aquí y hasta el final de este capítulo, la letra x designará a la primera coordenada de un punto en \mathbb{R}^3 y, para

distinguirlos claramente, los puntos de \mathbb{R}^3 se notarán con \mathbf{x} .

Lema 3.2.4. (*Lema de cubrimiento, versión diádica*) Sea \mathcal{B} una familia de paralelepípedos en \mathbb{R}^3 que verifican las siguientes dos condiciones:

- (a) *Los paralelepípedos son diádicos. Por esto entendemos que sus proyecciones sobre cada uno de los ejes coordenados pertenece a alguna grilla diádica generalizada de \mathbb{R} .*
- (b) *Para cualquier par de paralelepípedos $R, R' \in \mathcal{B}$, se cumple que*

$$x_R < x_{R'} \text{ y } y_R < y_{R'} \implies z_R \leq z_{R'}.$$

Luego \mathcal{B} tiene la propiedad de cubrimiento de tipo exponencial. Esto es, para cada familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ existe una subfamilia $\{R_j\}_{j \in J} \subset \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

- (i) (*Representatividad*) *Existe una constante universal $\tilde{c}_1 > 0$ tal que*

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) \leq \tilde{c}_1 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right). \quad (3.21)$$

- (ii) (*Superposición controlada*) *Existe una constante universal $\tilde{c}_2 > 0$ tal que*

$$\int_{\bigcup_{j \in J} R_j} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{R_j}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \leq \tilde{c}_2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right), \quad (3.22)$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Demostración. Paso 1: Simplificaciones

Comenzamos notando que podemos asumir algunas condiciones útiles sobre la familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a la que queremos encontrarle la subfamilia $\{R_j\}_{j \in J}$. En primer lugar, si $\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) = \infty$, la misma elección $\{R_j\}_{j \in J} = \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ verifica trivialmente (3.21) y (3.22). Por lo tanto, asumimos $\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) < \infty$.

En segundo lugar, podemos asumir que $\{R_\alpha\}$ es un conjunto finito. Si $\{R_\alpha\}$ es infinito, existe un subconjunto finito de índices J tal que

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) \leq 2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right),$$

por lo que el cumplimiento de (3.21) en el caso finito garantiza su cumplimiento también en el caso infinito.

Finalmente, podemos asumir que ningún paralelepípedo $R \in \{R_\alpha\}$ está incluido en la unión de los otros paralelepípedos de la familia. De ocurrir esto, podemos despreciar estos paralelepípedos sin alterar la veracidad de los resultados.

Paso 2: Definición de la familia $\{R_j\}_{j \in J}$

Procedemos ahora a especificar cómo elegir la subfamilia $\{R_j\}_{j \in J}$. Tomamos R_1 como el paralelepípedo z -sidelength máxima. Luego, para $j > 1$, R_j se define inductivamente como el elemento de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ con z -sidelength máxima de entre todos los que verifican

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(R_\alpha)} \int_{R_\alpha} \exp\left(\sum_{k=1}^{j-1} \chi_{R_k}(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} \leq 3^{-3}. \quad (3.23)$$

Obtenemos así la subfamilia $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$, con N algún número natural.

Antes de continuar, queremos dejar asentado que si en el proceso de selección de R_j hubiese dos candidatos, R y R' , con igual z -sidelength que verificasen (3.23), elegimos arbitrariamente a cualquiera de ellos. Sin embargo, el hecho de que se nos presente esta disyuntiva entre R y R' implica que hay ciertas relaciones entre ellos que vale la pena explicitar. R y R' podrían ser esencialmente disjuntos. Pero si no lo fuesen, el hecho de que son diádicos nos dice que sus proyecciones sobre los ejes coordenados se incluyen entre sí. En primer lugar, el hecho de que $z_R = z'_R$ nos dice que $p_Z(R) = p_Z(R')$. Si ocurriese que $p_X(R) \subset p_X(R')$ y $p_Y(R) \subset p_Y(R')$, tendríamos que $R \subset R'$ lo que contradice la hipótesis de que no hay paralelepípedos incluidos en la unión de los otros. El caso $p_X(R') \subset p_X(R)$ y $p_Y(R') \subset p_Y(R)$ lleva a un absurdo similar. Por lo tanto, se cumplen las inclusiones $p_X(R) \subsetneq p_X(R')$ y $p_Y(R') \subsetneq p_Y(R)$ o las inversas. Es una buena idea notar, además, que el integrando en (3.23) es creciente en j , y por lo tanto si un paralelepípedo R no verifica (3.23) para cierto j tampoco lo verificará para j 's mayores. Esto, sumado a que R_j se elige por tener la máxima z -sidelength, garantiza que los elementos de $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$ están ordenados con sus z -sidelengths decrecientes.

Paso 3: Prueba de (3.22)

Habiendo determinado $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$, probemos (3.22). Si notamos para cada $1 \leq L \leq N$ el conjunto $A_L := \bigcup_{j=1}^L R_j$ y la función de superposición

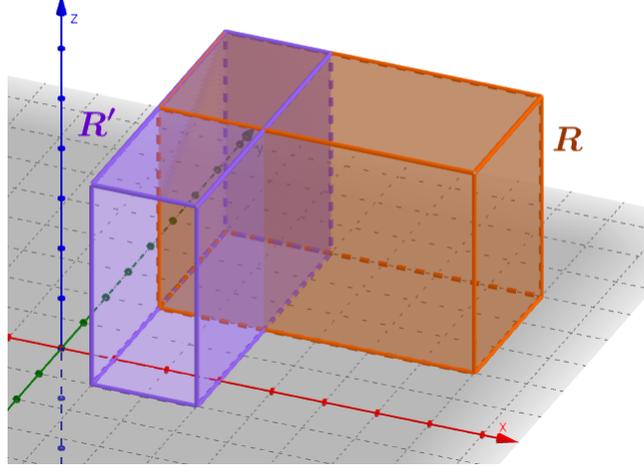


Figura 3.3: Paralelepípedos con igual z -sidelength e intersección no vacía. Dos paralelepípedos en estas condiciones siempre verificarán $p_Z(R) = p_Z(R')$. En este caso, se tiene que $p_X(R') \subsetneq p_X(R)$, $p_Y(R) \subsetneq p_Y(R')$.

$F_L(x) := \sum_{j=1}^L \chi_{R_j}(x)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \int_{A_N} e^{F_N(\mathbf{x})} d\mathbf{x} &= \int_{A_N \setminus R_N} e^{F_{N-1}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + e^1 \int_{R_N} e^{F_{N-1}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\
 &\leq \int_{A_{N-1}} e^{F_{N-1}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + 3^{-3} e \mathcal{L}^3(R_N) \\
 &\leq \int_{R_1} e^{\chi_{R_1}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + 3^{-3} e \sum_{j=2}^N \mathcal{L}^3(R_j) \\
 &\leq e \sum_{j=1}^N \mathcal{L}^3(R_j), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (3.23) para el segundo miembro; en la segunda desigualdad notamos que el primer miembro es análogo a la expresión inicial, y aplicamos el proceso inductivamente.

Para finalizar la demostración, vamos a notar que por (3.23) obtenemos

la siguiente condición de tipo sparse:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^3(R_j \setminus A_{j-1}) &= \mathcal{L}^3(R_j) - \mathcal{L}^3(R_j \cap A_{j-1}) \\
&= \mathcal{L}^3(R_j) - \frac{1}{e} \int_{R_j} \exp(\chi_{A_{j-1}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\
&\geq \mathcal{L}^3(R_j) - \frac{1}{e} \int_{R_j} e^{F_{j-1}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\
&\geq \mathcal{L}^3(R_j) - \frac{1}{3^3 e} \mathcal{L}^3(R_j) \\
&= \left(1 - \frac{1}{3^3 e}\right) \mathcal{L}^3(R_j).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto retomando (3.24) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{A_N} e^{F_N(\mathbf{x})} d\mathbf{x} &\leq e \sum_{j=1}^N \mathcal{L}^3(R_j) \\
&\leq \frac{3^3 e^2}{3^3 e - 1} \sum_{j=1}^N \mathcal{L}^3(R_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \frac{3^3 e^2}{3^3 e - 1} \mathcal{L}^3(A_N),
\end{aligned}$$

lo que prueba (3.22) (por comodidad hemos notado $A_0 = \emptyset$).

Paso 4: Prueba de (3.21)

Procedemos ahora a probar (3.21) usando (3.22). Para acotar la medida de todos los paralelepípedos de $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ por algo que depende solamente de los $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$, va a ser necesario ganar un poco más de comprensión sobre los $R \in \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \setminus \{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$. Comenzamos probando que para cada uno de estos R

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(R)} \int_R \exp\left(\sum_{j=1}^{j_R} \chi_{R_j}(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} > 3^{-3}, \quad (3.25)$$

donde j_R es el número tal que

$$z_{R_j} \geq z_R \iff 1 \leq j \leq j_R.$$

Se ve que j_R está bien definido, ya que al ser z_{R_j} decreciente en j , los índices tales que $z_{R_j} \geq z_R$ son precisamente todos los índices desde 1 hasta alguno, y es este último índice el que llamamos j_R . Para ver la validez de (3.25),

estudiemos qué ocurriría si fuese falsa. En tal caso, R verificaría la condición (3.23). Podría ocurrir entonces que R fuese elegido como el elemento $R_{j_{R+1}}$ de la familia elegida $\{R_1, \dots, R_N\}$, o quizás no porque se elegiría otro en su lugar con z -sidelength igual o mayor. Pero en cualquier caso, $z_{R_{j_{R+1}}} \geq z_R$, lo que contradice la definición de j_R .

Para empezar a acercarnos a la utilidad de (3.25), notemos que extendiendo la sumatoria hasta N y no solamente hasta j_R , se puede probar que

$$R \subset \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / M^{\mathcal{B}_2} \left(\exp \left(\sum_{j=1}^N \chi_{R_j} \right) \right) (x, y, z) > 3^{-3} \right\},$$

con $M^{\mathcal{B}_2}$ el operador maximal bidimensional

$$M^{\mathcal{B}_2} f(x, y, z) = \sup_{(x, y) \in T \in \mathcal{B}_2} \frac{1}{\mathcal{L}^2(T)} \int_T |f(u, v, z)| dudv$$

y \mathcal{B}_2 la base de los intervalos de \mathbb{R}^2 . El problema es que, como ya hemos explicado en la sección anterior, este operador no es de tipo débil $(1, 1)$, y por lo tanto nos da una cota más débil que la que necesitamos para probar (3.21). Esto ocurre porque, al simplemente descartar la dirección z restringiendo el análisis a \mathbb{R}^2 , no estamos explotando la geometría de los paralelepípedos de la clase \mathcal{B} . Será necesario hacer un trabajo más fino para incluir a R en conjuntos de nivel sobre los que tenemos un mejor control.

Así, continuamos notando que

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{i=1}^{j_R} \chi_{R_j}(\mathbf{x}) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^{j_R} \chi_{R_j}(\mathbf{x}) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \chi_{R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n}}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

donde los $\{j_1, \dots, j_n\}$ se toman sobre todas las posibles elecciones de n subíndices no necesariamente distintos en $\{1, \dots, j_R\}$. Con esto, podemos reescribir (3.25) como

$$\begin{aligned} 3^{-3} &< \frac{1}{\mathcal{L}^3(R)} \int_R \exp \left(\sum_{i=1}^{j_R} \chi_{R_j}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\mathcal{L}^3(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap R)}{\mathcal{L}^3(R)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nuestro siguiente objetivo será ganar comprensión sobre las intersecciones de paralelepípedos para acotar el lado derecho de (3.26). En este punto de la argumentación usaremos la hipótesis de que las proyecciones de los paralelepípedos sobre los planos coordenados pertenecen a descomposiciones diádicas. Necesitaremos además la siguiente definición: diremos que un paralelepípedo S_1 es exhaustivo en la variable x (resp. y, z) respecto de otro paralelepípedo S_2 si $p_X(S_1 \cap S_2) = p_X(S_2)$. Ver 3.4. Si $\mathcal{L}^3(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap R) \neq 0$

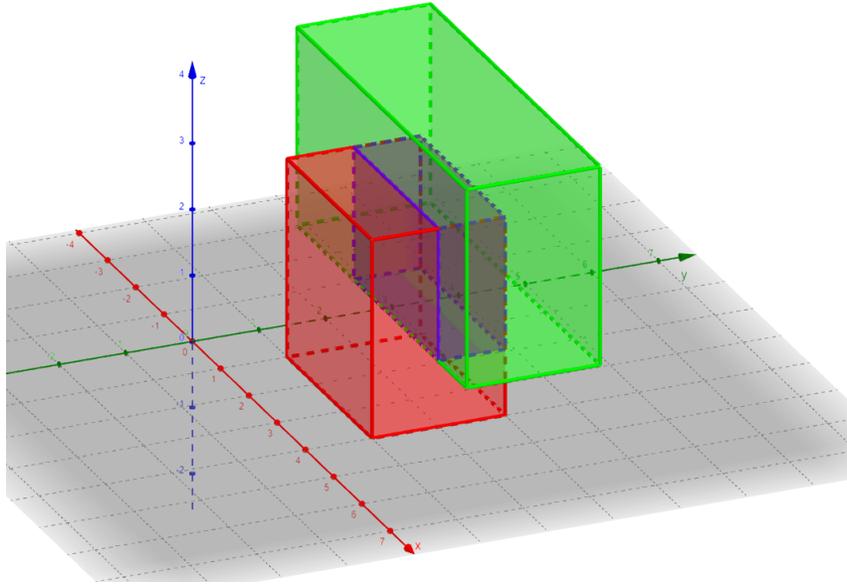


Figura 3.4: Paralelepípedos exhaustivos. En esta figura se aprecia cómo el paralelepípedo verde es exhaustivo en x respecto al paralelepípedo rojo. Notar que no es exhaustivo en ninguna de las otras dos variables.

la intersección debe tener interior no vacío. Estudiemos la intersección $R_j \cap R$ para algún $j \in \{1, \dots, j_R\}$ fijo. Por cómo se eligió j_R , podemos separar a los R_j entre aquellos con $z_R < z_{R_j}$ y $z_R = z_{R_j}$. Si existen R_j como en el último caso, el comentario sobre estos paralelepípedos que hicimos en el Paso 2 garantiza que R_j es exhaustivo respecto a R en las variables x y z o en las variables y y z . Si $z_R < z_{R_j}$, la hipótesis b) implica que $x_R \leq x_{R_j}$ o $y_R \leq y_{R_j}$ y como los paralelepípedos son diádicos esto implica que en este caso también R_j es exhaustivo respecto a R en las variables x y z o en las variables y y z .

Aplicando esto a cada uno de los paralelepípedos $\{R_{j_1}, \dots, R_{j_n}\}$ con los

que estamos trabajando en el lado derecho de (3.26), hacemos la siguiente distinción: llamamos $\{R_{k_1}, \dots, R_{k_q}\}$ a aquellos exhaustivos en y y z respecto a R , y $\{R_{l_1}, \dots, R_{l_r}\}$ a aquellos exhaustivos en x y z respecto a R . Ver Figura 3.5.

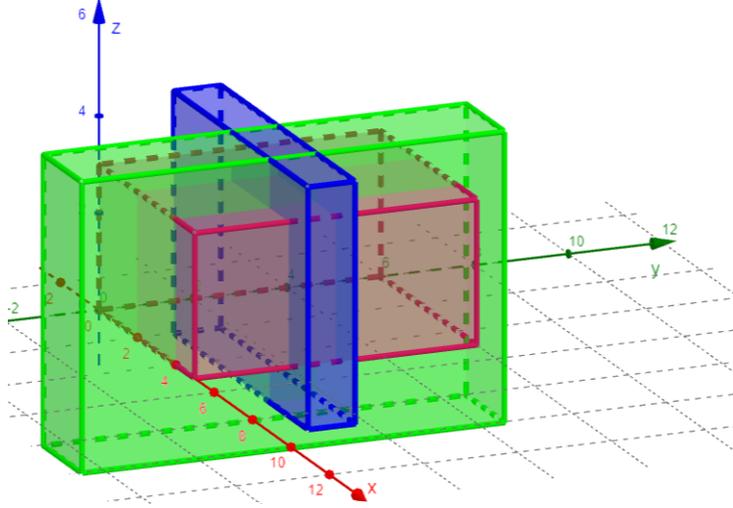


Figura 3.5: Distinción entre los $\{R_{j_1}, \dots, R_{j_n}\}$. En la figura podemos observar a R (rojo), la intersección $R_{k_1} \cap \dots \cap R_{k_q}$ (verde) y la intersección $R_{l_1} \cap \dots \cap R_{l_r}$ (azul).

En general, lo que obtenemos es que la intersección $S := R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap R$ es un paralelepípedo exhaustivo en z respecto a R (ver Figura 3.6). De esta manera, obtenemos que

$$\frac{\mathcal{L}^3(S)}{\mathcal{L}^3(R)} = \frac{x_S y_S}{x_R y_R}.$$

Para controlar el lado derecho de esta última igualdad, vamos a estudiar ahora lo que ocurre en una dimensión. Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de R , denotamos $I_x P = \{(x, y_0, z_0) \in R\}$ y $I_y P = \{(x_0, y, z_0) \in R\}$. Ver Figura 3.7. Recordando cómo hemos definido a $\{R_{k_1}, \dots, R_{k_q}\}$ y $\{R_{l_1}, \dots, R_{l_r}\}$, resulta claro que

$$\frac{\mathcal{L}^1(R_{k_1} \cap \dots \cap R_{k_q} \cap I_x P)}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \geq \frac{x_S}{x_R} \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{L}^1(R_{l_1} \cap \dots \cap R_{l_r} \cap I_y P)}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \geq \frac{y_S}{y_R}.$$

Pero una vez más por las exhaustividades de estos paralelepípedos respecto a R , podemos agregarlos en estas intersecciones de modo que aparezcan todos

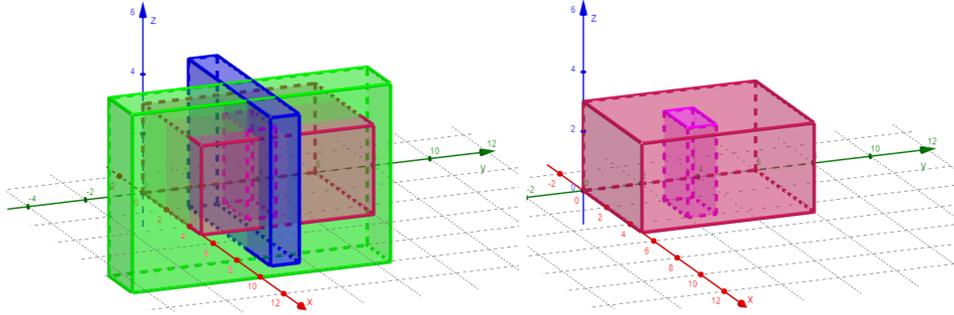


Figura 3.6: La intersección $R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap R =: S$ (púrpura).

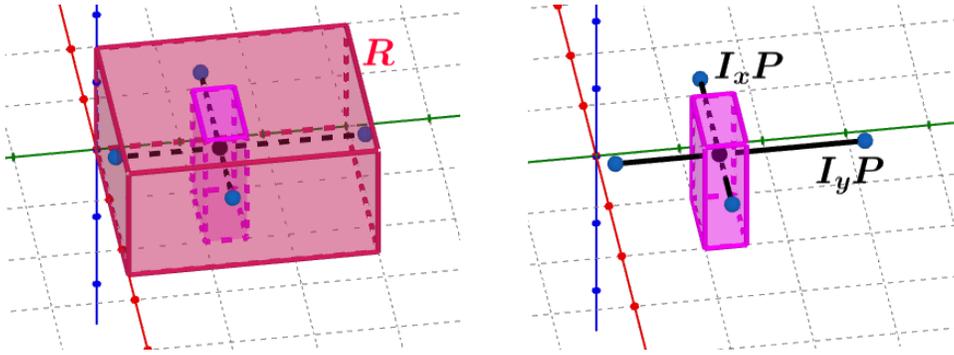


Figura 3.7: Los segmentos $I_x P$ e $I_y P$ en R , contruidos a partir de un $P \in S$.

los $\{R_{j_1}, \dots, R_{j_n}\}$, y así obtener

$$\frac{\mathcal{L}^1(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap I_x P)}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \geq \frac{x_S}{x_R} \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{L}^1(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap I_y P)}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \geq \frac{y_S}{y_R}.$$

De esta manera llegamos a que

$$\frac{\mathcal{L}^3(\bar{R} \cap R)}{\mathcal{L}^3(R)} \leq \frac{\mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_x P)}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \cdot \frac{\mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_y P)}{\mathcal{L}^1(I_y P)},$$

donde hemos notado

$$\bar{R} = R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n}.$$

Nuestro objetivo es aplicar este control en (3.26). Para eso, notamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_x P) \mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_y P) &= \int_{I_x P} \chi_{\bar{R}}(x, y, z) dx \int_{I_y P} \chi_{\bar{R}}(x, y, z) dy \\
&= \int_{p_X(R)} \chi_{\bar{R}}(x, y_0, z_0) dx \int_{p_Y(R)} \chi_{\bar{R}}(x_0, y, z_0) dy \\
&= \int_{p_{XY}(R)} \chi_{\bar{R}}(x, y_0, z_0) \chi_{\bar{R}}(x_0, y, z_0) dx dy \\
&= \int_{p_{XY}(R)} \chi_{\bar{R}}(x, y, z_0) dx dy,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por las relaciones entre los paralelepípedos (ver Figura 3.5). Así, (3.26) queda

$$\begin{aligned}
3^{-3} &< \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\mathcal{L}^3(R_{j_1} \cap \dots \cap R_{j_n} \cap R)}{\mathcal{L}^3(R)} \\
&\leq \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_x P)}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \cdot \frac{\mathcal{L}^1(\bar{R} \cap I_y P)}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \int_{p_{XY}(R)} \chi_{\bar{R}}(x, y, z_0) dx dy \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \int_{p_{XY}(R)} \exp \left(\sum_{j=1}^{j_R} \chi_{R_j}(x, y, z_0) \right) dx dy \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \frac{1}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \int_{p_{XY}(R)} \exp (F_N(x, y_0, z_0) + F_N(x_0, y, z_0)) dx dy \\
&= \left(\frac{1}{\mathcal{L}^1(I_x P)} \int_{I_x P} \exp (F_N) dx \right) \left(\frac{1}{\mathcal{L}^1(I_y P)} \int_{I_y P} \exp (F_N) dy \right),
\end{aligned}$$

donde en la tercera desigualdad hemos extendido la sumatoria desde $j = 1$ hasta N y hemos apelado a que

$$\chi_{R_j}(x, y, z_0) \leq \chi_{R_j}(x, y_0, z_0) + \chi_{R_j}(x_0, y, z_0),$$

que se deduce recordando que R_j es exhaustivo en x o y respecto a R . A su vez, hemos vuelto a utilizar la notación F_N para la función de superposición que introducimos en el Paso 3. Valiendo esto para todo $P \in R$ resulta que

$$R \subset \left\{ M_x(\exp(F_N)) > 3^{-3/2} \right\} \cup \left\{ M_y(\exp(F_N)) > 3^{-3/2} \right\}, \quad (3.27)$$

donde M_x y M_y son los operadores maximales unidimensionales correspondientes a las direcciones x e y . El beneficio de incluir a R en conjuntos de nivel de este tipo de operadores, es que al ser unidimensionales se comportan como el operador maximal clásico de Hardy-Littlewood, y por lo tanto son de tipo débil $(1, 1)$. Como (3.27) vale para todo $R \in \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \setminus \{R_j\}_{1 \leq j \leq N}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) &\leq \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j=1}^N R_j \right) + \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \neq j} R_\alpha \right) \\ &\leq \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j=1}^N R_j \right) + \tilde{c}_0 \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left(\sum_{i=1}^N \chi_{R_i}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &\leq \tilde{c}_2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j=1}^N R_j \right), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba de (3.21). \square

Nuestro siguiente objetivo es deshacernos de la hipótesis $a)$ en el Lema 3.2.4. Para eso usaremos que cualquier paralelepípedo se aproxima lo suficientemente bien por paralelepípedos diádicos.

Lema 3.2.5. (*Lema de Cubrimiento*) Sea \mathcal{B} una familia de paralelepípedos en \mathbb{R}^3 tal que para cualquier par de paralelepípedos $R, R' \in \mathcal{B}$, se cumple que

$$x_R < x_{R'} \text{ y } y_R < y_{R'} \implies z_R \leq z_{R'}.$$

Luego \mathcal{B} tiene la propiedad de cubrimiento de tipo exponencial. Esto es, para cada familia $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{B}$ existe una subfamilia $\{R_j\}_{j \in J} \subset \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

(i) (*Representatividad*) Existe una constante universal $c_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) \leq c_1 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right). \quad (3.28)$$

(ii) (*Superposición controlada*) Existe una constante universal $c_2 > 0$ tal que

$$\int_{\bigcup_{j \in J} R_j} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) \right) dx \leq c_2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right). \quad (3.29)$$

Demostración. Podemos suponer como en el caso anterior que el conjunto $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es finito y que ninguno de sus elementos está incluido en la unión de los otros. Apelaremos a la construcción de Lerner que expusimos en la Sección 2. Dado $R = R_{(1)} \times R_{(2)} \times R_{(3)} \in \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ podemos encontrar un intervalo $\tilde{R}_{(i)}$ tal que

- $R_{(i)} \subset \tilde{R}_{(i)}$
- $\frac{3}{2} \mathcal{L}^1(\tilde{R}_{(i)}) \leq \mathcal{L}^1(R_{(i)}) \leq 3 \mathcal{L}^1(\tilde{R}_{(i)})$ y
- $\tilde{R}_{(i)}$ pertenece a alguna de las tres grillas diádicas generadas a partir de la grilla clásica de \mathbb{R} .

De esta manera, asociamos a cada R el paralelepípedo $\tilde{R} = \tilde{R}_{(1)} \times \tilde{R}_{(2)} \times \tilde{R}_{(3)}$ que verifica

- $R \subset \tilde{R}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \mathcal{L}^3(\tilde{R}) \leq \mathcal{L}^3(R) \leq 3^3 \mathcal{L}^3(\tilde{R})$ y
- \tilde{R} es diádico, en el sentido de que cada una de sus proyecciones sobre los ejes coordenados pertenece a alguna de las tres grillas diádicas generadas a partir de la grilla clásica de \mathbb{R} .

Esto define a la familia $\{\tilde{R}_\alpha\}_\alpha$, que casi está en las hipótesis del Lema 3.2.4. El problema es que las proyecciones de paralelepípedos distintos sobre (por ejemplo) el eje x podrían pertenecer a grillas diádicas distintas. Sin embargo, podemos subsanar este problema. Al haber tres posibles grillas diádicas asociadas a cada uno de los tres ejes coordenados, existen 27 subfamilias en $\{\tilde{R}_\alpha\}_\alpha$, y cada una de esas subfamilias sí verifica las hipótesis del Lema 3.2.4. Notamos $\{\tilde{R}_\beta\}_\beta$ a la familia (sabemos que existe al menos una) tal que

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\beta \in B} \tilde{R}_\beta \right) \geq \frac{1}{27} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tilde{R}_\alpha \right).$$

Aplicando el Lema 3.2.4 a la familia $\{\tilde{R}_\beta\}_\beta$ encontramos una subfamilia $\{\tilde{R}_j\}_j$ tal que

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\beta \in B} \tilde{R}_\beta \right) \leq \tilde{c}_1 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j \right) \quad (3.30)$$

y

$$\int_{\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{\tilde{R}_j}(x) \right) dx \leq \tilde{c}_2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j \right). \quad (3.31)$$

Definimos a $\{R_j\}_j$ como la subfamilia de $\{R_\alpha\}_\alpha$ de la cual provino $\{\tilde{R}_j\}$. Como $R \subset \tilde{R}$ para cualquier paralelepípedo R , resulta claro que de (3.30) y (3.31) podemos obtener

$$\frac{1}{27} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha \right) \leq \frac{1}{27} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \tilde{R}_\alpha \right) \leq \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{\beta \in B} \tilde{R}_\beta \right) \leq \tilde{c}_1 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j \right)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{j \in J} R_j} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) \right) dx &\leq \int_{\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{\tilde{R}_j}(x) \right) dx \\ &\leq \tilde{c}_2 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j \right). \end{aligned}$$

De esta manera, para probar el lema basta ver que existe una constante $c_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j \right) \leq c_0 \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right). \quad (3.32)$$

Esto a su vez puede verse como consecuencia de una propiedad de tipo sparse de la subfamilia $\{R_j\}_j$.

Para ver esto, recordemos que la subfamilia $\{\tilde{R}_j\}$ se eligió para cumplir la condición (3.23). En consecuencia, tenemos que para todo $j \in J$

$$\frac{1}{\mathcal{L}^3(R_j)} \int_{R_j} \exp \left(\sum_{k=1}^{j-1} \chi_{R_k} \right) \leq \frac{3^3}{\mathcal{L}^3(\tilde{R}_j)} \int_{\tilde{R}_j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \chi_{\tilde{R}_k} \right) \leq 1.$$

Con una demostración idéntica a la que hicimos en el Lema 3.2.4, vemos que esto implica

$$\mathcal{L}^3 \left(R_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} R_k \right) \geq (1 - e^{-1}) \mathcal{L}^3(R_j),$$

y de esta manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^3\left(\bigcup_{j \in J} \tilde{R}_j\right) &\leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^3(\tilde{R}_j) \leq 27 \sum_{j \in J} \mathcal{L}^3(R_j) \\
&\leq \frac{27}{1 - e^{-1}} \sum_{j \in J} \mathcal{L}^3\left(R_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} R_k\right) \\
&= \frac{27}{1 - e^{-1}} \mathcal{L}^3\left(\bigcup_{j \in J} R_j\right),
\end{aligned}$$

lo que prueba (3.32) y así el lema. \square

Con este lema de cubrimiento, estamos en condiciones de probar la desigualdad modular débil 3.2.3. La prueba es esencialmente la presentada por Córdoba y Fefferman en [CF75], aunque adaptada al lema de cubrimiento que tenemos en este caso.

Demostración del Teorema 3.2.3. Sea

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^3 / M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}.$$

Para cada $x \in E_\lambda$, existe un $R_x \in \mathcal{B}$ que contiene a x tal que

$$\mathcal{L}^3(R_x) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{R_x} |f|.$$

Cubrimos a E_λ con $\bigcup_{x \in E_\lambda} R_x$, y aplicamos el Lema 3.2.5 a esta familia para extraer una subfamilia $\{\tilde{R}_j\}_{j \in J}$, de modo que se obtiene

$$\mathcal{L}^3(E_\lambda) \leq \mathcal{L}^3\left(\bigcup_{x \in E_\lambda} R_x\right) \leq c_1 \mathcal{L}^3\left(\bigcup_{j \in J} R_j\right).$$

Por lo tanto, para probar el lema basta ver que

$$\mathcal{L}^3\left(\bigcup_{j \in J} R_j\right) \lesssim \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right). \quad (3.33)$$

Para ver esto, comenzamos notando que

$$\mathcal{L}^3\left(\bigcup_{j \in J} R_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^3(R_j) \leq \sum_{j \in J} \int_{R_j} \frac{|f|}{\lambda} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f|}{\lambda} \sum_{j \in J} \chi_{R_j}. \quad (3.34)$$

Desde aquí vamos a necesitar usar la desigualdad de Young generalizada para controlar (3.34), pero será necesario aplicar la desigualdad con cuidado. Definimos la sucesión

$$k_n = 1 - \frac{\log(2c_2)}{n},$$

con c_2 la constante de la desigualdad (3.29) (podemos suponer que $2c_2 > 1$), y definimos al número N como el mínimo número natural que verifica $k_N > 0$. Notemos que como c_2 es una constante universal, N también lo es. Con esto, podemos escribir a \mathbb{R}^3 como la unión disjunta $\mathbb{R}^3 = H_1 \cup H_2$, donde

$$H_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) \leq N - 1 \right\} \text{ y } H_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) \geq N \right\}.$$

Así, podemos retomar (3.34) para obtener

$$\mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right) \leq \int_{H_1} \frac{|f|}{\lambda} \sum_{j \in J} \chi_{R_j} + \int_{H_2} \frac{|f|}{\lambda} \sum_{j \in J} \chi_{R_j}.$$

Es claro que el primer término se acota por $(N - 1) \int \frac{|f|}{\lambda}$, mientras que para el segundo término podemos apelar a la desigualdad

$$uv \leq u \log^+ u + e^v, \quad u \geq 0, v \geq 1$$

que se obtiene como consecuencia de la desigualdad de Young generalizada.

$$\begin{aligned} \int_{H_2} \frac{|f|}{\lambda} \sum_{j \in J} \chi_{R_j} &= \int_{H_2} \frac{|f|}{k_N \lambda} k_N \sum_{j \in J} \chi_{R_j} \\ &\leq \int_{H_2} \frac{|f|}{k_N \lambda} \log^+ \left(\frac{|f|}{k_N \lambda} \right) + \int_{H_2} \exp \left(k_N \sum_{j \in J} \chi_{R_j} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

El primer término de (3.35) se acota como

$$\int_{H_2} \frac{|f|}{k_N \lambda} \log^+ \left(\frac{|f|}{k_N \lambda} \right) \leq \frac{1}{k_N} \log^+ \left(\frac{1}{k_N} \right) \int_{H_2} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right).$$

Para el segundo, acotamos primero el exponente

$$k_N \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) = \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) - \frac{\log(2c_2)}{N} \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) \leq \sum_{j \in J} \chi_{R_j}(x) - \log(2c_2),$$

donde la última desigualdad vale para todo $x \in H_2$. Llevando esto al segundo término de (3.35), obtenemos

$$\int_{H_2} \exp \left(k_N \sum_{j \in J} \chi_{R_j} \right) \leq \int_{\bigcup_{j \in J} R_j} \frac{1}{2c_2} \exp \left(\sum_{j \in J} \chi_{R_j} \right) \leq \frac{1}{2} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right).$$

Volcando todo esto en (3.34),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right) &\leq \\ &\left(N - 1 + \frac{1}{k_N} \log^+ \left(\frac{1}{k_N} \right) \right) \int_{H_2} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^3 \left(\bigcup_{j \in J} R_j \right), \end{aligned}$$

lo que prueba (3.34) y por lo tanto el teorema. \square

3.2.2. Un teorema de diferenciación para el caso multiparamétrico

Comencemos esta subsección probando que una desigualdad modular como la que se obtiene del Teorema 3.2.3 nos permite probar que una base de diferenciación diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$.

Teorema 3.2.6. *Sea \mathcal{B} una base de diferenciación, y sea $M^{\mathcal{B}}$ su operador maximal asociado. Supongamos que para toda $f \in L(1 + \log^+ L)$ se verifica la siguiente desigualdad modular:*

$$\mathcal{L}^n (\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right).$$

Entonces \mathcal{B} diferencia a $L(1 + \log^+ L)$.

Antes de demostrar este teorema, queremos hacer un par de aclaraciones. Primero, es claro que, al igual que con el TDL, la naturaleza local de la diferenciación garantiza que una base \mathcal{B} con las hipótesis de este teorema diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$. Por otro lado, se puede reemplazar el espacio de Orlicz $L(1 + \log^+ L)$ por el espacio más general $L(1 + (\log^+ L)^m)$ con $m > 0$ y probar el mismo resultado con la desigualdad modular correspondiente. No incluimos aquí la demostración de esta versión porque, a pesar de ser en espíritu idéntica, requiere desplegar algunas herramientas técnicas que no necesitamos en esta tesis.

Demostación del Teorema 3.2.6. Sea $f \in L(1 + \log^+ L)$. Como la diferenciación es una propiedad local, podemos asumir sin pérdida de generalidad que f es de soporte compacto. Así, podemos apelar al Lema 3.1.7 (adaptado para el soporte de f) para encontrar una sucesión de funciones $(\varphi_k)_k$ continuas con soporte compacto tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_k| (1 + \log^+ |f - \varphi_k|) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Con esto, podemos proceder de manera análoga a la demostración del TDL hasta el punto en que se obtiene la inclusión

$$\begin{aligned} & \left\{ \limsup_{R \searrow x} \left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R f(y) dy - f(x) \right| > \epsilon \right\} \\ & \subset \left\{ M^{\mathcal{B}}(f - \varphi_k) > \frac{\epsilon}{2} \right\} \cup \left\{ |f - \varphi_k| > \frac{\epsilon}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

con R elementos de \mathcal{B} que se contraen a x . El teorema se prueba si vemos que las medidas de ambos conjuntos del lado derecho de (3.36) tienden a 0 en k .

Para el primer conjunto, apelamos al Teorema 3.2.3 y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left(\left\{ M^{\mathcal{B}}(f - \varphi_k) > \frac{\epsilon}{2} \right\} \right) & \leq c \frac{2}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_k| \left(1 + \log^+ \left(\frac{2}{\epsilon} |f - \varphi_k| \right) \right) \\ & \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_k| (1 + \log^+ |f - \varphi_k|) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Para el segundo conjunto apelamos a la desigualdad de Tchebyshev y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n \left(\left\{ |f - \varphi_k| > \frac{\epsilon}{2} \right\} \right) & \leq c \frac{2}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_k| \quad (3.37) \\ & \leq \frac{2c}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_k| (1 + \log^+ |f - \varphi_k|) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esto concluye la demostración. \square

Una vez probado este teorema, la desigualdad débil del Teorema 3.2.3 nos da un criterio útil para afirmar que una base de diferenciación \mathcal{B} de paralelepípedos de \mathbb{R}^3 diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$. Basta con chequear que $z_R > z'_R \implies x_R \geq x'_R$ o $y_R \geq y'_R$ para todo par de paralelepípedos $R, R' \in \mathcal{B}$, o equivalentemente que $x_R < x'_R$ y $y_R < y'_R \implies z_R \leq z'_R$. También basta con ver lo mismo cambiando z por x o y . Comenzamos con algunos ejemplos sencillos pero importantes.

Observación 3.2.7. Sea \mathcal{B} una base dada por $\mathcal{B} \equiv \{[s, t, \phi(s, t)], s > 0, t > 0\}$ con ϕ una función creciente en ambas variables tal que

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \phi(s, t) = 0. \quad (3.39)$$

Luego \mathcal{B} diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$.

En este caso, esto ocurre pues si $s_1 < s_2$ y $t_1 < t_2$, el crecimiento de ϕ garantiza que $\phi(s_1, t_1) \leq \phi(s_2, t_2)$. Este es el ejemplo que Córdoba tenía en mente al probar el resultado de la sección anterior. Aquí y en futuras ocasiones, alguna hipótesis sobre límites de funciones en el origen como (3.39) solo cumple la función de garantizar que \mathcal{B} sea una base de diferenciación. Sin esta hipótesis, la base \mathcal{B} perfectamente verifica la desigualdad probada en el Teorema 3.2.3, pero no se puede garantizar que diferencie a ninguna clase de funciones ya que podría no contener conjuntos arbitrariamente pequeños en diámetro.

Veamos otro ejemplo de una base de que diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$.

Observación 3.2.8. Sea \mathcal{B} una base dada por $\mathcal{B} \equiv \{[s, t, H(s, t)], s > 0, t > 0\}$ con H creciente en la variable s y decreciente en la variable t . Si además

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} H(s, t) = 0,$$

entonces \mathcal{B} diferencia $L(1 + \log^+ L)_{loc}$.

En este caso, \mathcal{B} cumple las hipótesis del Teorema 3.2.3 porque si $s_1 > s_2$, o bien $t_1 \geq t_2$ o bien $t_1 < t_2$ y con esto $H(s_1, t_1) \geq H(s_2, t_2)$. Notemos que en este caso el rol de z en las hipótesis del Teorema 3.2.3 lo cumple x .

A continuación, probaremos un teorema que Soria probó en [Sor86] y fue crucial para responder a la pregunta que nos hemos planteado al principio de esta subsección. Este teorema nos dará un criterio sobre las tres funciones ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 para que la base $\mathcal{B} \equiv [\phi_1(s, t), \phi_2(s, t), \phi_3(s, t)]$ diferencie $L \log^+ L_{loc}$ en un escenario bastante general, y se concretará reduciéndose a las dos últimas observaciones.

Teorema 3.2.9. Sean $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ funciones C^1 crecientes en cada variable. Supongamos que existen m funciones positivas y crecientes $T_1(s) < T_2(s) < \dots < T_m(s)$ con $T_k(0) = 0$ tales que para todo par de índices distintos $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $J(\phi_i, \phi_j) = 0$ únicamente en un subconjunto de los gráficos de las T_k . A su vez, supongamos que la función $\tilde{F}(s, t) = (\phi_1(s, t), \phi_2(s, t))$ es inyectiva sobre cada uno de los conjuntos

$$A_k = \{(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, T_{k-1}(s) < t < T_k(s)\} \text{ con } k = 1, \dots, m+1,$$

llamando $T_0 \equiv 0$ y $T_{m+1} \equiv \infty$ (ver Figura 3.8). Por último, supongamos que

$$\lim_{(s,t) \rightarrow 0} \phi_i(s,t) = 0 \quad (3.40)$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Luego, la base

$$\mathcal{B} \equiv \{[\phi_1(s,t), \phi_2(s,t), \phi_3(s,t)], s > 0, t > 0\}$$

diferencia a $L \log^+ L_{loc}$.

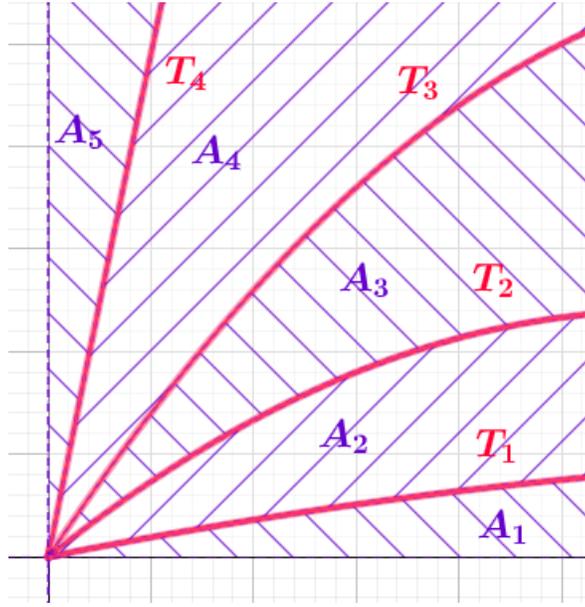


Figura 3.8: Gráficos de las funciones T_k (fucsia) y las regiones A_k (violeta).

Demostración. Comenzamos definiendo una cantidad finita de subbases que estudiaremos separadamente.

Para $k = 1, \dots, m+1$, definimos

$$\mathcal{B}^k \equiv \{[\phi_1(s,t), \phi_2(s,t), \phi_3(s,t)], (s,t) \in A_k\},$$

y para $k = 1, \dots, m$ definimos

$$\bar{\mathcal{B}}^k \equiv \{[\phi_1(s, T_k(s)), \phi_2(s, T_k(s)), \phi_3(s, T_k(s))], s > 0\}.$$

Resulta claro que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \dots \cup \mathcal{B}^{m+1} \cup \bar{\mathcal{B}}^1 \cup \dots \cup \bar{\mathcal{B}}^m$. El siguiente lema, que usaremos a lo largo de todo el trabajo, nos permite probar la desigualdad (3.20) probándola para cada base separadamente.

Observación 3.2.10. Sea \mathcal{B} una base de diferenciación y escribámosla como

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i.$$

Supongamos que existen constantes positivas $\{c_i\}_{1 \leq i \leq N}$ que dependen a lo sumo de n tales que para toda f en una clase de funciones \mathcal{C} vale que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}_i} f(x) > \lambda\}) < c_i E(f, \lambda),$$

con $E(f, \lambda)$ alguna expresión que depende de f y λ . Entonces existe una constante positiva c que depende a lo sumo de n y N tal que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}) < c E(f, \lambda)$$

para toda $f \in \mathcal{C}$.

Demostración. Comencemos probando que

$$M^{\mathcal{B}} = \text{máx} \{M^{\mathcal{B}_1}, \dots, M^{\mathcal{B}_N}\}. \quad (3.41)$$

Recordemos que

$$M^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{R \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R |f(x)| dx.$$

Si notamos

$$g(R) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(R)} \int_R |f(x)| dx \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_x = \{R \in \mathcal{B} / x \in R\},$$

entonces podemos reescribir

$$M^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{R \in \mathcal{B}_x} g(R).$$

Pero $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_x^1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_x^N$: la unión sin el subíndice x vale por una cuestión de tamaños, y pedir que los paralelepípedos incluyan a x no la altera. Así

$$\sup_{R \in \mathcal{B}_x} g(R) = \text{máx} \left\{ \sup_{R \in \mathcal{B}_x^1} g(R), \dots, \sup_{R \in \mathcal{B}_x^N} g(R) \right\},$$

y se obtiene (3.41).

Definimos

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}} f(x) = M^{\mathcal{B}_i} f(x)\},$$

y entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n (\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}) &\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n (\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}^i} f(x) > \lambda\} \cap H_n) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n (\{x \in \mathbb{R}^n / M^{\mathcal{B}^i} f(x) > \lambda\}) \\
&\leq \sum_{i=1}^N c_i E(f, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^N c_i \right) E(f, \lambda).
\end{aligned}$$

□

De esta manera, volviendo a la prueba del Teorema 3.2.9, para probar que el operador $M^{\mathcal{B}}$ verifica una desigualdad modular de tipo débil del tipo de (3.20), basta ver que el operador asociado a cada subbase cumple dicha desigualdad.

El operador $M^{\overline{\mathcal{B}}^k}$ es de tipo débil (1,1), porque $\overline{\mathcal{B}}^k$ satisface el Lema de Cubrimiento de Vitali (recordar la demostración del Teorema 3.2.2).

Fijemos $k \in \{1, 2, \dots, m+1\}$ y procuremos obtener la desigualdad deseada para $M^{\mathcal{B}^k}$. Definimos

$$F : A_k \longrightarrow F(A_k) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ / F(s, t) = (\phi_1(s, t), \phi_2(s, t)).$$

Por las hipótesis que tenemos, F es biyectiva, C^1 y $JF \neq 0$ en A_k . De esta manera definimos

$$H : F(A_k) \longrightarrow \mathbb{R}_+ / H(x, y) = \phi_3(F^{-1}(x, y)),$$

lo que resulta en que

$$\phi_3(s, t) = H(\phi_1(s, t), \phi_2(s, t)). \quad (3.42)$$

Aplicando la regla de la cadena en (3.42) obtenemos que

$$\nabla \phi_3 = \nabla H \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

La matriz de la derecha es inversible puesto que su determinante es JF , por lo cual un cálculo sencillo arroja que

$$\nabla H(F(s, t)) = \left(\frac{J(\phi_3, \phi_2)(s, t)}{J(\phi_1, \phi_2)(s, t)}, -\frac{J(\phi_3, \phi_1)(s, t)}{J(\phi_1, \phi_2)(s, t)} \right).$$

Esto nos permite afirmar que H es monótona en cada variable, ya que por estar trabajando en A_k los signos de los jacobianos no cambian. Lo único que queda por probar es que H es creciente en al menos una de sus variables. Esto (sumado a la condición (3.40)) es suficiente porque si es creciente en una variable y decreciente en la otra, la base \mathcal{B} es del tipo de la Observación 3.2.8; y si es creciente en ambas variables es del tipo de la Observación 3.2.7.

Así, supongamos que $\frac{\partial H}{\partial x} < 0$. Podemos suponer que $J(\phi_3, \phi_2)(s, t) < 0$ y $J(\phi_1, \phi_2)(s, t) > 0$ ya que el otro caso se resuelve de forma análoga. Pero entonces

$$J(\phi_3, \phi_2) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_3}{\partial y} < 0,$$

lo que implica

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} < \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial y}. \quad (3.43)$$

De manera análoga, $J(\phi_1, \phi_2) > 0$ implica

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} > \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y}. \quad (3.44)$$

Despejando adecuadamente, (3.43) y (3.44) arrojan

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial y} > \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y},$$

lo que garantiza que $J(\phi_3, \phi_1) < 0$ y por lo tanto $\frac{\partial H}{\partial y} > 0$ como queríamos.

De esta manera, existe una constante universal $c > 0$ tal que $M^{\mathcal{B}}$ cumple una desigualdad como (3.20). Esto, sumado a que \mathcal{B} es base de diferenciación, garantiza que diferencia a $L \log^+ L_{loc}$. \square

El Teorema 3.2.9 constituye una herramienta de alta potencia para decidir si una base diferencia a $L \log^+ L_{loc}$. Podemos usarlo, por ejemplo, para probar que este es el caso con

$$\mathcal{B} \equiv \{[\phi_1(s, t), \phi_2(s, t), \phi_3(s, t)]\}, \quad \phi_i(s, t) = s^{\alpha_i} t^{\beta_i}, \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0.$$

En efecto, para esta base se tiene que

$$J(\phi_i(s, t), \phi_j(s, t)) = (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) s^{\alpha_i - 1} t^{\beta_j - 1}.$$

Si existen dos subíndices $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i = 0$, entonces existe un $\lambda > 0$ tal que $(\alpha_i, \beta_i) = \lambda(\alpha_j, \beta_j)$ y por lo tanto $\phi_i(s, t) = [\phi_j(s, t)]^\lambda$, por lo que B satisface directamente las hipótesis del Teorema 3.2.3. Si para todo par de índices $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \neq 0$, entonces B satisface las hipótesis del Teorema 3.2.9.

3.2.3. Limitaciones de este enfoque y comentarios adicionales

Hemos visto en la sección anterior un criterio que garantiza que una base de la forma $\mathcal{B} \equiv \{\phi_1(s, t), \phi_2(s, t), \phi_3(s, t)\}$ diferencia $L \log^+ L_{loc}$. Este criterio requería determinadas hipótesis sobre las funciones ϕ_i , mientras que la Conjetura 3.0.2 afirmaba que la diferenciabilidad no dependía de las funciones involucradas, sino tan solo de la cantidad de parámetros de estas funciones. El objetivo de esta sección es probar que esta conjetura es falsa en \mathbb{R}^3 , proveyendo un contraejemplo adecuado.

La base que servirá tiene la forma

$$\mathcal{B} \equiv \{[s, t\phi(s), t\psi(s)], s, t > 0\}.$$

Pronto explicitaremos cómo deben ser las funciones ϕ y ψ que necesitamos, pero antes tratemos de ganar algo de comprensión sobre esta base.

Renombrando $x = s$, $y = t\phi(s)$ y $H(x, y) = y \frac{\psi(x)}{\phi(x)}$, la base se reescribe como

$$\mathcal{B} \equiv \{[x, y, H(x, y)], x, y > 0\}.$$

Como H es creciente en y , \mathcal{B} verifica las hipótesis del Teorema 3.2.3 en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ donde H es monótona en x . A su vez, si la monotonía de H respecto a x cambia sólo finitas veces, podemos obtener la diferenciabilidad de \mathcal{B} invocando el Teorema 3.2.9. Por lo tanto, será preciso elegir ϕ y ψ de modo que $H(x, y) = y \frac{\psi(x)}{\phi(x)}$ cambie su monotonía respecto de x infinitas veces.

Con esto en mente, nos embarcamos en la prueba del siguiente

Lema 3.2.11. *Sean*

$$\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ / \phi(s) = e^{-6/s}, \quad s > 0,$$

y $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\psi(2^k) = \psi(\frac{3}{2}2^k) = \phi(2^k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y extendida a todo \mathbb{R}_+ por interpolación lineal. Luego, para cada α tal que $0 \leq x \leq \alpha \leq 1$ existe $s \in [x, 2x]$ que verifica $\frac{\psi(s)}{\phi(s)} = \alpha$.

Demostración. Sea $g(s) = \frac{\psi(s)}{\phi(s)}$. Tenemos entonces que $g(2^k) = 1$ y $g(\frac{3}{2}2^k) = \exp(-\frac{1}{2^{k-1}}) \leq 2^{k-1}$ (esta desigualdad es consecuencia de la desigualdad elemental $\exp(-\frac{1}{x}) \leq x$ para $x > 0$; ver Figura 3.10). Dados $0 \leq x \leq \alpha \leq 1$, existe un único $j \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ tal que $2^{j-1} < x \leq 2^j$. Luego tenemos que

$$g(2^j) = 1 \geq \alpha \geq x \geq 2^{j-1} \geq g\left(\frac{3}{2}2^k\right) > g\left(\frac{3}{2}2^{j-1}\right).$$

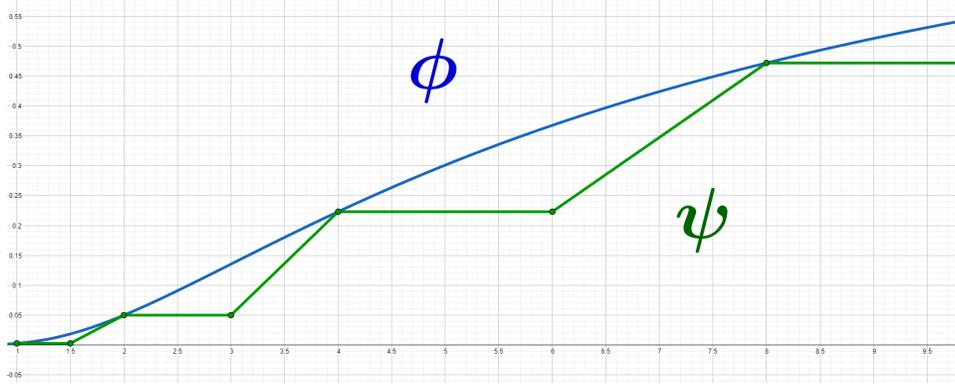


Figura 3.9: Gráficos de las funciones ϕ (azul) y ψ (verde). Para mayor claridad, se ha elegido representarlas en un dominio que no contiene al cero. El gráfico no está a escala.

De esta manera, por el teorema del valor medio, existen números reales s con $g(s) = \alpha$ tanto en el intervalo $I_1 = [\frac{3}{2}2^{j-1}, 2^j]$ como en el intervalo $I_2 = [2^j, \frac{3}{2}2^j]$.

Así, para probar el lema basta probar que o bien I_1 o I_2 están incluidos en $[x, 2x]$. Y en efecto:

- Si $x \in (2^{j-1}, \frac{3}{2}2^{j-1}]$, $2x \in (2^j, \frac{3}{2}2^j]$ y por ende $I_1 \subset [x, 2x]$.
- Si $x \in (\frac{3}{2}2^{j-1}, 2^j]$, $2x \in (\frac{3}{2}2^j, 2^{j+1}]$ y por ende $I_2 \subset [x, 2x]$.

Ver Figura 3.11

□

Con esto, podemos probar que la base \mathcal{B} es la que necesitamos. Antes de hacerlo, necesitaremos la siguiente

Definición 3.2.12. Sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 dos bases de conjuntos de \mathbb{R}^n . Diremos que \mathcal{B}_1 mayor a \mathcal{B}_2 si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $R \in \mathcal{B}_2$ existe un $R' \in \mathcal{B}_1$ que verifica $R \subset R'$ y $|R'| \leq C|R|$.

Notemos que, si se da esta situación, $M^{\mathcal{B}_2} f(x) \leq CM^{\mathcal{B}_1} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para toda $f \in L^1_{loc}$.

Teorema 3.2.13. Sean ϕ y ψ definidas como en el Lema 3.2.11. Entonces la base $\mathcal{B} \equiv \{[s, t\phi(s), t\psi(s)], s, t > 0\}$ no diferencia a $L \log^+ L_{loc}$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}' \equiv \{[x, y, z], 0 \leq x \leq z \leq y \leq 1\}$. Comenzaremos probando que \mathcal{B} mayor a \mathcal{B}' .

Dado $R' \in \mathcal{B}'$ de sidelengths $x \times y \times z$, las hipótesis sobre \mathcal{B}' permiten afirmar que $x \leq \frac{z}{y} \leq 1$. Tomando $\alpha = \frac{y}{z}$ en el Lema 3.2.11, sabemos que

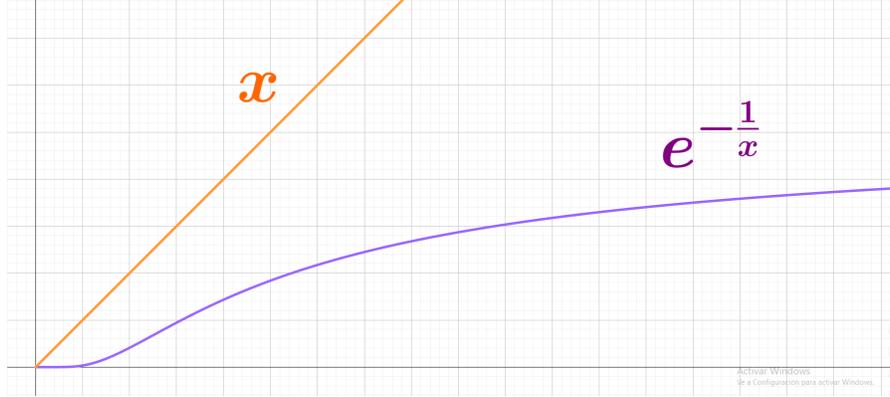


Figura 3.10: En este gráfico se aprecia claramente que $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leq x$.

existe un $s \in [x, 2x]$ tal que $\frac{\psi(s)}{\phi(s)} = \frac{z}{y}$. Eligiendo $t = \frac{y}{\phi(s)}$, resulta que $z = t\psi(s)$. De esta manera, $R' \subset R = [s, t\phi(s), t\psi(s)]$ y $\mathcal{L}^3(R) \leq 2\mathcal{L}^3(R')$ lo que prueba que \mathcal{B} mayor a \mathcal{B}' .

Ahora bien, por cuestiones de simetría, \mathcal{B}' debe tener las mismas propiedades de diferenciación que \mathcal{B}_3 , la base de todos los paralelepípedos de \mathbb{R}^3 . Y como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \log^+(t)}{t(\log^+(t))^2} = 0,$$

\mathcal{B}' no diferencia $L \log^+ L_{loc}$, y así tampoco \mathcal{B} . □

Finalizamos esta sección con algunos comentarios acerca del estado actual de estas preguntas.

Para empezar, todo el trabajo desde el comienzo de la Subsección 3.2.1 se hizo en \mathbb{R}^3 . Esto se debe a que este es el espacio donde contamos con el Teorema 3.2.3, que fue la herramienta que nos permitió responder afirmativamente a la pregunta de si determinadas bases diferenciaban $L \log^+ L_{loc}$. Sin embargo, podemos adaptar el contraejemplo de recién para responder negativamente a aquella pregunta en \mathbb{R}^n para $n > 3$. Por ejemplo, puede verse de forma análoga a como lo hicimos arriba que la base

$$\mathcal{B} \equiv \{[s, t\phi(s), t\psi(s), t_4, t_5, \dots, t_n] \mid s, t, t_i > 0\}$$

se comporta como la base \mathcal{B}_n y depende solo de $n - 1$ variables. Lo mismo ocurre en \mathbb{R}^{3m} con la base

$$\mathcal{B} \equiv \{[s_1, t_1\phi_1(s_1), t_1\psi_1(s_1), \dots, s_m, t_m\phi_m(s_m), \psi_m(s_m)] \mid s_i, t_i > 0\},$$

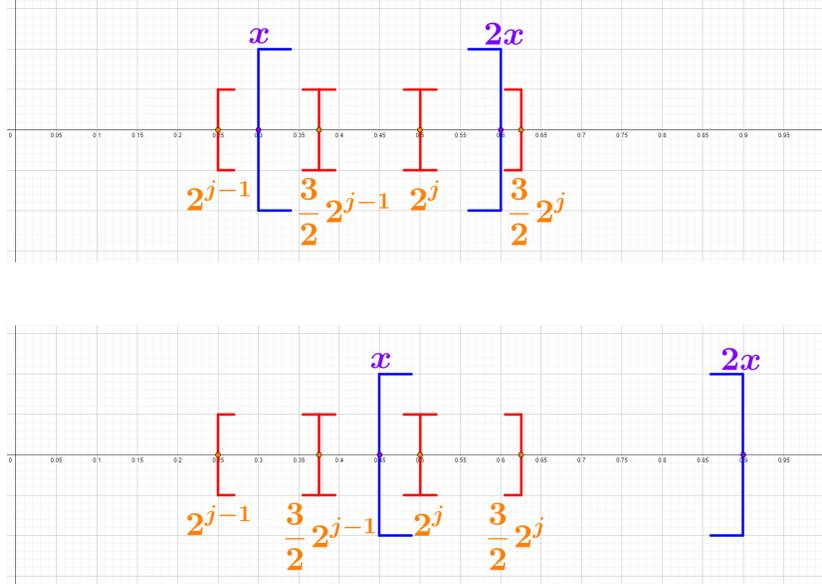


Figura 3.11: Gráfico de los intervalos en el caso en que $I_1 \subset [x, 2x]$ (arriba) y en que $I_2 \subset [x, 2x]$ (abajo).

que depende de $2m$ variables.

Finalmente, queremos llamar la atención sobre una posible generalización que resultará ser, justamente, imposible. Habiendo probado que la base

$$\mathcal{B} \equiv \{[s, t, \phi(s, t)], s, t > 0\}$$

diferencia $L \log^+ L_{loc}$ si ϕ es creciente, cabría preguntarse: ¿diferencia a $L(\log^+ L)_{loc}^{n-k}$ una base de la forma

$$\mathcal{B} \equiv \{[t_1, \dots, t_k, \phi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \phi_{n-k}(t_1, \dots, t_k)], t_i > 0\}$$

si todas las ϕ_i son crecientes? La respuesta es no en general, ya que por ejemplo puede probarse que la base

$$\mathcal{B} \equiv \{[s, t, h(t)\phi(s), h(t)\psi(s)], s, t > 0\}$$

no diferencia a la mencionada familia, si se toma ϕ y ψ como en el Lema 3.2.11 y $h(t) = te^t$. En general para \mathbb{R}^n con $n \geq 4$, Rey encontró bases de la forma

$$\mathcal{B} \equiv \{[s, t, \phi_1(s, t), \dots, \phi_{n-2}(s, t)]\}$$

que tampoco diferencian a $L \log^+ L_{loc}$. El argumento de Rey involucra una adaptación diádica de la Conjetura 3.0.2, y en este contexto encontró una subbase que no puede verificar la desigualdad modular (3.20). La prueba detallada de este resultado puede encontrarse en [Rey20].

Capítulo 4

Operadores maximales de tipo débil (1,1)

En los capítulos siguientes también buscaremos la obtención de desigualdades débiles para operadores maximales. En este caso, sin embargo, trabajaremos con medidas que no son la de Lebesgue. Esto constituye un salto significativo en dificultad: para empezar, no tenemos muchas de las herramientas que antes nos permitían concluir diferenciabilidad a partir de desigualdades modulares, aunque veremos que aún así podremos extraer conclusiones interesantes en los contextos adecuados. A su vez, para no complicar excesivamente el análisis, el operador maximal considerado en este caso no será calculado sobre figuras difíciles.

Comencemos por dar el contexto adecuado para este capítulo. Trabajaremos siempre en \mathbb{R}^n , μ denotará a una medida boreliana no negativa sobre \mathbb{R}^n , y M_μ denotará al operador maximal asociado dado por

$$M_\mu f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo se calcula sobre todas las bolas B de medida positiva que contienen a x (no necesariamente centradas en x). Si la medida μ es la de Lebesgue, ya sabemos que el operador maximal es de tipo débil (1,1). Más aún, este resultado vale también para cualquier medida doblante, es decir, cualquier medida para la que existe una constante c que depende únicamente de μ y n tal que $\mu(2B) \leq c\mu(B)$ para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. Esto se ve fácilmente al aplicar un lema de cubrimiento de tipo Vitali para estas medidas.

El interés entonces reside en estudiar qué ocurre cuando la medida μ no es doblante. En estos casos, la primera intención sería probar una cota de

tipo débil $(1, 1)$ sin pasar por el Lema de Vitali. En el caso en que $n = 1$, Garsia probó en [Gar70] que M_μ es de tipo débil $(1, 1)$ apelando a un lema de cubrimiento de Young. En $n \geq 2$, sin embargo, esto no vale siempre. De hecho, Vargas probó en [Var94] que (bajo ciertas hipótesis razonables) las medidas μ para las cuales M_μ es de tipo débil $(1, 1)$ son exactamente aquellas que son doblantes lejos del origen, mostrando que la condición de doblantez es “casi” necesaria para probar esta desigualdad.

Antes de comenzar, hagamos la definición formal.

Definición 4.0.1. Una medida μ se dice doblante si existe una constante $c > 0$ tal que para toda bola B , $\mu(2B) \leq c\mu(B)$, donde $2B$ denota a la bola con el mismo centro que B y un radio con el doble de longitud.

Es claro que la definición es equivalente cambiando 2 por cualquier número mayor que 1, aunque la constante dependerá del número que pongamos en su lugar. La medida de Lebesgue es claramente doblante, y esto se usa para probar el Lema de Vitali. De esta manera surge la pregunta: si perdemos la doblantez de la medida, ¿podremos probar el tipo débil $(1, 1)$ de M_μ ?

4.1. Operadores maximales en \mathbb{R}

En este caso, el siguiente teorema prueba que la respuesta es siempre afirmativa.

Teorema 4.1.1. *Sea μ una medida boreliana no negativa sobre \mathbb{R} . Entonces M_μ es de tipo débil $(1, 1)$.*

La prueba es idéntica a la prueba para la medida Lebesgue, con una salvedad importante: una μ arbitraria podría no ser doblante, y por lo tanto el Lema de Cubrimiento de Vitali podría no servirnos. Por lo tanto, será necesario recurrir a otro lema de naturaleza más geométrica. Dicho lema, que debemos a Young, es el siguiente.

Lema 4.1.2 (Lema de Selección de Intervalos). *Sea \mathcal{A} una familia finita de intervalos de \mathbb{R} . Existe una subfamilia $\{I_1, I_2, \dots, I_n\} \subset \mathcal{A}$ de intervalos disjuntos tales que*

$$\mu\left(\bigcup_{I \in \mathcal{A}} I\right) \leq 2 \sum_{j=1}^n \mu(I_j). \quad (4.1)$$

Demostración. Notamos

$$A = \bigcup_{I \in \mathcal{A}} I.$$

Si hay algún $J \in \mathcal{A}$ incluido en la unión de los otros intervalos, podemos eliminarlo de la familia \mathcal{A} sin alterar la medida $\mu(A)$. Por lo tanto, podemos asumir que en la familia \mathcal{A} no hay intervalos contenidos en la unión de los demás. A su vez, asumiremos que los intervalos son cerrados solamente para simplificar la escritura, pero la prueba tiene igual validez sin importar si los intervalos contienen o no a sus bordes. De esta manera, podemos escribir a los intervalos de \mathcal{A} como $J_k = [a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq m$, donde la indexación se hace para que los extremos izquierdos a_k estén ordenados de forma creciente.

A partir de la asunción que hicimos en el párrafo anterior, podemos concluir que para todo valor de $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ se verifican las siguientes tres condiciones:

(i) $a_k < a_{k+1}$

(ii) $b_k < b_{k+1}$

(iii) $b_k < a_{k+2}$.

Para ver (i), notemos que si existiese un k tal que $a_k = a_{k+1}$, alguno de los intervalos J_k y J_{k+1} tendría que contener al otro. De modo enteramente análogo se ve que vale la condición (ii). Finalmente, observemos que si para algún valor de k se tuviese $b_k \geq a_{k+2}$, esto sumado a (i) y (ii) implicaría que $J_{k+1} \subset J_k \cup J_{k+2}$. Así obtenemos que debe cumplirse (iii). Todo esto

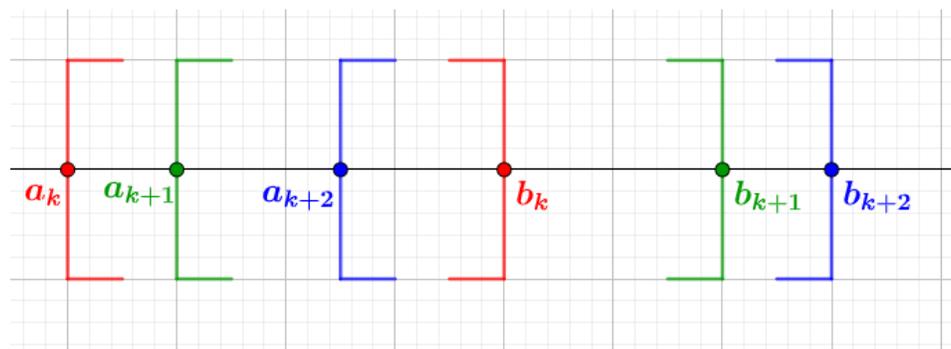


Figura 4.1: Intervalos que contradicen (iii).

nos permite decir que los intervalos de índice impar son disjuntos 2 a 2, y lo mismo ocurre con los intervalos de índice par. Notando \mathcal{A}_1 a los impares y

\mathcal{A}_2 a los pares, vemos que

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{J \in \mathcal{A}_1} J\right) + \mu\left(\bigcup_{J \in \mathcal{A}_2} J\right) \\
&\leq \sum_{J \in \mathcal{A}_1} \mu(J) + \sum_{J \in \mathcal{A}_2} \mu(J) \\
&\leq 2 \max_{i=1,2} \left\{ \sum_{J \in \mathcal{A}_i} \mu(J) \right\}, \tag{4.2}
\end{aligned}$$

y el Lema resulta de elegir a $\{I_1, \dots, I_n\}$ como la familia que realiza el máximo en (4.2). \square

4.2. Operadores maximales en \mathbb{R}^n con $n > 1$

Una vez cerrado el análisis en \mathbb{R} podemos pasar a estudiar el comportamiento de los operadores maximales en dimensiones mayores. En este caso, trabajar en absoluta generalidad respecto a las medidas nos deja sin muchas herramientas. Por esto, en [Var94] Vargas se ha limitado a trabajar con medidas estrictamente positivas, invariantes por rotaciones y finitas sobre todo compacto. En este contexto, el problema de encontrar qué medidas dan lugar a operadores M_μ de tipo débil (1,1) está completamente resuelto.

La demostración de este resultado de caracterización es bastante extensa, y se basa en muchas observaciones geométricas de naturaleza elemental (Observación 4.2.3 y Lemas 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6 y 4.2.7). Decidimos incluirlas en este trabajo para presentar el teorema de forma completa. Podrían ser, sin embargo, obviadas en una primera lectura, pasando directamente a la demostración del teorema en la subsección 4.2.2.

Teorema 4.2.1. *Sea μ una medida sobre \mathbb{R}^n estrictamente positiva, invariante por rotaciones y finita sobre todo compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) M_μ es de tipo débil (1,1).
- (ii) Existe una constante $C_2 > 0$ tal que para todos r, a positivos con $r \leq 10a$, vale que

$$\mu(\{a < |x| < a + 2r\}) \leq C_2 \mu(\{a + r/2 < |x| < a + 3r/2\}). \tag{4.3}$$

(iii) μ es doblante lejos del origen, es decir, existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$\mu(B_{2s}(x_0)) \leq C_3 \mu(B_s(x_0)) \quad \text{para todo } s \leq |x_0|/4. \quad (4.4)$$

4.2.1. Definiciones y resultados geométricos previos

Tenemos unas cuantas cosas que hacer antes de iniciar la demostración de este teorema. Primero introducimos la notación para las coronas abiertas

$$K(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n / r_1 < |x| < r_2\} \quad (4.5)$$

y las notaciones $K(r_1, r_2]$, $K[r_1, r_2)$ y $K[r_1, r_2]$ para indicar que las desigualdades en (4.5) no son estrictas según el caso. Notamos también K_B a la mínima corona que contiene a una bola B .

A continuación definiremos un objeto geométrico que será crucial en la demostración.

Definición 4.2.2. Dada una bola $B = B_r(x_0)$, definimos el sector S_B asociado a B según cómo sean las dimensiones de la bola. Primero, en el caso en que $|x_0| \geq r$, definimos S_B como

$$S_B = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_0| - r < |x| < |x_0| + r, \text{ ang}(x, x_0) < \arcsin(r/|x_0|)\}$$

donde ang denota el ángulo (siempre no negativo) entre los vectores $\vec{0x}$ y $\vec{0x_0}$.

En este caso, S_B es una figura que en \mathbb{R}^2 recibe el nombre de trapecio circular, y se obtiene como la intersección entre la menor corona abierta que contiene a B y el interior del menor cono simple centrado en el origen que contiene a B . A veces, cuando quede claro por contexto a qué bola nos referimos, notaremos al sector simplemente como S . Por otro lado, si $|x_0| < r$, definimos S_B como

$$S_B = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < |x_0| + r\}.$$

En este caso, S_B es la menor bola centrada en el origen que contiene a B (Ver Figura 4.3). A su vez, definimos $\arg(S)$, el argumento de un sector S , como el supremo de los valores de $\text{ang}(x, x_0)$ sobre todos los $x \in S$. Concretamente,

$$\arg(S) = \begin{cases} \arcsin(r/|x_0|) & \text{si } r \leq |x_0| \\ 2\pi & \text{si } r > |x_0|. \end{cases}$$

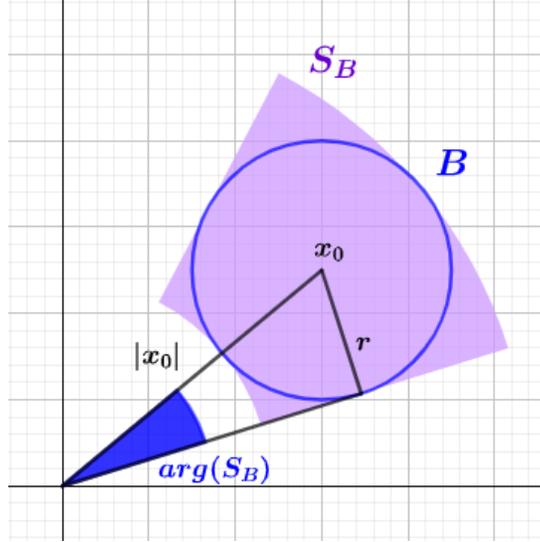


Figura 4.2: Sector asociado a una bola con $r \leq |x_0|$.

Esto nos permite introducir una nueva condición, cuya equivalencia a las anteriores tendremos que demostrar para probar 4.2.1.

- (iv) Existe una constante $C_4 > 0$ tal que para toda bola B en \mathbb{R}^n , $\mu(S_B) \leq C_4 \mu(B)$.

Por último, antes de embarcarnos en la prueba, queremos demostrar algunos resultados geométricos cuya utilidad irá delatándose conforme avancemos con la demostración.

Comenzamos con una observación elemental pero de elevada utilidad para llevar adelante demostraciones.

Observación 4.2.3. Si $\alpha \in [0, \pi/2]$, existe una constante universal $c > 0$ tal que

$$c\alpha \leq \sin(\alpha) \leq \alpha. \quad (4.6)$$

Demostración. La segunda desigualdad es obvia, al igual que la primera en el caso $\alpha = 0$. Para la primera desigualdad con $\alpha > 0$, apelamos a que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1,$$

y llamamos $\beta_0 \in (0, \pi/2)$ al ángulo tal que

$$\alpha \leq \beta_0 \implies \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{1}{2}.$$

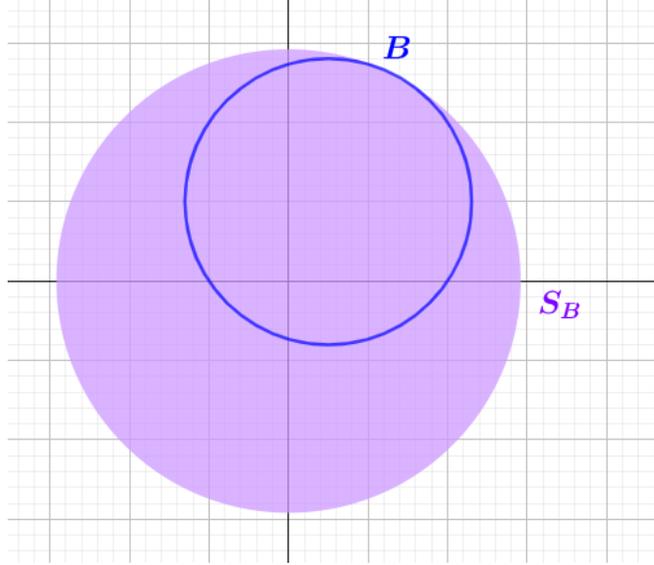


Figura 4.3: Sector asociado a una bola con $r > |x_0|$.

Esto cubre ciertos valores de α , y para los restantes notamos que

$$\beta_0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \implies \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{\sin(\beta_0)}{\pi/2}.$$

De esta manera se tiene (4.6) con

$$c = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2 \sin(\beta_0)}{\pi} \right\}.$$

□

A continuación probaremos un lema que nos asegura que, si una bola está relativamente lejos del origen, los puntos de su borde cumplen una relación entre su distancia al origen y su ángulo con el centro.

Lema 4.2.4. *Sea $B = B_r(x_0)$, con $0 < r < \frac{10}{11}|x_0|$ y $0 < \epsilon \leq 1/2$. Entonces existen constantes universales $b_1, b_2 > 0$ tales que todo punto $y \in \partial B \cap \{\partial B_{|x_0|-r+r\epsilon}(0) \cup \partial B_{|x_0|+r-r\epsilon}(0)\}$ verifica*

$$b_1\sqrt{\epsilon} \arg(S) \leq \arg(y, x_0) \leq b_2\sqrt{\epsilon} \arg(S).$$

Demostración. Recordemos que $\arg(S)$ es el supremo sobre todos los $x \in S$ de los valores de $\arg(x, x_0)$. De esta manera vemos que

$$\arg(y, x_0) \leq \arg(S) = \arcsin\left(\frac{r}{|x_0|}\right) < \arcsin\left(\frac{10}{11}\right) < \frac{\pi}{2},$$

y por lo tanto estamos en las hipótesis de la Observación 4.2.3. Así, para probar el lema bastará probar que

$$\sin(\arg(y, x_0)) \sim \sqrt{\epsilon} \frac{r}{|x_0|},$$

o equivalentemente

$$\sin^2(\arg(y, x_0)) \sim \epsilon \frac{r^2}{|x_0|^2}. \quad (4.7)$$

Para estimar $\sin^2(\arg(y, x_0))$, consideramos el triángulo determinado por y , x_0 y el origen y aplicamos el Teorema del Coseno. Ver Figura 4.4. De esta

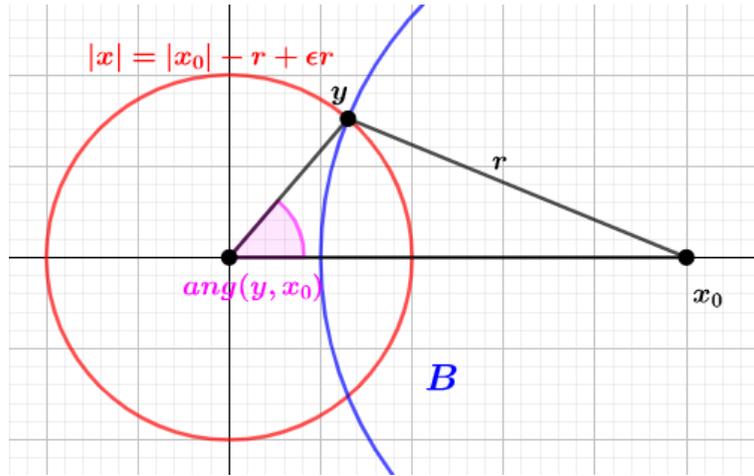


Figura 4.4: Triángulo determinado por y , x_0 y el origen. El lado opuesto al ángulo que queremos estimar mide r , y los lados adyacentes miden $|x_0|$ y $|x_0| - r + \epsilon r$.

manera obtenemos que

$$r^2 = |x_0|^2 + |y|^2 - 2|x_0||y|\cos(\arg(y, x_0)).$$

Despejando $\cos(\text{ang}(y, x_0))$ y recordando que $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ arribamos a que

$$\begin{aligned}\sin^2(\text{ang}(y, x_0)) &= 1 - \left(\frac{|x_0|^2 + |y|^2 - r^2}{2|x_0||y|} \right)^2 \\ &= \frac{4|x_0|^2|y|^2 - (|x_0|^2 + |y|^2 - r^2)^2}{4|x_0|^2|y|^2}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

A partir de este punto, las cuentas se simplifican especificando el valor de $|y|$ con el que estamos trabajando. Comencemos con $|y| = |x_0| - r + r\epsilon = |x_0| - (1 - \epsilon)r$. Operando con el numerador en (4.8) este queda

$$\begin{aligned}4|x_0|^2(|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2 - \left(|x_0|^2 + (|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2 - r^2 \right)^2 \\ = r^2(2\epsilon - \epsilon^2) \left[(\epsilon^2 - 2\epsilon)r^2 - 4(1 - \epsilon)r|x_0| + 4|x_0|^2 \right] \\ = r^2\epsilon(2 - \epsilon) \left[(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2 - r^2 \right],\end{aligned}$$

y podemos reescribir (4.8) como

$$\sin^2(\text{ang}(y, x_0)) = \frac{r^2\epsilon}{4|x_0|^2} \frac{(2 - \epsilon) \left[(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2 - r^2 \right]}{(|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2} = \frac{r^2\epsilon}{4|x_0|^2} A.$$

De esta forma, para probar (4.7) basta ver que A está acotado superior e inferiormente por constantes positivas. Notando que la condición $r < 10/11|x_0|$ garantiza que las bases de los cuadrados y el numerador de A son positivos, podemos acotar

$$\begin{aligned}A &\geq (2 - \epsilon) \frac{(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2 - r^2}{(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2} \\ &= (2 - \epsilon) \left(1 - \frac{r^2}{(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2} \right) \\ &\geq (2 - \epsilon) \left(1 - \frac{r^2}{\left(\frac{11}{5}r^2 - (1 - \epsilon)r\right)^2} \right) \\ &= (2 - \epsilon) \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{6}{5} + \epsilon\right)^2} \right) \geq \frac{11}{24},\end{aligned}$$

donde la última cota vale para todo $\epsilon \in (0, 1/2)$.

A su vez,

$$\begin{aligned}
A &\leq (2 - \epsilon) \frac{(2|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2}{(|x_0| - (1 - \epsilon)r)^2} \\
&\leq (2 - \epsilon) \frac{4|x_0|^2}{\left(|x_0| - \frac{10}{11}(1 - \epsilon)|x_0|\right)^2} \\
&= (2 - \epsilon) \frac{4}{\left(\frac{1}{11} + \frac{10}{11}\epsilon\right)^2} \leq 968,
\end{aligned}$$

donde la última cota vale para todo $\epsilon \in (0, 1/2)$.

La cuenta para el caso $|y| = |x_0| + (1 - \epsilon)r$ es análoga, y arroja que para todo $\epsilon \in (0, 1/2)$

$$\frac{144}{121} \leq A \leq 8,$$

por lo tanto queda probada la relación (4.7) y con eso concluye la demostración del lema. \square

A continuación, nos interesa el problema de entender la relación que existe entre medidas de distintos sectores. Como los sectores son intersecciones de conos y coronas, ganar comprensión sobre la dimensión angular de los conos será crucial. En toda esta sección denotaremos con C a un cono simple, abierto y con vértice en el origen. Si z es el eje del C , llamaremos apertura del cono al valor $\alpha \in (0, \pi/2]$ que permite definir a C como

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n / \text{ang}(x, z) < \alpha\},$$

aceptando el caso degenerado $\alpha = \pi/2$ donde el cono es en verdad media bola n -dimensional. Cuando lo consideremos conveniente, aclararemos con un subíndice la apertura (C_α) o el eje (C_z) del cono, quedando claro por contexto cuál de estos es el caso.

Antes de seguir, notemos que con esta definición, para las bolas $B = B_r(x_0)$ que verifican $r \leq |x_0|$, $\text{arg}(S_B)$ es la apertura del menor cono que contiene a B . Es decir, S_B es la intersección de la menor corona y el menor cono que contienen a B .

Ahora sí, estimemos la medida del conjunto en que un cono interseca a la esfera S^{n-1} .

Lema 4.2.5. Sean $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y C un cono simple centrado en el origen de apertura $\alpha \in (0, \pi/2)$. Entonces

$$\mathcal{H}^{n-1}(C \cap S^{n-1}) \sim (\sin(\alpha))^{n-1}, \quad (4.9)$$

donde las constantes dependen a lo sumo de n .

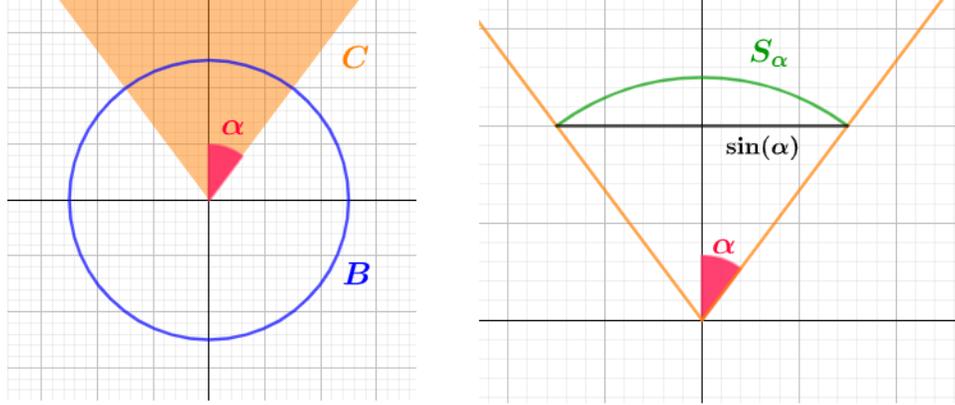


Figura 4.5: Intersección de un cono y una esfera unitaria.

Demostración. Llamemos $S_\alpha = C \cap S^{n-1}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el eje de C apunta en la dirección dada por el vector canónico e_n . En tal caso, vale notar que S_α es exactamente el conjunto de puntos $x \in S^{n-1}$ tales que

$$x_n = \langle x, e_n \rangle = \cos(\text{ang}(x, e_n)) > \cos(\alpha). \quad (4.10)$$

Esta caracterización será usada en varias partes de este trabajo.

Ahora bien, podemos parametrizar S_α por medio de

$$T : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S_\alpha \subset \mathbb{R}^n / T(y) = \left(y_1, \dots, y_{n-1}, \sqrt{1 - |y|^2} \right),$$

con $D = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} / |y| < \sin(\alpha)\}$.

Veamos que T está bien definida, que es biyectiva y C^∞ . Con eso, podremos estimar $\mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha)$ usando la fórmula de área.

- Para ver que T está bien definida, comenzamos notando que

$$|T(y)|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 1 - |y|^2 = 1,$$

y por lo tanto $T(y) \in S^{n-1}$. Para ver que $T(y) \in C$, recordamos la condición (4.10), y observamos que

$$(T(y))_n = \sqrt{1 - |y|^2} > \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2} = \cos(\alpha).$$

- En esta última cuenta vimos que lo que aparece debajo de la raíz cuadrada en la última coordenada de $T(y)$ es mayor que $\cos(\alpha) > 0$, y por lo tanto T es C^∞ .

- La inyectividad de T es clara. Para la sobreyectividad, notamos que dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in S_\alpha$ podemos expresarlo como $x = T(y)$ con $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$. En efecto, tenemos que

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 - x_n^2 \leq 1 - \cos(\alpha)^2 = \sin(\alpha)^2,$$

y por lo tanto $y \in D$. A su vez, esta misma cuenta permite ver que $x_n = \sqrt{1 - |y|^2}$ y por lo tanto $x = T(y)$.

Con todo esto, invocamos la fórmula de área para obtener que

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha) = \frac{2^{n-1}}{\omega_{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha) = \frac{2^{n-1}}{\omega_{n-1}} \int_D JT(y) dy.$$

Procedemos al cálculo de $JT(y)$. Notamos que

$$DT(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \cdots & \frac{y_n}{\sqrt{1-|y|^2}} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$JT(y)^2 = \det(DT(y)DT(y)^t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^2}{1-|y|^2} = \frac{|y|^2}{1-|y|^2}.$$

Para la cota superior, notamos que

$$JT(y)^2 = \frac{|y|^2}{1-|y|^2} < \frac{\sin(\alpha)^2}{1-\sin(\alpha)^2} = \tan(\alpha)^2.$$

Para continuar, será necesario separar en casos. Si $0 < \alpha \leq \pi/4$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha) &\lesssim \int_D JT(y) dy \leq \tan(\alpha) \mathcal{L}^{n-1}(D) \\ &\sim \tan(\alpha) \sin(\alpha)^{n-1} \leq \sin(\alpha)^{n-1}. \end{aligned}$$

Suponiendo ahora $\alpha \geq \pi/4$, notamos que $S_\alpha \subset S_{\pi/2}$, la mitad de la esfera S^{n-1} cuya medida es una constante que depende exclusivamente de n . De esta forma,

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha) \lesssim 1 = \frac{(\sin(\alpha))^{n-1}}{(\sin(\alpha))^{n-1}} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} (\sin(\alpha))^{n-1}$$

ya que $\sin(\alpha) \geq \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Esto prueba la cota superior en (4.9) para todo $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Para la cota inferior, basta ver que $p(S_\alpha) = D$, con D como antes y p la proyección

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} / p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Para esto aprovechamos las cuentas anteriores, y notamos que $p(S_\alpha) = p(T(D)) = D$ ya que $p \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Así,

$$(\sin(\alpha))^{n-1} \sim \mathcal{H}^{n-1}(D) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_\alpha).$$

□

Retomemos ahora el contexto del Teorema 4.2.1, y veamos cómo el Lema 4.2.5 nos ayuda a estudiar las medidas de sectores. Si μ es una medida sobre \mathbb{R}^n invariante por rotaciones, definimos su proyección radial como la medida μ_0 sobre $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\mu_0(E) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \mu(\{y \in \mathbb{R}^n / |y| \in E\}) \quad \text{si } E \subset \mathbb{R}_{>0}$$

y

$$\mu_0(E) = \mu(\{0\}) + \frac{1}{\omega_{n-1}} \mu(\{y \in \mathbb{R}^n / |y| \in E \setminus \{0\}\}) \quad \text{si } 0 \in E.$$

En particular, notemos que si $E = (a, b)$ con $a > 0$, $\omega_{n-1} \mu_0(E) = \mu(K(a, b))$.

De esta manera, interpretando $\mathbb{R}^n = \{0\} \cup \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}$, resulta claro que

$$\mu = \mu_0 \times \sigma,$$

donde

$$\sigma = \sigma_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1} \upharpoonright_{S^{n-1}},$$

la medida esférica usual no normalizada sobre S^{n-1} . Vale notar que con esta definición, puede reemplazarse \mathcal{H}^{n-1} por σ el Lema 4.2.5.

Con todo esto, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado, que permite comparar medidas de sectores cuando la medida es invariante por rotaciones.

Lema 4.2.6. Sean μ una medida radial sobre \mathbb{R}^n y S un sector dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_0| - r < |x| < |x_0| + r \text{ y } \text{ang}(x, x_0) < \alpha\},$$

con $\alpha \in (0, \pi/2)$.

(i) Sea K la corona

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_0| - r < |x| < |x_0| + r\}.$$

Entonces

$$\mu(K) \sim \frac{1}{(\sin(\alpha))^{n-1}} \mu(S). \quad (4.11)$$

(ii) Sea \tilde{S} otro sector dado por

$$\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R}^n / |x_0| - r < |x| < |x_0| + r \text{ y } \text{ang}(x, x_0) < \beta\}$$

con $\beta \in (0, \pi/2)$ y $\beta \leq \alpha \leq c\beta$, con $c > 1$ una constante. Entonces

$$\mu(S) \sim \mu(\tilde{S}) \quad (4.12)$$

con constantes que dependen a lo sumo de n y c .

Este Lema demuestra la utilidad que tiene la introducción de los sectores en el escenario del Teorema 4.2.1. No es posible efectuar una cantidad finita de rotaciones sobre una bola B y cubrir su corona asociada K_B , pero sí es posible hacer esto con rotaciones de S_B . Así, los sectores actúan como puente entre las bolas y las coronas, y el Lema 4.2.6 permite ejercer un control sobre las variaciones de medidas durante estos pasajes.

Demostración. (i) Sea C un cono con eje en la dirección de x_0 y apertura α . En tal caso, podemos escribir a S como

$$S = (|x_0| - r, |x_0| + r) \times (C \cap S^{n-1}).$$

Apelamos al Lema 4.2.5 y obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu_0(|x_0| - r, |x_0| + r) \sigma(C \cap S^{n-1}) \\ &\sim \mu_0(|x_0| - r, |x_0| + r) \sin(\alpha)^{n-1} \sigma(S^{n-1}) \\ &= \sin(\alpha)^{n-1} \mu(K), \end{aligned}$$

ya que $\sigma(S^{n-1})$ es una constante que depende exclusivamente de n .

- (ii) Como $\alpha < \pi/2$, podemos suponer que $c\beta < \pi/2$ (cambiándola por una $c' < c$ de ser necesario). Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k-1} < c \leq 2^k.$$

Entonces iterando la fórmula del seno del ángulo duplo k veces tenemos que

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &\leq \sin(\alpha) \leq \sin(c\beta) \\ &= 2^k \sin\left(\frac{c}{2^k}\beta\right) \cos\left(\frac{c}{2^k}\beta\right) \cos\left(\frac{c}{2^{k-1}}\beta\right) \dots \cos\left(\frac{c}{2}\beta\right) \\ &\leq 2^k \sin(\beta) \leq 2c \sin(\beta). \end{aligned}$$

Aplicando (4.11) tenemos finalmente que

$$\mu(S) \sim (\sin(\alpha))^{n-1} \mu(K) \sim (\sin(\beta))^{n-1} \mu(K) \sim \mu(\tilde{S}),$$

con constantes que dependen únicamente de n y c .

□

Por último, necesitamos probar un resultado parecido a (4.12), pero no exactamente igual.

Lema 4.2.7. *Sean C_α un cono de apertura $\alpha \in (0, \pi/2]$ y m un número natural impar. Entonces*

$$m\mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap C_{\alpha/m}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap C_\alpha). \quad (4.13)$$

Vale notar que este resultado es más débil que (4.12), porque la desigualdad solo vale en un sentido. Sin embargo, es más potente en tanto no involucra constantes que dependan de la dimensión del espacio.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que C_α tiene eje en dirección e_n . Si $m = 1$ no hay nada que hacer, por lo que asumimos que $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$. Para probar el Lema, basta ver que se puede incluir en C_α m copias disjuntas de $C_{\alpha/m}$.

Definimos las direcciones $z_j \in S^{n-1}$ como

$$z_j = \cos\left(j\frac{2\alpha}{m}\right) e_n + \sin\left(j\frac{2\alpha}{m}\right) e_{n-1}$$

para $j \in \{-k, -k + 1, \dots, k - 1, k\}$ y a los conos C_{z_j} como los conos de apertura α/m con eje en la dirección de z_j . Notar que hay $2k + 1 = m$ de ellos.

Para probar el lema, basta ver que estos conos son disjuntos y están incluidos en C_α . A tal fin, introducimos la proyección

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2 / p(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-1}, x_n)$$

y estudiamos qué forma tienen las proyecciones de los conos. Concretamente, veamos que

$$p(C_{z_j}) = C_{p(z_j)}^{(2)},$$

donde $C_{p(z_j)}^{(2)}$ es el cono con eje en la dirección $p(z_j)$ de apertura $2\alpha/m$ en \mathbb{R}^2 . En efecto,

$$\begin{aligned} y \in p(C_{z_j}) &\iff y = p(x) \quad y \quad \text{ang}(x, z_j) < \frac{2\alpha}{m} \\ &\iff y = (x_{n-1}, x_n) \quad y \quad \langle x, z_j \rangle > \cos\left(\frac{2\alpha}{m}\right) \\ &\iff \langle y, p(z_j) \rangle > \cos\left(\frac{2\alpha}{m}\right) \\ &\iff y \in C_{p(z_j)}^{(2)}, \end{aligned}$$

donde en la penúltima implicación hemos apelado a que todas las coordenadas de z_j son 0 excepto las últimas dos. Por supuesto, una prueba idéntica muestra que $p(C_\alpha)$ es el cono en \mathbb{R}^2 con eje $(0, 1)$ y apertura α .

De esta forma, para ver que los $\{C_{z_j}\}_{-k \leq j \leq k}$ son disjuntos basta ver que los $\{p(C_{z_j})\}_{-k \leq j \leq k}$ lo son, y esto es una simple observación geométrica. Ver Figura 4.6. Resta ver que $C_{z_j} \subset C_\alpha$ para todo j . Sea $x \in C_{z_j}$. Por la caracterización (4.10), basta ver que $x_n > \cos(\alpha)$. Ahora bien, x_n es la segunda coordenada de $p(x) \in \mathbb{R}^2$, por lo que es suficiente estudiar el problema allí. Ahora bien, $p(x) \in C_{p(z_j)}^{(2)}$, y por lo tanto es claro visualmente que

$$\text{ang}((0, 1), x) \leq \text{ang}((0, 1), z_j) + \text{ang}(z_j, x) < j \frac{2\alpha}{m} + \frac{\alpha}{m} \leq \frac{2k+1}{m} \alpha = \alpha,$$

y de esta manera

$$x_n = \cos((0, 1), x) > \alpha.$$

Esto permite probar que en \mathbb{R}^n puede haber m copias disjuntas de $C_{\alpha/m}$ incluidas en C_α , y por lo tanto se cumple (4.13). \square

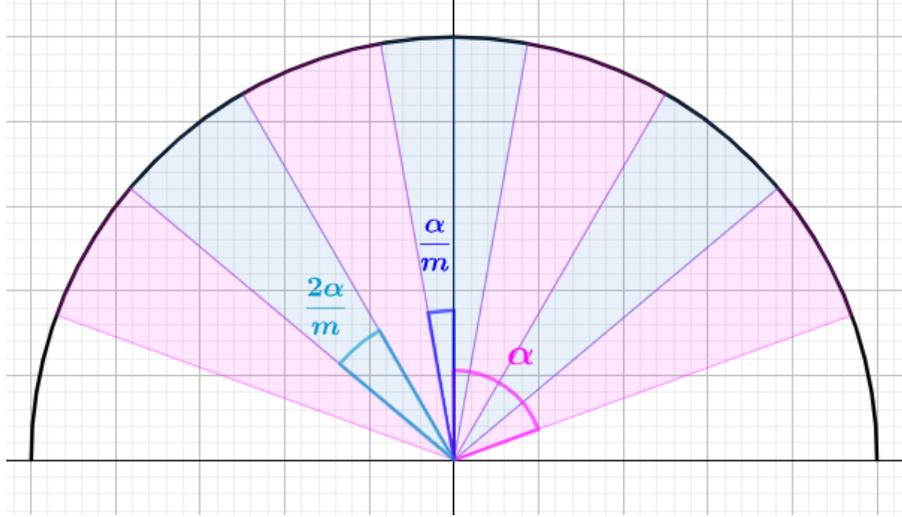


Figura 4.6: En \mathbb{R}^2 , entran exactamente m conos de apertura α/m en un cono de apertura α . En esta figura $m = 7$.

4.2.2. Demostración del tipo débil (1,1)

Después de demostrar estos resultados puramente geométricos, estamos finalmente en condiciones de encarar la

Demostración del Teorema 4.2.1. La prueba se realizará de la siguiente forma: primero probaremos $(iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$, luego probaremos $(i) \Rightarrow (iv)$ y finalmente $(iii) + (iv) \Rightarrow (i)$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. Podemos asumir que C_4 es de la forma $k/2$ con k un número natural impar, agrandándolo de ser necesario. Dada la corona $K(a, a + 2r)$, con $r \leq 10a$, llamemos $x_0 = (a + r)e_1$, con e_1 el primer vector canónico en \mathbb{R}^n , $B = B_r(x_0)$ y $S = S_B$. Notemos que para esta B , $K = K(B)$. Ver Figura 4.7. Tenemos a su vez que $r \leq 10a$ implica

$$|x_0| = a + r \geq \frac{11}{10}r > r.$$

Primero, esto nos dice que el sector S_B es en este caso un trapecio circular y no una bola, con $\arg(S) = \arcsin(r/|x_0|)$. Pero más aún, nos dice que B está en las hipótesis del Lema 4.2.4.

Lo que haremos será controlar la medida de una cierta porción de la corona $K(a, a + 2r)$, con el objetivo final de controlar la medida de toda la

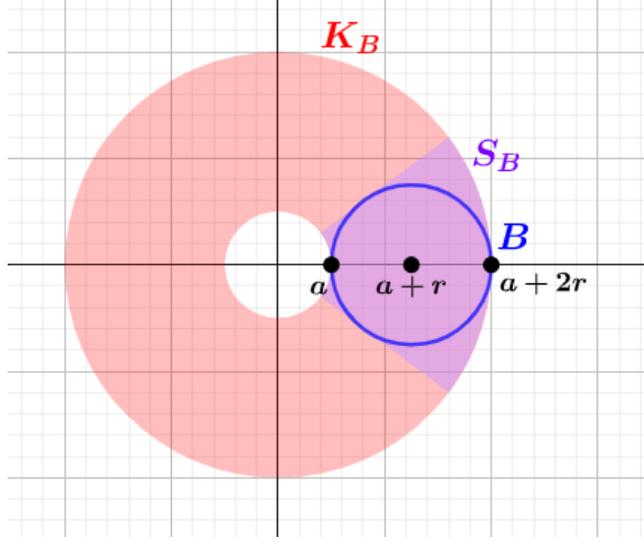


Figura 4.7: La bola B y el sector S_B definidos en función de K .

corona. Afirmamos que existe un $0 < \epsilon \leq 1/2$, independiente de r y a tal que si $x \in B \cap (K(a, a + r\epsilon] \cup K[a + 2r - r\epsilon, a + 2r))$, entonces

$$\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)/(2C_4). \quad (4.14)$$

En efecto, veamos que basta elegir

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{(4b_2C_4)^2} \right\},$$

con b_2 la constante del Lema 4.2.4. Notemos que ϵ no depende de a ni r . Dado $x \in B \cap (K(a, a + r\epsilon] \cup K[a + 2r - r\epsilon, a + 2r))$, existe un $\delta \in (0, \epsilon]$ tal que $x \in B \cap \{\partial B_{a+r\delta}(0) \cup \partial B_{a+2r-r\delta}(0)\}$. Si y es cualquier punto de $\partial B \cap \{\partial B_{a+r\delta}(0) \cup \partial B_{a+2r-r\delta}(0)\}$, tenemos que

$$\text{ang}(x, x_0) < \text{ang}(y, x_0) \leq b_2\sqrt{\epsilon} \arg(S) \leq \frac{\arg(S)}{2C_4}.$$

Así, nos quedamos con una porción de la corona controlada en su radio de acuerdo con ϵ y controlada en su apertura de acuerdo con $\arg(S)$ y

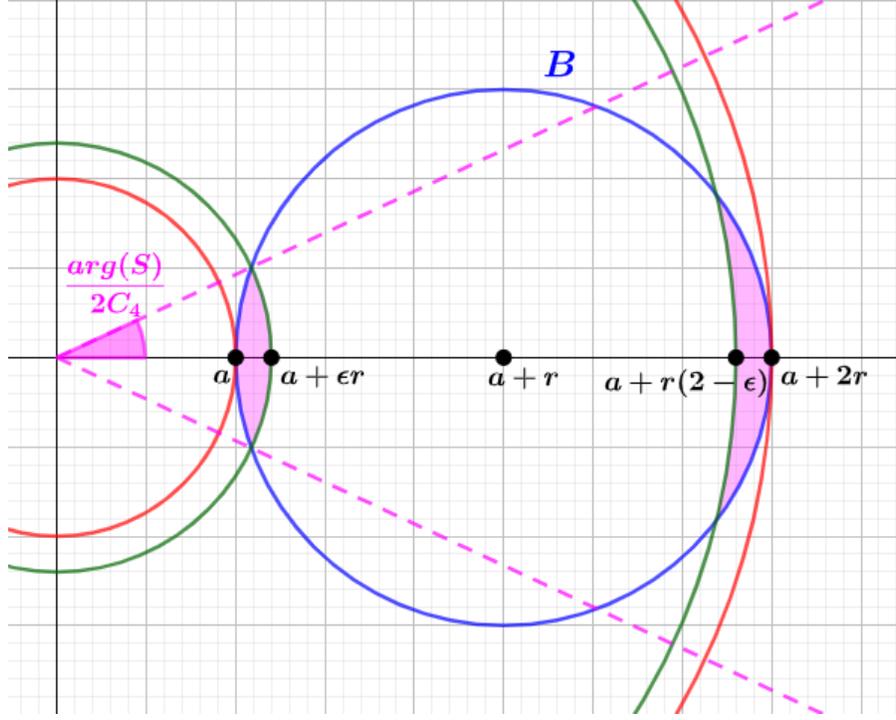


Figura 4.8: Al intersecar B con dos coronas pequeñas, los puntos de la intersección están incluidos en un cono de apertura fija.

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mu((K(a, a + \epsilon r] \cup K[a + 2r - \epsilon r, a + 2r]) \cap \{x/\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}) \\
& \leq \mu(S) \leq C_4 \mu(B) \\
& \leq C_4 \mu(K(a, a + \epsilon r] \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)/2C_4\}) \\
& \quad + C_4 \mu(K[a + 2r - \epsilon r, a + 2r] \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)/2C_4\}) \\
& \quad + C_4 \mu(K(a + \epsilon r, a + 2r - \epsilon r) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}) \\
& \leq \frac{1}{2} \mu(K(a, a + \epsilon r] \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}) \\
& \quad + \frac{1}{2} \mu(K[a + 2r - \epsilon r, a + 2r] \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}) \\
& \quad + C_4 \mu(K(a + \epsilon r, a + 2r - \epsilon r) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}),
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos apelado a (iv), en la tercera hemos separado a B en tres porciones de acuerdo a a su distancia al origen, cada

una admitiendo restricciones útiles sobre su ángulo respecto de x_0 , y en la última desigualdad hemos invocado el Lema 4.2.7 con $m = 2C_4$.

Despejando el último término del último miembro en esta última desigualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \mu(K(a, a + \epsilon r] \cup K[a + 2r - \epsilon r, a + 2r) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}) \\ & \leq 2C_4 \mu(K(a + \epsilon r, a + 2r - \epsilon r) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}). \end{aligned}$$

Descomponiendo la medida de cada miembro como $\mu = \mu_0 \times \sigma$, y notando que el factor correspondiente a σ es el mismo en ambos casos, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mu_0((a, a + r - (1 - \epsilon)r] \cup [a + r + (1 - \epsilon)r, a + 2r)) \\ & \leq 2C_4 \mu_0(a + r - (1 - \epsilon)r, a + r + (1 - \epsilon)r), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_0(a, a + 2r) &= \mu_0((a, a + r - (1 - \epsilon)r] \cup [a + r + (1 - \epsilon)r, a + 2r)) \\ &+ \mu_0((a + r - (1 - \epsilon)r, a + r + (1 - \epsilon)r)) \\ &\leq (1 + 2C_4) \mu_0(a + r - (1 - \epsilon)r, a + r + (1 - \epsilon)r). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Esencialmente, lo que hemos hecho hasta ahora es probar una relación entre la medida de la corona completa y una parte más chica de ella. Necesitamos que una relación similar valga entre la corona corona completa y la corona $K(a + r/2, a + 3r/2)$. A estos efectos, vamos a iterar la desigualdad (4.15).

En cada iteración de (4.15), el intervalo cuya medida μ_0 estamos tomando multiplica su longitud por un factor $(1 - \epsilon)$. De esta manera, eligiendo $N = N(\epsilon)$ tal que $(1 - \epsilon)^N < 1/2$, tenemos que después de N iteraciones

$$\begin{aligned} \mu_0(a, a + 2r) &\leq (1 + 2C_4) \mu_0(a + r - (1 - \epsilon)r, a + r + (1 - \epsilon)r) \leq \dots \\ &\leq (1 + 2C_4)^N \mu_0(a + r - (1 - \epsilon)^N r, a + r + (1 - \epsilon)^N r) \\ &\leq (1 + 2C_4)^N \mu_0(a + r - 1/2r, a + r + 1/2r). \end{aligned}$$

Se concluye (ii) observando que $\mu(K(u, v)) = \omega_n \mu_0(u, v)$ para cualesquiera $0 < u < v$.

(ii) \implies (iii) Sean $s \leq |x_0|$, $B = B_s(x_0)$ y $2B = B_{2s}(x_0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(2B) &\leq \mu(S_{2B}) = \mu(K_{2B} \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arcsin(2s/|x_0|)\}) \\ &\leq c(2s/|x_0|)^{n-1} \mu(K(|x_0| - 2s, |x_0| + 2s)) \\ &\leq 2^{n-1} c C_2^2 (s/|x_0|)^{n-1} \mu(K(|x_0| - s/2, |x_0| + s/2)) \\ &\lesssim \mu(K(|x_0| - s/2, |x_0| + s/2) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \arg(S)\}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

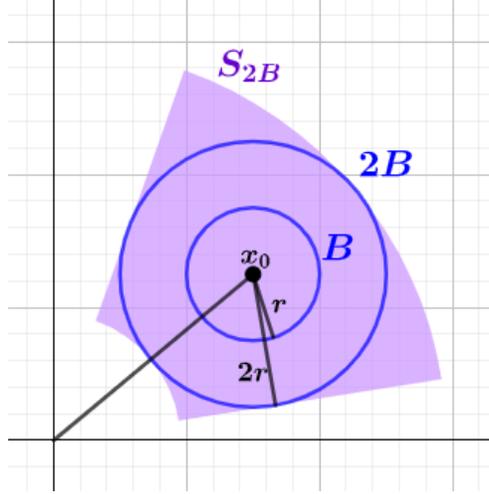


Figura 4.9: El sector asociado a la bola $2B$ con $r \leq |x_0|$.

donde en la tercera desigualdad hemos aplicado (ii) dos veces, y en la segunda y cuarta el Lema 4.2.6, recordando que $\arg(S) = \arcsin(r/|x_0|)$. Ahora bien, si llamamos y a cualquier punto de $\partial B \cap (\partial B_{|x_0|-s/2}(0) \cup \partial B_{|x_0|+s/2}(0))$, el Lema 4.2.4 nos garantiza que

$$\arg(y, x_0) \geq b_1 \sqrt{\frac{1}{2}} \arg(S_B),$$

y de esta manera el sector

$$\tilde{S} = K(|x_0| - s/2, |x_0| + s/2) \cap \left\{ x / \arg(x, x_0) \leq \frac{b_1}{2} \arg(S_B) \right\}$$

está incluido en B . Una vez más por el Lema 4.2.6 (en este caso la relación (4.12)), retomamos (4.16) y obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(2B) &\lesssim \mu(K(|x_0| - s/2, |x_0| + s/2) \cap \{\arg(x, x_0) < \arg(S)\}) \\ &\sim \mu(\tilde{S}) \leq \mu(B). \end{aligned}$$

(iii) \implies (iv) Sea $B = B_r(|x_0|)$. Como μ es invariante por rotaciones, podemos suponer por simplicidad que $x_0 = (|x_0|, 0, \dots, 0)$. Separamos la demostración en cuatro casos.

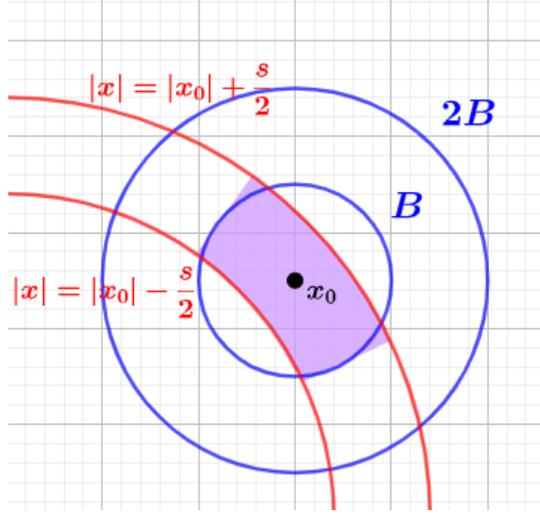


Figura 4.10: El sector $K(|x_0| - s/2, |x_0| + s/2) \cap \{\text{ang}(x, x_0) < \text{arg}(S)\}$.

Caso 1: Supongamos primero $r \leq |x_0|/4$. Al igual que en la demostración anterior, $y \in \partial(2B) \cap (\partial B_{|x_0|-r}(0) \cup \partial B_{|x_0|+r}(0))$ implica que

$$\text{ang}(y, x_0) \geq b_1 \sqrt{\frac{1}{2}} \text{arg}(S_{2B}) \geq \frac{b_1}{2} \text{arg}(S_B),$$

y de esta manera el sector

$$\hat{S} = K_B \cap \left\{ x / \text{ang}(x, x_0) \leq \frac{b_1}{2} \text{arg}(S_B) \right\}$$

está incluido en $2B$. Esto implica que

$$\mu(S_B) \sim \mu(\hat{S}) \leq \mu(2B) \leq C_3 \mu(B),$$

donde la primera relación es consecuencia de (4.12).

Caso 2: Consideremos ahora las bolas tales que $1/4 |x_0| < r < |x_0|$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = |x_0| e_1$. Definimos las siguientes bolas:

$$B_1 = B_{(|x_0|-r)/3} \left(\frac{4}{3}(|x_0| - r), 0, \dots, 0 \right),$$

$$B_2 = B_{(|x_0|+r)/5} \left(\frac{4}{5}(|x_0| + r), 0, \dots, 0 \right).$$

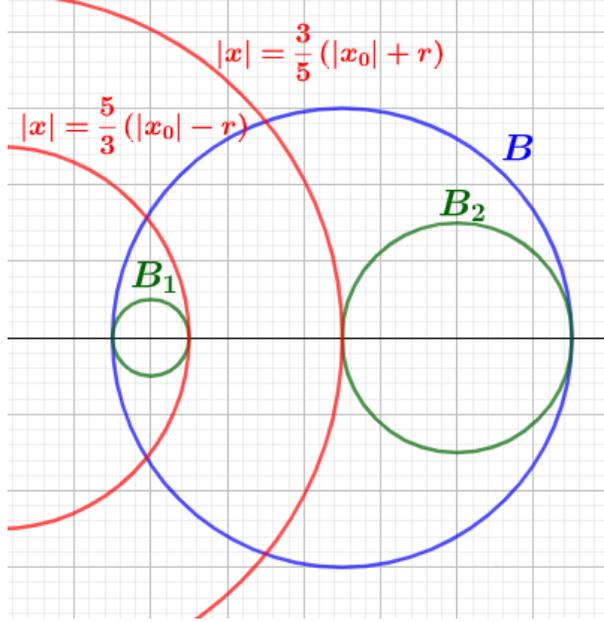


Figura 4.11: Inclusión de dos bolas del Caso 1 en la bola B con $|x_0|/4 < r < |x_0|$.

Es fácil ver que estas dos bolas están en el Caso 1. Además, están incluidas en B . Para ver que $B_1 \subset B$ tomamos un $x \in B_1$ arbitrario y notamos que

$$|x - x_0| < \frac{|x_0| - r}{3} + \left(|x_0| - \frac{4}{3}(|x_0| - r) \right) = r.$$

Análogamente se ve que $B_2 \subset B$.

Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned} 2\mu(B) &\geq \mu(B_1) + \mu(B_2) \gtrsim \mu(S_{B_1}) + \mu(S_{B_2}) \\ &\gtrsim \mu(K_{B_1}) + \mu(K_{B_2}) \\ &= \mu \left(K \left(|x_0| - r, \frac{5}{3}(|x_0| - r) \right) \cup K \left(\frac{3}{5}(|x_0| + r), |x_0| + r \right) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (4.11) notando que

$$\arg(S_{B_1}) = \arg(S_{B_2}) = \arcsin(1/4).$$

Hasta aquí, hemos probado que la medida de la bola B controla la medida de una parte de la corona K_B . Sin embargo, en ciertos casos ya tenemos un

control sobre toda la corona. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(|x_0| - r) \leq \frac{3}{5}(|x_0| + r) &\iff \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right)|x_0| \leq \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right)r \\ &\iff \frac{8}{17}|x_0| \leq r, \end{aligned}$$

y por lo tanto si $r < 8/17|x_0|$ (4.17) arroja que

$$\begin{aligned} \mu(B) &\geq \mu\left(K\left(|x_0| - r, \frac{5}{3}(|x_0| - r)\right) \cup K\left(\frac{3}{5}(|x_0| + r), |x_0| + r\right)\right) \\ &\geq \mu(K(|x_0| - r, |x_0| + r)) \geq \mu(S_B), \end{aligned}$$

lo que prueba (iv) en este caso. Si $r < 8/17|x_0|$, necesitamos aún ejercer un control

$$\mu(B) \geq \mu\left(K\left[\frac{5}{3}(|x_0| - r), \frac{3}{5}(|x_0| + r)\right]\right),$$

y con esto habremos probado (iv).

Afirmamos que existe un $\beta_0 > 0$ tal que

$$K\left[\frac{5}{3}(|x_0| - r), \frac{3}{5}(|x_0| + r)\right] \cap \{x/\text{ang}(x, x_0) < \beta_0\} \subset B. \quad (4.18)$$

Para ver esto, calculemos $\beta = \text{ang}(y, x_0)$ para

$$y \in \partial B \cap \left(\partial B_{\frac{5}{3}(|x_0|-r)}(0) \cup \partial B_{\frac{3}{5}(|x_0|+r)}(0)\right).$$

Comenzamos suponiendo $|y| = \frac{5}{3}(|x_0| - r)$, y estimamos β aplicando el Teorema del coseno al triángulo con vértices y , x_0 y 0 . Ver Figura 4.12.

$$\begin{aligned} r^2 &= |x_0|^2 + \left(\frac{5}{3}(|x_0| - r)\right)^2 - 2|x_0|(|x_0| - r)\cos(\beta) \\ \iff \frac{10}{3}(|x_0| - r)|x_0|\cos(\beta) &= (|x_0| - r)(|x_0| + r) + \frac{25}{9}(|x_0| - r)^2 \\ \iff \cos(\beta) &= \frac{\frac{34}{9}|x_0| - \frac{16}{9}r}{\frac{10}{3}|x_0|} > \frac{15}{17}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a que $r < 8|x_0|/17$. Una cuenta análoga para el caso $|y| = \frac{3}{5}(|x_0| + r)$ arroja que en este caso

$$\cos(\beta) = \frac{\frac{34}{25}|x_0| - \frac{16}{25}r}{\frac{6}{5}|x_0|} > \frac{15}{17}. \quad (4.19)$$

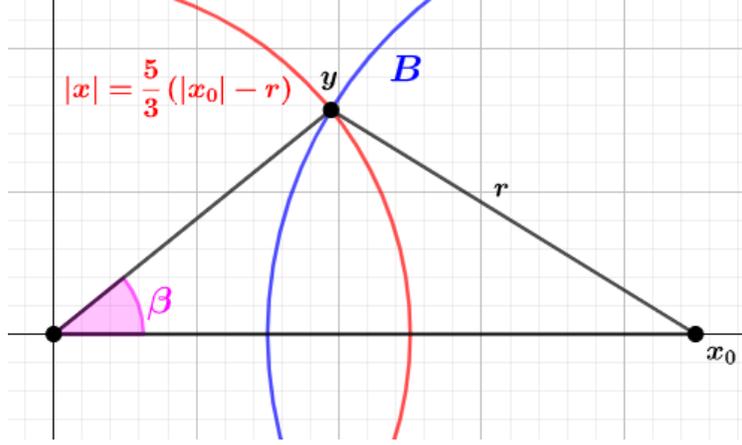


Figura 4.12: El triángulo determinado por y , x_0 y 0 . Sus lados miden r , $|x_0|$ y $\frac{5}{3}(|x_0| - r)$.

De esta manera, 4.18 se verifica con $\beta_0 = \arccos(15/17)$ y entonces

$$\begin{aligned} \mu(B) &\geq \mu \left(K \left[\frac{5}{3}(|x_0| - r), \frac{3}{5}(|x_0| + r) \right] \cap \{x / \text{ang}(x, x_0) < \beta_0\} \right) \\ &\gtrsim \mu \left(K \left[\frac{5}{3}(|x_0| - r), \frac{3}{5}(|x_0| + r) \right] \right) \geq \mu(S_B) \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad vale por el Lema 4.2.6 con $\alpha = \beta_0$.

Caso 3: Si $r = |x_0|$, la resolución es análoga a la realizada en el Caso 2, con la salvedad de que $B_1 = \emptyset$ y por lo tanto trabajamos solo con B_2 .
Caso 4: Supongamos finalmente que $r > |x_0|$. En este caso la definición de S_B garantiza que $S_B = B_{|x_0|+r}(0)$. Por simplicidad asumimos $x_0 = |x_0|e_1$ y definimos

$$B' = B_{\frac{|x_0|+r}{2}} \left(\frac{|x_0|+r}{2} e_1 \right).$$

Resulta claro que B' está contemplada en el Caso 3 y que $B' \subset B$. Ver Figura 4.14.

Como $K_{B'} = K(0, |x_0| + r)$ y $\arg(S) = \arcsin(1) = \pi/2$, $S_{B'}$ es la mitad de la bola S_B , abierta, apuntando en la dirección de e_1 . De esta forma, podemos cubrir $S_B \setminus \{0\}$ con 2^n copias rotadas de $S'_{B'}$ (cada copia apunta en la dirección de $(-1)^j e_k$ con $j \in \{1, 2\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$). Cubriendo $\{0\}$ con B , obtenemos que

$$\mu(S_B) \leq 2^n \mu(S'_{B'}) + \mu(B) \leq 2^n C_4 \mu(B') + \mu(B) \leq (2^n C_4 + 1) \mu(B),$$

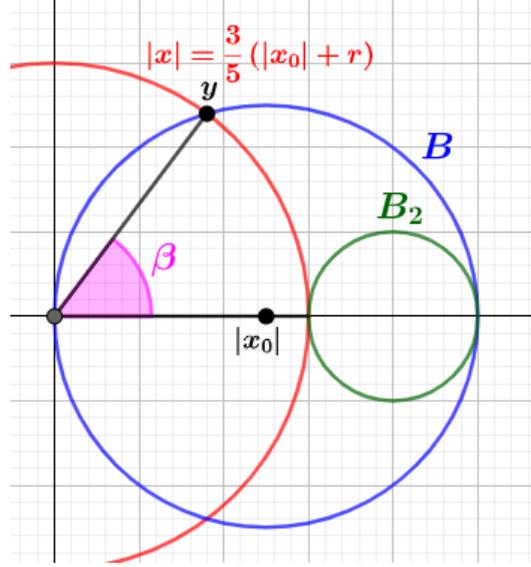


Figura 4.13: Inclusión de la bola B_2 en B con $r = |x_0|$.

lo que nos permite concluir (iv) en este último caso.

(i) \implies (iv) Sea $B = B_r(x_0)$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{X} = \left\{ x'_0 \in \mathbb{R}^n / |x'_0| = |x_0| \text{ y } |x'_0 - x_0| < \frac{r}{2} \right\}.$$

El conjunto que será clave para poder probar lo que necesitamos es

$$T = \bigcup_{x'_0 \in \mathcal{X}} B_r(x'_0).$$

Primero probaremos que $\mu(S_B) \lesssim \mu(T)$. Para eso, separamos en casos según el tipo de sector que es S_B . Primero, si $|x_0| \geq r$, definimos el sector

$$\tilde{S} = K(|x_0| - r, |x_0| + r) \cap \{x / \text{ang}(x, x_0) < \arcsin(r/(4|x_0|))\}.$$

Dado $x \in \tilde{S}$, definimos

$$y = \frac{|x_0|}{|x|} x,$$

que pertenece a \mathcal{X} por tener el módulo adecuado y porque, por el teorema

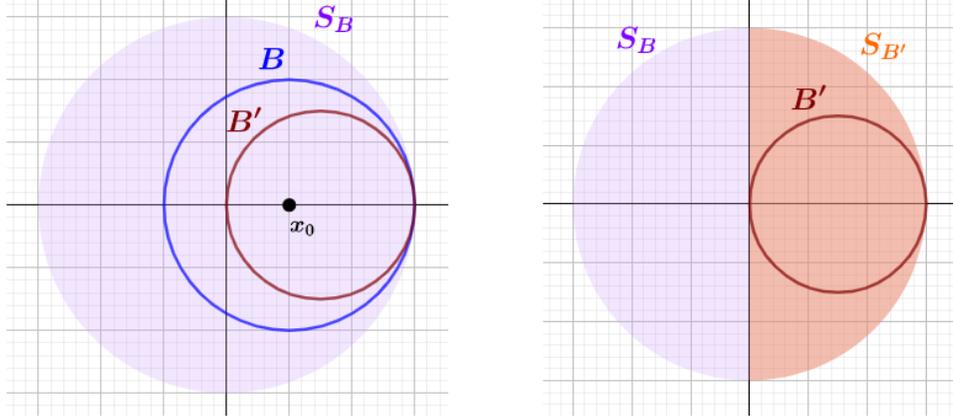


Figura 4.14: La bola B' y su sector $S_{B'}$ incluidos en S_B . En este caso B verifica $r > |x_0|$.

del coseno aplicado al triángulo con vértices en y , x_0 y el origen,

$$\begin{aligned}
 |y - x_0|^2 &= |y|^2 + |x_0|^2 - 2|y||x_0|\cos(\text{ang}(y, x_0)) \\
 &= 2|x_0|^2(1 - \cos(\text{ang}(x, x_0))) \\
 &= 2|x_0|^2 \frac{\sin^2(\text{ang}(x, x_0))}{1 + \cos(\text{ang}(x, x_0))} \\
 &\leq 2|x_0|^2 \left(\frac{r}{4|x_0|}\right)^2 \leq \frac{r^2}{4}.
 \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que

$$|x - y| = \left| x - \frac{|x_0|}{|x|}x \right| = ||x| - |x_0|| < r,$$

y así

$$x \in B_r(y) \subset T.$$

Ahora bien, por la Observación 4.2.3 sabemos que existe una constante c tal que

$$\arcsin\left(\frac{r}{4|x_0|}\right) \leq \arcsin\left(\frac{r}{|x_0|}\right) \leq c \arcsin\left(\frac{r}{4|x_0|}\right),$$

de modo que los sectores S_B y \tilde{S} entran en las hipótesis de la segunda parte del Lema 4.2.6 y así podemos afirmar que

$$\mu(S_B) \sim \mu(\tilde{S}) \leq \mu(T). \quad (4.20)$$

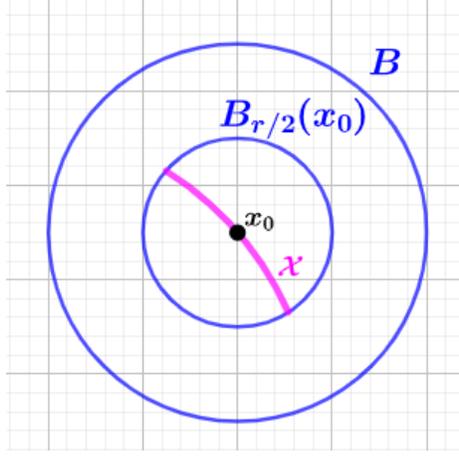


Figura 4.15: El conjunto \mathcal{X} dentro de $B_{r/2}(x_0)$.

Ahora procedemos a probar el mismo resultado para el caso $0 < |x_0| < r$. En este caso definimos el sector

$$\tilde{S} = S_B \cap \left\{ x / \text{ang}(x, x_0) < \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \text{ o } x = 0 \right\}.$$

Con razonamientos análogos puede verse que en este caso también se cumple (4.20), por lo que para terminar esta parte de la demostración basta probar que $\mu(T) \lesssim \mu(B)$.

Es en esta parte de la demostración que apelaremos a (i). Comenzamos notando que para todo $x \in B_{r/2}(x_0), x'_0 \in \mathcal{X}$ se cumple que

$$|x - x'_0| \leq |x - x_0| + |x_0 - x'_0| < r,$$

y por lo tanto

$$B_{r/2}(x_0) \subset B_r(x'_0). \quad (4.21)$$

Ahora fijamos un $\delta > 0$ y afirmamos que

$$T \subset \left\{ x / M_\mu \left(\frac{\chi_{B_{r/2}(x_0)}}{\mu(B_{r/2}(x_0))} \right) > \frac{1}{\mu(B) + \delta} \right\}. \quad (4.22)$$

En efecto, para todo $x \in B_r(x'_0)$ consideramos esta misma bola para calcular

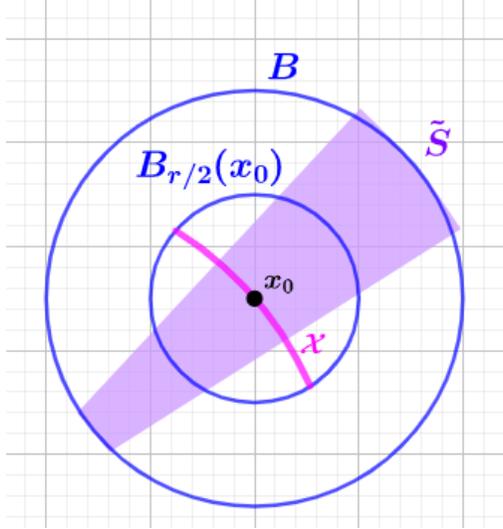


Figura 4.16: El sector \tilde{S} y su relación con B y \mathcal{X} cuando $r \leq |x_0|$.

la integral promediada

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B_r(x'_0))} \int_{B_r(x'_0)} \frac{\chi_{B_{r/2}(x_0)}}{\mu(B_{r/2}(x_0))} &= \frac{1}{\mu(B_r(x'_0))} \frac{\mu(B_r(x'_0) \cap B_{r/2}(x_0))}{\mu(B_{r/2}(x_0))} \\ &= \frac{1}{\mu(B_r(x'_0))} \frac{\mu(B_{r/2}(x_0))}{\mu(B_{r/2}(x_0))} \\ &= \frac{1}{\mu(B)}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos apelado a (4.21) y en la tercera a que μ es invariante por rotaciones. Esto prueba que

$$M_\mu \left(\frac{\chi_{B_{r/2}(x_0)}}{\mu(B_{r/2}(x_0))} \right) (x) > \frac{1}{\mu(B) + \delta}$$

para todo $x \in T$ y para todo $\delta > 0$. Así, tenemos (4.22) y (i) permite concluir que

$$\mu(T) \lesssim (\mu(B) + \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{B_{r/2}(x_0)}}{\mu(B_{r/2}(x_0))} = \mu(B) + \delta.$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$ se tiene (iv).

(iii) + (iv) \implies (i) Separamos a las bolas de \mathbb{R}^n en dos familias

$$\mathcal{B}_1 = \{B = B_r(x_0) / r \leq |x_0|\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{B = B_r(x_0) / r > |x_0|\},$$

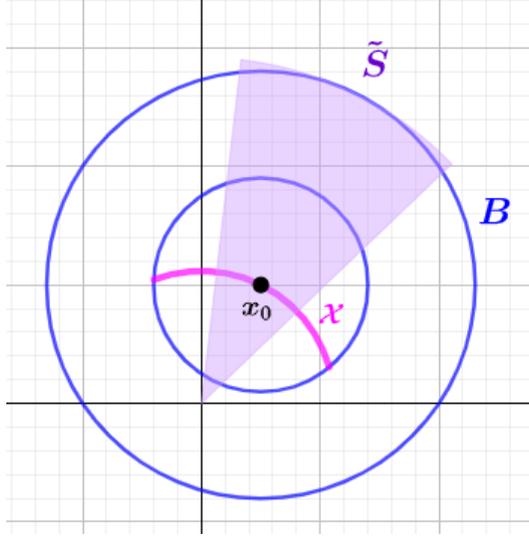


Figura 4.17: El sector \tilde{S} y su relación con B y \mathcal{X} cuando $r > |x_0|$.

y por lo tanto la Observación 3.2.10 garantiza que basta probar el tipo débil (1, 1) de cada uno de los operadores

$$M_\mu^i f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}_i} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), \quad i \in \{1, 2\}.$$

(En realidad la Observación fue probada para la medida Lebesgue, pero esto no fue usado en ningún momento de la prueba y vale simplemente para cualquier medida μ).

El caso $i = 1$ es elemental, ya que por (iii) μ es doblante sobre los elementos de \mathcal{B}_1 y por lo tanto la prueba es consecuencia del Lema de Vitali.

Concentrémonos en el caso $i = 2$. Si $r \geq |x_0|$, $S_B = B_{|x_0|+r}(0) = K[0, |x_0| + r)$, y por lo tanto (iv) garantiza que

$$\mu(B) \geq C_4^{-1} \mu(K[0, |x_0| + r)).$$

Si $|x_0|/4 < r < |x_0|$, $\arg(S) = \arcsin(r/|x_0|) > \arcsin(1/4)$. Por lo tanto, (iv) y el Lema 4.2.6 garantizan que

$$\mu(B) \geq C_4^{-1} \geq cC_4^{-1} \mu(S_B) \mu(K(|x_0| - r, |x_0| + r)).$$

De esta manera, podemos asegurar que

$$M_\mu^2 f(x) \lesssim \tilde{M}_\mu f(x),$$

con \tilde{M}_μ el operador maximal tomado sobre todas las coronas abiertas $K(a, b)$ y las bolas abiertas centradas en el origen, que escribimos como $K[0, b)$. Ahora bien, podemos apelar a la escritura $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}$ y obtener que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(K(a, b))} \int_{K(a, b)} |f(y)| d\mu(y) &= \frac{1}{\mu_0(a, b)} \int_{(a, b)} \underbrace{\int_{S^{n-1}} |f(t, \omega)| d\sigma(\omega)}_{F(t)} d\mu_0(t) \\ &= \frac{1}{\mu_0(a, b)} \int_{(a, b)} F(t) d\mu_0(t), \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(K[0, b))} \int_{K[0, b)} |f(y)| d\mu(y) &= \frac{1}{\mu_0[0, b)} \left(|f(0)| \mu(0) + \int_{(0, b)} \underbrace{\int_{S^{n-1}} |f(t, \omega)| d\sigma(\omega)}_{F(t)} d\mu_0(t) \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0[0, b)} \int_{[0, b)} F(t) d\mu_0(t), \end{aligned}$$

donde

$$F(t) = \begin{cases} \int_{S^{n-1}} |f(t, \omega)| d\sigma(\omega) & \text{si } t > 0 \\ |f(0)| & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pero entonces, cada una de las integrales promediadas sobre las que tomamos supremo al momento de calcular $\tilde{M}_\mu f(x)$ es una integral promediada de la función $F(t)$ sobre un intervalo de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ que contiene a $|x|$. De esta manera

$$\tilde{M}_\mu f(x) \leq M_{\mu_0} F(|x|),$$

con M_{μ_0} el operador maximal clásico en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ asociado a la medida μ_0 . Como ya sabemos que en una dimensión el operador es de tipo débil $(1, 1)$, tenemos

que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{x/ \tilde{M}_\mu f(x) > \lambda\right\}\right) &\leq \mu\left(\left\{x/ M_{\mu_0} F(|x|) > \lambda\right\}\right) \\
&\leq \omega_{n-1} \mu_0\left(\left\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} / M_{\mu_0} F(t) > \lambda\right\}\right) \\
&\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} F(t) d\mu_0(t) \\
&= \frac{c}{\lambda} \left(|f(0)| \mu(0) + \int_{\mathbb{R}_{> 0}} \int_{S^{n-1}} |f(t, \omega)| d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \right) \\
&= \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que $1 \leq \omega_{n-1}$ para controlar la medida para $t = 0$. Esto concluye la demostración del tipo débil (1, 1) para M_μ . \square

Capítulo 5

Desigualdades modulares para medidas no doblantes

Acabamos de ver las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una medida μ estrictamente positiva e invariante por rotaciones para ser de tipo débil $(1, 1)$. Ahora bien, ¿es esta la única desigualdad de interés que podemos obtener para un operador M_μ ? ¡Claro que no! A continuación, nos embarcaremos en la prueba de una desigualdad modular débil para el operador maximal asociado a una μ que no entra en las hipótesis del caso anterior. Como el nivel de generalidad es muy elevado, impondremos algunas condiciones sobre la medida μ que facilitarán el análisis.

El estudio que estamos por iniciar fue llevado a cabo por Sjögren y Soria en [SS04] y se hizo pensando en la medida Gaussiana. Comenzamos enunciando el teorema que nos interesa en este contexto, para además ya hacernos una idea del tipo de desigualdades que nos interesa probar. Llamamos μ_δ a la medida sobre \mathbb{R}^n absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue con densidad $d\mu_\delta(x) = \exp(-|x|^\delta)$. El resultado de esta sección en este contexto es:

Teorema 5.0.1. *Sea $n \geq 2$. Existe una constante $c > 0$ tal que M_{μ_δ} satisface la siguiente desigualdad modular para todo $f \in L^1_\mu$ y $\lambda > 0$:*

$$\mu_\delta(\{x \in \mathbb{R}^n / M_{\mu_\delta} f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{\frac{n+1}{2}} d\mu_\delta. \quad (5.1)$$

Esta desigualdad recuerda a la desigualdad débil de Córdoba (3.20), aunque con un exponente $\frac{n+1}{2}$. De la misma manera, será esta la desigualdad que nos permita probar resultados interesantes para la medida μ . A su vez,

Sjögren probó en [Sjö83] que esta medida no es de tipo débil $(1, 1)$ para $\delta = 1$ y $n = 2$, por lo que el Teorema 5.0.1 es necesario para obtener una desigualdad débil en este caso.

Una vez enunciado este teorema, surge la pregunta natural si hay medidas más generales que la Gaussiana para las cuales puede probarse una desigualdad similar. Lo que ocurre es que el Teorema 5.0.1 puede generalizarse bastante. Será necesario introducir una cantidad significativa de notación y de conceptos nuevos para hacerlo, pero por el momento nos limitaremos a presentar lo mínimo indispensable para poder enunciar el teorema en su versión más general. Las restantes definiciones serán introducidas a medida que vayan siendo necesarias para demostrar el teorema.

Sea μ una medida sobre \mathbb{R}^n absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue con densidad $d\mu = \gamma(x)dx$. Más aún, supongamos que es radial, esto es, que $\gamma(x) = \gamma_0(|x|)$ para alguna función $\gamma_0 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Supongamos por añadidura que γ_0 es estrictamente decreciente, continua y que $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$ existe y es finito. Definimos una función $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ como la función que verifica

$$\gamma_0(t + \phi(t)) = \frac{1}{2}\gamma_0(t). \quad (5.2)$$

Lo que esta función hace es codificar información sobre el decaimiento de γ_0 . Ver Figura 5.1.

Por último, definimos la función τ como

$$\tau(t) = \frac{\phi(t)}{t}, \quad t > 0. \quad (5.3)$$

Con todo esto, estamos en condiciones de enunciar la versión generalizada del Teorema 5.0.1:

Teorema 5.0.2. *Sea μ una medida definida como recién. Si τ es una función decreciente y verifica que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = 0, \quad (5.4)$$

entonces existe una constante $c > 0$ tal que el operador maximal M_μ asociado a μ verifica que para todos $f \in L_\mu^1$ y $\lambda > 0$:

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{\frac{n+1}{2}} d\mu. \quad (5.5)$$

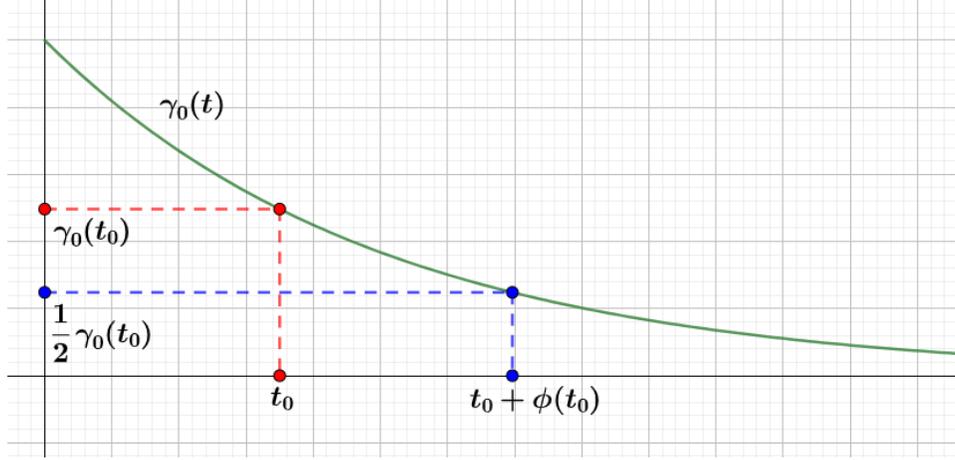


Figura 5.1: Visualización de la función ϕ . Si estamos parados en un punto $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(t_0)$ es la distancia que debemos desplazarnos hacia la derecha para que γ_0 valga allí la mitad que en t_0 .

Antes de embarcarnos en el grueso de este capítulo, probaremos que efectivamente este último teorema constituye una generalización del Teorema 5.0.1.

Demostración del Teorema 5.0.1. Sea $\delta > 0$. Llamemos ϕ_δ y τ_δ a las funciones ϕ y τ asociadas a la medida μ_δ . Calculemos ϕ_δ :

$$\begin{aligned} \gamma_0(t + \phi_\delta(t)) &= \frac{1}{2} \gamma_0(t) \\ e^{-|t + \phi_\delta(t)|^\delta} &= \frac{1}{2} e^{-|t|^\delta} \\ (t + \phi_\delta(t))^\delta &= t^\delta + \log(2) \\ \phi_\delta(t) &= \left(t^\delta + \log(2)\right)^{1/\delta} - t, \end{aligned}$$

lo que permite concluir que

$$\tau_\delta(t) = \left(1 + \frac{\log(2)}{t^\delta}\right)^{1/\delta} - 1.$$

De esta forma, es claro que τ_δ es una función decreciente y verifica (5.4). Por lo tanto, μ_δ satisface las hipótesis del Teorema 5.0.2. \square

5.1. El operador sobre bolas que contienen al origen

Nuestro próximo objetivo es probar el Teorema 5.0.2. Debido a que este teorema está formulado en una versión más general, podemos trabajar de ahora en más en \mathbb{R}^n y con una medida μ de densidad $d\mu(x) = \gamma(x)dx$ no necesariamente gaussiana.

Para efectuar la prueba, será necesario separar clases de bolas y probar condiciones que garanticen (5.5) para cada una de ellas por separado. El orden en que hagamos esto es importante, ya que los casos más complejos requieren usar resultados que no valen en los casos anteriores.

Lo primero que haremos es estudiar qué ocurre cuando consideramos únicamente bolas que contienen al origen. Probaremos que en este caso se tiene una cota sobre el operador maximal del tipo débil $(1, 1)$. Comenzamos probando el siguiente

Lema 5.1.1. *Existe una constante $c > 0$, que depende únicamente de n , tal que si B es una bola que contiene al origen y B^0 es la menor bola centrada en 0 que contiene a B , entonces*

$$\mu(B^0) \leq c\mu(B).$$

Demostración. Sea r el radio de B . Si B' es alguna bola que tiene el mismo radio r , pero tal que $0 \in \partial B'$, entonces $\mu(B') \leq \mu(B)$, ya que γ_0 es estrictamente decreciente. Ver Figura 5.2. Nuestro objetivo es acotar la medida de una cierta bola centrada en el origen. Primero, estudiaremos otra bola centrada en el origen, \tilde{B} definida por

$$\tilde{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / |x| < \frac{2}{\sqrt{n}}r \right\}. \quad (5.6)$$

El primer interés de \tilde{B} es podemos cubrirla con $2n$ bolas como B' . En efecto, llamemos $B'_{j,k}$ a la bola con centro en $(-1)^j r e_k$ y radio r , siendo e_k el k -ésimo vector canónico y $j \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

En efecto, probemos que

$$\tilde{B} \subset \bigcup_{\substack{j \in \{0,1\}, \\ k \in \{1, \dots, n\}}} B'_{j,k}. \quad (5.7)$$

La inspiración para esta prueba viene de observar la Figura 5.3 y comprender que si un punto x de \tilde{B} pertenece a una única bola $B'_{j,k}$, esta bola dependerá

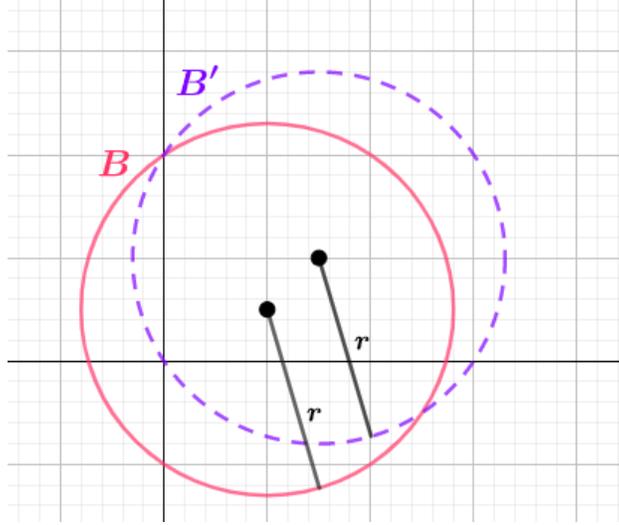


Figura 5.2: Comparación de las bolas B y B' .

de cuál sea la coordenada de x de mayor módulo, y de cuál sea el signo de esta coordenada.

Sea $x \in \tilde{B}$. Llamemos x_{i_0} a la coordenada de mayor módulo entre todas las coordenadas de x (si hubiese más de una, elegimos cualquiera de ellas). Si $x_{i_0} = (-1)^j |x_{i_0}|$, probaremos que $x \in B'_{j,i_0}$. En efecto

$$\begin{aligned}
 |x - (-1)^j r e_{i_0}|^2 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n x_i^2 + (x_{i_0} - (-1)^j r)^2 \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n x_i^2 + (|x_{i_0}| - r)^2 \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n x_i^2 + x_{i_0}^2 - 2r |x_{i_0}| + r^2 \\
 &= |x|^2 - 2r |x_{i_0}| + r^2 \\
 &< 2r \left(\frac{|x|}{\sqrt{n}} - |x_{i_0}| \right) + r^2 \leq r^2,
 \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado (5.6) y en la segunda hemos apelado a que x_{i_0} es la coordenada de x de mayor módulo.

Habiendo probado (5.7), podemos controlar la medida de \tilde{B} como

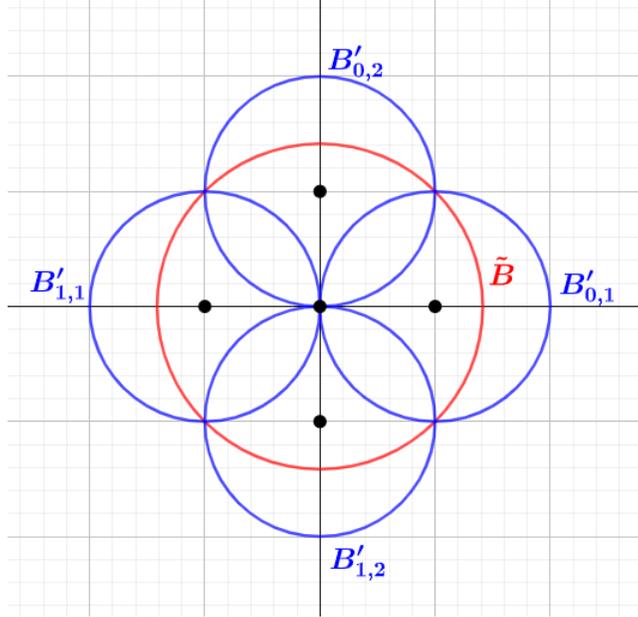


Figura 5.3: \tilde{B} cubierta por las $2n$ bolas $\{B'_{j,k}\}_{j,k}$.

$$\mu(\tilde{B}) \leq 2n\mu(B') \leq 2n\mu(B). \quad (5.8)$$

Ahora bien, \tilde{B} es una bola centrada en el origen, pero no aquella cuya medida queremos controlar. Sin embargo, esto será útil porque la medida μ es doblante para bolas centradas en el origen. En efecto:

$$\begin{aligned} \mu(\{|y| < 2a\}) &= \int_{\{|y| < 2a\}} \gamma_0(|x|) dx \\ &= \int_{\{|y| < a\}} \gamma_0(|2z|) 2^n dz \\ &\leq 2^n \int_{\{|y| < a\}} \gamma_0(|z|) dz \\ &= 2^n \mu(\{|y| < a\}), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos hecho el cambio de variable $x = 2z$ y en la desigualdad hemos apelado a que γ_0 es estrictamente decreciente.

Con todo esto podemos afirmar finalmente que existe una constante $c_n >$

0 tal que

$$\mu(B^0) \leq \mu(\{y/|y| < 2r\}) \leq c_n \mu\left(\left\{y/|y| < \frac{2}{\sqrt{n}}r\right\}\right) \leq 2nc_n \mu(B)$$

como queríamos. La primera desigualdad se sigue de la definición de B^0 , la segunda de la doblantez de μ para bolas centradas en el origen y la tercera de (5.8). \square

El Lema 5.1.1 nos permite afirmar de forma automática que para cualquier bola B que contiene al origen, vale que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) \leq c \frac{1}{\mu(B^0)} \int_{B^0} |f(y)| d\mu(y), \quad (5.9)$$

con B^0 la bola centrada en el origen definida anteriormente. Para la familia de todas las bolas centradas en el origen, contamos con el siguiente Lema, que vale para cualquier medida μ :

Lema 5.1.2. *Para cualquier medida positiva μ , el operador maximal*

$$A_\mu^0 f(x) = \sup_{r \geq |x|} \frac{1}{\mu(B_r(0))} \int_{B_r(0)} |f(y)| d\mu(y)$$

es de tipo débil (1, 1).

Antes de emprender la prueba del Lema 5.1.2, queremos enfatizar que lo que realmente nos interesa es el siguiente corolario, que se desprende directamente del Lema 5.1.2 y de (5.9). Podríamos haber enunciado el siguiente resultado directamente y haber probado el Lema 5.1.2 dentro de él, pero este último lema habría perdido generalidad.

Corolario 5.1.3. *Sea μ una medida positiva sobre \mathbb{R}^n con densidad γ_0 con las características ya expuestas. Entonces el operador maximal M_μ^0 asociado a μ y a las bolas que contienen al origen, dado por*

$$M_\mu^0 f(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ 0 \in B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) \quad (5.10)$$

es de tipo débil (1, 1).

Demostración del Lema 5.1.2. Llamemos $E_\lambda = \{y/A_\mu^0 f(y) > \lambda\}$, y sea $x \in E_\lambda$. Esto permite afirmar que existe un $r_0 \geq |x|$ tal que

$$\frac{1}{\mu(B_{r_0}(0))} \int_{B_{r_0}(0)} |f(y)| d\mu(y) \geq \lambda,$$

y por lo tanto vale a su vez que

$$\begin{aligned}
\mu(B_{|x|}(0)) &\leq \mu(B_{r_0}(0)) \\
&< \frac{1}{\lambda} \int_{B_{r_0}} |f(y)| d\mu(y) \\
&= \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

De esta manera, podemos acotar

$$\mu(E_\lambda) \leq \sup_{x \in E_\lambda} \mu(\{y/|y| \leq |x|\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1,$$

lo que concluye la demostración. \square

Cuando demostremos el Teorema 5.0.2, el Corolario 5.1.3 nos permitirá decir que (5.5) se cumple para bolas que contienen al origen. Por lo tanto, de ahora en más solo tendremos que preocuparnos por estudiar bolas que que están a distancia positiva del origen. Nos embarcaremos ahora en una serie de definiciones y resultados que solo tienen sentido en este contexto.

5.2. Una condición suficiente

Sea B una bola que no contiene al origen. Llamaremos q_B a la distancia de B al origen, y Q_B al único punto del borde B que realiza esta distancia. En estas definiciones y en otras posteriores, omitiremos el subíndice cuando quede claro por contexto cuál es la bola de la que estamos hablando. Definimos $A_q = \{y/|y| > q\}$, que también notaremos A_B en el caso de que $q = q_B$. A su vez, llamamos C_B al menor cono abierto centrado en el origen que contiene a B , y llamamos $p_B = \text{dist}(\partial C_B \cap \partial B, 0)$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras resulta que $p_B = \sqrt{q(q + 2r)}$. Nombramos $P_B = B \cup \{y \in C_B/|y| \geq p_B\}$. Por último, definimos

$$\Sigma_B(t) = \{\omega \in S^{n-1}/t\omega \in P_B\} = \frac{1}{t} (tS^{n-1} \cap P_B).$$

Vale la pena notar que $\Sigma_B(t) = \Sigma_B(p_B)$ para todo $t \geq p_B$. Nos interesará calcular la medida de área σ sobre S^{n-1} . Cuando $0 < t < q$, es claro que esta medida es 0. Cuando $t \geq q$, el valor de esta medida dependerá de la relación entre q y el radio r de B .

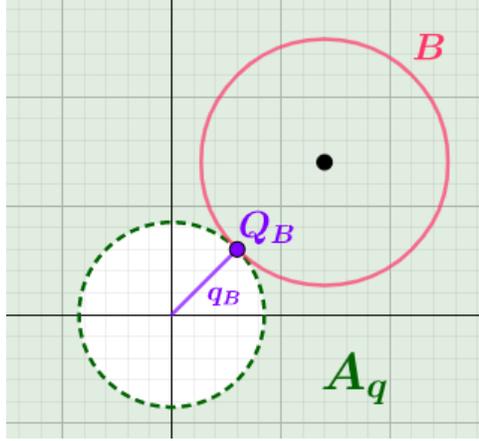


Figura 5.4: Una bola B en fucsia, su punto más cercano al origen Q_B en violeta, su distancia q_B también en violeta y el conjunto A_q en verde.

Observación 5.2.1. Si $r \leq q$ se tiene que

$$\begin{cases} \sigma(\Sigma_B(t)) \sim \left(\frac{\sqrt{r(t-q)}}{t} \right)^{n-1} & , \quad q \leq t < p_B \\ \sigma(\Sigma_B(t)) \sim \left(\frac{r}{q} \right)^{n-1} & , \quad p_B \leq t, \end{cases} \quad (5.11)$$

mientras que si $r > q$ se tiene que

$$\sigma(\Sigma_B(t)) \leq c_n \left(\sqrt{\frac{t-q}{t}} \right)^{n-1} , \quad q \leq t. \quad (5.12)$$

Demostración. Comenzamos con el caso $r \leq q$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma_B(t)) &= \mathcal{H}^{n-1} \left(\frac{1}{t} (tS^{n-1} \cap P_B) \right) \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1} (tS^{n-1} \cap P_B). \end{aligned}$$

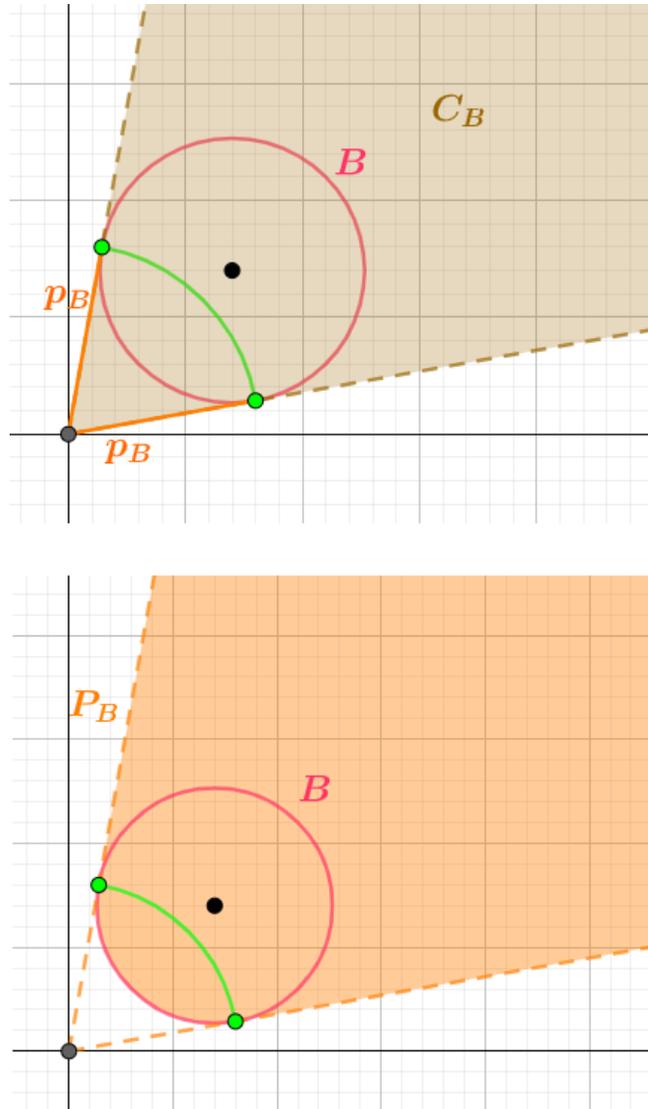


Figura 5.5: Arriba: El cono C_B asociado a B en marrón y las distancias p_B en naranja. Abajo: El conjunto P_B en naranja.

Si $t \geq p_B$, tenemos por construcción de P_B que

$$\begin{aligned}
 \sigma(\Sigma_B(t)) &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(tS^{n-1} \cap P_B) \\
 &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(tS^{n-1} \cap C_B) \\
 &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(t(S^{n-1} \cap C_B)) \\
 &= \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap C_B) \\
 &\sim (\sin(\alpha))^{n-1},
 \end{aligned}$$

donde la última relación vale por el Lema 4.2.5 con α la apertura de C_B . Ver Figura 5.6. Con esta relación, (5.11) para este caso se sigue de notar que

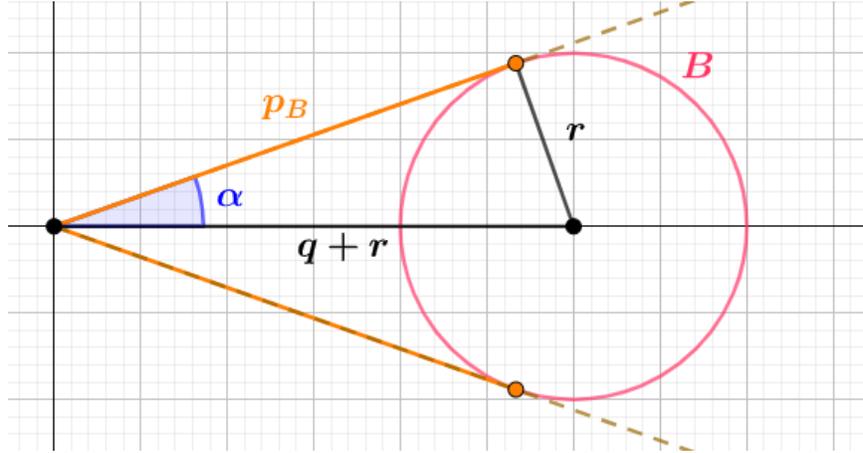


Figura 5.6: La apertura α de C_B y su relación con B .

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{q+r} \leq \frac{r}{q}$$

y

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{q+r} \geq \frac{r}{2q}$$

porque $r \leq q$.

Consideremos ahora el caso en que $r \leq q \leq t < p_B$. Aquí supondremos sin pérdida de generalidad que el centro x_B de la bola está sobre el semieje positivo x_n , es decir $x_B = (q+r)e_n$. Nuestro primer objetivo será verificar que $tS^{n-1} \cap P_B = tS^{n-1} \cap C_t$ para algún cono C_t centrado en el origen, con eje dado por el vector e_n y de apertura $\alpha(t)$ a determinar. Ver Figura 5.7.

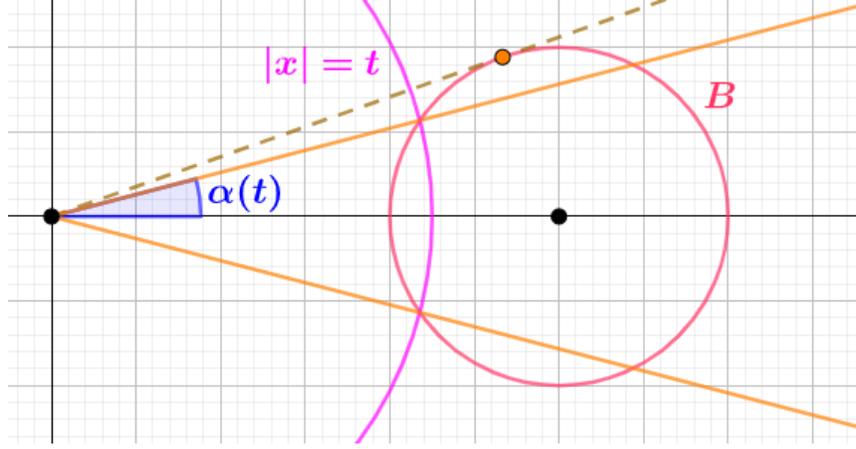


Figura 5.7: La apertura $\alpha(t)$ asociada a $\Sigma_B(t)$ cuando $r \leq q \leq t < p_B$.

Para probar esto analíticamente, notamos que $tS^{n-1} \cap C_B(t) = tS^{n-1} \cap B$. De esta forma, los puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ en este conjunto son precisamente los que verifican

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 = t^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - (q+r))^2 < r^2. \end{cases}$$

Restando la igualdad de la desigualdad, obtenemos que los $x \in tS^{n-1} \cap B$ son precisamente los $x \in tS^{n-1}$ que verifican

$$-2(q+r)x_n + (q+r)^2 < r^2 - t^2 \iff \frac{q^2 + 2rq + t^2}{2t(q+r)} < \frac{x_n}{t}.$$

Recordando la caracterización (4.10) de las intersecciones de S^{n-1} con conos con eje e_n , podemos ver que

$$(tS^{n-1} \cap B) = t(S^{n-1} \cap C_t),$$

donde C_t es el cono de apertura $\alpha(t)$ dada por

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{q^2 + 2rq + t^2}{2t(q+r)},$$

y por lo tanto, podemos apelar al Lema 4.2.5. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma_B(t)) &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(tS^{n-1} \cap B) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap C_t) \sim (\sin(\alpha(t)))^{n-1},\end{aligned}$$

con constantes que dependen a lo sumo de n .

Resta entonces estimar $\sin(\alpha(t))$. Como tenemos una expresión para $\cos(\alpha(t))$, lo que haremos es apelar a que $\alpha(t) \in (0, \pi/2) \implies 1 + \cos(\alpha(t)) \in (1, 2)$ y por lo tanto

$$\sin^2(\alpha(t)) \sim \frac{1 - \cos^2(\alpha(t))}{1 + \cos(\alpha(t))} = 1 - \cos(\alpha(t)) = \frac{2t(q+r) - (q^2 + 2rq + t^2)}{2t(q+r)}.$$

Apelando a que $r \leq q \leq t < p_B = \sqrt{q(q+2r)} < q+r$, esta última expresión puede ser controlada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{2t(q+r) - (q^2 + 2rq + t^2)}{2t(q+r)} &\leq \frac{2tq + 2rt - q^2 - 2rq - t^2}{2tp_B} \\ &\leq \frac{2r(t-q) - (t-q)^2}{2t^2} \\ &\leq \frac{r(t-q)}{t^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{2t(q+r) - (q^2 + 2rq + t^2)}{2t(q+r)} &\geq \frac{2tq + 2rt - q^2 - 2rq - t^2}{2t(t+t)} \\ &= \frac{2r(t-q) - (t-q)(t-q)}{4t^2} \\ &\geq \frac{r(t-q)}{4t^2}.\end{aligned}$$

Todo esto permite decir que

$$\sigma(\Sigma_B(t)) \sim (\sin(\alpha(t)))^{n-1} \sim \left(\frac{\sqrt{r(t-q)}}{t} \right)^{n-1}$$

como queríamos.

Pasamos finalmente al caso $r > q$, donde también por simplicidad suponemos que $x_B = (q+r)e_n$. En este caso solo buscamos una cota superior

para $\sigma(\Sigma_B(t))$, y por lo tanto nos es suficiente estimar

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma_B(t)) &= \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(tS^{n-1} \cap P_B) \\ &\leq \frac{1}{t^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}(tS^{n-1} \cap H) \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap H'),\end{aligned}$$

donde H es el semiespacio dado por $x_n > q$, que claramente contiene a P_B , y $H' = \frac{1}{t}H$ está dado por $x_n > q/t$. Ver Figura 5.8. Recordando una vez

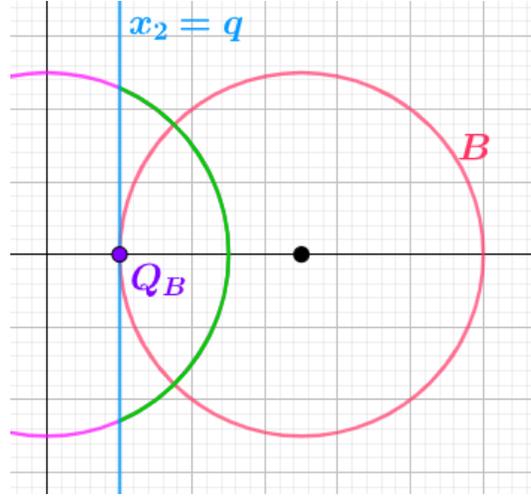


Figura 5.8: El semiespacio H se interseca con tS^{n-1} (púrpura) en $H \cap tS^{n-1}$ (verde). El borde de H es el hiperplano dado por $x_n = q$ (celeste).

más la caracterización (4.10), podemos expresar $S^{n-1} \cap H'$ como $S^{n-1} \cap C$, con C un cono con eje e_n y apertura β dada por $\cos(\beta) = q/t$. A partir de aquí podemos proceder de forma enteramente análoga al caso anterior y encontramos que

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma_B(t)) &\leq \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1} \cap H') \\ &\sim (\sin(\beta))^{n-1} \\ &\sim \left(\sqrt{1 - \cos(\beta)}\right)^{n-1} \\ &= \left(\sqrt{\frac{t-q}{t}}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de la observación. □

El motivo por el que nos interesa entender esta área es porque a continuación enunciaremos una Proposición que la involucra. Esta da una condición suficiente para obtener una desigualdad como (5.5), y por lo tanto constituye un paso intermedio importantísimo para probar el Teorema 5.0.2.

Proposición 5.2.2. *Sea \mathcal{B} una familia de bolas que no contienen al origen. Dado $m > 0$, supongamos que existen constantes positivas c, ϵ tales que la medida μ con densidad $d\mu(x) = \gamma_0(|x|)dx$ satisface la desigualdad*

$$\int_q^\infty \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \gamma_0(t) t^{n-1} dt \leq c \mu(A_q) \quad (5.13)$$

para cualquier bola $B \in \mathcal{B}$ con $q = q_B$. En tal caso, el operador maximal $M_\mu^{\mathcal{B}}$ asociado a μ y \mathcal{B} , dado por

$$M_\mu^{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu$$

satisface para todo $\lambda > 0$ la desigualdad modular

$$\mu(\{M_\mu^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right)^{m+1} d\mu. \quad (5.14)$$

Antes de embarcarnos en la demostración de este resultado, será conveniente hacer algunas definiciones. Recordemos la descomposición $\mu = \mu_0 \times \sigma$ que definimos en anteriormente. Resulta claro que para la μ que estamos considerando en este contexto, μ_0 tiene densidad dada por

$$d\mu_0(t) = t^{n-1} \gamma_0(t) dt. \quad (5.15)$$

A μ_0 le asociamos el operador T_{μ_0} definido sobre funciones reales g dado por

$$T_{\mu_0} g(s) = \frac{1}{\mu_0[s, \infty)} \int_s^\infty g(t) d\mu_0(t).$$

Para que esto esté bien definido necesitamos que μ_0 sea una medida finita. Esto efectivamente es cierto, pero posponemos la prueba para la sección siguiente. Por otro lado, notamos M^S al operador maximal de Hardy-Littlewood en S^{n-1} ,

$$M^S f(x') = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\sigma(B)} \int_B f(\omega) d\sigma(\omega),$$

donde se consideran todas las B bolas geodésicas centradas en x . Con todo esto, viendo a \mathbb{R}^n como el producto cartesiano $\mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}$, definimos al operador

$$\overline{M}_\mu = T_{\mu_0} \circ M^S$$

con M^S actuando en la variable angular $x' = \frac{x}{|x|}$ y T_{μ_0} en la variable radial $|x|$ (notemos que en el caso que nos compete μ es absolutamente continua respecto de la medida Lebesgue, y por eso podemos ignorar al origen). El operador \overline{M}_μ cumplirá un rol importante en la demostración de la Proposición 5.2.2, y por lo tanto será necesario detenernos un poco para entender mejor su comportamiento. Para eso tendremos que apelar a ciertas propiedades de los operadores T_{μ_0} y M^S .

Observación 5.2.3. El operador T_{μ_0} es de tipo débil $(1, 1)$ y fuerte (∞, ∞) .

Demostración. Que T_{μ_0} es fuerte (∞, ∞) es claro. Para ver que es débil $(1, 1)$ definimos

$$E_\lambda = \{t \in \mathbb{R} / T_{\mu_0}g(t) > \lambda\}.$$

Resulta claro que para los $t \in E_\lambda$

$$\mu_0[t, \infty) < \frac{1}{\lambda} \|g\|_1.$$

Por lo tanto, si E_λ admite un mínimo t_0 , tenemos que

$$\mu_0(E_\lambda) \leq \mu_0[t_0, \infty) < \frac{1}{\lambda} \|g\|_1.$$

Si E_λ admite un ínfimo t_0 que no es mínimo, construimos una sucesión estrictamente decreciente $(t_n)_n$ de números reales en E_λ que tiende a t_0 . Así,

$$\mu_0(E_\lambda) \leq \mu_0(t_0, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0[t_n, \infty) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

Finalmente, si E_λ no está acotado inferiormente, elegimos una sucesión $(t_n)_n$ de elementos de E_λ que tienda a $-\infty$ y procedemos como en el caso anterior. \square

Observación 5.2.4. El operador M^S es de tipo débil $(1, 1)$ y fuerte (∞, ∞) .

Demostración. Es evidente que M^S es de tipo fuerte (∞, ∞) . Para ver el tipo débil $(1, 1)$, empezamos tratando de reproducir el Lema de Vitali para bolas geodésicas en S^{n-1} . El proceso de selección de bolas es esencialmente el mismo, pero tenemos que probar dos cosas: que cuando dos bolas se

intersecan, podemos dilatar a una de ellas para que contenga a la otra, y que σ es doblante en un sentido que se relacione con la dilatación anterior.

Sean $B, B' \subset S^{n-1}$ bolas geodésicas con intersección no vacía. Podemos definir r , el radio de B , como el radio de $\tilde{B} = \exp_p^{-1}(B) \subset T_p S^{n-1}$, con p el centro de B y \exp_p el mapa exponencial asociado al punto $p \in S^{n-1}$. Por las propiedades de \exp_p , r es también la distancia entre p y cualquier punto de ∂B con la métrica redonda. De manera análoga definimos el radio r' de B' y suponemos sin pérdida de generalidad que $r \geq r'$. Definimos el conjunto

$$3B = \{x \in S^{n-1} / d(x, p) < 3r\},$$

con d la métrica redonda. Veamos que $B' \subset 3B$.

Primero, notemos que si $r > 2\pi/3$, $3B = S^{n-1}$ y por lo tanto no es una bola geodésica. En este caso $B' \subset 3B$ trivialmente. Si no, sea $x \in B \cap B'$. Entonces, dado $y \in B'$, tenemos que

$$d(y, p) \leq d(y, p') + d(p', x) + d(x, p) < 2r' + r \leq 3r$$

como queríamos.

Resta ver que las medidas de B y $3B$ son comparables. Pero esto es una observación sencilla con la maquinaria que hemos desarrollado antes. La bola geodésica B en S^{n-1} es exactamente la intersección $S^{n-1} \cap C_r$, con C_r el cono abierto, centrado en el origen, con eje en la dirección de p y apertura r . Ver Figura 5.9. De esta manera, el Lema 4.2.5 nos garantiza que, para $r < \pi/6$,

$$\sigma(3B) \sim (\sin(3r))^{n-1} \leq (3r)^{n-1} \sim (\sin(r))^{n-1} \sim \sigma(B),$$

donde la tercera relación está garantizada por la Observación 4.2.3. Si $r \geq \pi/6$, tenemos que

$$\sigma(3B) \leq \sigma(S^{n-1}) \sim (\sin(\pi/6))^{n-1} \leq \sigma(B),$$

donde la última desigualdad es consecuencia de que B contiene a la bola geodésica de radio $\pi/6$ centrada en p . Todo esto prueba que $\sigma(3B) \lesssim \sigma(B)$ y con esto podemos reproducir la prueba del Lema de Vitali para bolas geodésicas y así concluir que M^S es de tipo débil $(1, 1)$. \square

Vamos a combinar estas propiedades para probar una desigualdad modular débil para \overline{M}_μ , pero para eso será necesario contar con la siguiente cota, que hemos adaptado de [Tor04].

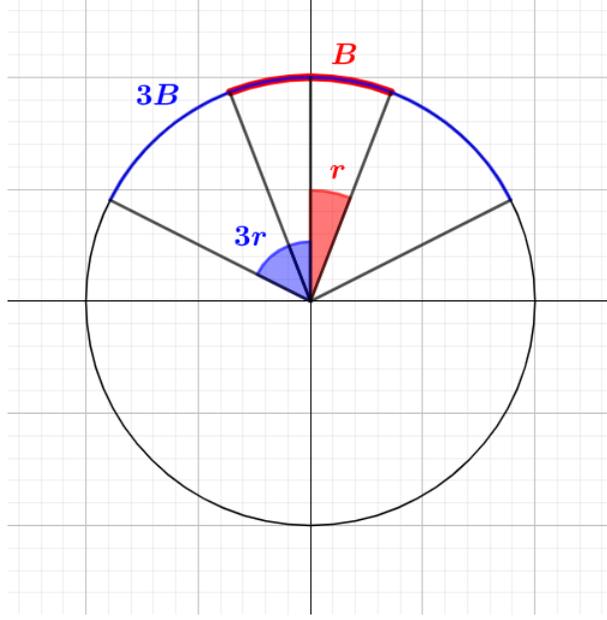


Figura 5.9: Corte bidimensional de una bola geodésica B y el conjunto $3B$.

Observación 5.2.5. Sean (X, ν) un espacio de medida y T un operador sublineal definido en $L^1 + L^\infty(X, \nu)$ de tipo débil $(1, 1)$ y fuerte (∞, ∞) . Entonces existe una constante $c_0 > 1$ tal que para todos $f \in L^1 + L^\infty(X, \nu)$ y $\lambda > 0$ se tiene

$$\nu(\{|Tf| > \lambda\}) < \frac{c_0}{\lambda} \int_{\lambda/c_0}^{\infty} \nu(\{|f| > s\}) ds. \quad (5.16)$$

Demostración. Las hipótesis sobre T nos permiten afirmar que existen constantes $c_1, c_\infty > 0$ tales que

$$\nu(\{|Tg| > \lambda\}) \leq \frac{c_1}{\lambda} \|g\|_1 \quad \text{y} \quad \|Tg\|_\infty \leq c_\infty \|g\|_\infty$$

para toda función g .

Dada $f \in L^1 + L^\infty(X, \nu)$ definimos, para cada $\lambda > 0$,

$$f_{2,\lambda}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2c_\infty} \\ \frac{\lambda}{2c_\infty} \operatorname{sg}(f(x)) & \text{si } |f(x)| > \frac{\lambda}{2c_\infty}, \end{cases}$$

y $f_{1,\lambda} = f - f_{2,\lambda}$. Con estas definiciones, tenemos que

$$\|Tf_{2,\lambda}\|_\infty \leq c_\infty \|f_{2,\lambda}\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}, \quad (5.17)$$

y a su vez

$$f_{1,\lambda} \equiv 0 \text{ en } \left\{ |f| \leq \frac{\lambda}{2c_\infty} \right\} \quad \text{y} \quad |f_1| \leq |f|. \quad (5.18)$$

Como consecuencia, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nu(\{|Tf| > \lambda\}) &\leq \nu\left(\left\{|Tf_{1,\lambda}| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \nu\left(\left\{|Tf_2| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &\leq \frac{2c_1}{\lambda} \|f_{1,\lambda}\| \leq \frac{2c_1}{\lambda} \int_{\{|f| > \lambda/2c_\infty\}} |f| d\nu, \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a la sublinealidad de T , en la segunda hemos apelado a (5.17) y en la tercera a (5.18).

Ahora, adaptando la demostración de la Layercake formula, podemos retomar (5.19) para conseguir

$$\begin{aligned} \nu(\{|Tf| > \lambda\}) &\leq \frac{2c_1}{\lambda} \int_{\{|f| > \lambda/2c_\infty\}} |f| d\nu \\ &= \frac{2c_1}{\lambda} \int_{\{x/|f(x)| > \lambda/2c_\infty\}} \int_0^{|f(x)|} ds d\nu \\ &= \frac{2c_1}{\lambda} \int_{\lambda/2c_\infty}^\infty \int_{\{x/|f(x)| > s\}} d\nu ds \\ &= \frac{2c_1}{\lambda} \int_{\lambda/2c_\infty}^\infty \nu(\{x/|f(x)| > s\}) ds. \end{aligned}$$

(5.16) se sigue de elegir $c_0 = \max\{2c_1, 2c_\infty, 1\}$.

□

Con todo esto, estamos en condiciones de obtener un control sobre el operador \overline{M}_μ .

Lema 5.2.6. \overline{M}_μ *satisface la desigualdad modular*

$$\mu(\{\overline{M}_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu, \quad \lambda > 0. \quad (5.20)$$

Demostración. Comenzamos escribiendo

$$\begin{aligned}
\mu(\{\overline{M}_\mu f(x) > \lambda\}) &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \chi_{\{(t,\omega)/T_{\mu_0}(M^S(f(t\omega))) > \lambda\}} d\mu_0(t) d\sigma(\omega) \\
&= \int_{S^{n-1}} \mu_0(\{t/T_{\mu_0}(M^S(f(t\omega))) > \lambda\}) d\sigma(\omega) \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \frac{c_0}{\lambda} \int_{\lambda/c_0}^\infty \mu_0(\{t/M^S(f(t\omega)) > s\}) ds d\sigma(\omega) \\
&= c_0 \int_{S^{n-1}} \int_{1/c_0}^\infty \mu_0\left(\left\{t/M^S\left(\frac{f}{\lambda}(t\omega)\right) > r\right\}\right) dr d\sigma(\omega) \\
&= c_0 \int_{S^{n-1}} \int_{1/c_0}^\infty \int_0^\infty \chi_{\{(t,\omega)/M^S(\frac{f}{\lambda}(t\omega)) > r\}} d\mu_0(t) dr d\sigma(\omega),
\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde en la desigualdad hemos usado la Observación 5.2.5, y en la tercera igualdad el cambio de variables $s = \lambda r$ y la linealidad de M^S .

A continuación, podemos aplicar Fubini a (5.21) y obtener

$$\begin{aligned}
\mu(\{\overline{M}_\mu f(x) > \lambda\}) &\leq c_0 \int_{1/c_0}^\infty \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \chi_{\{(t,\omega)/M^S(\frac{f}{\lambda}(t\omega)) > r\}} d\sigma(\omega) d\mu_0(t) dr \\
&= c_0 \int_{1/c_0}^\infty \int_0^\infty \sigma\left(\left\{\omega/M^S\left(\frac{f}{\lambda}(t\omega)\right) > r\right\}\right) d\mu_0(t) dr
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_0 \int_{1/c_0}^\infty \int_0^\infty \frac{c_1}{r} \int_{r/c_1}^\infty \sigma\left(\left\{\omega/\frac{f}{\lambda}(t,\omega) > u\right\}\right) dud\mu_0(t) dr \\
&= c_0 c_1 \int_{1/c_0}^\infty \int_{r/c_1}^\infty \frac{1}{r} \mu\left(\left\{(t,\omega)/\frac{f}{\lambda}(t,\omega) > u\right\}\right) dudr,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde en la desigualdad hemos usado nuevamente la Observación 5.2.5 y en la última desigualdad hemos usado Fubini respecto de $dud\mu_0(t)$.

Nuestro siguiente objetivo es transformar (5.23) en una integral expresada de acuerdo con la Layercake formula. Para eso, aplicamos Fubini una vez más y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\{\overline{M}_\mu f(x) > \lambda\}) &\leq c_0 c_1 \int_{1/c_0 c_1}^\infty \int_{1/c_0}^{c_1 u} \frac{1}{r} \mu\left(\left\{\frac{f}{\lambda} > u\right\}\right) dr du \\
&= \int_{1/c_0 c_1}^\infty \mu\left(\left\{\frac{f}{\lambda} > u\right\}\right) c_0 c_1 \log(c_0 c_1 u) du.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

A continuación, llamamos $\Phi(t) = t(1 + \log^+(t))$. Si eligiésemos hacer el cambio de variables $v = \Phi(c_0 c_1 u)$, tendríamos que, por el dominio en que se

mueve u ,

$$v = c_0 c_1 u(1 + \log(c_0 c_1 u)) \implies dv = c_0 c_1 (2 + \log(c_0 c_1 u)) du.$$

De esta manera, podemos acotar (5.24) y obtener

$$\begin{aligned} \mu(\{\overline{M}_\mu f(x) > \lambda\}) &\leq \int_{1/c_0 c_1}^{\infty} \mu\left(\left\{\frac{f}{\lambda} > u\right\}\right) c_0 c_1 (2 + \log(c_0 c_1 u)) du \\ &= \int_1^{\infty} \mu\left(\left\{\Phi\left(\frac{f}{c_0 c_1 \lambda}\right) > v\right\}\right) dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{f}{c_0 c_1 \lambda}\right) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{f}{\lambda}\right) d\mu, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a que $c_0 c_1 > 1$ y a que Φ es creciente. \square

Por último, necesitaremos recurrir a la siguiente desigualdad consecuencia de la desigualdad de Young generalizada:

Observación 5.2.7. Dados $u, v > 0$, se tiene que

$$u \cdot v \leq C_m(\Phi_m(u) + \Psi_m(v)), \quad (5.25)$$

donde $\Phi_m(u) = u(1 + \log^+ u)^m$ y $\Psi_m(v) = e^{v^{1/m}}$.

Con todo esto, estamos en condiciones de encarar la prueba.

Demostración de la Proposición 5.2.2. Consideramos los siguientes dos operadores:

$$M_\mu^+ f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_{B \cap \{|y| \geq |x|\}} |f(y)| d\mu(y)$$

y

$$M_\mu^- f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_{B \cap \{|y| \geq |x|\}} |f(y)| d\mu(y).$$

Resulta claro que

$$\begin{aligned} \{M_\mu^{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\} &= \{M_\mu^+ f(x) + M_\mu^- f(x) > \lambda\} \\ &\subset \left\{M_\mu^+ f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{M_\mu^- f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto basta ver que la desigualdad (5.14) se verifica para cada uno de los operadores M_μ^+ y M_μ^- separadamente.

Para M_μ^+ , la prueba consiste en demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que vale

$$M_\mu^+ f(x) \leq C \overline{M}_\mu(\phi_m(|f|))(x) + C, \quad (5.26)$$

donde $\phi_m(u) = u(1 + \log^+ u)^m$, $u > 0$. En efecto, veamos que esto es suficiente para probar (5.14) para este operador.

$$\begin{aligned} \mu(\{x/ M_\mu^+ f(x) > \lambda\}) &= \mu\left(\left\{x/ M_\mu^+ \left(\frac{2C|f|}{\lambda}\right)(x) > 2C\right\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{x/ C \overline{M}_\mu\left(\phi_m\left(\frac{2C|f|}{\lambda}\right)\right)(x) + C > 2C\right\}\right) \\ &= \mu\left(\left\{x/ \overline{M}_\mu\left(\phi_m\left(\frac{2C|f|}{\lambda}\right)\right)(x) > 1\right\}\right) \\ &\leq c' \int_{\mathbb{R}^n} \phi_m\left(\frac{2C|f|}{\lambda}\right) \left(1 + \log^+ \phi_m\left(\frac{2C|f|}{\lambda}\right)\right) d\mu \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^m \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} + \log^+ \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)\right) d\mu \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{m+1} d\mu, \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (5.26), y en la segunda hemos apelado a (5.20).

Pasemos entonces a la demostración de (5.26). Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y tomemos una bola $B \in \mathcal{B}$ que contenga a x . Notando $x' = \frac{x}{|x|}$, escribimos a $x \in \mathbb{R}^n$ como $(|x|, x') \in \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}$. De esta manera, $x \in B \subset P_B$ garantiza que $x' \in \Sigma_B(t)$ para todo $t > |x|$, y así

$$B \cap \{y \in \mathbb{R}^n / |y| \geq |x|\} \subset \{(t, \omega), t \geq |x|, \omega \in \Sigma_B(t)\}. \quad (5.27)$$

Con esto, podemos ver que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu(B)} \int_{B \cap \{|y| \geq |x|\}} |f(y)| d\mu(y) \\
& \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_{|x|}^{\infty} \int_{\Sigma_B(t)} |f(t\omega)| d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
& = \frac{1}{\mu(A_q)} \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} |f(t\omega)| \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
& \leq C_m \frac{1}{\mu(A_q)} \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} [\phi_m(u) + \psi_m(v)] d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
& = I + II,
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (5.27) y a $d\mu = d\sigma \times d\mu_0$ y en la segunda hemos apelado a la Observación 5.2.7 con $u = \frac{1}{\epsilon} |f(t\omega)|$ y $v = \epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)}$. La última igualdad resulta de separar las integrales de $\phi_m(u)$ y $\psi_m(v)$ y nombrarlas I y II respectivamente. Para terminar, acotemos cada una de estas integrales. Comenzamos viendo que

$$\begin{aligned}
II & = \frac{C_m}{\mu(A_q)} \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} \exp\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)}\right)^{1/m} d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
& = \frac{C_m}{\mu(A_q)} \int_{|x|}^{\infty} \exp\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)}\right)^{1/m} d\mu_0(t) \\
& \leq \frac{C_m}{\mu(A_q)} \int_q^{\infty} \exp\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)}\right)^{1/m} \gamma_0(t) t^{n-1} dt \leq C'_m, \quad (5.28)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que el integrando no depende de ω , en la primera desigualdad hemos apelado a (5.15) y a $q \leq |x|$, y la segunda desigualdad es exactamente (5.13).

Para acotar I , comenzamos notando que

$$\begin{aligned}
\phi_m\left(\frac{1}{\epsilon} |f(t\omega)|\right) & = \frac{1}{\epsilon} |f(t\omega)| \left(1 + \log^+ \frac{1}{\epsilon} |f(t\omega)|\right)^m \\
& \leq \frac{1}{\epsilon} \max\left\{1, \log^+ \frac{1}{\epsilon}\right\} |f(t\omega)| (1 + \log^+ |f(t\omega)|)^m, \quad (5.29)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
I &= C_m \frac{1}{\mu(A_q)} \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} \phi_m \left(\frac{1}{\epsilon} |f(t\omega)| \right) d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&\leq \frac{C_{m,\epsilon}}{\mu(A_{|x|})} \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} \phi_m (|f(t\omega)|) d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&\leq C_{m,\epsilon} \frac{1}{\mu(A_{|x|})} \int_{|x|}^{\infty} M^S(\phi_m(|f|)) d\mu_0 \leq C_{m,\epsilon} \overline{M}_\mu(\phi_m(|f|)), \quad (5.30)
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (5.29) y a que $q < |x|$ implica $\mu(A_q) > \mu(A_{|x|})$, en la segunda hemos usado que el operador maximal M^S controla precisamente objetos como el que está dentro de la llave, y en la igualdad hemos simplemente usado la definición de \overline{M}_μ . Tomando supremo sobre todas las $B \in \mathcal{B}$, (5.28) y (5.30) permiten finalmente concluir que existe una constante $C > 0$ tal que vale (5.26).

Dirigimos ahora nuestra atención hacia M_μ^- . El comportamiento de este operador es mejor que el de M_μ^+ , de hecho, en este caso demostraremos que se satisface la desigualdad modular débil

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu^- f(x) > \lambda\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right) d\mu, \quad (5.31)$$

que claramente implica la desigualdad (5.14) para M_μ^- .

Comenzamos notando que si (5.31) fuese verdadera para $\lambda = 1$, obtenemos (5.31) en toda su generalidad aplicándola a $\frac{|f|}{\lambda}$. Por lo tanto, basta probar (5.31) para $\lambda = 1$.

Fijemos un $x \in \mathbb{R}^n$ y una bola $B \in \mathcal{B}$ que contenga a x . Nuestro siguiente objetivo es demostrar que la hipótesis (5.13) implica la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(A_q)} \left(\frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \sigma(\Sigma_B(|x|)) \right)^p \mu(A_{|x|}) \leq C_p, \quad p > 0. \quad (5.32)$$

Para ver esto, comencemos notando que

$$\begin{aligned}
c\mu(A_q) &\geq \int_q^\infty \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \gamma_0(t) t^{n-1} dt \\
&\geq \int_{|x|}^\infty \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \gamma_0(t) t^{n-1} dt \\
&\geq \int_{|x|}^\infty \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(|x|)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \gamma_0(t) t^{n-1} dt \\
&= \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(|x|)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \mu(A_{|x|}). \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Si probamos que para todo $p > 0$ existe una constante positiva $b_p > 0$ tal que para todo $s > 0$ vale

$$\exp \left[(\epsilon s)^{1/m} \right] \geq b_p s^p, \tag{5.34}$$

entonces (5.33) queda

$$\begin{aligned}
c\mu(A_q) &\geq \exp \left[\left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(|x|)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^{1/m} \right] \mu(A_{|x|}) \\
&\geq b_p \left(\sigma(\Sigma_B(|x|)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right)^p \mu(A_{|x|}),
\end{aligned}$$

lo que prueba (5.32). Resta entonces probar (5.34). Para esto definimos

$$g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) / g(s) = \frac{\exp \left((\epsilon s)^{1/m} \right)}{s^p}.$$

Resulta claro que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = +\infty,$$

mientras que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left((\epsilon s)^{1/m} \right)}{s^p} = \frac{\epsilon^{1/m}}{p} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left((\epsilon s)^{1/m} \right)}{s^{p-1/m}},$$

donde en la última igualdad hemos aplicado L'Hopital a una indeterminación del tipo ∞/∞ . Aplicándola entonces $[mp]$ veces vemos que el límite es ∞ . De esta manera, g alcanza un mínimo absoluto en $(0, \infty)$, que debe ser positivo porque g lo es. Llamando b_p a este mínimo se concluye (5.34).

Notando $f_t(\omega) = f(t\omega)$, podemos acotar

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu(B)} \int_{B \cap \{y/|y| < |x|\}} |f(y)| d\mu(y) \\
&= \frac{1}{\mu(B)} \int_q^{|x|} \int_{\Sigma_B(t)} |f(t\omega)| d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_q^{|x|} \int_{\Sigma_B(|x|)} |f(t\omega)| d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&= \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^{|x|} \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \frac{\sigma(\Sigma_B(|x|))}{\sigma(\Sigma_B(t))} \int_{\Sigma_B(t)} |f(t\omega)| d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&\leq \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^\infty \left(\frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \sigma(\Sigma_B(|x|)) \right) M^S f_t(x') d\mu_0(t) \\
&= \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^\infty W(t, x) \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) + \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^\infty W(t, x) \chi_{D_2}(t, x') d\mu_0(t) \\
&= I + II, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos hecho un cambio a coordenadas polares y en la primera desigualdad hemos apelado a que $t < |x|$ implica $\Sigma_B(t) \subset \Sigma_B(|x|)$. En la tercera igualdad hemos notado

$$W(t, x) = \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \sigma(\Sigma_B(|x|)) M^S f_t(x'),$$

$$D_1 = \{(t, x') \in \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} / M^S f_t(x') > 1\}$$

y

$$D_2 = \{(t, x') \in \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} / M^S f_t(x') \leq 1\}.$$

Notemos que ambas integrales I y II dependen de B . Por lo tanto, al tomar supremo en (5.35) sobre todas las bolas $B \in \mathcal{B}$ obtenemos

$$M_\mu^- f(x) \leq \sup_{B \in \mathcal{B}} I + \sup_{B \in \mathcal{B}} II,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / M_\mu^- f(x) > 1 \right\} \right) \\
&\leq \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} I > \frac{1}{2} \right\} \right) + \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} II > \frac{1}{2} \right\} \right) \tag{5.36}
\end{aligned}$$

por lo que para probar (5.31) será necesario controlar cada uno de los términos del lado derecho de (5.36).

Comenzamos estudiando I . Para eso apelamos a (5.32) con $p = 1$ y obtenemos

$$I \leq C \frac{1}{\mu(A_{|x|})} \int_0^\infty M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) = III(\rho, x'),$$

donde hacemos el cambio de nombre $\rho = |x|$ simplemente para poder tratarlo mejor como una variable. Notemos a su vez que, a diferencia de I , $III(\rho, x')$ no depende de B . Con esto, podemos obtener

$$\begin{aligned} \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} I > \frac{1}{2} \right\} \right) &\leq \mu \left(\left\{ (\rho, x') \in \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1} / III(\rho, x') > \frac{1}{2} \right\} \right) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\{\rho / III(\rho, x') > 1/2\}} d\mu_0(\rho) d\sigma(x'). \end{aligned}$$

Para seguir con esta cota, será necesario ganar comprensión sobre el conjunto $\{\rho / III(\rho, x') > 1/2\}$ para cada x' fijo. Notamos que

$$\begin{aligned} III(\rho, x') > 1/2 &\iff \mu(A_\rho) < 2C \int_0^\infty M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) \\ &\iff \rho > \rho_0 = \rho_0(x'), \end{aligned}$$

ya que $\mu(A_\rho)$ es estrictamente decreciente en ρ , y la cota de $\mu(A_\rho)$ depende solamente de x' . Pero por la regularidad de μ ,

$$\mu(A_{\rho_0}) = \sup_{\rho > \rho_0} \mu(A_\rho) \leq 2C \int_0^\infty M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t). \quad (5.37)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} I > \frac{1}{2} \right\} \right) &\leq \int_{S^{n-1}} \int_{\{\rho / III(\rho, x') > 1/2\}} d\mu_0(\rho) d\sigma(x') \\ &\leq \int_{S^{n-1}} \mu_0((\rho_0, \infty)) d\sigma(x') \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mu(A_{\rho_0}) d\sigma(x') \\ &\leq C \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') d\sigma(x') d\mu_0(t), \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde en la tercera desigualdad hemos usado (5.37) y el Teorema de Tonelli.

Ahora bien, como $M^S f_t(x') \geq 1$ en D_1 , (5.38) resulta igual a

$$\begin{aligned}
& C \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma(\{x'/M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') \geq s\}) ds d\mu_0(t) \\
&= C \int_0^\infty \left(\sigma(\{x'/M^S f_t(x') \geq 1\}) + \int_1^\infty \sigma(\{x'/M^S f_t(x') \geq s\}) ds \right) d\mu_0(t) \\
&\lesssim \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(t\omega)| (1 + \log^+ |f(t\omega)|) d\sigma(\omega) d\mu_0(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| (1 + \log^+ |f(y)|) d\mu(y),
\end{aligned}$$

La última desigualdad puede probarse apelando al tipo (1, 1) de M^S en el primer término, y reproduciendo el argumento de la prueba del Lema 5.2.6 desde 5.22 para el segundo término. Esto finaliza la cuenta para I .

Para II , apelamos a la desigualdad de Hölder y a (5.32) con $p = 2$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{\mu(A_q)} \int_q^\infty \left(\frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \sigma(\Sigma_B(|x|)) \right) M^S f_t(x') \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) \\
&\leq \frac{C}{\mu(A_q)} \left[\int_0^\infty (M^S f_t(x'))^2 \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) \right]^{1/2} \left(\frac{\mu(A_q)^2}{\omega_{n-1} \mu(A_{|x|})} \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\frac{1}{\mu(A_{|x|})} \int_0^\infty (M^S f_t(x'))^2 \chi_{D_1}(t, x') d\mu_0(t) \right)^{1/2} = IV(\rho, x'),
\end{aligned}$$

notando que aquí también IV tiene el beneficio por sobre II de no depender de la bola B .

Para acotar $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} II > \frac{1}{2}\})$, procedemos, salvo aclaración, con argumentos enteramente análogos a los utilizados para I :

$$\begin{aligned}
\mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \sup_{B \in \mathcal{B}} II > \frac{1}{2} \right\} \right) &\leq \int_{S^{n-1}} \int_{\{\rho / IV(\rho, x') > 1/2\}} d\mu_0(\rho) d\sigma(x') \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \mu_0((\rho_0, \infty)) d\sigma(x') \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mu(A_{\rho_0}) d\sigma(x') \\
&\leq C \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} (M^S f_t(x'))^2 \chi_{D_2}(t, x') d\sigma(x') d\mu_0(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C \int_0^\infty \left(\int_0^1 s \sigma(\{x'/M^S f_t(x') \geq s\}) ds \right) d\mu_0(t) \\
&\lesssim \int_0^\infty \int_0^1 \int_{S^{n-1}} |f(t\omega)| d\sigma(\omega) ds d\mu_0(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado al tipo débil (1, 1) de M^S . Esto concluye la prueba de la Proposición 5.2.2. \square

5.3. Algunas estimaciones adicionales

Teniendo a nuestra disposición esta Proposición, resulta claro que nuestro próximo objetivo es probar la desigualdad (5.13) para $m = \frac{n-1}{2}$ y una clase de bolas \mathcal{B} adecuada. Para esto, probaremos a continuación una serie de lemas. En el camino hará falta hacer algunas definiciones que dan cuenta de la forma en que decae la función γ_0 . Estas definiciones permitirán entender \mathbb{R}^n en función de este decaimiento.

Lema 5.3.1. *Con la notación anterior, si $\tau(t)$ es decreciente y verifica $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = 0$, entonces μ es una medida finita. Más precisamente, existe un $q_0 = q_0(\mu) > 0$ tal que*

$$\mu(A_q) \sim \gamma_0(q)\phi(q)q^{n-1}, \quad q > q_0. \quad (5.39)$$

Demostración. Una de las desigualdades se obtiene de forma sencilla con un cambio de variable a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\mu(\{y/|y| > q\}) &= \omega_{n-1} \int_q^\infty \gamma_0(t)t^{n-1} dt \\
&\geq \omega_{n-1} \int_q^{q+\phi(q)} \gamma_0(t)t^{n-1} dt \\
&\geq \frac{\omega_{n-1}}{2} \gamma_0(q)\phi(q)q^{n-1},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a que γ_0 es estrictamente decreciente.

La otra desigualdad requiere la introducción de algunos conceptos nuevos. Comenzamos definiendo las funciones $\psi_k : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$ como

$$\begin{aligned}
\psi_0(q) &= q \\
\psi_1(q) &= q + \phi(q) \\
\psi_{k+1}(q) &= \psi_1(\psi_k(q)) = \psi_k(q) + \phi(\psi_k(q)), \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

La definición de las funciones ψ_k está hecha con el objetivo de que se cumpla la siguiente relación:

$$\gamma_0(\psi_k(q)) = \frac{1}{2^k} \gamma_0(q). \quad (5.40)$$

Después de concluida esta prueba, introduciremos una definición que hará sumamente visible la importancia de estas funciones ψ_k . Antes de seguir, notemos también que (5.40) implica que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ fijo, la función ψ_k es creciente, ya que

$$\begin{aligned} q_1 &< q_2 \\ \frac{1}{2^k} \gamma_0(q_1) &> \frac{1}{2^k} \gamma_0(q_2) \\ \gamma_0(\psi_k(q_1)) &> \gamma_0(\psi_k(q_2)) \\ \psi_k(q_1) &< \psi_k(q_2). \end{aligned}$$

Retornando a la prueba de (5.39), usemos las funciones ψ_k para probar la desigualdad que nos falta:

$$\begin{aligned} \mu(\{y/|y| > q\}) &= \omega_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\psi_k(q)}^{\psi_{k+1}(q)} \gamma_0(t) t^{n-1} dt \\ &\leq \omega_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_0(\psi_k(q)) \phi(\psi_k(q)) (\psi_{k+1}(q))^{n-1}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde en la igualdad hemos usado una vez más coordenadas polares, y en la desigualdad hemos usado que γ_0 es estrictamente decreciente, y que la longitud del intervalo sobre el cual estamos integrando es $\psi_{k+1}(q) - \psi_k(q) = \phi(\psi_k(q))$. Nuestro objetivo ahora es acotar cada uno de los términos de la suma en (5.41) convenientemente.

Para eso, apelamos a que $\tau(t) = \frac{\phi(t)}{t}$ es decreciente por hipótesis y de ese modo:

$$\begin{aligned} \phi(\psi_j(q)) &= \tau(\psi_j(q)) \psi_j(q) \\ &\leq \tau(\psi_{j-1}(q)) \psi_j(q) \\ &= \tau(\psi_{j-1}(q)) (\psi_{j-1}(q) + \phi(\psi_{j-1}(q))) \\ &= \phi(\psi_{j-1}(q)) (1 + \tau(\psi_{j-1}(q))) \\ &\leq \phi(\psi_{j-1}(q)) (q + \tau(q)). \end{aligned}$$

Aplicando inductivamente esta última desigualdad obtenemos

$$\phi(\psi_j(q)) \leq \phi(q) (1 + \tau(q))^j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (5.42)$$

y de esa manera vemos que

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(q) &= \psi_k(q) + \phi(\psi_k(q)) \\
&= q + \sum_{j=0}^k \phi(\psi_j(q)) \\
&\leq q + \sum_{j=0}^k \phi(q)(1 + \tau(q))^j \\
&\leq q + \phi(q)(k+1)(1 + \tau(q))^k \\
&= q + q\tau(q)(k+1)(1 + \tau(q))^k \\
&\leq q(k+1)(1 + \tau(q))^{k+1}. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Con todo esto a nuestra disposición, elegimos un q_0 lo suficientemente grande como para que valga

$$(1 + \tau(q_0))^n = \beta < 2, \tag{5.44}$$

(recordando que τ es decreciente y que vale (5.4)). Así, eligiendo $q > q_0$ podemos acotar el lado derecho de (5.41) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\omega_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_0(\psi_k(q)) \phi(\psi_k(q)) (\psi_{k+1}(q))^{n-1} \\
&\leq \omega_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \gamma_0(q) \underbrace{\phi(q)(1 + \tau(q))^k q^{n-1}(k+1)^{n-1}(1 + \tau(q))^{(n-1)(k+1)}} \\
&= \omega_{n-1} \gamma_0(q) \phi(q) q^{n-1} (1 + \tau(q))^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (k+1)^{n-1} (1 + \tau(q))^{nk} \\
&\leq \omega_{n-1} \gamma_0(q) \phi(q) q^{n-1} (1 + \tau(q_0))^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (k+1)^{n-1} (1 + \tau(q_0))^{nk} \\
&\leq \beta \omega_{n-1} \gamma_0(q) \phi(q) q^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{2}\right)^k (k+1)^{n-1} \leq c \gamma_0(q) \phi(q) q^{n-1},
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (5.42) y (5.43) para acotar por la primera y segunda llaves respectivamente, en la tercera hemos apelado a (5.44) y en la última hemos usado que la serie converge.

Esto prueba finalmente (5.39), lo que claramente implica que μ es finita. \square

La necesidad de controlar $\mu(A_q)$ es clara viendo el rol que cumple en la desigualdad (5.13). Nuestro siguiente objetivo es obtener un lema que nos permita “sacarnos de encima” a cierta familia de bolas.

Para hacer esto, definiremos ciertos conjuntos de nivel de γ de gran importancia. Sean q_0 y $\{\psi_k\}_k$ como fueron definidos en la demostración del lema previo. Llamamos $a_k = \psi_k(q_0)$, y definimos los anillos

$$S_0 = \{y/0 < |y| \leq a_0\}, \quad S_k = \{y/a_{k-1} < |y| \leq a_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ver Figura 5.10. Es de notar que para cada $k \in \mathbb{N}$ e $y \in S_k$ vale que

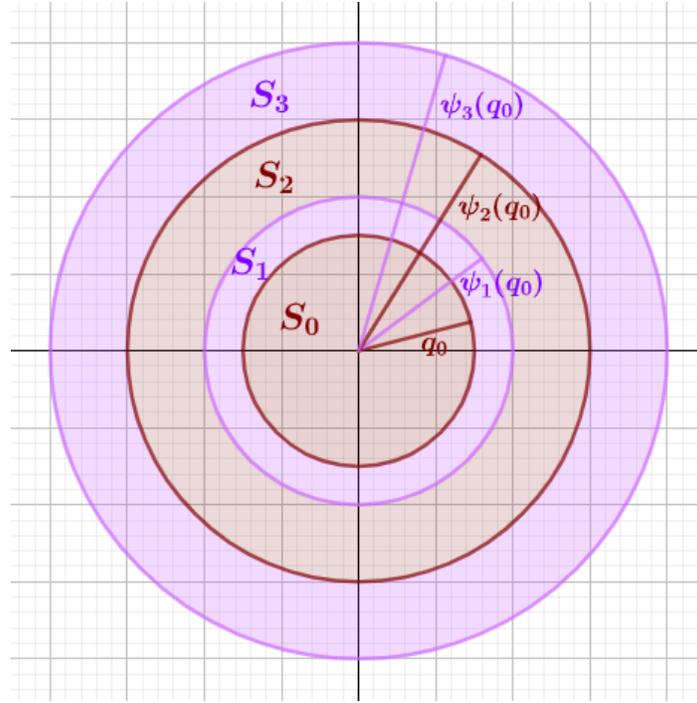


Figura 5.10: Algunos conjuntos S_k y las funciones ψ_k que los definen.

$$\gamma_0(a_k) \leq \gamma(y) \leq \gamma_0(a_{k-1}) \quad \text{y} \quad \gamma_0(a_k) = \frac{1}{2}\gamma_0(a_{k-1}), \quad (5.45)$$

mientras que para $y \in S_0$, $\gamma_0(q_0) \leq \gamma(y) \leq \gamma_0(0^+)$. Esto nos permite decir que los anillos S_k constituyen regiones sobre las cuales γ es esencialmente constante. Esta información será crucial para el lema que queremos probar a continuación.

Lema 5.3.2. Sean μ , γ_0 y S_k como antes. Fijado un número natural N , denotamos \mathcal{B}^N a la clase de todas las bolas que intersecan a lo sumo N anillos S_k , es decir,

$$\mathcal{B}^N = \{B \text{ bola} \mid \#\{k \geq 0 \mid S_k \cap B \neq \emptyset\} \leq N\}.$$

Entonces, el operador maximal M_μ^N asociado a μ y \mathcal{B}^N es de tipo débil $(1, 1)$.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}^N$ y sea x_B su centro. Comencemos probando que

$$\gamma(y) \sim \gamma(x_B) \tag{5.46}$$

para todo $y \in B$. En efecto, supongamos primero que $0 \notin B$. En tal caso, el máximo de γ sobre \overline{B} se realiza en el punto q de su borde, y el mínimo en el punto $w = q + 2r \frac{x_B}{|x_B|}$. Si S_{k_0} es el anillo que contiene a q , sabemos que w está contenido en un anillo S_{k_0+j} con $0 \leq j \leq N-1$. De esta manera, para todo $y \in B$ vale que

$$\gamma_0(a_{k_0}) \geq \gamma(q) \geq \gamma(y) \geq \gamma(w) \geq \gamma_0(a_N) = \frac{1}{2^N} \gamma_0(a_{k_0}).$$

Como en particular esto vale para $y = x_B$, tenemos que

$$\gamma(y) \leq \gamma_0(a_{k_0}) \leq 2^N \gamma(x_B) \quad \text{y} \quad \gamma(x_B) \leq \gamma_0(a_{k_0}) \leq 2^N \gamma(y)$$

para todo $y \in B$, lo que prueba (5.46). Si $0 \in B$, esta vez tenemos que

$$\gamma_0(0^+) \geq \gamma(y) \geq \gamma_0(a_N) = \frac{1}{2^N} \gamma_0(q_0),$$

y por lo tanto podemos estimar

$$\gamma(y) \leq \frac{2^N \gamma_0(0^+)}{\gamma_0(q_0)} \gamma(x_B) \quad \text{y} \quad \gamma(x_B) \leq \frac{2^N \gamma_0(0^+)}{\gamma_0(q_0)} \gamma(y)$$

para todo $y \in B$, lo que concluye que en cualquier caso $\gamma(y) \sim \gamma(x_B)$, y con constantes que dependen únicamente de N y μ (pues q_0 depende de γ_0 , es decir, de μ). Como consecuencia de esto, tenemos que

$$\mu(B) = \int_B \gamma(y) dy \sim \int_B \gamma(x_0) dy = \gamma(x_0) \mathcal{L}^n(B),$$

lo que a su vez nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| \gamma(y) dy \\ &\sim \frac{1}{\gamma(x_B) \mathcal{L}^n(B)} \int_B |f(y)| \gamma(x_B) dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B |f(y)| dy. \end{aligned}$$

De esta manera, sabemos que para toda f localmente integrable, el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico M y el recientemente definido M_μ^N verifican la relación

$$M_\mu^N f \lesssim Mf,$$

y como Mf es de tipo débil $(1, 1)$, M_μ^N es de tipo débil $(1, 1)$ respecto de la medida de Lebesgue. Para ver que el tipo débil se verifica respecto de la medida μ , definimos

$$S_k^* = \bigcup_{j=k-N}^{k+N} S_j \quad (S_j = \emptyset \text{ si } j < 0).$$

Notando $f_k = f\chi_{S_k^*}$, tenemos que para cada $x \in S_k$, la definición de la familia \mathcal{B}^N garantiza que $M_\mu^N f(x) = M_\mu^N f_k(x)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \mu(\{x/M_\mu^N f(x) > \lambda\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{x \in S_k/M_\mu^N f(x) > \lambda\}) \\ &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_0(a_k) |\{x \in S_k/M_\mu^N f_k(x) > \lambda\}| \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S_k^*} |f(y)| \gamma_0(a_k) dy \\ &\sim \frac{c}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S_k^*} |f(y)| d\mu(y) \\ &\leq \frac{c(2N+1)}{\lambda} \int |f(y)| d\mu(y). \end{aligned}$$

En el pasaje de la primera a la segunda línea hemos apelado a que $\gamma(y) \sim \gamma_0(a_k)$ para todo $y \in S_k$. En el pasaje de la segunda a la tercera hemos apelado a que M_μ^N es de tipo débil $(1, 1)$ respecto de la medida de Lebesgue. En el pasaje de la tercera a la cuarta línea hemos apelado a que $\gamma(y) \sim \gamma_0(a_k)$ para todo $y \in S_k^*$, lo que puede comprobarse haciendo un estudio análogo al que hicimos para $\gamma(y)$ en B . El pasaje de la cuarta a la última línea se logra observando que cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece a lo sumo a $2N+1$ de los conjuntos S_k^* . Esto completa la demostración. \square

Por último, antes de emprender la prueba del Teorema 5.0.2, necesitaremos la siguiente estimación:

Lema 5.3.3. Con las hipótesis del Teorema 5.0.2 sobre γ_0 , para todo $t > q$ vale que

$$\gamma_0(t) \leq 2\gamma_0(q) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t}}. \quad (5.47)$$

Demostración. Sean $t > q$, y k el único entero no negativo tal que $\psi_k(q) \leq t < \psi_{k+1}(q)$. Así,

$$\gamma_0(t) \leq \gamma_0(\psi_k(q)) = \frac{1}{2^k} \gamma_0(q).$$

Para obtener (5.47) bastará entonces conseguir una cota adecuada para k , y efectivamente tenemos

$$t < \psi_{k+1}(q) = q + \sum_{j=0}^k \phi(\psi_j(q)) = q + \sum_{j=0}^k \tau(\psi_j(q)) \psi_j(q) \leq q + (k+1)\tau(q)t,$$

lo que despejando k nos permite estimar $k \geq \frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t} - 1$, concluyendo la demostración. \square

5.4. Demostración del Teorema 5.0.2

Con todas estas herramientas a nuestra disposición, estamos finalmente en posición de encarar la prueba del teorema.

Demostración del Teorema 5.0.2. Lo que haremos será expresar a la familia de todas las bolas en \mathbb{R}^n como la unión disjunta

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{B \subset \mathbb{R}^n \text{ bola} / 0 \in B\} \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ B \subset \mathbb{R}^n \text{ bola} / 0 \notin B \text{ y } r_B \leq \frac{\phi(q_B)}{2} \right\} \\ \mathcal{B}_3 &= \left\{ B \subset \mathbb{R}^n \text{ bola} / 0 \notin B, r_B > \frac{\phi(q_B)}{2} \text{ y } q_B \leq q_0 \right\} \\ \mathcal{B}_4 &= \left\{ B \subset \mathbb{R}^n \text{ bola} / 0 \notin B, r_B > \frac{\phi(q_B)}{2} \text{ y } q_B > q_0 \right\}. \end{aligned}$$

Por la Observación 3.2.10, basta ver que la desigualdad (5.5) se verifica para cada uno de estos operadores.

El caso de $M_\mu^{\mathcal{B}_1}$ es fácil: este operador es exactamente el que hemos llamado M_μ^0 en el Corolario 5.1.3, donde hemos visto que es de tipo débil $(1, 1)$ y por lo tanto satisface (5.5).

Para el caso de $M_\mu^{\mathcal{B}_2}$, notamos que la condición $r_B \leq \frac{\phi(q_B)}{2}$ implica que cualquier bola $B \in \mathcal{B}_2$ interseca a lo sumo dos anillos S_k . Ver Figura 5.11. En

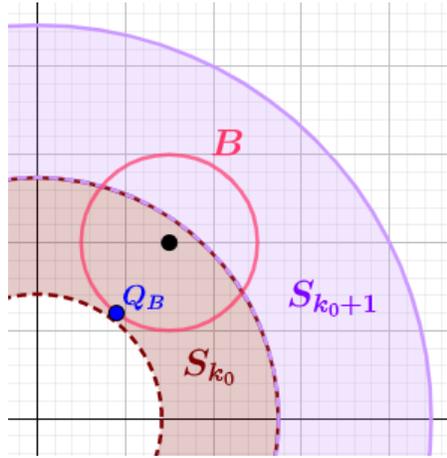


Figura 5.11: Una bola con $r_B \leq \frac{1}{2}\phi(q_B)$ y los conjuntos S_k en los que está incluida.

efecto, sea $k_0 \in \mathbb{N}_0$ el único número tal que $a_{k_0-1} < q_B \leq a_{k_0}$ (notando por comodidad $a_{-1} = 0$). Esto dice que el punto Q_B está en S_{k_0} . Pero entonces

$$\gamma_0(q + 2r) \geq \gamma_0(q + \phi(q)) = \frac{1}{2}\gamma_0(q) \geq \frac{1}{2}\gamma_0(a_{k_0}) = \gamma_0(a_{k_0+1}),$$

lo que nos dice a su vez que el punto de B más alejado del origen, $Q_B + 2r \frac{Q_B}{|Q_B|}$, pertenece a S_{k_0} o S_{k_0+1} . De esta forma $B \subset S_{k_0} \cup S_{k_0+1}$ y por lo tanto, con la notación del Lema 5.3.2, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$. De este modo

$$M_\mu^{\mathcal{B}_2} f(x) = \max \{M_\mu^1 f(x), M_\mu^2 f(x)\}.$$

Como el Lema 5.3.2 garantiza que cada uno de estos operadores es de tipo débil $(1, 1)$, $M_\mu^{\mathcal{B}_2}$ también lo es, y por lo tanto verifica (5.5).

En el caso de $M_\mu^{\mathcal{B}_3}$, comenzamos recordando que $\gamma_0(0+) < \infty$ por hipótesis. Si definimos t_0 como el valor de t tal que $\gamma_0(t_0) = \frac{1}{2}\gamma_0(0+)$, entonces

tenemos que

$$\begin{aligned}
t \in (0, t_0) &\implies \frac{1}{2}\gamma_0(t) \leq \frac{1}{2}\gamma_0(t_0) \\
&\implies \gamma_0(t + \phi(t)) \leq \gamma_0(t_0) \\
&\implies \phi(t) \geq t_0 - t.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

De esta manera, podemos acotar $\phi(t)$ inferiormente en $(0, q_0]$. Si $t \in (0, t_0/2]$, entonces (5.48) garantiza que

$$\phi(t) \geq \frac{1}{2}t_0 > 0,$$

mientras que si $t \in (t_0/2, q_0]$, entonces

$$\phi(t) = \tau(t)t \geq \tau(q_0)\frac{t_0}{2} > 0.$$

Así, llamando $\delta = \min\{1, \tau(q_0)\}$ tenemos que

$$r > \frac{\phi(q)}{2} \geq \frac{t_0}{4}\delta.$$

Si llamamos \tilde{B} a cualquier bola con $r_{\tilde{B}} = \frac{t_0}{4}\delta$ y $q_{\tilde{B}} = q_0$, el decrecimiento de γ_0 implica que

$$\mu(B) \geq \mu(\tilde{B}).$$

Como esto vale para toda $B \in \mathcal{B}_3$, tenemos que

$$M_\mu^{\mathcal{B}_3} f(x) \leq \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \|f\|_{1,\mu} =: \lambda_0.$$

De esta manera, la desigualdad que queremos probar se cumple trivialmente para $\lambda \geq \lambda_0$, y si $\lambda < \lambda_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu(\{M_\mu^{\mathcal{B}_3} f(x) > \lambda\}) &\leq \mu(\mathbb{R}^n) \frac{\lambda \|f\|_{1,\mu}}{\lambda \|f\|_{1,\mu}} \\
&\leq \underbrace{\frac{\mu(\mathbb{R}^n)\lambda_0}{\|f\|_{1,\mu}}}_{C} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

De este modo, podemos limitarnos de ahora en adelante a trabajar con bolas $B \in \mathcal{B}_4$, lo que ocupará el grueso de la demostración. Es en este caso

que será necesario recurrir a la Proposición 5.2.2. Concretamente, habremos concluido la demostración una vez que hayamos probado que se verifica la desigualdad (5.13) para $m = \frac{n-1}{2}$.

Sea pues $B \in \mathcal{B}_4$. Comenzamos obteniendo una cota inferior para la medida de B .

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \int_B d\mu = \int_q^{q+2r} \left(\int_{S^{n-1}} \chi_B(t\omega) d\sigma(\omega) \right) d\mu_0(t) \\
&\geq \int_q^{q+\phi(q)} \left(\int_{S^{n-1}} \chi_B(t\omega) d\sigma(\omega) \right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt \\
&\geq \frac{1}{2} \gamma_0(q) \mathcal{L}^n(B \cap \{y/ \ q \leq |y| \leq q + \phi(q)\}) \\
&\geq c_n \gamma_0(t) (\text{mín} \{r, q\})^{\frac{n-1}{2}} \phi(q)^{\frac{n+1}{2}}, \tag{5.49}
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos expresado la integral en coordenadas polares, en la primera desigualdad hemos apelado a que $r > \phi(q)/2$, y en la segunda hemos apelado a que γ_0 es estrictamente decreciente. Para justificar la última desigualdad, es necesario probar la siguiente

Observación 5.4.1. Existe una constante $c_n > 0$ tal que

$$\mathcal{L}^n(B \cap \{y/ \ q \leq |y| \leq q + \phi(q)\}) \geq c_n (\text{mín} \{r, q\})^{\frac{n-1}{2}} \phi(q)^{\frac{n+1}{2}}. \tag{5.50}$$

Demostración. Será necesario separar en casos según si r es mayor o menor que q , pero en ambos casos la idea será reducir el conjunto a uno cuya medida de Lebesgue pueda controlarse a partir de la estimación (5.11). Si $r \leq q$, podemos achicar el conjunto a

$$B \cap \{y/ \ q \leq |y| \leq q + \phi(q)\} \supset B \cap \left\{ y/ \ q \leq |y| \leq q + \frac{\phi(q)}{4} \right\} =: W.$$

Ver Figura 5.13. El beneficio que obtenemos con esto es que, apelando a $\frac{\phi(q)}{2} < r \leq q$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left(q + \frac{\phi(q)}{4} \right)^2 &= q^2 + q \frac{\phi(q)}{2} + \frac{\phi(q)}{4} \frac{\phi(q)}{4} \\
&< q^2 + rq + rq = q(q + 2r) = p_B^2.
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que para todo $q \leq t \leq q + \phi(q)/4$, estamos en

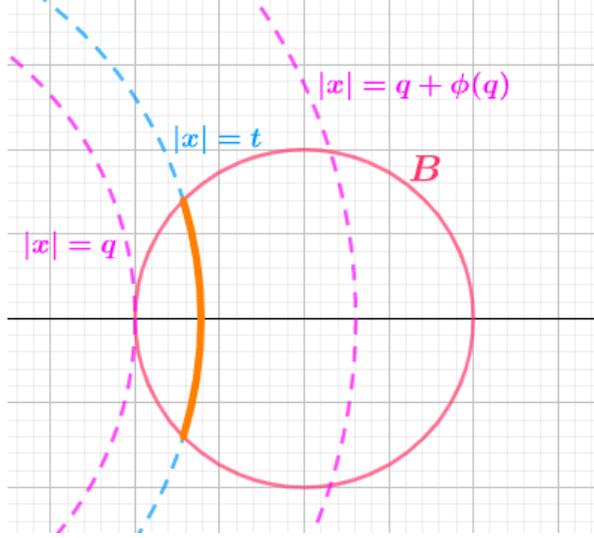


Figura 5.12: Cortes de la región $B \cap \{q < |x| < q + \phi(q)\}$ por cáscaras $|x| = t$.

las condiciones de la primera estimación de (5.11). Así,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^n(W) &= \int_q^{q + \frac{\phi(q)}{4}} \left(\int_{S^{n-1}} \chi_B(t\omega) d\sigma(\omega) \right) t^{n-1} dt \\
 &= \int_q^{q + \frac{\phi(q)}{4}} \sigma(\Sigma_B(t)) t^{n-1} dt \\
 &\geq c \int_q^{q + \frac{\phi(q)}{4}} (r(t - q))^{\frac{n-1}{2}} dt \\
 &= c \cdot r^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{\phi(q)}{4}} t^{\frac{n-1}{2}} dt \\
 &= \frac{2c}{(n-1)4^{\frac{n+1}{2}}} r^{\frac{n-1}{2}} \phi(q)^{\frac{n+1}{2}}.
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Para el caso en que $q < r$, lo que haremos es achicar el conjunto de la siguiente manera:

$$B \cap \{y/ q \leq |y| \leq q + \phi(q)\} \supset B' \cap \{y/ q \leq |y| \leq q + \phi(q)\} =: W,$$

donde B' es una bola con $q_{B'} = q_B$ y $r_{B'} = q_B$. Ver Figura 5.14. Para esta

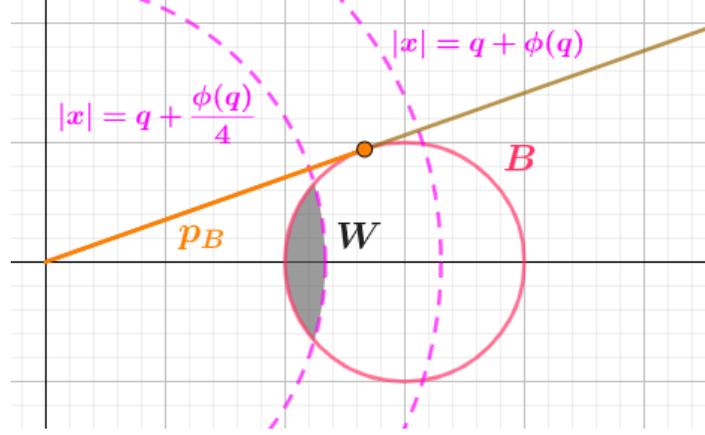


Figura 5.13: El conjunto W para una bola con $r_B \leq q_B$.

nueva bola, $p_{B'} = \sqrt{q(q+2q)} = \sqrt{3}q$, mientras que

$$q + \phi(q) = (1 + \tau(q))q \leq (1 + \tau(q_0))q < 2^{\frac{1}{n}}q < \sqrt{3}q,$$

ya que τ es decreciente, $q > q_0$ y q_0 se había definido para verificar (5.44). De esta manera, estamos otra vez en las condiciones de la estimación (5.11) y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(W) &\geq c \int_q^{q+\phi(q)} \sigma(\Sigma_B(t)) dt \\ &= \int_q^{q+\phi(q)} (q(t-q))^{\frac{n-1}{2}} dt \\ &= q^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\phi(q)} t^{\frac{n-1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{n+1} q^{\frac{n-1}{2}} \phi(q)^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la Observación 5.4.1. \square

Ahora que hemos obtenido una cota para $\mu(B)$, y con (5.13) en mente, probemos que para $t > q$ se cumple

$$\sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \leq C \left(\frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (5.51)$$

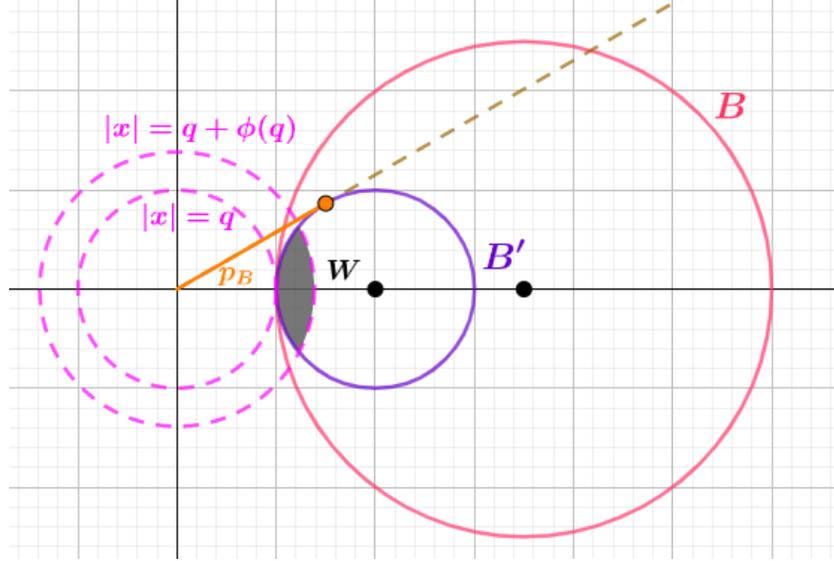


Figura 5.14: El conjunto W para una bola con $r_B > q_B$.

Si $q < r$, tenemos por (5.12), (5.39) y (5.49) que vale

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} &\lesssim \left(\frac{t-q}{t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\gamma_0(q)\phi(q)q^{n-1}}{\gamma_0(q)q^{\frac{n-1}{2}}\phi(q)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \left(\frac{t-q}{t} \frac{q}{\phi(q)} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $r \leq q$, nuestra cota para $\sigma(\Sigma_B(t))$ dependerá de si t es mayor o menor que p_B . Si $t < p_B$,

$$\begin{aligned} \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} &\lesssim \left(\frac{\sqrt{r(t-q)}}{t} \right)^{n-1} \frac{\gamma_0(q)\phi(q)q^{n-1}}{\gamma_0(q)r^{\frac{n-1}{2}}\phi(q)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{r^{\frac{n-1}{2}}(t-q)^{\frac{n-1}{2}}}{t^{n-1}} \frac{q^{n-1}}{r^{\frac{n-1}{2}}\phi(q)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &< \left(\frac{t-q}{t} \frac{q}{\phi(q)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos apelado a que $q < t$.

Si $r \leq q$ y $t \geq p_B$, comenzamos acotando

$$\sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \lesssim \left(\frac{r}{q}\right)^{n-1} \frac{\gamma_0(q)\phi(q)q^{n-1}}{\gamma_0(q)r^{\frac{n-1}{2}}\phi(q)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\frac{r}{\phi(q)}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (5.52)$$

Por otro lado, observamos que

$$t - q \geq \sqrt{q(q+2r)} - q = \frac{q^2 + 2rq - q^2}{\sqrt{q(q+2r)} + q} \geq \frac{2rq}{(1+\sqrt{3})q} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}r. \quad (5.53)$$

Si $t \leq 2q$, usamos (5.53) para controlar

$$r \lesssim (t - q) \frac{t}{t} \leq 2(t - q) \frac{q}{t},$$

mientras que $t > 2q$ implica

$$r \leq q \frac{t - q}{t - q} \leq 2q \frac{t - q}{t}.$$

Esto junto a (5.52) termina de probar (5.51).

Con (5.51) a nuestra disposición, podemos probar que estamos en las hipótesis de la Proposición 5.2.2 para la familia \mathcal{B}_4 , $m = \frac{n-1}{2}$ y eligiendo

$$\epsilon = \frac{1}{C} \left(\frac{\log 2}{2}\right)^{-\frac{n-1}{2}},$$

con C la constante de la cota (5.51). Notando $\Psi(v) = e^{v^{2/(n-1)}}$ y $\eta = \frac{\log 2}{2}$ por comodidad, el lado izquierdo de (5.13) se puede acotar por

$$\begin{aligned} & \int_q^\infty \Psi \left(\epsilon \sigma(\Sigma_B(t)) \frac{\mu(A_q)}{\mu(B)} \right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt \\ & \leq \int_q^\infty \Psi \left(\left(\eta \frac{t - q}{\phi(q)} \frac{q}{t} \right)^{-\frac{n-1}{2}} \right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt \\ & = \int_q^{2q} \exp \left(\eta \frac{t - q}{\phi(q)} \frac{q}{t} \right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt + \int_{2q}^\infty \exp \left(\eta \frac{t - q}{\phi(q)} \frac{q}{t} \right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt \\ & = I + II, \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos apelado a (5.51) y a que $\Psi(v)$ es creciente en v .

La cota de I queda

$$\begin{aligned}
I &\leq (2q)^{n-1} \int_q^{2q} \exp\left(\eta \frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t}\right) \gamma_0(2q) dt \\
&\leq (2q)^{n-1} \int_q^{2q} \exp\left(\eta \frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t}\right) 2\gamma_0(q) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t}} dt \\
&= 2^n q^{n-1} \int_q^{2q} \exp\left(-\eta \frac{t-q}{\phi(q)} \frac{q}{t}\right) dt \\
&\leq 2^n q^{n-1} \phi(q) \int_0^\infty e^{-\eta s} ds \sim \mu(A_q),
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos invocado el Lema 5.3.3, en la tercera desigualdad hemos hecho el cambio de variable $s = \frac{t-q}{\phi(q)}$ y notado que $\frac{q}{t} \leq 1$, y en el paso final hemos apelado al Lema 5.3.1.

Para la cota de II , definimos $\tilde{\tau}(q) = 1/\tau(q)$, que es creciente por ser τ decreciente, y de esta forma

$$\begin{aligned}
II &\leq \int_{2q}^\infty \exp\left(\eta \frac{q}{\phi(q)}\right) t^{n-1} \gamma_0(t) dt \\
&= 2^n e^{\eta \tilde{\tau}(q)} \int_q^\infty \gamma_0(2s) s^{n-1} ds \\
&\leq 2^n e^{\eta \tilde{\tau}(q)} \int_q^\infty 2\gamma_0(s) \exp\left(-\log 2 \frac{s}{\phi(s)} \frac{1}{2}\right) s^{n-1} ds \\
&\leq 2^{n+1} e^{\eta \tilde{\tau}(q)} e^{-\eta \tilde{\tau}(q)} \int_q^\infty \gamma_0(s) s^{n-1} ds \sim \mu(A_q),
\end{aligned}$$

donde en la igualdad hemos hecho el cambio de variables $t = 2s$, en la segunda desigualdad hemos apelado al Lema 5.3.3 con $t = 2s$ y $q = s$, y finalmente al Lema 5.3.1.

Todo esto nos permite aplicar la Proposición 5.2.2 para \mathcal{B}_4 , obteniendo así que para todo $\lambda > 0$ se verifica

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu^{\mathcal{B}_4} f(x)\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{\frac{n+1}{2}} d\mu.$$

Como teníamos esto para las otras familias de bolas, esta desigualdad se cumple también para M_μ , y así hemos probado el Teorema 5.0.2. \square

5.5. Comentarios finales

Después de haber ocupado más de 30 páginas para poder demostrar un Teorema, es una buena idea hacer un parate y reflexionar sobre lo que acaba de suceder. ¿Por qué ha sido tan costoso en este caso obtener una desigualdad modular débil para M_μ ? Una respuesta posible es que en este caso no contamos con un Lema de Cubrimiento que sirva a tales efectos. Los lemas de tipo Vitali necesitan para su aplicación algún control de las medidas de las bolas de acuerdo a la razón entre sus radios, que en este caso no tenemos. Notemos que en este caso, el argumento geométrico que está en el corazón de esta desigualdad es la Observación 5.4.1: este es el lugar donde aparece el exponente $\frac{n+1}{2}$. Sin embargo, poder usar esta relación geométrica para probar la desigualdad requirió de muchísima maquinaria. Es interesante notar cómo la ausencia de doblantez complica tanto la obtención de este tipo de resultados, y nos da la pauta de que efectivamente hay mucho que estudiar en estos casos.

Habiendo probado el Teorema 5.0.2, queremos mencionar una consecuencia. A pesar de que la desigualdad modular (5.5) es más débil que el tipo débil $(1, 1)$, se puede probar el siguiente resultado para el operador M_μ .

Teorema 5.5.1. *Sea μ una medida que verifica las hipótesis del Teorema 5.0.2. Luego M_μ es de tipo fuerte (p, p) para todo $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. El espíritu de la prueba es interpolar la desigualdad (5.5) con el tipo fuerte (∞, ∞) de M_μ . Fijemos $\lambda > 0$ y definamos

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Como consecuencia de la escritura $f = f^\lambda + (f - f^\lambda)$ y de la subaditividad del operador M_μ se llega a que

$$\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x / M_\mu f^\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x / M_\mu (f - f^\lambda)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Pero el segundo de estos conjuntos es vacío, pues

$$M_\mu (f - f^\lambda)(x) \leq \|f - f^\lambda\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}.$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f(x) > \lambda\}) &\leq \mu(x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f^\lambda(x) > \frac{\lambda}{2}) \\
&\leq C \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log \frac{2|f|}{\lambda}\right)^{\frac{n+1}{2}} d\mu \\
&\leq C \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} \frac{|f|}{\lambda} \frac{n+1}{2(p-1)} \left(\frac{2e|f|}{\lambda}\right)^{p-1} d\mu \\
&\leq C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^p d\mu, \tag{5.54}
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos apelado al Teorema 5.0.2, y en la tercera hemos aplicado la desigualdad elemental

$$1 + \log a = \log ea \leq \frac{1}{\alpha} (ea)^\alpha \quad \text{para } a > 1 \text{ y } \alpha > 0, \tag{5.55}$$

con $\alpha = (p-1)\frac{2}{n+1}$ y $a = \frac{2|f|}{\lambda}$. Queremos hacer notar que la condición que requiere (5.55) sobre a es lo que obliga a introducir la función f^λ en la cota.

Finalmente, notamos que con (5.54) hemos probado que M_μ es de tipo débil (p, p) para todo $p > 1$, y por lo tanto es también de tipo fuerte para todos estos valores. \square

Queremos terminar esta sección comentando otra desigualdad probada por Sjögren y Soria en [SS04], solo en el caso de la medida Gaussiana.

Teorema 5.5.2. *Con la misma notación del Teorema 5.0.1, el operador $M_{\mu_\delta} : L^1_{\mu_\delta} \rightarrow w - L(\log^+ L)_{\mu_\delta}^{-\frac{n-1}{2}}$ es acotado. Concretamente, existe una constante $c > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$ se cumple que*

$$\mu_\delta(\{x \in \mathbb{R}^n / M_{\mu_\delta} f(x) > \lambda\}) \leq c \frac{(\log^+ \lambda)^{\frac{n-1}{2}}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu_\delta + \frac{c}{\lambda}. \tag{5.56}$$

Esta desigualdad no sirve en general para probar el tipo fuerte (p, p) de la maximal, pero permite probar otras desigualdades interesantes como

$$\mu_\delta\{x \in \mathbb{R}^n / M_{\mu_\delta} f(x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| (1 + \log^+ |f|)^{\frac{n-1}{2}} d\mu_\delta + \frac{C}{\lambda},$$

lo que muestra que $M_{\mu_\delta} : L(1 + \log^+ L)_{\mu_\delta}^{\frac{n-1}{2}} \rightarrow w - L^1_{\mu_\delta}$. La demostración del Teorema 5.5.2 es parecida a la del Teorema 5.5.2, con algunas diferencias. En particular, el rol del operador \overline{M}_μ lo cumple un operador distinto, que se adapta mejor al nuevo contexto.

Capítulo 6

Anexo

Dedicamos este espacio a probar algunas desigualdades elementales.

Lema 6.0.1. *Para todo $a, b > 0$ se tiene que*

$$\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b.$$

Demostración. Si $a, b \leq 1$, $\log^+ = \log$ y se verifica la igualdad. Si $a, b < 1$, $\log^+(ab) = 0$ y la desigualdad se cumple trivialmente. Los casos restantes se reducen sin pérdida de generalidad al caso $a < 1 \leq b$. En este caso tenemos que

$$\log^+(ab) < \log^+(b) = \log^+(a) + \log(b).$$

□

Lema 6.0.2. *Sean $a > 1$ y $\alpha > 0$. Entonces se tiene que*

$$1 + \log a = \log ea \leq \frac{1}{\alpha}(ea)^\alpha. \quad (6.1)$$

Demostración. Sean $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \log(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha.$$

Basta probar que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x > e$. Para esto calculamos las derivadas

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g'(x) = x^{\alpha-1}.$$

$\alpha > 0$ implica que $f'(x) < g'(x)$ para $x > 1$. Pero entonces basta probar que

$$1 = f(e) \leq g(e) = \frac{e^\alpha}{\alpha}.$$

Esto es consecuencia de que $e^y > y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

□

Bibliografía

- [CF75] A. Cordoba and R. Fefferman. A geometric proof of the strong maximal theorem. *Bull. Am. Math. Soc.*, 81:941, 1975. [31](#), [48](#)
- [Cór78] Antonio Córdoba. The theorem $s \times t \times \phi(s, t)$. *Mittag-Leffler Institute - Reports*, 9:1–7, 1978. [34](#)
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. [13](#)
- [Gar70] Adriano M. Garsia. Topics in almost everywhere convergence. Lectures in Advanced Mathematics. 4. Chicago: Markham Publishing Company X, 154 p. (1970)., 1970. [63](#)
- [HL30] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Math.*, 54, 1930. [21](#)
- [JMZ35] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, and Antoni Zygmund. Note on the differentiability of multiple integrals. *Fundam. Math.*, 25:217–234, 1935. [19](#), [20](#), [32](#)
- [LN19] Andrei K. Lerner and Fedor Nazarov. Intuitive dyadic calculus: the basics. *Expo. Math.*, 37(3):225–265, 2019. [10](#), [11](#)
- [Per19] María Cristina Pereyra. Dyadic harmonic analysis and weighted inequalities: the sparse revolution. In *New trends in applied harmonic analysis. Volume 2. Harmonic analysis, geometric measure theory, and applications. Collected papers based on courses given at the 2017 CIMPA school, Buenos Aires, Argentina, July 31 – August 11, 2017*, pages 159–239. Cham: Birkhäuser, 2019. [10](#)
- [Rey20] Guillermo Rey. Another counterexample to Zygmund’s conjecture. *Proc. Am. Math. Soc.*, 148(12):5269–5275, 2020. [61](#)

- [Sjö83] P. Sjögren. A remark on the maximal function for measures in \mathbb{R}^n . *Amer. J. Math.*, 105(5):1231–1233, 1983. [95](#)
- [Sor86] Fernando Soria. Examples and counterexamples to a conjecture in the theory of differentiation of integrals. *Ann. Math. (2)*, 123:1–9, 1986. [i](#), [18](#), [52](#)
- [SS04] P. Sjögren and F. Soria. Sharp estimates for the non-centered maximal operator associated to Gaussian and other radial measures. *Adv. Math.*, 181(2):251–275, 2004. [ii](#), [94](#), [138](#)
- [Tor04] Alberto Torchinsky. *Real-variable methods in harmonic analysis*. Mineola, NY: Dover Publications, 2004. [110](#)
- [Var94] A. Vargas. On the maximal function for rotation invariant measures in \mathbf{R}^n . *Studia Math.*, 110(1):9–17, 1994. [ii](#), [63](#), [65](#)