UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

DIMENSIONES INTERMEDIAS

José Manuel Tejada

Directora: Ursula M. Molter

Fecha de Presentación 30/03/2023

Agradecimientos

Naturalmente, resulta muy complicado poner transmitir adecuadamente ciertos sentimientos o ideas con un texto, sobre todo sin que parezca una formalidad o un duplicado de la sección de agradecimientos de algún otro trabajo, especialmente teniendo en cuenta que considero que las personas que voy a mencionar ya saben lo agradecido que estoy con ellos. Espero que por lo menos con esto quede clara mi gratitud, más allá de que lo siguiente sea escueto. Realmente no pude escribir nada mejor.

- En primer lugar me gustaría agradecer a mis padres y a mi familia, por razones más que obvias. En resumen, por todo.
- A Graciela Garay, por su talento como profesora y su apoyo constante durante tiempos difíciles.
- A Ursula, por aceptar dirigir este trabajo y las numerosas oportunidades que me dió, más allá de mis vueltas y mi costumbre de hacer todo a último momento. Resulta dificil poner en palabras cuánto me ayudó en estos últimos meses.
- A Felipe e Ignacio, por aceptar ser jurados de este trabajo y por las correcciones y comentarios que aportaron, especialmente teniendo en cuenta el poco tiempo que hubo entre el envío del borrador de tesis y la defensa, siendo yo y mi talento para postergar absolutamente todo los únicos culpables de eso.
- A Kevin y Maxi por tantos años de amistad, a los miembros de ”Tiranía” por tantos momentos alegres y especialmente a los ”Guardianes”, por su increíble constancia y su determinación a la hora de proteger la Vía Láctea. Estoy convencido de que este mundo necesita más gente como ellos.
- A Enzo y Leo, por toda la ayuda que me brindaron a la hora de escribir este trabajo y sus consejos y opiniones.
- A la persona anónima (o grupo) de la cursada de Análisis Real que llevó una torta y sanguchitos la clase posterior a la defensa de este trabajo. Fue un gesto muy lindo.

Índice general

1. Introducción **4**

2. Preliminares **6**
2.1. Hausdorff, Minkowski . . . 6
2.2. Un par de ejemplos . . . 11
2.2.1. El gráfico de $\operatorname{sen}(1/x)$ . . . 11
2.2.2. Bedford-McMullen carpets . . . 13
2.3. Frostman . . . 20
2.4. Comentarios adicionales . . . 22
2.4.1. Productos . . . 22
2.5. Proyecciones . . . 22
2.5.1. Comentarios previos . . . 22
2.5.2. Medidas sobre familias de subespacios . . . 24
2.5.3. Medidas sobre Grassmannianos . . . 25
2.5.4. Capacidades y dimensión de Hausdorff . . . 27
2.5.5. Proyecciones y dimensión de Hausdorff . . . 28
2.5.6. Intersecciones (comentarios) . . . 30

3. Dimensiones Intermedias **31**
3.1. Definiciones, Propiedades básicas . . . 31
3.2. Dimensiones intermedias generalizadas . . . 33
3.2.1. Definiciones y algunas propiedades . . . 33
3.2.2. Un resultado importante . . . 37
3.2.3. Interpolando con las dimensiones generalizadas . . . 47
3.3. Dimensiones intermedias II . . . 51
3.4. Frostman II . . . 54
3.5. Una equivalencia . . . 57
3.6. Ejemplos varios . . . 58
3.6.1. Ciertas sucesiones convergentes . . . 59
3.6.2. Versión en $\mathbb{R}^n$ . . . 61
3.6.3. Bedford-McMullen carpets II . . . 63
3.6.4. Comentarios finales . . . 65

4. Productos, proyecciones **66**
4.1. Productos . . . 66
4.2. Proyecciones . . . 69
4.2.1. Capacidades y dimensiones intermedias . . . 69
4.2.2. El caso $\theta = 1$ . . . 70
4.2.3. Capacidades y dimensiones intermedias II . . . 70
4.2.4. Proyecciones y dimensiones intermedias . . . 73
4.2.5. Dimensiones intermedias III . . . 77

Capítulo 1

Introducción

El término ”fractal” fue acuñado por Benoit Mandelbrot en 1975 (aunque para esa época ya se habían estudiado varios casos de fractales de forma más que nada aislada) , a partir de la palabra latina ”fractus”, que significa ”roto” o ”fragmentado”. El considerar objetos fundamentalmente ”rotos” fue naturalmente dificil de aceptar en la comunidad matemática durante un tiempo; varios matemáticos de la talla de Poincaré por ejemplo manifestaron su disconformidad con la existencia de objetos como el gráfico de la función de Weierstrass, reacción entendible dado que muchos de estos objetos tienden a desafiar nuestras ideas más ”intuitivas”.

Dos conceptos fundamentales en la geometría fractal son las dimensiones de Hausdorff y Minkowski, que contienen en sus definiciones dos formas distintas de interpretar la siguiente cuestión: cuánto ”espacio” ocupa un subconjunto de un espacio métrico”. Antes de hablar de este trabajo sería adecuado hablar un poco sobre esta rama de la matemática:

Detrás de las definiciones de las medidas y dimensión de Hausdorff y Minkowski se encuentra una idea fundamental: Dado que una característica ”esperable” en un fractal es que tenga una”estructura compleja” independientemente de la escala a la que se ve el subconjunto, las herramientas usuales del análisis no suelen ser útiles en este contexto para determinar propiedades varias de un subconjunto. Por ejemplo, plantear ”cuánto espacio ocupa un subconjunto” puede ser un problema abstruso en un contexto más general, donde se incluyen subconjuntos de naturaleza más intrincada que los de la geometría ”clásica”. Por eso, se busca entender el comportamiento de estos objetos conforme se vayan considerando ”escalas más chicas”. Cómo se estudie esto último dependerá principalmente de cómo se interprete esto, ya que interpretaciones distintas pueden terminar dando nociones muy diferentes de ”dimensión”.

Existen varias nociones de dimensión, que son la herramienta fundamental de estudio en este campo, con propiedades muy distintas a veces (en este trabajo se mencionan algunas de las diferencias entre las dos dimensiones anteriores en los preliminares). Algunas brindan una idea ”local” de un subconjunto (como la dimensión de Assouad), mientras que otras dan una idea más ”global” (como la Hausdorff) por ejemplo. Por esto, entender relaciones entre estas nociones resulta fundamental. La idea de este trabajo será estudiar la relación entre las dos dimensiones mencionadas.

Muchas de las herramientas desarrolladas en este campo vienen motivadas porque, para ciertas cuestiones, considerar objetos ”suaves” o ”buenos” puede no producir contraejemplos o un análisis fino (o preciso) de lo que se esté estudiando. Es decir, esta complejidad también viene motivada por un intento de entender más profundamente varios conceptos matemáticos. Así, resulta bastante natural pensar en un conjunto como el de Cantor cuando se busca un conjunto ”chico” en términos de medida pero no numerable. Objetos con esta clase de complejidad pueden aparecer incluso en contextos

más "aplicados" como ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos naturales .

En esta tesis se estudia un concepto introducido recientemente para comprender con mayor profundidad las relaciones entre las dimensiones Hausdorff y Minkowski. Para esto, se van a analizar formas equivalentes para cada dimensión, lo que permitirá ver a ambas como casos particulares de una familia de dimensiones que se encuentran entre ambas. Este enfoque tiene un par de consecuencias interesantes respecto de proyecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, cuando estas dimensiones interpolen a las de Hausdorff y Minkowski, y permitirá deducir corolarios que sólo involucran a las dos dimensiones iniciales.

Este procedimiento de interpolación entre dimensiones fue también explorado por J. Fraser para las dimensiones de Assouad y Minkowski, en [FY18]. Respecto de la interpolación estudiada en este trabajo, el primer paper que trata concretamente el tema es [FFK18]. Una de las motivaciones para introducir este concepto fue querer tener una idea de qué rangos se deben considerar para los diámetros de cubrimientos de un subconjunto para poder aproximar bien su dimensión de Hausdorff. Concretamente, si alcanza para tener una buena aproximación el considerar cubrimientos cuyos miembros tengan diámetros "parecidos", o si es indispensable considerar cubrimientos donde los diámetros puedan ser "más chicos". Recientemente se obtuvieron varios resultados fundamentales en papers de A. Banaji, como [Ban20], o [BR22].

Una breve descripción de la estructura del trabajo

En el capítulo 2 se realizará un breve repaso de las dimensiones de Hausdorff y Minkowski, con el objetivo de mostrar que la diferencia entre ambas se debe en realidad a que en las dimensiones Minkowski aparecen restricciones adicionales sobre ciertos cubrimientos. Concretamente, que para las Minkowski sólo se consideran cubrimientos cuyos miembros tengan diámetros iguales, condición que no figura para la de Hausdorff. Se verá cómo la geometría de un subconjunto puede provocar que estas restricciones provoquen que las dimensiones tengan valores distintos, con dos ejemplos provenientes de [AKOU99] y [McM84]. Entonces, estas dimensiones van a poder entenderse como los casos "extremos" de una misma idea. En lo restante de este capítulo se estudian resultados que relacionan estas dimensiones con proyecciones, intersecciones y productos. Se seguirá principalmente a [Fal14].

En el capítulo 3 estudiará cómo definir otras dimensiones a partir de restricciones más laxas que las consideradas sobre las dimensiones Minkowski (también llamadas "Box"), y cómo interactúan con las dimensiones originales. Esto dará información más fina sobre cómo afectan estas restricciones a las dimensiones del capítulo 2. También se estudiará una variación de esta idea con el objetivo de concluir un par de resultados de importancia, y para terminar se van a estudiar un par de ejemplos ilustrativos.

En el Capítulo 4 aplicará lo visto para tratar las cuestiones de productos y (sobre todo) proyecciones. El estudio del comportamiento de dimensiones respecto de proyeciones a subespacios es clásico en el área, y este enfoque de "interpolación" entre dimensiones permitirá demostrar un par de resultados relacionados. Seseguirá casi en su totalidad el paper [BFF21].

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Hausdorff, Minkowski

Primero se pueden repasar las definiciones de ambas dimensiones, para pasar inmediatamente a una definición equivalente que permita apreciar adecuadamente sus similaridades, ya que las definiciones "usuales" suelen esconder el hecho de que, a fin de cuentas, ambas se distinguen por los "tamaños"de los cubrimientos que uno considera.

La manera "usual" de definir la dimensión de Hausdorff $\dim_H$ es partiendo de una familia de medidas, que se definen por una construcción general, a veces llamada "de tipo II". tales medidas se definen a partir de premedidas:

Dada una premedida τ sobre una familia de cubconjuntos Λ de un conjunto X, se puede definir la medida (exterior) construida **por el método I** por:

$$\mu(E) := \text{ínf}\left\{\sum_{\mathbb{N}} \tau(c_i) : c_i \in \Lambda, E \subseteq \cup c_i\right\}$$

Por ejemplo, la medida de Lebesgue se puede definir de esta forma, para una premedida y familia de subconjuntos apropiadas. Sin embargo, a veces se necesita una medida que contenga un poco más de información sobre la geometría de los subconjuntos de X. Esto se puede conseguir con las medidas de tipo II:

Definición 2.1.1. Sea X un espacio métrico, $\delta \in (0, \infty]$. Se definen:

$$\mu_\delta := \text{ínf}\left\{\sum_{\mathbb{N}} \tau(c_i) : c_i \in \Lambda, E \subseteq \bigcup c_i, |c_i| \leqslant \delta\right\}.$$
$$\mu(E) := \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E).$$

Definición 2.1.2. Sea X un espacio métrico, con métrica d, y sean:

$$\mathcal{H} := \left\{f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \overline{\mathbb{R}} : \text{ crecientes, positivas para } t > 0, \text{ y continuas a derecha } \right\}$$

y $\mathcal{H}_0 = \{f \in \mathcal{H} : f(0) = 0\}$. A su vez, para $f \in \mathcal{H}$ y $\mathcal{U}$ la familia de abiertos de X, se puede definir una premedida (que se denota f por abuso de notación) sobre $\mathcal{U}$ por:

$f(G) := f(|G|)$ para G no vacío, y $f(\varnothing) := 0$, con $|G| = diam(G)$ el diámetro de G. Entonces, a la medida construida por el método II a partir de esta premedida se la denomina **f-medida de Hausdorff** (μ^f). Para cada $s \geqslant 0$ se puede considerar la función $f(t) = t^s$, y a la medida de Hasdorff asociada se la conoce como la **s-medida de Hausdorff** (μ^s, que también se la suele denotar $\mathcal{H}^s$ y a sus μ^s_δ por $\mathcal{H}^s_\delta$).

Para propiedades varias de tales medidas, una buena fuente es [Rog70]. de momento los únicos resultados que se deben tener en cuenta de ese libro son:

Teorema 2.1.3. *(Teorema 27) Las medidas de Hausdorff μ^f son medidas métricas, Borel, G_δ regulares, y cumplen que todo μ^f-medible de medida finita contiene un subconjunto F_σ con igual medida.*

Teorema 2.1.4. *(Teorema 28) Sean $f \in \mathcal{H}$ y $E \subseteq X$. Para cada $\delta > 0$ se definen:*

- $\mu^f_\delta(E) := \text{ínf}\{\sum f(G_i) : E \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} G_i\,,\ G_i \text{ abiertos}\,,\ |G_i| \leqslant \delta\}$.
- $\nu^f_\delta(E) := \text{ínf}\{\sum f(F_i) : E \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} F_i\,,\ F_i \text{ cerrados}\,,\ |F_i| \leqslant \delta\}$.
- $\sigma^f_\delta(E) := \text{ínf}\{\sum f(S_i) : E \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} S_i\,,\ |S_i| \leqslant \delta\}$, *con los S_i subconjuntos arbitrarios.*
- $\tau^f_\delta(E) := \text{ínf}\{\sum f(S_i) : E = \bigcup_{\mathbb{N}} S_i\,,\ |S_i| \leqslant \delta\}$, *con los S_i subconjuntos arbitrarios.*

Entonces, para todo par $0 < \delta < \varepsilon$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$\mu^f_\varepsilon(E) \leqslant \nu^f_\delta(E) \leqslant \sigma^f_\delta(E) \leqslant \tau^f_\delta(E) \leqslant \mu^f_\delta(E),$$

de modo que vale:

$$\mu^f(E) = \sup_{\delta>0}\mu^f_\delta(E) = \sup_{\delta>0}\nu^f_\delta(E) = \sup_{\delta>0}\sigma^f_\delta(E) = \sup_{\delta>0}\tau^f_\delta(E).$$

Observación 2.1.5. Debido a la definición de τ^f_δ, se puede observar que las dimensiones de Hausdorff de un conjunto son una propiedad intrínseca de este, ya que (como se deduce directamente del resultado) si se considera un E subconjunto de un par de espacios métricos $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ simultaneamente, tales que $d_1 = d_2$ en E, entonces $\mu^f(E)$ considerando a E como subespacio de X_1 es igual a $\mu^f(E)$ considerando a E como subespacio de X_2. Esto principalmente se menciona para evitar tecnicismos al considerar, por ejemplo, dimensiones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se analizan en un $\mathbb{R}^d$.

Antes de definir $\dim_H(E)$ para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se deben recordar un par de propiedades de las medidas $\mathcal{H}^s$:

Lema 2.1.6. *Sea X un espacio métrico, $E \subseteq X$. Entonces, $\mathcal{H}^s(E) = 0$ si y solo si $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$.*

Demostración. Para la implicación no trivial, considerar los casos $s = 0$ y $s > 0$. En el primer caso se deduce el resultado inmediatamente, por lo que queda el segundo caso. Si $\mathcal{H}^s_\infty(E) = 0$, por definición vale que $\forall \varepsilon > 0$ existe un cubrimiento numerable $\{U_i\}$ de E tal que $\sum |U_i|^s \leqslant \varepsilon$, por lo que $\sup |U_i| \leqslant (\varepsilon)^{1/s} =: \delta(\varepsilon)$, de modo que $\mathcal{H}^s_{\delta(\varepsilon)}(E) \leqslant \varepsilon$, de donde se deduce que $\mathcal{H}(E) = 0$.

□

Proposición 2.1.7. *Sean X, E como antes, y $0 \leqslant s < t$. Entonces:*

- *Si $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$.*
- *Si $\mathcal{H}^t(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.*

Por lo tanto, se puede definir la **Dimensión de Hausdorff** de E como:

$$\dim_H(E) := \text{ínf}\{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}. \tag{2.1}$$

Esta noción de dimensión se distingue de las otras que se estudiarán en este trabajo, por tener la propiedad de "estabilidad numerable" por ejemplo:

$$\dim_H(\bigcup_{\mathbb{N}} E_n) = \sup_{\mathbb{N}} \dim_H(E_n).$$

Otra propiedad que satisface esta noción de "dimensión", es la siguiente (de invariancia bajo transformaciones Lipschitz):

Proposición 2.1.8. *Sean $(X,d),(X',d')$ espacios métricos, $E \subseteq X'$, y $f : E \to X$ con la siguiente "condición de Lipschitz":*

- *Existe $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente con $g(0) = 0$, tal que:*

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leqslant g\left(d'\left(x,y\right)\right).$$

Entonces, para toda $h \in \mathcal{H}$ y todo $\delta > 0$ se tiene que $\mu^{hg^{-1}}_{g(\delta)}(f(E)) \leqslant \mu^h_\delta(E)$, de modo que:

$$\mu^{hg^{-1}}(f(E)) \leqslant \mu^h(E).$$

Demostración. Para ver que tiene sentido considerar la expresión $\mu^{hg^{-1}}$, por las propiedades de g se tiene que g^{-1} existe, es continua y estrictamente creciente con $g^{-1}(0) = 0$. De esto se obtiene que $hg^{-1} \in \mathcal{H}$.

Entonces, sean $h \in \mathcal{H}$ y $\delta > 0$. Sea $\{S_n\}_{\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de X' con $E \subseteq \cup S_n$, $S_n \subseteq E$ y $d'(S_n) \leqslant \delta$. Se tiene que:

$$|f(S_n)| = \sup_{x,y \in S_n} d(f(x), f(y)) \leqslant \sup_{x,y \in S_n} g(d'(x,y)) \leqslant g(|S_n|) \leqslant g(\delta),$$

y, además:

$$hg^{-1}(|f(S_n)|) \leqslant hg^{-1}g(|S_n|) = h(S_n).$$

Por lo tanto, $\mu^{hg^{-1}}_{g(\delta)}(f(E)) \leqslant \mu^h_\delta(E)$, y se obtiene lo pedido.

□

Corolario 2.1.9. *La dimensión de Hausdorff es invariante Bilipschitz.*

Con lo desarrollado se puede concluir uno de los dos resultados que motivan las conceptos estudiados en los siguientes capítulos de este trabajo:

$$\dim_H(E) = inf\left\{s \geqslant 0 : \forall \varepsilon > 0\, \exists (U_n)_{\mathbb{N}} \text{ cubr. de E } / \sum |U_n|^s < \varepsilon\right\}, \tag{2.2}$$

ya que lo segundo es simplemente $inf\{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s_\infty(E) = 0\}$. En otras palabras, la dimensión de Hausdorff se puede definir sin pasar primero por las medidas $\mathcal{H}^s$, utilizando cubrimientos que no deben necesariamente cumplir condiciones muy restrictiva respecto de sus diámetros. Por lo tanto, resulta natural considerar expresiones similares a la ecuación 2.2, aplicando restricciones a los diámteros. Para esto, se estudiará otra noción de dimensión:

Dado un espacio métrico X y $E \subseteq X$, se puede definir $N_\delta(E)$ como la mínima cantidad de bolas abiertas con diámetro $\leqslant \delta$ necesarios para cubrir E, por lo que E es totalmente acotado si y solo si para todo $\delta > 0$, $N_\delta(E) < \infty$, y N_δ resulta ser decreciente en δ. Entonces, trabajando en $X = \mathbb{R}^n$ con E acotado, se pueden definir las **dimensiones superior e inferior de Minkowski** (también llamadas **Box**) de la siguiente forma:

$$\underline{\dim}_B(E) := \liminf_{\delta\to 0}\frac{log(N_\delta(E))}{-log(\delta)},\ \overline{\dim}_B(E) := \limsup_{\delta\to 0}\frac{log(N_\delta(E))}{-log(\delta)} \tag{2.3}$$

A su vez, si ambas coinciden se escribe $\dim_B(E)$ en vez de $\overline{\dim}_B(E)$ y $\underline{\dim}_B(E)$.

Observación 2.1.10. $N_\delta(E)$ se puede tomar también como cualquiera de las siguientes cantidades:

- El mínimo número de cubos cerrados de lados δ necesarios para cubrir E.
- El número máximo de "δ-mesh cubes" que intersecan E, entendiendo a esos cubos como los cubos de lados δ y extremos de la forma $m.\delta$ con $m \in \mathbb{Z}$.
- $P_\delta(E)$:= el mayor número de bolas disjuntas de radio δ con centros en E. Una forma directa de ver esto se puede encontrar en la próxima observación.

Observación 2.1.11. Se puede comentar también una demostración de $\overline{\dim}_B(E) \leqslant n$:

Demostración. En primer lugar, no es dificil demostrar que:

$$N_{2\delta}(E) \leqslant P_\delta(E) \leqslant N_{\delta/2}(E).$$

Para la primera desigualdad basta observar que si se tiene una familia maximal de bolas discjuntas de radio δ entonces duplicar sus radios da un cubrimiento de E. Para la otra desigualdad, basta con notar que si $E \subseteq \bigcup^{N_{\delta/2}(E)} B(x_i, \delta/2)$ y se tienen $y_1, \dots y_k \in E$ tales que $B(y_i, \delta)$ son disjuntas dos a dos, entonces cada y_i sólo puede pertenecer a una de las bolas $B(x_i, \delta/2)$.

Con esto en mente, se puede ver que para calcular $\overline{\dim}_B(E)$ y $\underline{\dim}_B(E)$ se puede reemplazar el $N_\delta(E)$ de la definición por $P_\delta(E)$. Pero, sabiendo esto se puede verificar que $\overline{\dim}_B(E) \leqslant n$ de la siguiente forma:

Como se puede incluir a E en una bola suficientemente grande, alcanza con ver la desigualdad para bolas centradas en 0. Pero, tomando la medida de Lebesgue de una bola $B(0, R)$ se tiene que

$$R^n w_n = m(B(0, R)) \geqslant P_\delta(B(0, R))\delta^n w_n$$

con w_n la medida de la bola unitaria, por lo que $P_\delta(B(0, R))\delta^n \leqslant c$ con c una constante, de donde se obtiene lo pedido.

□

Lema 2.1.12. *En el cálculo de las dimensiones superior e inferior de Minkowski basta considerar el límite a lo largo de una sucesión $\delta_k \to 0$ tal que existe $c \in (0, 1)$ con $\delta_{k+1} \geqslant c\delta_k$.*

Demostración. Para demostrar esto basta notar que , si $\delta > 0$ cumple que $\delta_{k+1} \leqslant \delta < \delta_k$, entonces se tienen las desigualdades:

$$\frac{log(N_\delta(E))}{-log(\delta)} \leqslant \frac{log(N_{\delta_{k+1}}(E))}{-log(\delta_k)} \leqslant \frac{log(N_{\delta_{k+1}}(E))}{-log(\delta_{k+1}) + log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leqslant \frac{log(N_{\delta_{k+1}}(E))}{-log(\delta_{k+1}) + log(c)}$$

Por lo que:

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{log(N_\delta(E))}{-log(\delta)} \leqslant \limsup_{k\to\infty}\frac{log(N_{\delta_k}(E))}{-log(\delta_k)}.$$

□

Es común utilizar este lema para calcular dimensiones Box, ya que suele ser más cómodo trabajar a veces con ciertas sucesiones específicas (En la sección de ejemplos de este capítulo se paplicará este lema para un subconjunto de $\mathbb{R}^2$).

Entonces, se busca una igualdad con la dimensión de Minkowski similar a (2.2):

Teorema 2.1.13. *Se tienen las siguientes igualdades:*

- $\underline{\dim}_B(E) = inf\,\{s : \liminf\, N_\delta(E)\delta^s = 0\}$.
- $\overline{\dim}_B(E) = inf\,\{s : \limsup\, N_\delta(E)\delta^s = 0\}$.

Demostración. Se puede demostrar por ejemplo lo primero, para dar una idea de cómo se puede proceder en el otro ítem: Por un lado, si $s < \underline{\dim}_B(E)$, es claro que para δ sufientemente chico se tiene que $N_\delta(E)\delta^s > 1$, por lo que se tiene la desigualdad $\leqslant$. Para la otra, suponer por absurdo que existen unos s, t tales que

$$\underline{\dim}_B(E) < s < t < \inf\{s : \liminf\, N_\delta(E)\delta^s = 0\}\,.$$

Por definición, esto implica la existencia de unos $\delta_k \to 0$ tales que $\frac{log(N_{\delta_k})}{-log(\delta_k)} < s$, por lo que $N_{\delta_k}\delta_k^s < 1$. Además, se tiene que $\liminf\, N_\delta \cdot \delta^t > 0$, de modo que, para δ suficientemente chico, se puede dar una constante c tal que $N_\delta \cdot \delta^t > c$ por lo que $N_\delta\delta^s > c \cdot \delta^{s-t} \to \infty$, de donde se deduce que, para δ suficientemente chico, $N_\delta \cdot \delta^s > 1$, lo que es absurdo por la existencia de los δ_k. □

Corolario 2.1.14. *Se tienen las siguientes igualdades:*

$$\underline{\dim}_B(E) = \inf\left\{ s \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \{U_i\} \textit{ cubrimiento de } E \\ \textit{con } |U_i| = |U_j|\, \forall i, j\,, \sum |U_i|^s < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

$$\overline{\dim}_B(E) = \inf\left\{ s \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_0 > 0 \textit{ tal que } \forall\, 0 < \delta \leqslant \delta_0\, \exists\, \{U_i\} \textit{ cubriminento de } E \\ \textit{con } |U_i| = |U_j| = \delta\, \forall i, j\ \textit{, y } \sum |U_i|^s < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Corolario 2.1.15.

$$\dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}_B(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E). \tag{2.4}$$

Demostración. se deducen directamente de (2.2) y el corolario anterior. □

Las dimensiones Box no tienen la propiedad de estabilidad numerable (aunque la superior es finitamente estable), como se deduce del siguiente resultado, con $E = \mathbb{Q}$:

Corolario 2.1.16. $\underline{\dim}_B(E) = \underline{\dim}_B(\overline{E})$, $\overline{\dim}_B(E) = \overline{\dim}_B(\overline{E})$.

Demostración. Esto se puede demostrar directamente notando que los cubrimientos que se consideran en el Corolario 2.1.14 son finitos, y que tomar clausura no afecta el diámetro de un subconjunto. □

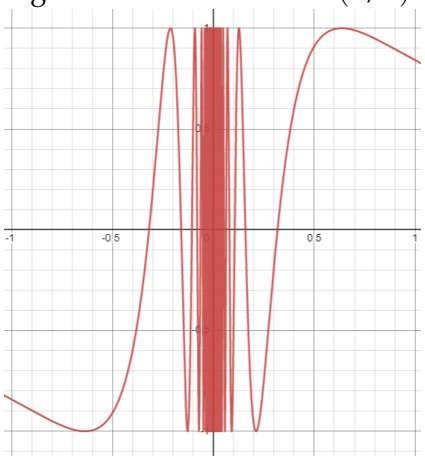
De los corolarios mencionados se deduce que la diferencia fundamental entre las dimensiones Hausdorff y Box consiste en cómo se consideran ciertos cubrimientos, concretamente si se consideran o no restricciones respecto de los diámetros de los miembros del cubrimiento. Aunque parezca una diferencia menor, ocurre que esta rstricción adicional mencionada tiene como consecuencia que subconjutos "concentrados" puedan llegar a tener dimensiones H y B distintas, como se verá en el primero de los ejemplos de la próxima sección.

2.2. Un par de ejemplos

2.2.1. El gráfico de $\operatorname{sen}(1/x)$

Un ejemplo típico donde ocurre esta "concentración" mencionada anteriormente es el del gráfico G de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, con $x \in (0,1]$, como se puede apreciar en la imagen de la derecha. Este comportamiento resulta en que las dimensiones H y B sean diferentes.

Figura 2.1: Gráfico de $\operatorname{sen}(1/x)$.



Lema 2.2.1. $\dim_H(G) = 1$.

Demostración. Este resultado se deduce directamente de notar que se puede expresar G como la unión numerable de porciones de curvas que tienen dimensión igual a 1 por el Corolario 2.1.9 y la estabilidad numerable de dim_H (por ejemplo, particionando a G en los subconjuntos $G_0 := gr\left(f_{|_{\left[\frac{1}{\pi},1\right]}}\right)$, $G_k := gr(f_k)$, con f_k la restricción de f al intervalo $\left[\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right]$, siendo sus extremos ceros de f).

□

Ahora, para la dimensión Box, lo que se hace es acotar apropiadamente $N_\delta(\overline{G})$, partiendo en conjunto en dos partes, una con la parte"concentrada":

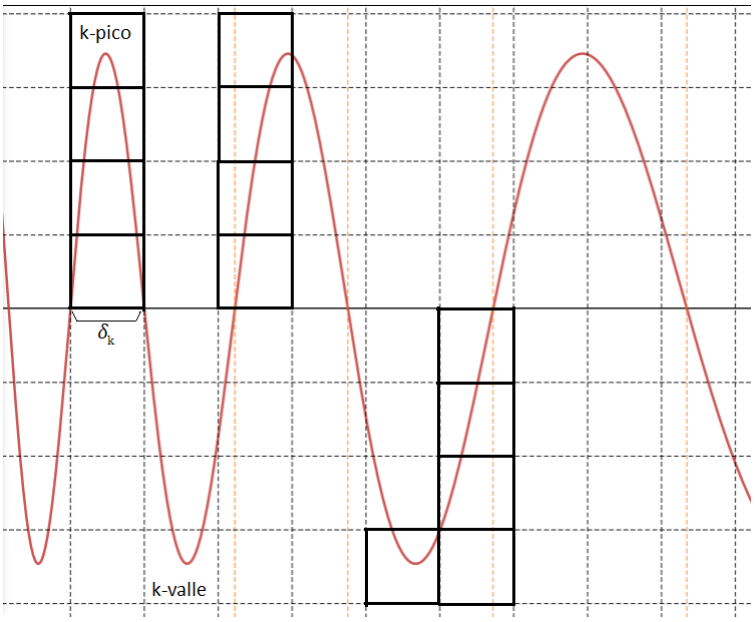
Lema 2.2.2. $\underline{\dim}_B(G) = \overline{\dim}_B(G) = \frac{3}{2}$.

Demostración. Para dar la dimensión box se endenderá a N_δ como la cantidad de δ-cubos que intersecan a G, que es una de las equivalencias mencionadas. Se busca la dimensión de $\overline{G}$, que coincide con la de G.

Entonces, por el Lema 2.1.12, para calcular las dimensiones Box alcanza con considerar los límites superior e inferior sobre sucesiones que cumplan la propiedad mencionada. Se debe notar en primer lugar que los ceros de f son de la forma $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$. Se consideran:

$$\delta_k := \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{(2k+1)\,\pi} = \frac{1}{2k(2k+1)\pi},$$

que es la distancia entre el $2k$-ésimo cero y el siguiente cero, que forman una sucesón que cumple lo requerido antes, ya que al escribir la condición $\delta_{k+1} \geqslant c\delta_k$, $c = 1/4$ sirve. Entonces, una cota inferior para $N_{\delta_k}(\overline{G})$ es $\frac{k}{\delta_k}$. Una forma simple de verificar esto se puede dar con el siguiente dibujo:



Concretamente, se puede particionar a la curva original en una unión numerable de curvas, estando cada una definida por la restricción de f a un segmento cuyos extremos sean dos ceros consecutivos de f. Estas curvas se pueden clasificar en dos "tipos": "pico" si contiene un máximo local e f, y "valle" de lo contrario. Entonces, para un δ_k se puede considerar el pico o valle definido en el intervalo $[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}]$. Para facilitar la idea, supóngase que es un pico como en la imagen. Se lo puede llamar "k-pico". Entonces, la cota inferior mencionada se puede obtener de la siguiente forma:

Hay un total de k picos a la derecha del k-pico (contando a este también). Pero, para el k-pico uno puede considerar los δ_k-cubos como en la imagen (alineados verticalmente). A su vez, uno pude tomar los δ_k-cubos que cubren a la "rama" izquierda del $(k-1)$-pico, y para $k-2$ se pueden tomar los que cubran la "rama" derecha del $(k-1)$-valle. Para $k-3$, se pueden considerar los que cubran la rama izquierda del $k-3$, y así sucesivamente (esto se hace principalmente para evitar que eventualmente se pueda llegar a contar un mismo cubo dos veces).

Cada "tira" de cubos que se aporta de esta forma tiene cardinal mayor-igual que $1 + \left\lfloor \frac{1}{\delta_k} \right\rfloor \geqslant \frac{1}{\delta_k}$, y como hay k tiras de este tipo se obtiene la cota.

Para una cota superior, se pueden definir primero $G_1 := \left\{(x,y) \in \overline{G} : x \leqslant \frac{1}{(2k+1)\pi}\right\}$ y $G_2 := \left\{(x,y) \in \overline{G} : x \geqslant \frac{1}{(2k+1)\pi}\right\}$ (G_1 es la porción de $\overline{G}$ que contiene la parte "concentrada" de $\overline{G}$), de modo que:

$$N_{\delta_k}(\overline{G}) \leqslant N_{\delta_k}(G_1) + N_{\delta_k}(G_2)$$

(va un $\leqslant$ porque al dividir a $\overline{G}$ en los dos subconjuntos ya definidos, puede que se estén contando ciertos cubos tanto en $N_{\delta_k}(G_1)$ como en $N_{\delta_k}(G_2)$). Ahora, se deben acotar estos dos términos:

Para $N_{\delta_k}(G_1)$: Cubriendo el intervalo $\left[0, \frac{1}{(2k+1)\pi}\right] \times [-1,1]$, que contiene a G_1, se obtiene que:

$$N_{\delta_k}(G_1) \leqslant (2k+2)\left(\frac{2}{\delta_k} + 2\right) \leqslant 2^7 k^3$$

para k suficientemente grande (ya que es menor-igual que $2^6k^3 + (2^5 + 2^6)k^2 + (4 + 2^5)k + 4$, y los últimos términos se pueden acotar por 2^6k^3 para k suficientemente grande).

Para acotar la otra cantidad, se puede utilizar el siguiente lema:

Lema 2.2.3. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, la cantidad de δ-cubos que intersecan al gráfico de g se puede acotar superiormente por:*

$$2\frac{b-a}{\delta} + 4 + \frac{1}{\delta}\left|f(b) - f(a)\right|.$$

Demostración. Si se consideran los δ-cubos en la columna correspondiente al intervalo $[m\delta, (m+1)\delta]$, a lo sumo $2 + \frac{1}{\delta}\left|g(m\delta) - g((m+1)\delta)\right|$ intersecan al gráfico de g, y como se pueden tomar $\frac{b-a}{\delta} + 2$ de tales intervalos a lo sumo, sumando sobre todos esos intervalos se obtiene la cota buscada. □

Ahora, con este lema en mente, se debe notar que se puede descomponer a G_2 en una unión finita de gráficos de funciones monótonas que son las restricciones de f sobre los $4k+2$ intervalos:

$$\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{2}{(4k+1)\pi}\right], \left[\frac{2}{(4k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right], \ldots, \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right], \left[\frac{1}{\pi}, 1\right].$$

Por lo que, aplicando la cota del lema, se tiene que:

$$N_{\delta_k}(G_2) \leqslant \frac{2}{\delta_k} + 4\,(4k+2) + \frac{4k+2}{\delta_k} \leqslant 2^7 k^3,$$

para k suficientemente grande (el término $2/\delta_k$ aparece porque la expresión $b-a$ del lema se traduce como la longitud de intervalos no rampantes contenidos en el intervalo unidad).

Combinando todo lo obtenido, se deduce que $k^3 \leqslant \frac{k}{\delta_k} \leqslant N_{\delta_k}(\overline{G}) \leqslant 2^8 k^3$, de donde se obtienen las desigualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{log\left(k^3\right)}{log(1/\delta_k)} &\leqslant \frac{log(N_{\delta_k}\left(\overline{G}\right))}{log(1/\delta_k)} \leqslant \frac{log(2^8 k^3)}{log(1/\delta_k)} \\
\frac{log\left(k^3\right)}{log(2^5 k^2)} &\leqslant \frac{log(N_{\delta_k}\left(\overline{G}\right))}{log(1/\delta_k)} \leqslant \frac{log(2^8 k^3)}{log(k^2)} \quad (k \geqslant 2) \\
\frac{3log(k)}{5log(2) + 2log(k)} &\leqslant \frac{log(N_{\delta_k}\left(\overline{G}\right))}{log(1/\delta_k)} \leqslant \frac{8log(2) + 3log(k)}{2log(k)}.
\end{aligned}$$

Pero las expresiones de la derecha e izquierda de la última desigualdad tienden a $3/2$, de modo que el límite que define la dimensión de Minkowski existe, y es:

$$\dim_B(G) = \dim_B(\overline{G}) = \lim_{k\to\infty} \frac{log(N_{\delta_k}\left(\overline{G}\right))}{log(1/\delta_k)} = \frac{3}{2}.$$

□

2.2.2. Bedford-McMullen carpets

Atractores

Antes de hablar sobre los subconjuntos de esta subsección, conviene hacer un repaso breve sobre atractores de sistemas iterados de funciones. Una buena parte de los fractales"conocidos"(como el conjunto ternario de Cantor) se pueden entender como atractores para ciertos sistemas de funciones (incluyendo los subconjuntos que se quieren estudiar en esta subsección), como se verá a continuación. Las demostraciones de los resultados se pueden consultar en [Fal14].

En primer lugar, sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $E \subseteq X$ y cada ε se puede definir el ε-entorno de E como:

$$E_\varepsilon := \bigcup_{x \in E} \{ z \in X, d(x,z) \leqslant \varepsilon \}.$$

Se recuerda también que se define una **c-contracción** como una función $f : X \to Y$ c-Lipschitz con $c < 1$. A su vez, se dice que f es una similaridad si en la definición anterior s tiene además una igualdad: o sea si existe $0 < c < 1$ tal que:
$d(f(x), f(y)) = c \cdot d(x,y)$, $x, y \in X$.

Ahora, para espacios métricos generalmente se define la distancia entre dos subconjuntos E, F como el infímo de las distancias $d(e, f)$ con $e \in E, f \in F$. Sin embargo, esta definición tiene una desventaja importante: pueden existir elementos de un subconjunto a distancia "grande" del otro subconjunto, incluso si la distancia entre los subconjuntos es "chica". Para remediar esto, se puede considerar la familia H_X de los subconjuntos compactos no vacíos de X, y se define la siguiente distancia en H_X:

$$\delta(A, B) := \text{ínf} \{ \epsilon \geqslant 0 : A \subseteq (B)_\epsilon, B \subseteq (A)_\epsilon \}.$$

Esta distancia posee un par de propiedades interesantes:

- $\delta\left(\bigcup_1^n A_i, \bigcup_1^n B_i\right) \leqslant \text{máx}\{\delta(A_i, B_i)\}$, y si $w : X \to X$ es una contracción con constante $c < 1$, entonces $\delta\left(w(A), w(B)\right) \leqslant c \cdot \delta\left(A, B\right)$.
- Si el espacio X es competo, entonces H_X es completo con δ (en realidad, se puede demostrar también que si X es totalmente acotado entonces H_X también, por lo que se concluye que si X es compacto entonces H_X también).

Ahora, sean $w_i : X \to X$, $i = 1, ..., n$ unas c_i-contracciones (a la familia de contracciones tambiénse la suele llamar **IFS**-iterated function system en inglés). Se define la función $W : H_X \to H_X$ como:

$$W(K) := \bigcup_1^n w_i\left(K\right). \tag{2.5}$$

Pero, no es complicado verificar que esta nueva función es también una contracción:

$$\delta\left(W(a), W(b)\right) = \delta\left(\bigcup_1^n w_i(A), \bigcup_1^n w_i(B)\right) \leqslant \text{máx}\left\{\delta\left(w_i(A), w_i(B)\right)\right\} \leqslant \text{máx}\left\{c_i\right\} \cdot \delta(A, B).$$

Por lo tanto, se obtiene de forma directa el siguiente resultado, usando el teorema del punto fijo de Banach:

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio completo y $w_1, \ldots, w_n$ contracciones. Entonces, la función W definida anteriormente es una contracción, y posee un único punto fijo A. Además, para todo $K_0 \in H_X$, $(W^{(n)}(K_0))_\mathbb{N}$ converge a A y, si $c :=$ máx $\{ c_i \}$:*

$$\delta(A, W^{(n)}(K_0)) \leqslant \frac{c^n}{1-c} \delta(K_0, W(K_0)).$$

A este punto fijo A se lo suele llamar **atractor** de la familia $\{ w_i \}$.

Observación 2.2.5. Se puede concluir con lo anterior que para cualquier K_0 tal que $w_i(K_0) \subseteq K_0$ se tiene que:

$$A = \bigcap_\mathbb{N} W^{(n)}(K_0).$$

Esto permite pasar ciertos problemas de A a un espacio de sucesiones.

Observación 2.2.6. Se puede ver también que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo K_0,

$$W^{(n)}(K_0) = \bigcup_{I_k} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}(E),$$

con $I_k = \{ (i_1, \cdots, i_k) : 1 \leqslant i_j \leqslant n \}$. Por lo tanto, si $w_i(K_0) \subseteq K_0$ para todo i y $x \in A$, existe entonces una sucesión $(i_1, i_2, \cdots)$ tal que:

$$x = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}(E).$$

Se puede ver sin complicaciones que el conjunto ternario de Cantor y el triángulo de Sierpinski son ejemplos de atractores.

Para terminar con este repaso, se menciona un resultado sobre las dimensiones de atractores con cierta propiedad adicional:

Definición 2.2.7. una familia de contracciones $w_1, \ldots, w_n$ cumple la **condición de conjunto abierto** si existe un abierto acotado V tal que los $w_i(V)$ son disjuntos dos a dos y $\bigcup w_i(V) \subseteq V$.

Teorema 2.2.8. *Sean w_i similaridades en $\mathbb{R}^n$ con la condición de conjunto abierto (con constantes $0 < c_i < 1$), y sea A su atractor. Entonces,* $\dim_H(A) = \overline{\dim}_B(A) = \underline{\dim}_B(A) = s$, *donde s es la solución de:*

$$\sum_i c_i^s = 1.$$

Para una demostración, ver [Fal14]

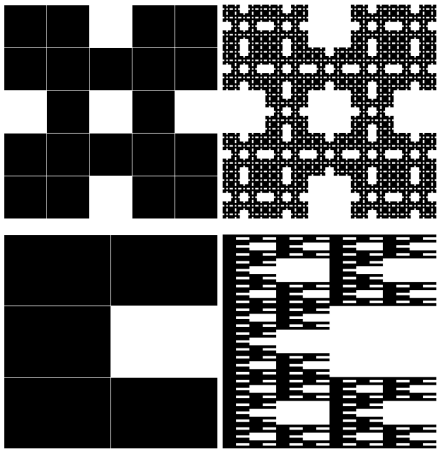
Las "Bedford-McMullen carpets"(o **alfombras de Bedford McMullen**) se definen entonces como el atractor de un IFS en $\mathbb{R}^2$, utilizando el teorema de Hutchinson para garantizar su existencia y unicidad. Estos subconjuntos resultan interesantes no tanto por una "concentración" sino porque su geometría es lo que llevó a los autores originales de los papers de dimensiones intermedias a considerar esos conceptos. Para esta sección se siguen las demostraciones de [McM84].

Sean $n \geqslant m$ y $R \subseteq \{(i,j) : i \in \{0, ..., n-1\}, j \in \{0, ..., m-1\}\}$. Se pueden definir, para cada $(i,j) \in R$, unas funciones $S_{i,j} : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ definidas por $S_{i,j}(x,y) = (\frac{x+i}{n}, \frac{y+j}{m})$. Entonces, por el teorema mencionado, existe un único compacto $\widetilde{R}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\widetilde{R} := \bigcup_{(i,j) \in R} S_{i,j}(\widetilde{R}).$$

Otra forma de definir $\widetilde{R}$ sería: $\widetilde{R} = \left\{ (\sum_{\mathbb{N}} \frac{x_k}{n^k}, \sum_{\mathbb{N}} \frac{y_k}{m^k}) : (x_k, y_k) \in R \right\}$. A la familia de las funciones $S_{i,j}$ también se las puede denotar $\{ S_i \}_{i=0,\ldots,r-1}$ con r el cardinal de R.

Observación 2.2.9. Cuando $n = m$ se tienen similaridades, y en consecuencia se obtiene $\dim_H(\widetilde{R}) = \dim_B(\widetilde{R}) = s$, con s tal que $\frac{r}{m^s} = 1$ y $r = card(R)$, por lo que $s = log_m(r)$.



Dos ejemplos de alfombras, la primera con rectángulos iguales y la segunda con distintas.

Para el siguiente teorema se siguen las demostraciones de [McM84].

Proposición 2.2.10. *Sean* $t_j := \#\{i : (i,j) \in R\}$ *y* $s = \#\{j : (i,j) \in R$ *para algún* $i\}$. *Entonces, si* $\widetilde{R}$ *es el conjunto definido recién, se tienen las igualdades:*

$$\dim_H(\widetilde{R}) = log_m(\sum_{j=0}^{m-1} t_j^{log_n(m)}). \tag{2.6}$$

$$\dim_B(\widetilde{R}) = log_m(s) + log_n\left(\frac{r}{s}\right). \tag{2.7}$$

Demostración. La idea de la demostración consiste esencialmente en ver primero que es posible considerar sólo cubrimientos dados por cierto tipo de intervalos en $\mathbb{R}^2$, y pasar el problema a un espacio de sucesiones:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $l := \lfloor k \cdot \log_n(m) \rfloor$, por lo que l cumple que $n^l \leqslant m^k < n^{l+1}$, o sea que $1 \leqslant m^k/n^l < n$. Entonces, para $k \in \mathbb{N}$, $p \in \{0, \ldots, n^l - 1\}$, $q \in \{0, \ldots, m^k - 1\}$ se puede definir un intervalo en $\mathbb{R}^s$ por:

$$R_k(p,q) = \left[\frac{p}{n^l}, \frac{p+1}{n^l}\right] \times \left[\frac{q}{m^k}, \frac{q+1}{m^k}\right]. \tag{2.8}$$

Sea $d := log_m(\sum_{j=0}^{m-1} t_j^{log_n(m)})$, y para cada cubrimiento $C = \{R_k(p,q)\}$ por rectángulos de la forma (2.8) sea N_k la cantidad de rectángulos $R_{\widetilde{k}}(p,q) \in C$ con $\widetilde{k} = k$.

Se tiene el siguiente lema:

Lema 2.2.11. $\mathcal{H}^d(\widetilde{R}) = 0$ *si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* C *cubrimiento de* $\widetilde{R}$ *por intervalos de la forma* (2.8) *tal que* $\sum N_k m^{-dk} < \varepsilon$.

Demostración. En primer lugar, no es dificil notar que:

$$\frac{1}{m^k} \leqslant \frac{1}{n^l} \leqslant |R_k(p,q)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n^l} \leqslant n\sqrt{2}\frac{1}{m^k},$$

de modo que $|R_k(p,q)| \simeq m^{-k}$, de donde se deduce lo pedido notando que todo subconjunto acotado de $[0,1]^2$ se puede cubrir con una cantidad fija de intervalos de la forma $R_k(p,q)$ con diámetro más chico. Una forma intuitiva de verificar esto se puede dar visualizando los intervalos $R_k(p,q)$, notando que esencialmente lo que se hace es "dividir" al cuadrado en grillas con longitudes distintas en cada coordenada. □

Ahora, para pasar todo a un espacio de sucesiones, se puede reescribir R como $R = \{ (x_i, y_i) \}_{0,\dots,r-1}$, y definir:

$$S_r := \{ 0, 1, \dots, r-1 \}^{\mathbb{N}} = \prod_{\mathbb{N}} \{ 0, 1, \dots, r-1 \},$$

de modo que la función ψ definida a continuación es sobreyectiva:

$$\psi(i_1, i_2, \dots) = (\sum_k x_{i_k}/n^k, \sum_k y_{i_k}/m^k) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}([0,1]^2).$$

Ahora, para entender este problema en el espacio de sucesiones hace falta definir unos subconjuntos análogos a los $R_k(p,q)$. Con este objetivo en mente, sean $k \in \mathbb{N}$, $l = \lfloor k \log_n(m) \rfloor \leqslant k$, $p = \sum_1^l \tilde{x}_j n^{l-j}$ con $\tilde{x}_j \in \{ 0, \dots, n \}$, y $q = \sum_1^k \tilde{y}_j m^{k-j}$ con $\tilde{y}_j \in \{ 0, \dots, m \}$. Entonces, se definen:

$$A_k(p,q) := \{ (i_1, \dots, i_k) : x_{i_j} = \tilde{x}_j \text{ para } j = 1, \dots, l \ , y_{i_j} = \tilde{y}_j \text{ para } j = 1, \dots, k \ \}.$$

$$B_k := \prod_{k+1}^{\infty} \{ 0, 1, \dots, r-1 \}.$$

los subconjuntos $A_k(p,q) \times B_k$ son "análogos" a los $R_k(p,q)$ porque se tienen las siguientes contenciones (donde la unión de la última expresión se toma sobre $\{ 0, 1 \}$ si $p = 0$ o $q = 0$ y análogamente para los casos donde $p = n^l - 1$ o $q = m^k - 1$ – en otras palabras, la unión se toma sobre los $i, j = 1, 0, -1$ donde tenga sentido tomarlos):

$$A_k(p,q) \times B_k \subseteq \psi^{-1}(R_k(p,q)) \subseteq \bigcup_{i,j=1,0,-1} A_k(p+i, q+j) \times B_k. \tag{2.9}$$

Análogamente a lo del Lema 2.2.11, se pueden considerar cubrimientos de S_r de la forma $C = \{ A_k(p,q) \times B_k \}$, y asociar a cada $k \in \mathbb{N}$ un N_k que es la cantidad de elementos $A_{k'}(p,q) \times B_{k'}$ del cubrimiento con $k' = k$. Entonces, por el Lema 2.2.11 y (2.9) se tiene:

Lema 2.2.12. *$\mathcal{H}^d(\widetilde{R}) = 0$ si y solo si $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, C = \{ A_k(p,q) \times B_k \}$ cubrimiento de S_r con $\sum N_k m^{-dk} < \varepsilon$.*

Ahora, se definirá una medida sobre S_r y se verá su relación con $\mathcal{H}^d(\widetilde{R})$:

Para $i = 0, \dots, r-1$, sean $a_i := \#\{ j : y_i = y_j \}$ y $a := \text{máx}\{ a_i \}$, de modo que para todo $(i_1, \dots, i_k) \in A_k(p,q)$ se tiene que:

$$\#A_k(p,q) = a_{i_{l+1}} \cdot a_{i_{l+2}} \dots a_{i_k}.$$

Ahora, tampoco es dificil verificar que:

$$m^d = \sum_0^{r-1} a_i^{\log_n(m)-1}$$

(para esto, conviene visualizar R como una grilla en $\mathbb{R}^2$ y notar que varios a_i con iguales entre sí y coinciden con los t_j de antes - sumar sobre los a_i es "como sumar sobre los t_j pero con repeticiones").

Se pueden definir entonces $b_i := a_i^{\log_n(m)-1}/m^d$, de modo que $\sum b_i = 1$. Entonces, por el teorema de consistencia de Kolmogorov, existe una (única) medida de probabilidad μ en $B(S_r)$ - la familia de los Borel de S_r con la topología producto - tal que, para todo $(i_1, \dots, i_k)$ se tiene:

$$\mu((i_1, \dots, i_k) \times B_k) = b_{i_1} \cdot b_{i_2} \dots b_{i_k},$$

y se pueden definir unas funciones $f_k : S_r \to \mathbb{R}$ por:

$$f_k(i_1, i_2, \dots) = \left(\frac{(a_{i_1} \dots a_{i_k})^{\log_n(m)}}{a_{i_1} \dots a_{i_l}} \right)^{1/k}.$$

Estas funciones van a permitir entender mejor la relación entre la medida μ y $\mathcal{H}^d(\widetilde{R})$, mediante los siguientes dos lemas:

Lema 2.2.13. *Si $z \in A_k(p,q) \times B_k$, entonces:*

$$\mu(A_k(p,q) \times B_k) = (f_k(z) m^{-d})^k.$$

Demostración. Teniendo en cuenta la defininición de μ (que se sabe lo que mide μ en conjuntos de la forma $(i_1, \dots i_k) \times B_k$) se puede usar (2.2.2) de determinada forma para dar $\mu(A_k(p,q) \times B_k)$:

Sea $(i_1, \dots, i_k) \in A_k(p,q)$, y $(s_1, \dots, s_k) := (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Pero, observando que por definición se tiene que $y_{i_j} = \widetilde{y}_j \, \forall \, j \leqslant k$, se puede ver que la tupla $(s_1, \dots, s_k)$ es independiente de la elección del elemento $(i_1, \dots, i_k) \in A_k(p,q)$, y en particular,

$$\mu((i_1, \dots, i_k) \times B_k) = \frac{(s_1 \dots s_k)^{\log_n(m)}}{s_1 \dots s_k} m^{-dk}.$$

Pero, por (2.2.2), se tiene que $\#A_k(p,q) = s_{l+1} \dots s_k$, por lo que:

$$\mu(A_k(p,q) \times B_k) = \frac{(s_1 \dots s_k)^{\log_n(m)}}{s_1 \dots s_l} m^{-dk} = (f_k(z) m^{-d})^k.$$

□

Con este lema en mente, se busca que $f_k \to 1$ en μ-casi todo punto, porque junto con el lema anterior esto permitirá comparar sumas de la forma $\sum N_k m^{-dk}$ con sumas $\sum \mu(A_k(p,q) \times B_k)$:

Lema 2.2.14. *Para las f_k definidas anteriormente se tienen las siguientes propiedades:*

- $\limsup_{k \to \infty} f_k(z) \geqslant 1 \, \forall \, z \in S_r$.
- $\lim_{k \to \infty} f_k(z) = 1$ *para μ-casi todo $z \in S_r$.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [McM84].La demostración en sí consiste en definir unas funciones $g_k, h_k : S_r \to \mathbb{R}$ por:

$$g_k(i_1, \dots) = \frac{(a_{i_1} \dots a_{i_k})^{1/k}}{(a_{i_1} \dots a_{i_l})^{1/l}}, \; h_k(i_1, \dots) = (a_{i_1} \dots a_{i_l})^{(1/l)(\log_n(m) - l/k)}.$$

Entonces, $f_k(z) = h_k(z) \cdot g_k(z)^{\log_n(m)}$, y en la fuente citada se demuestra que:

$$h_k(z) \to 1 \, \forall \, z \in S_r \, , \, \limsup g_k(z) \geqslant 1 \, \forall \, z \in S_r \, , \, g_k(z) \to 1 \; \mu - \text{ ctp}.$$

□

Con todo esto en mente, se puede finalmente demostrar que $\dim_H(\widetilde{R}) = d$. Se verán las desigualdades $\leqslant$ y $\geqslant$ por separado:

- $\dim_H(\widetilde{R}) \leqslant d$: Sea $\varepsilon > 0$. Para esta desigualdad se dará un cubrimiento de S_r para poder utilizar el Lema 2.2.12. Para cada k se puede definir C_k como la familia de los subconjuntos de la forma $A_k(p,q) \times B_k \neq \varnothing$ tales que:

$$f_k(z) > m^{-\varepsilon} \, \forall \, z \in A_k(p,q) \times B_k.$$

Estos subconjuntos son disjuntos entre sí por definición, y además cumplen por el Lema 2.2.13 que:

$$\mu(A_k(p,q) \times B_k) > m^{-(d+\varepsilon)k}.$$

Pero, por cómo se tomó μ se tiene que $\mu(S_r) = 1$, y como los $A_k(p,q) \times B_k$ son Borel se puede usar σ-aditividad para concluir que $M_k := \#C_k < m^{(d+\varepsilon)k}$.

Ahora, por el Lema 2.2.14 se tiene que para todo $z \in S_r$, $\limsup f_k(z) \geqslant 1 > m^{-\varepsilon}$, por lo que C_k cubre z para infinitos k. De este modo, si se toma K suficientemente grande tal que $\sum_{k \geqslant K} m^{-\varepsilon k} < \varepsilon$, se deduce que la familia $C := \bigcup_{k \geqslant K} C_k$ es un cubrimiento de S_r. REecordando la definición de los N_k asociados a C, se tiene entonces que:

$$\sum N_k m^{-(d+2\varepsilon)k} = \sum_{k \geqslant K} M_k m^{-(d+2\varepsilon)k} < \sum_{k \geqslant K} m^{-\varepsilon k} < \varepsilon.$$

Con el Lema 2.2.12, se deduce que $\dim_H(\widetilde{R}) \leqslant d$ (en realidad, en el lema mencionado figura m^{-dk} en vez de $m^{-(d+2\varepsilon)k}$, pero estono causa ningún inconveniente porque los Lemas 2.2.11 y 2.2.12 no utilizan nada especial de d, por lo que se puede utilizar para demostrar que $\dim_H(\widetilde{R}) \leqslant d + 2\varepsilon'$ para todo $\varepsilon' > 0$).

- $\dim_H(\widetilde{R}) \geqslant \delta$: Sea $\beta < d$. Se verá entonces que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo cubrimiento C de S_r, vale que $\sum N_k m^{-\beta k} > \varepsilon$, de donde se deduce lo pedido usando el Lema 2.2.12 (recordando la última observación del ítem anterior, de que el lema vale para β también).

Sean $E_k := \{ z \in S_r : f_k(z) < m^{d-\beta} \, \forall \, k' \geqslant k \}$. Como $f_k \to 1$ enc asi todo punto y $m^{d-\beta} > 1$, se deduce que existe un K tal que $\mu(E_K) > 0$. Se define entonces:

$$\varepsilon := \text{mín} \{ \mu(E_K), m^{-\beta K} \}.$$

Para verificar que este $\varepsilon > 0$ sirve, sea C un cubrimiento cualquiera de S_r. Si $N_k \neq 0$ para algún $k < K$, entonces:

$$\sum N_k m^{-\beta k} > m^{-\beta K} > \varepsilon,$$

de modo que se puede suponer que $N_k = 0$ para todo $k < K$. Entonces, para los elementos de C tales que $A_k(p,q) \times B_k \cap E_K \neq \varnothing$, se tiene que:

$$\mu(A_k(p,q) \times B_k) = (f_k(z) m^{-d})^k < (m^{d-\beta} m^{-d})^k = m^{-\beta k}.$$

Como C cubre E_K, se tiene entonces que:

$$\sum N_k m^{-\beta k} > \mu(E_K) \geqslant \varepsilon,$$

de donde se deduce por el Lema 2.2.12 que $\mathcal{H}^\beta(\widetilde{R}) \neq 0$, y como esto vale para todo $\beta < d$, se deduce que $\dim_H(\widetilde{R}) \geqslant d$.

De este modo, se deduce que $\dim_H(\widetilde{R}) = d$.

Para dar la dimensión de Minkowski de $\widetilde{R}$, se debe acotar superior e inferiormente la expresión $N_{m^{-k}}(\widetilde{R})$, para concluir lo buscado utilizando el Lema 2.1.12. La idea de esta parte consiste entonces en demostrar que, tomando N_k como la cantidad de pares (p,q) tales que $R_k(p,q) \cap \widetilde{R} \neq \varnothing$, se tiene que $N_{m^{-k}}(\widetilde{R}) \simeq N_k$, o en otras palabras, que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que:

$$c_1 N_k \leqslant N_{m^{-k}}(\widetilde{R}) \leqslant c_2 N_k,$$

(la primera desigualdad se puede ver con mayor facilidad tomando $N_{m^{-k}}$ como el $P_{m^{-k}}$ de la observación 2.1.10) de modo que para dar las dimensiones Box de $\widetilde{R}$ se deben analizar los límites superior e inferior de $\log(N_k)/\log(m^k)$. Pero, N_k se puede entender como la cantidad posible de formas de tomar sucesiones $(x_i)_{1,\dots,l}, (y_i)_{1,\dots,k}$ tales que:

- $(x_i, y_i) \in R$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$.
- $(\widetilde{x}_i, y_i) \in R$ para todo $i \in \{l+1, \dots, k\}$ y algún $\widetilde{x}_i$.

De este modo, $N_k = r^l \cdot s^{k-l} = (r/s)^l \cdot s^k$, y se tiene entonces que:

$$\dim_B(\widetilde{R}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log((r/s)^l \cdot s^k)}{\log(m^k)} = \log_m(s) + \log_m\left(\frac{r}{s}\right)\log_n(m) = \log_m(s) + \log_n\left(\frac{r}{s}\right).$$

□

Observación 2.2.15. Por las expresiones de $\dim_H(\widetilde{R})$ y $\dim_B(\widetilde{R})$ se deduce que, si los t_j no nulos son todos iguales entre sí, entonces $\dim_H(\widetilde{R}) = \dim_B(\widetilde{R})$. A su vez, notar que si los t_j no nulos **no** son todos iguales, entonces $a = \text{máx}\{a_i\} \geqslant 2$.

Estas diferencias en las dimensiones ocasionan que uno se pregunte qué ocurriría si uno considera otras restricciones sobre los diámetros en el Corolario 2.1.14, lo que motiva las definiciones de las dimensiones intermedias.

2.3. Frostman

Antes de concluir este capítulo es conveniente repasar un par de resultados conocidos de medidas de Hausdorff, que tienen análogos para las dimensiones intermedias pero que se deben demostrar aparte. Estos son el "lema de distribución de masa" y el lema de Frostman, ambos muy importantes en este campo. Más adelante se demostrarán análogos para las dimensiones intermedias.

Lema 2.3.1. *(lema de distribución de masa) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y μ una medida exterior finita tal que $\mu(E) > 0$. Si existen $s, c \geqslant 0$, $\delta > 0$ tales que para todo subconjunto U con $|U| < \delta$ vale que: $\mu(U) \leqslant c.|U|^s$. Entonces, $\mathcal{H}^s(E) \geqslant \frac{\mu(E)}{c}$, por lo que $s \leqslant dim_H(E)$.*

Demostración. Para esto, basta con notar que, si $\{U_i\}$ es un cubrimiento de E tal que $|U_i| < \delta$, entoces:

$$\mu(E) \leqslant \sum \mu(U_i) \leqslant \sum c \cdot |U_i|^s.$$

tomando el ínfimo sobre todos los cubrimientos, se obtiene que $\mu(E) \leqslant c \cdot \mathcal{H}^s_\delta(E)$. □

Lema 2.3.2. *Sea μ una medida finita, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, y $0 < c < \infty$. Entonces:*

- *Si $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leqslant c \; \forall x \in E$, entonces $\mathcal{H}^s(E) \geqslant \frac{\mu(E)}{c}$.*

- $\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(b(x,r))}{r^s} > c \; \forall x \in E$, *entonces* $\mathcal{H}^s(E) \leqslant 2^s \frac{\mu(\mathbb{R}^n)}{c}$.

Demostración. Se puede encontrar una demostración en [Fal14].

□

Lema 2.3.3. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, con $0 < \mathcal{H}^s(E) \leqslant \infty$. Entonces, existe $K \subseteq E$ compacto tal que $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en [Mat99], teorema 8.19. □

Para concluir esta sección, se demostrará el "lema de Frostman". La idea será demostrar un caso particular primero, y después pasar al general usando el lema previo.

Proposición 2.3.4. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel con $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. Entonces, existen b y un compacto $F \subseteq E$ con $\mathcal{H}^s(F) > 0$, tales que:*

$$\mathcal{H}^s\left(F \cap B(x,r)\right) \leqslant b \cdot r^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Demostración. Sean $\mu(A) := \mathcal{H}^s(E \cap A)$ y $E_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))}{r^s} > 2^{s+1}\}$. Entonces, por 2.3.2, se tiene que:

$$\mathcal{H}^s(E_1) \leqslant 2^s 2^{-s-1}\mu(E) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^s(E),$$

de donde se obtiene que $\mathcal{H}^s(E - E_1) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{H}^s(E) > 0$, de modo que si $F_1 := E - E_1$ entonces $\mathcal{H}^s(F_1) > 0$ y

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{r^s} \leqslant 2^{1+s} \; \forall x \in F_1.$$

Por el teorema de Egorov, existen un $F \subseteq F_1$ compacto y un $r_0 > 0$ tales que:

$$\mathcal{H}^s(F) > 0 \, , \, \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(x,r))}{r^s} \leqslant 2^{2+s} \; \forall x \in F, \; \forall \, 0 < r < r_0.$$

Pero también se sabe que $\frac{\mathcal{H}^s(E\cap B(x,r))}{r^s} \leqslant \frac{\mathcal{H}^s(E)}{r_0^s}$ si $r \geqslant r_0$, por lo que vale lo pedido para todo $r > 0$.

□

Corolario 2.3.5. *(Lema de Frostman) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel con $0 < \mathcal{H}^s(E) \leqslant \infty$. Entonces, existen b y un compacto $F \subseteq E$ con $\mathcal{H}^s(F) > 0$, tales que:*

$$\mathcal{H}^s\left(F \cap B(x,r)\right) \leqslant b \cdot r^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Además, en este caso $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Demostración. Se deduce directamente de la proposición anterior y del Lema 2.3.3. □

Observación 2.3.6. Otra forma de expresar el lema de Frostman es la siguiente :

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, y:

$$\mathcal{M}(E) := \{\, \mu : \text{ medidas de Radón y de probabilidad con } sop(\mu) \subseteq E \text{ compacto } \}.$$

Entonces, $\mathcal{H}^s(E) > 0$ si y sólo si existen $\mu \in \mathcal{M}(E)$ y $c > 0$ tales que $\mu(B(x,r)) \leqslant c \cdot r^s$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

(se puede encontrar en [Mat99], donde también se da una demostración alternativa de este resultado)

De este modo, se pueden traducir problemas de dimensión en cuestiones sobre ciertas medidas. Esto resulta esencial a la hora de hablar sobre, por ejemplo, capacidades. En la siguiente sección se utilizará este resultado para establecer resultados varios.

2.4. Comentarios adicionales

2.4.1. Productos

Una pregunta muy natural que se puede hacer uno es qué ocurre al tomar productos de fractales, por ejemplo un producto entre dos conjuntos de Cantor, y si se puede dar su dimensión a partir de sus factores. El lema de Frostman permite demostrar un resultado básico en este sentido:

Proposición 2.4.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel. Entonces:*

- *Si $\mathcal{H}^s(A) > 0$ y $\mathcal{H}^t(B) > 0$, entonces $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$.*
- $\dim_H(A) + \dim_H(B) \leqslant \dim_H(A \times B) \leqslant \dim_H(A) + \overline{\dim}_B(B)$.

Demostración. Para demostrar lo primero, se utiliza el lema de Frostman: Por hipótesis, existen $\mu \in \mathcal{M}(A)$ y $\nu \in \mathcal{M}(B)$ tales que $\mu(B(x,r)) \leqslant c_1 r^s$ y $\mu(B(y,r)) \leqslant c_2 r^t$. Entonces, por propiedades de las medidas producto se puede concluir que $\mu \times \nu \in \mathcal{M}(A \times B)$ (o mejor dicho, que esta medida normalizada pertenece a $\mathcal{M}$) y que:

$$(\mu \times \nu)(B((x,y),r)) \leqslant (\mu \times \nu)(B(x,r) \times B(y,r)) \leqslant \mu(B(x,r)) \cdot \nu(B(y,r)) \leqslant c_1 c_2 r^{s+t}.$$

Pero entonces, por el lema de Frostman se deduce lo pedido.

Ahora, para el segundo apartado se ve que sólo hace falta verificar la segunda desigualdad, ya que la primera es inmediata del apartado anterior. Sean entonces s, t tales que $s > \dim_H(A)$, $t > \overline{\dim}_B(B)$, por lo que $\lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon(B)\varepsilon^t = 0$, y $\delta > 0$ tal que $N_\varepsilon(B)(2\varepsilon)^t < 1$ para todo $\varepsilon < \delta$. Por la elección de s se puede dar un cubrimiento $\{ E_i \}_{\mathbb{N}}$ de A tal que $0 < |E_i| \leqslant \delta/2$ y $\sum |E_i|^s < 1$. Pero entonces, para cada i se puede cubrir a B con N_i bolas $B_{i,j}$, $j \in \{1, \ldots, N_i\}$ de diámetro $|E_i|$, de tal forma que $N_i|E_i|^t < 1$. Pero, como los E_i son un cubrimiento de A, se tiene que los conjuntos $E_i \times B_{i,j}$ cubren $A \times B$. y don de diámetro no mayor que $2|E_i| \leqslant \delta$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathcal{H}^{s+t}_\delta(A \times B) \leqslant \sum_{i,j} |E_i \times B_{i,j}|^{s+t} \leqslant 2^{s+t} \sum_i |E_i|^s N_i |E_i|^t \leqslant 2^{s+t} \sum_i |E_i|^s < 2^{s+t},$$

de donde s obtiene que $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) < \infty$ y se obtiene la desigualdad buscada.

□

Como corolario directo, se deduce que si $\dim_H(B) = \overline{\dim}_B(B)$ entonces se tiene la igualdad $\dim_H(A \times B) = \dim_H(A) + \dim_H(B)$, por lo que se concluye una fórmula bastante elegante en este caso. Ejemplos de subconjuntos B que cumplen esto son los IFS de familias de similaridades con la "condición de conjunto abierto", por ejemplo el conjunto ternario de Cantor.

2.5. Proyecciones

2.5.1. Comentarios previos

Antes de poder hablar de medidas sobre Grassmannianos y los teoremas de proyecciones, se deben recordar varias definiciones y resultados previos. La mayor parte de lo desarrollado en esta sección se basa en la exposición de [Mat99], donde se pueden encontrar las demostraciones que no se escriban.

Definición 2.5.1. Una medida de Borel μ se dice **de Radón** si tiene las siguientes propiedades:

- $\mu(K) < \infty$ para todo K compacto.
- Para todo V abierto, $\mu(V) = \sup\{\, \mu(K) : K \subseteq V \text{ compacto} \,\}$.
- Para todo subconjunto E, $\mu(E) = \inf\{\, \mu(V) : E \subseteq V \text{ abierto} \,\}$.

Observación 2.5.2. Una medida μ sobre $\mathbb{R}^n$ es de Radón si y solo si es localmente finita y Borel regular.

También se necesita un resultado sobre la unicidad (salvo por un factor constante) de ciertas medidas sobre espacios métricos.

Definición 2.5.3. Sea μ una medida Borel regular sobre un espacio métrico X. Se dice que es **uniformemente distribuida** si cumple que:

$$0 < \mu(B(x,r)) = \mu(B(y,r)) < \infty \; (\forall\, x, y \in X\,,\; 0 < r < \infty)$$

Teorema 2.5.4. *Sea X un espacio separable y μ, ν dos medidas Borel regular uniformemente distribuidas. Entonces, existe una constante c tal que $\mu = c \cdot \nu$.*

Observación 2.5.5. Con esto se puede demostrar en particular que $\mathcal{H}^n = c \cdot \mathscr{L}^n$, con $\mathscr{L}^n$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.

Antes de seguir, se va a tener que dar un breve repaso sobre "image measures", o "medidas pushforward":

Definición 2.5.6. Sea μ una medida en X y $f : X \to Y$ una función. Se define la **medida pushforward** de μ como $f_\#\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))\,,\; E \subseteq Y$.

Ahora, si $f^{-1}(E)$ es μ-medible entonces E es $f_\#$-medible. Por lo tanto, si μ y f son Borel se deduce que $f_\#$ es Borel.

Lema 2.5.7. *Sean X, Y espacios métricos separables, $f : X \to Y$ continua, y μ una medida de Radón sobre X de soporte compacto. Entonces, $f_\#\mu$ es de Radón y $sop(f_\#\mu) \subseteq f(sop(\mu))$.*

Demostración. Se puede consultar en [Mat99] (Torema 1.18). □

También se tiene que hablar un poco sobre derivadas de medidas de Radón, concepto que se usa en 2.5.28. Como antes, para las demsotraciones se puede consultar [Mat99].

Definición 2.5.8. Sean μ, ν dos medidas Borel y localmente finitas en $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Se definen las **derivadas superior e inferior** de μ respecto de ν en x como:

$$\overline{D}(\mu,\nu,x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))}\,,\; \underline{D}(\mu,\nu,x) := \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))}$$

Si ambas expresiones coinciden se define la **derivada** $D(\mu,\nu,x)$ como ese valor.

Observación 2.5.9. Tanto $\overline{D}$ como $\underline{D}$ son Borel.

Teorema 2.5.10. *Sean ahora μ, ν de Radón. Entonces:*

- *La derivada $D(\mu,\nu,x)$ existe para ν-casi todo x.*
- *Para todo B Borel, $\int_B D(\mu,\nu,x)d\nu(x) \leqslant \mu(B)$, y vale la igualdad si $\mu \ll \nu$.*
- *$\mu \ll \nu$ si y solo si $\underline{D}(\mu,\nu,x) < \infty$ para μ-casi todo x.*
- *Si $\mu \ll \nu$, entonces $\int D(\mu,\nu,x)^2 d\nu(x) = \int D(\mu,\nu,x)d\mu(x)$.*

2.5.2. Medidas sobre familias de subespacios

Entre los resultados anteriores se demostró una proposición que relaciona las medidas de Hausdorff de un conjunto con las de su imagen por una transformación Lipschitz. Sin embargo, se puede decir bastante más cuando se consideran como funciones a las proyecciones a subespacios:

Antes de iniciar un estudio elemental sobre la relación entre las dimensiones introducidas y las proyecciones, se debe hablar un poco sobre medidas sobre Grassmannianos. Esto se debe a que para los teoremas de proyecciones se necesita formalizar la idea de que algo "vale para casi todo plano"(o con mayor generalidad, subespacio de dimensión m). Tener este "casi todo" es necesario ya que puede ocurrir que al considerar las proyecciones de un subconjunto, haya ciertos casos especiales donde no se cumpla cierta propiedad. Por ejemplo, si se considera una recta en $\mathbb{R}^2$, proyectar este subconjunto sobre otra recta devuelve esta última recta salvo que sean ortogonales.

Primero se tiene que definir una medida sobre el grupo de transformaciones ortogonales, usando un resultado sobre medidas invariantes:

Definición 2.5.11. Un grupo G con una topología se dice **grupo topológico** si cumple que es un espacio T_1 y la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua (equivalentemente, si tomar producto e inversa son funciones continuas).

Observación 2.5.12. Se puede demostrar que los grupos topológicos son de tipo T_2.

Definición 2.5.13. Una medida definida sobre un grupo G se dice **invariante**, si para todo $E \subseteq G$, vale que $\mu(E) = \mu(gE) = \mu(Eg)$.

Teorema 2.5.14. *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces existe una única medida de Radón μ invariante sobre G de probabilidad.*

A esta medida se la suele llamar **medida de Haar** de G.

Observación 2.5.15. La unicidad de la medida de Haar permite demostrar de forma simple ciertas igualdades, como la siguiente: $\mu(E) = \mu(\{ g^{-1} : g \in E \})$, ya que la expresión de la derecha tambíen define una medida invariante.

Ahora que ya se mencionaron un par de resultados preliminares se puede empezar a desarrollar el primer tema de esta sección. Sean $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las transformaciones lineales con la métrica usual, y $O(n)$ el subespacio de las transformaciones ortogonales. Una propiedad importante que se utilizará sobre $O(n)$ es que este subespacio actúa transitivamente sobre S^{n-1}: para todo par $x, y \in S^{n-1}$, existe una $g \in O(n)$ tal que $g(x) = y$.

Se puede verificar que este subespacio es compacto respecto de la topología subespacio (es un cerrado de un espacio completo, y es totalmente acotado), y es directo ver que es un grupo con la composición. Por lo tanto, se puede aplicar el Teorema 2.5.14 para obtener una medida θ_n invariante sobre $O(n)$ con las propiedades de dicho teorema.

Ahora, dado que esta es una medida definida sobre un grupo de transformaciones lineales, resulta conveniente para varias demostraciones tener alguna suerte de relación entre esta medida y alguna un poco más conocida sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces, se puede definir la **Medida de superficie (normalizada)** sobre S^{n-1} como:

$$\sigma^{n-1} := \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1})} \mathcal{H}^{n-1}|_{S^{n-1}}. \tag{2.10}$$

Se puede dar con la medida de Lebesgue una forma equivalente para esta medida. Concretamente, sea $\alpha(n) := \mathscr{L}^n(B(0,1))$. Entonces, para todo $E \subseteq S^{n-1}$:

$$\sigma^{n-1}(E) = \alpha(n)\mathscr{L}^n(\{ tx : x \in E, t \in [0,1] \}). \tag{2.11}$$

Esto se puede demostrar sin mucha dificultad con el teorema 2.5.4.

Teorema 2.5.16. *Sean $x \in S^{n-1}$, $E \subseteq S^{n-1}$. Entonces:*

$$\theta_n(\{\, g \in O(n) : g(x) \in E \,\}) = \sigma^{n-1}(E). \tag{2.12}$$

Demostración. Esta demostración consiste en reescribir lo de la izquierda como el valor de una medida sobre E, para después usar el Teorema 2.5.4:

Con ese objetivo en mente, sea $f_x : O(n) \to S^{n-1}$ definida por $f_x(g) = g(x)$. Entonces, $\theta_n(\{\, g \in O(n) : g(x) \in E \,\}) = (f_{x\#}\theta_n)(E)$. De este modo, si se verifica que esta medida pushforward es igual a σ^{n-1}. A su vez, para concluir esto alcanza con ver que $f_{x\#}\theta_n$ es uniformemente distribuida (ya que entonces de deduce lo que se busca del Teorema 2.5.4).

Para verificar esto, sean $y, z \in S^{n-1}$, de modo que existe $h \in O(n)$ tal que $h(y) = z$, y se puede ver que esta h cumple también que $h(B(y,r)) = B(z,r)$ (por la ortogonalidad de h). A su vez, por la invariancia de θ_n:

$$\begin{aligned}(f_{x\#}\theta_n)(B(z,r)) &= \theta_n(\{\, g : |\, g(x) - h(y)| \leqslant r \,\}) = \theta_n(\{\, g : |\, h^{-1}g(x) - y| \leqslant r \,\}) \\ &= \theta_n(\{\, g : |\, g(x) - y| \leqslant r \,\}) = (f_{x\#}\theta_n)(B(y,r)).\end{aligned}$$

□

Lema 2.5.17. *Existe una constante c dependiente sólo de n tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$ y $\delta > 0$, se tiene que:*

$$\theta_n(\{\, g : |\, x - g(y)| \leqslant \delta \,\}) \leqslant c \cdot \delta^{n-1}|x|^{1-n}.$$

Además, si $||x| - |y|| > \delta$, entonces $\theta_n(\{\, g : |\, x - g(y)| \leqslant \delta \,\}) = 0$.

Demostración. Lo último del enunciado resulta trivial notando que el conjunto a medir es vacío. Ahora, por esto se puede suponer sin pérdida de generalidad que $||x| - |y|| \leqslant \delta$, y $x, y \neq 0$. Entonces, si $|x - g(y)| < \delta$, se tiene que:

$$|x - g(\frac{|x|y}{|y|})| \leqslant |x - g(y)| + |(1 - \frac{|x|}{|y|})g(y)| \leqslant |x - g(y)| + ||y| - |x|| \leqslant 2\delta.$$

Por lo tanto, $|\frac{x}{|x|} - g(\frac{y}{|y|})| \leqslant \frac{2\delta}{|x|}$, por lo que sin pérdida de generalidad $x, y \in S^{n-1}$. Pero, por lo anterior,

$$\theta_n(\{\, g : |\, x - g(y)| \leqslant \delta \,\}) = \theta_n(\{\, g : g(y) \in \overline{B}(x,\delta) \,\}) = \sigma^{n-1}(\overline{B}(x,\delta) \cap S^{n-1}) \leqslant c \cdot \delta^{n-1}$$

con c una constante que sólo depende de n.

□

2.5.3. Medidas sobre Grassmannianos

Sean $0 < m < n$ enteros. Se define el (n,m)-Grassmanniano por:

$$G(n,m) := \{\, V : V \text{ subespacio de dimensión } m \text{ de } \mathbb{R}^n \,\}.$$

Definir una medida para estos espacios es una cuestión delicada. Antes que nada se necesita determinar una métrica: Para esto, se identifica a cada $V \in G(n,m)$ con su proyección ortogonal $P_v : \mathbb{R}^n \to V$ y se define $d(V,W) := \|P_V - P_W\|$, la norma inducida por $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Se puede ver que, con esta métrica, $G(n,m)$ resulta compacto (ver que es totalmente acotado no es muy dificil, y para ver que es completo alcanza con ver que

es cerrado). Además, como $gP_v = P_{g(V)}$, si se considera la acción de $O(n)$ sobre $G(n,m)$ dada por $gV = g(V)$, se obtiene que:

$$d(gV, gW) = d(V, W). \tag{2.13}$$

Esta acción también es transitiva: para cada par $V, W \in G(n,m)$ existe $g \in O(n)$ tal que $gV = W$ (Para ver esto, notar que se pueden tomar bases ortogonales de V y W, extenderlas y después tomar g como la transformación lineal que envía una base en la otra).

Definición 2.5.18. Sea V fijo. Se define una medida de Radón y proabilidad $\gamma_{n,m}$ sobre $G(n,m)$ por (despues de definirla se verificará la buena definición):

$$\gamma_{n,m}(E) := \theta_n(\{\, g : gV \in E \,\}) \,,\; E \subseteq G(n,m). \tag{2.14}$$

En otras palabras, si se toma la función $f_V(g) = gV$, se obtiene que $\gamma_{n,m} = f_{V\#}\theta_n$.

Observación 2.5.19. De la invariancia de θ_n se deduce que $\gamma_{n,m}$ es invariante sobre $O(n)$, o sea que para todos $g \in O(n)$, $E \subseteq G(n,m)$, vale que $\gamma_{n,m}(gE) = \gamma_{n,m}(E)$. Además, por la igualdad (2.13), se tiene que $\gamma_{n,m}$ es uniformemente distribuida (ya que es una medida de Radón $O(n)$-invariante), por lo que esta medida (que a priori depende de V) es única salvo por un factor constante (si se considera la medida definida por otro subespacio W), y como se consideran medidas de probabilidad se deduce que $\gamma_{n,m}$ es independiente del V tomado.

Observación 2.5.20. Con argumentos similares a los del párrafo anterior se pueden concluir las siguientes igualdades:

- $\gamma_{n,m}(E) = \gamma_{n,n-m}\{\, V^\perp : V \in E \,\}$ (esto último es $O(n)$-invariante).
- Para $E \subseteq G(n,1)$, $\gamma_{n,1}(E) = \sigma^{n-1}(\bigcup_{L\in E} L \cap S^{n-1})$.
- Para $E \subseteq G(n,n-1)$, $\gamma_{n,n-1}(E) = \sigma^{n-1}(\bigcup_{V\in E} V^\perp \cap S^{n-1})$.

Definición 2.5.21. Para $\delta > 0, m > 0$ se puede definir una función $\phi_\delta^m(x)$ sobre $\mathbb{R}^n$ como $\phi_\delta^m(x) := \text{mín}\{\, 1, (\delta/\mid x|)^m \,\}$. Estas funciones apaercerán de vuelta en el capítulo 4, cuando se hable de proyecciones.

Lema 2.5.22. *Sean $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ y $c = 2^n\alpha(n)^{-1}$, $d := \alpha(n)^{-1}2^{n-m}n^{m-n}$, $\delta > 0$. Se tienen las desigualdades:*

- $d \cdot \phi_\delta^{n-m}(x) \leqslant \gamma_{n,m}(\{\, V : d(x,V) \leqslant \delta \,\}) \leqslant c \cdot \phi_\delta^{n-m}(x)$.
- $d \cdot \phi_\delta^{m}(x) \leqslant \gamma_{n,m}(\{\, V : \mid P_V(x)| \leqslant \delta \,\}) \leqslant c \cdot \phi_\delta^{m}(x)$.

Demostración. Lo segundo se deduce directamente de lo primero porque se sabe que $d(x, V^\perp) = |P_V(x)|$. Ahora, para lo primero:

En primer lugar, $d(x,V) = |x|d(x/|x|, V)$ por lo que se puede suponer $x \in S^{n-1}$. Sea ahora $W := \{\, x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \ldots x_n = 0 \,\} \in G(n,m)$. Entonces, recordando que se define $\alpha(n) := \mathscr{L}^n(B(0,1))$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,m}(\{\, V : d(x,V) \leqslant \delta \,\}) &= \theta_n(\{\, g : d(x, gW) \leqslant \delta \,\})(\text{ por la Obs. de la buena def. de } \gamma_{n,m}) \\
&= \theta_n(\{\, g : d(g^{-1}x, W) \leqslant \delta \,\}) = \theta_n(\{\, g : d(g(x), W) \leqslant \delta \,\}) \\
&= \sigma^{n-1}(\{\, y \in S^{n-1} : d(y, W) \leqslant \delta \,\}) \\
&= \sigma^{n-1}\left(y \in S^{n-1} : (\sum_{m+1}^{n} y_i^2)^{1/2} \leqslant \delta \right) \\
&= \alpha(n)^{-1}\mathscr{L}^n(\{\, z \in \mathbb{R}^n : \mid z_i| \leqslant 1 \,\forall\, i \leqslant m \,,\; |z_j| \leqslant \delta \,\forall\, j > m \,\}) \\
&= \alpha(n)^{-1}2^m(2\delta)^{n-m} = \alpha(n)^{-1}2^n\delta^{n-m},
\end{aligned}$$

de modo que vale la desigualdad de la derecha (que $\gamma_{n,m}(\{\, V : d(x,V) \leqslant \delta \,\}) \leqslant c$ es inmediato).

Para la otra desigualdad, basta con utilizar la cota:

$$\begin{aligned}
&\sigma^{n-1}\left(y \in S^{n-1} : (\sum_{m+1}^{n} y_i^2)^{1/2} \leqslant \delta\right) \\
&\geqslant \alpha(n)^{-1}\mathscr{L}^n(\{\, z \in \mathbb{R}^n : |\, z_i| \leqslant 1/2 \,\forall\, i \leqslant m\,,\ |z_j| \leqslant \delta/n \,\forall\, j > m \,\}) \\
&= \alpha(n)^{-1}(2/n)^{n-m}\delta^{n-m}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.5.23. *Sea $0 < s < m$. Entonces, existe una constante $c = c(m,n,s)$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ vale:*

$$\int |P_V(x)|^{-s} d\gamma_{n,m}(V) \leqslant c \cdot |x|^{-s}.$$

Demostración. Por propiedades conocidas de la integral de Lebesgue, y el resultado anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
\int |P_V(x)|^{-s} d\gamma_{n,m}(V) &= \int_0^\infty \gamma_{n,m}(\{\, V : |\, P_V(x)|^{-s} \geqslant t \,\})dt \\
&= \int_0^\infty \gamma_{n,m}(\{\, V : |\, P_V(x)| \leqslant t^{-1/s} \,\})dt \\
&= \int_0^{|x|^{-s}} dt + \int_{|x|^{-s}}^\infty \gamma_{n,m}(\{\, V : |\, P_V(x)| \leqslant t^{-1/s} \,\})dt \\
&= |x|^{-s} + c \cdot |x|^{-m} \int_{|x|^{-s}}^\infty t^{-m/s} dt = (1 + \frac{cs}{sm - s})|x|^{-s}.
\end{aligned}$$

□

2.5.4. Capacidades y dimensión de Hausdorff

Antes de demostrar definitivamente el resultado principal de esta sección sobre proyecciones, se deben repasar algunos detalles sobre capacidades y su relación con la dimensión de Hausdorff.

Definición 2.5.24. Si $s \geqslant 0$, se define el **s-potencial** en $x \in \mathbb{R}^n$ de una medida de Borel μ de $\mathbb{R}^n$ como:

$$\phi_s(x) := \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

y se define la **s-energía** de μ como:

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \int\int \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) d\mu(x).$$

A su vez, para $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se puede definir su **s-capacidad** como:

$$C_s(E) := \sup\{\, I_s(\mu)^{-1} : \mu \in \mathcal{M}(E) \,\}.$$

Se puede demostrar que, para $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\sup\{\, t : \exists \mu \in \mathcal{M}(E) / I_t(\mu) < \infty \,\} = \sup\{\, s : \exists \mu \in \mathcal{M}(E) / \mu(B(x,r)) \leqslant r^s \; \forall\, x \in , \; r > 0 \,\}. \tag{2.15}$$

A este supremo se lo llama también **dimensión de capacidad** ($\dim_C(E)$), y cumple que $\dim_C(E) = \sup\{\, s : C_s(E) > 0 \,\} = \inf\{\, s : C_s(E) = 0 \,\}$. La condición sobre las medidas de las bolas quiere transmitir que la medida "no está concentrada en regiones chicas"(ver [Mat99] para más detalles de esto y otros resultados se esta subsección).

La razón principal por la que este concepto resulta interesante en este contexto es porque, con el lema de Frostman y la observación 2.15, se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.5.25. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Entonces:*

- *Si $s > 0$ y $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, entonces $C_s(E) = 0$.*
- *Si $s > 0$ y $C_s(E) = 0$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$ para todo $t > s$.*
- $\dim_C(E) = \dim_H(E)$.

Demostración. Ver [Mat99] para una demostración detallada. □

2.5.5. Proyecciones y dimensión de Hausdorff

Con todo esto en mente, se puede empezar a estudiar el teorema principal, que dice que $\dim_H(P_V(E)) = \min\{\, m, \dim_H(E) \,\}$ para casi todo $V \in G(n,m)$ $\gamma_{n,m}$-ctp. Esto se demuestra en dos partes: según sea $\dim_H(E) \leqslant m$ o $\dim_H(E) > m$.

Teorema 2.5.26. *Sea $0 < s < m$. Existe una constante $c = c(n,m,s)$ tal que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$, vale:*

$$\int^* C_s(P_V(E))^{-1} d\gamma_{n,m}(V) \leqslant c \cdot C_s(E)^{-1}.$$

Demostración. Sea μ de Radón, y de probabilidad con soporte compacto contenido en E. Por el Lema 2.5.7, $P_{V\#}\mu$ es de Radón también y cumple que $sop(P_{V\#}\mu) \subseteq P_V(E)$ y que $P_{V\#}\mu(V(E)) = 1$, por lo que $C_s(P_V(E))^{-1} \leqslant I_s(P_{V\#}\mu)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int^* C_s(P_V(E))^{-1} d\gamma_{n,m}(V) &\leqslant \int I_s(P_{V\#}\mu) d\gamma_{n,m}(V) \\
&= \int\int\int |P_V(x-y)|^{-s} d\mu(x) d\mu(y) d\gamma_{n,m}(V) \\
&= \int\int\int |P_V(x-y)|^{-s} d\gamma_{n,m}(V) d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leqslant c \cdot I_s(\mu),
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se deduce por el Corolario 2.5.23.

□

Corolario 2.5.27. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es Borel y $\dim_H(E) \leqslant m$, entonces $\dim_H(P_V(E)) = \dim_H(E)$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$.*

Demostración. Se deduce de lo anterior con el Teorema 2.5.25.

□

Esto trata el primer caso de los mencionados. Para el segundo:

Teorema 2.5.28. *Sea μ una medida de Radón en $\mathbb{R}^n$ de soporte compacto y $I_m(\mu) < \infty$. Entonces, $P_{v\#}(\mu) \ll \mathcal{H}^m$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$, y además existe $c = c(n,m)$ tal que::*

$$\int \int_V D(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u)^2 d\mathcal{H}^m(u) d\gamma_{n,m}(V) \leqslant c \cdot I_m(\mu).$$

Demostración. En primer lugar, por el Lema 2.5.7 se tiene que $P_{V\#}\mu$ es de Radón. Recordando la definición de la derivada inferior:

$$\underline{D}(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u) = \liminf_{\delta \to 0} (2\delta)^{-m} P_{V\#}\mu(B(u,\delta)) = \liminf_{\delta \to 0} (2\delta)^{-m} \mu(\{\, x : |\, u - P_V(x)| \leqslant \delta \,\}).$$

Por lo tanto, por Fatou:

$$\begin{aligned}
\iint \underline{D}(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u) dP_{V\#}\mu(u) d\gamma_{n,m}(V) \\
&\leqslant \liminf_{\delta \to 0} (2\delta)^{-m} \iint P_{V\#}\mu(B(u,\delta)) dP_{V\#}\mu(u) d\gamma_{n,m}(V) \\
&= \liminf_{\delta \to 0} (2\delta)^{-m} \iint \mu(\{\, y : |\, P_V(x-y)| \leqslant \delta \,\}) d\mu(x) d\gamma_{n,m}(V) \\
&= \liminf_{\delta \to 0} (2\delta)^{-m} \iint \gamma_{n,m}(\{\, V : |\, P_V(x-y)| \leqslant \}) d\mu(x) d\mu(y) \\
&= c \cdot I_m(\mu),
\end{aligned}$$

por el Lema 2.5.22. Entonces, para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$ se tiene:

$$\underline{D}(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u) < \infty \text{ para } P_{V\#}\mu\text{-casi todo } u \in V\ ,$$

que implica (por el Teorema 2.5.10) que $P_{V\#}\mu \ll \mathcal{H}^m$. Por lo tanto, $D(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u)$ existe para $P_{V\#}\mu$-casi todo $u \in V$. Por el Teorema 2.5.10 se tiene además que:

$$\int_V D(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u) d\mathcal{H}^m(u) = \int D(P_{V\#}\mu, \mathcal{H}^m_{|V}, u) dP_{V\#}\mu(u),$$

de donde se obtiene la desigualdad del enunciado.

□

Corolario 2.5.29. *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ cumple que $C_m(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^m(P_V(E)) > 0$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$. En particular, Si E es un Borel con $\dim_H(E) > m$, se deduce que $\dim_H(P_V(E)) = m$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$.*

De estos dos corolarios se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5.30. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$ vale:*

$$\dim_H(P_V(E)) = \min\{\, m, \dim_H(E) \,\}.$$

Observación 2.5.31. En realidad, se demostró que en el caso $\dim_H(E) > m$ vale que $\mathcal{H}^m(P_V(E)) > 0$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo V. Surge entonces la pregunta natural de si vale algo similar para el caso $\dim_H(E) \leqslant m$: Concretamente, si además de una consecuencia sobre la dimensión de las proyecciones se puede también decir que su medida $\dim_H(E)$-Hausdorff es positiva. Lamentablemente esto es falso:

Para cada $0 < s \leqslant 1$ existe un $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ (por lo que su dimensión es s), y $\mathcal{H}^s(P_V(E)) = 0$ para todo $V \in G(2,1)$. Para má detalles se puede consultar [Mat99].

2.5.6. Intersecciones (comentarios)

Habiendo expuesto ya algunos resultados referentes a productos y proyecciones, se pueden dar un par de comentarios sobre resultados referentes a intersecciones. Concretamente, se pueden comentar resultados sobre intersecciones entre un subconjunto A y la imagen de otro subconjunto B por isometrías (funciones de la forma $g(x) + z$, con $g \in O(n)$ y $z \in \mathbb{R}^n$).

Claramente no se puede asegurar un resultado que valga "para toda isometría", ya que se pueden tomar $A = B$ y pueden existir dos isometrías f_1, f_2 tales que $A_1(A) = A$ y $A_1(A) = \varnothing$. Sin embargo, como pasaba para proyecciones, sí se pueden conseguir un par de teoremas utlizando la medida θ_n.

Para motivar un poco cierta expresión que aparece en algunos resultados conocidos, se puede observar que, si dos variedades diferenciales en $\mathbb{R}^n$ de dimensiones s y t se intersecan transversalmente, entonces su intersección es una variedad también, de dimensión $s + t - n$. Por lo tanto, se podría esperar que ocurra algo similar para las intersecciones de la forma $A \cap (g(B) + z)$, con cierta "frecuencia". Esto también está motivado porque la expresión $s + t - n$ dada para variedades resulta ser, cuando se adapta al caso general, una cota superior para la dimensión de $A \cap (g(B) + z)$:

Lema 2.5.32. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, tales que $\dim_H(A \times B) \geqslant n$. Entonces, para toda $g \in O(n)$ vale:*

$$\dim_H(A \cap (g(B) + z)) \leqslant \dim_H(A \times B) - n, \text{ para } \mathscr{L}^n - \text{ casi todo } z \in \mathbb{R}^n.$$

Lo interesante es que se tiene una cota inferior también, "con frecuencia" (donde esto se traduce como "se tiene la cota sobre un subconjunto de medida positiva"), siempre que se consideren similaridades en vez de isometrías:

Teorema 2.5.33. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, con $\dim_H(A) = s, \dim_H(B) = t$, $s + t > n$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, θ_n-casi todo $g \in O(n)$ y casi todo $r > 0$, se tiene que:*

$$\mathscr{L}^n(\{ z \in \mathbb{R}^n : \dim_H(A \cap (rg(B) + z)) \geqslant \dim_H(A) + \dim_H(B) - n - \varepsilon \}) > 0. \tag{2.16}$$

Además, si $0 < \mathcal{H}^s(A), \mathcal{H}^t(B) < \infty$, entonces vale (2.16) sin el ε.

La pregunta de si vale (2.16) para isometrías y todos A, B Borel permanece abierta, aunque se sabe que es cierto para varios casos particulares, por ejemplo en caso de que alguno de los subconjuntos sea de Salem, o con ciertas restricciones adicionales sobre las dimensiones de A y B:

Teorema 2.5.34. *Sean $s, t > 0$ y $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, tales que $s + t > n$, $s > (n+1)/2$, y $\mathcal{H}^s(A), \mathcal{H}^t(B) > 0$. Entonces, para θ_n-casi toda $g \in O(n)$ se tiene:*

$$\mathscr{L}^n(\{ z \in \mathbb{R}^n : \dim_H(A \cap (g(B) + z)) \geqslant \dim_H(A) + \dim_H(B) - n \}) > 0.$$

Resultaría interesante poder estudiar resultados de este tipo para dimensiones intermedias, eventualmente.

Capítulo 3

Dimensiones Intermedias

Los ejemplos del anterior capítulo motivan el estudiar qué puede ocurrir si se piden restricciones un poco más laxas sobre los diámetros de los miembros de cubrimientos en 2.1.14. En la primera sección se estudian unas restricciones que dependen de un parámetro θ, para estudiar después una generalización de esta idea. El estudio de esta generalización resulta importante porque de la teoría general se deducen dos resultados bastante importantes.

3.1. Definiciones, Propiedades básicas

Definición 3.1.1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado. Para cada $\theta \in [0,1]$ se pueden definir las **dimensiones intermedias (inferior-superior)** por:

- $\underline{\dim}_\theta(E) := \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 : \begin{array}{c} \forall \varepsilon, \delta_0 > 0 \, \exists \, 0 < \delta \leqslant \delta_0, \, \exists \, \{U_i\} \text{ cubr. de } E / \\ \delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta, \, \sum |U_i|^s \leqslant \varepsilon \end{array} \right\}.$

- $\overline{\dim}_\theta(E) := \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 : \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_0 > 0 / \forall \, 0 < \delta \leqslant \delta_0, \exists \, \{U_i\} \text{ cubr. de } E \\ \text{con } \delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta, \, \sum |U_i|^s \leqslant \varepsilon \end{array} \right\}.$

Cuando ambas dimensiones son iguales, se escribe $\dim_\theta(E)$. Además, se debe notar que la condición $\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ se puede remplazar por $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$. Algunas definiciones se darán con esta última restricción por comodidad, pero son equivalentes.

Observación 3.1.2. Las dimensiones intermedias para $\theta = 1$ son las dimensiones de Minkowski. O sea, que $\underline{\dim}_B(E) = \underline{dim}_1(E)$ y $\overline{\dim}_B(E) = \overline{dim}_1(E)$. A su vez, en el caso $\theta = 0$ se tienen las igualdades: $\dim_H(E) = \underline{\dim}_0(E) = \overline{\dim}_0(E)$.

Observación 3.1.3. se tiene que: $0 \leqslant dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}_\theta(E) \leqslant \overline{\dim}_\theta(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E) \leqslant n$.

Estas dimensiones, naturalmente, tienen propiedades similares a las de $\overline{\dim}_B$ y $\underline{\dim}_B$ (especialmente la cuarta propiedad):

- $\underline{\dim}_\theta$ y $\overline{\dim}_\theta$ son monótonas respecto de la inclusión.
- $\overline{\dim}_\theta$ es finitamente estable, o sea que si se tienen unos $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{\dim}_\theta(E \cup F) = \text{máx}\left\{\overline{\dim}_\theta(E), \overline{\dim}_\theta(F)\right\}$. Se verá más adelante un ejemplo que muestra que no son numerablemente estables, salvo que $\theta = 0$. concretamente, se verá después que existe un subconjunto numerable E de $\mathbb{R}$ tal que, para todo $\theta > 0$, $\dim_\theta(E) > 0$.
- $\underline{\dim}_\theta$ y $\overline{\dim}_\theta$ son monótonamente crecientes en θ.

- Para todo $\theta > 0$, $\underline{\dim}_\theta(E) = \underline{\dim}_\theta(\overline{E})$ y $\overline{\dim}_\theta(E) = \overline{\dim}_\theta(\overline{E})$, ya que, como los cubrimientos en la definición de dimensiones intermedias deben ser finitos (ya que sus diámetros están acotados inferiormente si $\theta > 0$), tomar sus clausuras otorga la desigualdad no trivial.

Para comprobar la estabilidad finita de $\overline{\dim}_\theta$, se procede de la siguiente forma: Por un lado, que $\overline{\dim}_\theta(E \cup F) \geqslant \text{máx}\left\{\overline{\dim}_\theta(E), \overline{\dim}_\theta(F)\right\}$ es claro. Para la otra desigualdad, sea $s > \text{máx}\left\{\overline{\dim}_\theta(E), \overline{\dim}_\theta(F)\right\}$, por lo que $\forall \varepsilon > 0$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \delta \leqslant \delta_0$, existen unos cubrimientos $\{E_i\}, \{F_i\}$ de E y F respectivamente, tales que:

$$\delta^{1/\theta} \leqslant |E_i|, |F_i| \leqslant \delta \, , \sum |E_i|^s < \varepsilon/2, \sum |F_i|^s < \varepsilon/2.$$

Pero, como $\{E_i\} \cup \{F_i\}$ es un cubrimiento de $E \cup F$, se deduce que $\overline{\dim}_\theta(E \cup F) \leqslant s$, de donde se obtiene la desigualdad buscada.

Observación 3.1.4. Las dimensiones inferiores $\underline{\dim}^\Phi$ no son finitamente estables para ninguna Φ admisible: Para las Box esto es conocido, y para las dimensiones generalizadas se puede consultar un ejemplo en [Ban20](Prop. 5.4).

Esta "similaridad" con las dimensiones Box también se puede apreciar en algunos resultados, como 3.3.1. Otra propiedad fundamental que uno espera de estas dimensiones sería la invariancia por transformaciones bilipschitz, que se deduce del siguiente resultado:

Proposición 3.1.5. *Sea $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función α-Hölder (o sea, tal que existen $\alpha \in (0,1], c > 0$ tales que $d(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y)^\alpha$). Entonces:*

$$\underline{\dim}_\theta(f(E)) \leqslant \frac{1}{\alpha}\underline{\dim}_\theta(E) \, , \, \overline{\dim}_\theta(f(E)) \leqslant \frac{1}{\alpha}\overline{\dim}_\theta(E).$$

En particular, si $f : E \to f(E)$ es bilipschitz, se tiene que:

$$\underline{\dim}_\theta(f(E)) = \underline{\dim}_\theta(E) \, , \, \overline{\dim}_\theta(f(E)) = \overline{\dim}_\theta(E).$$

Demostración. Para ver esto se puede recurrir a una versión "básica" de una estrategia general que se utilizará con frecuencia en la sección 3.2. Concretamente, este método consiste en dar un cubrimiento y luego modificar algunos de sus miembros (por ejemplo, "agrandandolos") para que cumplan ciertas propiedades buscadas. Varias demostraciones de este trabajo tienen argumentos similares.

Ambas demostraciones se pueden deducir de las siguientes observaciones: Si $\{U_i\}$ es un cubrimiento de E con $\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta$, entonces uno puede considerar el cubrimiento $\{f(U_i)\}$ de $f(E)$, que cumple las siguientes propiedades:

Como f es α-Hölder, $|f(U_i)| \leqslant c \cdot |U_i|^\alpha \leqslant c \cdot \delta^\alpha$, por lo que

$$|f(U_i)|^{1/\alpha} \leqslant \widetilde{c} \cdot |U_i| \leqslant \widetilde{c} \cdot \delta.$$

Ahora, para la parte de la "estrategia" mencionada, se debe notar primero que a los diámetros de los $f(U_i)$ les está faltando una cota inferior, que es necesaria para poder dar las desigualdades buscadas. Para esto, se modificarán los $f(U_i)$ apropiadamente:

Por un lado, si $(c \cdot \delta^\alpha)^{1/\theta} \leqslant |f(U_i)|$ se deja sin cambios a $f(U_i)$. de lo contrario, se le puede agregar un punto $x_i \in \mathbb{R}^m$ tal que $\widetilde{V}_i := f(U_i) \cup \{ x_i \}$ cumpla que $|\widetilde{V}_i| = (c \cdot \delta^\alpha)^{1/\theta}$, lo que se puede deducir del siguiente lema:

Lema 3.1.6. *Sean K, L compactos, y $f : K \times L \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max_{y \in L} f(x,y)$ es continua.*

Si se toma $f(x,y) = d(x,y)$ en el lema anterior, y notando que tomar clausura no afecta el diámetro de un subconjunto, se deduce lo dicho para $\widetilde{V}_i$. Pero entonces, con tal modificación se deduce lo pedido notando que para todo $s > \underline{\dim}_\theta(E)$, $s/\alpha > \underline{\dim}_\theta(f(E))$. $\square$

Observación 3.1.7. Este resultado motiva la siguiente cuestión: generalmente, para decir que dos subconjuntos no son bi-Lipschitz equivalentes se pueden considerar sus dimensiones $\dim_H$, $\underline{\dim}_B$ o $\overline{\dim}_B$, y ver que dan valores distintos. Sin embargo, uno podría intentar buscar dos subconjuntos donde estas tres dimensiones sean iguales pero no coincida alguna dimensión intermedia, para dar entonces un ejemplo de dos subconjuntos donde 3.1.5 otorge más información que las dimensiones de Hausdorff y Minkowski. Este problema (bastante delicado) se estudia para las alfombras de Bedford McMullen en [BK21], en donde (prop 2.12) se da un ejemplo de dos de estas alfombras que cumplen que sus dimensiones de Hausdorff y Box coinciden, pero existe una dimensión intermedia que no. En otras palabras, no son bi-Lipschitz equivalentes pero esto no se puede deducir sólo con las primeras dimensiones, sino que se necesitan las intermedias.

Ahora, se buscan cotas de $\overline{\dim}_\phi$ que dependan de $\overline{\dim}_\theta$ (con $\theta < \phi$), ϕ y θ. Por ejemplo, una cota de este estilo será:

$$\overline{\dim}_\phi(E) \leqslant \frac{\phi}{\theta}\overline{\dim}_\theta(E)\,,\ 0 < \theta < \phi.$$

Este resultado (y otros) se deducen como corolario directo de un resultado de la siguiente sección. Uno busca desigualdades de este tipo en parte porque, por ejemplo, esta cota permite demostrar que la función $\theta \to \overline{\dim}_\theta(E)$ es continua en $(0,1]$. Sin embargo, en general esta función (y la que corresponde a $\underline{\dim}_\theta$) puede no ser continua en 0 (todo esto se demostrará con más detalles después). Determinar cuándo se tiene continuidad en $[0,1]$ es importante para concluir ciertas propiedades de proyecciones, como se verá en el capítulo 4.

Otra observación importante que se desprende de lo dicho es que no siempre se da que las dimensiones intermedias interpolan las dimensiones de Hausdorff y Minkowski: en otras palabras, **no** es cierto que para cada $s \in [dim_H(E), \overline{\dim}_B(E)]$ existe un θ tal que $\overline{\dim}_\theta(E) = s$. Sin embargo, como se demostrará en la próxima sección, esto sí es cierto para una generalización del concepto de dimensión intermedia, siempre que E sea compacto.

3.2. Dimensiones intermedias generalizadas

En esta sección se estudiará una generalización de las dimensiones intermedias, desarrollada por Amlan Banaji en [Ban20]. Esta sección tiene como eje dos resultados específicos, correspondientes a las subsecciones 3.2.2 y 3.2.3.

3.2.1. Definiciones y algunas propiedades

En la sección anterior se consideraron restricciones en los diámetros de cubrimientos de la forma $\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta$. Esto motiva considerar restricciones un poco más laxas, concretametne de la forma $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$, con Φ ua función apropiada.

Definición 3.2.1. Sea $c \in (0,1)$. Se dice que un espacio métrico X es **c-uniformemente perfecto** si para todo $x \in X$ y $0 < r < |X|$, vale que $B(x,r)\backslash B(x,c.r) \neq \varnothing$. Un espacio métrico se dice **uniformemente perfecto** si cumple la propiedad anterior para algún c. Notar que, por la definición, los espacios formados por un único elemento son uniformemente perfectos.

Definición 3.2.2. Un espacio métrico se dice **doblante** si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $x \in X, r > 0$ existen unos $x_1, \ldots, x_m \in X$ con $B(x, 2r) \subseteq \bigcup_1^m B(x_i, r)$.

Definición 3.2.3. Sea X un espacio métrico, $E \subseteq X$. Se definen la **dimensión de Assouad** y la **lower dimension** de E como:

$$\dim_A(E) := \text{ínf}\,\{\, \alpha : \exists c / \forall x \in E, 0 < r < R, \text{ se tiene } N_r(B(x,R) \cap E) \leqslant c(R/r)^\alpha \,\},$$

$$\dim_L(E) := \sup\,\{\, \alpha : \exists c / \forall x \in E, 0 < r < R, \text{ se tiene } N_r(B(x,R) \cap E) \geqslant c(R/r)^\alpha \,\}.$$

Como $\dim_A(U) = n$ para todo U abierto de $\mathbb{R}^n$, lo que se diga en esta subsección y las siguientes se puede aplicar directamente al contexto de dimensiones intermedias en $\mathbb{R}^n$.

También, para solucionar un par de detalles en algunas demostraciones, se pueden enunciar dos resultados, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [Fra20] ((13.1.1) y (13.1.2)):

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio métrico. Entonces:*

- *X es doblante si y solo si $\dim_A(X) < \infty$.*
- *Si además $card(X) > 1$, entonces es uniformemente perfecto si y solo si $0 < \dim_L(X)$.*

Definición 3.2.5. Sea $y \in (0, \infty)$. Se dice que una función $\Phi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A tal que contiene el intervalo $(0, y)$ es **y-admisible** si:

- $0 < \Phi(\delta) \leqslant \delta \,\forall\, \delta \in (0, y)$.
- $\Phi(\delta)/\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0^+$.
- Φ es monótona en $(0, y)$.

Se dice que Φ es **admisible** si existe y tal que Φ es y-admisible.

Observación 3.2.6. Para todo $\theta \in (0,1)$, la función $\Phi(\delta) = \delta^{1/\theta}$ es admisible.

Definición 3.2.7. Sea Φ admisible, X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado. entonces, se definen:

- $\overline{\dim}^{\Phi}(E) := \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_0 > 0 / \forall\, 0 < \delta < \delta_0\, \exists\, \{U_i\} \text{ cubr. de } E \\ \text{con } \Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta\, \forall i\,,\, \sum |U_i|^s < \varepsilon \end{array} \right\}.$
- $\underline{\dim}^{\Phi}(E) := \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \delta_0 > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0) \text{ y } \{U_i\} \text{ cubr. de } E \\ \text{con } \Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta\, \forall i\,,\, \sum |U_i|^s < \varepsilon \end{array} \right\}.$

Si $\underline{\dim}^{\Phi}(E) = \overline{\dim}^{\Phi}(E)$, se escribe $\dim^{\Phi}(E)$.

Observación 3.2.8. Se pide que X sea uniformemente perfecto porque este concepto será el ingrediente principal de la estrategia mencionada en la Proposición 3.1.5. Concretamente, se apelará repetidamente a la existencia de un punto en la diferencia entre dos bolas para "agrandar" ciertos miembros de algunos cubrimientos, para que los cubrimientos modificados cumplan ciertas propiedades deseadas. Un ejemplo de este argumento se dará en la Proposición 3.2.12. También cabe aclarar que se pide que X tenga más de un elemento para garantizar las desigualdades de la Proposición 3.2.12, ya que si se tuviera que $X = \{\, x \,\}$, su dimensión de Assouad sería 0 pero al calcular las dimensiones intermedias, los conjuntos a los cuales se les toma ínfimo en la definición serían vacíos, ya que el diámetro de un miembro de un cubrimiento sería 0.

Observación 3.2.9. Sean Φ admisible, X uniformemente perfecto con más de un elemento, y $E \subseteq X$ totalmente acotado. Supóngase que existen $C, \delta_0 > 0$ tales que para cada $\delta < \delta_0$ existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ de E tal que $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ y $\sum |U_i|^s \leqslant C$. Entonces, $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant s$.

Demostración. Para demostrar la desigualdad buscada alcanza ver que para cada $\eta > 0$, $\overline{\dim}^{\Phi}(E) < s + \eta$. Ahora, para ver esto, sea $\varepsilon > 0$, y considerar:

$$\delta_1 = \text{mín} \{ \delta_0, (\varepsilon/c)^{1/\eta} \}.$$

para todo $\delta < \delta_1$, como $\delta < \delta_0$ existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ de E tal que $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ y $\sum |U_i|^s \leqslant C$. Pero entonces se tiene que:

$$\sum |U_i|^{s+\eta} = \sum |U_i|^s |U_i|^\eta \leqslant \sum |U_i|^s \delta^\eta \leqslant C\delta^\eta < C\delta_1^\eta < \varepsilon.$$

Por esto, $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant s + \eta \; \forall \, \eta > 0$, y $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant s$. □

Observación 3.2.10. Lo anterior tiene una versión análoga para dimensiones inferiores:

Si existe c tal que para todo δ_0 existen $\delta < \delta_0$ y un cubrimiento $\{ U_i \}$ con $\sum |U_i|^s \leqslant c$ y $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$, entonces $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant s$.

Demostración. Alcanza con ver que para todo $\eta > 0$ vale que $s + \eta > \overline{\dim}^{\Phi}(E)$. Entonces, sean $\varepsilon, \delta_0 > 0$. Entonces, por hipótesis existe un $\delta < \delta_0$ tal que $c \cdot \delta^\eta < \varepsilon$ y tal que se puede dar un cubrimiento $\{ U_i \}$ con $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ y $\sum |U_i|^s \leqslant c$. Entonces:

$$\sum |U_i|^{s+\eta} = \sum |U_i|^s |U_i|^\eta \leqslant c \cdot \delta^\eta < \varepsilon.$$

□

Ya se hizo notar en la observación 3.2.6 que en los casos $\theta = 0, 1$ la función Φ mencionada no es admisible. Uno se podría preguntar entonces, si existen funciones admisibles, tales que representan a $\dim_H$ y $\dim_B$: concretamente, si es cierto que existen Φ_1, Φ_2 admisibles tales que, Para todo X uniformemente perfecto y todo $E \subseteq X$ totalmente acotado, vale que $\dim^{\Phi}(E) = \dim_H(E)$ y $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = \overline{\dim}_B(E)$. Para $\dim_H$ esto es falso, hecho que será consecuencia de la siguiente proposición. Sin embargo, para las dimensiones (superior e inferior) de Minkowski esto es cierto, y se demostrará después.

Proposición 3.2.11. *Sean Φ admisible, X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E, F \subseteq X$ totalmente acotados. Entonces:*

- *Si $E \subseteq F$, entonces $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(F)$ y $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi}(F)$.*
- *$\overline{\dim}^{\Phi}(\overline{E}) = \overline{\dim}^{\Phi}(E)$, $\underline{\dim}^{\Phi}(\overline{E}) = \underline{\dim}^{\Phi}(E)$ (La demostración es similar a la mencionada para dimensiones intermedias).*

De esto, se deduce que si se considera $E := \mathbb{Q} \bigcap [0, 1]$, entonces $dim_H(E) = 0$ pero por el segundo item $\underline{\dim}^{\Phi}(E) = \overline{\dim}^{\Phi}(E) = 1$. Por lo tanto, $\dim_H$ no corresponde a una dimensión intermedia para ninguna Φ. Además, por este caso se puede ver que las dimensiones $\underline{\dim}^{\Phi}, \overline{\dim}^{\Phi}$ pueden no interpolar a $\dim_H, \overline{\dim}_B$ si E no es compacto.

Proposición 3.2.12. *Sean Φ admisible, X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado. Entonces:*

$$\dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E) \leqslant \dim_A(E) \leqslant \dim_A(X).$$

$$\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \underline{\dim}_B(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E).$$

Demostración. Primero, se verá que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E)$. Por un lado, existe $c \in (0,1)$ tal que X es c-uniformemente perfecto, y como Φ es admisible existe $\lambda > 0$ tal que para $\delta_1 < \lambda$, vale $\frac{\Phi(\delta_1)}{\delta_1} < c/2$.

Sean $s > t > \overline{\dim}_B(E)$ y $\varepsilon > 0$. Como $t > \overline{\dim}_B(E)$, se tiene que $\lim_{\delta \to 0} N_\delta(E)\delta^t = 0$, por lo que $\exists\, \delta_0 / \forall \delta < \delta_0\,,\ N_\delta(E)\delta^t < 1$. Por lo tanto, existe $\delta_0 \in (0, \min\{\, \varepsilon^{1/s-t}, \lambda, \mid X|, 1\,\})$ tal que para todo $\delta < \delta_0$, existe un cubrimiento de E por δ^{-t} o menos conjuntos $\{\, U_i \,\}$, cada uno con diámetro $\leqslant \delta$.

La idea de la demsotración consiste en modificar los U_i de forma apropiada: por un lado, si $U_i \cap E = \varnothing$, se elimina este U_i del cubrimiento. Por otro lado, si $|U_i| \geqslant \delta/2$ se deja U_i sin cambios. Por último, si $|U_i| < \delta/2$, se "agranda" el U_i de la siguiente forma:

Como $U_i \neq \varnothing$, sea $x_i \in U_i$. Como $|U_i| < \delta/2 < \delta_0 \leqslant |X|$ y X es c-uniformemente perfecto, existe $y_i \in B(x_i, \delta/2) \backslash B(x_i, c.\delta/2)$. Entonces, se puede definir $V_i := U_i \cup \{\, y_i \,\}$. Considerando este nuevo cubrimiento (con $V_i := U_i$ para el caso $|U_i| \geqslant \delta/2$), se tiene que, usando que $\delta < \lambda$:

- $\Phi(\delta) \leqslant c \cdot \delta/2 \leqslant |V_i| \leqslant \delta/2 + \delta/2 = \delta$.
- $\sum |V_i|^s \leqslant \delta^{-t}\delta^s = \delta^{s-t} < \delta_0^{s-t} < \varepsilon$.

Por definición se tiene entonces que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant s$, y como esto vale para todo s, se concluye que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}_B(E)$.

La desigualdad $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \underline{\dim}_B(E)$ se demuestra de forma similar, y para la desigualdad $\overline{\dim}_B(E) \leqslant \dim_A(E)$, basta fijar $R = |E|$ en la definición de $\dim_A(E)$. □

Corolario 3.2.13. *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant n$, y si es abierto, se tiene la igualdad $\dim^{\Phi}(E) = n$.*

Entonces, se puede demostrar ahora lo comentado en la observación 3.2.8.

Proposición 3.2.14. *Sea Φ una función admisible tal que $\frac{\log(\delta)}{\log(\Phi(\delta))} \to 1$ cuando $\delta \to 0$. Entonces, para todo espacio X uniformemente perfecto con más de un elemento y todo $E \subseteq X$ totalmente acotado, valen las igualdades:*

$$\overline{\dim}^{\Phi}(E) = \overline{\dim}_B(E)\,,\ \underline{\dim}^{\Phi}(E) = \underline{\dim}_B(E).$$

Demostración. Se demuestra lo primero, ya que la otra demostración no es muy diferente. Por un lado, por la Proposición 3.2.12 se tiene una desigualdad. Para la otra, se supone por absurdo que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) < \overline{\dim}_B(E)$. Por esto, sean s, t tales que

$$\overline{\dim}^{\Phi}(E) < s < t < \overline{\dim}_B(E).$$

Por definición (tomando $\varepsilon = 1$) existe δ_0 tal que para todo $0 < \delta < \delta_0$ existe un cubrimiento $\{\, U_i \,\}$ de E tal que $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ y $\sum |U_i|^s \leqslant 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N_\delta(E)\delta^t \leqslant \sum_i \delta^t = \sum_i \delta^t \frac{|U_i|^s |U_i|^{t-s}}{|U_i|^t} \leqslant \sum \delta^t \frac{|U_i|^s \delta^{t-s}}{\Phi(\delta)^t} &= \left(\frac{\delta^{1+\frac{t-s}{t}}}{\Phi(\delta)}\right)^t \sum |U_i|^s \\ &\leqslant \left(\frac{\delta^{1+\frac{t-s}{t}}}{\Phi(\delta)}\right)^t. \end{aligned}$$

Pero esto último tiende a cero cuando $\delta \to 0$, ya que $\frac{\log(\delta)}{\log(\Phi(\delta))} \to 1 < 1 + \frac{t-s}{t}$. Pero esto es absurdo, por haber supuesto que $t < \overline{\dim}_B(E)$. □

Observación 3.2.15. Un ejemplo de función que cumple las propiedades del enunciado anterior es $\Phi : (0, \frac{1}{5}) \to (0, \frac{1}{5})$ definida como $\Phi(\delta) := \frac{\delta}{-\log(\delta)}$. Por lo tanto, aunque $\Phi(\delta) = \delta$ no es admisible, las dimensiones de Minkowski están dadas por una función admisible.

Este teorema motiva la siguiente definición:

En la familia A de funciones admisibles se puede definir una relación de equivalencia $\equiv$ de la siguiente forma: $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ si y solo si para todo X uniformemente perfecto con más de un elemento y todo $E \subseteq X$ totalmente acotado con $\dim_A(E) < \infty$, vale que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) = \overline{\dim}^{\Phi_2}(E)$ y $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) = \underline{\dim}^{\Phi_2}(E)$. A la clase de una Φ se la denota $[\Phi]$. Se puede definir también un orden parcial en $A/\equiv$ ($\preceq$) si valen las desigualdades $\leqslant$ en vez de las dos igualdades anteriores.

Ahora, se definirá una topología en $A/\equiv$ que permitirá interpretar los resultados de la siguiente sección como resultados de contuidad: Entonces, se define una subbase de abiertos $\{ N_{\Phi,\alpha} : \Phi \in A, \alpha > 1 \}$ con:

$$N_{\Phi,\alpha} := \{ \mathcal{C} : \exists \Phi_1 \in \mathcal{C}, \lambda > 0 / \forall \delta < \lambda, (\Phi(\delta^\alpha))^\alpha \leqslant \Phi_1(\delta) \leqslant (\Phi(\delta^{1/\alpha}))^{1/\alpha} \}.$$

El por qué de esta definición está intimamente ligado al teorema 3.2.16.

3.2.2. Un resultado importante

Primero se podrían comentar unos resultados que a primera vista parecen bastante técnicos, pero cuya importancia se ve reflejada en varios de sus corolarios, especialmente en los pertinentes a dimensiones intermedias. Los dos primeros resultados están conectados fuertemente con la topología sobre $A/\equiv$ introducida hace poco, como se verá en el Corolario 3.2.20. El teorema 3.2.16 también permitirá demostrar unas cotas como las mencionadas en la sección anterior.

Teorema 3.2.16. *Sean Φ, Φ_1 funciones admisibles, X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, con $\dim_A(E) < \infty$. Entonces:*

(I) *Supóngase que $0 < \overline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$, y $\eta \in [0, \dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E))$. Entonces:*

- *Si existe $\Delta > 0$ tal que para todo $\delta < \Delta$ vale:*

$$\Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant (\Phi(\delta))^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}}, \alpha := \frac{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E) - \eta}, \tag{3.1}$$

  se tiene que:

$$\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta.$$

- *Si para todo δ_0 existe $\delta < \delta_0$ tal que vale (3.1), se tiene que:*

$$\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$$

(II) *Supóngase que $0 < \underline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$ y $\eta \in [0, \dim_A(E) - \underline{\dim}^{\Phi}(E))$, y que existe $\Delta > 0$ tal que para todo $\delta < \Delta$ se tiene:*

$$\Phi_1(\delta^{\frac{\dim_A(E) - \underline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E) - \underline{\dim}^{\Phi}(E) - \eta}}) \leqslant (\Phi(\delta))^{\frac{\underline{\dim}^{\Phi}(E)}{\underline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}} \tag{3.2}$$

Entonces vale que $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$.

Demostración. Sea $c \in (0, 1/2)$ tal que X es c-uniformemente perfecto.

Para demostrar lo primero, se debe aclarar en primer lugar que el caso $\eta = 0$ es inmediato, por lo que se puede suponer que $\eta > 0$, y que se puede suponer también que $\Delta < \text{mín}\{1, |X|\}$, que Φ, Φ_1 son admisibles en $(0, \Delta)$, y que para todo $\delta \in (0, \Delta)$ se tiene que $\delta/\Phi_1(\delta) \geqslant 1 + 2/c$ (ya que se puede tomar Δ suficientemente chico tal que ocurra todo esto).

Sean $s \in (\overline{\dim}^{\Phi}(E), \dim_A(E) - \eta)$, $\varepsilon > 0$ y $a \in (\dim_A(E), \infty)$ suficientemente cerca de $\dim_A(E)$ tal que $a - s - \alpha(a - s - \eta) > 0$ (que vale porque uno puede considerar en ese intervalo la función continua $x - s - \alpha(a - s - \eta)$, que cumple por un cálculo directo que en $x = \dim_A(E)$ es positiva). Como $a > \dim_A(E)$, por definición existe $C > 0$ tal que para todos $x \in E, 0 < r < R$, se tiene que $N_r(B(x, R) \cap E) \leqslant C(R/r)^a$. Ahora,

$$\text{mín}\left\{ s, \frac{(s+\eta)\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta} \right\} > \overline{\dim}^{\Phi}(E), \tag{3.3}$$

por lo que existe $\delta_0 < \Delta$ tal que para cada $\delta < \delta_0$ existe un cubrimiento $\{ U_i \}_I$ de E ta que $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ para todo i, y:

$$\sum |U_i|^{\text{mín}\left\{ s, \frac{(s+\eta)\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta} \right\}} \leqslant ((1 + 1/c)^{s+\eta} + 1 + 2^a C)^{-1}\varepsilon.$$

Entonces, se modificará este cubrimiento para que satisfaga lo buscado. Sin embargo, a diferencia de como se procedió antes, algunos de estos se van a "agrandar" mientas que otros se van a reemplazar poruna familia de bolas más chicas:

Se puede escribir a I como la unión disjunta $I = I_0 \cup I_1 \cup I_2$, con:

$$\begin{aligned} I_0 &:= \{ i \in I : \Phi(\delta) \leqslant |U_i| < \Phi_1(\delta^\alpha) \} \\ I_1 &:= \{ i \in I : \Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\alpha \} \\ I_2 &:= \{ i \in I : \delta^\alpha < |U_i| \leqslant \delta \} \end{aligned}$$

La idea será modificarlos de tal forma que los diámetros pertenezcan a $[\Phi_1(\delta^\alpha), \delta^\alpha]$. De este modo, los U_i con $i \in I_1$ se dejan en el cubrimiento sin cambio alguno. Los de I_0 van a "agrandarse", naturalmente (de la misma forma que antes, usando adecuadamente que X es uniformemente perfecto):

Sea entonces $i \in I_0$, y sea $p_i \in U_i$. Como X es uniformemente perfecto, existe $q_i \in X$ tal que $\Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant d(p_i, q_i) \leqslant \Phi_1(\delta^\alpha)/c$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant d(p_i, q_i) \leqslant |U_i \cup \{ q_i \}| &\leqslant |U_i| + d(p_i, q_i) \leqslant |U_i| + \Phi_1(\delta^\alpha)/c \\ &< (1 + 1/c)\Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant \delta^\alpha. \end{aligned}$$

Además, por hipótesis se tiene también que:

$$|U_i \cup \{ q_i \}| \leqslant |U_i| + \Phi_1(\delta^\alpha)/c \leqslant |U_i| + (\Phi(\delta))^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}}/c < (1 + 1/c)|U_i|^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}}.$$

De esta manera, sólo falta tratar el caso $j \in I_2$: Por la definición, con $r = \delta^\alpha/2$ y $R = |U_j|$, se ve que existen $x_{j,1}, \ldots, x_{j,\lfloor C(2|U_j|/\delta^\alpha)^a \rfloor} \in E$ tales que:

$$U_j \cap E \subseteq \bigcup_{1}^{\lfloor 2^a C |U_j|^a \delta^{-a\alpha} \rfloor} B(x_{j,k}, \delta^\alpha/2).$$

Cada una de estas bolas tiene diámetro en el intervalo $[c.\delta^\alpha/2, \delta^\alpha] \subseteq [\Phi_1(\delta^\alpha), \delta^\alpha]$.

Entonces, lo que se hace es reemplazar cada U_j con $j \in I_2$ por estas bolas, por lo que los miembros de este cubrimiento tienen sus diámetros en $[\Phi_1(\delta^\alpha), \delta^\alpha]$.

Entonces, si a este nuevo cubrimiento se lo escribe $\{ V_j \}_J$, sólo falta verificar que $\sum_J |V_j|^{s+\eta} < \varepsilon$, que se deduce de forma relativamente directa. :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_0}|U_i \cup \{q_i\}|^{s+\eta} + \sum_{i\in I_1}|U_i|^{s+\eta} + \sum_{j\in I_2}\sum_{k=1}^{\lfloor 2^a C|U_j|^a\delta^{-a\alpha}\rfloor}|B(x_{j,k},\delta^\alpha/2)|^{s+\eta} \\
&\leqslant \sum_{i\in I}\left((1+1/c)|U_i|^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}F}{\overline{\dim}^{\Phi}F+\eta}}\right)^{s+\eta} + \sum_{i\in I}|U_i|^{s+\eta} + \sum_{j\in I_2}2^aC|U_j|^a\delta^{-a\alpha}(\delta^\alpha)^{s+\eta} \\
&\leqslant (1+1/c)^{s+\eta}\sum_{i\in I}|U_i|^{\frac{(s+\eta)\overline{\dim}^{\Phi}F}{\overline{\dim}^{\Phi}F+\eta}} + \sum_{i\in I}|U_i|^s + 2^aC\sum_{j\in I_2}|U_j|^s|U_j|^{a-s}\delta^{\alpha(-a+s+\eta)} \\
&\leqslant (1+1/c)^{s+\eta}\sum_{i\in I}|U_i|^{\frac{(s+\eta)\overline{\dim}^{\Phi}F}{\overline{\dim}^{\Phi}F+\eta}} + \sum_{i\in I}|U_i|^s + 2^aC\delta^{a-s-\alpha(a-s-\eta)}\sum_{j\in I}|U_j|^s \\
&\leqslant ((1+1/c)^{s+\eta}+1+2^aC)\sum_{i\in I}|U_i|^{\min\left\{s,\frac{(s+\eta)\overline{\dim}^{\Phi}F}{\overline{\dim}^{\Phi}F+\eta}\right\}} \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}
$$

Una vez acotada esa sumatoria, se verifica entonces que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant s+\eta$, por lo que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta$.

Los demás apartados se deducen de manera análoga: Para la segunda parte del primer apartado, por ejemplo, se considera $s > \overline{\dim}^{\Phi}(E)$ y mediante el mismo procedimiento se concluye que $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant s+\eta$, y de esto que $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta$.

□

Teorema 3.2.17. *Sean Φ, Φ_1 funciones admisibles, X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado. , con $0 < \dim_A(E) < \infty$ Y $\eta \in (0, \dim_A(E))$.*

(I) *Supóngase que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$. Entonces:*

- *Si $\exists \Delta, b > 0$ tales que para todo $\delta < \Delta$ se tiene que:*

$$\Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant (\Phi(\delta))^b\,,\ \alpha := \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E)-\eta} \tag{3.4}$$

  entonces $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \eta$. En particular, si para todo $\alpha' > 1$ existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ vale $\Phi_1(\delta^{\alpha'}) \leqslant \Phi(\delta)^b$ entonces vale la desigualdad anterior para todo η, de modo que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) = 0$.

- *Si para todo $\delta_0 > 0$ existe $\delta < \delta_0$ tal que vale (3.4), entonces $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \eta$ En particular, si para todo $\alpha' > 1$ existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ vale $\Phi_1(\delta^{\alpha'}) \leqslant \Phi(\delta)^b$, entonces $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) = 0$.*

(II) *Si $\underline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$ y vale (3.4) para todo $\delta < \Delta$ entonces $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \eta$. En particular, si para todo $\alpha' > 1$ existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ se tiene que $\Phi_1(\delta^{\alpha'}) \leqslant \Phi(\delta)^b$, entonces $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) = 0$.*

Demostración. La demostración de esto es similar a la anterior: Por ejemplo, para el primer item de (1), se pueden tomar $s, \varepsilon > 0$, y $t < 1$ suficientemente chico tal que $t/(t+\eta) < \text{mín}\{b, 1\}$, y un a como en la demostración anterior. Como

$$\text{mín}\left\{s, \frac{(s+\eta)t}{t+\eta}\right\} > \overline{\dim}^{\Phi}(E) = 0,$$

por definición existe $\delta_0 < \Delta$ tal que para todo $\delta < \delta_0$ se puede dar un cubrimiento $\{U_i\}$ de E con $\Phi(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ para todo i, y:

$$\sum_i |U_i|^{\text{mín}\left\{s, \frac{(s+\eta)t}{t+\eta}\right\}} \leqslant ((1+1/c)^{s+\eta} + 1 + 2^a C)^{-1}\varepsilon,$$

con c, C como antes. Modificando este cubrimiento como en la anterior demostración, se puede dar otro cubrimiento $\{V_i\}$ de E tal que sus diámetros están en el rango $[\Phi_1(\delta^\alpha), \delta^\alpha]$, y cumple que

$$\sum |V_i|^{s+\eta} < \varepsilon$$

por lo que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant s+\eta$, de donde se obtiene que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \eta$.

□

Ahora, se demuestra un lema que será útil para un corolario posterior:

Lema 3.2.18. *Sea Φ tal que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) > 0$. Entonces, existe $\gamma > 1$ tal que:*

$$\overline{\dim}^{\varphi}(E) > 0\,, \textit{ para todo } C = [\varphi] \in N_{\Phi,\gamma}$$

Demostración. Sea $\overline{\dim}^{\Phi}(E) > \eta > 0$, y $1 < \gamma \leqslant \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E)-\eta}$. Entonces, si $C \in N_{\Phi,\gamma}$ existe un representante de suyo φ tal que

$$\Phi(\delta^\gamma)^\gamma \leqslant \varphi(\delta) \leqslant \Phi(\delta^{1/\gamma})^{1/\gamma}.$$

Por absurdo, supóngase que $\overline{\dim}^{\varphi}(E) = 0$. Por el teorema anterior y la elección de γ quedaría que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \eta$. □

Observación 3.2.19. En lo anterior se puede tomar $\gamma = \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E)-\overline{\dim}^{\Phi}(E)/2}$. Esta expresión aparecerá en el próximo resultado para poder usar el Teorema 3.2.17.

Corolario 3.2.20. *Sea X uniformemente perfecto con más de un elemento, $E \subseteq X$ totalmente acotado tal que $\dim_A(E) < \infty$. Entonces, las funciones $[\Phi] \to \overline{\dim}^{\Phi}(E)$ y $[\Phi] \to \underline{\dim}^{\Phi}(E)$ son continuas para la topología anteriormente introducida sobre $A/\equiv$.*

Demostración. Se demuestra esto para la primera de las funciones, que se denota f. Alcanza con ver que para cualquier $[\Phi]$ y cualquier V entorno abierto de $f([\Phi])$ existe un entorno abierto U de $[\Phi]$ tal que $f(U) \subseteq V$. Se tratará esto por casos:

- $f([\Phi]) = \overline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$: Como la imagen de la función está contenida en el intervalo $[0, \dim_A(E)]$, si $\dim_A(E) = 0$ entonces f es constante, por lo que es continua. de lo contrario, basta con considerar a entornos V de la forma $[0, \eta)$, $\eta \in (0, \dim_A(E))$. Sea $\alpha := \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E)-\eta} > 1$. Se puede considerar entonces el entorno $U = N_{\Phi,\alpha}$. Se verá que $f(U) \subseteq V$:

  Sea entonces $C \in N_{\Phi,\alpha}$, por lo que existe un representante $\varphi \in C$ tal que, para δ suficientemente chico, $\Phi(\delta^\alpha)^\alpha \leqslant \varphi(\delta) \leqslant \Phi(\delta^{1/\alpha})^{1/\alpha}$. Pero, por 3.2.17 con $b = 1/\alpha$ se deduce que $\overline{\dim}^{\varphi}(E) \leqslant \eta$.

- $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = \dim_A(E)$: En este caso, se pueden considerar entornos de la forma $V = (\dim_A(E) - \eta, \dim_A(E)]$, con $\eta \in (0, \dim_A(E))$. Entonces, sea $m \in (1,2)$ tal que $(m-1)\dim_A(E) < \eta/2$. Se quiere ver que $U = N_{\Phi,m}$ sirve:

  Para esto, sea $[\phi] \in N_{\Phi,m}$, por lo que se tiene que $\Phi(\delta^m) \leqslant \phi(\delta)^{1/m}$ para δ suficientemente chico. Como $\overline{\dim}^{\phi}(E) \leqslant \dim_A(E)$, se tiene que

  $$m < \frac{\overline{\dim}^{\phi}(E) + \eta/2}{\overline{\dim}^{\phi}(E)} =: \alpha$$

  por lo que $\Phi(\delta^{\alpha}) \leqslant \phi(\delta)^{1/m}$. Entonces, analizando por casos:

  Si $\overline{\dim}^{\phi}(E) + \eta/2 \geqslant \dim_A(E)$, entonces $\overline{\dim}^{\phi}(E) \in V$.

  Si $\overline{\dim}^{\phi}(E) + \eta/2 < \dim_A(E)$, se tiene que $\eta/2 \in [0, \dim_A(E) - \overline{\dim}^{\phi}(E))$. Pero por eso,

  $$m \leqslant \frac{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\phi}(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\phi}(E) - \eta/2}$$

  de donde se obtendría por lo anterior que:

  $$\dim_A(E) = \overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\phi}(E) + \eta/2 < \dim_A(E)$$

  que es absurdo.

  Por lo tanto, se tiene que $\overline{\dim}^{\phi}(E) \in V$ para todo $[\phi] \in N_{\Phi,m}$.

- $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \in (0, \dim_A(E))$: Sea $\eta \in [0, \dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E))$, que se puede tomar sin pérdida de generalidad suficientemente chico tal que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) + 2\eta < \dim_A(E)$. Sea $V = B(\overline{\dim}^{\Phi}(E), \eta)$. Se busca $\beta > 1$ tal que $f(N_{\Phi_\beta}) \subseteq V$. Entonces, en primer lugar sea $1 < m < 2$ tal que $(m-1) \cdot \dim_A(E) < \eta$. Se considera el siguiente β:

  $$\beta := \text{mín}\left\{ \alpha, \frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}, m, \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E)/2}, \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E) - \eta} \right\},$$

  $$\text{con } \alpha = \frac{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E) - \eta}.$$

  Sea entonces $C \in N_{\Phi,\beta}$, y Φ_1 un representante suyo tal que, para δ chico,

  $$\Phi(\delta^{\beta})^{\beta} \leqslant \Phi_1(\delta) \leqslant \Phi(\delta^{1/\beta})^{1/\beta}.$$

  Entonces, se quiere ver que $\Phi_1(\delta^{\alpha}) \leqslant (\Phi(\delta))^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}}$, ya que en ese caso por el Teorema 3.2.16 se podría concluir que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$.

  Ahora, se sabe que $\Phi_1(\delta^{\alpha}) \leqslant \Phi(\delta^{\alpha/\beta})^{1/\beta}$, de modo que sólo falta verificar que:

  $$\Phi(\delta^{\alpha/\beta})^{1/\beta} \leqslant (\Phi(\delta))^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}},$$

  pero esto se deduce directamente de la elección de β, por lo que:

  $$\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta,$$

y sólo falta ver que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi_1}(E) + \eta$. La idea será, naturalmente utilizar el resultado 3.2.16 nuevamente:

Por el ítem anterior y la elección de β se sabe que $0 < \overline{\dim}^{\Phi_1}(E) < \dim_A(E)$. Sea

$$\alpha_1 := \frac{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi_1}(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi_1}(E) - \eta}.$$

Para ver que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi_1}(E) + \eta$, basta ver que:

$$\Phi(\delta^{\alpha_1}) \leqslant \Phi_1(\delta)^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)+\eta}{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)}}.$$

Ahora, se debe ver que $\beta \leqslant \frac{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)+\eta}{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)}$: Por la elección de m,

$$\eta > (m-1)\dim_A(E) > (m-1)\overline{\dim}^{\Phi_1}(E),$$

por lo que $\frac{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)+\eta}{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)} > m \geqslant \beta$. Con esto en mente, y notando que:

$\alpha_1 \geqslant \frac{\dim_A(E)}{\dim_A(E)-\eta} \geqslant \beta$, se tiene que:

$$\Phi(\delta^{\alpha_1}) \leqslant \Phi(\delta^{\beta}) \leqslant \Phi_1(\delta)^{1/\beta} \leqslant \Phi_1(\delta)^{\frac{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi_1}(E)+\eta}}.$$

De este modo, $f(N_{\Phi,\beta}) \subseteq V$.

□

En los teoremas anteriores, se tomó primero un subconjunto E fijo, para después demostrar que si dos funciones cumplen cierta desigualdad (con unos exponentes que dependen de E) entonces se tienen desigualdades con las dimensiones de estas funciones en E. Resulta natural entonces preguntarse si se puede enunciar un resultado que no tenga a E fijo: En otras palabras, que si dos funciones admisibles cumplen cierta desigualdad, entonces se tienen desigualdades como antes **para todo** E. Si el espacio X es doblante, se puede hacer esto (recordar la Proposición 3.2.4):

Corolario 3.2.21. *Sean Φ, Φ_1 admisibles, X un espacio uniformemetne perfecto y doblante con mas de un elemento, y $E \subseteq X$ totalmente acotado. Supóngase que existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ y un $\eta > 0$ vale:*

$$\Phi_1(\delta^{\frac{\dim_A(X)}{\dim_A(X)-\eta}}) \leqslant \Phi(\delta)^{\frac{\dim_A(X)}{\dim_A(X)+\eta}}. \tag{3.5}$$

- *Si $\overline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$ y $\eta \in [0, \dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E))$, entonces*

$$\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta.$$

- *$\underline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$ y $\eta' \in [0, \dim_A(E) - \underline{\dim}^{\Phi}(E))$, entonces*

$$\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta'.$$

Además, si para todo $\delta_0 > 0$ existe $\delta < \delta_0$ tal que vale (3.5) y $\overline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$, y $\eta \in [0, \dim_A(E) - \overline{\dim}^{\Phi}(E))$, entonces $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$.

Demostración. Como $\frac{x}{x-\eta}$ es decreciente en $\eta \in (\eta, \infty)$, se tienen las desigualdades:

$$1 \leqslant \frac{\dim_A(X)}{\dim_A(X)-\eta} \leqslant \frac{\dim_A(E)-\underline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E)-\underline{\dim}^{\Phi}(E)-\eta} \leqslant \frac{\dim_A(E)-\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E)-\overline{\dim}^{\Phi}(E)-\eta}$$

$$1 \geqslant \frac{\dim_A(X)}{\dim_A(X)+\eta} \geqslant \frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta} \geqslant \frac{\underline{\dim}^{\Phi}(E)}{\underline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}$$

Por lo tanto, los casos $\overline{\dim}^{\Phi}(E) > 0$ y $\underline{\dim}^{\Phi}(E) > 0$ se deducen del resultado 3.2.16 y los casos $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$ y $\underline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$ del resultado 3.2.17. □

Con estos resultados en mente, se puede demostrar el siguiente resultado, que permite dar condiciones suficientes para que dos funciones admisibles sean equivalentes:

Corolario 3.2.22. *Sean Φ, Φ_1 admisibles:*

(I)
- *Si para todo $\alpha > 1$ existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ vale :*

$$\Phi_1(\delta^{\alpha}) \leqslant (\Phi(\delta))^{1/\alpha} \tag{3.6}$$

  (que vale por ejemplo si existe $0 < c < \infty$ tal que $\overline{\lim}\frac{\Phi_1(c\delta)}{\Phi(\delta)} < \infty$), entonces $\Phi_1 \preceq \Phi$.
- *Si en cambio sólo se asume que para todo $\alpha > 1, \delta_0 > 0$ existe $\delta < \delta_0$ tal que vale (3.6) (que se cumple por ejemplo si existe $0 < c < \infty$ tal que $\underline{\lim}\frac{\Phi_1(c\delta)}{\Phi_(\delta)} < \infty$), entonces para todo X uniformemente perfecto con más de un elemento, y todo $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado con $\dim_A(E) < \infty$ vale que $\dim^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E)$.*

(II) *Si para todo $\alpha > 1$ existe $\Delta > 0$ tal que para $\delta < \Delta$ valen las desigualdades:*

$$(\Phi(\delta^{\alpha}))^{\alpha} \leqslant \Phi_1(\delta) \leqslant (\Phi(\delta^{\frac{1}{\alpha}}))^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.7}$$

(que se da por ejemplo si existen constantes $0 < c_1, c_2 < \infty$ tales que $\overline{\lim}\frac{\Phi_1(c_1\delta)}{\Phi(\delta)} < \infty$ y $\overline{\lim}\frac{\Phi(c_2\delta)}{\Phi_1(\delta)} < \infty$), entonces $\Phi \equiv \Phi_1$.

Demostración. Para la primera parte del primer apartado, se debe ver que para todos X, E valen $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E)$ y $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi}(E)$. Sean entonces X uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado con $\dim_A(E) < \infty$. Por un lado, si $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = \dim_A(E)$, por el resultado 3.2.12 vale que

$$\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \dim_A(E) = \overline{\dim}^{\Phi}(E),$$

y se tiene una desigualdad. A su vez, en caso de que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = 0$, se tiene que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) = 0\overline{\dim}^{\Phi}(E)$ por el Teorema 3.2.17. Entonces, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $0 < \overline{\dim}^{\Phi}(E) < \dim_A(E)$. Ahora, para $\eta > 0$ se puede considerar aplicar (3.6) con:

$$\alpha = \text{mín}\left\{ \frac{\dim_A(E)-\overline{\dim}^{\Phi}(E)}{\dim_A(E)-\overline{\dim}^{\Phi}(E)-\eta}, \frac{\overline{\dim}^{\Phi}(E)+\eta}{\overline{\dim}^{\Phi}(E)} \right\}.$$

Por el Teorema 3.2.16 se deduce que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$.

Como η es arbitrario, se tiene que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E)$. De forma similar se deduce la desigualdad para $\underline{\dim}^{\Phi_1}(E)$ y $\underline{\dim}^{\Phi}(E)$, de modo que $\Phi_1 \preceq \Phi$.

Por los otros apartados de los Teoremas 3.2.16 y 3.2.17 se deduce la segunda parte del primer apartado, y el segundo apartado es un corolario directo del primero.

□

Un corolario interesante del Corolario 3.2.22 es el siguiente, que permite decir que sin pérdida de generalidad en la definición 3.2.7 se puede trabajar con funciones admisibles que sean además difeomorfismos (definidos sobre $(0,1)$, además):

Proposición 3.2.23. *Sea Φ admisible. Entonces, existe una función $\Phi_1 : (0,1) \to (0,1)$ admisible que además es un difeomorfismo C^∞, tal que $\Phi_1 \equiv \Phi$.*

Demostración. Para demostrar esto, se definirá inductivamente una función (que después se suavizará) que cumpla (3.6). En primer lugar, como Φ es admisible, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que Φ está definida en $(0, 2^{-N}]$ y $\Phi(2^{-N}) < 1$. Entonces, como se dijo, primero se definirá una $\Phi_2 : (0,1] \to (0,1]$ admisible de la siguiente forma: sobre el intervalo $[2^{-N}, 1]$, es lineal con $\Phi_2(1) = 1$ y $\Phi_2(2^{-N}) = \Phi(2^{-N})$. Ahora, para definirla en $(0, 2^{-N})$ se la definirá inductivamente sobre intervalos de la forma $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$ con $n \geqslant N$:

Entonces, supóngase que se la tiene definida en el intervalo $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ (en realidad se la tiene definida en $[2^{-n}, 1]$). Se consideran dos casos:

- $\Phi(2^{-n-1}) < \Phi_2(2^{-n})$: En este caso se define $\Phi_2(2^{-n-1}) := \Phi(2^{-n-1})$ y se la puede extender linealmente en $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$.
- $\Phi(2^{-n-1}) = \Phi_2(2^{-n})$: En este caso, como $\Phi(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$, existe m el menor entero tal que $m > n$ y $\Phi(2^{-m}) < \Phi(2^{-n})$. Se define:

$$\Phi_2(2^{-m}) := \text{máx}\{\, \Phi_2(2^{-n})/2, \Phi(2^{-m}) \,\},$$

  y se la puede definir en $[2^{-m}, 2^{-n}]$ extendiendola linealmente.

Entonces, se puede ver que Φ_2 es estrictamente creciente en $(0,1]$, y cumple las siguientes dos desigualdades para $\delta \in (0, 2^{-N-1})$:

$$\Phi_2(\delta/4) \leqslant \Phi(\delta)\,,\ 2\Phi_2(2\delta) \geqslant \Phi(\delta).$$

Ahora, los puntos donde Φ_2 no es suave son numerables (y son los extremos de los intervalos sobre los que se hizo la hipótesis inductiva), de modo que se pueden suavizar de tal forma que se obtenga una función admisible $\Phi_1 : (0,1) \to (0,1)$ suave en su dominio, estrictamente creciente, y tal que para $\delta \in (0, 2^{-N})$ cumple que:

$$\Phi_2(\delta)/2 \leqslant \Phi_1(\delta) \leqslant 2\Phi_2(\delta).$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Phi_1(\delta)}{\delta} \leqslant \frac{2\Phi_2(\delta)}{\delta} \leqslant \frac{2\Phi(4\delta)}{\delta} = 8 \cdot \frac{\Phi(4\delta)}{4\delta} \to 0,$$

por lo que Φ_1 es admisible. Pero, además, se tiene que, para $\delta(0, 2^{-N-3})$ vale:

$$\frac{\Phi(\delta/2)}{4} \leqslant \frac{\Phi_2(\delta)}{2} \leqslant \Phi_1(\delta) \leqslant 2\Phi_2(\delta) \leqslant 2\Phi(4\delta).$$

Por lo comentado en el Cololario 3.2.22, se deduce que $\Phi_1 \equiv \Phi$, y como es estrictamente creciente es un difeomorfismo. □

Con el Cololario 3.2.22 en mente, se pueden dar un par de comentarios acerca del orden parcial $\preceq$ mencionado antes:

Teniendo en cuenta los comentarios en el enunciado del corolario 3.2.22, uno podría intentar buscar una relación entre las condiciones (para Φ_1, Φ_2 admisibles):

1. $\Phi_1 \prec \Phi_2$ (o sea, teniendo $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ y $\Phi_1 \not\equiv \Phi_2$). 2. $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\Phi_1(\delta)}{\Phi_2(\delta)} = 0$.

O condiciones parecidas.

Discutiendo la vuelta

Para discutir una suerte de "vuelta" entre las dos condiciones mencionadas, es claro en primer lugar que si vale la condición (2), entonces $\Phi_1 \preceq \Phi_2$. Sin embargo, puede ocurrir que $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ incluso valiendo (2), como se verá con el siguiente ejemplo:

Las dos funciones consideradas son:

- $\Phi_1 : (0, \frac{1}{5}) \to (0, \frac{1}{5})$ definida como $\Phi_1(\delta) := \frac{\delta}{-\log(\delta)}$.
- $\Phi_2 : (0, a) \to \mathbb{R}$ dada por : $\Phi_2(\delta) := \frac{\delta}{\log(-\log(\delta))}$, con a suficientemente chico tal que sea admisible.

Para ver que es admisible, notar que $\lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi_2(\delta)}{\delta} = 0$, por lo que en un intervalo suficientemente chico se tienen todas las propiedades buscadas.

Claramente $\lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi_1(\delta)}{\Phi_2(\delta)} = 0$. Pero además se sabe por la Proposición 3.2.14 que las dimensiones de Φ_1 son siempre iguales a las dimensiones Box. Por lo tanto, si se viera lo mismo para Φ_2, estas funciones cumplirían lo buscado:

Entonces si Φ_2 cumple la condición de la Proposición 3.2.14 queda demostrado que estas dos funciones sirven como ejemplo. Sin embargo, una cuenta demuestra que ese es el caso, de modo que $\Phi_1 \equiv \Phi_2$. En realidad, se puede decir un poco más:

Esta idea de anidar logaritmos se puede continuar de la siguiente forma:

Se pueden definir $L_k(\delta) := \overbrace{\log(\log(\log(\cdots(}^{k \text{ logarítmos anidados}} - \log(\delta))\cdots)))$ con $k \geqslant 0$. Con la convención de que $L_0(\delta) = -\log(\delta)$ (no hay logarítmos anidados afuera del "$-\log(\delta)$"). Se pude ver que $L_k(\delta) > 0$ para $\delta > 0$ lo suficientemente chico, y que $\lim_{\delta \to 0} L_k(\delta) = +\infty$.

Entonces, sea $\{\Phi_k\}_{k \geqslant 0}$ la familia de funciones definidas cada una en un intervalo $(0, \alpha_k)$ con $\alpha_k > 0$ lo suficientemente chicos, por:

$$\Phi_k(\delta) := \frac{\delta}{L_k(\delta)}.$$

Inmediatamente se puede ver que $\lim_{\delta \to 0} \Phi_k(\delta) = 0, \forall k \geqslant 0$.

Observación 3.2.24. $L_k'(\delta) = \frac{-\delta^{-1}}{\prod_{i=0}^{k-1} L_i(\delta)}$ para todo $k \geqslant 0$, donde por convención la productoria vacía es 1. Como consecuencia se tiene que:

$$\Phi_k'(\delta) = \frac{1}{L_k(\delta)} - \delta \frac{L_k'(\delta)}{L_k^2(\delta)} = \frac{1}{L_k(\delta)} + \frac{1}{L_k(\delta)} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} L_i(\delta)}.$$

Lema 3.2.25. *Se tiene que:*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log(\delta)}{\log(\Phi_k(\delta))} = 1.$$

Demostración. Se puede aplicar L'hopital y luego la observación anterior:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\log(\delta)}{\log(\Phi_k(\delta))}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^{-1}}{\Phi_k(\delta)^{-1}\Phi_k'(\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^{-1}}{\delta^{-1}L_k(\delta)\left(\frac{1}{L_k(\delta)}+\frac{1}{L_k(\delta)}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}L_i(\delta)}\right)}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}L_i(\delta)}}=1.$$

□

Lema 3.2.26.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi_k(\delta)}{\Phi_{k+1}(\delta)}=0,\quad \forall k\geqslant 0.$$

Demostración. El numerador y el denominador tienden a 0, con lo cual se puede aplicar L'hopital y usar la observación anterior:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi_k(\delta)}{\Phi_{k+1}(\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\Phi_k'(\delta)}{\Phi_{k+1}'(\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{1}{L_k(\delta)}+\frac{1}{L_k(\delta)}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}L_i(\delta)}}{\frac{1}{L_{k+1}(\delta)}+\frac{1}{L_{k+1}(\delta)}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k+1}L_i(\delta)}}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{L_{k+1}(\delta)}{L_k(\delta)}+\frac{L_{k+1}(\delta)}{L_k(\delta)}\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}L_i(\delta)}}{1+\frac{1}{\prod_{i=0}^{k+1}L_i(\delta)}}.$$

Luego como el denominador tiende a 1 y el numerador tiende a 0 se sigue el resultado.

□

Por todo esto, esta familia de funciones cumple la propiedad del Lema 3.2.25, con lo cual son equivalentes.

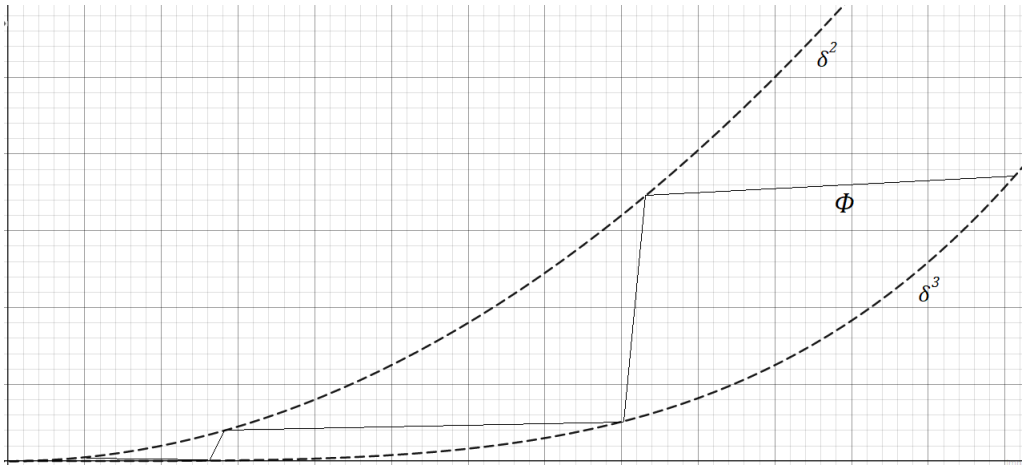
Discutiendo la ida

Ahora, para discutir un poco una "ida" parcial entre (1) y (2), se puede utilizar el Corolario 3.2.22 para garantizar lo siguiente:

Observación 3.2.27. En caso de valer (1), se tiene que $\liminf_{\delta\to 0}\frac{\Phi_1(\delta)}{\Phi_2(\delta)}=0$. Esto se deduce fácilmente del corolario mencionado, debido a que, como se está suponiendo que es falso que $\Phi_2\preceq\Phi_1$, se deduce que $\limsup_{\delta\to 0}\frac{\Phi_2(\delta)}{\Phi_1(\delta)}=\infty$, y de esto se obtiene lo dicho.

Sin embargo, aunque valga (1) puede ocurrir que el límite de la segunda condición no exista, o sea que $\limsup_{\delta\to 0}\frac{\Phi_1(\delta)}{\Phi_2(\delta)}>0$. Se estudiará ahora un ejemplo de esto:

La idea en sí es bastante simple: consiste en dar una función que este acotada entre $\Phi_{1/3}:=\delta^3$ y $\Phi_{1/2}:=\delta^2$ (que son funciones admisibles no equivalentes, como se verá) pero que coincida con ambas infinitas veces en determinados lugares para dar un contraejemplo.



Idea de contraejemplo

Sea entonces $E = \{0\} \bigcup \{\frac{1}{n^2}\}$. En la sección de ejemplos (3.6.1) se demostrará que $\dim^{\Phi_{1/3}}(E) = \dim_{1/3}(E) = 1/7 < 1/6 < 1/5 = \dim_{1/2}(E) = \dim^{\Phi_{1/2}}(E)$. El objetivo será dar una Φ tal que coincida infinitamente con δ^2 (para que el limite superior sea 1) y que cumpla $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant 1/6$. Para esto, se deben elegir ciertos elementos δ_k apropiadamente, que serán los puntos donde $\Phi(\delta_n) = \delta_n^3$:

En primer lugar, como $\dim_{1/3}(E) = 1/7 < 1/6$, vale que para todos $\varepsilon, \delta_0 > 0$ existen un $0 < \delta < \delta_0$ y un cubrimiento $\{U_i\}$ de E tales que $\delta^3 \leqslant |U_i| \leqslant \delta \; \forall \, i$ y $\sum_i |U_i|^{1/6} < \varepsilon$.

Particularizando para $\varepsilon = \delta_0 = 1/n$, se tiene que existen unos $\delta_n \to 0$ y unos cubrimientos $\{U_i^{(n)}\}_i$ tales que $\delta_n^3 \leqslant |U_i^{(n)}| \leqslant \delta_n \; \forall \, i$ y $\sum_i |U_i^{(n)}|^{1/6} < 1/n$. Además, es claro que se puede tomar δ_n suficientemente chico respecto de δ_{n-1} de tal forma que la sucesión decrezca rápido, por ejemplo con $\delta_n < \delta_{n-1}^{3/2}$. Entonces, se procede con la construcción de Φ:

El dominio de Φ se puede tomar como $(0, \delta_1)$. Entonces, para construir la función, a partir de (δ_1, δ_1^3) se puede trazar un segmento horizontal hasta intersecar al gráfico de $\Phi_{1/2}$. A partir de ese punto, se toma una recta (o, en su defecto, cualquier curva creciente entre $\Phi_{1/3}$ y $\Phi_{1/2}$) hasta (δ_2, δ_2^3), y así sucesivamente. Como $\delta_n \to 0$, esta función Φ está definida en $(0, \delta_1)$, y cumple que $\Phi \leqslant \Phi_{1/2}$, por lo que $\Phi \preceq \Phi_{1/2}$. Además, $\limsup \frac{\Phi(\delta)}{\Phi_{1/2}(\delta)} = 1$ porque coinciden infinitas veces en unos $\delta_n' < \delta_n$, y coincide con $\Phi_{1/3}$ en los δ_n. Entonces, para ver que efectivamente es un contraejemplo sólo falta ver que $\Phi \prec \Phi_{1/2}$. Para esto, se verá que $\underline{\dim}^{\Phi}(E) < 1/6$:

Sean entonces $\varepsilon, \delta_0 > 0$. A su vez, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y $\delta_n < \delta_0$. Entonces, tomando este δ_n se puede concluir por definición que $\underline{\dim}^{\Phi}(E) \leqslant 1/6$. Por lo tanto, $\Phi \prec \Phi_{1/2}$.

3.2.3. Interpolando con las dimensiones generalizadas

El otro resultado principal que se demostrará en este trabajo sobre dimensiones generalizadas es el siguiente:

Teorema 3.2.28. *Sea X uniformemente perfecto con más de un elemento, $E \subseteq X$ compacto. Entonces, para todo $s \in [\dim_H(E), \overline{\dim}_B(E)]$ existe una función admisible Φ_s tal que:*

- $\overline{\dim}^{\Phi_s}(E) = s$.
- $\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) = \min\{s, \underline{\dim}_B(E)\}$.
- *si* $\dim_H(E) \leqslant s \leqslant t \leqslant \overline{\dim}_B(E)$, *entonces* $\Phi_s \preceq \Phi_t$.

Demostración. En primer lugar, como E es compacto es totalmente acotado, por lo que E cumple lo de la definición 3.2.7 . Como X es uniformemente perfecto, existe un $c \in (0, \frac{1}{2})$ tal que X es c-uniformemente perfecto. Además, como $\frac{1}{-\log\delta} \to 0$, existe $\Delta \in (0, \frac{1}{5})$ tal que para todo $\delta \in (0, \Delta)$ se tiene

$$0 < \frac{\delta}{-\log\delta} < \frac{c\delta}{3}.$$

Si $\dim_H(E) = \overline{\dim}_B(E)$, entonces $\Phi_{\dim_H(E)}(\delta) = \frac{\delta}{-\log\delta}$ satisface todas las condiciones por la proposición 3.2.14, por lo que sin pérdida de generalidad $\dim_H(E) < \overline{\dim}_B(E)$. La demostración se dividirá en tres partes, una por cada parte del teorema.

(i) En primer lugar, tomando $\Phi_{\overline{\dim}_B(E)}(\delta) := \frac{\delta}{-\log\delta}$, las primeras dos condiciones a probar se satisfacen para $s = \overline{\dim}_B(E)$, por la proposición 3.2.14. Entonces, se puede estudiar el caso $s \in (\dim_H(E), \overline{\dim}_B(E))$ ($s = \dim_H(E)$ se verá después). Como $s > \dim_H(E)$, para todo $\delta \in (0, \Delta)$ existe un cubrimiento $\{V_i\}$ de E tal que $|V_i| \leqslant \delta$ para todo i y $\sum |V_i|^s \leqslant 2^{-1-2s}$. Se puede suponer que para todo i, $V_i \neq \varnothing$, por lo que existe $p_i \in V_i$. Ahora, para cada i se tiene que $V_i \subseteq B(p_i, \text{máx}\{2|V_i|, 2^{-1-\frac{2i}{s}}\})$, por lo que estas bolas forman un cubrimiento (de abiertos) para E, y cada una de estas tiene diámetro positivo (X es uniformemente perfecto). Pero por la compacidad de E, se tiene entonces que existe un subcubrimiento finito $\{U_i\}$ de E. Ahora:

$$\begin{aligned}\sum_i |U_i|^s \leqslant \sum |B(p_i, \text{máx}\{2|V_i|, 2^{-1-\frac{2i}{s}}\})|^s &\leqslant \sum (2^{-\frac{2i}{s}})^s + \sum (4|V_i|)^s \\ &\leqslant \frac{1}{3} + 4^s \sum |V_i|^s < 1.\end{aligned}$$

Como $\{U_i\}$ es finito, $\text{mín}_i |U_i| > 0$, por lo que se puede definir $\Phi_s : (0, \Delta) \to \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned}\Phi_s(\delta) = \sup\{x \in \left[0, \frac{\delta}{-\log\delta}\right] : &\text{ existe un cubrimiento finito } \{U_i\} \text{ de } E \text{ tal que} \\ &x \leqslant |U_i| \leqslant \delta \text{ para todo } i \text{ y } \sum_i |U_i|^s \leqslant 1\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por definición se tiene que, $\frac{\Phi_s(\delta)}{\delta} \leqslant \frac{1}{-\log\delta} \to 0$ y Φ_s es creciente en δ, por lo que es admisible ($\Phi_s(\delta) \leqslant \delta$ trivialmente).

Ahora, se verá que $\overline{\dim}^{\Phi_s} F \leqslant s$: Dados $\eta, \varepsilon > 0$, sea

$$\delta_0 = \text{mín}\{\epsilon^{\frac{1}{\eta}} c^{\frac{s}{\eta}} 4^{-\frac{s}{\eta}}, \Delta\}.$$

Por la definición (3.8), para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ existe un cubrimiento finito $\{W_i\}$ de E que satisface $\Phi_s(\delta)/2 \leqslant |W_i| \leqslant \delta$ y $\sum_i |W_i|^s \leqslant 1$, notando que cada W_i se puede suponer no vacío. Si $|W_i| \geqslant \Phi_s(\delta)$ entonces se deja el W_i sin modificar. De lo contrario, si $|W_i| < \Phi_s(\delta)$ entonces sea $w_i \in W_i$. Como X es c-uniformemente perfecto, existe $q_i \in X$ tal que $\Phi_s(\delta) \leqslant d(q_i, w_i) \leqslant \Phi_s(\delta)/c$, y se puede reemplazar

W_i por $Y_i := W_i \cup \{q_i\}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\Phi_s(\delta) \leqslant d(q_i, w_i) \leqslant |W_i \cup \{q_i\}| &\leqslant |W_i| + d(q_i, w_i) \\ &< \Phi_s(\delta) + \Phi_s(\delta)/c \\ &\leqslant 2\Phi_s(\delta)/c \\ &\leqslant 2\delta/(-c\log\delta) \\ &\leqslant \delta \text{ (porque } \delta < \Delta) \,.\end{aligned}$$

Además:

$$|W_i \cup \{q_i\}| \leqslant \frac{2\Phi_s(\delta)}{c} \leqslant \frac{4}{c}\frac{\phi_s(\delta)}{2} \leqslant \frac{4|W_i|}{c},$$

por lo que:

$$\sum_i |Y_i|^{s+\eta} \leqslant \sum_i |Y_i|^s \delta^\eta \leqslant \delta_0^\eta (\frac{4}{c})^s \sum_i |W_i|^s \leqslant \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se tiene que $\overline{\dim}^{\Phi_s} F \leqslant s + \eta$. Tomando $\eta \to 0$ se tiene que $\overline{\dim}^{\Phi_s}(E) \leqslant s$.

Para probar la otra desigualdad , supóngase por absurdo que $\overline{\dim}^{\Phi_s}(E) < s$. Entonces existe $\delta_1 \in (0, \Delta)$ tal que para todo $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ existe un cubrimiento $\{Z_i\}$ de E tal que para todo i se tiene que $\Phi_s(\delta_2) \leqslant |Z_i| \leqslant \delta_2$, y $\sum |Z_i|^s \leqslant 3^{-s}c^s$, notando que cada $Z_i \neq \varnothing$. Como $\overline{\dim}^{\Phi_s} F < s < \overline{\dim}_B(E)$, por la Proposición 3.2.14 existe $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tal que $\Phi_s(\delta_2) < \delta_2/(-\log\delta_2)$, y sea $\{Z_i\}$ el cubrimiento correspondiente a este δ_2. Se pueden considerar dos casos:

- $|Z_i| \leqslant \frac{\delta_2}{-log(\delta_2)}$: En este caso, se pueden tomar unos $z_i \in Z_i$, $x_i \in X$ tales que: $2|Z_i| \leqslant d(z_i, x_i) \leqslant \frac{2}{c}|Z_i|$. Entonces (como $\delta_2 < \Delta$):

$$\begin{aligned}2\Phi_s(\delta_2) \leqslant 2|Z_i| \leqslant d(z_i, x_i) \leqslant |Z_i \cup \{\, x_i \,\}\,| &\leqslant |Z_i| + \frac{2}{c}|Z_i| \leqslant \frac{3}{c}|Z_i| \\ &\leqslant \frac{3}{c}\frac{\delta_2}{-log(\delta_2)} < \delta_2.\end{aligned}$$

- $|Z_i| > \frac{\delta_2}{-log(\delta_2)}$: En este caso, se puede dejar a Z_i sin cambios, ya que cumple trivialmente que $|Z_i| \leqslant \frac{3}{c}|Z_i|$ y que $\frac{\delta_2}{-log(\delta_2)} \leqslant |Z_i| \leqslant \delta_2$.

Entonces, si en el primer caso se define $\widetilde{Z}_i := Z_i \cup \{\, x_i \,\}$ y en el segundo se define $\widetilde{Z}_i := Z_i$, es claro que $\{\, \widetilde{Z}_i \,\}$ es un cubrimiento de E y que $|\widetilde{Z}_i| \leqslant \frac{3}{c}|Z_i|$, por lo que: $\sum |\widetilde{Z}_i|^s \leqslant \sum((3/c)|Z_i|)^s \leqslant 3^s c^{-s} \sum |Z_i|^s \leqslant 1$, y $\text{mín}\,\{\, 2\Phi_s(\delta_2), \frac{\delta_2}{-log(\delta_2)} \,\} \leqslant |\widetilde{Z}_i| \leqslant \delta_2$.

Pero entonces, por la definición de Φ_s, $\Phi_s(\delta_2) \geqslant \text{mín}\,\{\, 2\Phi_s(\delta_2), \frac{\delta_2}{-log(\delta_2)} \,\} > \Phi_s(\delta_2)$, que es absurdo. Por lo tanto, se concluye que para todo $s \in (\dim_H(E), \overline{\dim}_B(E))$, vale que $\overline{\dim}^{\Phi_s}(E) = s$.

Resta considerar el caso $s = \dim_H(E)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \text{máx}\left\{\frac{1}{\overline{\dim}_B(E) - \dim_H(E)}, \frac{1}{\Delta}\right\}.$$

Se puede definir la siguiente función:

$$\Phi_s(\delta) := \text{mín}\{\Phi_{s+1/N}(\delta), \ldots, \Phi_{s+1/n}(\delta)\}\,,\ \delta \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]\,,\ n \geqslant N$$

Para todo $\delta \in (0, 1/N]$ se tiene que $\Phi_s(\delta) \leqslant \Phi_{s+1/N}(\delta) \leqslant \delta/(-\log\delta)$ con lo cual $\Phi_s(\delta)/\delta \to 0$. Para todo $n \geqslant N$ y $\delta \in (0, \Delta)$ se tiene que $\Phi_{s+1/n}(\delta) > 0$, entonces si $\delta > 0$ se deduce que $\Phi_s(\delta) > 0$. Además esta función es creciente,ya que si $\delta_1 \leqslant \delta_2$, por ejemplo $\delta_1 \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ y $\delta_2 \in (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}], n \geqslant m \geqslant N$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi_s(\delta_1) &= \text{mín}\{\Phi_{s+1/N}(\delta_1), \ldots, \Phi_{s+1/n}(\delta_1)\}\\ &\leqslant \text{mín}\{\Phi_{s+1/N}(\delta_1), \ldots, \Phi_{s+1/m}(\delta_1)\}\\ &\leqslant \text{mín}\{\Phi_{s+1/N}(\delta_2), \ldots, \Phi_{s+1/m}(\delta_2)\} = \Phi_s(\delta_2)\end{aligned}$$

por la monotonía de $\Phi_{s+1/i}$, por lo que Φ_s es admisible. Para todo $n \geqslant N$, y todo $\delta \in (0, \frac{1}{n})$ vale que $\Phi_s(\delta) \leqslant \Phi_{s+1/n}(\delta)$ por lo que por la Proposición 3.2.12 y el Corolario 3.2.22 , se tienen las desigualdades:

$$s = \dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi_s}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi_s}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi_{s+1/n}}(E) = s + \frac{1}{n}.$$

De esta forma, tomando $n \to \infty$ se tiene que $\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) = \overline{\dim}^{\Phi_s}(E) = s$ que era lo buscado.

(iii) Para verificar que las Φ_s dadas cumplen lo tercero, si $\dim_H(E) < s \leqslant t \leqslant \overline{\dim}_B(E)$, entonces para todo $\delta \in (0, \Delta)$ vale que $\Phi_s(\delta) \leqslant \Phi_t(\delta)$ por construcción. Todavía más ,si N es como antes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ y $\dim_H(E) + \frac{1}{n} < t$ y para todo $\delta \in (0, \frac{1}{n})$ se tiene que $\Phi_{\dim_H(E)}(\delta) \leqslant \Phi_{\dim_H(E)+1/n}(\delta) \leqslant \Phi_t(\delta)$. De esta forma por el Corolario 3.2.22, si $\dim_H(E) \leqslant s \leqslant t \leqslant \overline{\dim}_B(E)$ entonces $\Phi_s \preceq \Phi_t$.

(ii) Por la Proposición 3.2.12 Y la primera parte de esta demostración, se tiene que para todo $s \in [\dim_H(E), \overline{\dim}_B(E)]$:

$$\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) \leqslant \text{mín}\,\{\,\overline{\dim}^{\Phi_s}(E), \underline{\dim}_B(E)\,\} = \text{mín}\,\{\,s, \underline{\dim}_B(E)\,\}\,.$$

Por lo que resta por demostrar la otra desigualdad . Por las Proposiciones 3.2.12 y 3.2.14, se puede ver que vale la igualdad buscada en los casos $s = \dim_H(E)$ y $s = \overline{\dim}_B(E)$.

Ahora, para los restantes valores de s se consideran dos casos. Por un lado, si se tiene $s \in (\dim_H(E), \underline{\dim}_B(E)] \cap (\dim_H(E), \overline{\dim}_B(E))$, supóngase por absurdo que $\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) < s$. Sean t, t' tales que $\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) < t < t' < s$. Entonces, Como $t' < s < \underline{\dim}_B(E)$, se sabe que existe $\Delta \in (0, \text{mín}\,\{\,1, |\,X|\,\})$ tal que para cada $\delta \in (0, \Delta)$ vale que $N_\delta(E) \geqslant \delta^{-t'}$. De esta forma, reduciendo el valor de Δ de ser necesario, se puede asumir de ahora en adelante que, para cada $\delta \in (0, \Delta)$ se tiene que $\frac{\delta^{t-t'}}{(-\log(\delta))^t} > (1 + \frac{2}{c})^{-s}$, y $-\log(\delta) \geqslant 2(1 + \frac{2}{c})$. Ahora, $t > \underline{\dim}^{\Phi_s}(E)$ por lo que para cada $\delta_0 > 0$ existen $\delta \in (0, \text{mín}\,\{\,\Delta, \delta_0\,\})$ y un cubrimiento $\{\,U_i\,\}$ tales que $\Phi_s(\delta) \leqslant |U_i| \leqslant \delta$ para cada i, y además:

$$(1 + \frac{2}{c})^{-s} \geqslant \sum |U_i|^t \geqslant \sum |U_i|^s.$$

Pero $\delta < \Delta$ por lo que:

$$(1+\frac{2}{c})^{-s} < \frac{\delta^{t-t}}{(-\log(\delta))^t} = \delta^{-t'}\left(\frac{\delta}{-\log(\delta)}\right)^t,$$

Por lo que existe i tal que $\frac{\delta}{(-\log(\delta))} > |U_i| \geqslant \Phi_s(\delta)$.

Si i es tal que $|U_i| \geqslant \text{mín}\{\, 2\Phi_s(\delta), \frac{\delta}{(-\log(\delta)}\,\}$ entonces se puede dejar U_i en el cubrimiento sin modificaciones.

Si por otra parte i es tal que $|U_i| < \text{mín}\{\, 2\Phi_s(\delta), \frac{\delta}{-\log(\delta)}\,\}$ entonces como $U_i \neq \varnothing$, se puede tomar un $p \in U_i$. Entonces existe $q \in X$ tal que $2\Phi_s(\delta) \leqslant d(p,q) \leqslant 2\Phi_s(\delta)/c$, y se puede cambiar U_i en el cubrimiento por $U_i \cup \{\, q\,\}$, llamando al nuevo cubrimiento $\{\, V_i\,\}$. En el caso $|U_i| < \text{mín}\{\, 2\Phi_s(\delta), \frac{\delta}{-\log(\delta)}\,\}$, por la desigualdad triangular se tiene que:

$$\begin{aligned}
2\Phi_s(\delta) &\leqslant d(p,q) \leqslant |U_i \cup \{\, q\,\}\,| \leqslant |U_i| + d(p,q)\\
&\leqslant |U_i| + 2\Phi_s(\delta)/c \leqslant (1+2/c)|U_i|\\
&\leqslant 2(1+2/c)\Phi_s(\delta) \leqslant 2(1+2/c)\frac{\delta}{-\log(\delta)}\\
&\leqslant \delta.
\end{aligned}$$

Entonces para cada i se tiene que $\text{mín}\{\, \frac{\delta}{-\log(\delta)}, 2\Phi_s(\delta)\,\} \leqslant |V_i| \leqslant \delta$ y:

$$\sum_i |V_i|^s \leqslant \sum((1+2/c)|U_i|)^s = (1+\frac{2}{c})^s \sum |U_i|^s \leqslant 1,$$

Por lo tanto, $\Phi_s(\delta) \geqslant \text{mín}\{\, 2\Phi_s(\delta), \frac{\delta}{(-\log(\delta)}\,\} > \Phi_s(\delta)$ lo cual es una contradicción. En consecuencia, se sigue que $\underline{\dim}_s^{\Phi}(E) \geqslant s$ para cada $s \in (\dim_H(E), \underline{\dim}_B(E)]$.

Ahora supóngase que $s \in (\underline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(E))$. Por lo visto anteriormente en esta demostración, se tiene la desigualdad: $\Phi_{\underline{\dim}_B(E)} \preceq \Phi_s$ por lo que:

$$\text{mín}\{\, s, \underline{\dim}_B(E)\,\} = \underline{\dim}_B(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi_{\underline{\dim}_B(E)}}(E) \leqslant \underline{\dim}^{\Phi_s}(E).$$

Juntando ambos casos, se demuestra entonces que para cada $s \in [\dim_H F, \overline{\dim}_B(E)]$ vale que $\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) \geqslant \text{mín}\{\, s, \underline{\dim}_B(E)\,\}$ y en consecuencia se obtiene:

$$\underline{\dim}^{\Phi_s}(E) = \text{mín}\{\, s, \underline{\dim}_B(E)\,\}.$$

□

3.3. Dimensiones intermedias II

Los resultados de la sección anterior tienen una serie de consecuencias para las dimensiones intermedias, como por ejemplo (Teorema 3.3.3) que las funciones de dimensión intermedia $\theta \to \overline{\dim}_\theta(E)$ (con E relativamente genérico) son Lipschitz en los intervalos cerrados de la forma $[\theta, 1]$ con $\theta > 0$.

Primero, se debe ver un lema que relaciona las dimensiones Box y e intermedias, e ilustra también esa "similaridad" con las dimensiones Box:

Lema 3.3.1. *Sea X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, y $\dim_A(E) < \infty$. Entonces:*

- *Si $\overline{\dim}_B(E) > 0$, entonces para todo $\theta > 0$ vale que $\overline{\dim}_\theta(E) > 0$.*
- *Si $\underline{\dim}_B(E) > 0$, entonces para todo $\theta > 0$ vale que $\underline{\dim}_\theta(E) > 0$.*

Demostración. Se demuestra lo primero, ya que lo otro es análogo. Entonces, por absurdo sea $0 < \theta < 1$ tal que $\overline{\dim}_\theta(E) = 0$. Como se está suponiendo que $\overline{\dim}_B(E) > 0$, se tiene que $0 < \dim_A(E) < \infty$. Tomando entonces $\Phi(\delta) = \delta^{1/\theta}$ y $\Phi_1(\delta) = \frac{\delta}{-log(\delta)}$ con $\delta \in (0, 1/5)$, se tiene que $\Phi_1(\delta) \leqslant \delta = (\Phi(\delta))^\theta$, de modo que por el resultado 3.2.17 sería $0 = \overline{\dim}^{\Phi_1}(E) = \overline{\dim}_B(E)$ (por la Proposición 3.2.14), que es absurdo. □

Observación 3.3.2. Es natural entonces preguntarse si al pedir más hipótesis sobre $\overline{\dim}_B$ o $\underline{\dim}_B$ se puede obtener un resultado mejor. Para el caso $X = \mathbb{R}^n$ esto se tiene 4.2.20.

Teorema 3.3.3. *Sea X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, con $0 < \dim_A(E) < \infty$, y $0 < \theta \leqslant \phi \leqslant 1$. Entonces:*

$$\overline{\dim}_\theta(E) \leqslant \overline{\dim}_\phi(E) \leqslant \overline{\dim}_\theta(E) + \frac{(\phi - \theta)\overline{\dim}_\theta(E)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E))}{(\phi - \theta)\overline{\dim}_\theta(E) + \theta \dim_A(E)}, \tag{3.9}$$

y vale lo mismo para las dimensiones inferiores. Además, las funciones $\theta \to \overline{\dim}_\theta(E)$ y $\theta \to \underline{\dim}_\theta(E)$ son ambas $(\dim_A(E)/4\theta)$-Lipschitz en $[\theta, 1]$. En particular, son continuas en $(0, 1]$.

Demostración. La demostración consiste en usar el Teorema 3.2.16 con un η apropiado (que será el segundo término de la suma de (3.9)) :

La primera desigualdad es inmediata. Para la segunda, se puede primero sacar un par de casos particulares de la desigualdad:

- Si $\phi = \theta$, la desigualdad es trivialmente cierta.
- Si $\overline{\dim}_\theta(E) = \dim_A(E)$, se tiene también la desigualdad.
- Si $\overline{\dim}_\theta(E) = 0$, por el lema anterior también se obtiene la desigualdad.

De este modo, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $0 < \theta < \phi \leqslant 1$ y $0 < \overline{\dim}_\theta(E) < \dim_A(E)$. Entonces, se puede tomar por un lado la función admisible $\Phi(\delta) = \delta^{1/\theta}$ y, según sea $\phi < 1$ o $\phi = 1$, una función admisible Φ_1 que según el caso será $\Phi_1(\delta) = \delta^{1/\phi}$ o la función $\frac{\delta}{-log(\delta)}$ (con $\delta \in (0, 1/5)$ en este caso). Entonces, es claro que $\overline{\dim}^{\Phi}(E) = \overline{\dim}_\theta(E)$ y $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) = \overline{\dim}_\phi(E)$. Sea entonces:

$$\eta := \frac{(\phi - \theta)\overline{\dim}_\theta(E)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E))}{(\phi - \theta)\overline{\dim}_\theta(E) + \theta \dim_A(E)},$$

de modo que $0 < \eta < \dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E)$, y se puede considerar la constante $\alpha := \frac{\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E)}{\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E) - \eta}$ (que es la constante que aparece en el resultado 3.2.16). Una cuenta directa permite verificar que :

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{\overline{\dim}_\theta(E)}{\theta(\overline{\dim}_\theta(E) + \eta)},$$

por lo que se tienen las desigualdades:

$$\Phi_1(\delta^\alpha) \leqslant \delta^{\alpha/\phi} = \delta^{\frac{\overline{\dim}_\theta(E)}{\theta(\overline{\dim}_\theta(E)+\eta)}} = (\Phi(\delta))^{\frac{\overline{\dim}_\theta(E)}{(\overline{\dim}_\theta(E)+\eta)}}.$$

Por lo tanto, por el resultado 3.2.16 se deduce que $\overline{\dim}^{\Phi_1}(E) \leqslant \overline{\dim}^{\Phi}(E) + \eta$, que es la desigualdad (3.9).

Sólo falta ver que es Lipschitz en todo intervalo $[\theta, 1]$. Sean $0 < \theta \leqslant \theta' \leqslant \phi \leqslant 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_\phi(E) - \overline{\dim}_{\theta'}(E) &\leqslant \frac{(\phi-\theta')\overline{\dim}_{\theta'}(E)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_{\theta'}(E))}{(\phi-\theta')\overline{\dim}_{\theta'}(E) + \theta' \dim_A(E)} \\
&\leqslant (\phi-\theta')\frac{\overline{\dim}_{\theta'}(E)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_{\theta'}(E))}{\theta' \dim_A(E)} \\
&\leqslant (\phi-\theta')\frac{(\dim_A(E)/2)^2}{\theta' \dim_A(E)} \leqslant \frac{\dim_A(E)}{4\theta}(\phi-\theta').
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.4. En la sección de ejemplos de este capítulo se ve que esta cota es óptima.

Corolario 3.3.5. *Sea X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, con $0 < \dim_A(E) < \infty$, y $0 < \theta \leqslant \phi \leqslant 1$. Entonces:*

- $\overline{\dim}_\theta(E) \leqslant \overline{\dim}_\phi(E) \leqslant \frac{\phi}{\theta}\overline{\dim}_\theta(E)$, *y lo mismo para las dimensiones inferiores.*
- *Si* $\dim_A(X) < \infty$, $\overline{\dim}_\theta(E) \leqslant \overline{\dim}_\phi(E) \leqslant \overline{\dim}_\theta(E) + (1 - \frac{\theta}{\phi})(\dim_A(X) - \overline{\dim}_\theta(E))$.

Demostración. Para demostrar lo primero, basta con eliminar el término $(\phi-\theta)\overline{\dim}_\theta(E)$ de (3.9), y acotar $\frac{\dim_A(E)-\overline{\dim}_\theta(E)}{\dim_A(E)} \leqslant 1$. Para la segunda desigualdad, basta con notar que $(\phi-\theta)\overline{\dim}_\theta(E) + \theta \dim_A(E) \geqslant \phi\overline{\dim}_\theta(E)$.

□

Observación 3.3.6. Estas dos cotas fueron dadas originalmente en el primer paper sobre este tema([FFK18] y [Fal20]). Sin embargo, el resultado 3.3.3 mejora ambas, como se vió. Esto está relacionado con la forma en que se demostró este resultado: En el Teorema 3.3.3 lo se modificó un cubrimiento de dos formas distintas, "agrandando" algunos miembros del cubrimiento y "dividiendo" otros en bolas más chicas. Las demostraciones originales de los ítems del Corolario 3.3.5 se obtuvieron realizando este proceso por separado. Para la primera desigualdad, se "agrandan" cubrimientos para que sus diámetros estén en el rango adecuado, y para la primera desigualdad se "dividen" en bolas.

Como corolario directo, se obtienen un par de desigualdaes que mejoran el lema del principio de la subsección:

Corolario 3.3.7. *Se tienen las desigualdades:*

- $\overline{\dim}_\theta(E) \geqslant \theta \cdot \overline{\dim}_B(E)$, *y lo mismo para las inferiores.*
- $\overline{\dim}_\theta(E) \geqslant \dim_A(X) - \frac{\dim_A(X)-\overline{\dim}_B(E)}{\theta}$, *y lo mismo para las inferiores (siempre que* $\dim_A(X) < \infty$*).*

Corolario 3.3.8. *Sea X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, con $0 < \dim_A(E) < \infty$. Si $\overline{\dim}_B(E) > 0$, entonces la función $\theta \to \frac{\overline{\dim}_\theta(E)}{\theta}$ es estrictamente decreciente en $(0, 1]$, valiendo un resultado análogo para $\underline{\dim}_B(E)$ y $\underline{\dim}_\theta(E)$.*

Demostración. Sean $0 < \theta < \phi \leqslant 1$. Entonces, primero se hace notar la siguiente desigualdad:

$$\left(1 + \frac{(\phi-\theta)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E))}{(\phi-\theta)\overline{\dim}_\theta(E) + \theta \dim_A(E)}\right) < \frac{\phi}{\theta},$$

que se obtiene dando una desigualdad similar pero sin el término $\phi\overline{\dim}_\theta(E)$ del denominador. Entonces:

$$\frac{\overline{\dim}_\phi(E)}{\phi} \leqslant \frac{1}{\phi}\left(\overline{\dim}_\theta(E) + \frac{(\phi-\theta)\overline{\dim}_\theta(E)(\dim_A(E) - \overline{\dim}_\theta(E))}{(\phi-\theta)\overline{\dim}_\theta(E) + \theta \dim_A(E)}\right) < \frac{\overline{\dim}_\theta(E)}{\theta}.$$

□

Observación 3.3.9. Para $0 < \psi \leqslant \theta \leqslant 1$, vale que:

$$\overline{\dim}_\psi(E) \geqslant \frac{\psi \dim_A(E)\overline{\dim}_\theta(E)}{\theta \dim_A(E) - (\theta-\psi)\overline{\dim}_\theta(E)},$$

y se tiene también una desigualdad análoga para las dimensioens inferiores. Para obtener esta desigualdad basta usar el Teorema 3.3.3 con ψ y θ, y tomar $\overline{\dim}_\psi(E)$ como factor común para obtener:

$$\overline{\dim}_\psi(E) \geqslant \overline{\dim}_\theta(E)\frac{(\theta-\psi)\overline{\dim}_\psi(E) + \psi \dim_A(E)}{\theta \dim_A(E)}.$$

Despejando $\overline{\dim}_\psi(E)$ se obtiene lo dicho, y tomando $\theta = 1$ en esto, se obtiene el siguiente resutlado:

Proposición 3.3.10. *Sea X un espacio uniformemente perfecto con más de un elemento, y sea $\varnothing \neq E \subseteq X$ totalmente acotado, con $0 < \dim_A(E) < \infty$, y $\theta \in (0,1]$. Entonces:*

$$\overline{\dim}_\theta(E) \geqslant \frac{\theta \cdot \dim_A(E) \cdot \overline{\dim}_B(E)}{\dim_A(E) - (1-\theta)\overline{\dim}_B(E)},$$

y lo mismo para las dimensiones intermedias inferiores con $\underline{\dim}_B(E)$.

3.4. Frostman II

Otra herramienta de importancia que se tiene para la dimensión de Hausdorff es el lema de Frostman, y es natural buscar un resultado análogo para dimensiones intermedias. Esta versión se basa en que, en vez de tener acotadas las medidas de bolas suficientemetne chicas, se tienen acotadas las medidas con radio en un rango acotado inferiormente también.

Esta versión del lema de Frostman se utilizará para un resultado sobre dimensiones de productos, y quizá para algún ejemplo en la próxima sección.

Lema 3.4.1. *(distribuciones de masa) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel, $s \geqslant 0$, $\theta \in [0,1]$. Supóngase que existen $a, c, \delta_0 > 0$ tales que para todo $0 < \delta \leqslant \delta_0$ existe una medida de Borel μ_δ con:*

- *$sop(\mu_\delta) \subseteq E$.*
- *$\mu_\delta(E) \geqslant a$.*
- *$\mu_\delta(U) \leqslant c|U|^s$ para todo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel con $\delta \leqslant |U| \leqslant \delta^\theta$.*

Entonces, $\underline{\dim}_\theta(E) \geqslant s$. *A su vez, si estas medidas sólo se pueden dar para una sucesión* $\delta_k \to 0$, *entonces* $\overline{\dim}_\theta(E) \geqslant s$..

Demostración. Sea $\{ U_i \}$ un cubrimiento de E tal que $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta \ \forall\, i$. Entonces:

$$a \leqslant \mu_\delta(E) \leqslant \mu_\delta(\bigcup U_i) \leqslant \sum \mu_\delta(U_i) \leqslant c \sum |U_i|^s,$$

por lo que, para todo cubrimiento con tal propiedad, $\sum |U_i|^s \geqslant \frac{a}{c} > 0$, por lo que $\underline{\dim}^\Phi(E) \geqslant s$. Lo último se concluye de forma similar.

□

Observación 3.4.2. En realidad, basta con ver la tercera condición para bolas abiertas, ya que, si $x \in U$, $U \subseteq B(x, 2|U|)$, a lo sumo modificando la constante c.

Proposición 3.4.3. *(Frostman) Sea* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *compacto,* $0 < \theta \leqslant 1$, *y* $0 < s < \underline{\dim}_\theta(E)$. *Entonces, existe una constante* $c > 0$ *tal que para todo* $\delta \in (0,1)$ *existe una medida* μ_δ *de probabilidad tal que:*

- $sop(\mu_\delta) \subseteq E$, *y es finito.*
- $\mu_\delta(B(x,r)) \leqslant c \cdot r^s \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \delta^{1/\theta} \leqslant r \leqslant \delta$.

Demostración. Antes de empezar con la demostración sería apropiado dejar escrita una observación, que sirve para resolver un pequeño detalle en la demostración:

Observación 3.4.4. Alcanza con demostrar esto para δ suficientemente chico: Supóngase que vale el enunciado para todo $\delta \leqslant \delta_0$. Sea ahora $1 > \Delta \geqslant \delta_0$. Se verá que se puede tomar $\mu_\Delta := \mu_{\delta_0}$:

Sea a la cantidad de bolas de radio $\delta_0^{1/\theta}$ necesarias para cubrir una bola de radio 1. Entonces, para $\delta_0^{1/\theta} \leqslant r \leqslant 1$ y una bola b_r de radio r, se tiene que:

$$\mu_{\delta_0}(b_r) \leqslant a \cdot c(\delta_0^{1/\theta})^s \leqslant c \cdot a \cdot r^s.$$

Por lo tanto, como $\delta_0^{1/\theta} \leqslant \Delta^{1/\theta}$, con la constante $a \cdot c$ en vez de c, vale el teorema en todo el intervalo $(0,1)$.

Ahora, para la demostración, primero se puede dar el caso $\theta < 1$:

Para $m \geqslant 0$, sea D_m la partición en cubos diádicos de $[0,1]^n$, o sea en cubos de lados 2^{-m}, siendo 2^{nm} la cantidad de tales cubos. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $E \subseteq [0,1]^n$, y que no está contenido en ninún cubo de D_1.

Ahora, por definición se sabe que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta \in (0,1)$ y todo cubrimiento $\{ U_i \}$ de E con $\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta$, se tiene que $\sum |U_i|^s > \varepsilon$. Entonces, dado $\delta \in (0,1)$, sea m el único entero tal que $2^{-m-1} < \delta^{1/\theta} \leqslant 2^{-m}$.

La idea para definir μ_δ es en esencia dar primero una medida μ_m (que será una suma de deltas), y a partir de esa medida construir unas medidas μ_{m-k}, que no tengan mucho "peso" sobre los cubos de D_{m-k}:

Entonces, para definir μ_m, en primer lugar se puede tomar, para cada $Q \in D_m$ con $Q \cap E \neq \varnothing$, un $x_Q \in Q \cap E$, y se puede definir entonces:

$$\mu_m = \sum_{\substack{Q \in D_m \\ Q \cap E \neq \varnothing}} 2^{-ms} \delta_{x_Q},$$

con δ_{x_Q} las medidas de dirac en x_Q. Ahora, esta medida puede tener valores dispares sobre los cubos de D_{m-1}, y para arreglar esto se define μ_{m-1} como la medida que está soportada en los mismos x_Q, tal que para $Q \in D_{m-1}$ cumple que:

$$\mu_{m-1|Q} = \text{mín}\,\{\,1, 2^{-(m-1)s}\mu_m(Q)^{-1}\,\}\,\mu_{m|Q}.$$

Procediendo de la misma forma, dada la medida μ_{m-k} se puede definir la medida μ_{m-k-1} por:

$$\mu_{m-k-1|Q} = \text{mín}\,\{\,1, 2^{-(m-k-1)s}\mu_{m-k}(Q)^{-1}\,\}\,\mu_{m-k|Q}.$$

Para $Q \in D_{m-k-1}$. Ahora, como se dijo en la observación, se puede suponer que δ es suficientemente chico de tal forma que, si $l \in \mathbb{Z}$ es el mayor entero tal que vale la desigualdad $2^{-(m-l)}n^{1/2} \leqslant \delta$, entonces $l \geqslant 0$ ($2^{-(m-l)}n^{1/2}$ es el diámetro de los cubos de D_{m-l} - en esta parte se utiliza que $\theta < 1$). Entonces, el anterior proceso de definir medidas se continúa hasta llegar a μ_{m-l}.

Entonces, por la definición de las medidas se puede ver que, para todo $k \in \{\,0, \ldots l\,\}$ y $Q \in D_{m-k}$,

$$\mu_{m-l}(Q) \leqslant 2^{-(m-k)s} = |Q|^s n^{-s/2}. \tag{3.10}$$

Pero, ocurre también que para todo $x \in E$ existen un $k \in \{\,0, \ldots l\,\}$ y $Q \in D_{m-k}$ tales que $x \in Q$ y que 3.10 es una igualdad. Esto se debe a que para todo cubo de D_m que interseque a E se tiene la igualdad en (3.10) con la medida μ_m, y por construcción vale que, si un cubo diádico Q cumple la igualdad en (3.10) con μ_{m-k}, entonces o bien Q o el cubo diádico que lo contiene cumple la igualdad en (3.10) con μ_{m-k-1}.

Ahora, para cada $x \in E$ se puede tomar el mayor de los cubos Q tales que cumplan lo de la igualdad, lo que da un cubrimiento finito por cubos $\{\,Q_1, \ldots Q_t\,\}$ tales que $\delta^{1/\theta} \leqslant |Q_i| \leqslant \delta$. Pero, como $\underline{\dim}_\theta(E) > s$, se tiene que:

$$\mu_{m-l}(E) = \sum_1^t \mu_{m-l}(Q_i) = \sum_1^t |Q_i|^s n^{-s/2} > \varepsilon n^{-s/2}.$$

Sea entonces $\mu_\delta := \mu_{m-l}(E)^{-1}\mu_{m-l}$, que es una medida de probabilidad y de soporte finito (ya que la μ_m se tomó de soporte finito). Ahora, para ver que cumple lo pedido:

Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta^{1/\theta} \leqslant r \leqslant \delta$, y sea k el mayor entero con $k \in \{\,0, \ldots l\,\}$ y $2^{-(m-k+1)} < r$. Entonces, $B(x,r)$ está contenido en a lo sumo c_n cubos de D_{m-k}, con c_n una constante que sólo depende de n. Entonces, por (3.10) se tiene que:

$$\mu_\delta(B(x,r)) \leqslant c_n \mu_{m-l}(E)^{-1} 2^{-(m-k)s} \leqslant c_n \varepsilon^{-1} n^{s/2} 2^s r^s,$$

por lo que se puede tomar $c = c_n \varepsilon^{-1} n^{s/2} 2^s$ y queda demostrado el teorema para $\theta < 1$.

El caso $\theta = 1$ se demuestra de forma similar. □

Observación 3.4.5. La demostración comentada en el capítulo de preliminares para la dimensión de Hausdorff es bastante distinta a la del resultado anterior. Sin embargo, en [Mat99] se puede encontrar una demostración más parecida a esta última.

Se puede demostrar una versión del lema de Frostman para dimensiones intermedias generalizadas también, aunque en este caso se necesita un análogo de los cubos diádicos en espacios más generales, por lo que solamente se enuncia por completitud:

Proposición 3.4.6. *(Frostman generalizado) Sea Φ admisible, X un espacio uniformemente perfecto con más de un punto, y $E \subseteq X$ totalmente acotado tal que $\dim_A(E) < \infty$. Entonces:*

- *Si* $\overline{\dim}^{\Phi}(E) > 0$, *para todo* $0 < s < \overline{\dim}^{\Phi}(E)$ *existe una constante* $c = c(s) \in (0, \infty)$ *tal que para todo* $\delta_0 > 0$ *existen* $\delta_1 < \delta_0$ *y una medida de Borel y de probabilidad* μ_{δ_1} *con soporte finito contenido en E tal que:*

$$\mu_{\delta_1}(B(x,r)) \leqslant c \cdot r^s \text{ , } \forall x \in X, \Phi(\delta_1) \leqslant r \leqslant \delta_1.$$

- *Si* $\underline{\dim}^{\Phi}(E) > 0$, *para todo* $0 < s < \underline{\dim}^{\Phi}(E)$ *existen unas constantes* $c, \delta_0 \in (0, \infty)$ *tales que para todo* $\delta < \delta_0$ *existe una medida de Borel de probabilidad* μ_δ *de soporte finito contenido en E, tal que:*

$$\mu_\delta(B(x,r)) \leqslant c \cdot r^s \text{ , } \forall x \in X, \Phi(\delta) \leqslant r \leqslant \delta.$$

3.5. Una equivalencia

Para dar un cierre a la parte teórica de este capítulo, se podría dar una forma equivalente de definir las dimensiones intermedias, que resultará útil en el próximo capítulo cuando se estudien los teoremas de proyeciones.

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado, $\theta \in (0,1]$ y $s \in [0,n]$. Se define:

$$S^s_{\delta,\theta}(E) := \text{ínf} \left\{ \sum_i |U_i|^s : \{ U_i \} \text{ cubrimientos de E con } \delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta \right\}. \tag{3.11}$$

Lema 3.5.1. *Sean* $E \subseteq \mathbb{R}^n, \theta \in (0,1]$. *Para todo* $\delta \in (0,1)$ *vale que, si* $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant n$:

$$-(s-t) \leqslant \frac{log S^s_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} - \frac{log S^s_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} \leqslant -\theta(s-t).$$

Además:

- *Existe un único* $s_0 \in [0,n]$ *tal que:*

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{log S^{s_0}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} = 0.$$

- *Existe un único* $t_0 \in [0,n]$ *tal que:*

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{log S^{t_0}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} = 0.$$

Demostración. Para todo cubrimiento $\{ U_i \}$ con $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$ vale lo siguiente:

$$\sum |U_i|^t \delta^{s-t} \leqslant \sum |U_i|^s \leqslant \sum |U_i|^t \delta^{\theta(s-t)}.$$

Tomando ínfimos, se obtiene:

$$\delta^{s-t} S^t_{\delta,\theta}(E) \leqslant S^s_{\delta,\theta}(E) \leqslant \delta^{\theta(s-t)} S^t_{\delta,\theta}(E),$$

de donde se obtiene la desigualdad buscada. Ahora, falta ver lo de s_0 y t_0:

La demostración de la existencia y unicidad de t_0 es similar a la de s_0, por lo que sólo se desarrolla la demostración para s_0:

Con la desigualdad demostrada se puede ver que la función $s \to \liminf_{\delta \to 0} \frac{log S^s_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)}$ es estrictamente decreciente en $[0,n]$ y continua.

Además, por definición se tiene que $\liminf_{\delta\to 0} \frac{log S^0_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} \geqslant \theta \underline{\dim}_B(E) \geqslant 0$. A su vez, se puede acotar $S^n_{\delta,\theta}(E)$ por el volumen de una bola que contenga E, por lo que $\liminf_{\delta\to 0} \frac{log S^n_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} \leqslant 0$. Por la continuidad, se deduce entonces la existencia y unicidad de s_0.

□

Teniendo ya la unicidad, se puede enunciar la equivalencia mencionada al principio:

Proposición 3.5.2. *Sean $\theta \in (0,1]$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado y s_0, t_0 los obtenidos en el corolario anterior. Entonces, $\underline{\dim}_\theta(E) = s_0$ y $\overline{\dim}_\theta(E) = t_0$.*

Demostración. Para lo de $\underline{\dim}_\theta(E)$ (el otro caso es similar), se verá que vale la siguiente igualdad:

$$\underline{\dim}_\theta(E) = \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 : \liminf_{\delta\to 0} \frac{log(S^s_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} = 0 \right\}. \tag{3.12}$$

Como ese conjunto es $\{ s_0 \}$, lo buscado se deduce directamente de (3.12). Para ver (3.12), se procede de la siguiente forma:

- Para la desigualdad $\leqslant$: Usando el lema anterior, sea s mayor que el ínfimo de la derecha de (3.12), de modo que para todo δ_0 existe $\delta < \delta_0$ tal que $\frac{log(S^s_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} < 0$. Esto último implica que $log(S^s_{\delta,\theta}(E)) < 0$, por lo que $S^s_{\delta,\theta}(E) < 1$. Por esto, existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ tal que $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$ y $\sum |U_i|^s < 1$. Por la observación 3.2.10 se deduce que $\underline{\dim}_\theta(E) \leqslant s$.

- Para la desigualdad $\geqslant$: Sea $s > \underline{\dim}_\theta(E)$, de modo que existe un $\eta > 0$ con $s - \eta > \underline{\dim}_\theta(E)$. Por esto, para todo δ_0 existe un $\delta < \delta_0$ tal que se puede dar un cubrimiento $\{ U_i \}$ con $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$ y $\sum |U_i|^{s-\eta} < 1$. Entonces:

  $$\sum \frac{|U_i|^s}{\delta^{\eta\theta}} \leqslant \sum \frac{|U_i|^s}{|U_i|^\eta} < 1.$$

  Por esto, $\sum |U_i|^s < \delta^{\eta\theta}$. En resumen, para cada δ_0 existe un $\delta < \delta_0$ tal que

  $$S^s_{\delta,\theta}(E) < \delta^{\eta\theta},$$

  por lo que $log(S^s_{\delta,\theta}(E))/(-log(\delta)) \leqslant -\theta\eta \leqslant 0$. Por la proposición anterior se deduce entonces que $s \geqslant \text{ínf}\left\{ s \geqslant 0 : \liminf_{\delta\to 0} \frac{log(S^s_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} = 0 \right\}$.

□

Esta igualdad resulta muy útil para cuestiones del capítulo 4, especialmente para establecer la igualdad 4.2.12.

3.6. Ejemplos varios

En esta sección se estudiarán un par de ejemplos, con fines bastante concretos: El primero (que es un ejemplo clásico) se dará con el objetivo de demostrar que las cotas dadas en la subsección 3.2.2 son finas. El segundo, con el objetivo de ver cómo se pueden utilizar los resultados 3.4.1 y 3.4.3 para cálculos concretos.

3.6.1. Ciertas sucesiones convergentes

Para esta subsección se sigue un ejemplo primeramente estudiado en [FFK18]. El objetivo principal será verificar que este ejemplo da una igualdad en las desigualdades del Teorema 3.3.3.

Para $p > 0$ se define el siguiente subconjunto:

$$F_p := \{0\} \bigcup \left\{ \frac{1}{n^p} \right\}_{\mathbb{N}}$$

Proposición 3.6.1. *Sean $p > 0$ y $\theta \in [0,1]$. Entonces:*

$$\underline{\dim}_\theta(F_p) = \overline{\dim}_\theta(F_p) = \frac{\theta}{p+\theta}.$$

Demostración. Por un lado, como F_p es numerable es claro que la igualdad es cierta para $\theta = 0$. Para $\theta > 0$, se demostrará la igualdad en dos partes:

Primero se verá que $\overline{\dim}_\theta(F_p) \leqslant \frac{\theta}{p+\theta}$. Sean $\delta \in (0,1)$ y $M := \left\lceil \delta^{-(s+\theta(1-s))/(p+1)} \right\rceil$. Entonces, se considerará un cubrimiento apropiado $\mathcal{U}$ de F_p, que cubra $[0, M^{-p}]$ y a los puntos fuera de este intervalo con una bola para cada uno:

Entonces, para cubrir al intervalo $[0, M^{-p}]$ se toman $\lceil M^{-p}/\delta^\theta \rceil \leqslant M^{-p}/\delta^\theta + 1$ intervalos de longitud δ^θ, y para los restantes puntos se toman M bolas de la forma $B(k^{-p}, \delta/2)$, con $1 \leqslant k \leqslant M$, que son de diámetro δ. Se tiene entonces que:

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^s \leqslant M\delta^s + \delta^{\theta s}\left(\frac{1}{M^p \delta^\theta} + 1\right). \tag{3.13}$$

Acotando M por $\delta^{-(s+\theta(1-s))/(p+1)} + 1$ se obtiene que (3.13) es menor-igual que

$$2\delta^{(\theta(s-1)+sp)/(p+1)} + \delta^s + \delta^{\theta s},$$

que tiende a cero para $\delta \to 0$, siempre que $s(\theta + p) > \theta$. Por lo tanto, se obtiene la desigualdad $\overline{\dim}_\theta(F_p) \leqslant \theta/(p+\theta)$.

Para terminar, alcanza con demostrar que $\underline{\dim}_\theta(F_p) \geqslant \theta/(p+\theta) =: s$, que se demuestra utilizando el Teorema 3.4.1 con ciertas medidas, que tienen peso sólo para finitos elementos de F_p:

Sean $\delta \in (0,1), M := \left\lceil \delta^{-(s+\theta(1-s))/(p+1)} \right\rceil$. Se define μ_δ de la siguiente forma:

$$\mu_\delta\left(\left\{\frac{1}{k^p}\right\}\right) = \begin{cases} \delta^s & \text{if } 1 \leqslant k \leqslant M \\ 0 & \text{if } M+1 \leqslant k \end{cases} \tag{3.14}$$

Entonces, se tiene que $\mu_\delta(F_p) = M\delta^s \geqslant \delta^{(ps+\theta(s-1))/(p+1)}$ =1. Ahora, falta verificar la condición de acotar bien a subconjuntos con diámetro entre δ y δ^θ:

Para esto, se debe notar en primer lugar que, por el teorema del valor medio, para $2 \leqslant k \leqslant M$ se tienen las desigualdades:

$$\frac{1}{(k-1)^p} - \frac{1}{k^p} \geqslant \frac{p}{k^{p+1}} \geqslant \frac{p}{M^{p+1}}.$$

Por lo tanto, se tiene una cota inferior para las distancias entre los puntos que tienen "peso" respecto de μ_δ. Entonces, sea U un Borel con $\delta \leqslant |U| \leqslant \delta^\theta$. Por lo dicho, U sólo puede contener a lo sumo $1 + |U|M^{p+1}/p$ puntos con peso, de modo que:

$$\mu_\delta(U) \leqslant \delta^s + \frac{1}{p}|U|\delta^s\delta^{-(s+\theta(1-s))} \leqslant |U|^s + \frac{1}{p}|U|^s = (1 + \frac{1}{p})|U|^s.$$

Entonces, por 3.4.1 se deduce que $\underline{\dim}_\theta(F_p) \geqslant s = \theta/(p+\theta)$.

□

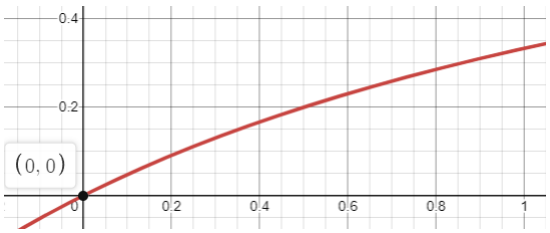


gráfico de $\dim_\theta(F_2)$

Observación 3.6.2. En este ejemplo se da el caso de que la función de dimensión intermedia $\theta \to \dim_\theta(F_p)$ es continua en 0 y estrictamente creciente. Por esto se deduce también que las funciones admisibles $\delta^{1/\theta}$ no son equivalentes entre sí.

Falta entonces verificar que este ejemplo hace que la cota del Teorema 3.3.3 sea fina. Para esto, se debe determinar primero $\dim_A(F_p)$, y para esto se da un lema previo:

Lema 3.6.3. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ tal que existen una constante $a > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $x_n \in F$ y unos $0 < r_n < R_n$ tales que:*

- $R_n/r_n \to \infty$.
- $N_{r_n}(B(x_n, R_n) \cap F) \geqslant a \cdot (R_n/r_n)$, $\forall\, n$.

Entonces, $\dim_A(F) = 1$.

Demostración. Sea $\alpha < 1$. Entonces, se verá que no puede existir un c tal que sirva como constante en la definición de la dimensión de Assouad:

Sea entonces $c > 0$. Por ser $\alpha < 1$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $c < a \cdot (R_n/r_n)^{1-\alpha}$, de modo que:

$$c \cdot \left(\frac{R_n}{r_n}\right)^\alpha < \left(\frac{R_n}{r_n}\right) \cdot a \leqslant N_{r_n}(B(x_n, R_n) \cap F),$$

de modo que ningún $\alpha < 1$ cumple la condición de la definición de la dimensión de Assouad, por lo que $\dim_A(F) = 1$.

□

Lema 3.6.4. $\dim_A(F_p) = 1$.

Demostración. Siguiendo el razonamiento del lema anterior, se pueden considerar:

$$x_n := 0\,,\ r_n := \frac{p}{n^{p+1}}\,,\ R_n := \frac{1}{n^p}.$$

Entonces, por el teorema del valor medio se tiene que para todo $k \geqslant n$:

$$\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant r_n$$

y además, $R_n/r_n = n/p \to \infty$. Por la elección de R_n y r_n se tiene que:

$$N_{r_n}(B(0, R_n) \cap F_p) = N_{r_n}([0, R_n]) = \frac{n}{p} = \frac{R_n}{r_n}.$$

Entonces, se deduce lo pedido por el lema anterior.

□

Con este resultado en mente, se deduce que:

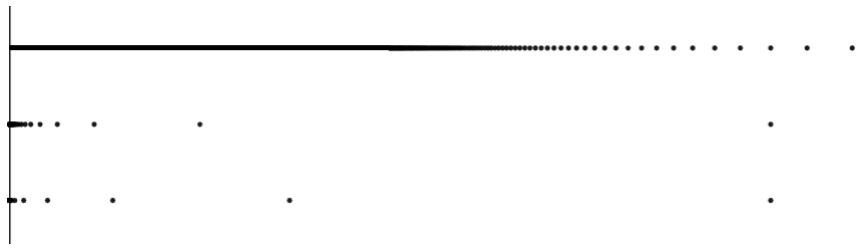
$$\dim_\theta(F_p) + \frac{(\phi-\theta)\dim_\theta(F_p)(\dim_A(F_p)-\dim_\theta(F_p))}{(\phi-\theta)\dim_\theta(F_p)+\theta\dim_A(F_p)} = \frac{\phi}{p+\phi} = \dim_\phi(F_p).$$

Por lo que la cota resulta ser fina. Este ejemplo se puede generalizar considerablemente de la siguiente forma:

Proposición 3.6.5. *Sea $f : [1,\infty) \to (0,1] \in C^1$ tal que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, $f'(x) < 0$ y creciente, y tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -p$ con $p \in [0,\infty]$. Sea $F := \{0, f(1), f(2), \dots\}$. Entonces:*

$$\underline{\dim}_\theta(F) = \overline{\dim}_\theta(F) = \frac{\theta}{p+\theta}\ \forall\, \theta > 0.$$

Observación 3.6.6. Se puede demostrar con esto que, para $F_{\exp} := \{0, e^{-1}, e^{-2}, \dots\}$ todas sus dimensiones intermedias valen 0, y que, tomando $f(x) = 1/log(x+1)$ en la última proposición, se tiene que las dimensiones del conjunto F_{log} generado por f valen 1 para todo $\theta > 0$. Este resultado transmite esa idea de "concentración lenta" en el cero que tiene F_{log}.



los conjuntos F_{log}, F_2 y F_{exp}.

3.6.2. Versión en $\mathbb{R}^n$

Los conjuntos F_p que se introdujeron recién tienen su análogo en $\mathbb{R}^n$. La siguiente familia de ejemplos se quiere exponer principalmente para ilustrar un cálculo con el lema de Frostman y de distribuciones de masa, aprovechando además que se complementan bien con la familia anterior de ejemplos. Este cálculo figura en [Tan20], junto con otros resultados sobre las dimensiones de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, como variantes del seno del topólogo o ciertas espirales.

Sea $(a_n)_\mathbb{N}$ una sucesión de reales positivos. Se define:

$$C^n((a_n)) := \{\, x \in \mathbb{R}^n : |\, x| \in \{\, a_n \,\}\,\},$$

o en otras palabras la unión de la familia de circunferencias concéntricas de radio a_n. A su vez, se define $C^n_p := \{\, x \in \mathbb{R}^n : |\, x| \in F_p \,\}$. Se demostrará una relación entre las dimensiones de estas circunferencias concéntricas y las dimensiones de las sucesiones $(a_n)_\mathbb{N}$ que las generan. También se **mencionará** un resultado adicional que permitirá deducir un corolario sobre la continuidad de las funciones de dimensión de los $C^n((a_n))$ (Las herramientas necesarias para este resultado adicional se desarrollan en el próximo capítulo).

Proposición 3.6.7. *Sea $\{\, a_n \,\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ una sucesión decreciente que converge a cero, $n \geqslant 2$ y $\theta \in (0,1]$. Entonces:*

- $\underline{\dim}_\theta(C^n(a_n)) \geqslant n \cdot \underline{\dim}_\theta(\{\, a_n \,\})$.

- $\overline{\dim}_\theta(C^n(a_n)) \geqslant n \cdot \overline{\dim}_\theta(\{ a_n \})$.

Demostración. Se demuestra el primer apartado, ya que el procedimiento para las dimensiones superiores es similar. La demostración consiste en utilizar Frostman para obtener unas medidas en $\mathbb{R}$ para luego modificarlas para obtener medidas en $\mathbb{R}^n$ y usar 3.4.1.

Como el caso $\underline{\dim}_\theta(\{ a_n \}) = 0$ es trivial, sea $0 < s < \underline{\dim}_\theta(\{ a_n \})$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer también que $\{ a_n \} \subseteq [0,1]$. Como $\{ a_n \} \cup \{ 0 \}$ es compacto, se puede aplicar Frostman, por lo que existe una constante c tal que, para todo $\delta \in (0,1)$, existe una medida μ_δ (Borel) de probabilidad con soporte en $\overline{\{ a_n \}} \subseteq [0,1]$ tal que para $x \in \mathbb{R}$, $\delta^{1/\theta} \leqslant r \leqslant \delta$, vale que $\mu_\delta(B(x,r)) \leqslant c \cdot r^s$.

Ahora, como se dijo antes, primero se restringirá el soporte de estas medidas para que esté a distancia positiva del cero, y después se las llevará a $\mathbb{R}^n$ usando medidas esféricas. Se puede tomar entonces:

$$\delta_0 = \text{mín} \left\{ \frac{1}{2}, (2c)^{\frac{1}{1-s}}, \left(\frac{1}{4c}\right)^{1/s} \right\}.$$

De este modo, para $\delta < \delta_0$ se definen las medidas

$$\widetilde{\mu}_\delta := \mu_\delta|_{(\lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor \delta, 1]}.$$

Primero, para ver que este intervalo no es vacío, notar que (por la elección de δ_0):

$$\lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor \delta \leqslant \frac{1}{2c\delta^s}\delta < 1.$$

Además, $\frac{1}{2c\delta^s} > \frac{1}{2c\delta_0^s} \geqslant 2$, por lo que el cero no tiene peso para estas medidas. Además, se tiene que:

$$\mu_\delta\left([0, \lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor \delta]\right) \leqslant \sum_1^{\lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor} \mu_\delta([(i-1)\delta, i\delta]) \leqslant \sum_1^{\lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor} c\delta^s = \lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor c\delta^s \leqslant \frac{1}{2},$$

de donde se deduce por definición que $\widetilde{\mu}_\delta(\{ a_n \}) \geqslant 1/2$. Por su definición como restricciones a ciertos intervalos, los elementos de su soporte se pueden denotar

$$x_i \in \{ a_n \} \cap \left(\lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor \delta, 1\right], \; 1 \leqslant i \leqslant n_\delta,$$

y a los pesos asociados a cada uno de estos elementos $m_i \in (0,1]$. Es inmediato que:

$$x_i > \lfloor 1/(2c\delta^s) \rfloor \delta \geqslant \delta/(4c\delta^s).$$

Ahora, para pasar las medidas a $\mathbb{R}^n$, se definen en primer lugar las medidas esféricas con radio x como :

$$\sigma_x^{n-1} := \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}\left(S_x^{n-1}\right)} \mathcal{H}^{n-1}|_{S_x^{n-1}}$$

y se definen, para $\delta < \delta_0$, $\lambda_\delta := \sum^{n_\delta} m_i \cdot \sigma_x^{n-1}$, que es una medida de Borel con $sop(\lambda_\delta) \subseteq C^n(\{ a_n \})$, y cumple que:

$$\lambda_\delta\left(C^n(\{ a_n \})\right) = \sum^{n_\delta} m_i \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}\left(S_{x_i}^{n-1}\right)} \mathcal{H}^{n-1}\left(S_{x_i}^{n-1}\right) = \sum^{n_\delta} m_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.15}$$

Para poder usar el Lema 3.4.1, sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\delta^{1/\theta} \leqslant |U| \leqslant \delta$ y sea $I \subseteq \{1, \ldots, n_\delta\}$ la familia de los índices tales que $U \cap S^{n-1}_{x_i} \neq \varnothing$. Se puede ver que existe un $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|V| \leqslant |U|$ y $x_i \in V$ para todo $i \in I$. Ahora, antes de verificar que se cumple la condición del Lema 3.4.1, se debe notar lo siguiente:

$$\sum_{i \in I} \lambda_\delta \left(S^{n-1}_{x_i}\right) = \sum_I m_i = \sum_{i \in I} \widetilde{\mu}_\delta(\{x_i\}) \leqslant \widetilde{\mu}_\delta(V) \leqslant \mu_\delta(V) \leqslant c|V|^s \leqslant c|U|^s,$$

por lo que, si $\eta_n := \mathcal{H}^{n-1}\left(S^{n-1}_1\right)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_\delta(U) &= \sum_{i \in I} \lambda_\delta \left(U \cap S^{n-1}_{x_i}\right) = \sum_I m_i \sigma^{n-1}_{x_i}(U) = \sum_I m_i \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}\left(S^{n-1}_{x_i}\right)} \mathcal{H}^{n-1}|_{S^{n-1}_{x_i}}(U) \\
&= \sum_I m_i \frac{1}{\eta_{n-1} x_i^{n-1}} \mathcal{H}^{n-1}\left(U \cap S^{n-1}_x\right) \leqslant \sum_I m_i \frac{1}{\eta_{n-1} x_i^{n-1}} \eta_{n-1} |U|^{n-1} \\
&\leqslant \sum_I m_i \frac{1}{\left(\frac{1}{4c}\delta^{1-s}\right)^{n-1}} |U|^{n-1} = (4c)^{n-1} \delta^{-(1-s)(n-1)} |U|^{n-1} \sum_I m_i \\
&\leqslant (4c)^{n-1} \delta^{-(1-s)(n-1)} |U|^{n-1} c|U|^s \leqslant 4^{n-1} c^n \delta^{-(1-s)(n-1)} \delta^{s+n-1-ns} |U|^{ns} \\
&= 4^{n-1} c^n |U|^{ns}.
\end{aligned}$$

de donde se deduce entonces que $\underline{\dim}_\theta(C^n(\{a_n\})) \geqslant ns$, y se tiene la desigualdad buscada.

□

Ahora, se comenta sin demostración el siguiente resultado (Los resultados que se usan para demostrar esto se desarrollarán un poco más adelante, por lo que es posible que se escriba una demostración después):

Proposición 3.6.8. *Sea $\{a_n\}$ como antes. Entonces:*

- $\overline{\dim}_\theta(C^n(\{a_n\})) \leqslant n - 1 + \overline{\dim}_\theta(\{a_n\})$.
- $\underline{\dim}_\theta(C^n(\{a_n\})) \leqslant n - 1 + \underline{\dim}_\theta(\{a_n\})$.

Combinando ambos resultados, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.6.9. *Sea $\{a_n\}$ como antes, $n \geqslant 2$. Entonces:*

- *Si $\theta \to \overline{\dim}_\theta(\{a_n\})$ $(\underline{\dim}_\theta(\{a_n\}))$ es continua en 0, entonces también es continua la función $\theta \to \overline{\dim}_\theta(C^n(a_n))$ $(\underline{\dim}_\theta(C^n(a_n)))$.*
- *Si para un $\theta > 0$ se tiene que $\overline{\dim}_\theta(\{a_n\}) = 1$, entonces $\overline{\dim}_\theta(C^n(a_n)) = n$.*

Todo esto se puede aplicar naturalmente a F_p.

3.6.3. Bedford-McMullen carpets II

Habiendo explicado ya la importancia de determinar la continuidad de las funciones de dimensión, se puede demostrar la continuidad de estas funciones para las alfombras de Bedford McMullen. Antes de enunciar el teorema, se recuerda que la constante a del enunciado se encuentra definida inmediatamente después del Lema 2.2.12.

Teorema 3.6.10. *Sean $\widetilde{R}$ una alfombra de Bedford McMullen como en la Proposición 2.2.10. Entonces:*

$$\overline{\dim}_\theta(\widetilde{R}) \leqslant \dim_H(\widetilde{R}) + \frac{2\log(\log_m(n))\log(a)}{\log(n)} \cdot \frac{1}{-\log(\theta)}\,,\ \forall\, 0<\theta<\frac{1}{4}\log_n(m)^2. \quad (3.16)$$

Demostración. Por la observación 2.2.15 se puede suponer que no todos los t_j no nulos definidos anteriormente son iguales, de modo que $a = \text{máx}\{\,a_i\,\} \geqslant 2$. Ahora, se define $R_k(i_1,\dots,i_k) := S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}([0,1]^2)$, y no es dificil ver que ls $R_k(p,q)$ antes tomados son expresables como una unión finita de estos intervalos. Por definición, si μ es la medida sobre S_r introducida anteriormente y $\psi : S_r \to [0,1]^2$ es la función definida en la Proposición 2.2.10, se puede considerar la medida imagen $\widetilde{\mu} := \psi_\#\mu$, que cumple por definición que:

$$\widetilde{\mu}(R_k(i_1,\dots,i_k)) = b_{i_1}\dots b_{i_k} = m^{-kd}(a_{i_1}\dots a_{i_k})^{\log_n(m)-1},$$

Entonces se pueden definir unos subconjuntos muy similares a los $R_k(p,q)$ definidos en 2.2.10, con la diferencia de no ser exactamente intervalos de $\mathbb{R}^2$ pero sí algo muy cercano. Sea $(i_1,\dots) = \mathbf{i} \in S_r$. Entonces, se define para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$Q_k(\mathbf{i}) := \bigcup\{\,R_k(i'_1,\dots i'_k) : x_{i'_j} = x_{i_j}\ \forall\, j=1,\dots,l\,,\ y_{i'_j} = y_{i_j}\ \forall\, j=1,\dots,k\,\} \subseteq R_k(p,q)$$

con $p = \sum_1^l x_{i_j} n^{l-j}$, $q = \sum_1^k y_{i_j} m^{k-j}$.
Por lo tanto, para los $Q_k(\mathbf{i})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(Q_k(\mathbf{i})) &= m^{-dk}\frac{(a_{i_1}\dots a_{i_k})^{\log_n(m)}}{a_{i_1}\dots a_{i_l}}\\ &= m^{-kd}\left(\frac{(a_{i_1}\dots a_{i_k})^{1/k}}{(a_{i_1}\dots a_{i_l})^{1/l}}\right)^{\log_n(m)k}(a_{i_1}\dots a_{i_l})^{(k\log_n(m)/l)-1}.\end{aligned}$$

La idea de la demostración consiste en demostrar que el tercer factor de la última expresión es mayor-igual que 1, y que el segundo factor no puede ser "muy chico" para demasiados k consecutivos. Formalmente, lo que se hace es demostrar la siguiente observación:

Observación 3.6.11. Para todo $K \geqslant \frac{\log_n(m)}{1-\log_n(m)}$ y para todo $\mathbf{i} \in S_r$, existe un $K \leqslant k \leqslant K/\theta$ tal que (recordando que las funciones g_k se encuentran definidas en la demostración de 2.2.10):

$$g_k(\mathbf{i}) \geqslant a^{\frac{\log(\log_n(m))}{\log(\log_n(m)/2\theta)}}$$

Una vez establecido este resultado, se concluye que para todo $K \geqslant \frac{\log_n(m)}{1-\log_n(m)}$ y para todo $\mathbf{i} \in S_r$, existe un $K \leqslant k \leqslant K/\theta$ tal que:

$$\widetilde{\mu}(Q_k(\mathbf{i})) \geqslant m^{-kd}a^{k\log_n(m)\frac{\log(\log_n(m))}{\log(\log_n(m)/2\theta)}} \geqslant m^{-kd}a^{2k\log_n(m)\frac{\log(\log_n(m))}{\log(1/\theta)}} = m^{-k(d+\varepsilon(\theta))},$$

con $\varepsilon(\theta) = \frac{-\log(a)2\log_n(m)\log(\log_n(m))}{\log(m)\log(1/\theta)} = \frac{2\log(\log_m(n))\log(a)}{\log(n)}\frac{1}{-\log(\theta)}$.

De esta forma, vale que para cada $K \geqslant \log_n(m)/(1-\log_n(m))$, todo $x \in \widetilde{R}$ está contenido en algún $Q_{k(x)}$ tal que $K \leqslant k(x) \leqslant K/\theta$ y $\widetilde{\mu}(Q_{k(x)}) \geqslant m^{-k(d+\varepsilon(\theta))}$.

Ahora, como cada subconjunto de la forma $Q_k(\mathbf{i})$ está contenido en otro subconjunto de esa forma, se pueden tomar unos $\{ Q_{k(x_n)} \}_{1,\dots,N} \subseteq \{ Q_{k(x)} \}_{x\in\widetilde{R}}$ disjuntos dos a dos (salvo posilemente en sus bordes) que cubren $\widetilde{R}$. Por lo tanto,

$$1 = \widetilde{\mu}(\widetilde{R}) = \sum_1^N \widetilde{\mu}(Q_{k(x_n)}) \geqslant \sum_1^N m^{-k(x_n)(d+\varepsilon(\theta))} \geqslant \sum_1^N (2^{-1/2}|Q_{k(x_n)}|)^{d+\varepsilon(\theta)}.$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\sum |Q_{k(x_n)}|^{d+\varepsilon(\theta)} \leqslant 2^{(1/2)(d+\varepsilon(\theta))},$$

y notando que $|Q_k| \leqslant n2^{1/2}m^{-k}$, por la observación 3.2.9 se deduce que

$$\overline{\dim}_\theta(\widetilde{R}) \leqslant d + \varepsilon(\theta).$$

□

Corolario 3.6.12. *Sea $\widetilde{R}$ una alfombra de Bedford McMullen. Entonces, sus funciones de dimensión intermedia son continuas en 0.*

3.6.4. Comentarios finales

Las funciones de dimensión intermedia pueden tener comportamientos muy variados. En [Fal20] [FFK18] se mencionan ejemplos de comportamientos varios, moestrando que la función de dimensión puede por ejemplo ser constante en $(0,1]$ y discontinua en 0 (con el resultado 3.6.5 tomando $f(x) = 1/log(x+1)$. Las dimensiones intermedias valen 1 para $\theta > 0$), o estrictamente creciente en $(0,1]$ y discontinua en 0, o constante en un entorno del cero y estrictamente creciente en el resto del intervalo.

Esto lleva a pensar si se puede caracterizar a las funciones que están dadas como función de dimensión de algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Recientemente, se publicó [BR22], donde se realizó justamente esto:

Definición 3.6.13. Sean $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha \leqslant n$. Si $\lambda < \alpha$, se define $\mathcal{H}(\lambda,\alpha)$ como la familia de funciones $h : [0,1] \to [\lambda,\alpha]$ tales que:

- h es creciente y continua en $(0,1]$
- Para todo $\theta \in (0,1)$, se tiene:

$$D^+h(\theta) \leqslant \frac{(h(\theta)-\lambda)(\alpha-h(\theta))}{(\alpha-\lambda)\theta}, \tag{3.17}$$

y en caso de ser $\lambda = \alpha$, se define $\mathcal{H}(\lambda,\alpha)$ como la familia formada por una única fución, la constantemente α.

Entonces, en el paper mencionado se demuestra lo siguiente:

Teorema 3.6.14. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto con $\dim_L(E) = \lambda$ y $\dim_A(E) = \alpha$, y sean $\underline{h}(\theta) = \underline{\dim}_\theta(E)$ y $\overline{h}(\theta) = \overline{\dim}_\theta(E)$ las funciones de dimensión intermedia. Entonces:*

$$\underline{h}, \overline{h} \in \mathcal{H}(\lambda,\alpha).$$

Recíprocamente, si se tienen unos $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha \leqslant n$ y un par de funciones $\underline{h}, \overline{h} \in \mathcal{H}(\lambda,\alpha)$ tales que $\underline{h} \leqslant \overline{h}$ y $\underline{h}(0) = \overline{h}(0)$, entonces existe un $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y perfecto tal que $\dim_L(E) = \lambda$, $\dim_A(E) = \alpha$, y las funciones de dimensión intermedia son las $\underline{h}, \overline{h}$.

Capítulo 4

Productos, proyecciones

4.1. Productos

Se busca ahora un resultado similar a la Proposición 2.4.1 para diensiones intermedias. De la misma forma que para la dimensión de Hausdorff, el lema de Frostman resulta ser un ingrediente fundamental en la demostración.

Teorema 4.1.1. *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $F \subseteq \mathbb{R}^m$ acotados, $\theta \in [0,1]$. Entonces:*

$$\underline{\dim}_\theta(E) + \underline{\dim}_\theta(F) \leqslant \underline{\dim}_\theta(E \times F) \leqslant \overline{\dim}_\theta(E \times F) \leqslant \overline{\dim}_\theta(E) + \overline{\dim}_B(F). \tag{4.1}$$

Para la primera desigualdad, se puede suponer que $\underline{\dim}_\theta(E), \underline{\dim}_\theta(F) > 0$, ya que si alguna se anula se deduce la desigualdad con 3.1.5. También se puede suponer que $\theta \in (0,1]$, ya que el caso $\theta = 0$ ya se demostró. Como $\theta > 0$ se puede suponer que E y F son compactos.

Sean $0 < s < \underline{\dim}_\theta(E)$ y $0 < t < \underline{\dim}_\theta(F)$, de modo que por Frostman existen $c_s, c_t > 0$ tales que, para todo $\delta \in (0,1)$, existen medidas μ_δ, ν_δ Borel y de probabilidad con $sop(\mu_\delta) \subseteq E$, $sop(\nu_\delta) \subseteq F$ y además:

$$\mu_\delta(B(x,r)) \leqslant c_s r^s \,,\; \nu_\delta(B(y,r)) \leqslant c_t r^t \,,\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \delta^{1/\theta} \leqslant r \leqslant \delta.$$

Considerando entonces la medida producto $\mu_\delta \times \nu_\delta$ se tiene que $sop(\mu_\delta \times \nu_\delta) \subseteq E \times F$ y que para $z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\delta^{1/\theta} \leqslant r \leqslant \delta$, se tiene $(\mu_\delta \times \nu_\delta)(B(z,r)) \leqslant c_s \cdot c_t r^{s+t}$. Por el Lema 3.4.1 (notando la observación posterior al enunciado), se deduce que $\underline{\dim}_\theta(E \times F) \geqslant s + t$, y como s y t eran arbitrarios, se obtiene la primera desigualdad de (4.1).

La segunda desigualdad es inmediata, por lo que sólo falta verificar la tercera. Para esta, sean $s > \overline{\dim}_\theta(E)$ y $d > \overline{\dim}_B(F)$, de modo que por definición existe $\delta_1 \in (0,1)$ tal que para todo $0 < r < \delta_1$, $N_r(F) \leqslant r^{-d}$. Además, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_0 < \delta_1$ tal que para todo $\delta < \delta_0$, existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ de E tal que:

$$\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i| \leqslant \delta \,\forall\, i \,,\; \sum |U_i|^s < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta_0 > 0$ con la propiedad anterior. Se verá que para $s + d$, este δ_0 es el buscado para la definición en 3.1.1:

Para esto, sea $\delta < \delta_0$, por lo que existe un cubrimiento $\{ U_i \}$ de E tal que vale 4.2. Además, como $|U_i| < \delta_0 \delta_1$, para cada i se puede dar un cubrimiento $\{ U_{i,j} \}$ de F por a lo sumo $|U_i|^{-d}$ subconjuntos, con diámetros $|U_{i,j}| = |U_i| \,\forall\, j$. Por lo tanto,

$$E \times F \subseteq \bigcup_i \bigcup_j (U_i \times U_{i,j}),$$

y además,

$$\sum_i \sum_j |U_i \times U_{i,j}|^{s+d} \leqslant \sum_i |U_i|^{-d} (\sqrt{2} \cdot |U_i|)^{s+d} = 2^{(s+d)/2} \sum |U_i|^s \leqslant 2^{(s+d)/2} \varepsilon.$$

Sin embargo, $\delta^{1/\theta} \leqslant |U_i \times U_{i,j}| \leqslant \sqrt{2}\delta$, por lo que se debe "achicar un poco" este cubrimiento. Para esto, para cada k sea C_k el mínimo entero tal que todo $A \subseteq \mathbb{R}^k$ con $|A| = \sqrt{2}$ se puede cubrir con (a lo sumo) C_k subconjuntos de diámetro 1.

Entonces, aplicando esto a subconjuntos con diámetro $\leqslant \sqrt{2}\delta$, se tiene que cada $U_i \times U_{i,j}$ se puede cubrir con (a lo sumo) C_{n+m} subconjuntos $\{ V_{i,j,k} \}_k$ con diámetros $\delta^{1/\theta} \leqslant |V_{i,j,k}| \leqslant \text{mín} \{ \delta, | U_i \times U_{i,j}| \} \leqslant \delta$, por lo que estos $V_{i,j,k}$ se encuentran dentro del rango "correcto" para la definición 3.1.1. Entonces:

$$\sum_i \sum_j \sum_k |V_{i,j,k}|^{s+d} \leqslant C_{n+m} 2^{(s+d)/2} \varepsilon,$$

de modo que con este cubrimiento, se puede concluir que $\overline{\dim}_\theta(E \times F) \leqslant s + d$, y se deduce lo pedido.

Con este resultado en mente se puede demostrar el resultado 3.6.8:

Demostración. Antes de ver la demostración, estaría bueno discutir un poco por qué se considera cierto subconjunto $\widetilde{C}^n(\{ a_n \})$ en la demostración. Notando que se puede dividir cada esfera de $C^n(\{ a_n \})$ en 2^n "piezas" (según los cuadrantes de $\mathbb{R}^n$) congruentes entre sí y Lipschitz-equivalentes cada una a un $[0,1]^{n-1}$, esto motiva a uno a dividir a todo $C^n(\{ a_n \})$ en 2^n "piezas" de la misma forma. Ahora, uno buscaría interpretar a cada "pieza" como equivalente a algo similar a $\{ a_n \} \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$. Sin embargo, las "piezas" no son Bilipschitz a esto, ya que en ese producto se consideran intervalos de una misma altura (por lo que los productos de los $[0,1]$ se van "concentrando" en un intervalo) mientras que las "piezas" están formadas por "porciones" de esferas que se van "concentrando" en el cero.

Ampliando un poco en la razón por la cual no se tiene una función bilipschitz, sean $T = \{ a_n \} \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$ y P una de las "piezas" de $C^n(\{ a_n \})$. Si existiera $f : T \to P$ bilipschitz, se podría extender (Por ejemplo, con el teorema de Kriszbaun) a una $\widetilde{f}$ Lipschitz definida sobre $\overline{T}$ (o sea, a su borde). Pero se pueden demostrar dos detalles:

- $\widetilde{f}(\overline{T} \backslash T) = \{ 0 \} = \overline{P} \backslash P$ (que es el "centro" de $C^n(\{ a_n \})$).
- Si $p_1, p_2 \in \overline{T} \backslash T$ se encuentarn a distancia positiva entre sí, entonces $\widetilde{f}(p_1) \neq \widetilde{f}(p_2)$

Con esto, se llega al absurdo buscado.

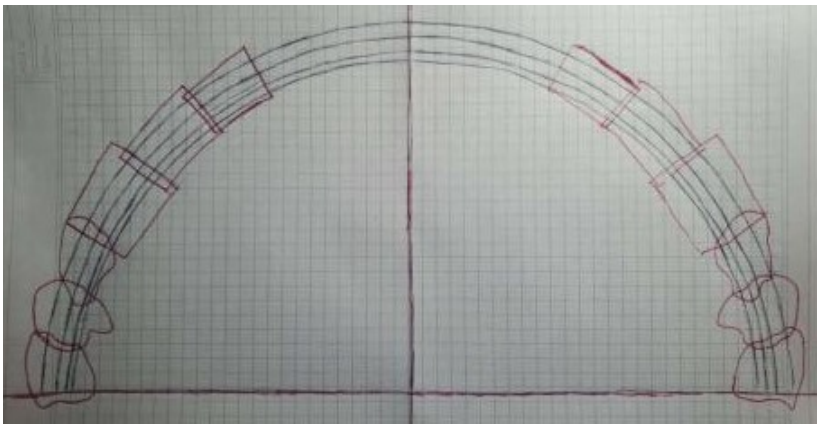
Sin embargo, uno podría modificar el $C^n(\{ a_n \})$, obtener un par de resultados con esa modificación y después volver al $C^n(\{ a_n \})$. Para esto, sea:

$$\widetilde{C}^n(\{ a_n \}) := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| - 1 \in \{ a_n \} \},$$

o sea una familia de esferas concéntricas que se van "concentrando" en la esfera unitaria. La idea de "dividir en piezas" según los cuadrantes se puede aplicar también a este subconjunto. Además, en este caso cada "pieza" es Lipschitz-equivalente al producto $\{ a_n \} \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^n$. Por la Proposición 3.1.5, ambos subconjutos tienen las mismas dimensiones intermedias, y por el resultado anterior sobre productos, se tiene que:

$$\underline{\dim}_\theta\left(\{a_n\} \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]\right) = \underline{\dim}_\theta\left(\{\, a_n \,\}\right) + n - 1,$$

lo que da la $\underline{\dim}_\theta$ de cada "pieza" de $\widetilde{C}^n(\{\, a_n \,\})$. Sin embargo, a priori las dimensiones inferiores no son finitamente estables, por lo que saber las dimensiones de las "piezas" solamente no permitiría saber las dimensiones del subconjunto entero. Sin embargo, como cada "pieza" es congruente al resto, dado un cubrimiento de una "pieza" se puede tomar para cada "pieza" restante un cubrimiento tal que cada miembro suyo es congruente a uno del cubrimiento original (como en el dibujo)



Congruencias y $\underline{\dim}_\theta$

Considerando el cubrimiento de $\widetilde{C}^n(\{\, a_n \,\})$ formado por la unión de los cubrimientos de cada "pieza", se obtiene que:

$$\underline{\dim}_\theta(\widetilde{C}^n(\{\, a_n \,\})) = n - 1 + \underline{\dim}_\theta(\{\, a_n \,\})$$

(En otras palabras, si se tienen finitas piezas congruentes entre sí entonces $\underline{\dim}_\theta$ es finitamente estable).

Ahora, sólo falta ver cómo relacionar las dimensiones de $\widetilde{C}^n(\{\, a_n \,\})$ con las dimensiones de $C^n(\{\, a_n \,\})$. Para esto, se puede considerar la función $T : \{\, x \in \mathbb{R}^n : |\, x| \geqslant 1 \,\} \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = \frac{|x|-1}{|x|}x$, que es Lipschitz y cumple que $T(\widetilde{C}^n(\{\, a_n \,\})) = C^n(\{\, a_n \,\})$. Por la Proposición 3.1.5, se deduce la desigualdad para $\underline{\dim}_\theta$. La versión para dimensiones superiores es similar, sólo que como estas sí son finitamente estables no hace falta pasar por la observación de la congruencia. □

Combinando el resultado 4.1.1 con el resultado para dimensiones de Hausdorff, se obtiene lo siguiente:

Corolario 4.1.2. *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^m, F \subseteq \mathbb{R}^n$ de Borel acotados, tales que $\dim_H(E) = \overline{\dim}_B(E)$ y $\overline{\dim}_\theta(F)$ es continua en 0. Entonces, $\overline{\dim}_\theta(E \times F)$ es continua en 0.*

Demostración. Por el resultado 4.1.1, se tiene que $\overline{\dim}_\theta(E \times F) \leqslant \dim_H(E) + \overline{\dim}_\theta(F)$, de modo que, tomando $\theta \to 0$:

$$\lim_{\theta \to 0} \overline{\dim}_\theta(E \times F) \leqslant \dim_H(E) + \dim_H(F) \leqslant \dim_H(E \times F).$$

□

4.2. Proyecciones

El objetivo principal de esta sección será establecer resultados similares al Teorema 2.5.30 para dimensiones intermedias. La principal fuente para esto es [BFF21]. Lo primero que se debe hacer es transportar la teoría de capacidades para dimensiones intermedias.

4.2.1. Capacidades y dimensiones intermedias

Sean $\theta \in (0,1]$ y $m \in \{1, \dots n\}$. Para $0 \leqslant s \leqslant m$, $\delta \in (0,1)$ se puede definir el **núcleo potencial** asociado como la función $\phi^{s,m}_{\delta,\theta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant |x| < \delta \\ (\delta/|x|)^s & \text{si } \delta \leqslant |x| < \delta^\theta \\ \delta^{\theta(m-s)+s}/|x|^m & \text{si } \delta^\theta \leqslant |x| \end{cases} \tag{4.3}$$

Estas funciones son continuas y decrecientes en $|x|$. En el caso de tomar $\theta = 1$, $s = m$, se abrevia la notación como $\phi^m_r(x) := \phi^{m,m}_{r,1} = \text{mín}\{1, (r/\mid x|)^m\}$.

Definición 4.2.1. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathcal{M}(E)$, se define su **potencial** en $x \in \mathbb{R}^n$ respecto de un núcleo como

$$\int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y),$$

y su **energía** respecto de un kernel $\phi^{s,m}_{\delta,\theta}$ como

$$\iint \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(x)d\mu(y).$$

Definición 4.2.2. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto se puede definir su **capacidad** como

$$C^{s,m}_{\delta,\theta}(E) := \left(\inf_{\mu \in \mathcal{M}(E)} \iint \phi^{s,m}_{r,\theta}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) \right)^{-1} \in (0,\infty).$$

Para E acotado pero no cerrado se puede definir $C^{s,m}_{\delta,\theta}(E) := C^{s,m}_{\delta,\theta}(\overline{E})$. En caso de ser $\theta = 1$, $s = m$, se escribe $C^m_\delta(E)$ en vez de $C^{m,m}_{\delta,1}(E)$.

Lema 4.2.3. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $\theta \in (0,1]$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in (0,1)$,$0 \leqslant s \leqslant m$. Entonces, el ínfimo en la definición 4.2.2 se alcanza. En otras palabras, existe $\mu \in \mathcal{M}(E)$ (llamada también la **medida de equilibrio** de E) tal que :*

$$\iint \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) = \frac{1}{C^{s,m}_{\delta,\theta}(E)} =: \gamma.$$

Además, para todo $x \in E$ se tiene que $\int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y) \geqslant \gamma$, y la igualdad vale para μ-casi todo $x \in E$.

Demostración. Que existe μ se obtiene directamente por convergencia débil, notando que si uno considera una sucesión de $\mu_k \in \mathcal{M}(E)$ tal que

$$\iint \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu_k(x)d\mu_k(y) \to \gamma,$$

existe una subsucesión que converge débilmente a una μ, que es la buscada. Ahora, para la desigualdad:

Por absurdo, supóngase que existen $z \in E$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

$$\int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(z-y)d\mu(y) < \gamma - \varepsilon.$$

Entonces, para cada $\lambda \in (0,1)$ se puede considerar la medida

$$\mu_: = \lambda\delta_z + (1-\lambda)\mu \in \mathcal{M}(E).$$

Calculando las energías de estas medidas, se obtiene que esta es igual a:

$$\lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)\int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(z-y)d\mu(y) + (1-\lambda^2)\iint \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(x)d\mu(y),$$

pero esto es menor-igual que:

$$\lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\gamma-\varepsilon) + (1-\lambda)^2\gamma = \gamma - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2(1-\gamma+2\varepsilon).$$

Por lo que, tomando $\lambda < \frac{2\varepsilon}{1-\gamma+2\varepsilon}$ se obtiene que μ no minimiza el ínfimo de la definición 4.2.2, que es absurdo, demostrando la desigualdad del enunciado. Que la igualdad vale para casi todo punto se deduce de esto y la propiedad de μ. □

4.2.2. El caso $\theta = 1$

Antes de seguir se deben estudiar los teoremas de proyecciones para las dimensiones Box aparte. Esto se debe a que en la demostración del Lema 4.2.8 se utiliza el hecho de que las dimensiones Box cumplen el Teorema 4.2.15. Las demostraciones de los teoremas mencionados se pueden encontrar en [Fal19].

Definición 4.2.4. Para $m \in \{1,\dots,n\}$ se definen los **m-perfiles de dimensión Box (superior e inferior)** como:

$$\underline{\dim}^m_B(E) := \liminf_{\delta\to 0}\frac{log(C^m_\delta(E))}{-log(\delta)}\,,\ \overline{\dim}^m_B(E) := \limsup_{\delta\to 0}\frac{log(C^m_\delta(E))}{-log(\delta)}$$

Observación 4.2.5. En realidad, en [Fal19] se definen estos perfiles para todo real positivo, pero sólo hará falta para lo de las siguientes subsecciones definir esto para $\{1,\dots,n\}$.

Teorema 4.2.6. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un Borel, $m \in \{1,\dots,n\}$, y $f : E \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Entonces:*

$$\underline{\dim}_B(f(E)) \leqslant \underline{\dim}^m_B(E).$$

Teorema 4.2.7. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un Borel acotado. Entonces, para todo $V \in G(n,m)$ se tienen las desigualdades:*

$$\underline{\dim}_B(P_V(E)) \leqslant \underline{\dim}^m_B(E)\,,\ \overline{\dim}_B(P_V(E)) \leqslant \overline{\dim}^m_B(E).$$

Además, para $\gamma_{n,m}$-casi todo V se tienen igualdades.

4.2.3. Capacidades y dimensiones intermedias II

Ahora, se puede dar una definición análoga a la dada en 3.5, utilizando un lema parecido al de esa sección:

Lema 4.2.8. *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $m \in \{1, \dots, n\}$, $\theta \in (0,1]$, $\delta \in (0,1)$. Para todos s, t con $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant m$, se tiene:*

$$-(s-t) \leqslant \left(\frac{log\, C^{s,m}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} - s \right) - \left(\frac{log\, C^{t,m}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} - t \right) \leqslant -\theta(s-t). \tag{4.4}$$

Por esto, existe un único $\underline{s} \in [0, m]$ tal que:

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{log\, C^{\underline{s},m}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} = \underline{s}$$

y un único $\overline{s}$ tal que:

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{log\, C^{\overline{s},m}_{\delta,\theta}(E)}{-log(\delta)} = \overline{s}.$$

Demostración. Por un lado, no es complicado verificar lo siguiente, con $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant m$:

$$\phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x) \leqslant \phi^{t,m}_{\delta,\theta}(x) \leqslant \delta^{(t-s)(1-\theta)} \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x),$$

de modo que por definición se tienen desigualdades similares para capacidades:

$$C^{s,m}_{\delta,\theta}(E) \geqslant C^{t,m}_{\delta,\theta}(E) \geqslant \delta^{(s-t)(1-\theta)} C^{s,m}_{\delta,\theta}(E),$$

de donde se obtiene (4.4). A su vez, tomando en (4.4) límite inferior respecto de δ, se deduce que la función $\liminf_{\delta \to 0} \frac{log(C^{s,m}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} - s$ es estrictamente decreciente y continua en $s \in [0, m]$ (los puntos de discontinuidad de una función monótona son saltos).

Razonando como en el Lema 3.5.1, se verá que esta función es no negativa en 0, y menor-igual que 0 en m:

Como $C^{0,m}_{\delta,\theta} \geqslant 1$, lo primero es inmediato. Para lo segundo, notar que por el Teorema 4.2.7, se tiene que para $\gamma_{n,m}$ casi todo $V \in G(n,m)$,

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{log(C^{m,m}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} = \underline{\dim}_B(P_V(E)) \leqslant m$$

por lo que $\liminf_{\delta \to 0} \frac{log(C^{m,m}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} - m \leqslant 0$. Entonces, la existencia y unicidad de $\underline{s}$ se obtienen de la continuidad.

Lo enunciado para $\overline{s}$ se deduce de la misma forma.

□

Definición 4.2.9. Para cada $m \in \{1, \dots, n\}$, se definen los **perfiles de dimensión intermedia superior e inferior**(abreviados **IDP**) como: $\underline{\dim}^m_\theta(E) := \underline{s}$, $\overline{\dim}^m_\theta(E) := \overline{s}$, con $\underline{s}, \overline{s}$ los del lema anterior.

Para E acotado se definen sus IDP como los correspondientes a su clausura, según lo comentado en la definición 4.2.2.

Observación 4.2.10. Antes de seguir, se debe notar que las definiciones 4.2.9 y 4.2.4 parecen un poco diferentes. Sin embargo, los IDP para el caso $\theta = 1$ coinciden con los perfiles de dimensión Box introducidos antes. Esto se debe a que, repasando la definición de los nucleos $\phi^{s,m}_{\delta,\theta}$, se puede notar que $\phi^{s,m}_{\delta,1} = \phi^{m,m}_{\delta,1}$ para todo $s \leqslant m$, de modo que $C^{s,m}_{\delta,1}(E) = C^{m,m}_{\delta,1}(E)$, de modo que $\underline{\dim}^m_B(E) = \underline{\dim}^m_1(E)$. Esto resultará importante para demostrar el Teorema 4.2.15, ya que en la demostración el caso $\theta = 1$ se considera demostrado (ya que este caso es el Teorema 4.2.7).

Observación 4.2.11. Si $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant n$, entonces:

$$\overline{\dim}_\theta^{m_1}(E) \leqslant \overline{\dim}_\theta^{m_2}(E)\,,\ \underline{\dim}_\theta^{m_1}(E) \leqslant \underline{\dim}_\theta^{m_2}(E).$$

Originalmente este concepto se estudió primero para las dimensiones Box en [Fal19], con el objetivo de entenderlas como "la dimensión de E entendiéndolo desde un punto de vista m-dimensional. Esto se puede justificar un poco mejor con el siguiente teorema:

Teorema 4.2.12. *Sean E acotado, $\theta \in (0,1]$. Entonces se tienen las igualdades:*

$$\underline{\dim}_\theta(E) = \underline{\dim}_\theta^n(E)\,,\ \overline{\dim}_\theta(E) = \overline{\dim}_\theta^n(E).$$

Este teorema se puede deducir del siguiente resultado:

Teorema 4.2.13. *Sea E compacto, $\theta \in (0,1]$, $0 \leqslant s \leqslant n$. Entonces existe δ_0 tal que para todo $\delta < \delta_0$ vale:*

$$\delta^s \cdot C_{\delta,\theta}^{s,n}(E) \leqslant S_{\delta,\theta}^s(E) \leqslant a_n\,[log_2(|E|/\delta)+1]\,\delta^s C_{\delta,\theta}^{s,n}(E), \tag{4.5}$$

con a_n una constante que sólo depende de n. Por lo tanto, se tienen las igualdades:

$$\liminf_{\delta\to 0}\frac{logS_{\delta,\theta}^s(E)}{-log(\delta)} = -s + \liminf_{\delta\to 0}\frac{logC_{\delta,\theta}^{s,n}(E)}{-log(\delta)}\,,\ \limsup_{\delta\to 0}\frac{logS_{\delta,\theta}^s(E)}{-log(\delta)} = -s + \limsup_{\delta\to 0}\frac{logC_{\delta,\theta}^{s,n}(E)}{-log(\delta)}.$$

Demostración. (La demostración de la segunda desgualdad se deja comentada. Para detalles más específicos, ver [BFF21])

La primera desigualdad es válida para todo $\delta \in (0,1)$ en realidad (lo de la existencia de δ_0 aparece en la segunda desigualdad de (4.5)):

Para ver la primera desigualdad, por el Lema 4.2.3 existen una medida $\mu \in \mathcal{M}(E)$ y un $E_0 \subseteq E$ tales que:

$$\iint \phi_{\delta,\theta}^{s,n}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) = \frac{1}{C_{\delta,\theta}^{s,n}(E)} = \gamma$$

y se tiene la igualdad $\int \phi_{\delta,\theta}^{s,n}(x-y)d\mu(y) = \gamma$ para $x \in E_0$, con $\mu(E_0) = 1$. Entonces, si $\delta \leqslant r \leqslant \delta^\theta$ y $x \in E_0$, se tiene que:

$$\gamma = \int \phi_{\delta,\theta}^{s,n}(x-y)d\mu(y) \geqslant \int \left(\frac{\delta}{r}\right)^s \chi_{B(0,r)}(x-y)d\mu(y) \geqslant \left(\frac{\delta}{r}\right)^s \mu(B(x,r)).$$

Entonces, para establecer la primera desigualdad se demostrará que para todo cubrimiento $\{\,U_i\,\}$ de E con $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$, se tiene:

$$\sum |U_i|^s \geqslant \delta^s C_{\delta,\theta}^{s,n}(E),$$

de donde se deduce la desigualdad por definición.

Entonces, sea $\{\,U_i\,\}$ como en el comentario anterior, y sea $I = \{\,i : U_i \cap E_0 \neq \varnothing\,\}$ la familia de índices que intersecan E_0. Ahora, para cada $i \in I$ existe $x_i \in U_I \cap E_0$, y $U_i \subseteq B(x_i, |U_i|)$, por lo que:

$$1 = \mu(E_0) \leqslant \sum_I \mu(U_i) \leqslant \sum_I \mu(B(x_i,|U_i|)) \leqslant \delta^{-s}\gamma \sum_I |U_i|^s,$$

por lo que

$$\delta^s C_{\delta,\theta}^{s,n}(E) \leqslant \sum |U_i|^s,$$

y tomando el ínfimo sobre todos los cubrimientos con esas restricciones en los diámetros, se tiene la desigualdad.

La segunda desigualdad consiste esencialmente en tomar (para cada δ) un D dado por $D := \lceil log_2(|E|/\delta)\rceil$, y M como el entero tal que $2^{M-1}\delta < \delta^\theta \leqslant 2^M\delta$, y tomar δ_0 suficientemente chico tal que $2 \leqslant M \leqslant D-2$ para todo $\delta < \delta_0$.

A partir de eso, se usa que para la medida de equilibrio se tiene

$$\int \phi^{s,n}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y) \geqslant \gamma$$

para todo $x \in E$, con el fin de obtener para cada x una bola centrada en x de radio $2^{k(x)}\delta$ con $0 \leqslant k(x) \leqslant D$ apropiado. Considerando la familia de esas bolas (que es un cubrimiento de E), se puede usar el teorema de cubrimiento de Besicovitch (ver [Mat99], Teorema 2.7, item 2) para tomar unas subcolecciones $C_1, ..., C_c(n)$ de bolas disjuntas del cubrimiento tales que $E \subseteq \bigcup_i \bigcup_{B\in C_i} B$. Después, se procede como en la sección de dimensiones intermedias generalizadas, "dividiendo" en bolas más chicas a las bolas de los C_i con diámetro mayor que δ^θ para obtener un cubrimiento C apropiado que cumpla que, para una constante a_n dependiente sólo de n, vale:

$$\sum_{B\in C} |B|^s \leqslant a_n \lceil log_2(|E|/\delta) + 1\rceil \frac{\delta^s}{\gamma}$$

de donde se deduce lo pedido porque $S^s_{\delta,\theta}(E) \leqslant \sum_{B\in C} |B|^s$.

□

Observación 4.2.14. En realidad, con la misma demostración de antes se puede demostrar lo siguiente:

Sea E compacto, $\theta \in (0,1]$, $0 \leqslant s \leqslant n$, y supóngase que existen $\mu \in \mathcal{M}(E)$ y $\gamma > 0$ tales que:

$$\int \phi^{s,n}_{\delta,\theta} d\mu(y) \geqslant \gamma.$$

Entonces existe δ_0 tal que para todo $\delta \leqslant \delta_0$, se tiene que:

$$S^s_{\delta,\theta}(E) \leqslant a_n \lceil log_2(|E|/\delta) + 1\rceil \frac{\delta^s}{\gamma},$$

con a_n una constante que depende sólo de n.

Demostración. (Del Teorema 4.2.12) Se deduce inmediatamente por el resultado 3.5.2 y la definición de $\underline{\dim}^n_\theta(E)$ y $\overline{\dim}^n_\theta(E)$.

□

4.2.4. Proyecciones y dimensiones intermedias

Como se mencionó antes, lo que se busca con los IDP es entenderlos como las dimensiones de E "desde un punto de vista m-dimensional". El resultado principal de esta sección formaliza esto:

Teorema 4.2.15. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un Borel acotado. Entonces, para todo $V \in G(n,m)$ se tienen las desigualdades:*

$$\underline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \underline{\dim}^m_\theta(E)\,,\ \overline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \overline{\dim}^m_\theta(E)\,,\ \forall\theta \in (0,1]$$

y para $\gamma_{n,m}$-casi todo V valen las igualdades para todo θ.

De este modo, las dimensiones intermedias se comportan de forma similar a las Box respecto de proyecciones.

Antes de la demostración se necesitan un par de lemas sobre los núcleos, y un lema análogo a la primera desigualdad del Teorema 4.2.13. Tambíen se necesita la siguiente definición, que consiste en "restringir" los núcleos a subespacios:

Definición 4.2.16. Sobre cada $V \in G(n,m)$ se puede definir, para cada $\delta \in (0,1), \theta \in (0,1], 0 < s \leqslant m$, una función $\widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x)$ sobre V como:

$$\widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \delta \\ (\delta/|x|)^s & \delta \leqslant |x| \leqslant \delta^\theta \\ 0 & \delta^\theta < |x| \end{cases}$$

Lema 4.2.17. *Para todo $m \in \{1,\dots,n\}$ y todo $0 \leqslant s < m$ existen $a, b > 0$ dependientes sólo de m, n, s, tales que: para todo $x \in \mathbb{R}^n, \theta \in (0,1], 0 < \delta < 1/2$, se tiene que:*

$$a \int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(P_V(x)) d\gamma_{n,m}(V) \leqslant \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x) \leqslant b \int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(P_V(x)) d\gamma_{n,m}(V). \tag{4.6}$$

Demostración. Siguiendo la demostración de [BFF21], se escribe $\simeq$ para decir que dos expresiones cumplen que su cociente está acotado inferior y superiormente por constantes positivas independientes de x, δ, θ.

Ahora, dividiendo en casos (dados por la definicón del $\widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x)$), se puede ver que:

$$\widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x) = s\delta^s \int_\delta^{\delta^\theta} \chi_{[0,u]}(|x|) u^{-(s+1)} du + \delta^{s(1-\theta)} \chi_{[0,\delta^\theta]}(|x|)$$

de modo que, por Fubini,

$$\begin{aligned} \int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(P_V(x)) d\gamma_{n,m}(V) &= \int \Bigg[s\delta^s \int_\delta^{\delta^\theta} \chi_{[0,u]}(|P_V(x)|) u^{-(s+1)} du \\ &\quad + \delta^{s(1-\theta)} \chi_{[0,\delta^\theta]}(|P_V(x)|) \Bigg] d\gamma_{n,m}(V) \\ &= s\delta^s \int_\delta^{\delta^\theta} u^{-(s+1)} \left[\int \chi_{[0,u]}(|P_V(x)|) d\gamma_{n,m}(V) \right] du \\ &\quad + \delta^{s(1-\theta)} \int \chi_{[0,\delta^\theta]}(|P_V(x)|) d\gamma_{n,m}(V). \end{aligned}$$

Pero entonces, por el resultado 2.5.22 se obtiene que

$$\begin{aligned} &\int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(P_V(x)) d\gamma_{n,m}(V) \simeq s\delta^s \int_\delta^{\delta^\theta} u^{-(s+1)} \phi^m_u(x)\, du + \delta^{s(1-\theta)} \phi^m_{\delta^\theta}(x) \\ &= \begin{cases} 1 & (|x| < \delta) \\ \frac{s}{m-s} \left(\left(\frac{\delta}{|x|}\right)^s - \left(\frac{\delta}{|x|}\right)^m \right) + \left(\frac{\delta}{|x|}\right)^s & (\delta \leqslant |x| \leqslant \delta^\theta) \\ \frac{s}{m-s} |x|^{-m} (\delta^{\theta(m-s)+s} - \delta^m) + |x|^{-m} \delta^{\theta(m-s)+s} & (\delta^\theta < |x|) \end{cases} \\ &\simeq \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x). \end{aligned}$$

donde las constantes no dependen de $x \in \mathbb{R}^n, \theta \in (0,1], \delta \in (0,1/2)$.

□

Lema 4.2.18. *Sean E compacto, $\theta \in (0,1]$, $\delta \in (0,1)$, $0 \leqslant s \leqslant n$, tales que existen una $\mu \in \mathcal{M}(E)$ y un $F \subseteq E$ Borel, tales que:*

$$\int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y) \leqslant \gamma\,,\ \forall\, x \in F.$$

Entonces, $\mu(F)\delta^s\gamma^{-1} \leqslant S^s_{\delta,\theta}(E)$.

Demostración. Por hipótesis, se tiene que, para $x \in F$ y $\delta \leqslant r \leqslant \delta^\theta$:

$$\gamma \geqslant \int \widetilde{\phi}^s_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y) \geqslant (\frac{\delta}{r})^s\mu(B(x,r)).$$

Por lo tanto, sea $\{\, U_i \,\}$ un cubrimiento de F con $\delta \leqslant |U_i| \leqslant \delta^\theta$. Si se toma para cada i un $x_i \in F \cap U_i$ (se puede suponer que la intersección no es vacía), vale que $U_i \subseteq B(x_i, |U_i|)$, por lo que:

$$\mu(F) \leqslant \sum \mu(U_i) \leqslant \sum \mu(B(x_i,|U_i|)) \leqslant \delta^{-s}\gamma \sum |U_i|^s.$$

Entonces, por la definición de $S^s_{\delta,\theta}(E)$, se tiene:

$$\gamma^{-1}\delta^s\mu(F) \leqslant S^s_{\delta,\theta}(F) \leqslant S^s_{\delta,\theta}(E).$$

□

Demostración. (Del Teorema 4.2.15)

Para demostrar este resultado basta con ver lo siguiente:

(Versión débil) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un Borel acotado. Entonces, para todo $V \in G(n,m)$ se tienen las desigualdades:

$$\underline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \underline{\dim}^m_\theta(E)\,,\ \overline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \overline{\dim}^m_\theta(E)\,,\ \forall \theta \in (0,1]$$

y para todo $\theta > 0$ valen las igualdades para $\gamma_{n,m}$-casi todo V.

Esto se debe a que, si vale esto último, se puede aplicar el resultado a cada θ racional, de modo que (como los racionales son numerables) para $\gamma_{n,m}$-casi todo V valen las igualdades para todo racional, y como las funciones de dimensión son continuas, se deduce el Teorema 4.2.15 a partir de la versión débil.

Además, sin pérdida de generalidad se puede suponer que E es compacto, y que $m \in \{\,1,\ldots,n-1\,\}$ (el caso n se deduce por el Teorema 4.2.12). Además, el caso $\theta = 1$ ya se describió en una sección previa, por lo que también se puede suponer que $\theta \in (0,1)$.

Se demostrará la desigualdad para $\overline{\dim}_\theta(E)$, ya que la desigualdad para $\underline{\dim}_\theta(E)$ se demuestra análogamente. Para esto, se utiliza la observación 4.2.14 con las proyecciones $P_V(E)$:

Sea $V \in G(n,m)$. Como la proyección a V es una contracción, se tiene que, para todos $0 \leqslant s \leqslant m, \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$:

$$\phi^{s,m}_{\delta,\theta}(P_V(x) - P_V(y)) \geqslant \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)\,,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Por el resultado 4.2.3, sea $\mu \in \mathcal{M}(E)$ la medida de ese lema, por lo que para todo $x \in E$ vale:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^{s,m}_{\delta,\theta}(E)} \leqslant \int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(x-y)d\mu(y) &\leqslant \int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(P_V(x) - P_V(y))d\mu(y)\\ &\leqslant \int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(P_V(x) - w)dP_{V\#}\mu(w).\end{aligned}$$

Por lo comentado en el segundo capítulo, $P_{V\#}\mu \in \mathcal{M}(P_V(E))$. En resumen, para todo $z \in P_V(E)$:

$$\int \phi^{s,m}_{\delta,\theta}(z-w)dP_{V\#}\mu(w) \geqslant \frac{1}{C^{s,m}_{\delta,\theta}(E)}.$$

Entonces, se puede aplicar la observación 4.2.14 con $P_V(E) \subseteq V$ y la medida $P_{V\#}\mu$ para obtener:

$$S^s_{\delta,\theta}(P_V(E)) \leqslant a_m \left[log_2(|E|/\delta)+1\right] \delta^s C^{s,m}_{\delta,\theta}(E),$$

para δ suficientemente chico. Por lo tanto:

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{log(S^s_{\delta,\theta}(P_V(E)))}{-log(\delta)} \leqslant -s + \limsup_{\delta\to 0} \frac{log(C^{s,m}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)},$$

de donde se deduce por el resultado 3.5.2 que $\overline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \overline{\dim}^m_\theta(E)$.

Falta entonces ver que se da la igualdad (con θ fijo) para casi todo V:

Sean $0 \leqslant s < m$ y $\{\delta_k\}$ una sucesión convergente a cero, tal que $0 < \delta_k \leqslant 2^{-k}$ y que:

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{log(C^{s,m}_{\delta_k,\theta}(E))}{-log(\delta_k)} = \limsup_{\delta\to 0} \frac{log(C^{s,m}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)}.$$

Para cada $k \in N$, sea μ^k la medida de equilibrio en E asociada al núcleo $\phi^{s,m}_{\delta_k,\theta}$, y sea:

$$\gamma_k := \frac{1}{C^{s,m}_{\delta_k,\theta}(E)} = \int\int \phi^{s,m}_{\delta_k,\theta}(x-y)d\mu^k(x)d\mu^k(y).$$

Por el Lema 4.2.17 (y con a la constante que aparece en el lema), se tiene:

$$\int\int\int \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(P_V(x)-P_V(y))d\gamma_{n,m}(V)d\mu^k(x)d\mu^k(y) \leqslant a^{-1}\gamma_k,$$

por lo que, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$\int\int\int \gamma_k^{-1}\delta_k^\varepsilon \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(P_V(x)-P_V(y))d\gamma_{n,m}(V)d\mu^k(x)d\mu^k(y) \leqslant a^{-1}\delta_k^\varepsilon.$$

Ahora, notando que $\delta_k^\varepsilon \leqslant 2^{-k\varepsilon}$, se tiene por Fubini que:

$$\int \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int\int \gamma_k^{-1}\delta_k^\varepsilon \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(P_V(x)-P_V(y))d\mu^k(x)d\mu^k(y)\right) d\gamma_{n,m}(V) \leqslant \ a^{-1}\sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k^\varepsilon < \infty.$$

Pero como esta integral es finita, se obtiene entonces que para $\gamma_{n,m}$-casi todo V existe una constante $M_V > 0$ tal que, para todo k:

$$\int\int \gamma_k^{-1}\delta_k^\varepsilon \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(t-u)dP_{V\#}\mu^k(t)dP_{V\#}\mu^k(u) \leqslant M_V < \infty,$$

de modo que, para casi todo V, vale que para todo k:

$$\int\int \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(t-u)dP_{V\#}\mu^k(t)dP_{V\#}\mu^k(u) \leqslant M_V\gamma_k\delta_k^{-\varepsilon}.$$

Por la desigualdad de Markov, se tiene entonces que para los V donde vale lo último, se tiene que para todo k existe un $F_k \subseteq P_V(E)$ tal que $P_{V\#}\mu^k(F_k) \geqslant 1/2$, y:

$$\int \widetilde{\phi}^s_{\delta_k,\theta}(t-u)dP_{V\#}\mu^k(t) \leqslant 2M_V\gamma_k\delta_k^{-\varepsilon}\ , \ \forall u \in F_k.$$

Por el Lema 4.2.18, de deduce entonces que:

$$S^s_{\delta_k,\theta}(P_V(E)) \geqslant \frac{1}{2}(2M_V\gamma_k)^{-1}\delta_k^{s+\varepsilon},$$

de donde se obtiene:

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\log S^s_{\delta_k,\theta}(P_V(E))}{-\log\delta_k} \geqslant \limsup_{k\to\infty}\frac{\log \delta_k^{s+\varepsilon}C^{s,m}_{\delta_k,\theta}(E)}{-\log\delta_k} = -(s+\varepsilon)+\limsup_{k\to\infty}\frac{\log C^{s,m}_{\delta_k,\theta}(E)}{-\log\delta_k}.$$

Por la elección de los δ_k, y el hecho de ser válida la desigualdad anterior para todo $\varepsilon > 0$, se tiene entonces que, para todo $s \in [0, m)$,

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{\log S^s_{\delta,\theta}(P_V(E))}{-\log\delta} \geqslant -s+\limsup_{\delta\to 0}\frac{\log C^{s,m}_{\delta,\theta}(E)}{-\log\delta}. \tag{4.7}$$

pero, por lo dicho anteriormente se tiene que las expresiones que aparecen en (4.7) son ambas continuas para $s \in [0, m]$, por lo que la desigualdad (4.7) también vale para $s = m$, y de esta desigualdad se obtiene entonces que $\overline{\dim}_\theta(P_V(E)) \geqslant \overline{\dim}^m_\theta(E)$, demostrando por lo tanto la versión débil, y por esto el Teorema 4.2.15.

□

Continuidad y proyecciones

Estos resultados permiten estudiar la continuidad de las funciones de dimensión para las proyecciones de subconjuntos con funciones de dimensión continuas:

Corolario 4.2.19. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado tal que $\underline{\dim}_\theta(E)$ $\left(\overline{\dim}_\theta(E)\right)$ es continua en 0. Si $V \in G(n,m)$ cumple que $\dim_H(P_V(E)) = \min\{m, \dim_H(E)\}$ entonces la función de dimensión de $P_V(E)$, $\underline{\dim}_\theta(P_V(E))$ $\left(\overline{\dim}_\theta(P_V(E))\right)$ es continua en 0. En particular, esta función es continua en 0 para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$.*

Demostración. En primer lugar, se puede suponer que $m > \dim_H(E)$, ya que de lo contrario se tendría por hipótesis que $\dim_H(P_V(E)) = m$ y su función de dimensión intermedia sería constante. Entonces, para $\theta \in (0,1)$, vale que:

$$\dim_H(E) = \dim_H(P_V(E)) \leqslant \underline{\dim}_\theta(P_V(E)) \leqslant \underline{\dim}^m_\theta(E) \leqslant \underline{\dim}^n_\theta(E) = \underline{\dim}_\theta(E).$$

Pero, como $\underline{\dim}_\theta(E)$ es continua en 0, esto último tiende a $\dim_H(E)$ para $\theta \to 0$, por lo que $\underline{\dim}_\theta(P_V(E))$ es continua en 0. Lo último se deduce del Teorema 2.5.30. □

4.2.5. Dimensiones intermedias III

La teoría desarrollada en las secciones anteriores tiene dos consecuencias interesantes sobre dimensiones intermedias:

Corolario 4.2.20. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado tal que $\underline{\dim}_B(E) = n$. Entonces:*

$$\underline{\dim}_\theta(E) = \overline{\dim}_\theta(E) = n \;\forall\, \theta \in (0,1].$$

Análogamente, si $\overline{\dim}_B(E) = n$ entonces $\overline{\dim}_\theta(E) = n$ para todo $\theta \in (0,1]$.

Demostración. Por lo comentado en el Lema 4.2.8, se concluye entonces que:

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{log(C^{n,n}_{\delta,\theta}(E))}{-log(\delta)} = \underline{\dim}_B(E) = n.$$

Por la definición 4.2.9 y el Teorema 4.2.12, se obtiene entonces que:

$$\overline{\dim}_\theta(E) \geqslant \underline{\dim}_\theta(E) = \underline{\dim}^n_\theta(E) = \underline{\dim}_B(E) = n.$$

La versión para dimensiones superiores se demuestra de forma similar. □

Corolario 4.2.21. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado tal que $\theta \to \underline{\dim}_\theta(E)$ es continua en 0. Son equivalentes:*

- $\underline{\dim}_B(P_V(E)) = m$ *para $\gamma_{n,m}$-casi todo $V \in G(n,m)$.*
- $\dim_H(E) \geqslant m$.

y se tiene un resultado análogo para las dimensiones superiores.

Demostración. Para demostrar la ida, supóngase por absurdo que se cumple lo primero pero $\dim_H(E) < m$. Aplicando el corolario anterior a los subespacios $V \in G(n,m)$, se deduce que $\underline{\dim}_\theta(P_V(E)) = m$ para $\gamma_{n,m}$-casi todo V, y todo $\theta > 0$. Pero, por el Teorema 2.5.30 se deduce que $\dim_H(P_V(E)) < m$ para casi todo V, de modo que la función de dimensión $\underline{\dim}_\theta(P_V(E))$ es discontinua en 0 para $\gamma_{n,m}$-casi todo V. Pero esto es absurdo por el Corolario 4.2.19.

La ida se demuestra de forma directa sin la hipótesis de conitnuidad, ya que:

$$m \geqslant \underline{\dim}_B(P_V(E)) \geqslant \dim_H(P_V(E)) \geqslant m.$$

El resultado para dimensiones superiores se demuestra de la misma forma. □

Este último corolario muestra que es posible responder cuestiones donde sólo aparecen las dimensiones Hausdorff y Minkowski usando técnicas de dimensiones intermedias, y muestra también la importancia de determinar la continuidad de las funciones de dimensión.

Bibliografía

[AKOU99] Huseyin Azcan, S. Kocak, Nevin Orhun, and Mehmet Ureyen. The box-counting dimension of the sine-curve. *Mathematica Slovaca*, 49(3):367–370, 1999.

[Ban20] Amlan Banaji. Generalised intermediate dimensions, 2020.

[BFF21] Stuart A. Burrell, Kenneth Falconer, and Jonathan Fraser. Projection theorems for intermediate dimensions. *Journal of Fractal Geometry*, 8(2):95–116, apr 2021.

[BK21] Amlan Banaji and István Kolossváry. Intermediate dimensions of bedford-mcmullen carpets with applications to lipschitz equivalence, 2021.

[BR22] Amlan Banaji and Alex Rutar. Attainable forms of intermediate dimensions. *Annales Fennici Mathematici*, 47(2):939–960, jul 2022.

[Fal14] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley Sons, 2014.

[Fal19] Kenneth J. Falconer. A capacity approach to box and packing dimensions of projections of sets and exceptional directions, 2019.

[Fal20] Kenneth J. Falconer. Intermediate dimensions – a survey, 2020.

[FFK18] Kenneth J. Falconer, Jonathan M. Fraser, and Tom Kempton. Intermediate dimensions. 2018.

[Fra20] Jonathan M. Fraser. Assouad dimension and fractal geometry, 2020.

[FY18] Jonathan M. Fraser and Han Yu. New dimension spectra: finer information on scaling and homogeneity, 2018.

[Mat99] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.

[McM84] Curt McMullen. The hausdorff dimension of general sierpinski carpets, 1984.

[Rog70] C.A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, 1970.

[Tan20] Justin T. Tan. On the intermediate dimensions of concentric spheres and related sets, 2020.