



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Medias integrales y valores de frontera de series de Dirichlet

Florencia Marchesano

Director: Daniel Carando

Fecha de Presentación: 17 de diciembre de 2024



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Preliminares de análisis de Fourier en grupos</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos abelianos localmente compactos y medida de Haar . . . . .	1
1.2. El grupo dual y la transformada de Fourier . . . . .	4
1.3. Teorema de Peter-Weyl y consecuencias . . . . .	6
1.4. El politoro y el flujo de Kronecker . . . . .	9
<b>2. Series de Dirichlet</b>	<b>13</b>
2.1. Convergencia de las series de Dirichlet . . . . .	13
2.2. Los espacios $\mathcal{H}_\infty$ y $\mathcal{H}_2$ . . . . .	16
2.3. La transformada de Bohr . . . . .	19
<b>3. Integrales de Poisson en polidiscos</b>	<b>29</b>
3.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	29
3.2. La clase RP . . . . .	35
3.3. Límites radiales y cuasi-radiales . . . . .	39
<b>4. Medias integrales y valores de frontera</b>	<b>49</b>
4.1. El Teorema de Carlson . . . . .	49
4.2. La pregunta de Hedenmalm . . . . .	51
4.3. La respuesta de Saksman y Seip . . . . .	54
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>



# Agradecimientos

A mi mamá, por ser incondicional, por escucharme hablar horas de matemática (aunque dice que no le gustan los números) y por desconfiar del resultado cada vez que hago una cuenta. A mi papá, por cuidarme siempre y por mostrarme los programas de Paenza cuando era chiquita.

A Dani Carando, por su generosidad y dedicación, por aceptar dirigirme, incentivarme y enseñarme tanto en todo este camino.

A toda mi familia y amigos, por hacerme sentir tan amada.

A mis abuelos, por amarme incondicionalmente y por desearme suerte antes de cada examen. A mi abuelo Ángel, por acompañarme toda la vida.

A Vicky, por las charlas motivadoras, por ser tan compañera.

A Luli, por estar siempre, por secarme las lágrimas y hacerme reír a carcajadas.

A Marce, por mandarme cientos de artículos de matemática.

A los jurados, Natalia Accomazzo Scotti y Felipe Negreira, por su tiempo y compromiso.

A mi profesor de matemática del secundario, Alejandro Sanchez, por darme problemas extra para pensar y desafiarme constantemente.

A Juan Manuel Mareso, profesor de Análisis del CBC, por haberme contado qué hace un matemático y animarme a cambiar de carrera.

A todos los profesores que tuve a lo largo de la licenciatura, por enseñar con tanto entusiasmo y pasión.

A la UBA y a la educación pública.



# Introducción

“(...) bei manchen  
Untersuchungen über  
Dirichletsche Reihen der Kern  
des Problems erst durch den  
Umweg über die Potenzreihe  
deutlich hervortritt”.<sup>1</sup>

---

Harald Bohr

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) fue un matemático alemán que se dedicó, entre otras áreas, a la teoría de números. Probó resultados fundamentales en este campo, como su teorema sobre progresiones aritméticas. Si bien esta tesis no tratará estos temas, lo mencionamos porque, citando a Hervé Queffelec y Martine Queffelec [14]: “The birth act of the analytic theory of the Dirichlet series can be rightly claimed to be the Dirichlet arithmetic progression theorem”.<sup>2</sup> Y las series de Dirichlet serán objeto de estudio de este trabajo.

Una serie de Dirichlet es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

donde  $a_n \in \mathbb{C}$  y  $s$  es una variable compleja. Así como las series de potencias convergen en discos, la región de convergencia de una serie de Dirichlet es un semiplano. Dado un número complejo  $s$ , notamos  $\Re(s)$  a su parte real. Entonces, las series de Dirichlet convergen en semiplanos de la forma  $\{\Re(s) > \sigma\}$  con  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

A principios del siglo XX las series de Dirichlet despertaron gran interés y Bohr, Hardy, Landau, Littlewood, Riesz, entre otros, se dedicaron a su estudio. De ellos, destacamos al matemático (y jugador de fútbol) danés Harald August Bohr (1887- 1951). Fue popular entre los aficionados al deporte por su participación en la selección de Dinamarca y también será popular en el presente trabajo por sus contribuciones a la teoría de series

---

<sup>1</sup>(...) en algunos estudios sobre series de Dirichlet, el núcleo del problema solo se comprende a través de esta representación en serie de potencias.

<sup>2</sup>El nacimiento de la teoría analítica de las series de Dirichlet puede atribuirse con justa razón al teorema de progresiones aritméticas de Dirichlet.

de Dirichlet. Bohr estaba particularmente interesado en el estudio de su convergencia. Es así que, alrededor de 1913, introdujo una idea simple, pero sumamente útil, que hoy conocemos como la transformada de Bohr [1]. Esta aplicación, como veremos en la Sección 2.3, permite relacionar a las series de Dirichlet con las series de potencias, vía el teorema fundamental de la aritmética. En las palabras del propio Bohr [3]: “It becomes clear in the course of these investigations that the theory of the absolute convergence of Dirichlet’s series of the type  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  is very closely connected with the theory of power series in an infinite number of variables”.<sup>3</sup>

En este contexto, Fritz Carlson probó en 1922 el siguiente resultado sobre medias integrales de series de Dirichlet [4]: si  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge en el semiplano  $\{\Re(s) > 0\}$  y es acotada en  $\{\Re(s) \geq \delta\}$  para todo  $\delta > 0$ , entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \quad (1)$$

para todo  $\sigma > 0$ . Esta igualdad relaciona el tamaño de los coeficientes con las medias (cuadráticas) integrales en rectas verticales.

A fines de la década del treinta, el interés en las series de Dirichlet y el enfoque de Bohr comenzó a diluirse. Fue recién a mediados de la década del noventa que estas ideas resurgieron. En 1997, Hakan Hedenmalm, Peter Lindqvist y Kristian Seip introdujeron (con otra notación) el espacio  $\mathcal{H}_{\infty}$  de series de Dirichlet que convergen a funciones acotadas en el semiplano  $\{\Re(s) > 0\}$  y el espacio  $\mathcal{H}_2$  de series de Dirichlet con coeficientes de cuadrados sumables [12]. Mostraron vía la transformada de Bohr la relación entre  $\mathcal{H}_{\infty}$  y ciertos espacios de funciones clásicos del análisis complejo y del análisis de Fourier. Este resultado fundamental permite pensar problemas de series de Dirichlet en otros contextos y utilizando otras herramientas, lo cual se verá reflejado en esta tesis. Cabe destacar que, si bien Bohr ya había considerado el uso de conceptos del análisis complejo, la reaparición de estas ideas se dió en un contexto en el que dicha rama y, sobre todo, el análisis de Fourier en grupos estaban mucho más desarrollados.

En 2004, Hedenmalm, retomando las ideas de Carlson, planteó en [11] una pregunta natural: si  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  es acotada en  $\{\Re(s) > 0\}$  (o sea, si  $f \in \mathcal{H}_{\infty}$ ) ¿seguirá valiendo (1) para  $\sigma = 0$ ? Esto tiene sentido porque entendemos  $f(it)$  como

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(\sigma + it),$$

que existe para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En 2007, Eero Saksman y Kristian Seip probaron en [18] que el teorema de Carlson no se puede extender, respondiendo negativamente a la pregunta de Hedenmalm. La demostración de este resultado será nuestro principal objetivo. Para ello, organizamos la tesis como sigue. En el Capítulo 1 abordamos algunos conceptos fundamentales del análisis

---

<sup>3</sup>En el curso de estas investigaciones se hace evidente que la teoría de la convergencia absoluta de las series de Dirichlet del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  está estrechamente relacionada con la teoría de las series de potencias en un número infinito de variables.

de Fourier en grupos, tales como la medida de Haar y la transformada de Fourier. Estas nociones y varios de los resultados presentados se utilizan más adelante para el caso del polítoro y algunos de sus subgrupos. En el Capítulo 2 introducimos las definiciones básicas de las series de Dirichlet y a la transformada de Bohr y presentamos los principales resultados que nos permiten pasar del estudio de las series de Dirichlet al análisis complejo (en varias e infinitas variables). En el Capítulo 3 definimos la integral de Poisson y desarrollamos varias herramientas que nos permitirán construir funciones holomorfas y armónicas con características particulares. Es a partir de este tipo de construcciones que Saksman y Seip definen las series de Dirichlet que resuelven el problema de Hedenmalm. Finalmente, en el Capítulo 4 demostramos el teorema de Carlson, detallamos el problema de Hedenmalm y probamos el resultado de Saksman y Seip que lo resuelve.



# Capítulo 1

## Preliminares de análisis de Fourier en grupos

En los Capítulos 3 y 4, necesitaremos trabajar con algunos conceptos básicos de análisis armónico tales como medida de Haar, grupo dual y transformada de Fourier en el politoro

$$\mathbb{T}^n := \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$$

y en ciertos subgrupos de este. Por completitud, en este capítulo revisaremos dichos preliminares para el caso general de grupos abelianos localmente compactos. Además, en la Sección 1.4, nos concentraremos en el politoro y probaremos el teorema de Birkhoff (para el flujo de Kronecker) y el teorema de Kronecker, sobre la densidad de ciertos conjuntos en  $\mathbb{T}^n$ .

### 1.1. Grupos abelianos localmente compactos y medida de Haar

Un *grupo topológico abeliano*  $G$  es un espacio topológico que también admite una estructura de grupo abeliano y que satisface que las operaciones

$$\begin{array}{ll} G \times G \rightarrow G & G \rightarrow G \\ (x, y) \mapsto x + y & x \mapsto -x \end{array}$$

son funciones continuas, donde consideramos a  $G \times G$  con la topología producto. Si además la topología es Hausdorff y  $G$  es localmente compacto, decimos que es un *grupo abeliano localmente compacto* (abreviadamente,  $G$  es un grupo LCA).

**Ejemplos 1.1.1.** A continuación, enumeramos algunos ejemplos de grupos LCA.

- $\mathbb{R}^n$ , con la suma y la topología usual, es un grupo LCA.

- El toro

$$\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\},$$

con el producto y la topología de subespacio de  $\mathbb{C}$ , es un grupo abeliano compacto.

- Más generalmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el politoro

$$\mathbb{T}^n := \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n\} = \prod_{j=1}^n \mathbb{T}$$

y el politoro infinito

$$\mathbb{T}^\infty := \{(w_n)_{n \in \mathbb{N}} : w_n \in \mathbb{C}, |w_n| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T},$$

con el producto componente a componente y la topología producto, son grupos abelianos compactos.

- $\mathbb{Z}^n$ , con la suma usual y la topología discreta, es un grupo LCA.

Una propiedad fundamental de los grupos LCA es que podemos asignarles una medida particular, como muestra el Teorema 1.1.2. Antes de enunciarlo, repasemos brevemente algunos conceptos de teoría de la medida.

Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio de medida y  $\mu$  una medida compleja en  $(X, \Sigma)$ . La variación  $|\mu|$  se define para cada conjunto  $A \in \Sigma$  como

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu(A_j)| : n \in \mathbb{N}, (A_j)_{j=1}^n \text{ es una partición de } A \text{ en conjuntos medibles} \right\}.$$

La variación  $|\mu|$  resulta ser una medida finita en  $(X, \Sigma)$ . Definimos la *variación total* de  $\mu$  como

$$\|\mu\| = |\mu|(X).$$

Si ahora  $X$  es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, consideramos la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ . Decimos que una medida boreliana y positiva  $\mu$  es *regular* si:

- (a) para todo  $K \subseteq X$  compacto,  $\mu(K) < +\infty$ ;
- (b) para todo  $A \subseteq X$  boreliano,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\};$$

- (c) para todo  $U \subseteq X$  abierto,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

Si  $\mu$  es una medida boreliana y compleja, decimos que es regular si su variación  $|\mu|$  es regular. Sea  $\mathcal{M}(X)$  el conjunto de todas las medidas borelianas, complejas y regulares en  $X$ , entonces  $\mathcal{M}(X)$  es un espacio de Banach con la norma de la variación total.

Ahora sí, volviendo a grupos LCA, tenemos el siguiente resultado, que puede verse en [5, Capítulo 9].

**Teorema 1.1.2.** *Sea  $G$  un grupo LCA. Existe una medida boreliana  $m$  no negativa, regular, que no es idénticamente cero y que es invariante por traslaciones, es decir, que satisface*

$$\int_G f(x) dm(x) = \int_G f(x+a) dm(x) \quad (1.1)$$

para toda  $f \in L^1(G, m)$  y para todo  $a \in G$ . Más aún, esta medida es única salvo multiplicación por escalares positivos.

Sea  $G$  un grupo LCA. Como la medida dada por el Teorema 1.1.2 es única salvo multiplicación por escalares positivos, la llamamos la *medida de Haar* de  $G$  y la notamos  $m$ . En el resto del capítulo, consideramos siempre a los grupos LCA con esta medida. Si  $G$  es compacto, la regularidad de la medida de Haar implica que la misma es finita y, por convención, la tomamos normalizada, de modo que  $m(G) = 1$ .

**Ejemplos 1.1.3.** A continuación, describiremos las medidas de Haar correspondientes a los grupos LCA de los Ejemplos 1.1.1.

- La medida de Haar de  $\mathbb{R}^n$  es la medida de Lebesgue.
- Notamos  $m_1$  a la medida de Haar de  $\mathbb{T}$ . Para describirla, identificamos  $\mathbb{T}$  con  $[0, 2\pi)$  vía

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}, \quad f(t) = e^{it}.$$

Luego, para cada  $B \subseteq \mathbb{T}$  boreliano tenemos

$$m_1(B) = \frac{1}{(2\pi)} |f^{-1}(B)|,$$

donde  $|\cdot|$  denota la medida de Lebesgue del intervalo  $[0, 2\pi)$  y el factor  $\frac{1}{2\pi}$  está para que  $m_1(\mathbb{T}) = 1$ .

- Notamos  $m_n$  a la medida de Haar de  $\mathbb{T}^n$ . Para cada  $B \subseteq \mathbb{T}^n$  boreliano tenemos

$$m_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^n} |f^{-1}(B)|,$$

donde

$$f : [0, 2\pi)^n \rightarrow \mathbb{T}^n \text{ está dada por } f(t_1, \dots, t_n) = (e^{it_1}, \dots, e^{it_n})$$

y  $|\cdot|$  es la medida de Lebesgue de  $[0, 2\pi)^n$ . Así, para cada  $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ , resulta

$$\int_{\mathbb{T}^n} g dm_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}) dt_1 \dots dt_n.$$

Más aún, la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{T}^n$  es la generada por los productos de borelianos de  $\mathbb{T}$  y  $m_n$  coincide con la medida producto  $m_1 \times \dots \times m_1$ .

- En el politoro infinito  $\mathbb{T}^\infty$ , los conjuntos de la forma

$$\prod_{k=1}^n B_k \times \mathbb{T}^\infty,$$

con  $B_k \subseteq \mathbb{T}$  borelianos, generan la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{T}^\infty$  y la medida de Haar de  $\mathbb{T}^\infty$  coincide con la medida producto.

- En  $\mathbb{Z}^n$ , la medida de Haar está dada por  $m(\alpha) = 1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ .

## 1.2. El grupo dual y la transformada de Fourier

Sea  $G$  un grupo LCA. Si  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{T}$  es un morfismo de grupos continuo, decimos que  $\gamma$  es un *character* (continuo) de  $G$ . El conjunto de todos los caracteres de  $G$  forman un grupo, que notamos  $\hat{G}$ , con la suma definida por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x) \quad (x \in G, \gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}).$$

El grupo  $\hat{G}$  se llama *grupo dual* de  $G$ . Más aún, se puede ver que existe una topología que hace de  $\hat{G}$  un grupo LCA [6].

**Definición 1.2.1.** Sea  $G$  un grupo LCA. Si  $f \in L_1(G)$ , definimos la *transformada de Fourier* de  $f$  como la función  $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)f(x) dm(x), \text{ para todo } \gamma \in \hat{G}. \quad (1.2)$$

Si  $\mu \in \mathcal{M}(G)$ , la función  $\hat{\mu} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) d\mu(x), \text{ para todo } \gamma \in \hat{G} \quad (1.3)$$

es la *transformada de Fourier* de  $\mu$ .

**Observación 1.2.2.** Dada  $f \in L_1(G)$ , consideramos la medida  $f dm \in \mathcal{M}(G)$ , donde para cada boreliano  $A \subseteq G$ ,

$$f dm(A) = \int_A f(x) dm(x).$$

La aplicación  $f \in L_1(G) \mapsto f dm \in \mathcal{M}(G)$  es una isometría lineal y, luego, podemos pensar a  $L_1(G)$  como un subespacio de  $\mathcal{M}(G)$ . Se puede ver que  $\hat{f}$  (la transformada de Fourier de  $f$ ) coincide con  $\widehat{f dm}$  (la transformada de Fourier de la medida  $f dm$ ). En otras palabras, (1.2) resulta un caso particular de (1.3).

**Observación 1.2.3.** Si  $\mu \in \mathcal{M}(G)$ , entonces para todo  $\gamma \in \hat{G}$  tenemos

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \int_G |\gamma(-x)| d|\mu|(x) \leq \|\mu\|. \quad (1.4)$$

En particular, si  $f \in L_1(G)$ , entonces

$$|\hat{f}(\gamma)| \leq \|f\|_1$$

para todo  $\gamma \in \hat{G}$ .

**Observación 1.2.4.** Sea  $G$  un grupo LCA. Para  $f \in L_1(G)$  y  $a \in G$ , definimos la función

$$\begin{aligned} T_a f : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(a + x). \end{aligned}$$

Como la medida de Haar de  $G$  es invariante por traslaciones,

$$\int_G |T_a f| \, dm = \int_G |f| \, dm$$

y  $T_a f \in L_1(G)$ . Entonces, podemos calcular su transformada de Fourier: para cada  $\gamma \in \hat{G}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{T_a f}(\gamma) &= \int_G \gamma(-x) T_a f(x) \, dm(x) = \int_G \gamma(-x) f(a + x) \, dm(x) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \int_G \gamma(-x + a) f(x) \, dm(x) = \gamma(a) \int_G \gamma(-x) f(x) \, dm(x) \\ &= \gamma(a) \hat{f}(\gamma). \end{aligned}$$

**Ejemplos 1.2.5.** A continuación, describiremos los grupos duales de los grupos LCA de los Ejemplos 1.1.1.

- Podemos identificar  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  con  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera: si  $y \in \mathbb{R}^n$ , la expresión

$$\gamma_y(x) = e^{ix \cdot y}$$

define un caracter en  $\mathbb{R}^n$  y todo caracter en  $\mathbb{R}^n$  tiene esa forma. Más aún, el mapa

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n} \\ y &\mapsto \gamma_y \end{aligned}$$

es un homeomorfismo topológico y un isomorfismo de grupos.

Además, si  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\hat{f}(\gamma_y) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} \, dx,$$

es decir, la definición de transformada de Fourier que dimos coincide con la definición clásica en  $\mathbb{R}^n$ .

- $\widehat{\mathbb{T}^n} = \mathbb{Z}^n$  : si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ , definimos  $\gamma_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$  como

$$\gamma_\alpha(w) = w^\alpha := \prod_{j=1}^n w_j^{\alpha_j}.$$

Entonces,  $\gamma_\alpha \in \widehat{\mathbb{T}^n}$  y el mapa  $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$  es un homeomorfismo topológico y un isomorfismo de grupos de  $\mathbb{Z}^n$  en  $\widehat{\mathbb{T}^n}$ .

Notar que, para  $n = 1$ , si  $k \in \mathbb{Z}$  y  $f \in L_1(\mathbb{T})$ , entonces

$$\hat{f}(\gamma_k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt,$$

que coincide con el  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$ .

- Podemos identificar  $\widehat{\mathbb{T}^\infty}$  con  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} = \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : \alpha_n \neq 0 \text{ solo para finitos } n \in \mathbb{N}\}$ : si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ , definimos  $\gamma_\alpha : \mathbb{T}^\infty \rightarrow \mathbb{T}$  como

$$\gamma_\alpha(w) = w^\alpha := \prod_{j=1}^{\infty} w_j^{\alpha_j}, \quad (1.5)$$

donde el producto en (1.5) es finito, pues  $\alpha \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ . Entonces,  $\gamma_\alpha \in \widehat{\mathbb{T}^\infty}$  y el mapa  $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$  es un homeomorfismo topológico y un isomorfismo de grupos de  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$  en  $\widehat{\mathbb{T}^\infty}$ .

- $\widehat{\mathbb{Z}^n} = \mathbb{T}^n$ : si  $w \in \mathbb{T}^n$ , definimos  $\gamma_w : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{T}$  como  $\gamma_w(\alpha) = w^\alpha$ . Entonces  $\gamma_w \in \widehat{\mathbb{Z}^n}$  y el mapa  $w \mapsto \gamma_w$  es un homeomorfismo topológico y un isomorfismo de grupos de  $\mathbb{T}^n$  en  $\widehat{\mathbb{Z}^n}$ .

### 1.3. Teorema de Peter-Weyl y consecuencias

Una propiedad importante de la transformada de Fourier  $\hat{\mu}$  es que determina a  $\mu$ , como vemos en el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $G$  un grupo LCA. Si  $\mu \in \mathcal{M}(G)$  satisface que  $\hat{\mu}(\gamma) = 0$  para todo  $\gamma \in \hat{G}$ , entonces  $\mu = 0$ . En particular, si  $f \in L_1(G)$  es tal que  $\hat{f}(\gamma) = 0$  para todo  $\gamma \in \hat{G}$ , entonces  $f(x) = 0$  para casi todo  $x \in G$ .*

La demostración se puede ver en [14] para el caso  $L_1(G)$  o en [17] para medidas. Nos concentramos ahora en algunas consecuencias de este resultado.

**Teorema 1.3.2** (Peter-Weyl). *Sea  $G$  un grupo LCA, entonces su dual  $\hat{G}$  separa puntos de  $G$ , es decir, si  $x \neq y$ , existe  $\gamma \in \hat{G}$  tal que  $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y \in G$  distintos. Por el teorema de Tietze-Urysohn, existe una función continua  $f : G \rightarrow [0, 1]$  con soporte compacto, y en particular integrable, tal que  $f(x) \neq f(y)$ . En otras palabras,

$$(T_x f - T_y f)(0) \neq 0. \quad (1.6)$$

Supongamos que para todo  $\gamma \in \hat{G}$ ,

$$\widehat{T_x f - T_y f}(\gamma) = 0.$$

Entonces, por el Teorema 1.3.1, para casi todo  $a \in G$ ,

$$(T_x f - T_y f)(a) = 0.$$

Pero como  $f$  es continua,  $T_x f - T_y f$  también, y luego la igualdad anterior vale para todo  $a \in G$ , contradiciendo (1.6). Por lo tanto, existe  $\gamma \in \hat{G}$  tal que

$$\widehat{T_x f - T_y f}(\gamma) \neq 0.$$

Por la Observación 1.2.4,

$$\gamma(x)\hat{f}(\gamma) = \widehat{T_x f}(\gamma) \neq \widehat{T_y f}(\gamma) = \gamma(y)\hat{f}(\gamma),$$

de donde concluimos  $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ . □

Sea  $G$  un grupo LCA,  $H \subseteq G$  y  $\Delta \subseteq \hat{G}$ . Definimos los conjuntos

$$H^\perp = \{\gamma \in \hat{G} : \gamma(x) = 1 \text{ para todo } x \in H\},$$

$${}^\perp\Delta = \{x \in G : \gamma(x) = 1 \text{ para todo } \gamma \in \Delta\}.$$

**Teorema 1.3.3.** *Sea  $G$  un grupo LCA y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Entonces*

$$H = {}^\perp(H^\perp).$$

Es decir,

$$H = \{x \in G : \gamma(x) = 1 \text{ para todo } \gamma \in H^\perp\}.$$

*Demostración.* La inclusión

$$H \subseteq \{x \in G : \gamma(x) = 1 \text{ para todo } \gamma \in H^\perp\}$$

es obvia. Para ver la otra inclusión, consideramos el grupo cociente  $G/H$ , que resulta un grupo LCA, y  $p : G \rightarrow G/H$  la proyección canónica. Supongamos que existe  $x \in G$  tal que  $\gamma(x) = 1$  para todo  $\gamma \in H^\perp$  y  $x \notin H$ . Entonces,  $p(x) \neq 0$  y por el Teorema de Peter-Weyl 1.3.2 aplicado al grupo LCA  $G/H$ , obtenemos un caracter  $\delta \in \widehat{G/H}$  tal que  $\delta(p(x)) \neq 1$ . Sea  $\gamma = \delta \circ p$ . Entonces,  $\gamma \in H^\perp$  y  $\gamma(x) \neq 1$ , lo cuál es absurdo. □

Un *polinomio trigonométrico* en  $G$  es una función de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j(x) \quad (x \in G) \tag{1.7}$$

donde  $a_j \in \mathbb{C}$  y  $\gamma_j \in \hat{G}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . En otras palabras, un polinomio trigonométrico es una combinación lineal (finita) de caracteres.

**Teorema 1.3.4.** *Si  $G$  es un grupo abeliano compacto, el conjunto de polinomios trigonométricos en  $G$  es una subálgebra densa de  $C(G)$ . En consecuencia, los polinomios trigonométricos son densos en  $L_p(G)$  para  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demostración.* El conjunto de polinomios trigonométricos en  $G$  es una subálgebra de  $C(G)$ , pues el producto de dos caracteres es un caracter. Además, contiene a la función constante 1, separa puntos por el Teorema 1.3.2 y si  $f$  es un polinomio trigonométrico, entonces  $\overline{f}$  también lo es, pues el conjugado de un caracter es un caracter. Luego, por el teorema de Stone-Weierstrass, el conjunto de polinomios trigonométricos en  $G$  es denso en  $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ .

Para concluir, sea  $1 \leq p < \infty$  y veamos que el conjunto de polinomios trigonométricos en  $G$  es denso en  $L_p(G)$ . Tomamos  $g \in L_p(G)$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $C(G)$  es denso en  $(L_p(G), \|\cdot\|_p)$ , existe  $h \in C(G)$  tal que  $\|g - h\|_p < \varepsilon/2$ . Y por lo que probamos recién, existe  $f$  polinomio trigonométrico en  $G$  tal que  $\|h - f\|_\infty < \varepsilon/2$ . Luego, como  $G$  es un grupo abeliano compacto,  $m(G) = 1$  y entonces

$$\begin{aligned} \|g - f\|_p &\leq \|g - h\|_p + \|h - f\|_p \leq \|g - h\|_p + \left( \int_G |h - f|^p dm \right)^{1/p} \\ &\leq \|g - h\|_p + \|h - f\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Nuestro próximo objetivo es ver que los caracteres forman una base ortonormal del espacio de Hilbert  $L_2(G)$ .

**Lema 1.3.5.** *Si  $G$  es un grupo abeliano compacto y  $\gamma \in \hat{G}$ , entonces*

$$\int_G \gamma(x) dm(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \equiv 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $\gamma \equiv 1$ , el resultado se sigue de  $m(G) = 1$ . Ahora, si  $\gamma \not\equiv 1$ , tomamos  $a \in G$  tal que  $\gamma(a) \neq 1$ . Entonces

$$\int_G \gamma(x) dm(x) = \int_G \gamma(x+a) dm(x) = \int_G \gamma(x)\gamma(a) dm(x) = \gamma(a) \int_G \gamma(x) dm(x),$$

de donde concluimos que

$$\int_G \gamma(x) dm(x) = 0. \quad \square$$

**Corolario 1.3.6.** *Si  $G$  es un grupo abeliano compacto, el grupo  $\hat{G}$  es una base ortonormal del espacio de Hilbert  $L_2(G)$ .*

*Demostración.* Vimos en el Teorema 1.3.4 que el espacio vectorial generado por  $\hat{G}$  es denso en  $L_2(G)$ . Además, si  $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ , entonces  $\gamma_1 \overline{\gamma_2}$  también es un caracter. Luego, por el Lema 1.3.5,

$$\int_G \gamma_1(x) \overline{\gamma_2(x)} dm(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma_1 = \gamma_2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Esto prueba que  $\hat{G}$  es un sistema ortonormal, lo que termina la demostración. □

## 1.4. El politoro y el flujo de Kronecker

Como ya mencionamos, el politoro  $\mathbb{T}^n$  será un grupo abeliano compacto fundamental a lo largo de la tesis. Por ello, a continuación reformulamos el Lema 1.3.5 y el Teorema 1.3.6 para el caso particular  $G = \mathbb{T}^n$ . Recordemos que para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ,  $w \mapsto w^\alpha$  es un caracter de  $\mathbb{T}^n$  y, más aún, todos los caracteres de  $\mathbb{T}^n$  son de esa forma (ver Ejemplo 1.2.5).

**Lema 1.4.1.** *Para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ,*

$$\int_{\mathbb{T}^n} w^\alpha dm_n(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

**Lema 1.4.2.** *El conjunto  $\{w^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$  es una base ortonormal de  $L_2(\mathbb{T}^n)$ . Es decir, el subespacio generado por  $\{w^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$  es denso en  $L_2(\mathbb{T}^n)$  y*

$$\int_{\mathbb{T}^n} w^\alpha w^{-\beta} dm_n(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

**Definición 1.4.3.** Dado un conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de números reales linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ , el *flujo de Kronecker*  $(K_t)_{t \geq 0}$  asociado a la  $n$ -tupla  $(x_1, \dots, x_n)$  es la familia de mapas  $K_t : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  definida por

$$K_t(w) = (e^{ix_1 t} w_1, \dots, e^{ix_n t} w_n).$$

Vamos a notar

$$e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^n.$$

**Teorema 1.4.4** (Teorema de Birkhoff para el flujo de Kronecker). *Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de números reales linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$  y sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Entonces,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(K_t(e)) dt = \int_{\mathbb{T}^n} f(w) dm_n(w). \quad (1.8)$$

Más generalmente, si  $V \subseteq \mathbb{T}^n$  es un abierto con  $m_n(\partial V) = 0$ , entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) dt = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_V(w) f(w) dm_n(w). \quad (1.9)$$

*Demostración.* Comenzamos probando (1.8) para caracteres en  $\mathbb{T}^n$ . Supongamos entonces que  $f(w) = w^\alpha$  para algún  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ . Si  $\alpha = (0, \dots, 0)$ ,  $f \equiv 1$  y entonces

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(K_t(e)) dt = 1 = \int_{\mathbb{T}^n} f(w) dm_n(w)$$

para todo  $T > 0$ . En particular, vale (1.8). Si  $\alpha \neq (0, \dots, 0)$ , vimos en el Lema 1.4.1 que

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(w) dm_n(w) = \int_{\mathbb{T}^n} w^\alpha dm_n(w) = 0.$$

Por otro lado, como  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ ,

$$A := \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \neq 0$$

y, en consecuencia,

$$\int_0^T f(K_t(e)) dt = \int_0^T e^{ix_1 t \alpha_1} \dots e^{ix_n t \alpha_n} dt = \int_0^T e^{iAt} dt = \frac{e^{iAT} - 1}{iA}.$$

Luego,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(K_t(e)) dt \right| \leq \frac{1}{T} \frac{2}{A} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Esto concluye la demostración de (1.8) para caracteres.

De la linealidad de la integral y lo que probamos recién, deducimos (1.8) para el caso en que  $f$  es un polinomio trigonométrico en  $\mathbb{T}^n$ , es decir, una combinación lineal finita de caracteres de  $\mathbb{T}^n$ .

Para finalizar esta parte de la demostración, sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{T}^n$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Por el Teorema 1.3.4, existe  $p$  polinomio trigonométrico en  $\mathbb{T}^n$  tal que

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Como ya probamos (1.8) para  $p$ , existe  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T \geq T_0$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T p(K_t(e)) dt - \int_{\mathbb{T}^n} p(w) dm_n(w) \right| < \varepsilon/3.$$

Entonces, para todo  $T \geq T_0$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(K_t(e)) dt - \int_{\mathbb{T}^n} f(w) dm_n(w) \right| \leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(K_t(e)) - p(K_t(e)) dt \right| + \\ & + \left| \frac{1}{T} \int_0^T p(K_t(e)) dt - \int_{\mathbb{T}^n} p(w) dm_n(w) \right| + \left| \int_{\mathbb{T}^n} p(w) - f(w) dm_n(w) \right| \\ & \leq \|f - p\|_\infty + \varepsilon/3 + \|p - f\|_\infty < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba (1.8).

Demostramos ahora (1.9). Para ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f \geq 0$ . Por la regularidad de la medida, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existen  $F_k \subseteq V$  y  $G_k \subseteq \bar{V}^c$  cerrados tal que

$$\begin{aligned} m_n(V \setminus F_k) &\leq 1/k \quad \text{y} \\ m_n(\bar{V}^c \setminus G_k) &\leq 1/k. \end{aligned}$$

Por el lema de Urysohn, existen  $f_k, g_k : \mathbb{T}^n \rightarrow [0, 1]$  continuas tal que

$$f_k \equiv 0 \text{ en } V^c, \quad f_k \equiv 1 \text{ en } F_k \quad \text{y}$$

$$g_k \equiv 1 \text{ en } \bar{V}, \quad g_k \equiv 0 \text{ en } G_k.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 \leq f_k \leq \chi_V \leq \chi_{\bar{V}} \leq g_k \leq 1, \\ \int_{\mathbb{T}^n} g_k - \chi_{\bar{V}} \, dm_n \leq \frac{1}{k} \quad \text{y} \\ \int_{\mathbb{T}^n} \chi_V - f_k \, dm_n \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g_k(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \int_{\mathbb{T}^n} g_k f \, dm_n \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} (g_k - \chi_{\bar{V}}) f \, dm_n + \int_{\bar{V}} f \, dm_n \\ &\leq \|f\|_\infty / k + \int_{\bar{V}} f \, dm_n. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt \leq \int_{\bar{V}} f \, dm_n.$$

Como  $m_n(\partial V) = 0$ , tenemos

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt \leq \int_V f \, dm_n.$$

Análogamente, usando  $f_k$  en lugar de  $g_k$ , obtenemos

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt \geq \int_V f \, dm_n.$$

Así,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) f(K_t(e)) \, dt = \int_V f \, dm_n,$$

como queríamos ver. □

**Teorema 1.4.5** (Kronecker). *Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de números reales linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ . Entonces el conjunto*

$$\{(e^{ix_1 t}, \dots, e^{ix_n t}) : t \in \mathbb{R}\}$$

*es denso en  $\mathbb{T}^n$ .*

*Demostración.* La topología de  $\mathbb{T}^n$  coincide con la inducida por la métrica

$$d(w, u) = \max_{1 \leq j \leq n} |w_j - u_j|.$$

Sea  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$  y  $\varepsilon > 0$ . Tomamos

$$V := \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{T}^n : \max_{1 \leq j \leq n} |w_j - u_j| < \varepsilon\}.$$

Como  $m_n(\partial V) = 0$ , por el Teorema 1.4.4,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_V(K_t(e)) dt = m_n(V) > 0.$$

Luego, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\chi_V(K_t(e)) > 0$ . En otras palabras,

$$(e^{ix_1 t}, \dots, e^{ix_n t}) \in V$$

para algún  $t \in \mathbb{R}$ , lo que termina la demostración.  $\square$

**Observación 1.4.6.** Notemos que si  $p_1, \dots, p_n$  son números primos positivos distintos, entonces el conjunto

$$\{\log(p_1), \dots, \log(p_n)\}$$

es linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ . Luego, el Teorema 1.4.5 nos asegura que el conjunto

$$\{(p_1^{it}, \dots, p_n^{it}) : t \in \mathbb{R}\}$$

es denso en  $\mathbb{T}^n$ .

# Capítulo 2

## Series de Dirichlet

En este capítulo, presentaremos las series de Dirichlet y examinaremos su convergencia. Además, analizaremos los espacios de Banach generados por dichas series y la transformada de Bohr, que permite conectar el estudio de las series de Dirichlet con el análisis complejo en el polidisco.

Una *serie de Dirichlet* es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad (2.1)$$

donde  $a_n \in \mathbb{C}$  y  $s$  es una variable compleja. Llamamos  $\mathfrak{D}$  al conjunto de todas las series de Dirichlet pensadas de manera formal, es decir, sin preocuparnos por su convergencia. Claramente,  $\mathfrak{D}$  es un espacio vectorial y, más aún, es un álgebra con el producto dado por

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{km=n} a_k b_m \right) n^{-s}.$$

### 2.1. Convergencia de las series de Dirichlet

Sabemos que las series de potencias convergen en discos. Para las series de Dirichlet, lo análogo a los discos de convergencia son los semiplanos, como veremos en el Corolario 2.1.3.

**Teorema 2.1.1.** *Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge en algún punto  $s_0 = \sigma_0 + it$ , entonces converge para todo  $s \in \{\Re(s) > \sigma_0\}$ . Más aún, la serie converge uniformemente en todo compacto  $K \subseteq \{\Re(s) > \sigma_0\}$  y por lo tanto, define una función holomorfa en  $\{\Re(s) > \sigma_0\}$ .*

Para la demostración del teorema vamos a necesitar la siguiente fórmula de Abel para sumas.

**Lema 2.1.2.** Sean  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$ . Si para cada  $1 \leq n \leq N$ ,  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , entonces

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

*Demostración.* Como  $a_1 = A_1$  y para  $2 \leq n \leq N$ ,  $a_n = A_n - A_{n-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N A_n b_n - \sum_{n=2}^N A_{n-1} b_n \\ &= A_1 b_1 + A_N b_N + \sum_{n=2}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=2}^N A_{n-1} b_n \\ &= A_1 b_1 + A_N b_N + \sum_{n=2}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \quad \square \end{aligned}$$

*Demostración del Teorema 2.1.1.* Sea  $K \subseteq \{\Re(s) > \sigma_0\}$  compacto, veamos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge uniformemente en  $K$ . Consideramos

$$A := \max \left\{ \left| \frac{s - s_0}{\Re(s - s_0)} \right| : s \in K \right\} = \max \left\{ \frac{|s - s_0|}{\Re(s) - \sigma_0} : s \in K \right\} \geq 1.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s_0}$  converge, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $N \geq M \geq N_0$ ,

$$\left| \sum_{n=M}^N a_n n^{-s_0} \right| < \varepsilon / A. \quad (2.2)$$

Dados  $s \in K$  y  $N \geq M \geq N_0$ , como

$$\left| \sum_{n=M}^N a_n n^{-s} \right| = \left| \sum_{n=M}^N (a_n n^{-s_0}) (n^{s_0-s}) \right|,$$

aplicamos el Lema 2.1.2 con las constantes

$$a_M M^{-s_0}, \dots, a_N N^{-s_0} \text{ y } M^{s_0-s}, \dots, N^{s_0-s},$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=M}^N a_n n^{-s} \right| &= \left| \sum_{n=M}^N (a_n n^{-s_0}) (n^{s_0-s}) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{n=M}^N a_n n^{-s_0} \right) N^{s_0-s} + \sum_{n=M}^{N-1} \left( \sum_{k=M}^n a_k k^{-s_0} \right) (n^{s_0-s} - (n+1)^{s_0-s}) \right|. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad triangular y (2.2),

$$\left| \sum_{n=M}^N a_n n^{-s} \right| \leq \frac{\varepsilon}{A} N^{\Re(s_0-s)} + \frac{\varepsilon}{A} \sum_{n=M}^{N-1} \left| n^{s_0-s} - (n+1)^{s_0-s} \right|. \quad (2.3)$$

Analicemos la última suma. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| n^{s_0-s} - (n+1)^{s_0-s} \right| &= \left| \int_n^{n+1} (s-s_0)x^{s_0-s-1} dx \right| \\ &\leq \int_n^{n+1} |s-s_0|x^{\Re(s_0-s)-1} dx \\ &\leq \frac{|s-s_0|}{\Re(s_0-s)} \left( (n+1)^{\Re(s_0-s)} - n^{\Re(s_0-s)} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^{N-1} \left| n^{s_0-s} - (n+1)^{s_0-s} \right| &\leq \frac{|s-s_0|}{\Re(s_0-s)} \sum_{n=M}^{N-1} \left( (n+1)^{\Re(s_0-s)} - n^{\Re(s_0-s)} \right) \\ &\leq \frac{|s-s_0|}{\Re(s_0-s)} (N^{\Re(s_0-s)} - M^{\Re(s_0-s)}) \\ &\leq \frac{|s-s_0|}{\Re(s-s_0)} (M^{\Re(s_0-s)} - N^{\Re(s_0-s)}) \\ &\leq A(M^{\Re(s_0-s)} - N^{\Re(s_0-s)}). \end{aligned}$$

Volviendo a (2.3), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=M}^N a_n n^{-s} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{A} N^{\Re(s_0-s)} + \frac{\varepsilon}{A} A(M^{\Re(s_0-s)} - N^{\Re(s_0-s)}) \\ &\leq \varepsilon N^{\Re(s_0-s)} + \varepsilon (M^{\Re(s_0-s)} - N^{\Re(s_0-s)}) \\ &\leq \varepsilon M^{\Re(s_0-s)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge uniformemente en todo compacto  $K \subseteq \{\Re(s) > \sigma_0\}$ . Dado que las sumas parciales son holomorfas y el límite uniforme sobre compactos de funciones holomorfas también es holomorfo, concluimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge en  $\{\Re(s) > \sigma_0\}$ , donde define una función holomorfa.  $\square$

El resultado anterior motiva la siguiente definición. Dada  $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  una serie de Dirichlet (que converge en algún punto), la *abscisa de convergencia*  $\{\Re(s) = \sigma_c(D)\}$  de  $D$  está dada por

$$\sigma_c(D) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge en } \{\Re(s) > \sigma\}\} \in [-\infty, \infty).$$

**Corolario 2.1.3.** *Sea  $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  una serie de Dirichlet (que converge en algún punto). Entonces  $D$  converge en el semiplano  $\{\Re(s) > \sigma_c(D)\}$  y diverge en  $\{\Re(s) < \sigma_c(D)\}$ . Más aún,  $D$  define una función holomorfa en  $\{\Re(s) > \sigma_c(D)\}$ .*

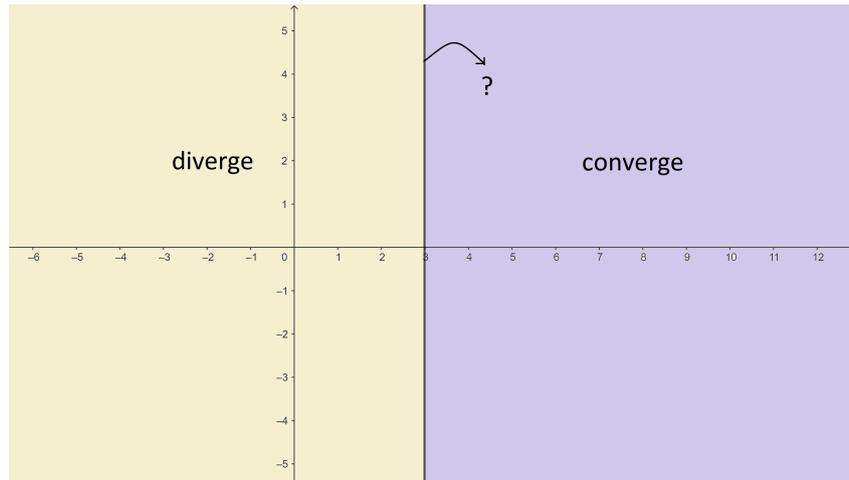


Figura 2.1: *Región de convergencia de una serie de Dirichlet.*

Ilustramos el corolario anterior en la Figura 2.1. Notemos que dicho resultado no proporciona información sobre la convergencia de la serie de Dirichlet en la abscisa de convergencia  $\{\Re(s) = \sigma_c(D)\}$ .

Mencionamos también el siguiente resultado fundamental de Harald Bohr sobre la convergencia uniforme de una serie de Dirichlet [2].

**Teorema 2.1.4.** [7, Teorema 1.13] *Sea  $D = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  una serie de Dirichlet (que converge en algún punto). Si su función límite se extiende a una función holomorfa y acotada en  $\{\Re(s) > 0\}$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge uniformemente en  $\{\Re(s) > \varepsilon\}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*

## 2.2. Los espacios $\mathcal{H}_{\infty}$ y $\mathcal{H}_2$

Comenzamos definiendo el espacio de Hardy de series de Dirichlet  $\mathcal{H}_{\infty}$ .

**Definición 2.2.1.**

$$\mathcal{H}_{\infty} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} : \text{converge en } \{\Re(s) > 0\}, \text{ donde su función límite es acotada} \right\}$$

Notemos que por el Corolario 2.1.3, las series de Dirichlet en  $\mathcal{H}_{\infty}$  definen funciones holomorfas en  $\{\Re(s) > 0\}$ . Además,  $\mathcal{H}_{\infty}$  resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \right\|_{\infty} = \sup_{\Re(s) > 0} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \right|.$$

La demostración se puede ver en [7, Teorema 1.17].

Dada una serie de Dirichlet en  $\mathcal{H}_{\infty}$ , nos interesa estudiar la suma cuadrática de sus coeficientes. Introducimos entonces el espacio de Hardy de series de Dirichlet  $\mathcal{H}_2$ .

**Definición 2.2.2.**

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

$\mathcal{H}_2$  es un espacio de Banach con la norma

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \right\|_2 = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

y más aún, es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n n^{-s} \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \bar{b}_n.$$

Además, las series de Dirichlet de  $\mathcal{H}_2$  definen funciones holomorfas en  $\{\Re(s) > 1/2\}$ , como muestra la siguiente observación.

**Observación 2.2.3.** Sea  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2$  y  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > 1/2$ , entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n n^{-s}| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| n^{-\sigma} \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-2\sigma} \right)^{1/2} < \infty.$$

Luego,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}$  converge absolutamente en  $\{\Re(s) > 1/2\}$ .

Un *polinomio de Dirichlet* es una expresión de la forma

$$\sum_{n=1}^N a_n n^{-s},$$

es decir, una serie de Dirichlet donde solo finitos coeficientes  $a_n$  son no nulos.

El siguiente resultado, debido a Carlson [4], caracteriza la norma en  $\mathcal{H}_2$  de los polinomios de Dirichlet en términos de medias integrales.

**Proposición 2.2.4.** Sean  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^N a_n n^{-it} \right|^2 dt.$$

*Demostración.* Comenzamos notando que como

$$\frac{1}{R} \int_0^R n^{-it} m^{it} dt = \begin{cases} 1 & n = m, \\ \frac{i(1-(m/n)^{iR})}{R \log(m/n)} & n \neq m, \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R n^{-it} m^{it} dt = \delta_{n,m}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^N a_n n^{-it} \right|^2 dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \left( \sum_{n=1}^N a_n n^{-it} \right) \left( \sum_{m=1}^N \overline{a_m} m^{it} \right) dt \\
&= \sum_{n,m=1}^N a_n \overline{a_m} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R n^{-it} m^{it} dt \right) \\
&= \sum_{n,m=1}^N a_n \overline{a_m} \delta_{n,m} = \sum_{n=1}^N |a_n|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que  $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{H}_2$  y que la inclusión tiene norma 1.

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ , entonces*

$$\left( \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \right\|_\infty.$$

*Demostración.* Fijamos  $\sigma > 0$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ , por el Teorema 2.1.4, tenemos que  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$  converge uniformemente en  $\{\Re(s) = \sigma\}$ . Luego, existe  $N_0$  tal que para todo  $N \geq N_0$ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} - \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| < \varepsilon.$$

Así, si  $N \geq N_0$ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \right\|_\infty + \varepsilon.$$

Ahora, por la Proposición 2.2.4, para todo  $N \geq N_0$ ,

$$\left( \sum_{n=1}^N \left| a_n \frac{1}{n^\sigma} \right|^2 \right)^{1/2} = \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \left| \sum_{n=1}^N a_n \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \right\|_\infty + \varepsilon.$$

El resultado se sigue de tomar  $\sigma \rightarrow 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

Veremos más resultados de este estilo en la Sección 4.1.

**Corolario 2.2.6.** *Sea  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ , entonces  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$  converge absolutamente para todo  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re(s) > 1/2$ .*

*Demostración.* Sea  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ . Por la Proposición 2.2.5,  $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2$ . Luego, el resultado se deduce inmediatamente de la Observación 2.2.3. □

## 2.3. La transformada de Bohr

El objetivo de esta sección es explicar la relación entre las series de Dirichlet y las funciones holomorfas en infinitas variables, vía la transformada de Bohr. Para eso, consideraremos un tercer objeto: las series de potencias.

Dados  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$  y  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números complejos, notamos

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}.$$

Una *serie de potencias (en infinitas variables)* es una expresión de la forma

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha,$$

con coeficientes  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ . Llamamos  $\mathfrak{P}$  al conjunto de todas las series de potencias formales, que resulta un álgebra con la suma término a término y el producto

$$\left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \right) \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} d_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \left( \sum_{\beta + \gamma = \alpha} c_\beta d_\gamma \right) z^\alpha.$$

La idea de Bohr consiste en identificar esta álgebra  $\mathfrak{P}$  con el álgebra  $\mathfrak{D}$  de series de Dirichlet usando el teorema fundamental de la aritmética de la siguiente manera. Notamos  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$  a la sucesión de números primos positivos ordenada crecientemente. Luego, sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un único  $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$  tal que  $n = \mathbf{p}^\alpha$ . Entonces, podemos asociarle a cada serie de potencias (en infinitas variables)  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$  la serie de Dirichlet  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}$  donde, para cada  $n = \mathbf{p}^\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = c_\alpha$ . Recíprocamente, le asociamos a cada serie de Dirichlet  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}$  la serie de potencias  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_{\mathbf{p}^\alpha} z^\alpha$ .

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \xleftrightarrow{a_n = a_{\mathbf{p}^\alpha} = c_\alpha} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}.$$

Por ejemplo, la serie de potencias

$$5z_2 + z_1 z_3 + z_5^2$$

se corresponde con la serie de Dirichlet

$$5 \cdot 3^{-s} + 10^{-s} + 121^{-s}.$$

Esto permite definir la aplicación

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}, \quad a_n = c_\alpha \text{ si } n = \mathbf{p}^\alpha,$$

que resulta biyectiva, lineal y multiplicativa (es decir, un isomorfismo de álgebras) y que se conoce como *transformada de Bohr*. Informalmente y sin ser rigurosos, podríamos pensar

a la transformada de Bohr como la evaluación de la “función”  $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$  en la sucesión  $z = (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots)$ :

$$\text{“ } \mathfrak{B}(f)(s) = f(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha (\mathbf{p}^\alpha)^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \text{”}.$$

Para poder precisar estas ideas y entender mejor a la transformada de Bohr, consideraremos ciertos subespacios de  $\mathfrak{B}$  y analizaremos su imagen por dicha aplicación.

El primer caso que miraremos es  $H_\infty(\mathbb{D})$ , el espacio de Banach de las funciones holomorfas y acotadas en

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

con la norma supremo.

Podemos pensar  $H_\infty(\mathbb{D})$  como un subespacio de  $\mathfrak{B}$ : si  $f \in H_\infty(\mathbb{D})$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

que identificamos con una serie de potencias de la forma  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$  con coeficientes  $c_\alpha \neq 0$  solo si  $\alpha = (\alpha_1, 0, 0, \dots)$  para algún  $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$ . Si aplicamos la transformada de Bohr a esta serie de potencias obtenemos una serie de Dirichlet que depende solo del primer primo, es decir de la forma  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}$  donde  $a_n \neq 0$  solo si  $n$  es una potencia de 2. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2.3.1.** Definimos  $\mathcal{H}_\infty^{(1)}$  como la clase de series de Dirichlet en  $\mathcal{H}_\infty$  que dependen solo del primer primo, es decir

$$\mathcal{H}_\infty^{(1)} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty : a_n = 0 \text{ si existe un primo } p \neq 2 \text{ tal que } p|n \right\}.$$

Notemos que, por la Proposición 2.2.5, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty &\rightarrow \mathbb{C} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} &\mapsto a_m \end{aligned}$$

define un funcional lineal continuo, y por lo tanto, su núcleo es cerrado. Luego,  $\mathcal{H}_\infty^{(1)}$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}_\infty$  y en consecuencia, es un espacio de Banach. El siguiente resultado muestra que, vía la transformada de Bohr,

$$\mathcal{H}_\infty^{(1)} = H_\infty(\mathbb{D})$$

como espacios de Banach.

**Teorema 2.3.2.** *La restricción de la transformada de Bohr a  $H_\infty(\mathbb{D})$  define un isomorfismo isométrico:*

$$\begin{aligned} H_\infty(\mathbb{D}) &\rightarrow \mathcal{H}_\infty^{(1)} \\ f &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = \begin{cases} f^{(k)}(0)/k! & \text{si } n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además, para cada  $s \in \{\Re(s) > 0\}$ , resulta:

$$f(2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

*Demostración.* Observemos que para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re(s) > 0$ , se tiene que  $2^{-s} \in \mathbb{D}$ . Recíprocamente, si  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , existe  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re(s) > 0$  tal que  $z = 2^{-s}$ . Luego, dadas una serie de potencias  $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k z^k$  y una serie de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ , con

$$a_n = \begin{cases} c_k & \text{si } n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge para todo  $s$  con  $\Re(s) > 0$  si y solo si  $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k z^k$  converge para todo  $z \in \mathbb{D}$  y en ese caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_{2^k} 2^{-ks} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k (2^{-s})^k. \quad (2.5)$$

Además,

$$\sup_{\Re(s) > 0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right| = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k z^k \right|. \quad (2.6)$$

Sea  $f \in H_{\infty}(\mathbb{D})$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \text{ con } a_n = \begin{cases} f^{(k)}(0)/k! & \text{si } n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por (2.5) y (2.6),  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_{\infty}^{(1)}$  y para cada  $s$  con  $\Re(s) > 0$ ,

$$f(2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Esto prueba que el mapa (2.4) está bien definido. Además, es claramente lineal y, nuevamente por (2.6), es una isometría. Resta probar la sobreyectividad: sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_{\infty}^{(1)},$$

consideramos la serie de potencias

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_{2^k} z^k.$$

Usando nuevamente (2.5) y (2.6), concluimos que  $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} a_{2^k} z^k$  converge para todo  $z \in \mathbb{D}$  y es acotada, por lo que define una función  $f \in H_{\infty}(\mathbb{D})$ . Es claro que  $f$  es la preimagen por la aplicación de Bohr de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ .  $\square$

El próximo objetivo es presentar resultados de este estilo, pero con imagen “más grande”. Para ello, como queremos más primos, necesitaremos funciones holomorfas de más variables. Algunas referencias para análisis complejo en varias variables son [19, Capítulo 1], [9, Capítulo 1] y [7, Capítulo 2].

**Definición 2.3.3.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}^N$  abierto. Decimos que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $U$  si para cada  $z \in U$  existe un único vector  $\nabla f(z) \in \mathbb{C}^N$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - \langle \nabla f(z), h \rangle}{\|h\|} = 0$$

Vamos a notar  $\mathbb{D}^N = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^N$  al polidisco de dimensión  $N$ .

Definimos entonces  $H_\infty(\mathbb{D}^N)$  como el conjunto de las funciones holomorfas y acotadas en  $\mathbb{D}^N$ , que resulta ser un espacio de Banach con la norma supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}^N} |f(z)|.$$

Análogamente a lo que ocurre en  $\mathbb{C}$ , vamos a definir funciones analíticas en el polidisco y ver que esta noción es equivalente a la de función holomorfa. Si  $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$  y  $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ , notamos

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}.$$

**Definición 2.3.4.** Sea  $f : \mathbb{D}^N \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que  $f$  es analítica en  $\mathbb{D}^N$  (en 0) si existe una familia de coeficientes  $(b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$  tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} b_\alpha z^\alpha$$

para todo  $z \in \mathbb{D}^N$ .

Tenemos entonces el siguiente resultado [7, Teorema 2.8].

**Teorema 2.3.5.** Sea  $f : \mathbb{D}^N \rightarrow \mathbb{C}$ .

(a) Si  $f$  es holomorfa, entonces es analítica. Más precisamente, existe una única familia de coeficientes  $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$  tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha$$

para todo  $z \in \mathbb{D}^N$ . Además, la serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{D}^N$ .

(b) Si  $f$  es analítica en  $\mathbb{D}^N$  en 0, es holomorfa en  $\mathbb{D}^N$ .

De la misma manera que en el caso de una variable, el Teorema 2.3.5 nos permite identificar  $H_\infty(\mathbb{D}^N)$  con un subespacio de  $\mathfrak{P}$ : sea  $f \in H_\infty(\mathbb{D}^N)$ , entonces para todo  $z \in \mathbb{D}^N$ ,

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha,$$

que pensamos como una serie de potencias  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(N)}} c_\alpha(f) z^\alpha$ , donde  $c_\alpha(f) \neq 0$  solo si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots)$ . Al aplicarle la transformada de Bohr a esta serie, obtenemos una serie de Dirichlet que solo depende de los primeros  $N$  primos, es decir una serie de Dirichlet de la forma  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s}$ , con  $a_n \neq 0$  solo si  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$ .

**Definición 2.3.6.** Definimos

$$\mathcal{H}_\infty^{(N)} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty : a_n = 0 \text{ si existe } j > N \text{ tal que } p_j | n \right\}.$$

Notemos que, por la Proposición 2.2.5,  $\mathcal{H}_\infty^{(N)}$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}_\infty$  y en consecuencia es un espacio de Banach.

El siguiente resultado generaliza al Teorema 2.3.2 y nos dice que vía la transformada de Bohr,

$$H_\infty(\mathbb{D}^N) = \mathcal{H}_\infty^{(N)}$$

como espacios de Banach. La demostración es similar a la del caso  $N = 1$ , aunque un poco más técnica, y se puede ver en [7, Teorema 3.7].

**Teorema 2.3.7.** *La restricción de la transformada de Bohr a  $H_\infty(\mathbb{D}^N)$  define un isomorfismo isométrico:*

$$H_\infty(\mathbb{D}^N) \rightarrow \mathcal{H}_\infty^{(N)}$$

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = \begin{cases} c_\alpha(f) & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \text{ con } (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Además, para cada  $s \in \{\Re(s) > 0\}$ ,

$$f(p_1^{-s}, \dots, p_N^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Si quisieramos una caracterización vía la transformada de Bohr del espacio  $\mathcal{H}_\infty$ , el resultado anterior nos induce a pensar en funciones holomorfas en infinitas variables (ya que necesitamos los infinitos primos). Resulta que el reemplazo adecuado para  $\mathbb{D}^N$  es  $B_{c_0}$ , la bola abierta unitaria del espacio de Banach

$$c_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\},$$

con la norma infinito

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Definimos entonces funciones holomorfas en espacios normados.

**Definición 2.3.8.** Sea  $X$  un espacio normado complejo y  $U \subseteq X$  abierto. Decimos que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $U$  si es diferenciable Fréchet en cada  $x \in U$ . Es decir, para cada  $x \in U$ , existe  $x^*$  funcional lineal y continuo en  $X$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - x^*(h)}{\|h\|} = 0.$$

Consideramos ahora  $H_\infty(B_{c_0})$  el espacio de todas las funciones  $f : B_{c_0} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfas y acotadas, que es un espacio de Banach con la norma infinito:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in B_{c_0}} |f(x)|.$$

**Definición 2.3.9.** Decimos que  $f : B_{c_0} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $B_{c_0}$  en 0 si existe una familia de coeficientes  $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$  tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha$$

para todo  $z \in B_{c_0}$ .

Si bien es cierto que si  $f : B_{c_0} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $B_{c_0}$  en 0 entonces es holomorfa, la recíproca en general es falsa. Más aún, hay funciones holomorfas y acotadas en  $B_{c_0}$  que no son analíticas en  $B_{c_0}$  en 0. Sin embargo, dada una función holomorfa en  $B_{c_0}$ , podemos asociarle una serie de potencias que determina la función. La diferencia está en que, a priori, solo podemos asegurar que la serie converge en la bola del subespacio denso

$$c_{00} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : a_n \neq 0 \text{ solo para finitos } n \in \mathbb{N}\},$$

como muestra el siguiente resultado [7, Teorema 2.19].

**Teorema 2.3.10.** Sea  $f : B_{c_0} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa, existe una única familia de coeficientes  $(c_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$  tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha(f) z^\alpha$$

para todo  $z \in B_{c_{00}}$ .

El resultado anterior nos permite pensar a  $H_\infty(B_{c_0})$  como subespacio de  $\mathfrak{P}$ . Enunciamos entonces el resultado que generaliza el Teorema 2.3.7, y nos permite ir y venir del mundo de las funciones holomorfas al de las series de Dirichlet vía la transformada de Bohr. [7, Teorema 3.8].

**Teorema 2.3.11.** Vale la siguiente igualdad isométrica

$$H_\infty(B_{c_0}) = \mathcal{H}_\infty.$$

Más precisamente, la transformada de Bohr

$$H_\infty(B_{c_0}) \rightarrow \mathcal{H}_\infty$$

$$f \mapsto \mathfrak{B}f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = c_\alpha(f) \text{ si } n = \mathbf{p}^\alpha,$$

es un isomorfismo isométrico de  $H_\infty(B_{c_0})$  en  $\mathcal{H}_\infty$ . Además, para cada  $s \in \{\Re(s) > 0\}$ ,

$$f(p_1^{-s}, p_2^{-s}, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Consideremos un último subespacio de  $\mathfrak{P}$ .

**Definición 2.3.12.** Definimos

$$H_2(\mathbb{D}^N) = \left\{ f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha \text{ holomorfa en } \mathbb{D}^N : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 < \infty \right\}.$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_2 = \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 \right)^{1/2}.$$

Al igual que hicimos con  $H_\infty(\mathbb{D}^N)$ , pensamos a  $H_2(\mathbb{D}^N)$  como un subespacio de  $\mathfrak{P}$  y queremos analizar como es su imagen vía la transformada de Bohr. Sea

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha \in H_2(\mathbb{D}^N),$$

entonces

$$\mathfrak{B}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = \begin{cases} c_\alpha(f) & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \text{ con } (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  es una serie de Dirichlet que solo depende de los primeros  $N$  primos. Además,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 < \infty,$$

por lo que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2.$$

Definimos entonces el subespacio cerrado de  $\mathcal{H}_2$ ,

$$\mathcal{H}_2^{(N)} := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2 : a_n = 0 \text{ si existe } j > N \text{ tal que } p_j | n \right\}.$$

Lo que probamos es que la restricción de la transformada de Bohr  $\mathfrak{B} : H_2(\mathbb{D}^N) \rightarrow \mathcal{H}_2^{(N)}$  es una isometría lineal. Más aún, vale el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.13.** *La restricción de la transformada de Bohr a  $H_2(\mathbb{D}^N)$*

$$H_2(\mathbb{D}^N) \rightarrow \mathcal{H}_2^{(N)}$$

$$f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n = \begin{cases} c_\alpha(f) & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \text{ con } (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es un isomorfismo isométrico.

*Demostración.* Resta probar la sobreyectividad. Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_2^{(N)}$ , consideramos

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}} z^\alpha.$$

Veamos que esta serie de potencias converge absolutamente en  $\mathbb{D}^N$ . Si  $z \in \mathbb{D}^N$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}}| |z^\alpha| &\leq \left( \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}}| \right) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |z^\alpha| \\ &\leq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |z^\alpha| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Luego,  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}} z^\alpha$  define una función holomorfa  $f$  en  $\mathbb{D}^N$  (Teorema 2.3.5) y como

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |a_{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty,$$

concluimos que  $f \in H_2(\mathbb{D}^N)$ . Claramente, la imagen por la transformada de Bohr de esta función es  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ , por lo que la restricción es sobreyectiva.  $\square$

El siguiente resultado da una fórmula para calcular la norma de una función en  $H_2(\mathbb{D}^N)$  a partir de límites radiales.

**Lema 2.3.14.** *Sea  $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) z^\alpha \in H_2(\mathbb{D}^N)$ . Entonces*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^N} |f(rw)|^2 dm_N(w).$$

*Demostración.* Sea  $r \in (0, 1)$  fijo. Como  $f$  es continua en  $\mathbb{D}^N$ , si definimos  $f_r : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$  como  $f_r(w) = f(rw)$ , resulta que  $f_r \in L_2(\mathbb{T}^N)$ . Por el Lema 1.4.2,  $\{w^a : a \in \mathbb{Z}^N\}$  es una base ortonormal de  $L_2(\mathbb{T}^N)$  y luego, por Parseval,

$$\begin{aligned} \|f_r\|_{L_2(\mathbb{T}^N)}^2 &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} |\langle f_r, w^a \rangle|^2 \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} \left| \int_{\mathbb{T}^N} f(rw) w^{-a} dm_N(w) \right|^2 \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) (rw)^\alpha \right) w^{-a} dm_N(w) \right|^2. \end{aligned}$$

Como la serie  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)(rw)^\alpha$  converge uniformemente en  $\mathbb{T}^N$ ,

$$\begin{aligned} \|f_r\|_{L_2(\mathbb{T}^N)}^2 &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)(rw)^\alpha \right) w^{-a} dm_N(w) \right|^2 \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^N} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f) r^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} \int_{\mathbb{T}^N} w^\alpha w^{-a} dm_N(w) \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 r^{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha(f)|^2 r^{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^N} |f(rw)|^2 dm_N(w). \quad \square$$



# Capítulo 3

## Integrales de Poisson en polidiscos

Uno de los principales objetivos de este capítulo es construir funciones que sean la parte real de funciones holomorfas en  $\mathbb{D}^n$  con valores de frontera dados en casi todo punto del borde distinguido  $\mathbb{T}^n$  (Teoremas 3.2.2 y 3.3.1). Para ello, utilizaremos como herramienta fundamental la integral de Poisson, cuyas propiedades básicas serán estudiadas en la Sección 3.1. En la Sección 3.2 probaremos el Teorema 3.2.2, mientras que en la Sección 3.3 analizaremos el comportamiento del límite de ciertas integrales de Poisson, definidas en  $\mathbb{D}^2$ , al aproximarnos a un punto de  $\mathbb{T}^2$  por una curva específica. Estos resultados serán esenciales para la demostración del teorema de Saksman y Seip en el Capítulo 4.

### 3.1. Definiciones y propiedades básicas

En este capítulo vamos a trabajar en el politoro  $\mathbb{T}^n$ . En el Capítulo 1 vimos que  $\mathbb{T}^n$  es un grupo abeliano compacto y, por lo tanto, tiene su medida de Haar, que notamos  $m_n$ . También vimos que para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ,  $w \mapsto w^\alpha$  es un caracter de  $\mathbb{T}^n$  y, más aún, todos los caracteres de  $\mathbb{T}^n$  son de esa forma.

**Definición 3.1.1.** Sea  $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$ . Los *coeficientes de Fourier* de  $f$  se definen para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  como

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} f(w)w^{-\alpha} dm_n(w).$$

Más generalmente, dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ , sus *coeficientes de Fourier* son

$$\hat{\mu}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} w^{-\alpha} d\mu(w),$$

para cada  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ .

Notemos que la definición de  $\hat{\mu}(\alpha)$  coincide con la de  $\hat{\mu}(w^\alpha)$  dada en (1.3).

**Observación 3.1.2.** Un polinomio trigonométrico en  $\mathbb{T}^n$  es una función de la forma  $q(w) = \sum_{a \in F} c_a w^a$  con  $F \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito y  $\{c_a\}_{a \in F} \subseteq \mathbb{C}$  (ver (1.7)). Calculemos sus coefi-

cientes de Fourier. Sea  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ , por el Lema 1.4.2,

$$\hat{q}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} q(w)w^{-\alpha} dm_n(w) = \sum_{a \in F} c_a \int_{\mathbb{T}^n} w^a w^{-\alpha} dm_n(w) = \begin{cases} c_\alpha & \text{si } \alpha \in F \\ 0 & \text{si } \alpha \notin F \end{cases}$$

es decir, los coeficientes del polinomio son sus coeficientes de Fourier.

Ahora sí, definimos el núcleo de Poisson en varias variables.

**Definición 3.1.3.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . El *núcleo de Poisson* en  $n$  variables se define para cada  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$  y cada  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$  como:

$$\mathbf{p}_n(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^\alpha, \quad (3.1)$$

donde  $r = (r_1, \dots, r_n)$  está dado por  $r_j = |z_j|$ ,  $r^{|\alpha|}$  significa  $r_1^{|\alpha_1|} \dots r_n^{|\alpha_n|}$  y  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{T}^n$  está dado por  $u_j = z_j/r_j$ .

Algunas observaciones:

- La serie (3.1) converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{D}^n$  y todo  $w \in \mathbb{T}^n$ . Además, para cada  $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, 1)^n$  fijo, la serie converge uniformemente en  $r\mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n$ . En particular,  $\mathbf{p}_n$  es continua en  $\mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n$ .
- Usando la fórmula de la serie geométrica, obtenemos

$$\mathbf{p}_1(z, w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w^{-k} r^{|k|} e^{i\theta k} = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2},$$

donde  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  y  $w = e^{i\phi} \in \mathbb{T}$ .

- Para cada  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$  y cada  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$  tenemos

$$\mathbf{p}_n(z, w) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \mathbb{Z}} w_j^{-\alpha_j} r_j^{|\alpha_j|} u_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^n \mathbf{p}_1(z_j, w_j).$$

Entonces

$$\mathbf{p}_n(z, w) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - r_j^2}{|w_j - z_j|^2} = \prod_{j=1}^n \frac{1 - r_j^2}{1 - 2r_j \cos(\theta_j - \phi_j) + r_j^2},$$

donde  $z_j = r_j e^{i\theta_j}$  y  $w_j = e^{i\phi_j}$ .

- Del ítem anterior, vemos que  $\mathbf{p}_n(z, w) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}^n$  y todo  $w \in \mathbb{T}^n$ .

- Integrando (3.1) y usando que, para cada  $z$  fijo, la serie converge uniformemente en  $\mathbb{T}^n$  y que  $\mathbb{T}^n$  tiene medida finita, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(z, w) dm_n(w) &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^\alpha dm_n(w) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} r^{|\alpha|} u^\alpha \int_{\mathbb{T}^n} w^{-\alpha} dm_n(w) \stackrel{\text{Lema 1.4.1}}{=} 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

para todo  $z \in \mathbb{D}^n$ .

- Usando ahora que, para  $w$  y  $r$  fijos, la serie (3.1) converge uniformemente en  $u \in \mathbb{T}^n$ , vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(ru, w) dm_n(u) &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^\alpha dm_n(u) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} u^\alpha dm_n(u) \stackrel{\text{Lema 1.4.1}}{=} 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo  $w \in \mathbb{T}^n$  y todo  $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, 1)^n$ .

- Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  y  $z \in \mathbb{D}^n$  fijo. Como  $\mathbf{p}_n(z, \cdot)$  es continua en  $\mathbb{T}^n$ , es acotada en  $\mathbb{T}^n$  y por lo tanto, es integrable respecto de  $\mu$ .

**Definición 3.1.4.** Dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ , definimos su *integral de Poisson* como la función  $P[\mu] : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(z, w) d\mu(w), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}^n.$$

Por definición,

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^\alpha d\mu(w)$$

con  $z = ru$  la descomposición polar de  $z \in \mathbb{D}^n$ . Usando que para cada  $z \in \mathbb{D}^n$  fijo, la serie converge uniformemente en  $\mathbb{T}^n$  y que este tiene medida finita, obtenemos

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} w^{-\alpha} r^{|\alpha|} u^\alpha d\mu(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} r^{|\alpha|} u^\alpha \int_{\mathbb{T}^n} w^{-\alpha} d\mu(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{\mu}(\alpha) r^{|\alpha|} u^\alpha.$$

En particular, dada  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ , definimos la integral de Poisson de  $f$  como

$$P[f] := P[f dm_n],$$

es decir, como la integral de Poisson de  $f$  pensada como medida, como vimos en la Observación 1.2.2. Luego,

$$P[f](z) = P[f dm_n](z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha) r^{|\alpha|} u^\alpha.$$

**Observación 3.1.5.** Sea  $q(w) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha w^\alpha$  con  $F \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito un polinomio trigonométrico. Vimos en la Observación 3.1.2 que

$$\hat{q}(\alpha) = \begin{cases} c_\alpha & \text{si } \alpha \in F, \\ 0 & \text{si } \alpha \notin F. \end{cases}$$

Entonces,

$$P[q](z) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha r^{|\alpha|} u^\alpha,$$

donde  $z = ru \in \mathbb{D}^n$ .

**Notación.** Sea  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $r = (r_1, \dots, r_n) \in (0, 1)^n$ . Notamos  $f_r$  a la función definida en  $\mathbb{T}^n$  como  $f_r(w) = f(rw)$  para cada  $w \in \mathbb{T}^n$ .

En el siguiente lema mencionamos algunas propiedades de la integral de Poisson.

**Lema 3.1.6.** (1) Para toda  $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$  tenemos

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} |P[f](z)| \leq \|f\|_\infty.$$

(2) Si  $f \in C(\mathbb{T}^n)$  entonces  $P[f]$  se extiende a una función continua en  $\overline{\mathbb{D}^n}$ , que coincide con  $f$  en  $\mathbb{T}^n$ .

(3) Si  $r \in (0, 1)^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$  entonces  $P[f]_r \in L^p(\mathbb{T}^n)$  y

$$\|P[f]_r\|_p \leq \|f\|_p.$$

(4) Si  $r \in (0, 1)^n$  y  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  entonces  $P[\mu]_r \in L^1(\mathbb{T}^n)$  y

$$\|P[\mu]_r\|_1 \leq \|\mu\|.$$

*Demostración.* (1) Sea  $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ . Dado  $z \in \mathbb{D}^n$ , se tiene

$$\begin{aligned} |P[f](z)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(z, w) f(w) dm_n(w) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(z, w) dm_n(w)}_{=1 \text{ (3.2)}} = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

(2) Primero probamos la afirmación para polinomios trigonométricos. Sea  $q(w) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha w^\alpha$  con  $F \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito. Vimos en la Observación 3.1.5 que

$$P[q](z) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha r^{|\alpha|} u^\alpha$$

donde  $z = ru \in \mathbb{D}^n$ . Luego,  $P[q]$  es continua en  $\overline{\mathbb{D}^n}$  y coincide con  $q$  en  $\mathbb{T}^n$ .

Ahora, consideramos  $f \in C(\mathbb{T}^n)$  cualquiera. Por el Teorema 1.3.4, sabemos que existe una sucesión de polinomios trigonométricos  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $q_k \rightarrow f$  en  $C(\mathbb{T}^n)$ . Por el ítem (1), la sucesión  $(P[q_k])_k$  es de Cauchy en  $C(\overline{\mathbb{D}}^n)$  y por lo tanto converge a una función  $F \in C(\overline{\mathbb{D}}^n)$ . Ahora, si  $w \in \mathbb{T}^n$ ,

$$F(w) = \lim_k P[q_k](w) = \lim_k q_k(w) = f(w).$$

Y si  $z \in \mathbb{D}^n$ ,

$$F(z) = \lim_k P[q_k](z) = P[f](z),$$

donde nuevamente usamos el ítem (1) en la última igualdad.

(3) Si  $w \in \mathbb{T}^n$  y  $1 < p < \infty$ , por la desigualdad de Hölder con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$\begin{aligned} |P[f]_r(w)|^p &= |P[f](rw)|^p \leq \left( \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)| \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u) \right)^p \\ &= \left( \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)| \mathbf{P}_n(rw, u)^{\frac{1}{p}} \mathbf{P}_n(rw, u)^{\frac{1}{q}} dm_n(u) \right)^p \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)|^p \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u) \underbrace{\left( \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u) \right)^{\frac{p}{q}}}_{=1 \text{ (3.2)}} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)|^p \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u). \end{aligned}$$

Notemos que la desigualdad

$$|P[f]_r(w)|^p \leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)|^p \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u)$$

también vale para  $p = 1$ .

Entonces, para todo  $1 \leq p < \infty$ , usando lo anterior y luego el teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |P[f]_r(w)|^p dm_n(w) &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \left( \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)|^p \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(u) \right) dm_n(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(u)|^p \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{P}_n(rw, u) dm_n(w)}_{=1 \text{ (3.3)}} dm_n(u) \\ &= \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $P[f]_r \in L^p(\mathbb{T}^n)$  y  $\|P[f]_r\|_p \leq \|f\|_p$ .

(4) En este caso, si  $w \in \mathbb{T}^n$ , tenemos

$$|P[\mu]_r(w)| = |P[\mu](rw)| = \left| \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{P}_n(rw, u) d\mu(u) \right| \leq \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{P}_n(rw, u) d|\mu|(u).$$

Integrando respecto de la variable  $w$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |P[\mu]_r(w)| dm_n(w) &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(rw, u) d|\mu|(u) dm_n(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{p}_n(rw, u) dm_n(w)}_{=1 \text{ (3.3)}} d|\mu|(u) = \|\mu\|, \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Una propiedad fundamental de la integral de Poisson es que las funciones  $P[f]_r$  aproximan a  $f$ , como se ve en el siguiente resultado.

**Lema 3.1.7.** Sean  $E = L^p(\mathbb{T}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$  ó  $E = C(\mathbb{T}^n)$ ,  $f \in E$  y  $r \in (0, 1)^n$ . Entonces  $P[f]_r \xrightarrow{r \rightarrow 1} f$  en  $E$ .

*Demostración.* Probamos primero el resultado para polinomios trigonométricos. Sea

$$q(w) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha w^\alpha \text{ con } F \subseteq \mathbb{Z}^n \text{ finito.}$$

Por la Observación 3.1.5,

$$P[q]_r(w) = \sum_{\alpha \in F} c_\alpha r^{|\alpha|} w^\alpha$$

para todo  $w \in \mathbb{T}^n$ . Luego, es inmediato

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|P[q]_r - q\|_E = 0.$$

Para  $f \in E$  general, notemos que si  $q$  es un polinomio trigonométrico,

$$\begin{aligned} \|P[f]_r - f\|_E &\leq \|P[f - q]_r\|_E + \|P[q]_r - q\|_E + \|q - f\|_E \\ &\leq \|f - q\|_E + \|P[q]_r - q\|_E + \|q - f\|_E, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos el Lema 3.1.6. El resultado se sigue entonces de la densidad de los polinomios trigonométricos en  $E$  (Teorema 1.3.4) y de que ya lo probamos para este tipo de funciones. □

**Observación 3.1.8.** Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ . Si  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin \mathbb{N}_0^n$ , entonces, para todo  $z \in \mathbb{D}^n$

$$P[\mu](z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \hat{\mu}(\alpha) z^\alpha,$$

y por lo tanto  $P[\mu]$  es una función holomorfa en  $\mathbb{D}^n$ . La recíproca también es cierta, es decir, si  $P[\mu]$  es holomorfa en  $\mathbb{D}^n$ , entonces necesariamente  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin \mathbb{N}_0^n$  y la demostración es similar a la del Teorema 3.2.1.

## 3.2. La clase RP

En esta sección trabajaremos con funciones dadas por integrales de Poisson, que además son la parte real de una función holomorfa.

**Notación.** Notamos RP a la clase de funciones en  $\mathbb{D}^n$  que son la parte real de una función holomorfa.

Vimos en la Observación 3.1.8 que si  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin \mathbb{N}_0^n$ , entonces  $P[\mu]$  es holomorfa en  $\mathbb{D}^n$ . Supongamos ahora que  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  satisface  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$  con alguna coordenada  $\alpha_j > 0$  y otra  $\alpha_i < 0$ . Entonces, para todo  $z \in \mathbb{D}^n$ ,

$$\begin{aligned} P[\mu](z) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \neq (0, \dots, 0)}} \hat{\mu}(\alpha) z^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \neq (0, \dots, 0)}} \hat{\mu}(-\alpha) \bar{z}^\alpha + \hat{\mu}(0, \dots, 0) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \neq (0, \dots, 0)}} \hat{\mu}(\alpha) z^\alpha + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \neq (0, \dots, 0)}} \hat{\mu}(-\alpha) \bar{z}^\alpha + \mu(\mathbb{T}^n). \end{aligned}$$

Como

$$\hat{\mu}(-\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} w^\alpha d\mu,$$

si la medida  $\mu$  es real, tenemos  $\hat{\mu}(-\alpha) = \overline{\hat{\mu}(\alpha)}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  y, obviamente,  $\mu(\mathbb{T}^n) \in \mathbb{R}$ . Luego, si consideramos la función holomorfa en  $\mathbb{D}^n$

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \neq (0, \dots, 0)}} \hat{\mu}(\alpha) z^\alpha,$$

obtenemos

$$P[\mu](z) = f + \bar{f} + \mu(\mathbb{T}^n) = \Re(2f + \mu(\mathbb{T}^n)).$$

Ahora, como  $2f + \mu(\mathbb{T}^n)$  es una función holomorfa en  $\mathbb{D}^n$ , concluimos  $P[\mu] \in RP$ .

La recíproca también es cierta, como veremos en el siguiente resultado. Antes, definimos el conjunto  $Y_n \subseteq \mathbb{Z}^n$  como

$$Y_n = \mathbb{N}_0^n \cup (-\mathbb{N}_0)^n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ o } -\alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$$

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  una medida real.  $P[\mu] \in RP$  si y solo si  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin Y_n$ .*

*Demostración.* Resta probar la ida. Suponemos entonces que

$$u := P[\mu] \in RP.$$

Luego,  $u$  es la parte real de una función  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}^n$ . Como  $f$  es holomorfa, podemos escribir

$$f(z) = \sum_{a \in \mathbb{N}_0^n} c_a z^a,$$

y la serie converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{D}^n$ .

Para cada  $r \in (0, 1)^n$ ,  $u_r$  es continua en  $\mathbb{T}^n$  y, por lo tanto, pertenece a  $L_1(\mathbb{T}^n)$ . Luego, podemos calcular sus coeficientes de Fourier. Como  $f + \bar{f} = 2u$ , tenemos

$$\begin{aligned} 2\hat{u}_r(\alpha) &= 2 \int_{\mathbb{T}^n} u_r(w) w^{-\alpha} dm_n(w) = 2 \int_{\mathbb{T}^n} u(rw) w^{-\alpha} dm_n(w) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(rw) w^{-\alpha} dm_n(w) + \int_{\mathbb{T}^n} \bar{f}(rw) w^{-\alpha} dm_n(w) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{N}_0^n} c_a r^a \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} w^a w^{-\alpha} dm_n(w)}_{\delta_{a,\alpha}} + \sum_{a \in \mathbb{N}_0^n} \bar{c}_a r^a \underbrace{\int_{\mathbb{T}^n} w^{-a} w^{-\alpha} dm_n(w)}_{\delta_{a,-\alpha}}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \notin Y_n$ , por como definimos  $Y_n$ , ni  $\alpha$  ni  $-\alpha$  pertenecen a  $\mathbb{N}_0^n$  y entonces la expresión anterior es 0.

Por otro lado,

$$\hat{u}_r(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} P[\mu](rw) w^{-\alpha} dm_n(w) = \int_{\mathbb{T}^n} \left( \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \hat{\mu}(a) r^{|a|} w^a \right) w^{-\alpha} dm_n(w).$$

Como  $\sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \hat{\mu}(a) r^{|a|} w^a$  converge uniformemente en  $\mathbb{T}^n$ ,

$$\hat{u}_r(\alpha) = \hat{\mu}(\alpha) r^{|\alpha|}.$$

Concluimos entonces que  $\hat{\mu}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \notin Y_n$ .  $\square$

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  una función semicontinua inferiormente y positiva en  $\mathbb{T}^n$ . Entonces existe una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ ,  $\mu \geq 0$ , tal que  $\mu$  y  $m_n$  son mutuamente singulares y  $P[f - \mu] \in RP$ .*

*Demostración.* Por el teorema anterior, debemos construir una medida  $\mu$  tal que  $\hat{\mu}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$  para todo  $\alpha \notin Y_n$ . Esto lo haremos en dos pasos.

1) Primero miramos el caso en que  $p$  es un polinomio trigonométrico no negativo en  $\mathbb{T}^n$ . Por la Observación 3.1.2 podemos escribir a  $p$  como

$$p(w) = \sum_{\alpha \in F} \hat{p}(\alpha) w^\alpha$$

con  $F \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito. Como  $F$  es finito, podemos tomar  $k \in \mathbb{N}_0$  tal que, para todo  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,

- $(mk, \dots, mk) \notin F$ ,
- $F - (mk, \dots, mk) \subseteq Y_n$ .

Fijado  $k$ , definimos

$$H = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n \text{ tal que } w_1^k \dots w_n^k = 1\},$$

que resulta un subgrupo cerrado de  $\mathbb{T}^n$ . Como  $H$  es un grupo abeliano compacto, podemos considerar  $\lambda$  su medida de Haar. Definimos entonces la medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  como

$$\mu := p\lambda.$$

Es decir, para cada  $A \subseteq \mathbb{T}^n$  boreliano vale

$$\mu(A) = \int_{A \cap H} p \, d\lambda.$$

Es claro que  $\mu \geq 0$  ya que  $p \geq 0$ . Además,  $\mu$  y  $m_n$  son mutuamente singulares, pues  $m_n(H) = 0$  y  $\mu(H^c) = 0$ .

Para terminar este caso, veamos que  $\hat{\mu}(a) = \hat{p}(a)$  para todo  $a \notin Y_n$ . Sea  $a \in \mathbb{Z}^n$ ,

$$\hat{\mu}(a) = \int_{\mathbb{T}^n} w^{-a} \, d\mu(w) = \int_H w^{-a} p(w) \, d\lambda(w) = \sum_{\alpha \in F} \hat{p}(\alpha) \int_H w^{\alpha-a} \, d\lambda(w). \quad (3.4)$$

Analicemos la última integral. Para cada  $b \in \mathbb{Z}^n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &\rightarrow \mathbb{T} \\ w &\mapsto w^b \end{aligned}$$

es un caracter en  $\mathbb{T}^n$ , por lo que podemos considerar su restricción a  $H$ , que será un elemento de  $\widehat{H}$ . Sabemos, por el Lema 1.3.5, que

$$\int_H w^b \, d\lambda(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w^b = 1 \text{ para todo } w \in H \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Debemos entonces caracterizar los  $b \in \mathbb{Z}^n$  que satisfacen  $w^b = 1$  para todo  $w \in H$ . Por un lado,  $w^b = 1$  para todo  $w \in H$  si y solo si  $b \in {}^\perp H$  (donde pensamos a  $H$  como un subconjunto de  $\widehat{\mathbb{Z}^n}$ ). Por otro lado, como

$$H = \{(mk, \dots, mk) : m \in \mathbb{Z}\}^\perp,$$

por el Teorema 1.3.3,

$${}^\perp H = \{(mk, \dots, mk) : m \in \mathbb{Z}\}.$$

De estas observaciones, concluimos que

$$\int_H w^b \, d\lambda(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = (mk, \dots, mk) \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Entonces, volviendo a (3.4), obtenemos

$$\hat{\mu}(a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{p}(a + (mk, \dots, mk))$$

para todo  $a \in \mathbb{Z}^n$  (donde solo finitos términos de la sumatoria son no nulos).

Si  $m \neq 0$  y  $\hat{p}(a + (mk, \dots, mk)) \neq 0$ , entonces  $a + (mk, \dots, mk) \in F$  y luego  $a \in Y_n$  por como elegimos  $k$ . Entonces, si  $a \notin Y_n$  y  $m \neq 0$ , debe ser

$$\hat{p}(a + (mk, \dots, mk)) = 0.$$

Por lo tanto, para todo  $a \notin Y_n$ ,

$$\hat{\mu}(a) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{p}(a + (mk, \dots, mk)) = \hat{p}(a),$$

como queríamos ver.

Además, como para todo  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , sabemos que  $(mk, \dots, mk) \notin F$ , entonces

$$\|\mu\| = \hat{\mu}(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{p}(mk, \dots, mk) = \hat{p}(0) = \|p\|_1.$$

2) Sea ahora  $f$  como en el enunciado. Como  $f$  es positiva y semicontinua inferiormente, por el teorema de Baire-Hahn para funciones semicontinuas [10], existe una sucesión  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  creciente de funciones positivas y continuas que converge puntualmente a  $f$ . Si llamamos

$$g_1 := f_1,$$

$$g_i := f_i - f_{i-1} \text{ para } i \geq 2,$$

tenemos que  $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i$ , con cada  $g_i$  positiva y continua en  $\mathbb{T}^n$  (donde la igualdad es puntual). Ahora, para cada  $g_i$ , existe una sucesión creciente de polinomios trigonométricos positivos que converge uniformemente a  $g_i$ , por lo que, con la misma idea de antes,

$$g_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij}$$

con  $p_{ij}$  polinomios trigonométricos positivos. En consecuencia, como son todas funciones positivas, podemos reordenar los términos y expresar a  $f$  como

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j,$$

una suma de polinomios trigonométricos positivos.

Lo que hicimos en el paso 1) permite asociarle a cada  $p_j$  una medida no negativa  $\mu_j \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  con  $\hat{\mu}_j(\alpha) = \hat{p}_j(\alpha)$  para todo  $\alpha \notin Y_n$  y con  $\|\mu_j\| = \|p_j\|_1$ . Por el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \|\mu_j\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^n} p_j \, dm_n = \int_{\mathbb{T}^n} f \, dm_n < \infty,$$

pues  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ . En consecuencia, la serie  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j$  converge en la norma de la variación total a una medida no negativa  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ . Para cada  $A \subseteq \mathbb{T}^n$  boreliano,

$$\left| \mu(A) - \sum_{j=1}^N \mu_j(A) \right| = \left| \left( \mu - \sum_{j=1}^N \mu_j \right) (A) \right| \leq \left| \mu - \sum_{j=1}^N \mu_j \right| (A) \leq \left\| \mu - \sum_{j=1}^N \mu_j \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Así,

$$\mu(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j(A)$$

para todo boreliano  $A$ .

Como para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $m_n$  y  $\mu_j$  son mutuamente singulares, existe  $H_j \subseteq \mathbb{T}^n$  tal que

$$m_n(H_j) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_j(H_j^c) = 0.$$

Tomamos  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$ . Entonces,

$$m_n(A) = 0 \quad \text{y} \quad \mu(A^c) = \mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i^c\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i^c\right) = 0.$$

Por lo tanto,  $m_n$  y  $\mu$  son mutuamente singulares.

Para terminar, sea  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ . Como

$$\left| \hat{\mu}(\alpha) - \sum_{j=1}^N \hat{\mu}_j(\alpha) \right| = \left| \widehat{\mu - \sum_{j=1}^N \mu_j}(\alpha) \right| \stackrel{(1.4)}{\leq} \left\| \mu - \sum_{j=1}^N \mu_j \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

entonces

$$\hat{\mu}(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{\mu}_j(\alpha).$$

Además, por el teorema de convergencia dominada,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{p}_j(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^n} w^{-\alpha} p_j(w) dm_n(w) = \hat{f}(\alpha).$$

Luego, si  $\alpha \notin Y_n$ ,

$$\hat{\mu}(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{\mu}_j(\alpha) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{p}_j(\alpha) = \hat{f}(\alpha). \quad \square$$

### 3.3. Límites radiales y cuasi-radiales

En esta sección vamos a probar una variante del siguiente resultado sobre límites radiales de integrales de Poisson [15, Teorema 2.3.1].

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  y sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ . Supongamos que  $\mu$  y  $m_n$  son mutuamente singulares. Entonces,*

$$\lim_{r \in \mathbb{R}, r \rightarrow 1^-} P[f + \mu](rw_1, \dots, rw_n) = f(w_1, \dots, w_n)$$

$m_n$ -a.e.  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$ .

En el teorema anterior consideramos límites radiales

$$\lim_{r \in \mathbb{R}, r \rightarrow 1^-} P[f + \mu](rw_1, \dots, rw_n),$$

sin embargo, prácticamente la misma demostración sirve para probar que el resultado sigue siendo cierto para límites cuasi-radiales, es decir, si permitimos que los radios sean distintos en cada coordenada, siempre y cuando  $\frac{1-r_i}{1-r_j}$  esté acotado para todos  $1 \leq i, j \leq n$ . Más precisamente, vale lo siguiente.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$  y  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ . Supongamos que  $\mu$  y  $m_n$  son mutuamente singulares. Entonces, para todo  $M > 0$ ,*

$$\lim_{\substack{r_i \rightarrow 1^- \\ 1-r_i \leq M(1-r_j)}} P[f + \mu](r_1 w_1, \dots, r_n w_n) = f(w_1, \dots, w_n)$$

$m_n$ -a.e.  $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$ .

En lo que resta de la tesis vamos a trabajar en  $\mathbb{T}^2$  y necesitaremos manipular límites de la forma

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2),$$

es decir, donde los radios están dados por  $2^{-\sigma}$  y  $3^{-\sigma}$ . Notemos que dichos radios están bajo las hipótesis del Teorema 3.3.2, pues para todo  $\sigma > 0$ ,

$$1/2 \leq \frac{(1 - 2^{-\sigma})}{(1 - 3^{-\sigma})} \leq 1. \quad (3.6)$$

Sin embargo, por comodidad, vamos a enunciar y demostrar el siguiente caso particular del Teorema 3.3.2, que será suficiente para nuestro propósito.

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva. Supongamos que  $\mu$  y  $m_2$  son mutuamente singulares. Entonces,*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) = 0$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ .

Para demostrar el Teorema 3.3.3 necesitaremos una serie de lemas técnicos previos. Comenzamos con una estimación simple que nos permitirá acotar al núcleo de Poisson **P1**.

**Lema 3.3.4.** *Para cada  $r \in (0, 1)$  y  $\theta \in (0, \pi/2]$*

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} \leq \pi^2 \theta^{-2} (1 - r).$$

*Demostración.* Sea  $r \in (0, 1)$  y  $\theta \in (0, \pi/2]$ . Como  $\sin(\theta) \geq 2\theta\pi^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} &= \frac{1-r^2}{(\cos(\theta)-r)^2+\sin^2(\theta)} \\ &\leq \frac{(1-r)(1+r)}{\sin^2(\theta)} \\ &\leq \pi^2\theta^{-2}(1-r)\frac{(1+r)}{4} \\ &\leq \pi^2\theta^{-2}(1-r). \end{aligned} \quad \square$$

Vamos a necesitar también las siguientes definiciones. Para  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$ , una  $\alpha$ -caja es un producto cartesiano  $I_1 \times I_2$  de arcos semi-abiertos  $\{e^{it} : a \leq t < b\} \subseteq \mathbb{T}$  con  $0 < b - a \leq 2\pi$ , cuyas longitudes están en la misma proporción entre sí que los números  $2^{\alpha_1}$  y  $2^{\alpha_2}$ . Por ejemplo,

$$\{(e^{it_1}, e^{it_2}) : t_1 \in [0, \pi/2), t_2 \in [0, \pi)\}$$

es una  $(2, 3)$ -caja.

Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva, definimos

$$g_\mu^\alpha(w) := \sup_B \frac{\mu(B)}{m_2(B)}, \quad w \in \mathbb{T}^2 \quad (3.7)$$

donde tomamos supremo sobre todas las  $\alpha$ -cajas  $B$  con centro  $w$  (notar que podría ser infinito).

Definimos también

$$G_\mu(w) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w), \quad w \in \mathbb{T}^2.$$

Vale la siguiente estimación, cuya demostración se puede ver en [15, Lema 1 de la Sección 2.3].

**Lema 3.3.5.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva, entonces*

$$m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : G_\mu(w) > t\}) \leq 1225 \|\mu\| t^{-1}$$

para todo  $t > 0$ .

El próximo objetivo es probar que  $P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2)$  es, salvo una constante que no depende de  $\sigma$ , menor o igual a  $G_\mu(w_1, w_2)$ .

**Lema 3.3.6.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva. Entonces*

$$P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) \leq 32\pi^2 G_\mu(w)$$

para todo  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$  y para todo  $\sigma > 0$ .

*Demostración.* Fijemos primero  $\sigma > 0$ . Como  $(1 - 2^{-\sigma})\pi^{-1} \in (0, 1/2)$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$2^{-(k+1)} \leq (1 - 2^{-\sigma})\pi^{-1} \leq 2^{-k}.$$

Equivalentemente,

$$\pi/2 \leq 2^k(1 - 2^{-\sigma}) \leq \pi. \quad (3.8)$$

Vamos a subdividir a  $\mathbb{T}^2$  en finitos subconjuntos. Para ello, consideramos

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_j &= 2^{j-1-k}\pi, \quad 1 \leq j \leq k, \\ y_j &= 2^{j-k}\pi, \quad 0 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

Dado  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ , para cada  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2$  con  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$ , definimos

$$Q_\alpha := \{(w_1 e^{it_1}, w_2 e^{it_2}) \in \mathbb{T}^2 \text{ tal que } x_{\alpha_1} \leq |t_1| \leq y_{\alpha_1}; x_{\alpha_2} \leq |t_2| \leq y_{\alpha_2}\}$$

y sea  $B_\alpha$  la  $\alpha$ -caja centrada en  $w$  con lados de longitud  $2y_{\alpha_1}$  y  $2y_{\alpha_2}$  (notar que  $y_{\alpha_1}/y_{\alpha_2} = 2^{\alpha_1}/2^{\alpha_2}$ ). Observemos que  $y_j = x_{j+1}$  para cada  $0 \leq j \leq k-1$  y  $y_k = \pi$ . Así,

$$\mathbb{T}^2 = \bigcup_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k} Q_{(\alpha_1, \alpha_2)}.$$

Luego, para cada  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$  vamos a acotar

$$\int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) = \int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_1(2^{-\sigma}w_1, u_1) \mathbf{p}_1(3^{-\sigma}w_2, u_2) d\mu(u).$$

Si  $u = (w_1 e^{it_1}, w_2 e^{it_2}) \in Q_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(2^{-\sigma}w_1, u_1) &= \frac{1 - 2^{-2\sigma}}{1 - 2^{-\sigma+1} \cos(t_1) + 2^{-2\sigma}} \leq \frac{1 - 2^{-2\sigma}}{1 - 2^{-\sigma+1} \cos(x_{\alpha_1}) + 2^{-2\sigma}}, \\ \mathbf{p}_1(3^{-\sigma}w_2, u_2) &= \frac{1 - 3^{-2\sigma}}{1 - 3^{-\sigma} 2 \cos(t_2) + 3^{-2\sigma}} \leq \frac{1 - 3^{-2\sigma}}{1 - 3^{-\sigma} 2 \cos(x_{\alpha_2}) + 3^{-2\sigma}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) &\leq \\ \mu(Q_\alpha) \frac{1 - 2^{-2\sigma}}{1 - 2^{-\sigma+1} \cos(x_{\alpha_1}) + 2^{-2\sigma}} \frac{1 - 3^{-2\sigma}}{1 - 3^{-\sigma} 2 \cos(x_{\alpha_2}) + 3^{-2\sigma}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como  $Q_\alpha \subseteq B_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \mu(Q_\alpha) &\leq \mu(B_\alpha) \leq m_n(B_\alpha) g_\mu^\alpha(w) = \pi^{-2} y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} g_\mu^\alpha(w) \\ &= 2^{\alpha_1 + \alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde en la segunda desigualdad usamos la definición de  $g_\mu^\alpha$  (ver (3.7)). Luego, por (3.9) y (3.10), obtenemos

$$\int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) \leq 2^{\alpha_1+\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{1-2^{-2\sigma}}{1-2^{-\sigma+1}\cos(x_{\alpha_1})+2^{-2\sigma}} \frac{1-3^{-2\sigma}}{1-3^{-\sigma}2\cos(x_{\alpha_2})+3^{-2\sigma}}. \quad (3.11)$$

Si vemos que (3.11) está acotado por

$$32\pi^2 2^{-\alpha_1-\alpha_2} g_\mu^\alpha(w), \quad (3.12)$$

entonces

$$\begin{aligned} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) &\leq \sum_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k} \int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) \\ &\leq \sum_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k} 32\pi^2 2^{-\alpha_1-\alpha_2} g_\mu^\alpha(w) \\ &\leq 32\pi^2 G_\mu(w), \end{aligned}$$

como queríamos ver. Luego, para terminar la demostración debemos probar que (3.11) está acotado por (3.12). Lo hacemos separando en varios casos.

1) Si  $1 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$ , usamos el Lema 3.3.4 para  $x_{\alpha_1}$  y  $x_{\alpha_2} \in (0, \pi/2]$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} &2^{\alpha_1+\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{1-2^{-2\sigma}}{1-2^{-\sigma+1}\cos(x_{\alpha_1})+2^{-2\sigma}} \frac{1-3^{-2\sigma}}{1-3^{-\sigma}2\cos(x_{\alpha_2})+3^{-2\sigma}} \\ &\leq 2^{\alpha_1+\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \pi^4 x_{\alpha_1}^{-2} x_{\alpha_2}^{-2} (1-2^{-\sigma})(1-3^{-\sigma}) \\ &\leq 2^{\alpha_1+\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) 2^{-2\alpha_1+2+2k} 2^{-2\alpha_2+2+2k} (1-2^{-\sigma})(1-3^{-\sigma}) \\ &\leq 16 \cdot 2^{-\alpha_1-\alpha_2} 2^{2k} g_\mu^\alpha(w) (1-2^{-\sigma}) \underbrace{(1-3^{-\sigma})}_{\leq 2(1-2^{-\sigma})} \\ &\leq 32 \cdot 2^{-\alpha_1-\alpha_2} \underbrace{2^{2k} (1-2^{-\sigma})^2}_{\leq \pi^2 \text{ (3.8)}} g_\mu^\alpha(w) \leq 32\pi^2 2^{-\alpha_1-\alpha_2} g_\mu^\alpha(w). \end{aligned}$$

2) Si  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} &4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{1-2^{-2\sigma}}{1-2^{-\sigma+1}+2^{-2\sigma}} \frac{1-3^{-2\sigma}}{1-3^{-\sigma}2+3^{-2\sigma}} \\ &= 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{(1-2^{-\sigma})(1+2^{-\sigma})}{(1-2^{-\sigma})^2} \frac{(1-3^{-\sigma})(1+3^{-\sigma})}{(1-3^{-\sigma})^2} \\ &= 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) (1+2^{-\sigma})(1+3^{-\sigma})(1-2^{-\sigma})^{-1} (1-3^{-\sigma})^{-1} \\ &= 4^{-k} (1-2^{-\sigma})^{-2} g_\mu^\alpha(w) \underbrace{(1+2^{-\sigma})(1+3^{-\sigma})}_{\leq 4} \underbrace{(1-2^{-\sigma})(1-3^{-\sigma})^{-1}}_{\leq 1} \\ &\leq 4(2^k(1-2^{-\sigma}))^{-2} g_\mu^\alpha(w) \stackrel{(3.8)}{\leq} 16\pi^{-2} g_\mu^\alpha(w) \leq 32\pi^2 2^{-\alpha_1-\alpha_2} g_\mu^\alpha(w). \end{aligned}$$

3) Si  $\alpha_1 = 0$  y  $1 \leq \alpha_2 \leq k$ , usamos el Lema 3.3.4 para  $x_{\alpha_2} \in (0, \pi/2]$ , y obtenemos

$$\begin{aligned}
& 2^{\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{1 - 2^{-2\sigma}}{1 - 2^{-\sigma+1} + 2^{-2\sigma}} \frac{1 - 3^{-2\sigma}}{1 - 3^{-\sigma} 2 \cos(x_{\alpha_2}) + 3^{-2\sigma}} \\
& \leq 2^{\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{(1 + 2^{-\sigma})(1 - 2^{-\sigma})}{(1 - 2^{-\sigma})^2} \pi^2 x_{\alpha_2}^{-2} (1 - 3^{-\sigma}) \\
& \leq 2^{\alpha_2} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) (1 + 2^{-\sigma})(1 - 2^{-\sigma})^{-1} 2^{-2\alpha_2+2+2k} (1 - 3^{-\sigma}) \\
& \leq 2^{-\alpha_2} g_\mu^\alpha(w) \underbrace{4(1 + 2^{-\sigma})(1 - 2^{-\sigma})^{-1}(1 - 3^{-\sigma})}_{\leq 16} \\
& \leq 32\pi^2 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w).
\end{aligned}$$

4) Por último, si  $1 \leq \alpha_1 \leq k$  y  $\alpha_2 = 0$ , procedemos similarmente al caso anterior: usamos el Lema 3.3.4 para  $x_{\alpha_1} \in (0, \pi/2]$ , y obtenemos

$$\begin{aligned}
& 2^{\alpha_1} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \frac{1 - 2^{-2\sigma}}{1 - 2^{-\sigma+1} \cos(x_{\alpha_1}) + 2^{-2\sigma}} \frac{1 - 3^{-2\sigma}}{1 - 3^{-\sigma} 2 + 3^{-2\sigma}} \\
& \leq 2^{\alpha_1} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) \pi^2 x_{\alpha_1}^{-2} (1 - 2^{-\sigma}) \frac{(1 + 3^{-\sigma})(1 - 3^{-\sigma})}{(1 - 3^{-\sigma})^2} \\
& \leq 2^{\alpha_1} 4^{-k} g_\mu^\alpha(w) 2^{-2\alpha_1+2+2k} (1 - 2^{-\sigma})(1 + 3^{-\sigma})(1 - 3^{-\sigma})^{-1} \\
& \leq 2^{-\alpha_1} g_\mu^\alpha(w) \underbrace{4(1 + 3^{-\sigma})(1 - 2^{-\sigma})(1 - 3^{-\sigma})^{-1}}_{\leq 8} \\
& \leq 32\pi^2 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w). \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente lema es consecuencia directa de los Lemas 3.3.5 y 3.3.6. Además, tiene el número más grande que aparece en esta tesis.

**Lema 3.3.7.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva. Entonces, para todo  $t > 0$ ,*

$$m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : \sup_{\sigma > 0} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) > t\}) \leq 39200\pi^2 \|\mu\| t^{-1}.$$

*Demostración.* Sea  $t > 0$ . Por el Lema 3.3.6, para todo  $w \in \mathbb{T}^2$ ,

$$\sup_{\sigma > 0} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) \leq 32\pi^2 G_\mu(w).$$

Luego, por el Lema 3.3.5,

$$\begin{aligned}
m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : \sup_{\sigma > 0} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) > t\}) & \leq m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : G_\mu(w) > t/32\pi^2\}) \\
& \leq 39200\pi^2 \|\mu\| t^{-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.3.8.** *Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva y  $V \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto tal que  $\mu(V) = 0$ . Entonces*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) = 0$$

*$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in V$ .*

*Demostración.* Comencemos notando que, por el Lema 3.3.5,  $G_\mu(w) < +\infty$   $m_2$ -a.e.  $w \in \mathbb{T}^2$ . Veamos, entonces, que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) = 0$$

para todo  $w = (w_1, w_2) \in V$  tal que  $G_\mu(w) < +\infty$ . Como  $V$  es abierto, existe  $\delta > 0$  tal que el cubo con centro  $w$  y lados  $2\delta$  está contenido en  $V$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos encontrar  $\sigma_0 > 0$  tal que

$$P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) < \varepsilon \quad (3.13)$$

si  $0 < \sigma < \sigma_0$ . Como

$$G_\mu(w) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2} 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w) < +\infty,$$

existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \geq M} 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w) < \frac{\varepsilon}{32\pi^2}.$$

Tomemos  $\sigma_0 > 0$  tal que

$$2^M(1 - 2^{-\sigma_0}) \leq \delta$$

y veamos que se cumple (3.13) si  $0 < \sigma < \sigma_0$ . En la demostración del Lema 3.3.6 tomamos  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\pi/2 \leq 2^k(1 - 2^{-\sigma}) \leq \pi$$

y vimos que

$$P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) \leq \sum_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k} \int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u), \quad (3.14)$$

donde  $Q_\alpha$  es un conjunto contenido en la  $\alpha$ -caja centrada en  $w$  con lados de longitud

$$2^{\alpha_1 + 1 - k} \pi \quad \text{y} \quad 2^{\alpha_2 + 1 - k} \pi.$$

También probamos que para cada  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$ ,

$$\int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) \leq 32\pi^2 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w). \quad (3.15)$$

Supongamos que  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$  con  $\alpha_1 + \alpha_2 < M$ . Entonces, por como definimos  $k$  y  $\sigma_0$ , tenemos:

$$\begin{aligned} 2^{\alpha_1 + 1 - k} \pi &\leq 2^{\alpha_1 + 2}(1 - 2^{-\sigma}) \leq 2^{M+1}(1 - 2^{-\sigma_0}) \leq 2\delta \quad \text{y} \\ 2^{\alpha_2 + 1 - k} \pi &\leq 2^{\alpha_2 + 2}(1 - 2^{-\sigma}) \leq 2^{M+1}(1 - 2^{-\sigma_0}) \leq 2\delta. \end{aligned}$$

En consecuencia, si  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq k$  con  $\alpha_1 + \alpha_2 < M$ , resulta que  $Q_\alpha \subseteq V$  y

$$\int_{Q_\alpha} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) = 0. \quad (3.16)$$

Luego, por (3.14), (3.15) y (3.16)

$$P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) \leq 32\pi^2 \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \geq M} 2^{-\alpha_1 - \alpha_2} g_\mu^\alpha(w) < \varepsilon,$$

como queríamos ver. □

Ahora sí tenemos todas las herramientas para demostrar el Teorema 3.3.3.

*Demostración del Teorema 3.3.3.* Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  una medida positiva tal que  $\mu$  y  $m_2$  son mutuamente singulares. Luego, existe  $A \subseteq \mathbb{T}^2$  boreliano tal que

$$m_2(A) = 0 \quad \text{y} \quad \mu(A^c) = 0.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Vamos a descomponer a  $\mu$  en dos medidas, una que se anula en un abierto cuyo complemento tiene medida  $m_2$  nula y la otra de norma menor a  $\varepsilon$ , como se detalla a continuación. Por la regularidad de la medida  $\mu$ , existe  $V \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto tal que  $A^c \subseteq V$  y  $\mu(V) < \varepsilon$ . Sean  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  las medidas positivas dadas por

$$\mu_1(E) := \mu(V^c \cap E), \quad \mu_2(E) := \mu(V \cap E),$$

para todo boreliano  $E \subseteq \mathbb{T}^2$ . Notemos que  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  y

$$P[\mu] = P[\mu_1] + P[\mu_2].$$

Como  $\mu_1(V) = 0$ , por el Lema 3.3.8,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu_1](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) = 0 \tag{3.17}$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in V$ . Más aún, como  $V^c \subseteq A$  y  $m_2(A) = 0$ , (3.17) vale  $m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ . Entonces,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) = \limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu_2](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2),$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ .

Por otro lado, como  $\mu_2$  es una medida positiva,

$$\|\mu_2\| = \mu_2(\mathbb{T}^2) = \mu(V) < \varepsilon.$$

Por el Lema 3.3.7, para todo  $t > 0$ ,

$$m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : \sup_{\sigma > 0} P[\mu_2](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) > t\}) \leq 39200\pi^2\varepsilon t^{-1}.$$

Luego, para cada  $t > 0$  (fijo),

$$m_2(\{w \in \mathbb{T}^2 : \limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) > t\}) \leq 39200\pi^2\varepsilon t^{-1}.$$

Como esto vale para todo  $\varepsilon > 0$ , la medida tiene que ser 0. Así, para cada  $t > 0$ ,

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) \leq t$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$  y, en consecuencia,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2) = 0$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ , como queríamos ver. □

Para terminar esta sección, veremos una cota para el núcleo de Poisson  $\mathbf{p}_2$  y algunas consecuencias de dicha acotación que utilizaremos en el próximo capítulo.

En  $\mathbb{T}^2$ , consideramos la distancia

$$d(u, w) = \max(|u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|),$$

donde  $u = (u_1, u_2)$ ,  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ .

**Lema 3.3.9.** Sean  $u = (u_1, u_2)$ ,  $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$  distintos. Entonces, para todo  $\sigma > 0$ ,

$$\mathbf{p}_2((2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2), w) \leq 32 d(u, w)^{-2}.$$

*Demostración.* Sean  $i \neq j \in \{1, 2\}$  tales que

$$d(u, w) = |u_j - w_j|.$$

Para simplificar la notación, tomamos  $r_1 := 2^{-\sigma}$  y  $r_2 := 3^{-\sigma}$ . Luego, a partir de las definiciones y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} d(u, w) \sqrt{\mathbf{p}_2((r_1u_1, r_2u_2), w)} &= |u_j - w_j| \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|r_1u_1 - w_1||r_2u_2 - w_2|} \\ &\leq |u_j - r_ju_j| \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|r_1u_1 - w_1||r_2u_2 - w_2|} + |r_ju_j - w_j| \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|r_1u_1 - w_1||r_2u_2 - w_2|} \\ &\leq (1-r_j) \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|r_1u_1 - w_1||r_2u_2 - w_2|} + \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|r_iu_i - w_i|} \\ &\leq (1-r_j) \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{(|w_1| - |r_1u_1|)(|w_2| - |r_2u_2|)} + \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{|w_i| - |r_iu_i|} \\ &\leq (1-r_j) \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{(1-r_i)(1-r_j)} + \frac{\sqrt{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}}{1-r_i} \\ &\leq 2 \frac{\sqrt{(1-r_i)(1-r_j)(1+r_i)(1+r_j)}}{1-r_i} \end{aligned}$$

Ahora, como

$$1 - 2^{-\sigma} \leq 1 - 3^{-\sigma} \quad \text{y} \quad 1 - 3^{-\sigma} \leq 2(1 - 2^{-\sigma}),$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{(1-r_i)(1-r_j)(1+r_i)(1+r_j)}}{1-r_i} &\leq 2 \frac{\sqrt{(1-r_i)2(1-r_i)(1+r_i)(1+r_j)}}{1-r_i} \\ &\leq 2\sqrt{2(1+r_i)(1+r_j)} \leq 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 3.3.10.** Sean  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  y  $w \in \mathbb{T}^2$  con  $d := \text{dist}(w, \text{sop}(\mu)) > 0$ , entonces

$$\sup_{\sigma > 0} |P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2)| \leq 32 d^{-2} \|\mu\|.$$

*Demostración.* Sea  $\sigma > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
|P[\mu](2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) \right| \\
&= \left| \int_{\text{sop}(\mu)} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d\mu(u) \right| \\
&\leq \int_{\text{sop}(\mu)} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}w_1, 3^{-\sigma}w_2), u) d|\mu|(u) \\
&\stackrel{\text{Lema 3.3.9}}{\leq} \int_{\text{sop}(\mu)} 32d(w, u)^{-2} d|\mu|(u) \\
&\leq 32 d^{-2} \|\mu\|. \quad \square
\end{aligned}$$

**Corolario 3.3.11.** Sea  $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$  tal que  $f$  se anula en algún abierto  $U \subseteq \mathbb{T}^2$ . Entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[f](2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2) = 0$$

para todo  $(u_1, u_2) \in U$ .

Notemos que el resultado vale a.e. por el Teorema 3.3.2, pero nos será útil después saber que, en estas hipótesis, el resultado vale en todo punto.

*Demostración.* Sean  $u = (u_1, u_2) \in U$  fijo y  $\sigma > 0$ . Como  $f$  se anula en  $U$ ,

$$\begin{aligned}
P[f](2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2) &= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2), w) f(w) dm_2(w) \\
&= \int_{U^c} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2), w) f(w) dm_2(w) \\
&= \int_{U^c} \frac{(1 - 2^{-2\sigma})(1 - 3^{-2\sigma}) f(w)}{|2^{-\sigma}u_1 - w_1|^2 |3^{-\sigma}u_2 - w_2|^2} dm_2(w).
\end{aligned}$$

Notemos que para todo  $(w_1, w_2) \in U^c$  con  $w_1 \neq u_1$  y  $w_2 \neq u_2$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{(1 - 2^{-2\sigma})(1 - 3^{-2\sigma})}{|2^{-\sigma}u_1 - w_1|^2 |3^{-\sigma}u_2 - w_2|^2} f(w) = 0.$$

Luego,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{(1 - 2^{-2\sigma})(1 - 3^{-2\sigma})}{|2^{-\sigma}u_1 - w_1|^2 |3^{-\sigma}u_2 - w_2|^2} f(w) = 0 \text{ a.e. } w \in U^c.$$

Además, por el Lema 3.3.9, para todo  $w \in U^c$ ,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_2((2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2), w) f(w)| &\leq 32d(u, w)^{-2} |f(w)| \\
&\leq 32 d(u, U^c)^{-2} |f(w)|.
\end{aligned}$$

El resultado se sigue entonces del teorema de convergencia mayorada. □

# Capítulo 4

## Medias integrales y valores de frontera

En este capítulo, probaremos un teorema clásico de Carlson sobre medias integrales, que permite, en particular, dar una fórmula para la norma de  $\mathcal{H}_2$  de una serie de Dirichlet en  $\mathcal{H}_\infty$ . Luego, veremos que tiene sentido preguntarse si el resultado de Carlson se puede extender al eje imaginario para series en  $\mathcal{H}_\infty$ . Finalmente, usaremos las herramientas desarrolladas en el Capítulo 3 para ver que, como probaron Saksman y Seip en [18], dicha extensión no es posible.

### 4.1. El Teorema de Carlson

F. Carlson probó en [4] el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Si  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  converge en el semiplano  $\{\Re(s) > 0\}$  y es acotada en  $\{\Re(s) \geq \delta\}$  para todo  $\delta > 0$ , entonces*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma}$$

para todo  $\sigma > 0$ .

*Demostración.* Observemos que, por la Proposición 2.2.4, el resultado es cierto para polinomios de Dirichlet, es decir, para funciones de la forma  $\sum_{n=1}^N b_n n^{-s}$ . Usaremos esto para probar el caso general.

Fijamos  $\sigma > 0$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Veamos primero que la suma de la derecha es convergente. Para eso, consideramos

$$f_\sigma(s) = f(s + \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} n^{-s},$$

convergente en  $\{\Re(s) > -\sigma\}$ . Como  $f$  es acotada en el semiplano  $\{\Re(s) \geq \sigma\}$ , entonces  $f_\sigma$  es acotada en  $\{\Re(s) \geq 0\}$  y luego,  $f_\sigma \in \mathcal{H}^\infty$ . Entonces, por la Proposición 2.2.5,  $f_\sigma \in \mathcal{H}^2$  y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} < \infty.$$

Luego, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $N \geq N_1$ ,

$$\left| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \right)^{1/2} - \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^2 n^{-2\sigma} \right)^{1/2} \right| < \varepsilon/3. \quad (4.1)$$

Similarmente, consideramos

$$f_{\sigma/2}(s) = f(s + \sigma/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma/2}} n^{-s},$$

que resulta convergente, y por lo tanto holomorfa, en  $\{\Re(s) > -\sigma/2\}$  y acotada en  $\{\Re(s) \geq 0\}$ . Entonces, por el Teorema 2.1.4,  $f_{\sigma/2}$  converge uniformemente en  $\{\Re(s) = \sigma/2\}$ . Luego, existe  $N_0 \geq N_1$  tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n n^{-\sigma-it} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it} \right| < \varepsilon/3.$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, para cada  $R > 0$ , la desigualdad triangular en  $L^2[0, R]$  nos da la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} & \left| \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \right| \\ & \leq \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n n^{-\sigma-it} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon/3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por último, por la Proposición 2.2.4,

$$\sum_{n=1}^{N_0} |a_n|^2 n^{-2\sigma} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt$$

y, en consecuencia, existe  $R_0$  tal que para todo  $R \geq R_0$ ,

$$\left| \left( \sum_{n=1}^{N_0} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{N_0} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \right| < \varepsilon/3. \quad (4.3)$$

Se sigue de (4.1), (4.2), (4.3) y la desigualdad triangular que, para todo  $R \geq R_0$ ,

$$\left| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \right| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Luego,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma},$$

como queríamos ver.  $\square$

El Teorema de Carlson nos da una fórmula para calcular la norma de  $\mathcal{H}_2$  de las series de Dirichlet en  $\mathcal{H}_\infty$ :

**Corolario 4.1.2.** *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ , entonces*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}_2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{R} \int_0^R \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma - it} \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

*Demostración.* Es inmediato de tomar límite con  $\sigma \rightarrow 0^+$  en la fórmula del Teorema 4.1.1.  $\square$

## 4.2. La pregunta de Hedenmalm

H. Hedenmalm propuso en [11] una pregunta natural: ¿seguirá valiendo el Teorema de Carlson 4.1.1 para el caso límite  $\sigma = 0$ ? Más precisamente, si  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  es acotada en  $\{\Re(s) > 0\}$ , ¿valdrá la igualdad

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 ? \quad (4.5)$$

Antes de seguir, tenemos que precisar el significado de  $f(it)$  pues, a priori,  $f$  está definida en  $\{\Re(s) > 0\}$ . Entendemos  $f(it)$  como el límite

$$f(it) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(\sigma + it)$$

que, como veremos en el Teorema 4.2.1, existe para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto se deduce del Teorema de Fatou [8], que afirma que si  $f \in H_\infty(\mathbb{D})$ , entonces el límite radial

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(rw)$$

existe para casi todo  $w \in \mathbb{T}$ . Más aún, no solo  $f$  tiene límite radial en casi todo punto, sino que también existe el límite dentro de cada región de Stolz. Más precisamente, para cada  $w \in \mathbb{T}$  y  $\alpha > 1$ , definimos la región de Stolz (Figura 4.1):

$$S(\alpha, w) = \{z \in \mathbb{D} : |w - z| < \alpha(1 - |z|)\}.$$

Entonces, para cada  $f \in H_\infty(\mathbb{D})$  y cada  $\alpha > 1$ , el límite

$$\lim_{z \rightarrow w, z \in S(\alpha, w)} f(z)$$

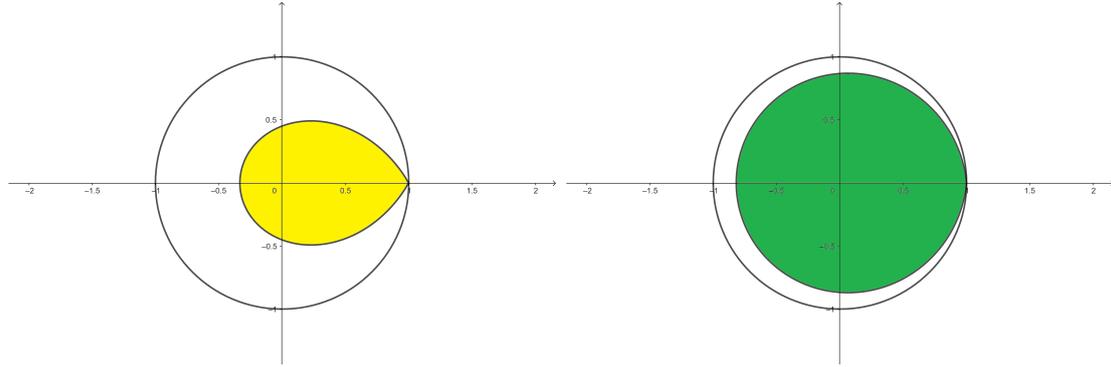


Figura 4.1: En amarillo,  $S(2,1)$  y en verde,  $S(10,1)$ .

existe para casi todo  $w \in \mathbb{T}$ . Estos resultados se pueden ver también en [16, Teorema 17.11] y en [7, Teorema 23.6]. Notar que, para cada  $w \in \mathbb{T}$  fijo,

$$\{rw : 0 \leq r < 1\} \subseteq S(\alpha, w)$$

para todo  $\alpha > 1$ . Esto dice que la existencia del límite dentro de una región de Stolz implica la existencia de límites radiales.

El siguiente teorema es la versión del teorema de Fatou para el semiplano.

**Teorema 4.2.1.** Sea  $F : \{\Re(s) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa y acotada. Luego,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} F(\sigma + it)$$

existe para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* La función  $F$  está definida en  $\{\Re(s) > 0\}$ , por lo que para aplicar el Teorema de Fatou, necesitamos “trasladarnos” al disco  $\mathbb{D}$ . Para ello, consideramos la transformada de Cayley,  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re(s) > 0\}$ , definida como

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

La función  $\varphi$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y biyectiva, con inversa

$$\varphi^{-1}(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Queremos tomar límite a lo largo de rectas horizontales que convergen a puntos del eje imaginario. Veamos entonces que sucede con las rectas horizontales al aplicarles  $\varphi^{-1}$ . Fijado  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\varphi^{-1}(\sigma + it) = \frac{\sigma + it - 1}{\sigma + it + 1} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} w = \frac{it - 1}{it + 1} \in \mathbb{T}.$$

Notemos que

$$\frac{|\varphi^{-1}(\sigma + it) - w|}{1 - |\varphi^{-1}(\sigma + it)|} = \frac{\sqrt{(1+\sigma)^2 + t^2} + \sqrt{(1-\sigma)^2 + t^2}}{2\sqrt{1+t^2}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0^+} 1.$$

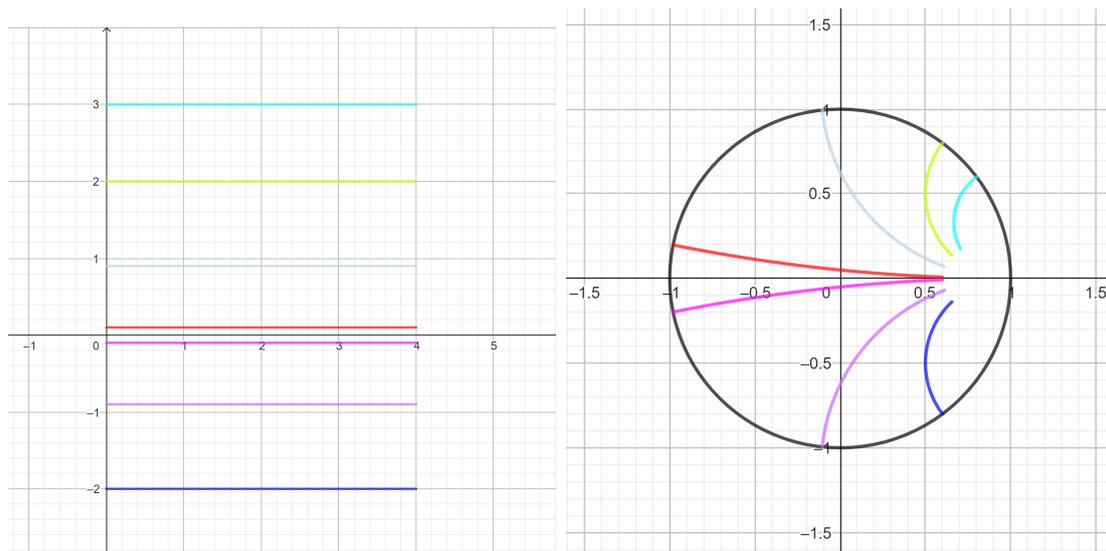


Figura 4.2: En la figura de la derecha se muestra la imagen por  $\varphi^{-1}$  de cada segmento de la figura de la izquierda.

Entonces, para cada  $\alpha > 1$  fijo, la curva  $\{\varphi^{-1}(\sigma + it) : 0 < \sigma < \sigma_0\}$  (para algún  $\sigma_0 > 0$ ) está contenida en  $S(\alpha, w)$ . (Ver figura 4.2).

Consideramos  $f = F \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , que es holomorfa y acotada. Dado  $\alpha > 1$ , sabemos que existe  $A \subseteq \mathbb{T}$  de medida cero tal que el límite

$$\lim_{z \rightarrow w, z \in S(\alpha, w)} f(z)$$

existe para todo  $w \in \mathbb{T} \setminus A$ .

Por otro lado, vimos que  $\varphi^{-1}(\sigma + it)$  converge a  $\frac{it-1}{it+1}$  en  $S(\alpha, \frac{it-1}{it+1})$  cuando  $\sigma \rightarrow 0^+$ . Luego,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f(\varphi^{-1}(\sigma + it)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} F(\sigma + it)$$

existe para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{it-1}{it+1} \notin A$ .

Ahora, si llamamos

$$B = \{\theta \in (0, 2\pi) : e^{i\theta} \in A\},$$

tenemos

$$|B| = m_1(A) = 0,$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{it-1}{it+1} \in A &\Leftrightarrow \frac{it-1}{it+1} = e^{i\theta} \text{ para algún } \theta \in B \\ &\Leftrightarrow it = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i \cot(\theta/2) \text{ para algún } \theta \in B \\ &\Leftrightarrow t = \cot(\theta/2) \text{ para algún } \theta \in B. \end{aligned}$$

Como  $\cot : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo, manda conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero y luego, lo anterior ocurre solo si  $t$  está en un cierto conjunto de

medida cero. Por lo tanto,  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} F(\sigma + it)$  existe para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ , como queríamos probar.  $\square$

Volviendo a la pregunta de Hedenmalm (4.5), Saksman y Seip dieron en [18] una respuesta negativa: no hay una “versión límite” del Teorema de Carlson. Más precisamente, probaron el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.2.** (1) Existe una función  $f \in \mathcal{H}^\infty$  tal que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt$$

no existe.

(2) Para cada  $0 < \varepsilon < 1$ , existe  $f \in \mathcal{H}_\infty$  tal que  $\|f\|_{\mathcal{H}_2} = \varepsilon$  y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt = 1.$$

En resumen, mostraron que el límite de la izquierda de (4.5) puede no existir o, incluso si existe, la igualdad (4.5) no es necesariamente cierta.

**Observación 4.2.3.** Por el Corolario 4.1.2, la pregunta de Hedenmalm puede reformularse de la siguiente manera: ¿Es cierto que, para toda  $f \in \mathcal{H}_\infty$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(\sigma + it)|^2 dt? \quad (4.6)$$

Notemos que si  $f \in \mathcal{H}_\infty$ ,  $f$  es acotada en  $\{\Re(s) > 0\}$  y luego, por el teorema de convergencia mayorada,

$$\int_0^R |f(it)|^2 dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_0^R |f(\sigma + it)|^2 dt,$$

para cualquier  $R > 0$ . En otras palabras, podemos intercambiar la integral con el límite en  $\sigma$ . Por lo tanto, Saksman y Seip probaron que, en general, en (4.6) los límites en  $R$  y  $\sigma$  no se pueden intercambiar.

### 4.3. La respuesta de Saksman y Seip

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 4.2.2. Como el Teorema 3.2.2 es una herramienta fundamental para ello, repasamos brevemente su demostración. Dada una función  $f$  en  $\mathbb{T}^n$  positiva, semicontinua inferiormente e integrable, consideramos polinomios trigonométricos positivos  $p_j$  tal que

$$f(w) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(w)$$

para cada  $w \in \mathbb{T}^n$ . Para cada polinomio trigonométrico  $p_j$ , tomamos cierto  $k_j \in \mathbb{N}_0$  y definimos

$$H_j = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n : w_1^{k_j} \dots w_n^{k_j} = 1\},$$

que es un subgrupo compacto de  $\mathbb{T}^n$ . Notamos  $\lambda_j$  a la medida de Haar de  $H_j$ . Después, definimos en  $\mathbb{T}^n$  las medidas

$$\mu_j = p_j \lambda_j \geq 0,$$

que satisfacen estas tres propiedades:

- $\|\mu_j\| = \|p_j\|_1$ ,
- $P[p_j - \mu_j] \in RP$ ,
- $\mu_j$  y  $m_n$  son mutuamente singulares.

Tomando

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j,$$

obtenemos una medida no negativa  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  que cumple que  $P[f - \mu] \in RP$  y que  $\mu$  y  $m_n$  son mutuamente singulares.

A partir de ahora, nos concentramos en  $\mathbb{T}^2$ . Si identificamos a  $\mathbb{T}^2$  con  $[0, 2\pi)^2$ ,  $H_j$  consiste en el  $(0, 0)$  y en  $2k_j - 1$  segmentos con dirección  $(1, -1)$ . Por ejemplo, si  $k_j = 2$ ,

$$\begin{aligned} H_j &= \{(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2 : w_1^2 = w_2^{-2}\} \\ &= \{(e^{ix}, e^{iy}) \in \mathbb{T}^2 : x, y \in [0, 2\pi), x = -y + a\pi \text{ para algún } a = 0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Luego, identificamos  $H_j$  con los tres segmentos en  $[0, 2\pi)^2$  dados por

$$x = -y + a\pi$$

para  $a = 1, 2, 3$  y el  $(0, 0)$ , como muestra la Figura 4.3.

**Notación.** Definimos

$$L = \{(2^{-it}, 3^{-it}) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{T}^2.$$

Por la Observación 1.4.6 (que se deduce del teorema de Kronecker 1.4.5),  $L$  es un subconjunto denso en  $\mathbb{T}^2$ . Identificando nuevamente  $\mathbb{T}^2$  con  $[0, 2\pi)^2$ , podemos pensar a  $L$  como un conjunto denso de segmentos, todos con dirección  $(\ln(2), \ln(3))$ , como se ve en la Figura 4.4.

En lo que sigue vamos a pensar a las medidas  $\lambda_j$  indistintamente como medidas en  $H_j$  o medidas en  $\mathbb{T}^2$  (que valen 0 en  $H_j^c$ ).

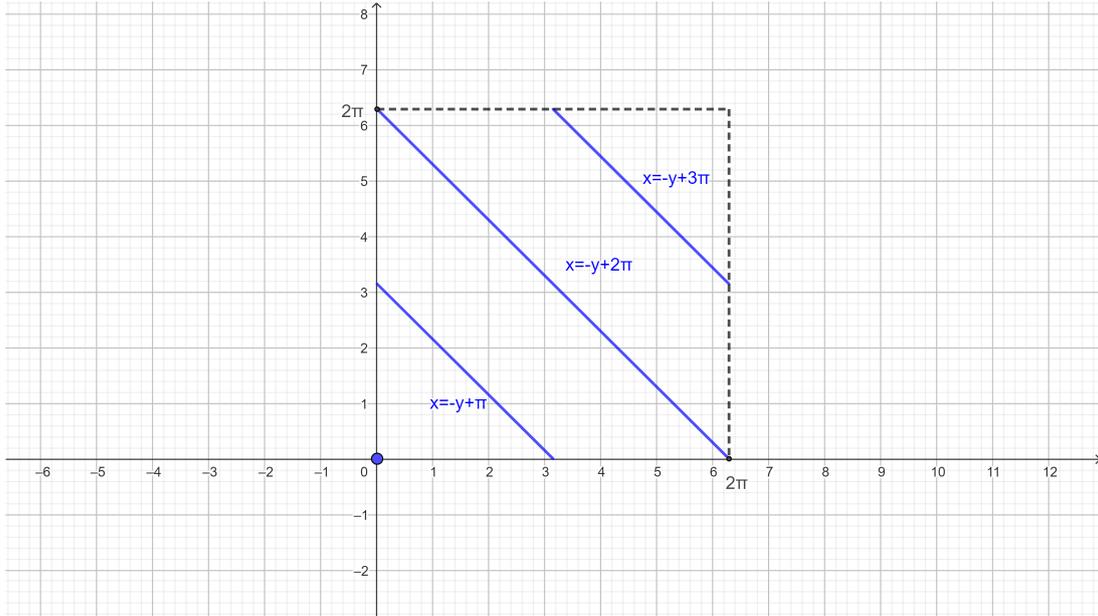


Figura 4.3: En azul,  $H_j$  para  $k_j = 2$  pensado como subconjunto de  $[0, 2\pi)^2$ .

**Lema 4.3.1.** Sea  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números no negativos con  $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j < \infty$  y sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  que verifica

$$0 \leq \mu \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \lambda_j.$$

Entonces,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0$$

para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Como

$$0 \leq \mu \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \lambda_j,$$

entonces

$$0 \leq P[\mu] \leq P\left[\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \lambda_j\right]$$

y, por lo tanto, basta probar el resultado para la medida

$$\nu = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \lambda_j.$$

Como

$$m_2\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j\right) = 0 \quad \text{y} \quad \nu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} H_j^c\right) = 0,$$

$m_2$  y  $\nu$  son mutuamente singulares y, por el Teorema 3.3.3,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\nu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) = 0$$

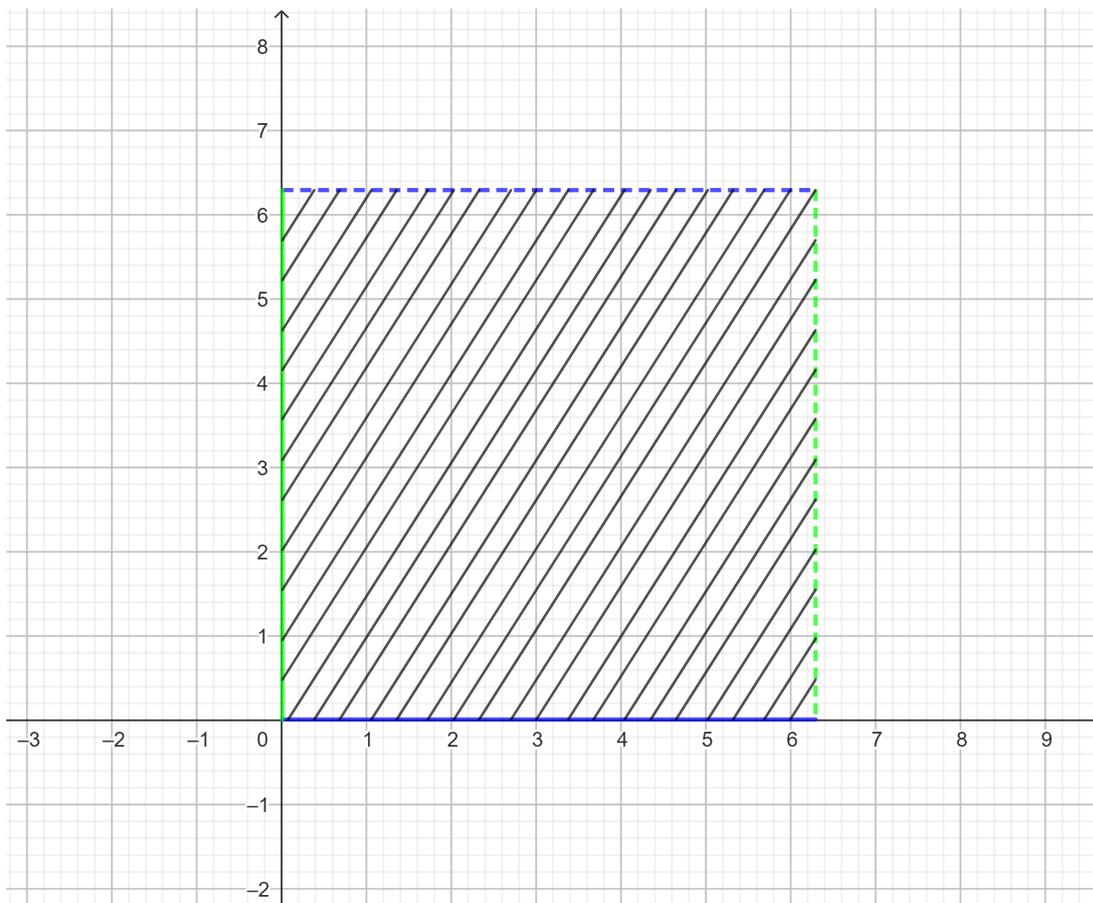


Figura 4.4: Identificando  $\mathbb{T}^2 \sim [0, 2\pi)^2$ , el conjunto  $\{(2^{-it}, 3^{-it}) : 0 \leq t \leq \frac{38\pi}{\ln(3)}\}$ .

para casi todo  $(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$ . Vamos a partir a  $\mathbb{R}$  en numerables intervalos suficientemente chicos (de longitud  $3(\ln(2)^2 + \ln(3)^2)^{-1/2}$  servirá) y probar que el resultado vale en cada uno de ellos. Entonces, sea  $I$  uno de esos intervalos y veamos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\nu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0$$

para casi todo  $t \in I$ . Consideramos el paralelogramo  $A'$  en  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$A' = \{(-\ln(2)t + s, -\ln(3)t - s) : t \in I, s \in [0, 3]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

(ver Figura 4.5). Definimos también

$$A = \{(e^{i(-\ln(2)t+s)}, e^{i(-\ln(3)t-s)}) : t \in I, s \in [0, 3]\} \subseteq \mathbb{T}^2.$$

La función  $\phi : A' \rightarrow A$ ,  $\phi(t_1, t_2) = (e^{it_1}, e^{it_2})$  resulta biyectiva por como elegimos la longitud de los intervalos. Además, si  $B \subseteq A$  es boreliano, la medida de  $B$  (como subconjunto de  $\mathbb{T}^2$ ) está dada por

$$m_2(B) = \frac{1}{(2\pi)^2} |\phi^{-1}(B)|, \quad (4.7)$$

donde  $|\cdot|$  es la medida de Lebesgue.

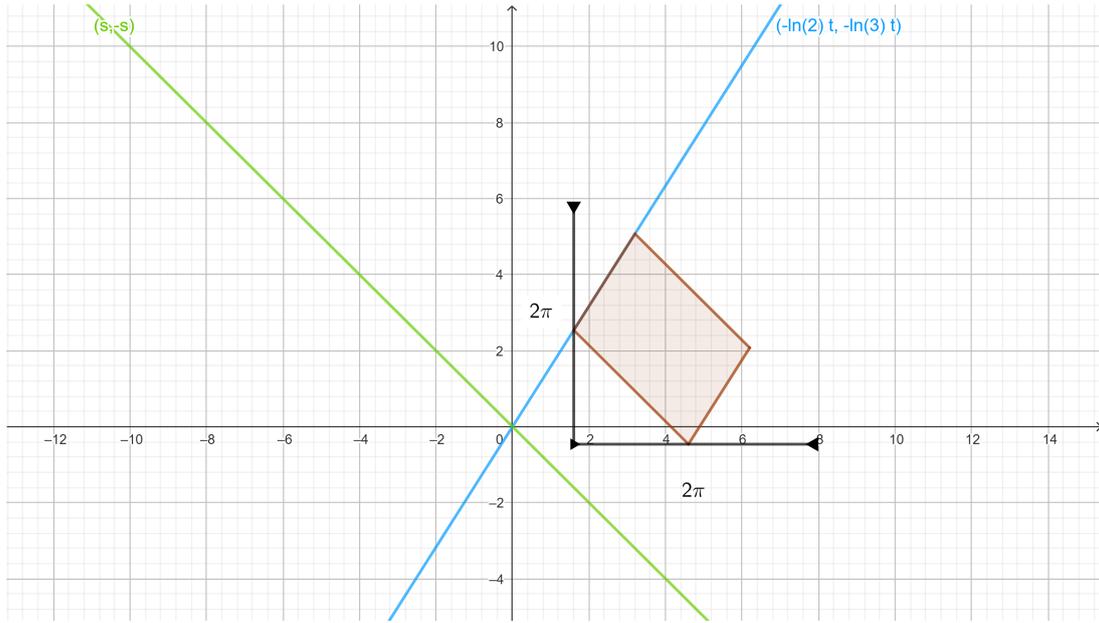


Figura 4.5: En rojo, el paralelogramo  $A'$  (para algún  $I$ ).

Sabemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\nu](2^{-\sigma} w_1, 3^{-\sigma} w_2) = 0$$

$m_2$ -a.e.  $(w_1, w_2) \in A$ . Luego, por (4.7) y por el teorema de Fubini, para casi todo  $s \in [0, 3]$ , tenemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\nu](2^{-\sigma} e^{i(-\ln(2)t+s)}, 3^{-\sigma} e^{i(-\ln(3)t-s)}) = 0 \quad (4.8)$$

para casi todo  $t \in I$ .

Sean  $t \in I$ ,  $s \in [0, 3]$  y  $\sigma > 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$(e^{-is}, e^{is}) \in H_j = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2 : w_1^2 = w_2^{-2}\}.$$

Como  $\lambda_j$  es la medida de Haar de  $H_j$ , que es invariante por traslaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}), w) d\lambda_j(w) &= \int_{H_j} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}), w) d\lambda_j(w) \\ &= \int_{H_j} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}), w(e^{-is}, e^{is})) d\lambda_j(w) \end{aligned}$$

Ahora, por como se define el núcleo de Poisson, lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} &\int_{H_j} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}).(e^{is}, e^{-is}), w) d\lambda_j(w) \\ &= \int_{H_j} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma} e^{i(-\ln(2)t+s)}, 3^{-\sigma} e^{i(-\ln(3)t-s)}), w) d\lambda_j(w) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma} e^{i(-\ln(2)t+s)}, 3^{-\sigma} e^{i(-\ln(3)t-s)}), w) d\lambda_j(w). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
P[\nu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) &= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}), w) d\nu(w) \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2((2^{-\sigma} e^{i(-\ln(2)t+s)}, 3^{-\sigma} e^{i(-\ln(3)t-s)}), w) d\nu(w) \\
&= P[\nu](2^{-\sigma} e^{i(-\ln(2)t+s)}, 3^{-\sigma} e^{i(-\ln(3)t-s)}).
\end{aligned}$$

Esto, junto con (4.8), nos dice que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\nu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0$$

para casi todo  $t \in I$ , como queríamos ver.  $\square$

**Observación 4.3.2.** Dado un espacio topológico  $X$ , una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es semicontinua inferiormente si y solo si para todo  $y \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > y\}$  es abierto en  $X$ .

Sea  $U \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto. En los próximos resultados vamos a considerar la función

$$\chi_U + 1/2\chi_{U^c},$$

que es semicontinua inferiormente, pues:

$$\{w \in \mathbb{T}^2 : (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w) > y\} = \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \text{si } y < 1/2, \\ U & \text{si } 1/2 \leq y < 1, \\ \emptyset & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

**Lema 4.3.3.** Sea  $U \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto. Existe una sucesión de polinomios trigonométricos positivos  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que:

- $\sum_{j \in \mathbb{N}} p_j(w) = (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w)$  para todo  $w \in \mathbb{T}^2$ ;
- para cada  $j \in \mathbb{N}$ , si  $d(w, \partial U) \geq j^{-1}$ , entonces  $p_j(w) \leq j^{-2}$ ;
- $\int_{\mathbb{T}^2} p_j dm_2 \leq j^{-2}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Para la demostración usaremos el siguiente resultado [13, Teorema 12.1].

**Teorema 4.3.4** (Dini). Sean  $X$  un espacio métrico compacto y  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión monótona creciente de funciones reales y continuas en  $X$  que converge puntualmente a una función continua. Entonces la convergencia es uniforme.

*Demostración del Lema 4.3.3.* Ya habíamos visto en la demostración del Teorema 3.2.2 que, como  $\chi_U + 1/2\chi_{U^c}$  es semicontinua inferiormente y positiva, existe una sucesión de polinomios trigonométricos positivos  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} q_k(w) = (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w)$$

para todo  $w \in \mathbb{T}^2$ . Como  $m_2$  es una medida regular, para cada  $j \in \mathbb{N}$  tomamos  $K_j \subseteq U$  compacto tal que

$$m_2(U \setminus K_j) < \frac{1}{2}j^{-2}$$

y definimos los compactos

$$L_j = \{w \in \bar{U} : d(w, \partial U) \geq j^{-1}\} \cup U^c \cup K_j.$$

Como  $\chi_U + 1/2\chi_{U^c}$  es continua en cada  $L_j$ , por el teorema de Dini 4.3.4,  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$  converge uniformemente en  $L_j$ .

Luego, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{k=n_1+1}^{\infty} q_k(w) \leq \frac{1}{2}2^{-2}$$

para todo  $w \in L_2$ . Definimos

$$p_1 = \sum_{k=1}^{n_1} q_k.$$

Elegimos  $n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_2 > n_1$ , tal que

$$\sum_{k=n_2+1}^{\infty} q_k(w) \leq \frac{1}{2}3^{-2}$$

para todo  $w \in L_3$ . Definimos

$$p_2 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} q_k.$$

Inductivamente, tomamos  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$  tal que, para cada  $j \geq 2$ ,

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{\infty} q_k(w) \leq \frac{1}{2}j^{-2}$$

para todo  $w \in L_j$  y definimos

$$p_j = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} q_k.$$

Construimos así una sucesión de polinomios trigonométricos positivos  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p_j(w) = (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w)$$

para todo  $w \in \mathbb{T}^2$ . Además,

$$p_1(w) \leq (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w) \leq 1 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{T}^2} p_1 \, dm_2 \leq 1.$$

Y para cada  $j \geq 2$ ,

$$p_j(w) \leq \frac{1}{2}j^{-2}$$

para todo  $w \in L_j$ . En particular, si  $d(w, \partial U) \geq j^{-1}$ , entonces  $p_j(w) \leq j^{-2}$  y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} p_j \, dm_2 &= \int_{L_j} p_j \, dm_2 + \int_{L_j^c} p_j \, dm_2 \\ &\leq \int_{L_j} \frac{1}{2} j^{-2} \, dm_2 + m_2(L_j^c) \\ &\leq \frac{1}{2} j^{-2} + m_2(U \setminus K_j) \\ &\leq \frac{1}{2} j^{-2} + \frac{1}{2} j^{-2} = j^{-2}. \end{aligned} \quad \square$$

**Lema 4.3.5.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto. Existe una medida  $\mu \geq 0$  en  $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  tal que  $\mu$  y  $m_2$  son mutuamente singulares y la función*

$$h = P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c} - \mu]$$

*pertenece a  $RP$ , es decir, es la parte real de una función holomorfa en  $\mathbb{D}^2$ . Además,  $h(z) \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}^2$  y*

- $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} h(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 1$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in U$ ,
- $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} h(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 1/2$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in \overline{U}^c$ .

*Demostración.* Consideramos la función  $\chi_U + 1/2\chi_{U^c}$ , que es positiva, integrable y semi-continua inferiormente en  $\mathbb{T}^2$ . Entonces, podemos proceder como en la demostración del Teorema 3.2.2: tomamos una sucesión  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de polinomios trigonométricos positivos tal que, para todo  $w \in \mathbb{T}^2$ ,

$$(\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(w)$$

Más aún, por el Lema 4.3.3, podemos suponer que para cada  $j \in \mathbb{N}$

- $p_j(w) \leq j^{-2}$  si  $d(w, \partial U) \geq 1/j$  y
- $\int_{\mathbb{T}^2} p_j \, dm_2 \leq j^{-2}$ .

Sea  $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \geq 0$  la medida en  $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$  que construimos en la demostración del Teorema 3.2.2. Vimos que  $h = P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c} - \mu]$  es la parte real de una función holomorfa en  $\mathbb{D}^2$ . Además, como  $\mu \geq 0$ ,  $P[\mu] \geq 0$  y en consecuencia, para todo  $z \in \mathbb{D}^2$ ,

$$\begin{aligned} h(z) &= P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c} - \mu](z) = P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](z) - P[\mu](z) \\ &\leq P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](z) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2(z, w) (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w) \, dm_2(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2(z, w) \, dm_2(w) = 1. \end{aligned}$$

Para mostrar las afirmaciones sobre los límites de  $h$ , basta ver que:

- i)  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2) = 1$  para todo  $(u_1, u_2) \in U$ ,
- ii)  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](2^{-\sigma}v_1, 3^{-\sigma}v_2) = 1/2$  para todo  $(v_1, v_2) \in \bar{U}^c$  y
- iii)  $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \notin \partial U$ .

Probemos entonces cada ítem.

i) Comencemos notando que

$$P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}] = P[1 - 1/2\chi_{U^c}] = P[1] - 1/2P[\chi_{U^c}].$$

Sea  $(u_1, u_2) \in U$ . Por el Corolario 3.3.11,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_{U^c}](2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2) = 0.$$

Además, para cualquier  $z \in \mathbb{D}^2$ ,

$$P[1](z) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2(z, w) dm_2(w) = 1.$$

En consecuencia,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](2^{-\sigma}u_1, 3^{-\sigma}u_2) = 1.$$

ii) Para probar este ítem, observemos que

$$P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}] = P[1/2 + 1/2\chi_U] = 1/2P[1] + 1/2P[\chi_U] = 1/2 + 1/2P[\chi_U].$$

Sea  $(v_1, v_2) \in \bar{U}^c$ . Por el Corolario 3.3.11,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_{\bar{U}}](2^{-\sigma}v_1, 3^{-\sigma}v_2) = 0.$$

Además, como para todo  $z \in \mathbb{D}^2$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq P[\chi_U](z) &= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2(z, w) \chi_U(w) dm_2(w) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{p}_2(z, w) \chi_{\bar{U}}(w) dm_2(w) = P[\chi_{\bar{U}}](z), \end{aligned}$$

tenemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_U](2^{-\sigma}v_1, 3^{-\sigma}v_2) = 0.$$

Así,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c}](2^{-\sigma}v_1, 3^{-\sigma}v_2) = 1/2.$$

iii) Recordemos que  $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ , con  $\mu_j = p_j \lambda_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Consideramos  $\lambda_0 := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} \lambda_j$ . Por el Lema 4.3.1, existe  $E \subseteq \mathbb{R}$  de medida 0 tal que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\lambda_0](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0 \tag{4.9}$$

para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus E$ . Como para todo  $j_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{j=1}^{j_0} \mu_j \leq j_0^2 \lambda_0$ , se sigue de (4.9) que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P \left[ \sum_{j=1}^{j_0} \mu_j \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0 \quad (4.10)$$

para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus E$ . Fijemos  $t \in \mathbb{R} \setminus E$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \notin \partial U$  y veamos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Definimos

$$\tau := (2^{-it}, 3^{-it}), \quad d := \text{dist}(\tau, \partial U) > 0 \quad \text{y} \quad B := B(\tau, d/2).$$

Sea  $j_0 > \max\{\frac{2}{d}, \frac{384}{d^2\varepsilon}\}$ . Descomponemos las medidas  $\mu_j$  como sigue:

$$\mu_j^a := \chi_B \mu_j \quad \text{y} \quad \mu_j^b := \mu_j - \mu_j^a.$$

Por un lado, si  $w \in B$ ,

$$\text{dist}(w, \partial U) \geq \text{dist}(\tau, \partial U) - d(w, \tau) \geq d/2 \geq 1/j_0.$$

Luego, si  $j > j_0$ ,  $\text{dist}(w, \partial U) > 1/j$  para todo  $w \in B$  y entonces, por como elegimos  $p_j$

$$\chi_B p_j \leq j^{-2}.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \sum_{j>j_0} \mu_j^a \leq \lambda_0,$$

y, por (4.9),

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^a \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0. \quad (4.11)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\text{dist}(\tau, \text{sup}(\mu_j^b)) \geq d/2 \quad \text{y} \quad \|\mu_j^b\| \leq \|\mu_j\| = \|p_j\|_1 \leq j^{-2}.$$

Luego, por el Corolario 3.3.10,

$$\sup_{\sigma>0} P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^b \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) \leq 32(d/2)^{-2} \sum_{j>j_0} j^{-2} \leq \frac{128}{d^2} \frac{1}{j_0} < \varepsilon/3. \quad (4.12)$$

Juntando todo, tenemos que para todo  $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} P[\mu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) &= P \left[ \sum_{j=1}^{j_0} \mu_j \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) + \\ &\quad \underbrace{P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^a \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it})}_{\rightarrow 0 \text{ si } \sigma \rightarrow 0^+ \text{ (4.10)}} + P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^b \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}). \\ &\quad \underbrace{P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^a \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it})}_{\rightarrow 0 \text{ si } \sigma \rightarrow 0^+ \text{ (4.11)}} + \underbrace{P \left[ \sum_{j>j_0} \mu_j^b \right] (2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it})}_{< \varepsilon/3 \text{ (4.12)}}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} P[\mu](2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 0,$$

como queríamos ver. □

Ahora sí, estamos en condiciones de probar la parte (2) del Teorema 4.2.2.

*Demostración de (2) del Teorema 4.2.2.* Sea  $0 < \varepsilon < 1$ , queremos ver que existe  $f \in \mathcal{H}_\infty$  con  $\|f\|_{\mathcal{H}_2} = \varepsilon$  y tal que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt = 1.$$

Recordemos que

$$L = \{(2^{-it}, 3^{-it}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Como  $m_2(L) = 0$  y  $m_2$  es una medida regular, podemos tomar un abierto  $U \subseteq \mathbb{T}^2$  tal que  $L \subseteq U$  y  $m_2(U) = \varepsilon^4$ . Sea  $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función del Lema 4.3.5, es decir,

$$h(z) = P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c} - \mu](z).$$

Por ese mismo lema, sabemos que  $h$  es la parte real de una función holomorfa  $H : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , que  $h(z) \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}^2$  y que, como  $L \subseteq U$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} h(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = 1 \text{ a.e. } t \in \mathbb{R}.$$

Sea  $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  la función

$$F := e^{k(H-1)},$$

donde  $k > 0$  es tal que  $\varepsilon^2 = e^{-k}(1 + \varepsilon^2)$ .  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{D}^2$  y además, para todo  $z \in \mathbb{D}^2$ , como  $h(z) \leq 1$ ,

$$|F(z)| = e^{k(h(z)-1)} \leq 1.$$

Por lo tanto,  $F \in H_\infty(\mathbb{D}^2)$ . Consideramos  $f \in \mathcal{H}_\infty^{(2)} \subseteq \mathcal{H}_\infty$  la imagen de  $F$  por la transformada de Bohr. Luego,

$$f(s) = F(2^{-s}, 3^{-s})$$

para todo  $s$  con  $\Re(s) > 0$  (Teorema 2.3.7). Entonces, para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(it)| &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |f(\sigma + it)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |F(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it})| \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |\exp(kH(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) - k)| \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \exp(kh(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) - k) = 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(it)|^2 dt = 1.$$

Resta calcular  $\|f\|_{\mathcal{H}_2}$ . Pero como  $f$  es la imagen por la transformada de Bohr de la función holomorfa  $F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} c_\alpha(F)z^\alpha$ , entonces

$$\|f\|_{\mathcal{H}_2} = \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} |c_\alpha(F)|^2 \right)^{1/2}.$$

Ahora, por el Lema 2.3.14,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} |c_\alpha(F)|^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^2} |F(rw)|^2 dm_2(w).$$

Para calcular este último límite vamos a usar el teorema de convergencia mayorada. Por el Teorema 3.3.1, como  $\mu$  y  $m_2$  son mutuamente singulares,

$$h(rw) = P[\chi_U + 1/2\chi_{U^c} - \mu](rw) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} (\chi_U + 1/2\chi_{U^c})(w)$$

para casi todo  $w \in \mathbb{T}^2$  y, por lo tanto,

$$|F(rw)|^2 = e^{2k(h(rw)-1)} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} e^{2k(\chi_U(w)+1/2\chi_{U^c}(w)-1)}.$$

Además, para todo  $r \in (0, 1)$  y todo  $w \in \mathbb{T}^2$ ,

$$|F(rw)|^2 = e^{2k(h(rw)-1)} \leq 1.$$

Ahora sí, por el teorema de convergencia mayorada,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^2} |c_\alpha(F)|^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}^2} |F(rw)|^2 dm_2(w) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} e^{2k(\chi_U(w)+1/2\chi_{U^c}(w)-1)} dm_2(w) \\ &= \int_U 1 dm_2(w) + \int_{U^c} e^{-k} dm_2(w) \\ &= \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4)e^{-k} = \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^2)e^{-k} \\ &= \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^2)\varepsilon^2 = \varepsilon^2, \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

El próximo objetivo es demostrar (1) del Teorema 4.2.2. La prueba del siguiente resultado es muy similar a la primera parte de la demostración de (2), con la diferencia de que, en este caso, el abierto  $U$  es arbitrario y, por lo tanto, no cubre necesariamente a  $L$ .

**Lema 4.3.6.** Sean  $0 < \delta < 1$  y  $U \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto. Entonces existe  $f \in \mathcal{H}_\infty$  con  $\|f\|_\infty \leq 1$  tal que:

- $|f(it)| = 1$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in U$ ,
- $|f(it)| = \delta$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in \overline{U}^c$ .

*Demostración.* Sea  $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función del Lema 4.3.5. Sabemos que  $h$  es la parte real de una función holomorfa  $H : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Sea  $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  la función

$$F := e^{k(H-1)},$$

donde  $k > 0$  es elegido de forma que  $e^{-k/2} = \delta$ .  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{D}^2$  y, como antes,  $|F(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}^2$ . Por lo tanto,  $F \in H_\infty(\mathbb{D}^2)$ . Sea  $f \in \mathcal{H}_\infty$  su imagen por la transformada de Bohr. Luego,

$$f(s) = F(2^{-s}, 3^{-s})$$

para todo  $s$  con  $\Re(s) > 0$  (Teorema 2.3.7). En particular,

$$|f(s)| = |F(2^{-s}, 3^{-s})| \leq 1$$

para todo  $s$  con  $\Re(s) > 0$ . Además, por el Lema 4.3.5, sabemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} h(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) = \begin{cases} 1 & \text{a.e. } t \in \mathbb{R} \text{ con } (2^{-it}, 3^{-it}) \in U, \\ 1/2 & \text{a.e. } t \in \mathbb{R} \text{ con } (2^{-it}, 3^{-it}) \in \overline{U}^c. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |f(\sigma + it)| &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |F(2^{-(\sigma+it)}, 3^{-(\sigma+it)})| \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |\exp(kH(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) - k)| \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \exp(kh(2^{-\sigma-it}, 3^{-\sigma-it}) - k) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{a.e. } t \in \mathbb{R} \text{ con } (2^{-it}, 3^{-it}) \in U, \\ e^{-k/2} = \delta & \text{a.e. } t \in \mathbb{R} \text{ con } (2^{-it}, 3^{-it}) \in \overline{U}^c. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

En la demostración de (2) del Teorema 4.2.2, cubrimos al conjunto  $L$  con un abierto, lo cual implicó que la función que construimos satisficiera que  $|f(it)| = 1$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  y, por ende, el límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(it)|^2 dt$$

existía trivialmente. Para la demostración de (1), necesitaremos utilizar el Lema 4.3.6 con un abierto  $U$  que cubra solo una parte de  $L$ , de modo que  $|f(it)|$  oscile lo suficiente para que el límite mencionado no exista. El siguiente resultado nos permitirá construir dicho abierto.

**Lema 4.3.7.** *Sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Existe una sucesión  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos de  $\mathbb{T}^2$  disjuntos dos a dos, tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $t_n \geq n$  con*

$$|\{t \in [0, t_n] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_n\}| > (1 - \varepsilon/2)t_n.$$

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la función

$$\phi(t_1, t_2) := (e^{it_1}, e^{it_2}).$$

Notemos que  $\phi$  es una función continua y abierta. Luego, si  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto o compacto,  $\phi(A) \subseteq \mathbb{T}^2$  es boreliano y, además,

$$m_2(\phi(A)) \leq \frac{1}{4\pi^2} |A|, \quad (4.13)$$

donde  $|\cdot|$  es la medida de Lebesgue. Más aún, si  $A$  está incluido en un cuadrado de lado  $2\pi$ , vale la igualdad. Si definimos  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\gamma(t) := (-\ln(2)t, -\ln(3)t),$$

entonces  $L = \phi(\gamma(\mathbb{R}))$ .

Vamos a mostrar, por inducción, que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $U_n \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto que cumple las siguientes propiedades.

- i)  $U_n = \phi(\tilde{U}_n)$  con  $\tilde{U}_n \subseteq \mathbb{R}^2$  una unión de finitos cuadrados diádicos abiertos,
- ii) existe  $t_n \geq n$  tal que  $|\{t \in [0, t_n] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_n\}| > (1 - \varepsilon/2)t_n$ ,
- iii)  $\overline{U_1}, \overline{U_2}, \dots, \overline{U_n}$  son disjuntos dos a dos,
- iv)  $\sum_{j=1}^n m_2(U_j) < \varepsilon/2$ .

Para  $n = 1$  tomamos  $t_1 = 1$ . Cubrimos (salvo finitos puntos) el segmento

$$\{\gamma(t) : t \in [0, 1]\}$$

con finitos cuadrados diádicos abiertos de modo que la unión de todos ellos,  $\tilde{U}_1$ , satisfaga  $|\tilde{U}_1| < 2\varepsilon\pi^2$ , como se muestra en la Figura 4.6. Luego,  $U_1 = \phi(\tilde{U}_1) \subseteq \mathbb{T}^2$  abierto y

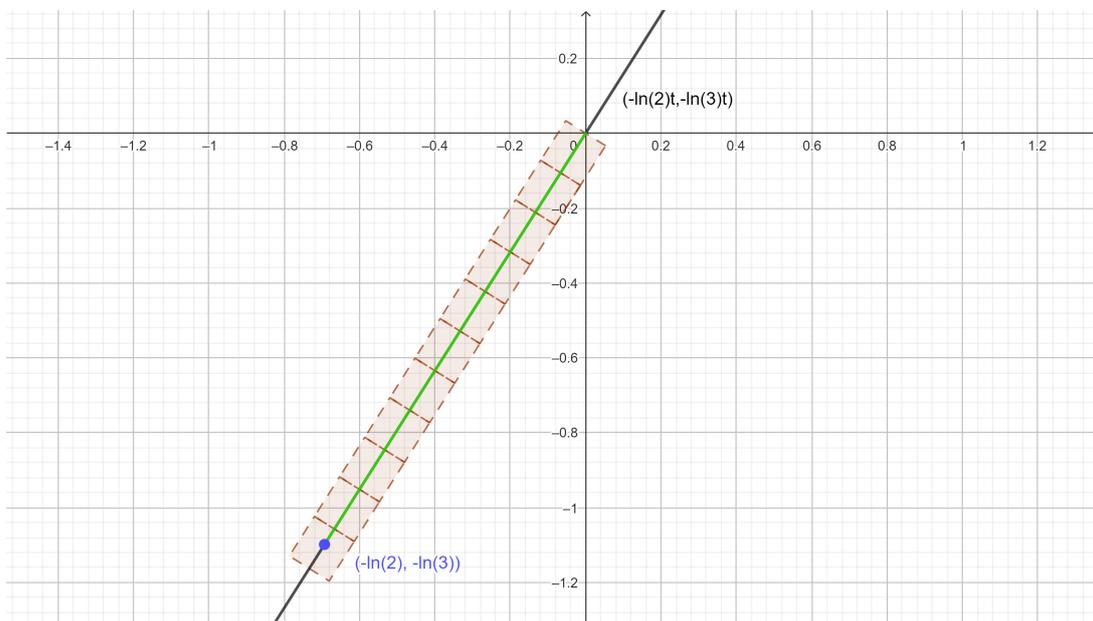


Figura 4.6: En verde, el segmento  $\{\gamma(t) : t \in [0, 1]\}$  y en rojo,  $\tilde{U}_1$ .

$$m_2(U_1) \leq \frac{1}{4\pi^2} |\tilde{U}_1| < \varepsilon/2.$$

Además, para casi todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t) \in \tilde{U}_1$  y entonces

$$\phi(\gamma(t)) = (2^{-it}, 3^{-it}) \in \phi(\tilde{U}_1) = U_1.$$

En consecuencia,

$$|\{t \in [0, 1] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_1\}| = 1 > (1 - \varepsilon/2).$$

Para el paso inductivo, suponemos contruidos  $U_1, \dots, U_n$ . Primero veamos que del ítem i) podemos deducir que

$$m_2(\partial U_j) = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

Para ello, notemos que como  $\overline{\tilde{U}_j}$  es compacto,  $\phi(\overline{\tilde{U}_j})$  es un cerrado, que contiene a  $\phi(\tilde{U}_j)$  y así

$$\overline{U_j} = \overline{\phi(\tilde{U}_j)} \subseteq \phi(\overline{\tilde{U}_j}).$$

Luego,

$$\partial U_j = \overline{U_j} \setminus U_j \subseteq \phi(\overline{\tilde{U}_j}) \setminus \phi(\tilde{U}_j) \subseteq \phi(\overline{\tilde{U}_j} \setminus \tilde{U}_j) = \phi(\partial \tilde{U}_j), \quad (4.14)$$

y entonces,

$$m_2(\partial U_j) \leq m_2(\phi(\partial \tilde{U}_j)) \stackrel{(4.13)}{\leq} \frac{1}{4\pi^2} |\partial \tilde{U}_j| = 0,$$

ya que  $\tilde{U}_j$  es unión finita de cuadrados. Consideramos

$$V = \bigcup_{j=1}^n U_j,$$

que es abierto. Como  $m_2(\partial V) = 0$  (pues  $\partial V \subseteq \bigcup_{j=1}^n \partial U_j$ ) y el conjunto  $\{-\ln(2), -\ln(3)\}$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ , por el Teorema de Birkhoff 1.4.4 para la función  $f \equiv 1$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\{t \in [0, T] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in V\}| = m_2(V) \stackrel{\text{HI}}{<} \varepsilon/2.$$

Luego, existe  $t_{n+1} \geq n + 1$  tal que

$$\frac{1}{t_{n+1}} |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in V\}| < \varepsilon/2.$$

Tomamos  $\delta > 0$  tal que

$$|\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in V\}| + \delta < t_{n+1}\varepsilon/2. \quad (4.15)$$

El objetivo es construir  $U_{n+1}$  de modo que cubra una porción suficientemente grande de

$$\{(2^{-it}, 3^{-it}) \notin \overline{V} \text{ tal que } t \in [0, t_{n+1}]\},$$

pero que esté a distancia positiva de  $\overline{V}$  y con

$$m_2(U_{n+1}) < \varepsilon/2 - \sum_{j=1}^n m_2(U_j).$$

Como la medida de Lebesgue (en  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$  es cero, existe  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto tal que

$$\{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq G \quad \text{y} \quad |G| < 4\pi^2 \left( \varepsilon/2 - \underbrace{\sum_{j=1}^n m_2(U_j)}_{>0 \text{ por HI.}} \right).$$

Ahora, como  $G \cap \phi^{-1}(\overline{V}^c) \subseteq \mathbb{R}^2$  es abierto, lo podemos descomponer en una unión numerable de cuadrados diádicos cerrados  $C_i$  con interior disjunto:

$$G \cap \phi^{-1}(\overline{V}^c) = \bigcup_{i \geq 1} C_i. \quad (4.16)$$

Como

$$\sum_{i \geq 1} |\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in C_i\}| = |\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in \bigcup_{i \geq 1} C_i\}| < \infty,$$

existe  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$\sum_{i \geq N+1} |\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in C_i\}| < \delta. \quad (4.17)$$

Definimos entonces los abiertos

$$\tilde{U}_{n+1} = \bigcup_{i=1}^N C_i^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad U_{n+1} = \phi(\tilde{U}_{n+1}) \subseteq \mathbb{T}^2,$$

que claramente cumplen la primera condición. Verifiquemos que se satisfacen las demás.

ii) Dado  $t \in [0, t_{n+1}]$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \notin V$ , entonces

$$(2^{-it}, 3^{-it}) \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j \quad \text{o} \quad (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_{n+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_{n+1}\}| \geq \\ & |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \notin V\}| - |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j\}|. \end{aligned}$$

Para acotar la medida de

$$\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j\},$$

veamos primero que para todo  $j = 1, \dots, n$

$$|\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in \partial U_j\}| = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& \{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in \partial U_j\} = \{t \in [0, t_{n+1}] : \phi(\gamma(t)) \in \partial U_j\} \\
& \stackrel{(4.14)}{\subseteq} \{t \in [0, t_{n+1}] : \phi(\gamma(t)) \in \phi(\partial \tilde{U}_j)\} \\
& \subseteq \bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} \{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in \partial \tilde{U}_j + (2k\pi, 2l\pi)\},
\end{aligned}$$

y, como  $\tilde{U}_j$  es unión finita de cuadrados diádicos, los conjuntos

$$\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in \partial \tilde{U}_j + (2k\pi, 2l\pi)\}$$

son finitos ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ). En consecuencia,

$$|\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in \partial U_j\}| = 0,$$

como queríamos ver. Luego,

$$\begin{aligned}
& |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \notin \bigcup_{j=1}^{n+1} U_j\}| \\
& = |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in \left(\bigcup_{j=1}^n \overline{U}_j\right)^c \cap U_{n+1}^c\}| \\
& = |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in \overline{V}^c \cap U_{n+1}^c\}| \\
& \stackrel{(4.16)}{\leq} \underbrace{|\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in \bigcup_{i \geq N+1} C_i\}|}_{< \delta \text{ (4.17)}} + \underbrace{|\{t \in [0, t_{n+1}] : \gamma(t) \in \bigcup_{i=1}^N \partial C_i\}|}_{=0} \\
& < \delta.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_{n+1}\}| \geq \\
& \geq |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \notin V\}| - \delta \\
& > t_{n+1} - |\{t \in [0, t_{n+1}] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in V\}| - \delta \\
& \stackrel{(4.15)}{\geq} t_{n+1} - t_{n+1}\varepsilon/2 = (1 - \varepsilon/2)t_{n+1}.
\end{aligned}$$

iii) Como por hipótesis inductiva  $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_n$  son disjuntos dos a dos, basta ver que  $\overline{U}_j \cap \overline{U}_{n+1} = \emptyset$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Como  $\overline{\tilde{U}_{n+1}}$  es compacto,  $\phi(\overline{\tilde{U}_{n+1}})$  es un cerrado que contiene a  $\phi(\tilde{U}_{n+1})$  y, entonces,

$$\overline{U_{n+1}} = \overline{\phi(\tilde{U}_{n+1})} \subseteq \phi(\overline{\tilde{U}_{n+1}}).$$

Así,

$$\overline{U_{n+1}} \subseteq \phi\left(\overline{\tilde{U}_{n+1}}\right) \subseteq \phi\left(\bigcup_{i=1}^N C_i\right) \subseteq \phi(\phi^{-1}(\overline{V^c})) \subseteq \overline{V^c} = \left(\bigcup_{j=1}^n \overline{U_j}\right)^c$$

y en consecuencia,  $\overline{U_j} \cap \overline{U_{n+1}} = \emptyset$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , como queríamos ver.

iv) Como tomamos  $\tilde{U}_{n+1} \subseteq G$  y

$$|G| < 4\pi^2\left(\varepsilon/2 - \sum_{j=1}^n m_2(U_j)\right),$$

vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} m_2(U_j) &= \sum_{j=1}^n m_2(U_j) + m_2(U_{n+1}) \leq \sum_{j=1}^n m_2(U_j) + \frac{1}{4\pi^2} |\tilde{U}_{n+1}| \\ &\leq \sum_{j=1}^n m_2(U_j) + \frac{1}{4\pi^2} |G| < \varepsilon/2. \end{aligned} \quad \square$$

Ahora sí, podemos terminar la demostración del Teorema 4.2.2.

*Demostración de (1) del Teorema 4.2.2.* Sea  $0 < \varepsilon < 1$ . Consideramos la sucesión  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos de  $\mathbb{T}^2$  disjuntos dos a dos del Lema 4.3.7 y definimos los abiertos

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{2k-1} \quad y \quad V = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{2k}.$$

Notamos

$$A_n := \{t \in [0, t_n] : (2^{-it}, 3^{-it}) \in U_n\}.$$

Sabemos que  $|A_n| > (1 - \varepsilon/2)t_n$ .

Sea  $0 < \delta < 1$  tal que  $\delta^2 < 1 - \varepsilon$  y consideremos  $f \in \mathcal{H}_{\infty}$  la función dada por el Lema 4.3.6 para este  $\delta$ . Como  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos, tenemos que  $V \subseteq \overline{U^c}$  y, en consecuencia,

- $|f(it)| = 1$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in U$ ,
- $|f(it)| = \delta$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $(2^{-it}, 3^{-it}) \in V$ .

Luego, si  $n \in \mathbb{N}$  es par, usando que  $\|f\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \leq 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} |f(it)|^2 dt &= \frac{1}{t_n} \int_{A_n} |f(it)|^2 dt + \frac{1}{t_n} \int_{[0, t_n] \setminus A_n} |f(it)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{t_n} \int_{A_n} \delta^2 dt + \frac{1}{t_n} \int_{[0, t_n] \setminus A_n} 1 dt \\ &\leq \delta^2 + \frac{1}{t_n} |[0, t_n] \setminus A_n| = \delta^2 + \frac{1}{t_n} (t_n - |A_n|) \\ &< \delta^2 + \frac{1}{t_n} (t_n - (1 - \varepsilon/2)t_n) = \delta^2 + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Y si  $n \in \mathbb{N}$  es impar,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} |f(it)|^2 dt &\geq \frac{1}{t_n} \int_{A_n} |f(it)|^2 dt \\ &\geq \frac{1}{t_n} \int_{A_n} 1 dt \\ &> 1 - \varepsilon/2. \end{aligned}$$

La elección de  $\delta$  nos asegura que  $\delta^2 + \varepsilon/2 < 1 - \varepsilon/2$  y, por lo tanto,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(it)|^2 dt$$

no existe. □

# Bibliografía

- [1] Harald Bohr. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der *Dirichletschen* reihen  $\sum \frac{a_n}{n^s}$ . *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1913:441–488, 1913.
- [2] Harald Bohr. Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen. *J. Reine Angew. Math.*, 143:203–211, 1913.
- [3] Harald Bohr. A theorem concerning power series. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 13:1–5, 1914.
- [4] Fritz Carlson. Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. I. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 16(18):1–19, 1922.
- [5] Donald L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser Adv. Texts, Basler Lehrbüch. New York, NY: Birkhäuser/Springer, 2nd revised edition, 2013.
- [6] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. New York etc.: Springer-Verlag, 2nd edition, 1990.
- [7] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. *Dirichlet series and holomorphic functions in high dimensions*, volume 37 of *New Math. Monogr.* Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
- [8] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de *Taylor*. *Acta Math.*, 30:335–400, 1906.
- [9] B. A. Fuks. *Theory of analytic functions of several complex variables*. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS), 1963.
- [10] Hans Hahn. Über halbstetige und unstetige Funktionen. *Wien. Ber.*, 126:91–110, 1917.
- [11] Håkan Hedenmalm. Dirichlet series and functional analysis. In *The legacy of Niels Henrik Abel. Papers from the Abel bicentennial conference, University of Oslo, Oslo, Norway, June 3–8, 2002*, pages 673–684. Berlin: Springer, 2004.
- [12] Håkan Hedenmalm, Peter Lindqvist, and Kristian Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in  $L^2(0, 1)$ . *Duke Math. J.*, 86(1):1–37, 1997.

- [13] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Berlin: Springer, 2005.
- [14] Hervé Queffelec and Martine Queffelec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*, volume 80 of *Texts Read. Math.* New Delhi: Hindustan Book Agency; Singapore: Springer, 2nd edition, 2020.
- [15] Walter Rudin. *Function theory in polydiscs*. Math. Lect. Note Ser. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA, 1969.
- [16] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. New York, NY: McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.
- [17] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*. New York etc.: John Wiley & Sons, paperback edition, 1990.
- [18] Eero Saksman and Kristian Seip. Integral means and boundary limits of Dirichlet series. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(3):411–422, 2009.
- [19] Volker Scheidemann. *Introduction to complex analysis in several variables*. Compact Textb. Math. Cham: Birkhäuser, 2nd corrected and expanded edition edition, 2023.