



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Una Introducción a la Geometría Compleja y la Teoría de
Hodge**

Marcos Martínez Wagner

Director: Federico Quallbrunn

27/02/2024

Agradecimientos

A mis viejos, que me insistían con que avance con la carrera y deje de colgar finales. Sin su apoyo, no sé cuándo me hubiese recibido.

A mi familia, que siempre estuvo atenta a mis avances en la carrera y mis proyectos a futuro, escuchando con entusiasmo.

A Fede, que se bancó dirigirme una tesis que me tomó muchísimo más tiempo del que esperaba. Me acompañó, me enseñó a seguir adelante cuando no entiendo nada y me introdujo al bonito mundo de la geometría compleja.

A Marco Farinati y Gabriel Larotonda, por aceptar ser jurados de esta tesis.

A mis amigos de la facultad, a los que no les puedo agradecer lo suficiente. Hicieron de mi estadía en la facultad algo realmente agradable que voy a recordar toda mi vida con nostalgia. Espero no olvidarme de mencionar a nadie: Guido, Sol, Emi, Dev, Juli, Kat, Lu, Agus, Cami, Leo, Darío, Pablo P, Lucas, Dante, Lola, Mati S, Facu S, Pedro, Nico Ig, María, Chino C, Nacho, Ceci, Carla.

Agradezco especialmente a Guido, Emi, Lu, Lola y Juja que me han prestado sus apuntes numerosas veces, gracias a los cuales pude aprobar varias materias.

Índice general

Introducción	5
Capítulo 1: Geometría Compleja	9
1.1 Álgebra Lineal Compleja	9
1.1.1 Morfismos \mathbb{R} -lineales y Orientación en Espacios Vectoriales Complejos	9
1.1.2 Complexificación de un Espacio Vectorial Real	11
1.1.3 Estructuras Complejas en Espacios Vectoriales Reales.....	12
1.2 Variedades Complejas y Funciones Holomorfas	15
1.2.1 Funciones Holomorfas en \mathbb{C}^n	15
1.2.2 Variedades Complejas.....	16
1.2.3 Funciones Holomorfas	16
1.2.4 Ejemplos de Variedades Complejas	18
1.3 El Espacio Tangente de una Variedad Compleja	26
1.3.1 Fibrados Vectoriales Complejos y Holomorfos.....	27
1.3.2 El Espacio Tangente Complejo	31
1.3.3 Estructuras Cuasi-Complejas y el Teorema de Newlander-Nirenberg	33
1.4 Formas Complejas	35
1.4.1 Las (p, q) -Formas en Espacios Vectoriales	36
1.4.2 Funciones Holomorfas y 1-Formas	37
1.4.3 Las derivadas complejas $\partial/\partial z_k, \bar{\partial}/\partial \bar{z}_k$	39
1.4.4 Los operadores de Dolbeault ∂ y $\bar{\partial}$	40
Capítulo 2: Teoría de Hodge	44
2.1 Variedades Hermitianas y Variedades de Kähler	44
2.1.1 Formas Hermitianas en Espacios Vectoriales Complejos.....	44
2.1.2 Métricas Hermitianas y Formas de Kähler	46
2.1.3 La Métrica de Fubini-Study	48
2.2 Teoremas de Hodge	53
2.2.1 El Producto Interno en $\Omega^k(M)$	53
2.2.2 El Operador Estrella de Hodge	56
2.2.3 Construcción de Operadores Adjuntos	59
2.2.4 Formas Armónicas y el Teorema de Hodge	61
2.2.5 La Descomposición de Hodge.....	63
2.3 Estructuras Adicionales	70
2.3.1 Cohomología de de-Rham Entera	70
2.3.2 Cohomología Primitiva y la Descomposición de Lefschetz	78

2.3.3 Polarización	81
Capítulo 3: Deformación de Variedades	86
3.1 Submersiones y Espacios Fibrados	86
3.1.1 Deformaciones.....	87
3.1.2 Espacios Fibrados.....	89
3.1.3 El Teorema de Ehresmann	92
3.2 Sistemas Locales	96
3.2.1 Conexiones	97
3.2.2 Sistemas Locales y Conexiones Playas	99
3.2.3 Sistemas Locales y Representaciones del Grupo Fundamental	100
3.2.4 El Fibrado de de-Rham y el Fibrado Primitivo	103
3.3 El Fibrado Tangente de la Grasmaniana.....	107
3.3.1 La Submersión $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$	107
3.3.2 Una primera descripción del Fibrado Tangente de la Grasmaniana	108
3.3.3 El Isomorfismo con el Fibrado $S \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$	111
3.4 El Mapa de Períodos	114
3.4.1 Filtraciones de Hodge	114
3.4.2 Deformación de Variedades Complejas y el Mapa de Períodos	117
3.4.3 Propiedades del Dominio de Períodos y del Mapa de Períodos	122
3.4.4 La Familia de Legendre.....	125
Bibliografía	128

Introducción

La Historia de la Geometría Compleja comienza con Riemann, en su tesis doctoral de 1851, apoyándose en las ideas que se habían desarrollado en análisis complejo (Euler, Cauchy, Gauss) y en Geometría Diferencial (Monge, Gauss). De hecho, la tesis doctoral de Riemann fue dirigida por Gauss, considerado por muchos el padre de esta última área. Las integrales elípticas (por ejemplo, la integral que aparece al calcular la longitud de arco de la lemniscata de Bernoulli) y el concepto de “Extensión analítica” de funciones holomorfas, fue lo que llevó a Riemann a desarrollar conceptos que más adelante serían conocidos como “Superficie de Riemann” y “Revestimiento”. Con el desarrollo del lenguaje y formalismo de la geometría diferencial, hoy podríamos decir que una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión 1.

La filosofía principal de la geometría compleja, consiste en hacer una mímica de la geometría diferencial, pero cambiando \mathbb{R} por \mathbb{C} y cambiando el término “diferenciable” por el término “holomorfo”. Por ejemplo, una variedad compleja es un espacio topológico M equipado con un atlas de cartas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ cuyos cambios de coordenadas son funciones holomorfas. Similarmente se puede definir qué es una función holomorfa entre variedades complejas, qué es un campo holomorfo, una forma holomorfa, un fibrado vectorial holomorfo, etcétera.

Si bien la geometría compleja surge de imitar la geometría diferencial, no todo funciona igual en ambas teorías. La principal diferencia está en que el que una función sea diferenciable, es muy laxo, mientras que el que una función sea holomorfa, es algo muy rígido. Una de las herramientas principales de la geometría diferencial es la “partición de la unidad”, que permite pegar cosas definidas localmente para construir un objeto global. La demostración de que, para todo cubrimiento por abiertos, existe una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento, comienza tomando una “función chichón”, la cual está muy lejos de ser una función holomorfa. Luego, en geometría compleja, no tenemos partición de la unidad y no siempre será posible extender algo definido localmente a algo global. Aquí juega un rol fundamental la teoría de Haces, ya que la cohomología de haces, en cierta medida, mide las “obstrucciones” para extender globalmente, algo definido localmente. Dado que la teoría de haces es un tanto técnica, y no es necesaria para desarrollar muchos de los conceptos de la teoría de Hodge, no abordaremos ese tema. Sin embargo, alentamos fuertemente a aprender de ello a cualquier interesado en aprender geometría compleja.

Las variedades complejas son, en particular, variedades diferenciables. Esto nos permite interrelacionar los conceptos de geometría diferencial con los de geometría compleja. El espacio tangente de una variedad compleja M , si bien podríamos definirlo como el espacio de derivaciones de gérmenes de funciones holomorfas (imitando el caso diferenciable), resulta conveniente definirlo simplemente como el espacio tangente de M visto como variedad diferencial, al cual le damos una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial. Esto permite, como dijimos, interrelacionar la geometría diferencial con la geometría compleja. Por ejemplo, una función diferenciable entre variedades complejas $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ es \mathbb{C} -lineal para todo p .

El espacio tangente de una variedad compleja es un \mathbb{C} -espacio vectorial, y mucha de la interrelación entre la geometría compleja y la geometría diferencial, proviene de la relación que hay entre la teoría de \mathbb{C} -espacios vectoriales y la teoría de \mathbb{R} -espacios vectoriales (todo \mathbb{C} -espacio vectorial es un \mathbb{R} -espacio vectorial). Por ejemplo, si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, definimos $A_k(V)^{\mathbb{C}}$ como el conjunto de funciones $V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{C}$ en k variables, que son \mathbb{R} -multilineales y alternadas. Si V tiene dimensión par, podemos extender la acción de \mathbb{R} sobre V a una acción de \mathbb{C} sobre V , convirtiendo a V en un \mathbb{C} -espacio vectorial. Dicha extensión nos inducirá una descomposición

$$A_k(V)^{\mathbb{C}} = A^{k,0}(V) \oplus A^{k-1,1}(V) \oplus \cdots \oplus A^{0,k}(V)$$

Siendo $A^{k,0}(V)$ el conjunto de funciones \mathbb{C} -multilineales y alternadas $V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{C}$. La definición de los espacios $A^{p,q}(V)$ se puede encontrar en la sección 1.4.1. Llevado todo esto a variedades diferenciales y complejas, si M es una variedad diferencial, una forma compleja es una función que a cada $p \in M$ le asigna una función \mathbb{R} -multilineal alternada $T_p(M) \times \cdots \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$. Si M es una variedad compleja, una (p, q) -forma es una función $p \in M \rightarrow \omega_p \in A^{p,q}(T_p(M))$. Tenemos entonces la descomposición

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Siendo $\Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$ el conjunto de k -formas complejas y $\Omega^{p,q}(M)$ el conjunto de (p, q) -formas.

Este concepto de las (p, q) -formas es importante pues está relacionado con uno de los temas centrales de esta tesis, la llamada “Descomposición de Hodge”. Definimos $H^{p,q}(M)$ como el conjunto de clases de de-Rham que contienen alguna (p, q) -forma. El teorema de descomposición de Hodge nos dice que, bajo ciertas hipótesis (si la variedad es compacta y admite alguna métrica Kähler), entonces vale la descomposición

$$H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} = H^{k,0}(M) \oplus H^{k-1,1}(M) \oplus \cdots \oplus H^{0,k}(M)$$

Los espacios $H^{p,q}(M)$ son espacios vectoriales de dimensión finita (si M es compacta) y son invariantes de la estructura compleja de M . La descomposición de Hodge juega un rol clave para definir el llamado “Mapa de Períodos”, desarrollado por Griffiths, que mencionaremos en un instante.

Uno de las cuestiones más interesantes de la geometría compleja, es sin duda el “Espacio moduli de estructuras complejas”. Dada una variedad diferencial M , el espacio moduli es el conjunto de estructuras de variedad compleja que le podemos asignar a M , módulo estructuras biholomorfas. En algunos casos, como \mathbb{R}^2 y S^2 , el espacio moduli es un conjunto finito y en otros es un conjunto vacío, como S^n con $n \neq 2; 6$. Sin embargo, hay ejemplos más interesantes como el toro, cuyo espacio moduli está parametrizado por $\mathbb{H}/\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, siendo $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. De hecho, Riemann “demostró” (con los estándares de rigor de la época) que el espacio moduli de estructuras complejas sobre el toro de g manijas, para $g > 1$, es un espacio de dimensión $3g - 3$. Esto es una gran diferencia con la geometría diferencial, en donde el espacio moduli de estructuras

diferenciales sobre una variedad topológica es un conjunto finito (salvo en dimensión 4).

Para entender cuál es la geometría del espacio moduli de estructuras complejas sobre una variedad diferenciable, debemos entender qué significa “deformar” la estructura compleja de una variedad. En la sección 3.1.2 de esta tesis, veremos que los espacios fibrados $\pi : X \rightarrow S$ modelan la idea de deformar una variedad. Por lo pronto, pensemos que tenemos una familia de variedades complejas X_t , difeomorfas entre sí, con t moviéndose en una variedad compleja S . Un ejemplo de esto es la familia de Legendre

$$X_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - t)\} \quad : \quad t \in \mathbb{C} - \{0; 1\}$$

que son variedades complejas difeomorfas al toro sacándole un punto, pero que no son biholomorfas entre sí. Hay diversas maneras de entender cómo varía la estructura compleja de X_t en función de t , como por ejemplo el “Mapa de Kodaira-Spencer”. El enfoque en el que nos centraremos en esta tesis, es el del mapa de períodos que consiste en estudiar cómo varían los invariantes complejos $H^{p,q}(X_t)$. Más precisamente, cómo varía la descomposición de Hodge

$$H_{\text{dR}}^k(X_t)^{\mathbb{C}} = H^{k,0}(X_t) \oplus H^{k-1,1}(X_t) \oplus \dots \oplus H^{0,k}(X_t)$$

donde $H_{\text{dR}}^k(X_t)^{\mathbb{C}}$ es invariante por difeomorfismos así que, en algún sentido, es un espacio que queda fijo, mientras los componentes de la descomposición se mueven.

Antes de describir punto por punto los contenidos de la tesis, es importante comentar que la geometría compleja está íntimamente relacionada con la geometría algebraica. Así como la familia de Legendre, la mayoría de los ejemplos de la geometría compleja provienen de analizar variedades algebraicas (más precisamente variedades proyectivas). La geometría compleja ha sido una herramienta fundamental en la clasificación de muchas familias de variedades algebraicas. Los teoremas GAGA de Serré son un claro ejemplo de la conexión entre estas dos áreas.

Esta tesis está dividida en tres capítulos. El primero de ellos se titula “Geometría Compleja” y es el capítulo en el que presentaremos las nociones básicas de geometría compleja necesarias para formular la teoría de Hodge. Comenzaremos describiendo la relación entre el álgebra lineal real y el álgebra lineal compleja, para luego definir conceptos básicos como “Variedad Compleja”, “Función Holomorfa”, “Espacio Tangente Complejo”, etcétera. Describiremos en profundidad tres ejemplos: El espacio proyectivo, la Grasmaniana y las Estructuras Complejas del Toro. Para entender la estructura del fibrado tangente de una variedad compleja, damos una breve introducción a los fibrados vectoriales complejos y holomorfos. Finalizamos el capítulo describiendo las (p, q) -formas y los operadores de Dolbeault $\partial, \bar{\partial}$, que serían la versión compleja del diferencial de formas.

En el Capítulo 2, titulado “Teoría de Hodge”, comenzaremos describiendo lo que es una métrica Kähler, cuya existencia, junto a la compacidad de la variedad, nos garantizará la validez de la descomposición de Hodge. Toda variedad proyectiva admite una métrica Kähler, así que tenemos una gran fuente de ejemplos. Para entender por qué vale la

descomposición de Hodge, primero debemos entender el teorema de Hodge que dice que, bajo ciertas hipótesis, toda clase de de-Rham contiene una única forma armónica. El Laplaciano de una forma es $\Delta\omega = dd^*\omega + d^*d\omega$, siendo d^* el operador adjunto de d , dándole cierto producto interno a $\Omega^k(M)$. Con dicho producto interno, $\Omega^k(M)$ no es un espacio de Hilbert, así que la existencia del operador adjunto d^* no es trivial. El operador estrella de Hodge $*$ nos permitirá construir la adjunta de muchos operadores de formas, entre ellos d^* .

Terminamos el capítulo 2 definiendo la cohomología de de-Rham entera $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$, que es un reticulado en $H_{\text{dR}}^k(M)$, la cohomología primitiva $H_o^k(M)$ y $H_o^{p,q}(M)$, que también satisfacen una descomposición como la de Hodge, la cohomología primitiva entera $H_o^k(M, \mathbb{Z})$, que es un reticulado en $H_o^k(M)$, y la polarización $Q : H_o^k(M) \times H_o^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$. La polarización es lo que marca la diferencia entre la cohomología de de-Rham y la cohomología primitiva. Ambas cohomologías están relacionadas por la descomposición de Lefschetz. La construcción de todas estas estructuras adicionales cobrará sentido en el capítulo 3.

Comenzamos el capítulo 3, titulado “Deformación de Variedades”, describiendo cómo un espacio fibrado modela la idea de deformar una variedad, y demostramos el teorema de Ehresmann que nos da condiciones suficientes para que una función $\pi : X \rightarrow S$ sea un espacio fibrado. Luego definiremos lo que es un sistema local, y describimos correspondencias biyectivas entre sistemas locales y otras categorías. Este concepto nos es de interés ya que, si $\pi : X \rightarrow S$ es un espacio fibrado (una familia de variedades difeomorfas X_t parametrizadas por $t \in S$), entonces el fibrado vectorial cuya fibra en t es $H_{\text{dR}}^k(X_t)$ es un sistema local, y similarmente $H_o^k(X_t)$. La principal característica que nos interesa de los sistemas locales, es que tienen un transporte paralelo: Toda curva $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ induce un isomorfismo $H_{\text{dR}}^k(X_{\sigma(0)}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_{\sigma(1)})$ que no depende de la clase de homotopía de σ relativa a sus extremos (similarmente con cohomología primitiva).

Antes de ponernos a describir el mapa de períodos, describimos el isomorfismo entre el espacio tangente de la Grassmaniana $T_S(\text{Grass}_k(V))$ y $\text{Hom}(S, V/S)$ (que es un isomorfismo de fibrados vectoriales). Esto nos será necesario para describir una de las propiedades del mapa de períodos, la llamada “Transversalidad de Griffiths”. Una vez hecho esto, comenzamos a describir el mapa de períodos y el mapa de períodos polarizado, que miden como varía la descomposición de Hodge y la descomposición de Hodge primitiva (respectivamente) al deformar una variedad compleja. En la cohomología primitiva tenemos un reticulado y una polarización, y el transporte paralelo preserva ambas estructuras. Como consecuencia, veremos que el codominio del mapa de períodos polarizado, llamado “dominio de períodos polarizado”, es un orbifold, a diferencia del codominio del mapa de períodos, que podría no ser siquiera un espacio Hausdorff. Finalizamos la tesis ejemplificando estos conceptos con la familia de Legendre.

- Notación: Las variedades siempre serán conexas y sin borde. Diferenciable = C^∞ .

Capítulo 1: Geometría Compleja

1.1 Álgebra Lineal Compleja

El objetivo de esta sección es mostrar la relación que existe entre la teoría de \mathbb{C} -espacios vectoriales y \mathbb{R} -espacios vectoriales. Entender esta relación es importante pues, como mencionamos en la introducción, gran parte de la interacción entre la geometría compleja y la geometría diferencial parte de la relación entre el álgebra lineal compleja y el álgebra lineal real.

Todo \mathbb{C} -espacio vectorial V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, simplemente restringiendo a \mathbb{R} la acción de \mathbb{C} sobre V . Esto nos permite relacionar conceptos de ambas estructuras, que es lo que haremos en la sección 1.1.1. Por ejemplo, si V y W son \mathbb{C} -espacios vectoriales, entonces toda función \mathbb{R} -lineal $f : V \rightarrow W$ se descompone de una única manera como $f = g + \bar{h}$, siendo g y h funciones \mathbb{C} -lineales (este hecho resultará fundamental en la sección 1.4.1). Si bien en \mathbb{C} -espacios vectoriales no tiene sentido hablar de orientación (pues $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ es conexo), veremos que, como \mathbb{R} -espacio vectorial, todo \mathbb{C} -espacio vectorial tiene una orientación natural. Concretamente, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base compleja, entonces $\{e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n\}$ es una base real bien orientada.

Dado un \mathbb{R} -espacio vectorial V , ¿Cómo puedo fabricar un \mathbb{C} -espacio vectorial? Las secciones 1.1.2 y 1.1.3 dan distintas respuestas a esta pregunta. En la primera de estas buscamos meter a V dentro de un \mathbb{C} -espacio vectorial $V^{\mathbb{C}}$, análogo a como \mathbb{R}^n está contenido en \mathbb{C}^n o como $\mathbb{R}^{n \times k}$ está contenido en $\mathbb{C}^{n \times k}$. Concretamente, $V^{\mathbb{C}}$ (la “complexificación de V ”) será el conjunto de sumas formales $v + i \cdot w$ con $v, w \in V$. En contraste, en la sección 1.1.3 no trataremos de meter a V dentro de un \mathbb{C} -espacio vectorial sino que trataremos de convertir al mismo V en un espacio vectorial complejo. Es decir, buscamos extender la acción $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ a una acción $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$. Veremos que las formas de hacer esto están en biyección con los endomorfismos lineales $J : V \rightarrow V$ tales que $J \circ J = -\text{Id}$, lo que llamamos “Estructuras Complejas”.

1.1.1 Morfismos \mathbb{R} -lineales y Orientación en Espacios Vectoriales Complejos

Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, podemos pensar a V como un \mathbb{R} -espacio vectorial si restringimos la acción $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ a los números reales. Denotamos $V_{\mathbb{R}}$ a dicho \mathbb{R} -espacio vectorial. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces $B_{\mathbb{R}} := \{v_1, \dots, v_n, i \cdot v_1, \dots, i \cdot v_n\}$ forma una base de $V_{\mathbb{R}}$ (es sencillo de probar) así que este último espacio tiene dimensión $2n$.

Si V y W son \mathbb{C} -espacios vectoriales, decimos que $f : V \rightarrow W$ es \mathbb{C} -anti-lineal si satisface

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- $f(k \cdot v) = \bar{k} \cdot f(v) \quad \forall v \in V \text{ y } \forall k \in \mathbb{C}$

Equivalentemente, si \bar{f} es \mathbb{C} -lineal. Denotamos $\text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, W)$ a este conjunto de funciones (observemos que es un \mathbb{C} -espacio vectorial). Afirmando que

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, W)$$

Es decir, para toda función \mathbb{R} -lineal $f : V \rightarrow W$ existen únicas funciones $h_1, h_2 : V \rightarrow W$, respectivamente \mathbb{C} -lineal y \mathbb{C} -antilineal, tales que $f = h_1 + h_2$.

➤ Demostración: Observemos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cap \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, W) = 0$$

Ya que si $f : V \rightarrow W$ es \mathbb{C} -lineal y \mathbb{C} -anti-lineal, sea $v \in V$, entonces

$$i \cdot f(v) = f(i \cdot v) = -i \cdot f(v) \Rightarrow 2i \cdot f(v) = 0 \Rightarrow f(v) = 0$$

De modo que $f = 0$. Si $f : V \rightarrow W$ es una función \mathbb{R} -lineal y denotamos

$$f^+(v) := f(v) - i \cdot f(i \cdot v) \quad ; \quad f^-(v) := f(v) + i \cdot f(i \cdot v)$$

Entonces claramente $f = f^+/2 + f^-/2$ y es fácil verificar que f^+ es \mathbb{C} -lineal mientras que f^- es \mathbb{C} -anti-lineal.

Sean V y W dos \mathbb{C} -espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente, tomemos B una base compleja en V y \tilde{B} una base compleja en W . Sean $B_{\mathbb{R}}$ y $\tilde{B}_{\mathbb{R}}$ sus bases reales inducidas, entonces la aplicación “tomar coordenadas” $|\cdot|_{B_{\mathbb{R}}, \tilde{B}_{\mathbb{R}}} : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}^{2m \times 2n}$ es un isomorfismo \mathbb{R} -lineal. Si $f : V \rightarrow W$ es \mathbb{R} -lineal, es fácil probar que

$$f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ tq } |f|_{B_{\mathbb{R}}, \tilde{B}_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$f \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, W) \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ tq } |f|_{B_{\mathbb{R}}, \tilde{B}_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

Consideremos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [13].

- Lema: Sea E/K una extensión finita de cuerpos, V es un E -espacio vectorial y sea $f : V \rightarrow V$ una función E -lineal, entonces

$$\det_K f = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(E/K)} \sigma(\det_E f)$$

En nuestro caso, tomando $E = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{R}$, vemos que si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial y si $f : V \rightarrow V$ es \mathbb{C} -lineal, entonces

$$\det_{\mathbb{R}} f = |\det_{\mathbb{C}} f|^2$$

En particular, si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vemos que

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + i \cdot B)|^2$$

Una consecuencia de esto es que todo \mathbb{C} -espacio vectorial tiene una orientación natural como \mathbb{R} -espacio vectorial. Concretamente, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ son bases complejas de un \mathbb{C} -espacio vectorial V , entonces las bases $\{e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n\}$ y $\{\tilde{e}_1, i \cdot \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, i \cdot \tilde{e}_n\}$ inducen la misma orientación sobre V como \mathbb{R} -espacio vectorial. Para verlo, basta con probar que $\{e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n\}$ y $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n, i \cdot \tilde{e}_1, \dots, i \cdot \tilde{e}_n\}$ inducen la misma orientación, y esto es cierto ya que la matriz de cambio de base tendrá precisamente la forma en bloques de la última identidad que exhibimos, con $A + i \cdot B$ la matriz de cambio de base entre $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$.

1.1.2 Complejización de un Espacio Vectorial Real

La contención de cuerpos $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ nos induce inclusiones $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^{m \times n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ que, en la práctica, resultan muy útiles. Por ejemplo, si tomamos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y su polinomio minimal no tiene raíces múltiples, sabemos que A es diagonalizable en \mathbb{C}^n . Similarmente, la inclusión $\mathbb{R}^{n \times n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ nos permite estudiar la forma normal de Jordan de una matriz real (lo cual sirve, por ejemplo, para hallar una fórmula para la n -ésima potencia de una matriz real).

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, definimos “La complejización de V ” como el conjunto de sumas formales $v + i \cdot w$ con $v, w \in V$. Denotamos a dicho conjunto $V^{\mathbb{C}}$. Observemos que tiene una clara estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial y tenemos una inclusión canónica $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ dada por $v \rightarrow v + i \cdot 0$. Si V tiene dimensión (real) n , entonces $V^{\mathbb{C}}$ tiene dimensión compleja n y la inclusión $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ hace las veces de la inclusión $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ en el siguiente sentido. Toda base B de V me induce un isomorfismo $V \cong \mathbb{R}^n$ y a su vez, vía la inclusión $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$, el conjunto B resulta una base compleja de $V^{\mathbb{C}}$, lo que nos induce un isomorfismo $V^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^n$. Vía estas identificaciones, la inclusión $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$ se corresponde con la inclusión $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Respecto a los morfismos lineales, tenemos los siguientes isomorfismos canónicos

- Si V, W son dos \mathbb{R} -espacios vectoriales, tenemos un isomorfismo canónico (y obvio) de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)^{\mathbb{C}} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}})$$

- Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial y W es un \mathbb{C} -espacio vectorial, tenemos un isomorfismo canónico de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W)$$

Que a cada función \mathbb{R} -lineal $f : V \rightarrow W$ la extiende \mathbb{C} -linealmente a $\tilde{f} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow W$ vía

$$\tilde{f}(v_1 + i \cdot v_2) := f(v_1) + i \cdot f(v_2)$$

Combinando ambos resultados, si V y W son \mathbb{R} -espacios vectoriales, tenemos un isomorfismo canónico de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)^{\mathbb{C}} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}})$$

Toda elección de base en V me induce isomorfismos $V \cong \mathbb{R}^n, V^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^n$ y, similarmente, toda elección de base en W me induce isomorfismos $W \cong \mathbb{R}^m, W^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^m$. Así identificamos

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \times n}; \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \cong \mathbb{C}^{m \times n}$$

Y la inclusión $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)^{\mathbb{C}} \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}})$ se corresponde con la inclusión $\mathbb{R}^{m \times n} \hookrightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$. Concretamente, la inclusión $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, W^{\mathbb{C}})$ me dice que todo morfismo \mathbb{R} -lineal $f : V \rightarrow W$ se extiende de manera única a un morfismo \mathbb{C} -lineal $\tilde{f} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow W^{\mathbb{C}}$ vía $\tilde{f}(v_1 + i \cdot v_2) := f(v_1) + i \cdot f(v_2)$. Esto lo usaremos muy frecuentemente.

- Comentario: En muchos textos se define $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Esta definición se corresponde con la que dimos acá vía el isomorfismo

$$v + i \cdot w \leftrightarrow (v \otimes 1) + (w \otimes i)$$

Una operación muy importante que tiene la complexificación de un \mathbb{R} -espacio vectorial, es la conjugación. Si $z = v + i \cdot w \in V^{\mathbb{C}}$, definimos $\bar{z} := v - i \cdot w \in V^{\mathbb{C}}$. Esta operación satisface las siguientes propiedades: Sean $z, z_1, z_2 \in V^{\mathbb{C}}$ y sea $k \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad ; \quad \overline{k \cdot z} = \bar{k} \cdot \bar{z} \quad ; \quad \overline{\bar{z}} = z \quad ; \quad \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in V \subseteq V^{\mathbb{C}}$$

Si uno tiene un \mathbb{C} -espacio vectorial W , resulta natural preguntarse por \mathbb{R} -subespacios $V \subseteq W$ tales que $W = V \oplus i \cdot V$. El conjunto de \mathbb{R} -subespacios con esta propiedad está en biyección con el conjunto de conjugaciones en W , esto es, el conjunto de funciones \mathbb{C} -anti-lineales $\sigma : W \rightarrow W$ tales que $\sigma \circ \sigma = \text{Id}$. Claramente todo \mathbb{R} -subespacio $V \subseteq W$ con la propiedad dicha, nos induce una conjugación en W . Recíprocamente, toda conjugación σ en W nos induce el \mathbb{R} -subespacio $\{v \in W : \sigma(v) = v\}$ que satisface la propiedad que queremos.

- Observación: Si V y W son \mathbb{C} -espacios vectoriales, entonces toda conjugación σ en W me induce un isomorfismo \mathbb{R} -lineal $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ vía componer a izquierda con σ . En particular, tomando $W = \mathbb{C}$ con la conjugación usual

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = \overline{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})}$$

- Observación: Sean V y W dos \mathbb{R} -espacios vectoriales y sea $f : V \rightarrow W$ una función lineal, si la extendemos a la complexificación $f : V^{\mathbb{C}} \rightarrow W^{\mathbb{C}}$, entonces $f(\bar{v}) = \overline{f(v)}$ para todo $v \in V^{\mathbb{C}}$.

1.1.3 Estructuras Complejas en Espacios Vectoriales Reales

Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n , habíamos visto que podemos ver a V como un \mathbb{R} -espacio vectorial $V_{\mathbb{R}}$ de dimensión $2n$ simplemente restringiendo la acción de \mathbb{C} a los números reales. Nos planteamos el problema inverso, sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$, ¿De qué maneras podemos extender la acción $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ a todos los números complejos para hacer de V un \mathbb{C} -espacio vectorial? Afirmando que hay una biyección entre los siguientes conjuntos

- Las acciones $\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ que hacen de V un \mathbb{C} -espacio vectorial extendiendo la acción de \mathbb{R} en V .
- Los endomorfismos \mathbb{R} -lineales $J : V \rightarrow V$ tales que $J \circ J = -\text{Id}$.
- Los subespacios complejos $S \subseteq V^{\mathbb{C}}$ que descomponen $V^{\mathbb{C}} = S \oplus \bar{S}$

A continuación, exhibimos las correspondencias biyectivas entre cada conjunto pero omitimos la verificación de que, efectivamente, son biyectivas. Por ejemplo, describimos cómo todo elemento de “a)” induce un elemento de “b)” y viceversa, pero omitimos verificar que la composición de ambas aplicaciones sea la identidad.

- Demostración: Para la correspondencia a) \Rightarrow b), definimos $J(v) := i \cdot v$ y para b) \Rightarrow a) definimos

$$(a + bi) \cdot v := a \cdot v + b \cdot J(v) \quad \forall v \in V \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Para la correspondencia b) \Rightarrow c), extendemos $\tilde{J} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ vía

$$\tilde{J}(v + i \cdot w) := J(v) + i \cdot J(w)$$

Esto es la inclusión $\text{End}_{\mathbb{R}}(V) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ que mencionamos anteriormente. Notar que $\tilde{J} \circ \tilde{J} = -\text{Id}$ así que el polinomio minimal de \tilde{J} es $X^2 + 1$. En particular, \tilde{J} es diagonalizable y sus autovalores son $\pm i$ así que tenemos una descomposición

$$V^{\mathbb{C}} = \{w \in V^{\mathbb{C}} : \tilde{J}(w) = i \cdot w\} \oplus \{w \in V^{\mathbb{C}} : \tilde{J}(w) = -i \cdot w\}$$

Como \tilde{J} conmuta con la conjugación, $\tilde{J}(w) = i \cdot w$ si y solo si $\tilde{J}(\bar{w}) = -i \cdot \bar{w}$ así que la conjugación nos da un isomorfismo \mathbb{R} -lineal entre ambos autoespacios (en particular, ambos espacios deben tener dimensión compleja n). Luego, si tomamos el subespacio

$$S := \{w \in V^{\mathbb{C}} : \tilde{J}(w) = i \cdot w\}$$

Obtenemos que $V^{\mathbb{C}} = S \oplus \bar{S}$.

Para la vuelta c) \Rightarrow b), viendo a $v \in V \subseteq V^{\mathbb{C}} = S \oplus \bar{S}$, para todo $v \in V$ existen $s_1, s_2 \in S$ tales que $v = s_1 + \bar{s}_2$. Conjugando

$$s_1 + \bar{s}_2 = v = \bar{v} = \bar{s}_1 + s_2 \Rightarrow \overline{s_1 - s_2} = s_1 - s_2 \Rightarrow s_1 - s_2 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2$$

Usamos que $s_1 - s_2 \in S \cap \bar{S} = 0$. Así que para todo $v \in V$ existe un único $s \in S$ tal que $v = s + \bar{s}$, denotamos $\pi(v) := s$. Ahora sí, definimos

$$J(v) := i \cdot (\pi(v) - \overline{\pi(v)}) = i \cdot (s - \bar{s})$$

Notar que $\overline{J(v)} = J(v)$ así que $J(v) \in V$ y $\pi(J(v)) = i \cdot \pi(v)$ así que

$$J(J(v)) := i \cdot (\pi(J(v)) - \overline{\pi(J(v))}) = -(\pi(v) + \overline{\pi(v)}) = -v$$

Es decir, $J \circ J = -\text{Id}$.

Llamamos “Estructura Compleja en V ” a un endomorfismo \mathbb{R} -lineal $J : V \rightarrow V$ que satisface $J \circ J = -\text{Id}$. Denotamos $\text{Cplx}(V)$ al conjunto de estructuras complejas sobre V . Notar que, si V tiene dimensión (real) impar, entonces $\text{Cplx}(V) = \emptyset$ ya que, si existiese una $J \in \text{Cplx}(V)$, entonces

$$\det(J)^2 = \det(J^2) = \det(-\text{Id}) = -1$$

Que es absurdo, pues $\det(J) \in \mathbb{R}$. Cabe destacar que la aplicación $f : V \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ definida por $f(v) := v - i \cdot J(v)$ nos da un isomorfismo \mathbb{C} -lineal entre V (con la estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial inducida por J) y el autoespacio $S = \{w \in V^{\mathbb{C}} : \tilde{J}(w) = i \cdot w\}$.

La Geometría del Espacio de Estructuras Complejas

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$, denotamos

$$\text{Cplx}(V) := \{J \in \text{End}(V) : J^2 = -\text{Id}\} \quad ; \quad U(V) := \{S \in \text{Grass}_n(V^{\mathbb{C}}) : S \cap \bar{S} = 0\}$$

Siendo $\text{Grass}_n(V^{\mathbb{C}})$ el conjunto de subespacios complejos de $V^{\mathbb{C}}$ de dimensión n (en la sección 1.2.4 veremos que es una variedad diferenciable y, más aún, una variedad

compleja). Observar que $S \in U(V)$ si y solo si $V^{\mathbb{C}} = S \oplus \bar{S}$. Como ya vimos, hay una biyección entre $\text{Cplx}(V)$ y $U(V)$. En [20] se prueba que

- $\text{Cplx}(V)$ es una subvariedad C^{∞} de $\text{End}(V)$.
- $U(V)$ es un abierto en $\text{Grass}_n(V^{\mathbb{C}})$.
- La aplicación $\vartheta : \text{Cplx}(V) \rightarrow U(V)$ que a cada estructura compleja $J \in \text{Cplx}(V)$ le asigna el autoespacio

$$\vartheta(J) := \{w \in V^{\mathbb{C}} : \tilde{J}(w) = i \cdot w\}$$

Es un difeomorfismo C^{∞} . En particular, $\text{Cplx}(V)$ tiene dimensión $2n^2$.

Un pequeño comentario respecto al espacio tangente en un punto de $\text{Cplx}(V)$. Consideremos la función $F : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ definida por $F(A) := A^2 + \text{Id}$. Entonces $\text{Cplx}(V) = F^{-1}(0)$, por definición. Una cuenta sencilla muestra que

$$dF_A(M) = A \cdot M + M \cdot A$$

Así que

$$T_J(\text{Cplx}(V)) = \text{Ker}(dF_J) = \{M \in \text{End}(V) : M \cdot J = -J \cdot M\} = \text{End}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, J)$$

Siendo $\text{End}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, J)$ el conjunto de endomorfismos \mathbb{C} -anti-lineales en V , interpretando a V como un \mathbb{C} -espacio vectorial con la estructura compleja J . Si bien aún no definimos “Estructura Cuasi-compleja” (lo haremos en la sección 1.3.2), no creo que haya mejor momento para mencionar este resultado del mismo paper [20]

- Proposición: Por cada $J \in \text{Cplx}(V)$, definimos $\mathfrak{S}_J : \text{End}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, J) \rightarrow \text{End}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, J)$ vía

$$\mathfrak{S}_J(A) := J \cdot A$$

La aplicación \mathfrak{S} define una estructura Cuasi-compleja sobre $\text{Cplx}(V)$ y la aplicación $\vartheta : \text{Cplx}(V) \rightarrow U(V)$, que habíamos definido antes, resulta un biholomorfismo (en particular, $\text{Cplx}(V)$ es una variedad compleja de dimensión n^2).

1.2 Variedades Complejas y Funciones Holomorfas

El Objetivo de esta sección es introducir las nociones básicas de la geometría compleja. Comenzamos definiendo qué es una función holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^n (sección 1.2.1), para luego poder definir qué es una “Variedad Compleja” y qué es una “Función holomorfa” entre variedades complejas (sección 1.2.2 y 1.2.3 respectivamente).

Durante toda esta sección, la filosofía de fondo siempre será: Hacer una mímica de la geometría diferencial, cambiando “ \mathbb{R} ” por “ \mathbb{C} ” y “diferenciable” por “holomorfo”. Demostramos que toda variedad compleja, vista como variedad diferenciable, es una variedad orientada. Veremos algunas propiedades en común entre la geometría compleja y la geometría diferencial (teorema del rango constante, teorema de valores regulares, etcétera) y también veremos sus diferencias, siendo la más importante de ellas el que no haya partición de la unidad en variedades complejas.

Finalmente, en la sección 1.2.4, estudiaremos en detalle tres ejemplos: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la Grassmaniana $\text{Grass}_k(V)$ y clasificaremos el conjunto de estructuras complejas sobre el toro (módulo biholomorfismos).

1.2.1 Funciones Holomorfas en \mathbb{C}^n

Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, decimos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ es holomorfa si cada una de sus coordenadas es holomorfa. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $F : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ una función C^∞ , entonces son equivalentes (ver [6])

- 1) Para todo punto $(a_1, \dots, a_n) \in U$ y para todo $k = 1, \dots, n$ la aplicación

$$z \rightarrow F(a_1, \dots, a_{k-1}, z, a_{k+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^m$$

Es holomorfa en un entorno abierto de $a_k \in \mathbb{C}$.

- 2) Sean $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ la parte real e imaginaria de F (respectivamente), entonces u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_i}{\partial y_k} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \forall (i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$$

Siendo $u_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ la i -ésima coordenada de u (análogamente v_i).

- 3) Para cada $p \in U$ la transformación \mathbb{R} -lineal $DF_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ resulta \mathbb{C} -lineal.

En cualquiera de estos casos, decimos que F es una función *holomorfa*. En dicho caso, si E es la base canónica de \mathbb{C}^n , \tilde{E} es la base canónica de \mathbb{C}^m y $F = (f_1, \dots, f_m)$, entonces

$$|DF_p|_{E, \tilde{E}} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial z_1(p) & \cdots & \partial f_1 / \partial z_n(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m / \partial z_1(p) & \cdots & \partial f_m / \partial z_n(p) \end{pmatrix}$$

Donde $\partial f / \partial z_k(p) = \partial u / \partial x_k(p) + i \cdot \partial v / \partial x_k(p)$ si $f = u + i \cdot v$ es holomorfa.

1.2.2 Variedades Complejas

Sea M una variedad topológica de dimensión $2n$, un atlas complejo en M es una familia de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ siendo $U_i \subseteq M$ abiertos (para todo $i \in I$) y $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ funciones continuas tales que

- i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
- ii) Las funciones $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ (con $i \in I$) definen un homeomorfismo con un abierto de \mathbb{C}^n .
- iii) Para cada $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el “cambio de coordenadas”

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Es una función holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^n .

Llamamos “Estructura Compleja en M ” a un atlas complejo maximal en M . Llamamos “Variedad Compleja” a una variedad topológica, Hausdorff, separable, equipada con una estructura compleja; y decimos que tiene “dimensión (compleja) n ” si las cartas caen en \mathbb{C}^n . Notar que, identificando $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$, toda variedad compleja de dimensión n es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Observemos también que la definición de “Estructura Compleja” es una mímica con la definición de “Estructura Diferenciable”, cambiando \mathbb{R}^n por \mathbb{C}^n y cambiando la palabra “diferenciable” por “holomorfa”. Siguiendo esta idea, definimos “Subvariedad Compleja”.

Si M es una variedad compleja de dimensión n y $X \subseteq M$, decimos que X es una subvariedad compleja de M si para todo $p \in X$ existe una carta (U, φ) en M , alrededor de p , tal que

$$\varphi(U \cap X) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \varphi(U) : z_1, \dots, z_k = 0\}$$

Siendo $k \in \{1, \dots, n\}$ independiente del p . En dicho caso, X claramente es una variedad compleja de dimensión $n - k$.

- Observación: Las variedades complejas son orientables. Más aún, la estructura compleja induce una orientación sobre la variedad.

Para verlo, observemos que un atlas complejo $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas coherente. Es decir, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y $p \in U_i \cap U_j$, entonces

$$\det_{\mathbb{R}} \left(D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right) = \left| \det_{\mathbb{C}} \left(D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right) \right|^2 > 0$$

Esto es porque $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es una función holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^n y, por lo tanto, $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}$ es \mathbb{C} -lineal (ver sección 1.1.1).

1.2.3 Funciones Holomorfas

Siguiendo con la mímica de las definiciones para variedades diferenciales, sean M y N dos variedades complejas, decimos que una función $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si para todo $p \in M$ existen cartas (U, φ) en M y (V, μ) en N tales que

- $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$
- La función $\mu \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mu(V)$ es holomorfa

Es estándar la demostración de que esta definición no depende de las cartas elegidas. Definimos el rango complejo de f en $p \in M$ como

$$\text{rg}_p(f) := \text{rg}_{\mathbb{C}}(D(\mu \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)})$$

Que, nuevamente, no depende de la elección de cartas. A continuación enuncio algunos teoremas de variedades complejas, análogos a teoremas de variedades diferenciales, que se pueden encontrar en [6].

- Proposición: Sean M y N variedades complejas, una función $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa para toda $g : N \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa.
- Teorema de la Función Inversa: Sean M y N variedades complejas de igual dimensión y sea $f : M \rightarrow N$ una función holomorfa tal que $df_p : T_p(M) \rightarrow T_p(N)$ es un isomorfismo (para algún $p \in M$), entonces existen abiertos $U \subseteq M, V \subseteq N$, con $p \in U$ y $f(p) \in V$, tales que $f : U \rightarrow V$ resulta un biholomorfismo.
- Teorema del Rango Constante: Sean M y N variedades complejas y $f : M \rightarrow N$ una función holomorfa de rango complejo constante k , entonces para todo $p \in M$ existen cartas (U, φ) en M y (V, μ) en N tales que
 - $p \in U$ y $f(p) \in V$
 - $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ y $\mu(f(p)) = (0, \dots, 0)$
 - $(\mu \circ f \circ \varphi^{-1})(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \varphi(U)$
- Teorema: Sean M y N variedades complejas, sea $f : M \rightarrow N$ una función holomorfa de rango complejo constante k y sea $X = f^{-1}(q) \subseteq M$ no vacío (con $q \in N$), entonces X es una subvariedad compleja de M de dimensión $\dim(M) - k$
- Corolario (Teorema de valores regulares): Sean M y N variedades complejas con $\dim M \geq \dim N$, sea $f : M \rightarrow N$ una función holomorfa y sea $q \in N$ un valor regular de f , esto significa que $X := f^{-1}(q) \neq \emptyset$ y que $df_p : T_p(M) \rightarrow T_q(N)$ es un epimorfismo para todo $p \in X$, entonces $X \subseteq M$ es una subvariedad compleja de dimensión $\dim M - \dim N$.

En contraste, no es cierto que para todo cubrimiento por abiertos exista una partición de la unidad, de funciones **holomorfas**, subordinada a dicho cubrimiento. Esto marca una gran diferencia entre la geometría diferencial y la geometría compleja. En esta última, no siempre es posible pegar cosas definidas localmente para fabricar un objeto global (en lugar de “cosas” y “objeto” debería decir “secciones”, ver sección 1.3.1).

Otras proposiciones que marcan una diferencia entre la geometría diferencial y la geometría compleja, son las siguientes.

- Proposición: Si M es una variedad compleja que es conexa y compacta, entonces $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y solo si es constante.
- Corolario: No existen subvariedades complejas de \mathbb{C}^n que sean compactas, excepto las de dimensión 0.

Esta última proposición hace imposible que exista un análogo complejo al “Teorema de Inmersión de Whitney” para variedades diferenciales. Tenemos, sin embargo, el Teorema de Inmersión de Kodaira que nos da condiciones necesarias y suficientes para que una variedad compleja compacta se pueda embeber en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (ver [17]).

Otras propiedades en común entre las variedades diferenciables y las complejas, son las referidas a revestimientos, las cuales nos serán útiles para clasificar las estructuras complejas sobre un toro. Recuerdo que si $\pi : X \rightarrow Y$ es un revestimiento entre espacios topológicos, una transformación Deck es un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ con $\pi \circ f = \pi$. Denotamos $\text{Deck}(\pi)$ al conjunto de transformaciones Deck. Forman un grupo que actúa sobre X por evaluación. La definición de “revestimiento holomorfo” debería ser clara. Las demostraciones de estos lemas son análogas al caso diferenciable.

- Lema 1: Sea $\pi : M \rightarrow N$ un revestimiento holomorfo entre variedades complejas, entonces toda transformación Deck es un biholomorfismo.
- Lema 2: Sea X un espacio topológico, N una variedad compleja y $\pi : X \rightarrow N$ un revestimiento, entonces existe una única estructura compleja sobre X que hace de π un revestimiento holomorfo.
- Lema 3: Sea M una variedad compleja, Y un espacio topológico y $\pi : M \rightarrow Y$ un revestimiento cuyas transformaciones Deck $M \rightarrow M$ son holomorfas, entonces existe una única estructura compleja sobre Y que hace de π un revestimiento holomorfo.
- Lema 4: Sea $\pi : M \rightarrow N$ un revestimiento holomorfo entre variedades complejas, si M es simplemente conexo, entonces $\pi : M/\text{Deck}(\pi) \rightarrow N$ es un biholomorfismo.

1.2.4 Ejemplos de Variedades Complejas

Todo espacio vectorial complejo V de dimensión finita es, trivialmente, una variedad compleja. En particular $GL(V)$ es una variedad compleja, por ser un abierto en el espacio vectorial complejo $\text{End}(V)$. A continuación, exhibo algunos ejemplos menos triviales de variedades complejas, y de gran importancia.

El Espacio Proyectivo

Definimos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$ siendo $v \sim w$ si y solo si existe un $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $w = k \cdot v$. Equivalentemente, podemos pensar a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ como el conjunto de subespacios de \mathbb{C}^{n+1} de dimensión 1. Si le damos a este espacio la topología cociente, afirmo que es una variedad compleja de dimensión n . Denotamos $(k_0 : \dots : k_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a la clase de equivalencia del vector $(k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Para cada $i = 0, 1, \dots, n$ defino

$$U_i := \{(k_0 : \dots : k_n) : k_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

Observar que está bien definido y es un abierto ya que, si $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ denota la proyección al cociente, entonces $\pi^{-1}(U_i) = \{(k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : k_i \neq 0\}$ es un abierto en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Definimos $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ vía

$$\varphi_i(k_0 : \dots : k_n) := \frac{1}{k_i} \cdot (k_0, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_n)$$

Observemos que φ_i está bien definida, y es continua ya que $\varphi_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es claramente continua. Además, es biyectiva con inversa dada por

$$\varphi_i^{-1}(k_1, \dots, k_n) = (k_1 : \dots : k_i : 1 : k_{i+1} : \dots : k_n)$$

Que es continua pues $\varphi_i^{-1} = \pi \circ f_i$ con $f_i(k_1, \dots, k_n) = (k_1, \dots, k_i, 1, k_{i+1}, \dots, k_n)$, es composición de continuas. Esto prueba que $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo para cada $i = 0, 1, \dots, n$. Notemos que $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^n : k_j \neq 0\}$ y el cambio de cartas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ está dado por (supongamos, sin pérdida de generalidad, $i < j$)

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{k_j} \cdot (k_1, \dots, k_i, 1, k_{i+1}, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_n)$$

Es claro que esto es una función holomorfa. Vimos entonces que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad compleja de dimensión n .

- Observación: A diferencia del caso real, el espacio proyectivo complejo es una variedad orientable (por ser variedad compleja).

La Grasmaniana

Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n y sea $k \in \{1, \dots, n\}$, definimos la Grasmaniana k de V como el conjunto de subespacios de V de dimensión k y lo denotamos $\text{Grass}_k(V)$. Por ahora no dijimos qué topología tiene este espacio.

Denotemos $\text{Ind}_k(V)$ al espacio de k -uplas $(v_1, \dots, v_k) \in V \times \dots \times V$ de vectores linealmente independientes. Observemos que $\text{Ind}_k(V) \subseteq V \times \dots \times V$ es un abierto, ya que es el complemento del conjunto

$$\{(v_1, \dots, v_k) \in V^k : \omega(v_1, \dots, v_k) = 0 \ \forall \omega \in A_k(V)\} = \bigcap_{\omega \in A_k(V)} \omega^{-1}(0)$$

Siendo $A_k(V)$ al conjunto de funciones \mathbb{C} -multilineales alternadas $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{C}$ en k variables. Como $\text{Ind}_k(V)$ es un abierto en un espacio vectorial complejo, es una variedad compleja. Nos interesa este espacio ya que, para definir una topología en la Grasmaniana, resulta clave la aplicación $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ definida por

$$\pi(v_1, \dots, v_k) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Nos gustaría que esta aplicación fuese un cociente topológico así que le damos a la Grassmaniana la única topología que logra este cometido. Es decir, $U \subseteq \text{Grass}_k(V)$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U) \subseteq \text{Ind}_k(V)$ es abierto. De esta manera, si definimos sobre $\text{Ind}_k(V)$ la relación de equivalencia

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (w_1, \dots, w_k) \Leftrightarrow \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$$

Obtenemos un homeomorfismo $\tilde{\pi} : \text{Ind}_k(V)/\sim \rightarrow \text{Grass}_k(V)$. Observemos que el grupo $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ actúa sobre $\text{Ind}_k(V)$ vía

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + \cdots + a_{1k} \cdot v_k \\ \vdots \\ a_{k1} \cdot v_1 + \cdots + a_{kk} \cdot v_k \end{pmatrix}$$

Esto mismo define una acción de $\mathbb{C}^{k \times k}$ en V^k . Nos interesa esta acción ya que

$$(v_1, \dots, v_k) \sim (w_1, \dots, w_k) \Leftrightarrow \exists M \in \text{GL}_k(\mathbb{C}) \text{ tq } M \cdot (v_1, \dots, v_k) = (w_1, \dots, w_k)$$

De hecho, la matriz M es única, es la matriz de cambio de base respecto al subespacio que generan. Tenemos entonces que $\text{Grass}_k(V) \cong \text{Ind}_k(V)/\text{GL}_k(\mathbb{C})$. Vía una elección de base en V , podemos identificar $\text{Ind}_k(V) \cong \{M \in \mathbb{C}^{n \times k} : \text{rg}(M) = k\}$ y, vía esta identificación, la acción de $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ pasa a ser el producto matricial a derecha.

Afirmo que $\text{Grass}_k(V)$ es compacto. Para verlo, dotemos a V con un producto interno hermitiano (ver sección 2.1.1) y consideremos el conjunto de k -uplas de vectores ortonormales (v_1, \dots, v_k) , que denotamos $\text{Ort}_k(V) \subseteq V^k$. Por la continuidad del producto interno, $\text{Ort}_k(V) \subseteq V^k$ es cerrado, y si a V^k le damos el producto interno hermitiano

$$\langle (v_1, \dots, v_k), (w_1, \dots, w_k) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle + \cdots + \langle v_k, w_k \rangle$$

Entonces $\text{Ort}_k(V) \subseteq V^k$ es acotado ya que, sea $(v_1, \dots, v_k) \in \text{Ort}_k(V)$

$$\|(v_1, \dots, v_k)\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_k\|^2 = 1 + \cdots + 1 = k$$

Luego, $\text{Ort}_k(V)$ es compacto, pues V tiene dimensión finita (y por lo tanto V^k). Como $\pi|_{\text{Ort}_k(V)} : \text{Ort}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ es sobreyectiva, pues todo subespacio de V tiene una base ortonormal (Gram-Schmidt), concluimos que $\text{Grass}_k(V)$ es compacto.

Hagamos ahora la elección de cartas. Por cada subespacio $T \subseteq V$ de dimensión $n - k$ definimos

$$U_T := \{S \in \text{Grass}_k(V) : S \oplus T = V\} = \{S \in \text{Grass}_k(V) : S \cap T = 0\}$$

Para ver que es abierto, sea $\omega \in A_n(V)$ una n -forma no trivial y $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ una base de T , observemos que

$$\pi^{-1}(U_T) = \{(v_1, \dots, v_k) \in \text{Ind}_k(V) : \omega(v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n) \neq 0\}$$

Y este conjunto es abierto ya que la aplicación $\omega(-, \dots, -, w_{k+1}, \dots, w_n) : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \mathbb{C}$ es continua. De hecho, si extendemos la base de T a una base de V , lo que nos permite identificar $\text{Ind}_k(V)$ con las matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$ de rango k , entonces

$$\pi^{-1}(U_T) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{n \times k} : \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times k} : \det(A_1) \neq 0 \right\}$$

Siendo $A_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$. Es claro que los $\{U_T\}_{T \in \text{Grass}_{n-k}(V)}$ cubren $\text{Grass}_k(V)$, pero existe una subcolección finita que sigue cubriendo el espacio. Concretamente, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V , sea $I = (i_1, \dots, i_{n-k})$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n$ y sea $T_I := \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}} \rangle$, entonces la colección de abiertos U_{T_I} indexada por I cubre la Grasmaniana.

Para tomar cartas, fijemos dos subespacios $S_0, T_0 \subseteq V$, de dimensión k y $n-k$ respectivamente, tales que $V = S_0 \oplus T_0$. Por cada $S \in U_{T_0}$, denotamos $\rho_S : V \rightarrow T_0$ a la proyección inducida por la descomposición $V = S \oplus T_0$. Definimos la carta $\varphi : U_{T_0} \rightarrow \text{Hom}(S_0, T_0)$ vía

$$\varphi(S) := \rho_S|_{S_0}$$

Notar que $\varphi(S_0) = 0$. Es fácil verificar que $\varphi^{-1} : \text{Hom}(S_0, T_0) \rightarrow U_{T_0}$ definida por

$$\varphi^{-1}(f) = \{v - f(v) : v \in S_0\}$$

Es la inversa de φ . Para ver que φ^{-1} es continua, tomemos una base (w_1, \dots, w_k) en S_0 y consideremos $h : \text{Hom}(S_0, T_0) \rightarrow \pi^{-1}(U_{T_0})$ definida por

$$h(f) := (w_1 - f(w_1), \dots, w_k - f(w_k))$$

Observemos que h es continua pues cada coordenada es una función constante restando una función lineal. Luego $\varphi^{-1} = \pi \circ h$ es continua.

Para ver que φ es continua, tomemos coordenadas. Fijemos (w_1, \dots, w_k) una base de S_0 y (w_{k+1}, \dots, w_n) una base de T_0 . Denotemos $B = (w_1, \dots, w_n)$, que es una base de V pues $V = S_0 \oplus T_0$. Esto nos permite identificar $\text{Hom}(S_0, T_0) \cong \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$ y $\text{Ind}_k(V) \cong \mathbb{C}_*^{n \times k}$, el conjunto de matrices $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$ de rango k .

Sea $S \in U_{T_0}$ y sea (v_1, \dots, v_k) una base de S , denotemos $B_S := (v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$, que es una base de V ya que $V = S \oplus T_0$. La matriz de cambio de base C_{B, B_S} tendrá la siguiente forma

$$C_{B, B_S} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ M & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

Con $* \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $M \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$. Identificando $\text{Hom}(S_0, T_0) \cong \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$, es fácil ver que $\varphi(S) = M$. Sea $A \in \pi^{-1}(U_{T_0})$ la matriz asociada a (v_1, \dots, v_k) (la base de S)

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_B & \cdots & [v_k]_B \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \text{ con } \det A_1 \neq 0$$

Siendo $A_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, entonces

$$C_{B_S, B} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

Así que, usando la fórmula para invertir matrices por bloques (ver [29])

$$C_{B, B_S} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ -A_2 \cdot A_1^{-1} & \text{Id} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi \left(\pi \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right) = -A_2 \cdot A_1^{-1}$$

Y como la inversa se calcula en términos de la matriz de cofactores y el determinante, concluimos que $\varphi \circ \pi : \pi^{-1}(U_{T_0}) \subseteq \mathbb{C}_*^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$ es, coeficiente a coeficiente, una función racional cuyo denominador no se anula en ningún punto del dominio. Esto demuestra que $\varphi \circ \pi$ es continua (de hecho holomorfa) y, por lo tanto, φ también lo es.

Por último, veamos que el cambio de coordenadas es holomorfo. Tomemos dos descomposiciones $V = S_0 \oplus T_0$ y $V = \tilde{S}_0 \oplus \tilde{T}_0$ con sus respectivas cartas $\varphi, \tilde{\varphi}$. Tomemos $B_1 = (w_1, \dots, w_k)$ una base en S_0 , $B_2 = (w_{k+1}, \dots, w_n)$ base en T_0 , $\tilde{B}_1 = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k)$ base en \tilde{S}_0 y $\tilde{B}_2 = (\tilde{w}_{k+1}, \dots, \tilde{w}_n)$ base en \tilde{T}_0 . Denotamos $B = (w_1, \dots, w_n)$ y $\tilde{B} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ que son bases en V . Para ver que el cambio de coordenadas es holomorfo, identificaremos $\text{Hom}(S_0, T_0) \cong \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ vía las bases B_1, B_2 y también $\text{Hom}(\tilde{S}_0, \tilde{T}_0) \cong \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ vía las bases \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 , de modo que el cambio de coordenadas será una función entre abiertos de $\mathbb{C}^{(n-k) \times k}$.

Sea $f \in \varphi(U_{\tilde{T}_0}) \subseteq \text{Hom}(S_0, T_0)$, entonces $(w_1 - f(w_1), \dots, w_k - f(w_k))$ es una base de $\varphi^{-1}(f) \in U_{\tilde{T}_0}$. Sea $B_f := (w_1 - f(w_1), \dots, w_k - f(w_k), \tilde{w}_{k+1}, \dots, \tilde{w}_n)$, que es una base de V , entonces la matriz de cambio de base $C_{\tilde{B}, B_f}$ tendrá la forma

$$C_{\tilde{B}, B_f} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ M & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

Con $* \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $M \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$. Habíamos visto que si identificábamos $\text{Hom}(\tilde{S}_0, \tilde{T}_0) \cong \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ vía las bases \tilde{B}_1 y \tilde{B}_2 , entonces $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(f)) = M$ así que nuestro objetivo es calcular M en términos de $M(f)_{B_1, B_2}$. Escribamos en bloques la matriz de cambio de base

$$C_{B, \tilde{B}} = (C_1 \quad C_2)$$

Con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times k}$ y $C_2 \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$. Se puede verificar que

$$C_{B_f, \tilde{B}} = \left(C_1 - C_2 \cdot M(f)_{B_1, B_2} \mid \begin{array}{c} 0 \\ \text{Id}_{n-k} \end{array} \right)$$

Y tomando la inversa de esta matriz, logramos hallar la matriz M que buscábamos. Identificando $\text{Hom}(S_0, T_0) \cong \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ con las bases B_1, B_2 vemos que $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ viene dado por

$$\left((C_1 - C_2 \cdot A) \quad \begin{array}{c} 0 \\ \text{Id}_{n-k} \end{array} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ M & \text{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \Rightarrow (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(A) = M$$

Si escribimos la matriz $C_{B, \tilde{B}}$ en bloques de la siguiente forma

$$C_{B, \tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_3 & \tilde{C}_4 \end{pmatrix}$$

Con $\tilde{C}_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $\tilde{C}_2 \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$, $\tilde{C}_3 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, $\tilde{C}_4 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, usando la fórmula para invertir matrices en bloques nos queda

$$(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(A) = (C_4 \cdot A - C_3) \cdot (C_1 - C_2 \cdot A)^{-1}$$

La matriz en cuestión es inversible porque $A \in \varphi(U_{\tilde{T}_0})$. Luego, $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es una función racional coordenada a coordenada, y cuyo denominador no se anula en su dominio. Esto demuestra que el cambio de coordenadas es holomorfo.

- Conclusión: Si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n , entonces $\text{Grass}_k(V)$ es una variedad compleja compacta de dimensión $(n - k) \cdot k$.

Un ejemplo similar de variedad compleja es la variedad de banderas $\text{Flag}_{b_1, \dots, b_k}(V)$, el conjunto de subespacios $(F_1, \dots, F_k) \in \text{Grass}_{b_1}(V) \times \dots \times \text{Grass}_{b_k}(V)$ con $F_1 \subseteq \dots \subseteq F_k$ (ver [1])

Estructuras Complejas sobre el Toro

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} , consideremos

$$L(z_1, z_2) := \{k_1 \cdot z_1 + k_2 \cdot z_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

Esto es lo que llamamos un "Reticulado". Notar que $L(z_1, z_2)$ es un grupo con la suma, y actúa sobre \mathbb{C} sumando. Observemos también que $L(z_1, z_2) \cong \mathbb{Z}^2$ y que $T(z_1, z_2) := \mathbb{C}/L(z_1, z_2)$ es homeomorfo al toro. La proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T(z_1, z_2)$ es un revestimiento, y el grupo de transformaciones deck está generado por $p(z) = z + z_1$ y $q(z) = z + z_2$, que son funciones holomorfas. Luego, $T(z_1, z_2)$ hereda una estructura compleja de \mathbb{C} . Veamos que toda estructura compleja sobre el toro es biholomorfa a una de esta forma.

En general, si T es el toro (pensado como espacio topológico) y $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ es su revestimiento universal, sea $0 := \pi(0)$, entonces $\pi^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un reticulado. Sean $v_1, v_2 \in \pi^{-1}(0)$ generadores de dicho reticulado, entonces $p(v) = v + v_1$ y $q(v) = v + v_2$ son generadores del grupo de transformaciones Deck. Si equipamos al toro con una estructura compleja, entonces existe una única estructura compleja sobre \mathbb{R}^2 que hace de $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ un revestimiento holomorfo. En particular, las transformaciones Deck $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son holomorfas con dicha estructura compleja. El teorema de uniformización de Riemann dice que, módulo biholomorfismos, existen solamente tres variedades complejas simplemente conexas de dimensión 1: El plano complejo \mathbb{C} , el disco unitario $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ y la esfera de Riemann $S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. El espacio \mathbb{R}^2 , con la estructura compleja que le dimos, no puede ser biholomorfo a S^2 , porque no es compacto, y tampoco es biholomorfo al disco D_1 , pues las transformaciones Deck p, q no serían holomorfas. Luego \mathbb{R}^2 es biholomorfo a \mathbb{C} , así que tenemos un revestimiento holomorfo $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T$, que me induce un biholomorfismo $\pi : \mathbb{C}/\text{Deck}(\pi) \rightarrow T$ siendo $\text{Deck}(\pi)$ generado por $p(z) = z + z_1$ y $q(z) = z + z_2$ para ciertos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. La acción de $\text{Deck}(\pi)$ sobre \mathbb{C} coincide con la acción de $L(z_1, z_2)$ sobre \mathbb{C} así que tenemos un biholomorfismo $\pi : T(z_1, z_2) = \mathbb{C}/L(z_1, z_2) \rightarrow T$.

Vimos que toda estructura compleja en el toro es biholomorfa a $T(z_1, z_2)$ para ciertos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Ahora queda por ver cuándo $T(z_1, z_2)$ es biholomorfo a $T(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$. Para ello, usamos el siguiente lema fácil de verificar

- Lema: Sean $L, \tilde{L} \subseteq \mathbb{C}$ reticulados y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \cdot L = \tilde{L}$, entonces la función $f : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C}/\tilde{L}$ definida por $f([z]) := [z_0 \cdot z]$ es un biholomorfismo.

A partir de esto vemos que

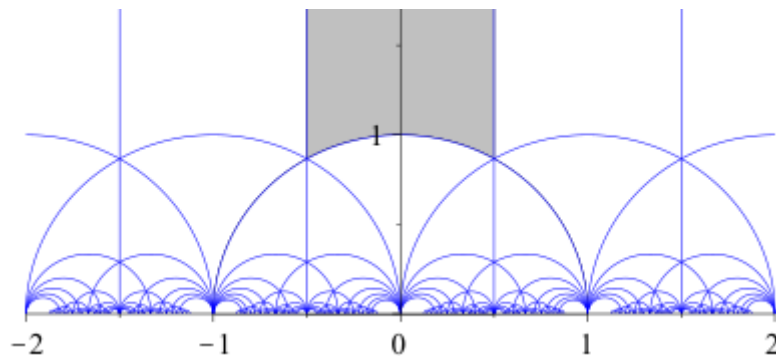
- i) $T(z_1, z_2)$ es biholomorfo a $T(1, z_2/z_1)$
- ii) $T(1, \tau)$ es biholomorfo a $T(1, \tau^{-1})$

Para el primer ítem, observemos que $z_2/z_1 \notin \mathbb{R}$ pues $\{z_1, z_2\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} , así que $\{1, z_2/z_1\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} . Notar que $z_1 \cdot \{1, z_2/z_1\} = \{z_1, z_2\}$ así que induce un biholomorfismo $T(1, z_2/z_1) \rightarrow T(z_1, z_2)$. Para el segundo ítem notar que $\tau \cdot \{1, \tau^{-1}\} = \{1, \tau\}$ así que induce un biholomorfismo $T(1, \tau^{-1}) \rightarrow T(1, \tau)$.

En síntesis, sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior, para todo subconjunto $\{z_1, z_2\} \subseteq \mathbb{C}$ linealmente independiente sobre \mathbb{R} existe un $\tau \in \mathbb{H}$ tal que $T(z_1, z_2)$ es biholomorfo a $T(1, \tau)$. Denotemos $T_\tau := T(1, \tau)$ con $\tau \in \mathbb{H}$. En **[18]** (Teorema 1.1) se demuestra que T_τ es biholomorfo a $T_{\tilde{\tau}}$ si y solo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $ad - bc = 1$ tales que

$$\tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Podemos pensar esto como una acción del grupo $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm \text{Id}\}$ sobre \mathbb{H} . Luego, el espacio moduli de estructuras complejas sobre el toro módulo biholomorfismos, está parametrizado por $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. La siguiente imagen muestra sombreado un dominio fundamental de este cociente (evidenciando que se trata de un “espacio complejo” de dimensión 1).



De hecho, cada “triángulo” que se forma con las líneas azules es un dominio fundamental. Más en general, se sabe que el espacio moduli de estructuras complejas sobre un toro de g manijas, para $g > 1$, tiene dimensión $3g - 3$ (ver **[18]**).

Como comentario, una curva elíptica suave es la clausura en el espacio proyectivo de un conjunto de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = p(x)\}$ con $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado 3 y sin raíces múltiples, donde $\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vía $(x, y) \rightarrow (x : y : 1)$. Toda curva elíptica suave es una variedad compleja difeomorfa a un toro, y por lo tanto biholomorfa a T_τ para algún $\tau \in \mathbb{H}$. Recíprocamente, todo toro complejo T_t es biholomorfo a una curva elíptica suave vía la función de Weierstrass. Una demostración de esto se puede encontrar en [28]. En el “Capítulo 3” de esta tesis, estudiaremos la familia de Legendre, que es una familia de curvas elípticas $\{y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - t)\}$, con $t \in \mathbb{C} - \{0; 1\}$.

1.3 El Espacio Tangente de una Variedad Compleja

Sea M una variedad compleja de dimensión n y sea $p \in M$, nos gustaría que el espacio tangente de M en p sea un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n . Hay varias maneras de lograr esto. Una de ellas, la que desarrollaremos en la sección 1.3.2, es tomar el espacio tangente $T_p(M)$, viendo a M como una variedad diferencial (de dimensión real $2n$), y ver que toda carta compleja (U, φ) alrededor de p me induce una estructura compleja J_p sobre $T_p(M)$ (como definimos en la sección 1.1.3.). Veremos que dicha estructura compleja no depende de la carta elegida, obteniendo así una estructura natural de \mathbb{C} -espacio vectorial sobre $T_p(M)$ de dimensión n , como queríamos.

- Comentario: En vista de las definiciones hechas hasta el momento, “Estructura Compleja” puede significar dos cosas distintas dependiendo del contexto. Una estructura compleja sobre un \mathbb{R} -espacio vectorial es un endomorfismo que compuesto consigo mismo da el opuesto de la identidad. Una estructura compleja sobre una variedad M es un atlas complejo maximal. Dependiendo del contexto, se debe interpretar cual definición aplica.

Más en general, dada una variedad diferencial M de dimensión $2n$ (no necesariamente una variedad compleja), podríamos tratar de asignar, por cada $p \in M$, una estructura compleja J_p sobre $T_p(M)$, convirtiendo a este en un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n . Esta asignación es lo que llamamos una “Estructura Cuasi-compleja”, concepto que desarrollaremos en la sección 1.3.3. Allí enunciaremos el teorema de Newlander-Nirenberg, que me da condiciones necesarias y suficientes para que una estructura cuasi-compleja en M venga inducida por una estructura de variedad compleja sobre M .

Es importante saber que existen otras formas de definir el espacio tangente en p de una variedad compleja M (las cuales no desarrollaremos en profundidad). Una de ellas es hacer una *mímica* con la definición para variedades diferenciales, en donde definiríamos el espacio tangente en $p \in M$ como el espacio de derivaciones $X_p : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Definiríamos entonces, el espacio tangente complejo de M en p , como el conjunto de funciones \mathbb{C} -lineales $X_p : H_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen la regla de Leibniz, siendo $H_p(M)$ los gérmenes de funciones holomorfas $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ alrededor de p . Otra definición posible de espacio tangente complejo, que desarrollaremos brevemente en la sección 1.4.3, es definirlo como un \mathbb{C} -subespacio de $T_p(M)^\mathbb{C}$ generado por ciertos vectores $\partial/\partial z_1|_p, \dots, \partial/\partial z_n|_p$ (donde $T_p(M)$ es el espacio tangente de M visto como variedad diferencial). La ventaja de la definición original por sobre estas dos definiciones, es que permite una relación directa entre los conceptos de geometría diferencial y geometría compleja. Por ejemplo, veremos que una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ es \mathbb{C} -lineal para todo p , enunciado que no tendría sentido con las otras dos definiciones.

Antes de ponernos a hablar del espacio tangente complejo, comenzaremos esta sección dando una breve introducción a los “Fibrados Vectoriales Complejos y Holomorfos” (sección 1.3.1). Este concepto es importante pues cada una de las definiciones de espacio tangente complejo induce un fibrado vectorial holomorfo $T(M)$, el fibrado

tangente. Decimos que las tres definiciones son equivalentes porque inducen fibrados vectoriales naturalmente isomorfos. Con “naturalmente isomorfos” nos referimos a lo siguiente: Con cada definición de espacio tangente complejo hay una manera de definir “el diferencial de una función holomorfa” convirtiendo a la aplicación $M \rightarrow T(M)$ en un funtor de la categoría de variedades complejas en la categoría de fibrados vectoriales holomorfos. Con “fibrados vectoriales naturalmente isomorfos”, nos referimos a que dichos funtores son naturalmente isomorfos.

1.3.1 Fibrados Vectoriales Complejos y Holomorfos

En esta sección haremos una breve descripción de los conceptos básicos de fibrados vectoriales que usaremos más adelante. Una descripción más completa se puede encontrar en [19] o en [32].

Fibrados Vectoriales Complejos

La definición de “fibrado vectorial complejo” es análoga a la de “fibrado vectorial real”, pero cambiando “ \mathbb{R} ” por “ \mathbb{C} ” y manteniendo el término “diferenciable”. Concretamente, un fibrado vectorial complejo de rango n sobre una variedad diferenciable B , es una familia de \mathbb{C} -espacios vectoriales $\{E_b\}_{b \in B}$, de dimensión n , con una estructura de variedad diferenciable sobre $E = \coprod_{b \in B} E_b$ tal que

- La proyección $\pi : E \rightarrow B$ definida por $\pi(x) = b$ si $x \in E_b$, es C^∞
- Para todo $b_0 \in B$ existe un entorno abierto $U \subseteq B$ de b_0 y un difeomorfismo (llamado “trivialización”) $\varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que
 - i) $\pi \circ \varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$ es la proyección sobre la primer coordenada
 - ii) Para cada $b \in B$ la aplicación $v \in \mathbb{C}^n \rightarrow \varphi(b, v) \in E_b$ es \mathbb{C} -lineal

Equivalentemente, podemos pensar que un fibrado vectorial complejo consiste en dos variedades diferenciales E, B , una función diferenciable $\pi : E \rightarrow B$ y, para cada $b \in B$, una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial sobre $\pi^{-1}(b)$ de modo tal que existan trivializaciones, en el mismo sentido que antes.

Si (U, φ) y (V, μ) son dos trivializaciones de un fibrado vectorial complejo $\pi : E \rightarrow B$, con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\mu^{-1} \circ \varphi : (U \cap V) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{C}^n$ es de la forma

$$(\mu^{-1} \circ \varphi)(b, v) = (b, C(b) \cdot v)$$

Para cierta $C : U \cap V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, llamada “matriz de transición”. La primera coordenada da b porque $\varphi(b, v) \in E_b$ y $\mu^{-1}(E_b) = \{b\} \times \mathbb{C}^n$. Denotamos $\varphi_b := \varphi(b, -) : \mathbb{C}^n \rightarrow E_b$ (y similarmente μ_b). La segunda coordenada es $(\mu_b^{-1} \circ \varphi_b)(v)$ y como φ_b y μ_b son isomorfismos lineales, existe una tal matriz inversible $C(b)$. De hecho, dar un fibrado vectorial complejo sobre B es equivalente a dar un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de B y una familia de funciones $\{C_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ diferenciables tales que (ver [32])

- i) $C_{i,i} \equiv \text{Id}_n \quad \forall i$
- ii) $C_{ij} \cdot C_{ji} \equiv \text{Id}_n \quad \forall i, j$
- iii) $C_{ij} \cdot C_{jk} \cdot C_{ki} \equiv \text{Id}_n \quad \forall i, j, k$

En la práctica, en general, se tiene una asignación $b \in B \rightarrow E_b$ con E_b un \mathbb{C} -espacio vectorial, pero no es trivial cómo darle una topología ni estructura diferenciable al conjunto $E = \coprod_{b \in B} E_b$. El siguiente lema (ver [19], Lema 10.6) nos dice que basta con dar un cubrimiento de B por trivializaciones cuyas matrices de transición sean diferenciables.

- Lema (para construir fibrados vectoriales): Sea B una variedad suave y sea E_b , para cada $b \in B$, un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n ; sea $E = \coprod_{b \in B} E_b$ y sea $\pi : E \rightarrow B$ la proyección, supongamos que tenemos los siguientes datos.

- i) Un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de B .
- ii) Para cada $i \in I$, una biyección $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$ es la proyección en la primera coordenada y tal que, para cada $b \in U_i$, la aplicación $v \in \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(b, v) \in E_b$ es \mathbb{C} -lineal.
- iii) Por las propiedades anteriores, para cada $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existe $C_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ tal que

$$(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(b, v) = (b, C_{ij}(b) \cdot v)$$

Supongamos que C_{ij} es diferenciable

Entonces E tiene una única topología y estructura diferenciable que hace de $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial complejo con trivializaciones $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

Complexificación de un Fibrado Vectorial Real

Si el ejemplo básico de fibrado vectorial real era el fibrado tangente $T(M)$, el ejemplo básico de fibrado vectorial complejo es la complexificación del fibrado tangente $T(M)^\mathbb{C}$. Más en general, si $\pi : E \rightarrow B$ es un fibrado vectorial real, podemos complexificarlo de la siguiente manera. Sea $E^\mathbb{C} := \coprod_{b \in B} E_b^\mathbb{C}$ y $\tilde{\pi} : E^\mathbb{C} \rightarrow B$ la proyección, si tomamos una trivialización $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ del fibrado real, definimos $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ vía

$$\tilde{\varphi}(b, v + iw) := \varphi(b, v) + i \cdot \varphi(b, w) \quad \forall b \in U \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Es decir, $\tilde{\varphi}(b, -) : \mathbb{C}^n \rightarrow E_b^\mathbb{C}$ es la extensión \mathbb{C} -lineal de $\varphi(b, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow E_b$. Es claro que $\tilde{\varphi}$ es biyectiva, $\tilde{\pi} \circ \tilde{\varphi}$ es la proyección en la primera coordenada y $\tilde{\varphi}(b, -)$ es \mathbb{C} -lineal. Si μ es otra trivialización, la matriz de transición de $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\mu}$ es la misma que la de φ a μ . En particular, las matrices de transición de $E^\mathbb{C}$ son C^∞ , así que el Lema anterior nos dice que hay una única topología y estructura diferenciable sobre $E^\mathbb{C}$ que hace de $\tilde{\pi} : E^\mathbb{C} \rightarrow B$ un fibrado vectorial complejo con trivializaciones $(U, \tilde{\varphi})$. De hecho, tomando parte real e imaginaria, $E^\mathbb{C}$ se identifica con una subvariedad de $E \times E$

$$E^\mathbb{C} \equiv \{(x, y) \in E \times E : \pi(x) = \pi(y)\}$$

Notar que todo fibrado vectorial complejo es un fibrado vectorial real, identificando \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} y viendo a E_b como un \mathbb{R} -espacio vectorial (restringiendo la acción). Así como las maneras de convertir un \mathbb{R} -espacio vectorial V de dimensión $2n$ en un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n están en biyección con los endomorfismos reales $J \in \text{End}(V)$ tales que $J \circ J = -\text{Id}_V$; las maneras de convertir un fibrado vectorial real $\pi : E \rightarrow B$ de

rango $2n$, en uno complejo de rango n , están en biyección con las secciones $J : B \rightarrow \underline{\text{End}}(E)$ tales que $J_b \circ J_b = -\text{Id}_{E_b}$ para todo $b \in B$ (ver más abajo la definición de “sección” y la estructura del fibrado vectorial $\underline{\text{End}}(E)$). Si E es el fibrado tangente de una variedad diferenciable, estas secciones $J : M \rightarrow \underline{\text{End}}(T(M))$ son lo que llamaremos “Estructuras Cuasi-complejas”.

Fibrados Vectoriales Holomorfos

La definición de “fibrado tangente holomorfo” es igual a la de “fibrado tangente complejo” pero cambiando el término “diferenciable” por “holomorfo”. Es decir, pedimos que E y B sean variedades complejas, que $\pi : E \rightarrow B$ sea holomorfa y que las trivializaciones $\varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ sean biholomorfismos. De esta manera, la matriz de transición entre dos trivializaciones $C : U \cap V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ será una función holomorfa. De hecho, si en el lema que usamos para construir fibrados vectoriales complejos, pedimos que B sea una variedad compleja y que las matrices de transición $C_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ sean holomorfas, entonces $E = \coprod_{b \in B} E_b$ tiene una única estructura compleja que hace de $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial holomorfo. Más adelante veremos que el fibrado tangente $T(M)$ de una variedad compleja es un fibrado vectorial holomorfo.

Secciones y Marcos

Si $\pi : E \rightarrow B$ es un fibrado vectorial real/complejo, una sección es una función diferenciable $\sigma : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_B$, esto es, $\sigma(b) \in E_b$ para todo $b \in B$. Si $U \subseteq B$ es abierto, al conjunto de secciones de $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ lo denotamos $\Gamma(U, E)$. En el caso del fibrado tangente, las secciones son precisamente los campos vectoriales. Si estamos trabajando con un fibrado vectorial holomorfo, al conjunto de secciones holomorfas en U lo denotamos $\mathcal{O}(U, E)$. Notar que $\Gamma(U, E)$ es un $C^\infty(U)$ -módulo si el fibrado vectorial es real, un $C^\infty(U)^\mathbb{C}$ -módulo si es complejo, y si es un fibrado vectorial holomorfo, $\mathcal{O}(U, E)$ es un $H(U)$ -módulo, siendo $H(U)$ las funciones holomorfas $U \rightarrow \mathbb{C}$. Una vez veamos que el fibrado tangente de una variedad compleja es un fibrado vectorial holomorfo, tendrá sentido llamar “campos holomorfos” a las secciones holomorfas de dicho fibrado vectorial.

En fibrados vectoriales reales/complejos/holomorfos de rango n , un marco local es un conjunto de secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ en un abierto $U \subseteq B$, tales que $\{\sigma_1(b), \dots, \sigma_n(b)\}$ es una base de E_b para todo $b \in U$. Una trivialización $\varphi : U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} según corresponda) me induce un marco local vía $\sigma_i = \varphi(-, e_i)$, siendo $e_i \in \mathbb{K}^n$ el i -ésimo vector canónico. En el caso del fibrado tangente, si tomamos la trivialización inducida por una carta φ , entonces $\sigma_i = \partial/\partial\varphi_i$. Recíprocamente, todo marco local $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ me induce una trivialización vía

$$\varphi(b, (a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdot \sigma_1(b) + \dots + a_n \cdot \sigma_n(b)$$

Así que dar una trivialización es equivalente a dar un marco local. Más aún, si C es la matriz de transición entre dos trivializaciones, entonces es la matriz de cambio de base entre sus marcos inducidos.

Sub-fibrado

Sea $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial de rango n y sea $k \leq n$, llamamos “sub-fibrado vectorial de rango k ” a una subvariedad $\tilde{E} \subseteq E$ tal que $\tilde{E}_b := \tilde{E} \cap E_b$ es un subespacio de E_b de dimensión k para todo $b \in B$, y tal que $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow B$ es un fibrado vectorial. Uno podría argumentar que esta definición tiene un problema, no pedimos ninguna relación entre las trivializaciones de $\pi : E \rightarrow B$ y las de $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow B$ (como sí hacíamos para definir “subvariedad”). Uno podría pedir en la definición que para todo $b \in B$ exista una trivialización $\varphi : U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ en E , alrededor de b , y un subespacio $S \subseteq \mathbb{K}^n$ de dimensión k tal que $\varphi|_{U \times S} : U \times S \rightarrow \pi^{-1}(U) \cap \tilde{E}$ sea un difeomorfismo (y, en particular, una trivialización de $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow B$). Afortunadamente, de la definición original, se puede deducir que existen trivializaciones de estas características.

Sea $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial de rango n y sea $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow B$ un sub-fibrado de rango k , entonces toda trivialización $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{K}^k \rightarrow \pi^{-1}(U) \cap \tilde{E}$ del sub-fibrado, me induce un marco local $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ en U , siendo $\sigma_i = \tilde{\varphi}(-, e_i)$ con $e_i \in \mathbb{K}^k$ el i -ésimo vector canónico. Notar que estas también son secciones de $\pi : E \rightarrow B$. En **[19]** (Proposición 10.15) se demuestra que para todo $b \in U$ existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de b y secciones $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n : V \rightarrow E$ tales que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ es un marco en E . Esto me induce una trivialización $\varphi : U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ vía

$$\varphi(b, (a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdot \sigma_1(b) + \dots + a_n \cdot \sigma_n(b)$$

Si tomamos $S = \mathbb{K}^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq \mathbb{K}^n$, entonces $\varphi|_{U \times S} = \tilde{\varphi}$ así que efectivamente tenemos trivializaciones del fibrado $\pi : E \rightarrow B$ que se restringen a trivializaciones del sub-fibrado.

Morfismos de Fibrados Vectoriales

Dados dos fibrados vectoriales reales/complejos $\pi : E \rightarrow B$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$, decimos que una función diferenciable $f : E \rightarrow \tilde{E}$ es un morfismo entre ambos fibrados si existe una función $g : B \rightarrow \tilde{B}$ tal que $\tilde{\pi} \circ f = g \circ \pi$ (de existir una tal g , es única y diferenciable) y si $f : E_b \rightarrow \tilde{E}_{g(b)}$ es lineal. Si $B = \tilde{B}$, entonces exigimos que $g = \text{Id}_B$ para llamar a f “morfismo”, de modo que $\tilde{\pi} \circ f = \pi$ y $f : E_b \rightarrow \tilde{E}_b$. Si E y \tilde{E} son fibrados holomorfos, pedimos que f sea holomorfa. De esta manera, los fibrados vectoriales reales/complejos/holomorfos forman una categoría. Decimos que un fibrado $\pi : E \rightarrow B$ es trivial si es isomorfo al fibrado $\pi : B \times V \rightarrow B$, equivalentemente, si existe un marco global.

Sea E y \tilde{E} fibrados vectoriales de misma base B y sea $U \subseteq B$ un abierto, entonces todo morfismo $f : E \rightarrow \tilde{E}$ entre ambos fibrados me induce un morfismo $C^\infty(M)/C^\infty(M)^{\mathbb{C}}/H(M)$ -lineal (según corresponda) $f : \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(U, \tilde{E})$ (o $f : \mathcal{O}(U, E) \rightarrow \mathcal{O}(U, \tilde{E})$) vía $f(\sigma)(b) := f(\sigma(b))$. De hecho, todo morfismo de módulos entre estos espacios viene inducido por un morfismo entre los fibrados vectoriales (ver **[19]**, lema 10.29)

El Hom Interno

Dados dos fibrados vectoriales sobre una misma base $\pi : E \rightarrow B$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow B$, definimos el “Hom interno” $\underline{\text{Hom}}(E, \tilde{E}) := \coprod_{b \in B} \text{Hom}(E_b, \tilde{E}_b)$ y $\rho : \underline{\text{Hom}}(E, \tilde{E}) \rightarrow B$ la proyección. Sean φ y $\tilde{\varphi}$ trivializaciones de E y \tilde{E} respectivamente, sobre un mismo abierto $U \subseteq B$, definimos $\mu : U \times \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \rho^{-1}(U)$ vía

$$\mu(b, A) := \tilde{\varphi}_b \circ A \circ \varphi_b^{-1} : E_b \rightarrow \tilde{E}_b$$

Donde $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es la función $v \rightarrow A \cdot v$. Recíprocamente, si $f \in \text{Hom}(E_b, \tilde{E}_b)$ con $b \in U$ (esto es, $f \in \rho^{-1}(U)$), entonces $\mu^{-1}(f) = (b, A)$ siendo A la matriz asociada a la transformación lineal $\tilde{\varphi}_b^{-1} \circ f \circ \varphi_b : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Es claro que ρ o μ es la proyección en la primera coordenada y que $A \in \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mu(b, A) \in \text{Hom}(E_b, \tilde{E}_b)$ es lineal. Si ϑ y $\tilde{\vartheta}$ son otras trivializaciones de E y \tilde{E} respectivamente, sea $\mu' : V \times \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \rho^{-1}(V)$ la trivialización inducida, sea C la matriz de transición de φ a ϑ y sea \tilde{C} la matriz de transición de $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\vartheta}$, entonces la función de transición de μ a μ' en $b \in U \cap V$ es

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \tilde{C}(b) \cdot A \cdot C(b)^{-1} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

Como C y \tilde{C} son diferenciables/holomorfas, la función de transición también lo es. Luego, por el lema para construir fibrados, $\rho : \underline{\text{Hom}}(E, \tilde{E}) \rightarrow B$ es un fibrado vectorial. Denotamos $\underline{\text{End}}(E) := \underline{\text{Hom}}(E, E)$.

Otras Construcciones

Hay diversos fibrados vectoriales que se pueden construir a partir de uno o dos fibrados vectoriales, digamos $\pi : E \rightarrow B$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow B$. Previamente describimos $E^{\mathbb{C}}$ y $\underline{\text{Hom}}(E, \tilde{E})$. A continuación damos algunos ejemplos, sin exhibir las trivializaciones ni demostrar que la matriz de transición es diferenciable/holomorfa

- $E \oplus \tilde{E}$, que tiene por fibra sobre $b \in B$ a $E_b \oplus \tilde{E}_b$.
- $E \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}$, que tiene por fibra sobre $b \in B$ a $E_b \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{E}_b$.
- $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(E)$, que tiene por fibra sobre $b \in B$ a las funciones $E_b \times E_b \rightarrow \mathbb{K}$ bilineales.
- $A_k(E)$, que tiene por fibra sobre $b \in B$ a las funciones $E_b \times \cdots \times E_b \rightarrow \mathbb{R}$ multilineales y alternadas en k variables.

1.3.2 El Espacio Tangente Complejo

Sea M una variedad compleja de dimensión n , sea $p \in M$ y sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ una carta alrededor de p , entonces $d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo \mathbb{R} -lineal. Sean e_1, \dots, e_n los vectores canónicos en \mathbb{C}^n , denotamos

$$\partial/\partial x_i|_p := d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_i) \quad ; \quad \partial/\partial y_i|_p := d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(i \cdot e_i)$$

Que forman una base real de $T_p(M)$. Pullbackeando la estructura compleja de \mathbb{C}^n vía $d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}^n$, obtenemos una estructura compleja en $T_p(M)$. Concretamente, obtenemos la transformación \mathbb{R} -lineal $J_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ definida por

$$J_p(\partial/\partial x_i|_p) = \partial/\partial y_i|_p \quad ; \quad J_p(\partial/\partial y_i|_p) = -\partial/\partial x_i|_p$$

Efectivamente, $J_p^2 = -\text{Id}$ así que esto es una estructura compleja sobre $T_p(M)$. De hecho, es la única estructura compleja en $T_p(M)$ que hace que $d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}^n$ sea \mathbb{C} -lineal. Afirmando que la estructura compleja J_p no depende de la carta elegida. Para verlo, sea $\tilde{\varphi}$ otra carta alrededor de p , veamos que $d\tilde{\varphi}_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es \mathbb{C} -lineal con la estructura compleja inducida por φ . Tenemos que

$$d\tilde{\varphi}_p = D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$$

Como $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es una función holomorfa entre abiertos de \mathbb{C}^n , $D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ es \mathbb{C} -lineal (ver sección 1.2.1) y como $d\varphi_p$ es \mathbb{C} -lineal con la estructura compleja J_p , $d\tilde{\varphi}_p$ también lo es.

Vimos entonces que si M es una variedad compleja de dimensión n y $p \in M$, entonces hay una estructura compleja canónica J_p sobre $T_p(M)$ que hace del tangente un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n . De hecho, $\{\partial/\partial x_i|_p\}_{i=1,\dots,n}$ es una base compleja de $T_p(M)$ ya que, sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + b_k \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^n (a_k + i \cdot b_k) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p$$

La aplicación $J : M \rightarrow \underline{\text{End}}(T(M))$ es una sección C^∞ pues, en el marco inducido por cualquier carta, las coordenadas de J son constantes (en particular C^∞). Esto prueba que $T(M)$ es un fibrado vectorial complejo. Afirmando que, más aún, es un fibrado vectorial holomorfo.

Sea $\pi : T(M) \rightarrow M$ la proyección y sea (U, φ) una carta compleja en M , definimos la trivialización $\tilde{\varphi} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ en $T(M)$ vía

$$\tilde{\varphi}(p, v) := d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}^{-1}(v)$$

Es claro que $\tilde{\varphi}$ es una biyección, que $\pi \circ \tilde{\varphi} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada y que $v \in \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\varphi}(p, v) \in T_p(M)$ es \mathbb{C} -lineal, por cómo definimos la estructura compleja en $T_p(M)$. Si tomamos otra carta (V, μ) con $U \cap V \neq \emptyset$, sea $\mu \circ \varphi^{-1} = (f_1, \dots, f_n)$ con $f_i : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{C}$, la matriz de transición entre ambas trivializaciones $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\mu}$ en $p \in M$ es

$$D(\mu \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial z_1(p) & \cdots & \partial f_1 / \partial z_n(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m / \partial z_1(p) & \cdots & \partial f_m / \partial z_n(p) \end{pmatrix}$$

Como f_1, \dots, f_n son holomorfas, sus derivadas también lo son así que la matriz de transición $U \cap V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ es una función holomorfa. Luego, existe una única topología y estructura compleja en $T(M)$ que hace de $\pi : T(M) \rightarrow M$ un fibrado vectorial holomorfo con trivializaciones $(U, \tilde{\varphi})$. Estas también son trivializaciones de $T(M)$ como fibrado vectorial real, así que la topología y estructura diferenciable de $T(M)$ sigue siendo la misma.

Ver al espacio tangente como un \mathbb{C} -espacio vectorial nos permite relacionar la estructura diferencial de la variedad con su estructura compleja, como muestran las siguientes dos proposiciones

- **Proposición:** Una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si el diferencial $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ es \mathbb{C} -lineal para todo $p \in M$.
- **Proposición:** Sea M una variedad compleja y $N \subseteq M$ una subvariedad diferenciable, entonces N es una subvariedad compleja si y solo si $T_p(N)$ es un subespacio complejo de $T_p(M)$ para todo $p \in N$, es decir, si $J_p \cdot T_p(N) \subseteq T_p(N)$

La primera proposición la demostraremos en la sección 1.4.2. La demostración de la segunda proposición se puede encontrar en [14].

1.3.3 Estructuras Cuasi-Complejas y el Teorema de Newlander-Nirenberg

Sea M una variedad diferenciable, una estructura Cuasi-Compleja sobre M es una sección suave $J : M \rightarrow \text{End}(T(M))$ tal que $J_p^2 = -\text{Id}$ para todo $p \in M$. Decimos que J es *íntegra* si viene inducida por una estructura de *variedad compleja* en M . Si tenemos dos variedades diferenciales M y N equipadas con estructuras Cuasi-complejas J y \tilde{J} respectivamente, decimos que $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si es suave y satisface $df_p \circ J_p = \tilde{J}_{f(p)} \circ df_p$ para todo $p \in M$. Es decir, una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si $df_p : (T_p(M), J_p) \rightarrow (T_{f(p)}(N), \tilde{J}_{f(p)})$ es \mathbb{C} -lineal para todo punto $p \in M$.

La noción de “Estructura Cuasi-compleja” es importante, entre otras cosas, porque nos permite flexibilizar la noción de “Variedad Compleja” preservando muchas herramientas de la geometría compleja. También es importante para responder preguntas del tipo “¿Admite M una estructura de Variedad Compleja?” cuando M es una variedad diferenciable. En general, como paso previo a responder dicha pregunta, se hace la pregunta más débil “¿Admite M una estructura Cuasi-Compleja?”. Esto se puede ver, por ejemplo, en [4], donde se prueba que S^n admite una estructura cuasi-compleja si y solo si $n = 2$ ó 6 . Se sabe que S^2 admite una estructura de variedad compleja (la esfera de Riemann), pero al día de hoy se desconoce si esto es cierto para S^6 .

El Teorema de Newlander-Nirenberg nos caracteriza cuándo una estructura Cuasi-compleja es íntegra, es decir, cuándo viene inducida por una estructura de variedad compleja sobre el espacio (ver [2])

- **Teorema (Newlander-Nirenberg):** Sea M una variedad diferenciable, sea J una estructura Cuasi-compleja sobre M y sea $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo suave en M , denotamos $J \cdot X \in \mathcal{X}(M)$ al campo definido por $(J \cdot X)_p = J_p(X_p)$. La estructura Cuasi-compleja J es íntegra si y solo si

$$[J \cdot X, J \cdot Y] - J \cdot [X, J \cdot Y] - J \cdot [J \cdot X, Y] - [X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$
 Siendo $[-, -]$ el corchete de Lie de campos vectoriales.

Sea $N_J(X, Y)$ el lado izquierdo de la ecuación que aparece en el teorema de Newlander-Nirenberg, es fácil verificar que N_J es $C^\infty(M)$ -bilineal y alternado. Se puede probar que si $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$ son tales que $X_p = \tilde{X}_p$ y $Y_p = \tilde{Y}_p$ para cierto $p \in M$, entonces $N_J(X, Y)_p = N_J(\tilde{X}, \tilde{Y})_p$ así que podemos pensar a N_J como una sección del fibrado vectorial sobre M que tiene por fibra sobre $p \in M$ a las funciones \mathbb{R} -bilineales y alternadas $T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$.

Es fácil verificar que si X es un campo, entonces $N_J(X, J \cdot X) = 0$. Si M es una variedad diferenciable de dimensión 2 con una estructura cuasi-compleja J , sea X un campo en M definido localmente, entonces $\{X, J \cdot X\}$ es un \mathbb{R} -marco local en M . Como $N_J(X, J \cdot X) = 0$, por la alternancia de N_J concluimos que $N_J = 0$ y, por el teorema de Newlander-Nirenberg, J es íntegra. Vimos entonces que toda estructura cuasi-compleja en una variedad diferenciable de dimensión 2, es íntegra.

1.4 Formas Complejas

Como mencionamos en la introducción, uno de los temas centrales de esta tesis es la descomposición de Hodge. Para entenderla, debemos entender cómo se comportan las formas diferenciales de una variedad compleja.

Antes de estudiar las formas de variedades complejas, debemos estudiar las formas en \mathbb{C} -espacios vectoriales (sección 1.4.1). Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, denotamos $A_k(V)$ al conjunto de funciones \mathbb{R} -multilineales y alternadas $\omega : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ en k variables. En la sección 1.1.1 vimos que si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial, tenemos una descomposición

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C}) \quad (*)$$

Veremos que esto induce una descomposición

$$A_k(V)^{\mathbb{C}} = A^{k,0}(V) \oplus A^{k-1,1}(V) \oplus \cdots \oplus A^{0,k}(V)$$

Luego, si M es una variedad compleja, definimos una (p, q) -forma como una función diferenciable $p \in M \rightarrow \omega_p \in A^{p,q}(T_p(M))$, es decir, una sección del fibrado $A^{p,q}(T(M))$. Si denotamos $\Omega^{p,q}(M)$ al conjunto de (p, q) -formas en M , tendremos la descomposición

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

En la sección 1.4.4 estudiaremos cómo se relaciona el diferencial de formas con esta descomposición inducida por la estructura compleja en M . Concretamente, extendiendo a la complexificación $d : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$, veremos que

$$d(\Omega^{p,q}(M)) \subseteq \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$$

Si $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, definiremos $\partial\omega$ y $\bar{\partial}\omega$ como las proyecciones de $d\omega$ sobre $\Omega^{p+1,q}(M)$ y $\Omega^{p,q+1}(M)$ respectivamente, estos son los llamados “Operadores de Dolbeault”. Estudiaremos algunas propiedades de estos operadores y veremos que inducen complejos de cadenas, cuya cohomología llamamos “Cohomología de Dolbeault”.

En la sección 1.4.2 nos enfocaremos en probar que una función $f : M \rightarrow N$ diferenciable es holomorfa si y solo si $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ es \mathbb{C} -lineal para todo p . Bastará con probar el caso $N = \mathbb{C}$. Para probarlo, introducimos las 1-formas complejas dz_i inducidas por una carta compleja (U, φ) , que a cada $p \in M$ le asigna la función \mathbb{C} -lineal π_i o $d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ (siendo $\pi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección sobre la i -ésima coordenada). Por la descomposición (*), por cada p , las 1-formas $\{dz_1, \dots, dz_n, \bar{dz}_1, \dots, \bar{dz}_n\}$ evaluadas en p formarán una base de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p(M), \mathbb{C})$. Denotamos $\partial f / \partial z_i(p)$ y $\partial f / \partial \bar{z}_i(p)$ a las coordenadas de df_p en dicha base, de modo que

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}(p) \cdot dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}(p) \cdot \bar{dz}_i$$

Notar que df_p es \mathbb{C} -lineal si y solo si $\partial f / \partial \bar{z}_i(p) = 0$ para todo i . Calcularemos $\partial f / \partial z_i(p)$ y $\partial f / \partial \bar{z}_i(p)$ en términos de sus derivadas reales $\partial f / \partial x_i(p)$ y $\partial f / \partial y_i(p)$, y probaremos que $\partial f / \partial \bar{z}_i(p) = 0$ si y solo si f es holomorfa. En la sección 1.4.3 estudiaremos los operadores $\partial / \partial z_i|_p$ y $\partial / \partial \bar{z}_i|_p$, que interpretaremos como vectores en $T_p(M)^\mathbb{C}$ cuyas coordenadas ya habremos calculado en la sección anterior.

1.4.1 Las (p, q) -Formas en Espacios Vectoriales

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n , denotamos $A_k(V)$ al espacio de funciones multilineales alternadas $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ en k variables. Podemos pensar a la complexificación $A_k(V)^\mathbb{C}$ como el conjunto de funciones $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que son \mathbb{R} -multilineales y alternadas. El producto wedge $\wedge : A_k(V) \times A_l(V) \rightarrow A_{k+l}(V)$ lo podemos extender de una única forma a una función $\wedge : A_k(V)^\mathbb{C} \times A_l(V)^\mathbb{C} \rightarrow A_{k+l}(V)^\mathbb{C}$ que sea \mathbb{C} -bilineal. De esta forma, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$ y $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(v_1, \dots, v_k)$ es el determinante de la matriz en $\mathbb{C}^{k \times k}$ cuya coordenada (i, j) es $\alpha_i(v_j)$. Para simplificar notación, denotamos $\alpha_I := \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$ con $I = (i_1, \dots, i_k)$ crecientes, y también definimos $|I| := k$. Algunas observaciones sencillas de hacer son

- Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base compleja de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$, entonces $\{\alpha_I : |I| = k\}$ es una base compleja de $A_k(V)^\mathbb{C}$.
- Si $\alpha \in A_k(V)^\mathbb{C}$ y $\beta \in A_l(V)^\mathbb{C}$, entonces $\overline{\alpha \wedge \beta} = \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$

Si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n , teníamos la descomposición

$$A_1(V)^\mathbb{C} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \oplus \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$$

Con $\text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C}) = \overline{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})}$, así que si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base compleja de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ (por ejemplo, la base dual de una base compleja en V), entonces $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n\}$ es una base compleja de $\text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n\}$ es una base compleja de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$. Luego $\{\alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J : |I| + |J| = k\}$ es una base compleja de $A_k(V)^\mathbb{C}$. Esto motiva definir

$$A^{p,q}(V) := \langle \alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J : |I| = p, |J| = q \rangle_{\mathbb{C}} \subseteq A_{p+q}(V)^\mathbb{C}$$

Si $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es otra base compleja de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, es fácil verificar que $\beta_{I_0} \wedge \bar{\beta}_{J_0}$ es combinación \mathbb{C} -lineal de los $\{\alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J : |I| = |I_0|, |J| = |J_0|\}$, así que la definición de $A^{p,q}(V)$ no depende de la base compleja elegida. Como $\{\alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J : |I| + |J| = k\}$ es una base compleja de $A_k(V)^\mathbb{C}$, concluimos que

$$A_k(V)^\mathbb{C} = A^{k,0}(V) \oplus A^{k-1,1}(V) \oplus \dots \oplus A^{0,k}(V)$$

Observar que si $p > n$ o si $q > n$, entonces $A^{p,q}(V) = 0$ así que a partir de $k = n$ la longitud de la descomposición empieza a decrecer hasta llegar a $A_{2n}(V)^\mathbb{C} = A^{n,n}(V)$. Notar también que $A^{1,0}(V) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ y que $A^{0,1}(V) = \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ así que en el caso $k = 1$ obtenemos la descomposición que ya conocíamos. Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar

- Si $\omega \in A^{p,q}(V)$ y $\tau \in A^{\tilde{p},\tilde{q}}(V)$, entonces $\omega \wedge \tau \in A^{p+\tilde{p},q+\tilde{q}}(M)$
- $\overline{A^{p,q}(V)} = A^{q,p}(V)$
- El espacio $A^{k,0}(V)$ es el conjunto de funciones $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que son \mathbb{C} -multilineales y alternadas. Anteriormente habíamos denotado $A_k(V)$ a dicho espacio.

Recuerdo que un morfismo lineal $f : V \rightarrow W$ entre \mathbb{R} -espacios vectoriales, me induce un morfismo lineal $f^* : A_k(W) \rightarrow A_k(V)$ vía

$$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

El cual satisface la propiedad $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*(\omega) \wedge f^*(\tau)$. Si ahora V y W son \mathbb{C} -espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ es \mathbb{C} -lineal, es claro que

$$g \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(W, \mathbb{C}) \Rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) ; \quad g \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(W, \mathbb{C}) \Rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$$

En otras palabras, si extendemos a la complexificación $f^* : A_k(W)^{\mathbb{C}} \rightarrow A_k(V)^{\mathbb{C}}$, entonces $f^*(A^{1,0}(W)) \subseteq A^{1,0}(V)$ y $f^*(A^{0,1}(W)) \subseteq A^{0,1}(V)$. Como sigue valiendo la propiedad $f^*(\omega \wedge \tau) = f^*(\omega) \wedge f^*(\tau)$ al extender a la complexificación, concluimos que

- Lema: Si $f : V \rightarrow W$ es un morfismo \mathbb{C} -lineal, entonces $f^* : A_k(W)^{\mathbb{C}} \rightarrow A_k(V)^{\mathbb{C}}$ satisface $f^*(A^{p,q}(W)) \subseteq A^{p,q}(V)$

Fibrado de (p, q) -formas

Sea $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial complejo y sea $\varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ una trivialización, entonces $\varphi_b : \mathbb{C}^n \rightarrow E_b$ es \mathbb{C} -lineal así que $\varphi_b^* : A_k(E_b)^{\mathbb{C}} \rightarrow A_k(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{C}}$ satisface $\varphi_b^*(A^{p,q}(E_b)) = A^{p,q}(\mathbb{C}^n)$. Una trivialización del fibrado $A_k(E)^{\mathbb{C}} := \coprod_{b \in B} A_k(E_b)^{\mathbb{C}}$ es $\tilde{\varphi} : U \times A_k(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ dada por $\tilde{\varphi}(b, v) := (\varphi_b^*)^{-1}(v)$. Si la restringimos a $U \times A^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ obtenemos una trivialización de $A^{p,q}(E) := \coprod_{b \in B} A^{p,q}(E_b)$ así que $A^{p,q}(E)$ es un sub-fibrado de $A_k(E)^{\mathbb{C}}$.

- Observación: Sean $\Omega^k(E)$ las secciones de $A_k(E)$ y $\Omega^{p,q}(E)$ las de $A^{p,q}(E)$, entonces

$$\Omega^k(E)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(E) \oplus \Omega^{k-1,1}(E) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(E)$$

1.4.2 Funciones Holomorfas y 1-Formas

Sea M una variedad compleja de dimensión n y sea $p \in M$, habíamos visto que $T_p(M)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n y que, si tomamos una carta, entonces $\{\partial/\partial x_k|_p\}_{k=1,\dots,n}$ es una base compleja de dicho espacio. Sea $\{dz_1, \dots, dz_n\}$ su base dual, que son funciones \mathbb{C} -lineales $T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $dz_k = dx_k + i \cdot dy_k$ siendo $\{dx_k, dy_k\}_{k=1,\dots,n}$ la base dual de $\{\partial/\partial x_k|_p, \partial/\partial y_k|_p\}_{k=1,\dots,n}$. Dicho de otra forma, si (U, φ) es una carta en M que nos induce un \mathbb{C} -isomorfismo $d\varphi_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}^n$, entonces $dz_k(v)$ es la k -ésima coordenada de $d\varphi_p(v)$, mientras que $dx_k(v)$ y $dy_k(v)$ son respectivamente la parte real e imaginaria de dicha coordenada.

Como $\{dz_1, \dots, dz_n\}$ es una base del conjunto de funciones \mathbb{C} -lineales $T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$, si definimos $d\bar{z}_k := \overline{dz_k} = dx_k - i \cdot dy_k$ vemos que $\{dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n\}$ es una base compleja del conjunto de funciones \mathbb{R} -lineales $T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$.

- **Observación:** La aplicación que a cada $p \in U$ le asigna $dz_k : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ también la denotamos dz_k (similarmente con $d\bar{z}_k$). De esta forma, $\{dz_1, \dots, dz_n\}$ es un marco local en $\Omega^{1,0}(T(M))$ y $\{d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n\}$ es un marco local en $\Omega^{0,1}(T(M))$, ambos inducidos por una carta (U, φ) .

Si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable, entonces $df_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{R} -lineal y, por lo recién mencionado, existen únicos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$df_p = a_1 \cdot dz_1 + \dots + a_n \cdot dz_n + b_1 \cdot d\bar{z}_1 + \dots + b_n \cdot d\bar{z}_n$$

Notar que df_p es \mathbb{C} -lineal si y solo si $b_1, \dots, b_n = 0$, veamos como calcular las coordenadas de df_p . Escribiendo $dz_k = dx_k + i \cdot dy_k$ y $d\bar{z}_k = dx_k - i \cdot dy_k$, obtenemos

$$df_p = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \cdot dx_k + \sum_{k=1}^n i \cdot (a_k - b_k) \cdot dy_k$$

Por otro lado, tenemos que

$$df_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(p) \cdot dy_k$$

Y como $\{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n\}$ forma una base compleja del conjunto de funciones \mathbb{R} -lineales $T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$, debe ser

$$a_k + b_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \quad \text{y} \quad i \cdot (a_k - b_k) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(p) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Resolviendo el sistema concluimos que para cada $k = 1, \dots, n$

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k}(p) \right) ; \quad b_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(p) + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k}(p) \right)$$

Observemos que si $f = u + i \cdot v$, con $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$2 \cdot b_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}(p) - \frac{\partial v}{\partial y_k}(p) + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}(p) + \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \right)$$

Así que $b_1, \dots, b_n = 0$ si y solo si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en p . Vimos entonces la siguiente proposición

- **Proposición:** Sea M una variedad compleja y sea $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable, entonces f es holomorfa si y solo si el diferencial $df_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal para todo $p \in M$

Y usando que $f : M \rightarrow N$ es holomorfa si y solo si $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa para toda $g : N \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, concluimos que

- **Corolario:** Sean M y N variedades complejas y sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable, entonces f es holomorfa si y solo si $df_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ es \mathbb{C} -lineal para todo $p \in M$

1.4.3 Las derivadas complejas $\partial/\partial z_k, \partial/\partial \bar{z}_k$

Tomando una carta (U, φ) en una variedad compleja M , consideremos los siguientes elementos en $T_p(M)^{\mathbb{C}}$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p - i \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + i \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right)$$

Si extendemos a la complexificación $\partial/\partial x_k \Big|_p, \partial/\partial y_k \Big|_p : C_p^{\infty}(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces podemos considerar que $\partial/\partial z_k \Big|_p, \partial/\partial \bar{z}_k \Big|_p : C_p^{\infty}(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, donde $C_p^{\infty}(M)^{\mathbb{C}}$ son los gérmenes en p de funciones diferenciables $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, con $V \subseteq M$ entorno abierto de p .

- **Observación:** Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, con parte real u y parte imaginaria v , por las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos ver que

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p (f) = \frac{\partial u}{\partial x_k} (p) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k} (p)$$

La importancia de estos operadores radica en que, si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable

$$df_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} (p) \cdot dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} (p) \cdot d\bar{z}_k$$

La demostración es precisamente la cuenta que hicimos en la sección pasada. Podemos pensar a $\partial/\partial z_k$ y $\partial/\partial \bar{z}_k$ como secciones locales del fibrado $T(M)^{\mathbb{C}}$, o podemos pensarlos como funciones $C^{\infty}(U)^{\mathbb{C}} \rightarrow C^{\infty}(U)^{\mathbb{C}}$. En particular, si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable, entonces es holomorfa si y solo si $\partial f/\partial \bar{z}_k \equiv 0$ para todo k . Por ejemplo, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $f(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \bar{z} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z$$

Así que $df_z = \bar{z} dz + z d\bar{z}$ y f no es holomorfa. Pensando a los operadores $\partial/\partial z_k$ y $\partial/\partial \bar{z}_k$ como funciones $C^{\infty}(U)^{\mathbb{C}} \rightarrow C^{\infty}(U)^{\mathbb{C}}$, podemos componerlos obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} - i \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} \right) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_j} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + i \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \right) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + i \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Estas fórmulas las usaremos más adelante en la sección 2.1.3. Notar que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es C^∞ , el orden en que se derive no altera el resultado.

Recuerdo que en la sección 1.1.3 vimos que hay una biyección entre las estructuras complejas J sobre un \mathbb{R} -espacio vectorial V y las descomposiciones de la complexificación $V^\mathbb{C} = S \oplus \bar{S}$. Concretamente, si $J : V \rightarrow V$ es una estructura compleja en V y la extendemos a la complexificación, entonces $S = \{v \in V^\mathbb{C} : J(v) = i \cdot v\}$. Más aún, la aplicación $V \rightarrow S$ definida por $v \rightarrow v - i \cdot J(v)$ resultaba ser un isomorfismo de \mathbb{C} -espacios vectoriales.

En nuestro caso, $T_p(M)$ tiene una estructura compleja J_p y se puede verificar que $\{\partial/\partial z_1|_p, \dots, \partial/\partial z_n|_p\}$ es una base de $\hat{T}_p(M) := \{v \in T_p(M)^\mathbb{C} : J_p(v) = i \cdot v\}$. Más aún, el isomorfismo $v \in T_p(M) \rightarrow v - i \cdot J(v) \in \hat{T}_p(M)$ manda $\partial/\partial x_k|_p$ en $2\partial/\partial z_k|_p$. De hecho $\hat{T}(M) := \coprod_{p \in M} \hat{T}_p(M)$ es un sub-fibrado vectorial de $T(M)^\mathbb{C}$ y el isomorfismo $T_p(M) \rightarrow \hat{T}_p(M)$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales $T(M) \rightarrow \hat{T}(M)$. Esto nos da una tercera definición equivalente de “Espacio Tangente de una Variedad Compleja”.

1.4.4 Los operadores de Dolbeault ∂ y $\bar{\partial}$

Sea M una variedad compleja, denotamos $\Omega^{p,q}(M)$ a las secciones del fibrado vectorial $A^{p,q}(T(M))$. Si U es una carta de M , el conjunto $\{dz_I \wedge d\bar{z}_J : |I| = p, |J| = q\}$ es un marco local en $\Omega^{p,q}(M)$, y por lo tanto una base $C^\infty(U)$ -lineal de $\Omega^{p,q}(U)$. De las propiedades de $A_k(V)^\mathbb{C}$ y $A^{p,q}(V)$ cuando V era un \mathbb{C} -espacio vectorial, deducimos las siguientes propiedades

- i) $\wedge : \Omega^k(M)^\mathbb{C} \times \Omega^l(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^{k+l}(M)^\mathbb{C}$ es $C^\infty(M)^\mathbb{C}$ -bilineal
- ii) Si $\omega \in \Omega^k(M)^\mathbb{C}$ y $\tau \in \Omega^l(M)^\mathbb{C}$, entonces $\overline{\omega \wedge \tau} = \bar{\omega} \wedge \bar{\tau}$
- iii) $\wedge : \Omega^{p,q}(M) \times \Omega^{\tilde{p},\tilde{q}}(M) \rightarrow \Omega^{p+\tilde{p},q+\tilde{q}}(M)$
- iv) $\Omega^k(M)^\mathbb{C} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$
- v) $\overline{\Omega^{p,q}(M)} = \Omega^{q,p}(M)$

Notar que, si $p > n$ ó $q > n$, siendo n la dimensión de M , entonces $\Omega^{p,q}(M) = 0$. Luego, la longitud de la descomposición en el ítem “iv)” va reduciéndose cuando $k > n$. Por ejemplo, $\Omega^{2n-1}(M)^\mathbb{C} = \Omega^{n,n-1}(M) \oplus \Omega^{n-1,n}(M)$.

Si extendemos el diferencial de formas a la complexificación $d : \Omega^k(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^\mathbb{C}$, observemos que $d(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = 0$ ya que $dz_I \wedge d\bar{z}_J$ se escribe como combinación \mathbb{C} -lineal de los $\{dx_I \wedge dy_J\}$. Luego, dado $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, si tomamos sus coordenadas en la carta U

$$\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} a_{I,J} \cdot dz_I \wedge d\bar{z}_J \Rightarrow d\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} da_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Como $a_{I,J} : U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable, habíamos visto que

$$da_{I,J} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{I,J}}{\partial z_k} \cdot dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \cdot d\bar{z}_k$$

Así que $da_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \in \Omega^{p+1,q}(U) \oplus \Omega^{p,q+1}(U)$. Es decir, acabamos de probar que

$$d(\Omega^{p,q}(M)) \subseteq \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$$

Si $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, denotamos $\partial\omega$ a la componente de $d\omega$ en $\Omega^{p+1,q}(M)$ y $\bar{\partial}\omega$ a la componente en $\Omega^{p,q+1}(M)$. En coordenadas

$$\begin{aligned}\partial\omega &= \sum_{k=1}^n \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial a_{I,J}}{\partial z_k} \cdot dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ \bar{\partial}\omega &= \sum_{k=1}^n \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial a_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \cdot d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\end{aligned}$$

Veamos algunas propiedades que satisfacen los llamados “operadores de Dolbeault”, $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ y $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$. Es claro que ambos operadores son \mathbb{C} -lineales y que $d = \partial + \bar{\partial}$. Si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable

$$\partial f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} \cdot dz_k \quad ; \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \cdot d\bar{z}_k$$

En particular f es holomorfa si y solo si $\bar{\partial}f = 0$. Si aplicamos dos veces el operador ∂ a una forma $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$

$$\partial\partial\omega = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial^2 a_{I,J}}{\partial z_i \partial z_j} \cdot dz_i \wedge dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Como $\partial^2/\partial z_i \partial z_j = \partial^2/\partial z_j \partial z_i$, el término (i, j) de esta suma coincide con el término (j, i) , pero con el signo opuesto (pues $dz_i \wedge dz_j = -dz_j \wedge dz_i$). Luego $\partial^2 = 0$ y similarmente se prueba que $\bar{\partial}^2 = 0$. En particular

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial}) = \partial^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial + \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial \Rightarrow \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$$

Este operador $\bar{\partial}\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q+1}(M)$ nos será relevante luego (sección 2.1.3), así que lo escribimos en coordenadas

$$\bar{\partial}\partial\omega = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial^2 a_{I,J}}{\partial \bar{z}_i \partial z_j} \cdot d\bar{z}_i \wedge dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ están relacionados de la siguiente manera. Si $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$

$$\partial\bar{\omega} + \bar{\partial}\omega = d(\bar{\omega}) = \overline{d(\omega)} = \overline{\partial\omega} + \overline{\bar{\partial}\omega}$$

Notemos que $\partial\bar{\omega} \in \Omega^{q+1,p}(M)$ y $\bar{\partial}\omega \in \Omega^{q,p+1}(M)$, que están en suma directa. Del otro lado $\overline{\partial\omega} \in \Omega^{q,p+1}(M)$ y $\overline{\bar{\partial}\omega} \in \Omega^{q+1,p}(M)$ así que debe ser

$$\overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\bar{\omega} \quad ; \quad \overline{\bar{\partial}\omega} = \partial\bar{\omega}$$

Veamos cómo se relacionan estos operadores con el producto wedge. Sea $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ y $\tilde{\omega} \in \Omega^{\tilde{p},\tilde{q}}(M)$, sabíamos que

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge d\tilde{\omega}$$

Siendo $k = p + q$. Reemplazando $d = \partial + \bar{\partial}$, haciendo la distributiva y agrupando obtenemos

$$\partial(\omega \wedge \tilde{\omega}) + \bar{\partial}(\omega \wedge \tilde{\omega}) = [\partial\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge \partial\tilde{\omega}] + [\bar{\partial}\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge \bar{\partial}\tilde{\omega}]$$

El primer término de la suma del lado izquierdo de la igualdad está en $\Omega^{p+\tilde{p}+1,q+\tilde{q}}(M)$ mientras que el segundo término está en $\Omega^{p+\tilde{p},q+\tilde{q}+1}(M)$. Lo mismo ocurre del lado derecho de la igualdad y, como ambos espacios están en suma directa, concluimos que

$$\partial(\omega \wedge \tilde{\omega}) = \partial\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge \partial\tilde{\omega} \quad ; \quad \bar{\partial}(\omega \wedge \tilde{\omega}) = \bar{\partial}\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge \bar{\partial}\tilde{\omega}$$

Debido a la descomposición

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Podemos extender $\partial, \bar{\partial} : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$ y seguirán valiendo todas las propiedades mencionadas hasta el momento, que resumimos a continuación

- ∂ y $\bar{\partial}$ son \mathbb{C} -lineales
- $d = \partial + \bar{\partial}$
- $\overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\bar{\omega}$ y $\overline{\bar{\partial}\omega} = \partial\bar{\omega}$
- $\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$
- $\partial^2 = 0$ y $\bar{\partial}^2 = 0$
- Si $\omega \in \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$ y $\tilde{\omega} \in \Omega^l(M)^{\mathbb{C}}$ entonces

$$\partial(\omega \wedge \tilde{\omega}) = \partial\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \cdot \omega \wedge \partial\tilde{\omega}$$
 Y similarmente con $\bar{\partial}$.

Y agregamos una última propiedad, análoga al teorema de Stokes.

- $\int_M \partial\omega = \int_M \bar{\partial}\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^{2n-1}(M)^{\mathbb{C}}$

Demostremos esto. Si vemos que una de las dos integrales da 0, por ejemplo $\partial\omega$, la otra se deduce por el teorema de Stokes y porque $d = \partial + \bar{\partial}$. Usando la descomposición $\Omega^{2n-1}(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{n,n-1}(M) \oplus \Omega^{n-1,n}(M)$, escribimos $\omega = \omega_{n,n-1} + \omega_{n-1,n}$. Notar que $\partial\omega_{n,n-1} \in \Omega^{n+1,n-1}(M) = \{0\}$ así que $\partial\omega = \partial\omega_{n-1,n}$. Similarmente tenemos que $\bar{\partial}\omega_{n-1,n} \in \Omega^{n-1,n+1}(M) = \{0\}$ así que $\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}\omega_{n-1,n} = d\omega_{n-1,n}$ y vale lo que queremos por el teorema de Stokes.

Cohomologías en Variedades Complejas

Si tenemos un complejo de cadenas de \mathbb{R} -espacios vectoriales

$$C : \quad \dots \rightarrow V_0 \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} V_2 \rightarrow \dots$$

Entonces $d : V_i \rightarrow V_{i+1}$ se extiende a $d : V_i^{\mathbb{C}} \rightarrow V_{i+1}^{\mathbb{C}}$ dándonos un complejo de cadenas de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$C^{\mathbb{C}} : \dots \rightarrow V_0^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} V_1^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} V_2^{\mathbb{C}} \rightarrow \dots$$

Observar que

- $v + i \cdot w$ es cerrada si y solo si v y w son cerradas
- $v + i \cdot w$ es exacta si y solo si v y w son exactas

Luego, la aplicación $H^k(C^{\mathbb{C}}) \rightarrow H^k(C)^{\mathbb{C}}$ definida por $[v + i \cdot w] \rightarrow [v] + i \cdot [w]$ es un isomorfismo. El caso al que nos interesa aplicar esto, es al complejo de de-Rham de una variedad diferenciable M . Al extender el diferencial de formas d a la complexificación $d : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$, obtenemos un complejo de cadenas cuya homología es naturalmente isomorfa a $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$. Más adelante veremos que, cuando M es una variedad compleja de ciertas características, $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ admite una descomposición llamada “descomposición de Hodge”.

Si M es una variedad compleja, los operadores de Dolbeault $\partial, \bar{\partial}$ me dan complejos de cadenas

$$\Omega^{0,q}(M) \xrightarrow{\partial} \Omega^{1,q}(M) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \Omega^{n,q}(M) \quad \forall q = 0, 1, \dots, n$$

$$\Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(M) \quad \forall p = 0, 1, \dots, n$$

Este último complejo se suele llamar “El Complejo de Dolbeault”. Denotamos $H_{\partial}^{p,q}(M)$ a la homología del primer complejo en el grado p y $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ a la homología del segundo complejo en el grado q . La conjugación nos da un isomorfismo \mathbb{C} -anti-lineal entre $H_{\partial}^{p,q}(M)$ y $H_{\bar{\partial}}^{q,p}(M)$.

- Demostración: La aplicación $H_{\partial}^{q,p}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ dada por $[\omega] \rightarrow [\bar{\omega}]$ está bien definida pues $\overline{\omega + \partial\tau} = \bar{\omega} + \bar{\partial}\bar{\tau}$ si $\tau \in \Omega^{q-1,p}(M)$. Similarmente, la aplicación $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\partial}^{q,p}(M)$ dada por $[\omega] \rightarrow [\bar{\omega}]$ también está bien definida pues $\overline{\omega + \bar{\partial}\tau} = \bar{\omega} + \partial\bar{\tau}$. Es claro que una es la inversa de la otra, así que son isomorfismos.

Capítulo 2: Teoría de Hodge

2.1 Variedades Hermitianas y Variedades de Kähler

Las hipótesis del teorema de descomposición de Hodge son dos: Que la variedad compleja en cuestión sea compacta y que admita alguna forma de Kähler. Nuestro objetivo en esta sección es definir este último concepto.

Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial, en la sección 2.1.1 establecemos una biyección entre productos internos hermitianos sobre V , productos internos (reales) en V que satisfacen $\langle i \cdot v, i \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in V$, y formas $\omega \in A_2(V)$ que satisfacen $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$ y $\omega(v, i \cdot v) > 0$ (si $v \neq 0$).

En la sección 2.1.2 definimos “métrica hermitiana”, que es el análogo complejo de la métrica Riemanniana. Dar una métrica hermitiana sobre una variedad compleja M es asignarle a cada $p \in M$ un producto interno hermitiano h_p sobre $T_p(M)$. Una variedad hermitiana es una variedad compleja equipada con una métrica hermitiana. Por las biyecciones que habremos visto en la sección 2.1.1, esto equivaldrá a dar una métrica Riemanniana g que satisfaga $g_p(J_p(v), J_p(w)) = g_p(v, w)$ para todo $v, w \in T_p(M)$, o a dar una forma $\omega \in \Omega^2(M)$ que satisfaga $\omega_p(J_p(v), J_p(w)) = \omega_p(v, w)$ y $\omega_p(v, J_p(v)) > 0$ si $v \neq 0$. Una variedad de Kähler es una variedad compleja M equipada con una 2-forma **cerrada** ω que satisfaga dichas propiedades, a la que llamamos “forma de Kähler” (en particular, toda variedad de Kähler es una variedad hermitiana). Si bien toda variedad compleja admite una métrica hermitiana, no es cierto que toda variedad compleja admita una forma de Kähler. Veremos al menos una restricción topológica y probaremos algunas propiedades de las variedades Hermitianas y Kähler.

Si M es una variedad compleja que admite una forma de Kähler y $N \subseteq M$ es una subvariedad compleja, entonces N admite una forma de Kähler. Esto es importante ya que, en la sección 2.1.3, demostraremos que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite una forma de Kähler, y por lo tanto toda subvariedad compleja (suave) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admitirá una forma de Kähler. Luego, el teorema de descomposición de Hodge será válido para toda subvariedad compleja compacta de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. A la métrica hermitiana asociada a la forma de Kähler que construiremos sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se le dice “la métrica de Fubini-Study”.

2.1.1 Formas Hermitianas en Espacios Vectoriales Complejos

Esta parte bien podría haber estado en la sección “Álgebra Lineal Compleja”. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita, decimos que una función $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma Hermitiana si satisface que

- Es \mathbb{C} -lineal en la primera coordenada
- $H(w, v) = \overline{H(v, w)} \quad \forall v, w \in V$
- Es no degenerada: Para todo $v \in V$ existe un $w \in V$ tal que $H(v, w) \neq 0$.

Sea H una forma Hermitiana, si $g := \operatorname{Re}(H)$ y $\omega := -\operatorname{Im}(H)$, es fácil verificar las siguientes propiedades

- Las funciones $g, \omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ son bilineales.
- g es simétrica y ω es anti-simétrica.
- Para todo $v, w \in V$ vale que $g(i \cdot v, i \cdot w) = g(v, w)$ y $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$.
- Las funciones g y ω están relacionadas por las siguientes igualdades equivalentes

$$g(v, w) = \omega(v, i \cdot w) \quad \text{y} \quad \omega(v, w) = g(i \cdot v, w) \quad \forall v, w \in V$$
- Las formas g y ω son no degeneradas.

Recíprocamente, si tenemos una forma bilineal $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que es simétrica, no degenerada y que satisface $g(i \cdot v, i \cdot w) = g(v, w)$ para todo $v, w \in V$, entonces la función

$$H(v, w) = g(v, w) - i \cdot g(i \cdot v, w)$$

Define una forma Hermitiana en V . Similarmente, si $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, anti-simétrica, no degenerada y satisface $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$ para todo $v, w \in V$, entonces la función

$$H(v, w) = \omega(v, i \cdot w) - i \cdot \omega(v, w)$$

Define una forma Hermitiana en V . En síntesis, vemos que hay una biyección entre los siguientes conjuntos

- a) Formas Hermitianas $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.
- b) Formas bilineales $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simétricas, no degeneradas y que satisfacen la igualdad $g(i \cdot v, i \cdot w) = g(v, w)$ para todo $v, w \in V$.
- c) Formas bilineales $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ anti-simétricas, no degeneradas y que satisfacen la igualdad $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$ para todo $v, w \in V$.

Si $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal y anti-simétrica, entonces que valga la propiedad $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$ es equivalente a que a pedir que $\omega \in A^{1,1}(V)$, así que el ítem “c)” es equivalente a

- C) Formas $\omega \in A^{1,1}(V)$, no degeneradas, con $\omega(v, w) \in \mathbb{R}$ para todo $v, w \in V$
 - Demostración: Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, es fácil verificar que $(\alpha_i \wedge \bar{\alpha}_j)(i \cdot v, i \cdot w) = (\alpha_i \wedge \bar{\alpha}_j)(v, w)$ usando la fórmula del determinante, así que todo elemento de $A^{1,1}(V)$ satisface esta propiedad.

Sea $\omega \in A_2(V)$ tal que $\omega(i \cdot v, i \cdot w) = \omega(v, w)$, tomemos una base compleja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ en V . Sea H la forma “Hermitiana” definida por ω (posiblemente degenerada) y sea $h_{ij} := H(e_i, e_j)$, si $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ son las coordenadas de dos vectores $v, w \in V$ en la base B , entonces tenemos que $H(v, w) = \sum_{i,j} h_{ij} \cdot a_i \cdot \bar{b}_j$ así que

$$\omega(v, w) = -\operatorname{Im}(H(v, w)) = \frac{\overline{H(v, w)} - H(v, w)}{2i} = \frac{i}{2} \cdot \sum_{i,j} h_{ij} \cdot (a_i \bar{b}_j - \bar{a}_j b_i)$$

En otras palabras, si $B^* = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es la base dual de B

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \sum_{i,j} h_{ij} \cdot \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_j \in A^{1,1}(V)$$

Vimos más de lo que queríamos probar, vimos que si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base compleja de V , $B^* = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es su base dual y $h_{ij} := H(e_i, e_j)$ son las coordenadas de una forma hermitiana H , entonces

$$\omega := -\text{Im}(H) = \frac{i}{2} \cdot \sum_{i,j} h_{ij} \cdot \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_j$$

En vista de la correspondencia biyectiva entre H, g y ω , es claro que son equivalentes

$$H(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \quad ; \quad g(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0 \quad ; \quad \omega(v, i \cdot v) > 0 \quad \forall v \neq 0$$

En cuyo caso decimos que H es un producto interno hermitiano. Esta condición implica que H es no degenerada, así que se puede omitir de la definición. Notar entonces, que los productos internos hermitianos están en biyección con los productos internos g tales que $g(i \cdot v, i \cdot w) = g(v, w)$ (es decir, que hacen de la estructura compleja J una isometría).

- **Observación:** Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial con un producto interno g , existe una única forma de extender g a un producto interno hermitiano $H : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Concretamente

$$H(v_1 + iv_2, w_1 + iw_2) := g(v_1, w_1) + g(v_2, w_2) + i(g(v_2, w_1) - g(v_1, w_2))$$

2.1.2 Métricas Hermitianas y Formas de Kähler

Si M es una variedad compleja, una métrica hermitiana en M consiste en asociarle a cada $x \in M$ un producto interno Hermitiano h_x en $T_x(M)$, tal que si tomamos una carta (U, φ) , entonces la aplicación

$$x \in U \rightarrow h_x \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_x \right) \in \mathbb{C}$$

sea de clase C^∞ para todo i, j . Esto último es equivalente a pedir que $h : M \rightarrow \text{Bil}_{\mathbb{R}}(TM)^{\mathbb{C}}$ sea una sección C^∞ del fibrado que tiene por fibra sobre $p \in M$ a las funciones \mathbb{R} -bilineales $T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{C}$. No podemos pedir que las coordenadas sean holomorfas pues $h(\partial/\partial \varphi_j, \partial/\partial \varphi_i) = \overline{h(\partial/\partial \varphi_i, \partial/\partial \varphi_j)}$ también debería ser holomorfa, por lo que tendría que ser una función constante para cada carta. Por lo mencionado en la sección anterior, dar una métrica Hermitiana es equivalente a dar alguna de las siguientes

- Una métrica Riemanniana g en M tal que $g_p(J_p(v), J_p(w)) = g_p(v, w)$ para todo $p \in M$ y $v, w \in T_p(M)$.

- Una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ tal que $\omega_p(J_p(v), J_p(w)) = \omega_p(v, w)$ y tal que $\omega_p(v, J_p(v)) > 0$ para todo $p \in M$ y $v \neq 0$
 - Equivalentemente, una $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ tal que $\bar{\omega} = \omega$ y tal que $\omega_p(v, J_p(v)) > 0$ para todo $p \in M$ y $v \neq 0$

Donde $\mathcal{g} = \text{Re}(h)$ y $\omega = -\text{Im}(h)$. Como las coordenadas de una métrica hermitiana son C^∞ , usando partición de la unidad podemos probar que toda variedad compleja admite una métrica hermitiana (demostración análoga a que toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana).

Llamamos “Variedad Hermitiana” a una variedad compleja M equipada con una métrica hermitiana h (o equipada con una \mathcal{g} o una ω con las propiedades anteriores). Una variedad hermitiana es, en particular, una variedad Riemanniana orientada, así que tiene una forma de volumen. Afirmando que $\omega^n/n!$ es la forma de volumen de (M, \mathcal{g}) .

- Demostración: Tomemos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base compleja ortonormal en $(T_p(M), h_p)$ y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ su base dual. Notar que $h_{ij} := h_p(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, el delta de Kronecker, así que, por lo que vimos en la sección pasada

$$\omega_p = \frac{i}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i$$

Luego

$$\omega_p^n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \alpha_{i_1} \wedge \bar{\alpha}_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_n} \wedge \bar{\alpha}_{i_n} \right)$$

Pero

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \alpha_{i_1} \wedge \bar{\alpha}_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_n} \wedge \bar{\alpha}_{i_n} = \\ & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)} \wedge \bar{\alpha}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(n)} \wedge \bar{\alpha}_{\sigma(n)} = \\ & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \bar{\alpha}_n = n! \cdot \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \bar{\alpha}_n \end{aligned}$$

Así que

$$\frac{\omega_p^n}{n!} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \bar{\alpha}_n$$

Notar que $\{e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n\}$ es una base ortonormal de $(T_p(M), \mathcal{g}_p)$ bien orientada (ver sección 1.1.1) así que, para terminar la demostración, basta con ver que $\omega_p^n/n!$ evaluada en dicha base da 1. Sea $x_i := \text{Re}(\alpha_i) : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $y_i := \text{Im}(\alpha_i)$, que son \mathbb{R} -lineales, entonces $\alpha_i = x_i + i \cdot y_i$ y $\bar{\alpha}_i = x_i - i \cdot y_i$ así que, usando la \mathbb{C} -bilinealidad del producto wedge

$$\frac{i}{2} \cdot \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i = x_i \wedge y_i$$

De modo que

$$\frac{\omega_p^n}{n!} = x_1 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_n$$

Y

$$(x_1 \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_n)(e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n) = \det(\text{Id}_{2n}) = 1$$

Lo que concluye la demostración.

Llamamos “métrica de Kähler” a una métrica hermitiana h cuya forma $\omega := -\text{Im}(h)$ es cerrada. En dicho caso decimos que (M, h) es una variedad de Kähler, a la forma ω la denotamos con la letra κ , y la llamamos “forma de Kähler”. Esta propiedad nos impone restricciones topológicas sobre M . Por ejemplo,

- **Proposición:** Si M es una variedad de Kähler compacta de dimensión compleja n , entonces $H_{\text{dR}}^{2k}(M) \neq 0$ para $k = 1, \dots, n$.

- **Demostración:** Como $\kappa \in \Omega^2(M)$ es cerrada, entonces $\kappa^k \in \Omega^{2k}(M)$ es cerrada por ser producto de formas cerradas. Si κ^k fuese exacta y se escribiese como $\kappa^k = d\omega$, entonces

$$d(\kappa^{n-k} \wedge \omega) = d(\kappa^{n-k}) \wedge \omega + \kappa^{n-k} \wedge d\omega = 0 \wedge \omega + \kappa^{n-k} \wedge \kappa^k = \kappa^n$$

Así que κ^n sería exacta, lo cual es absurdo pues $\kappa^n = n! \cdot dV$ (siendo dV la forma de volumen en M) y, por el Teorema de Stokes, tendríamos que

$$0 = \int_M \kappa^n = n! \cdot \int_M dV = n! \cdot \text{Vol}(M) > 0$$

Una observación sencilla, pero importante, es que si M es una variedad de Kähler, sea $N \subseteq M$ es una subvariedad compleja, entonces la métrica hermitiana h en M se restringe a una métrica hermitiana $h|_N$ en N con forma asociada $\kappa|_N = -\text{Im}(h|_N)$. Como $d\kappa = 0$ entonces $d(\kappa|_N) = 0$ pues $\kappa|_N = i^*(\kappa)$, siendo $i : N \rightarrow M$ la inclusión, y $di^* = i^*d$. Esto prueba que una subvariedad N de una variedad Kähler M hereda una forma de Kähler. Esto es importante ya que, a continuación, veremos que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad Kähler así que toda variedad proyectiva suave será una variedad Kähler.

2.1.3 La Métrica de Fubini-Study

Nuestro objetivo es construir sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una forma de Kähler. La métrica hermitiana asociada a la forma de Kähler que construiremos, se llama “La métrica de Fubini-Study”. El siguiente lema es de ayuda para fabricar formas de Kähler.

- **Lema 1:** Sea M una variedad compleja y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces $\omega := i \cdot \bar{\partial} \partial f$ es una 2-forma real, cerrada y satisface la propiedad $\omega_p(J_p(v), J_p(w)) = \omega_p(v, w)$ para todo $p \in M$ y todo $v, w \in T_p(M)$.

- **Demostración:** Veamos primero que es una 2-forma real. Tenemos que

$$\bar{\omega}_i = -i \cdot \bar{\partial} \bar{\partial} \bar{f}_i = -i \cdot \partial \bar{\partial} \bar{f}_i = -i \cdot \partial \bar{\partial} \bar{f}_i = i \cdot \bar{\partial} \partial f_i = \omega_i$$

Hicimos uso de las propiedades

$$\bar{\partial} \bar{f} = \bar{\partial} \bar{f} \quad ; \quad \bar{\partial} f = \partial \bar{f} \quad ; \quad \partial \bar{\partial} f = -\bar{\partial} \partial f$$

Como $\partial : C^\infty(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^{1,0}(M)$ y $\bar{\partial} : \Omega^{1,0}(M) \rightarrow \Omega^{1,1}(M)$, entonces $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$

y, por lo que probamos en la sección 2.1.1, $\omega_p(J_p(v), J_p(w)) = \omega_p(v, w)$. Es

claro que $\bar{\partial}\omega = 0$ pues $\bar{\partial}^2 = 0$ y como $\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$, entonces también vale que $\partial\omega = 0$ ya que $\partial^2 = 0$. Luego $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = 0$

Así que, para construir una forma de Kähler sobre una variedad M , basta con hallar una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega := i \cdot \bar{\partial}\partial f$ satisfaga $\omega_p(v, J_p(v)) > 0$ para todo $p \in M$ y todo $v \neq 0$. En general, no es posible hallar una función global con dicha propiedad, pero sí se sabe que toda forma de Kähler es localmente de esta forma (ver [6], Proposición 3.8). El siguiente lema nos ayuda a pegar 2-formas del estilo $i \cdot \bar{\partial}\partial f_i$

- Lema 2: Sea M una variedad compleja y $f : M \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ una función holomorfa, entonces $\bar{\partial}\partial \ln(|f|^2) = 0$

➤ Demostración: Denotemos Arg a la función argumento con valores en $[-\pi, \pi)$ y \arg a la que tiene valores en $[0, 2\pi)$. Consideremos las ramas del logaritmo

$$\text{Log}(z) := \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z) \quad ; \quad \log(z) := \ln|z| + i \cdot \arg(z)$$

Holomorfas en $U := \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ y $V := \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ respectivamente. Las funciones argumento satisfacen

$$\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) \quad ; \quad \arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg(z)$$

Así que

$$\ln(|z|^2) = \text{Log}(z) + \text{Log}(\bar{z}) \quad \forall z \in U$$

$$\ln(|z|^2) = \log(z) + \log(\bar{z}) - 2\pi i \quad \forall z \in V$$

Sean $\tilde{U} := f^{-1}(U)$ y $\tilde{V} := f^{-1}(V)$, entonces $M = \tilde{U} \cup \tilde{V}$ es un cubrimiento por abiertos, y basta chequear la propiedad en cada abierto. Como $|f|^2 = f \cdot \bar{f}$ tenemos que

$$\ln(|f|^2) = \text{Log}(f) + \text{Log}(\bar{f}) \quad \text{en } \tilde{U}$$

$$\ln(|f|^2) = \log(f) + \log(\bar{f}) - 2\pi i \quad \text{en } \tilde{V}$$

Tomemos el primer caso (el segundo es análogo, el $2\pi i$ desaparece al aplicar $\bar{\partial}\partial$). Tenemos que

$$\bar{\partial}\partial \ln(|f|^2) = \bar{\partial}\partial \text{Log}(f) + \bar{\partial}\partial \text{Log}(\bar{f})$$

Como $\text{Log}(f)$ es holomorfa, por ser composición de holomorfas, entonces

$$\bar{\partial}\partial \text{Log}(f) = -\partial\bar{\partial} \text{Log}(f) = -\partial 0 = 0$$

Por el otro lado, $\text{Log}(\bar{f}) = \overline{\text{Log}(f)}$ (en el otro caso $\log(\bar{f}) = \overline{\log(f)} + 2\pi i$) así que $\partial \text{Log}(\bar{f}) = 0$ y, en particular, $\bar{\partial}\partial \text{Log}(\bar{f}) = 0$.

- Notación: De ahora en más escribiremos "log" al logaritmo natural

Ahora sí, construyamos la forma de Kähler en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Sea $U_i = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ tq } z_i \neq 0\}$ y sea $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ la carta usual, que tiene por inversa a

$$\varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_i : \dots : z_n)$$

Consideremos la función $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definida por

$$f_i(z_0 : \dots : z_n) := \frac{|z_i|^2}{|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Esta función está bien definida y es diferenciable ya que

$$(f_i \circ \varphi_i^{-1})(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{1 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Que es C^∞ . Luego, por el Lema 1, la 2-forma $\omega_i \in \Omega^2(U_i)$ definida por

$$\omega_i := \frac{i}{2\pi} \cdot \bar{\partial} \partial \log(f_i)$$

es efectivamente una 2-forma real, cerrada y J -invariante. El 2π dividiendo tendrá sentido en la sección 2.3.1 cuando veamos que su clase de de-Rham es entera. Veamos que las 2-formas $\omega_1, \dots, \omega_n$ se pegan bien, formando una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ con las propiedades recién mencionadas. Es claro que, en $U_i \cap U_j$

$$f_j(z_0 : \dots : z_n) = |z_j/z_i|^2 \cdot f_i(z_0 : \dots : z_n)$$

Así que

$$\log(f_j(z_0 : \dots : z_n)) = \log(|z_j/z_i|^2) + \log f_i(z_0 : \dots : z_n)$$

Luego

$$\bar{\partial} \partial \log(f_i) = \bar{\partial} \partial \log(|z_j/z_i|^2) + \bar{\partial} \partial \log(f_j)$$

Como la función $(z_0 : \dots : z_n) \rightarrow z_j/z_i$ es holomorfa en $U_i \cap U_j$, el Lema 2 nos dice que

$$\bar{\partial} \partial \log(|z_j/z_i|^2) = 0 \Rightarrow \bar{\partial} \partial \log(f_i) = \bar{\partial} \partial \log(f_j) \Rightarrow \omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$$

Como ω_i y ω_j coinciden en $U_i \cap U_j$, tenemos una 2-forma global $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ bien definida. Para que esto sea una forma de Kähler, lo único que nos falta verificar es la propiedad

$$- \quad \omega(v, J_p(v)) > 0 \text{ para todo } p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ y todo } v \neq 0$$

Para ver esto, calculemos las coordenadas de ω_k en la base $\{dz_i \wedge d\bar{z}_j\}_{i,j=1,\dots,n}$ (pues $\omega \in \Omega^{1,1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$). Sea $h = \log f_k$, teníamos la expresión en coordenadas (ver sección 1.4.4)

$$\bar{\partial} \partial h = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}_i \partial z_j} \cdot d\bar{z}_i \wedge dz_j$$

Y para calcular las derivadas segundas de h usamos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(p) = \frac{\partial^2 (h \circ \varphi_k^{-1})}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(\varphi_k(p))$$

Siendo

$$(h \circ \varphi_k^{-1})(z_1, \dots, z_n) = -\log(1 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$$

Para calcular dichas derivadas, teníamos la expresión (ver sección 1.4.3)

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_j} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + i \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \right) \right)$$

Haciendo las cuentas, llegamos a que, si $p = \varphi_k^{-1}(z_1, \dots, z_n)$, entonces

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}_i \partial z_j}(p) = \frac{z_i \cdot \bar{z}_j}{(1 + \sum_l |z_l|^2)^2} \quad \text{si } i \neq j ; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}_i \partial z_i}(p) = \frac{|z_i|^2 - (1 + \sum_l |z_l|^2)}{(1 + \sum_l |z_l|^2)^2}$$

De modo que

$$\bar{\partial} \partial h_p = \frac{\sum_{i \neq j} z_i \cdot \bar{z}_j \cdot d\bar{z}_i \wedge dz_j + \sum_i (|z_i|^2 - (1 + \sum_l |z_l|^2)) \cdot d\bar{z}_i \wedge dz_i}{(1 + \sum_i |z_i|^2)^2}$$

Que podemos reescribir como

$$\bar{\partial} \partial h_p = \frac{(1 + \sum_i |z_i|^2) \cdot \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i - \sum_{i,j} \bar{z}_i \cdot z_j \cdot dz_i \wedge d\bar{z}_j}{(1 + \sum_i |z_i|^2)^2}$$

Es común escribir factorizado el último término

$$\sum_{i,j} \bar{z}_i \cdot z_j \cdot dz_i \wedge d\bar{z}_j = \left(\sum_i \bar{z}_i \cdot dz_i \right) \wedge \left(\sum_i z_i \cdot d\bar{z}_i \right)$$

Obteniendo finalmente las coordenadas de ω en la carta φ_k

$$\omega_{\varphi_k^{-1}(z_1, \dots, z_n)} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{(1 + \sum_i |z_i|^2) \cdot \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i - (\sum_i \bar{z}_i \cdot dz_i) \wedge (\sum_i z_i \cdot d\bar{z}_i)}{(1 + \sum_i |z_i|^2)^2}$$

Por ejemplo, si $p_k := \varphi_k^{-1}(0, \dots, 0) = (0 : \dots : 1 : \dots : 0)$, tenemos

$$\omega_{p_k} = \frac{i}{2\pi} \cdot \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

Y como dy_i o $J_p = dx_i$ y dx_i o $J_p = -dy_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} i/2 \cdot (dz_i \wedge d\bar{z}_i) (v, J_p(v)) &= (dx_i \wedge dy_i) (v, J_p(v)) = \\ &= dx_i(v) \cdot dy_i(J_p(v)) - dx_i(J_p(v)) \cdot dy_i(v) = dx_i(v)^2 + dy_i(v)^2 > 0 \quad \text{si } v \neq 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $\omega_{p_k}(v, J_{p_k}(v)) > 0$ para todo $v \neq 0$. Para $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ arbitrario, consideremos la acción de $SU(n+1)$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dada por $A \cdot [v] := [A \cdot v]$. Esta acción es transitiva y la multiplicación por A es una función holomorfa $m_A : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Más aún, en [30] (página 76), se construye la forma ω de tal manera que es evidente que $m_A^*(\omega) = \omega$, es decir, para todo $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ vale

$$\omega_{A \cdot p} (d(m_A)_p(v), d(m_A)_p(w)) = \omega_p(v, w) \quad \forall v, w \in T_p(M)$$

Así que, si $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un punto arbitrario, pertenece a alguna carta U_k y existe una matriz $A \in SU(n+1)$ tal que $A \cdot p = p_k$. Luego, si $v \in T_p(M)$ es no nulo

$$\begin{aligned}\omega_p(v, J_p(v)) &= \omega_{p_k}(d(m_A)_p(v), d(m_A)_p(J_p(v))) \\ &= \omega_{p_k}(d(m_A)_p(v), J_p(d(m_A)_p(v))) > 0\end{aligned}$$

Donde $dm_A \circ J = J \circ dm_A$ porque m_A es holomorfa. Esto demuestra que ω es una forma de Kähler, como queríamos ver.

- Comentario: Existe otra forma más natural de construir la métrica de Fubini-Study. En general, si uno tiene una variedad Riemanniana M y un grupo G que actúa sobre M de modo tal que M/G es una variedad diferenciable (ver sección 3.1.2), uno se puede preguntar si M/G hereda una métrica Riemanniana de M . Si G actúa por isometrías, esto es cierto, y una descripción de dicha métrica se puede encontrar en **[12]**

En nuestro caso, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ siendo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ un grupo multiplicativo que actúa sobre $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ por multiplicación coordenada a coordenada. Pero \mathbb{C}^* no actúa por isometrías, así que no podemos aplicar el resultado. Sin embargo, esta misma acción se restringe a una acción por isometrías de $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ sobre $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ así que S^{2n+1}/S^1 hereda una métrica de S^{2n+1} . Tenemos un difeomorfismo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow S^{2n-1}/S^1$ dado por $[v] \rightarrow [v/\|v\|]$ así que la métrica en S^{2n-1}/S^1 nos induce una métrica en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la métrica de Fubini-Study.

2.2 Teoremas de Hodge

En la sección 1.4.4 vimos que podemos pensar $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ como la cohomología en grado k del complejo de cadenas $d : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$. En esa misma sección definimos las (p, q) -formas y vimos que satisfacen la descomposición

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Si M es una variedad compleja, definimos $H^{p,q}(M) \subseteq H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ como el conjunto de clases de de-Rham que contienen alguna (p, q) -forma, es decir

$$H^{p,q}(M) = \{[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} : \omega \in \Omega^{p,q}(M) \text{ cerrada}\}$$

El Teorema de descomposición de Hodge, que demostraremos en la sección 2.2.5, nos dice que, si M es una variedad compleja compacta que admite una forma de Kähler, entonces

$$H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} = H^{k,0}(M) \oplus H^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus H^{0,k}(M)$$

Que la suma da todo el espacio es trivial, lo que no es trivial es que estén en suma directa. Para demostrar este teorema, necesitamos el teorema de Hodge (no confundir con el teorema de descomposición de Hodge) que dice que, si M es una variedad Riemanniana compacta y orientada (como, por ejemplo, lo es una variedad de Kähler compacta), entonces toda clase de de-Rham contiene una única forma armónica. Pero, ¿Qué significa que una forma sea armónica? Para darle sentido a este término, debemos definir el Laplaciano Δ de formas (una forma ω es armónica si $\Delta\omega = 0$) y para definir esto, tenemos que hacer una serie de definiciones.

Primero, cuando M es una variedad Riemanniana compacta y orientada, podemos definir un producto interno sobre $\Omega^k(M)$. Esto lo haremos en la sección 2.2.1. Desafortunadamente, $\Omega^k(M)$ con dicho producto interno, no es un espacio de Hilbert (no es completo), así que no tenemos garantizada la existencia de operadores adjuntos. Afortunadamente, tenemos una herramienta que suele funcionar para fabricar operadores adjuntos en este espacio, el operador estrella de Hodge $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ (que estudiaremos en la sección 2.2.2), caracterizado por la propiedad

$$\omega \wedge \tau = \mathcal{g}(*\omega, \tau) \cdot dV \quad \forall \omega \in \Omega^k(M) \quad \forall \tau \in \Omega^{n-k}(M)$$

Siendo dV la forma de volumen y $\mathcal{g}(*\omega, \tau) : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función que describimos en la sección 2.2.1. Si tenemos un operador de formas $f : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^l(M)$, muchas veces $f^* = \pm * f *$ resulta ser el operador adjunto de f , es decir

$$\langle f(\omega), \tilde{\omega} \rangle = \langle \omega, f^*(\tilde{\omega}) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega^k(M) \quad \forall \tilde{\omega} \in \Omega^l(M)$$

En la sección 2.2.3 demostramos que esto funciona con los operadores $d, \partial, \bar{\partial}$ y L . Este último, llamado operador de Lefschetz, está definido por $L(\omega) = \mathcal{k} \wedge \omega$, siendo \mathcal{k} la forma de Kähler en M . En esta sección también enunciamos las identidades de Kähler, que nos dicen cómo es el conmutador entre L y los operadores $d, \partial, \bar{\partial}, d^*, \partial^*, \bar{\partial}^*$ y L^* .

Finalmente, en la sección 2.2.4, definimos el Laplaciano de formas $\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ vía $\Delta\omega := dd^*\omega + d^*d\omega$ que generaliza el Laplaciano de funciones diferenciables. Denotamos $\mathcal{H}^k(M)$ al espacio de k -formas armónicas. La demostración del teorema de Hodge, que dice que toda clase de de-Rham contiene una única forma armónica, radica fuertemente en la siguiente descomposición (cuya demostración omitiremos)

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta(\Omega^k(M))$$

Una forma equivalente de enunciar el teorema de Hodge, es decir que la función “tomar clase de de-Rham” $\pi : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es un isomorfismo lineal, el isomorfismo de Hodge.

Si M es una variedad Kähler compacta y extendemos $\Delta : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$, entonces tiene sentido hablar de “ (p, q) -formas armónicas”, espacio que denotamos $\mathcal{H}^{p,q}(M)$. La demostración de la descomposición de Hodge (sección 2.2.5) consiste en demostrar dos cosas

- i) $\mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{k,0}(M) \oplus \mathcal{H}^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{0,k}(M)$
- ii) Si extendemos el isomorfismo de Hodge $\pi : \mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$, entonces $\pi(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = H^{p,q}(M)$

Finalizamos la sección mostrando algunas propiedades de los espacios $H^{p,q}(M)$ y $H_{\text{dR}}^k(M)$ cuando M es Kähler compacta. La propiedad $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M)$ junto a la descomposición de Hodge, son las propiedades a partir de las cuales definimos en abstracto las “Estructuras de Hodge”.

2.2.1 El Producto Interno en $\Omega^k(M)$

Queremos ver que si M es una variedad compacta y orientada, entonces toda métrica Riemanniana en M me induce un producto interno en $\Omega^k(M)$. Para ello, primero debemos ver que si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, entonces todo producto interno sobre V me induce un producto interno sobre $A_k(V)$ (luego tomaremos $V = T_p(M)$).

Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n con producto interno y e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , podemos definir sobre V^* el producto interno

$$\langle \alpha, \tilde{\alpha} \rangle := \alpha(e_1) \cdot \tilde{\alpha}(e_1) + \dots + \alpha(e_n) \cdot \tilde{\alpha}(e_n)$$

Se puede verificar que este producto interno no depende de la base ortonormal elegida. Más aún, la base dual $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de una base ortonormal de V , es una base ortonormal en V^* . Sobre $V^{\otimes k}$ podemos definir

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w_1 \otimes \dots \otimes w_k \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle \dots \langle v_k, w_k \rangle$$

Se puede verificar que esto está bien definido y define un producto interno en $V^{\otimes k}$. Más aún, si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , entonces el conjunto $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ es una base ortonormal de $V^{\otimes k}$. Vía la inclusión $\Lambda^k V \subseteq V^{\otimes k}$ obtenemos un producto interno en $\Lambda^k V$, concretamente

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k \rangle = \det A(v, w) \quad \text{con} \quad A(v, w)_{ij} := \langle v_i, w_j \rangle$$

Es fácil verificar que si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , entonces el conjunto $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es una base ortonormal en $\Lambda^k V$. Así vimos que todo producto interno en V me induce un producto interno en V^* y en $\Lambda^k V$, por lo que me induce un producto interno en $\Lambda^k V^* \cong A_k(V)$. Si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es su base dual, entonces $\{\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es una base ortonormal en $A_k(V)$. Concretamente, si $\omega, \tau \in A_k(V)$

$$\langle \omega, \tau \rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \tau(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Ahora sí, si M es una variedad Riemanniana, el producto interno g_p en $T_p(M)$ me induce un producto interno en $A_k(T_p(M))$ que denotamos con la misma letra g_p . Si M es compacta y está orientada, definimos sobre $\Omega^k(M)$ el producto interno

$$\langle \omega, \tau \rangle := \int_M g(\omega, \tau) dV$$

Donde $g(\omega, \tau) : M \rightarrow \mathbb{R}$ y dV es la forma de volumen. Tomando un marco ortonormal y aplicando la fórmula para el producto interno en $A_k(T_p(M))$, vemos que $g(\omega, \tau)$ es C^∞ . Este producto interno no hace de $\Omega^k(M)$ un espacio de Hilbert (no es completo) lo cual nos trae muchas complicaciones. Una de esas complicaciones es que un operador lineal $f : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^l(M)$ podría no tener adjunta, es decir, podría no existir una función $f^* : \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ tal que

$$\langle f(\omega), \tau \rangle = \langle \omega, f^*(\tau) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \tau \in \Omega^l(M)$$

Sin embargo, los operadores con los que vamos a trabajar van a tener adjunta, y para demostrarlo necesitamos el operador $*$ de Hodge.

Producto Interno en $A_k(V)^\mathbb{C}$ y $\Omega^k(V)^\mathbb{C}$

Vimos que si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial, un producto interno g en V induce un producto interno en $A_k(V)$, que también lo denotamos g . Sea \tilde{g} la extensión de este último producto interno a un producto interno hermitiano en $A_k(V)^\mathbb{C}$, entonces sigue valiendo la fórmula

$$\tilde{g}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k) = \det A(\alpha, \beta) \quad \text{con} \quad A(\alpha, \beta)_{ij} := \tilde{g}(\alpha_i, \beta_j)$$

Donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in A_1(V)^\mathbb{C} = \text{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C})$. Si V viene equipado con una estructura compleja J , teníamos una descomposición

$$A_k(V)^\mathbb{C} = A^{k,0}(V) \oplus A^{k-1,1}(V) \oplus \cdots \oplus A^{0,k}(V)$$

Afirmo que si J es una isometría en (V, g) , entonces esta descomposición es ortogonal. Recordemos que es equivalente dar una terna (V, g, J) con V un \mathbb{R} -espacio vectorial, g un producto interno en V y J una estructura compleja en V que es una isometría; a dar un par (V, h) con V un \mathbb{C} -espacio vectorial y h un producto interno hermitiano.

- **Demostración:** Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base \mathbb{C} -lineal de V y sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n : V \rightarrow \mathbb{C}$ su base dual, si $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ es la base dual de la base real $\{e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n\}$, entonces $\alpha_i = x_i + i \cdot y_i$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es ortonormal en (V, h) , entonces $\{e_1, i \cdot e_1, \dots, e_n, i \cdot e_n\}$ es ortonormal en (V, g) así que $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ es una base ortonormal en $(A_1(V), g)$. De esto, es fácil ver que $\{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}_n\}$ es una base ortogonal en $(A_1(V)^\mathbb{C}, \tilde{g})$ (pero no ortonormal, tienen norma 2). Luego $\{\alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J\}_{|I|+|J|=k}$ es una base ortogonal en $(A_k(V)^\mathbb{C}, \tilde{g})$ ya que, para calcular $\tilde{g}(\alpha_I \wedge \bar{\alpha}_J, \alpha_{\tilde{I}} \wedge \bar{\alpha}_{\tilde{J}})$ cuando $(I, J) \neq (\tilde{I}, \tilde{J})$, debemos calcular el determinante de una matriz que tendrá una fila o columna de 0's.

Como corolario, si M es una variedad hermitiana compacta y extendemos el producto interno de $\Omega^k(M)$ a un producto interno hermitiano en $\Omega^k(M)^\mathbb{C}$, la descomposición

$$\Omega^k(M)^\mathbb{C} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

es ortogonal.

2.2.2 El Operador Estrella de Hodge

El Operador $*$ en Espacios Vectoriales

Si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial dimensión n , orientado y con producto interno, entonces existe un único elemento $dv \in A_n(V)$ que evaluado en cualquier base ortonormal bien orientada da 1, el elemento de volumen. Como $A_n(V)$ tiene dimensión 1, dv es una base así que me induce un isomorfismo $A_n(V) \cong \mathbb{R}$. Dada $\omega \in A_k(V)$, consideremos la aplicación $A_{n-k}(V) \rightarrow A_n(V)$ dada por $\tau \rightarrow \omega \wedge \tau$. Componiendo con el isomorfismo $A_n(V) \cong \mathbb{R}$ obtenemos una aplicación $\varphi_\omega : A_{n-k}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $\tau \in A_{n-k}(V)$ lo manda al único escalar $\varphi_\omega(\tau)$ tal que $\omega \wedge \tau = \varphi_\omega(\tau) \cdot dv$. Como V tiene producto interno, $A_{n-k}(V)$ tiene producto interno así que, por el lema de representación de Riesz, existe un (único) $\omega_0 \in A_{n-k}(V)$ tal que $\varphi_\omega = \langle \omega_0, - \rangle$. A dicho ω_0 lo denotamos $*\omega$. En otras palabras, si $\omega \in A_k(V)$, entonces $*\omega$ es el único elemento de $A_{n-k}(V)$ que satisface

$$\omega \wedge \tau = \langle *\omega, \tau \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_{n-k}(V)$$

A la aplicación $* : A_k(V) \rightarrow A_{n-k}(V)$ la llamamos "El operador estrella de Hodge". Por la unicidad que define a $*\omega$, es fácil ver que es un operador lineal. Para poder calcular explícitamente $*\omega$, tenemos un lema para el cual primero debemos introducir algo de notación. Recordemos que si $v_1, \dots, v_n \in V$ y $I = (i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, entonces $v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$. Denotamos $I^c = (j_1, \dots, j_{n-k})$ a la única $(n-k)$ -upla con $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$ tal que $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. Denotamos $\text{sgn}(I)$ al signo de la permutación $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$. Ahora sí, enunciamos el lema

- **Lema:** Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es una base ortonormal de V^* bien orientada, entonces vale que $*\alpha_I = \text{sgn}(I) \cdot \alpha_{I^c}$.

- Demostración: Basta con verificar que $\text{sgn}(I) \cdot \alpha_{I^c}$ satisface la propiedad que define a $*$ α_I . Si $|I| = k$, debemos ver que

$$\alpha_I \wedge \tau = \langle \text{sgn}(I) \cdot \alpha_{I^c}, \tau \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_{n-k}(V)$$

Basta con probarlo sobre una base de $A_{n-k}(V)$, convenientemente lo haremos sobre la base ortonormal $\{\alpha_J : |J| = n - k\}$. Si $J \neq I^c$, el lado derecho de la igualdad da 0, por la ortogonalidad de la base, y el lado izquierdo da 0 porque I y J comparten al menos un índice en común. Si $J = I^c$, entonces el lado derecho da $\text{sgn}(I) \cdot dv$, por la ortonormalidad de la base, y el lado izquierdo da $\alpha_I \wedge \alpha_{I^c} = \text{sgn}(I) \cdot \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$. Como $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es una base ortonormal bien orientada, $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = dv$.

Por ejemplo, sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ la base dual de la base canónica en \mathbb{R}^5 con el producto interno y orientación usual, entonces $*$ $(\alpha_1 \wedge \alpha_3) = -\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$ porque la permutación $(1,3,2,4,5)$ es impar. Usando este lema, podemos probar que el operador estrella de Hodge es una isometría

- Demostración: Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ una base ortonormal de V^* bien orientada, basta con ver que $\langle * \alpha_I, * \alpha_J \rangle = \langle \alpha_I, \alpha_J \rangle$ para todo $|I|, |J| = k$. Tenemos que

$$\langle * \alpha_I, * \alpha_J \rangle = \text{sgn}(I) \cdot \text{sgn}(J) \cdot \langle \alpha_{I^c}, \alpha_{J^c} \rangle$$

Si $I \neq J$, entonces $I^c \neq J^c$ así que tanto $\langle \alpha_I, \alpha_J \rangle$ como $\langle \alpha_{I^c}, \alpha_{J^c} \rangle$ dan 0 y vale la igualdad. Si $I = J$

$$\langle * \alpha_I, * \alpha_I \rangle = \text{sgn}(I)^2 \cdot \langle \alpha_{I^c}, \alpha_{I^c} \rangle = 1 = \langle \alpha_I, \alpha_I \rangle$$

Como corolario, tenemos que

$$\tau \wedge * \omega = \langle \tau, \omega \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_k(V)$$

Pues $\tau \wedge (* \omega) = \langle * \tau, * \omega \rangle \cdot dv = \langle \tau, \omega \rangle \cdot dv$. Esta propiedad también caracteriza a $*$ ω y es común definirlo de esta manera. Otro corolario que obtenemos es

$$** \omega = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \omega$$

En particular $*$ es inversible con inversa $*^{-1} = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot *$. Para verlo, por definición, $** \omega$ está caracterizado por la propiedad

$$* \omega \wedge \tau = \langle ** \omega, \tau \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_k(V)$$

Y por el corolario que acabamos de ver, para todo $\tau \in A_k(V)$ tenemos que

$$* \omega \wedge \tau = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \tau \wedge * \omega = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \langle \tau, \omega \rangle \cdot dv = \langle (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \omega, \tau \rangle \cdot dv$$

Si el producto interno en $A_k(V)$ lo extendemos a un producto hermitiano en $A_k(V)^\mathbb{C}$ y extendemos el operador estrella de Hodge $*$: $A_k(V)^\mathbb{C} \rightarrow A_{n-k}(V)^\mathbb{C}$, este está caracterizado por cualquiera de las siguientes propiedades

$$\omega \wedge \bar{\tau} = \langle * \omega, \tau \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_{n-k}(V)^\mathbb{C} \quad ; \quad \tau \wedge \overline{* \omega} = \langle \tau, \omega \rangle \cdot dv \quad \forall \tau \in A_k(V)$$

Y siguen valiendo las propiedades $\langle * \omega, * \tau \rangle = \langle \omega, \tau \rangle$ y $** \omega = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \omega$. Además, es claro que $\overline{* \omega} = * \bar{\omega}$.

Si V tiene dimensión $2n$ y lo equipamos con una estructura compleja J que sea una isometría, tenemos la siguiente proposición

- Proposición: Si $\omega \in A^{p,q}(V)$, entonces $*\omega \in A^{n-q,n-p}(V)$

Para demostrar la proposición, necesitamos el siguiente lema

- Lema: Para todo $\omega \in A^{p,q}(V)$ no nulo existe un $\tau \in A^{n-p,n-q}(V)$ con $\omega \wedge \tau \neq 0$
- Demostración: Sea $\omega \in A^{p,q}(V)$ tal que $\omega \wedge \tau = 0$ para todo $\tau \in A^{n-p,n-q}(V)$, queremos probar que $\omega = 0$. Tenemos que

$$\langle *\omega, \tau \rangle = 0 \quad \forall \tau \in A^{n-q,n-p}(V)$$

Denotemos $k = p + q$. Si descomponemos

$$*\omega = \sum_{i+j=2n-k} \tilde{\omega}_{ij}$$

Con $\tilde{\omega}_{ij} \in A^{i,j}(V)$, por la ortogonalidad de la descomposición tenemos que

$$0 = \langle *\omega, \tau \rangle = \sum_{i+j=2n-k} \langle \tilde{\omega}_{ij}, \tau \rangle = \langle \tilde{\omega}_{n-q,n-p}, \tau \rangle \quad \forall \tau \in A^{n-q,n-p}(V)$$

Tomando $\tau = \tilde{\omega}_{n-q,n-p}$, concluimos que $\tilde{\omega}_{n-q,n-p} = 0$. Luego

$$\|\omega\|^2 \cdot dv = \omega \wedge \overline{*\omega} = \sum_{i+j=2n-k} \omega \wedge \overline{\tilde{\omega}_{ij}} = \omega \wedge \overline{\tilde{\omega}_{n-q,n-p}} = 0$$

La anteúltima igualdad es porque $\omega \wedge \overline{\tilde{\omega}_{ij}} \in A^{p+j,q+i}(V)$ que da 0 siempre que $(p+j, q+i) \neq (n, n)$. Concluimos entonces que $\|\omega\|^2 = 0$ y $\omega = 0$, como queríamos ver.

- Demostración Proposición: Denotemos nuevamente $k = p + q$. Como $\overline{*\omega} \in A_{2n-k}(V)^{\mathbb{C}}$, descomponemos

$$\overline{*\omega} = \sum_{i+j=2n-k} \tilde{\omega}_{ij}$$

Con $\tilde{\omega}_{ij} \in A^{i,j}(V)$. Nuestro objetivo es ver que $\tilde{\omega}_{r,s} = 0$ para todo $(r, s) \neq (n-p, n-q)$, así $*\omega = \overline{\tilde{\omega}_{n-p,n-q}} \in A^{n-q,n-p}(V)$. Si $\tilde{\omega}_{r,s} \neq 0$, por el lema existe un $\tau \in A^{n-r,n-s}(V)$ tal que $\tau \wedge \tilde{\omega}_{r,s} \neq 0$. Luego

$$\langle \tau, \omega \rangle \cdot dv = \tau \wedge \overline{*\omega} = \sum_{i+j=2n-k} \tau \wedge \tilde{\omega}_{ij} = \tau \wedge \tilde{\omega}_{r,s} \neq 0$$

La última igualdad es porque $\tau \wedge \tilde{\omega}_{ij} \in A^{n+i-r,n+j-s}(V)$ da 0 siempre que $(n+i-r, n+j-s) \neq (n, n)$. Por la ortogonalidad de la descomposición, si $(n-r, n-s) \neq (p, q)$ tendríamos que $\langle \tau, \omega \rangle = 0$, en cuyo caso $\tilde{\omega}_{r,s} = 0$. Esto termina la demostración.

El Operador $*$ en Variedades Riemannianas

Sea M una variedad Riemanniana orientada de dimensión n y sea $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces definimos $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ vía $(*\omega)_p := *\omega_p$. Para ver que efectivamente $*\omega$ es suave, tomamos un marco local (por ejemplo, el inducido por una carta) y aplicándole Gram-Schmidt obtenemos un marco ortonormal, se lo puede suponer orientado (si no,

cambiamos el orden). Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ su marco dual, usando que $*$ es $C^\infty(M)$ -lineal (pues es lineal en cada tangente), vemos que

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I \cdot \alpha_I \Rightarrow * \omega = \sum_{|I|=k} f_I \cdot * \alpha_I = \sum_{|I|=k} \text{sgn}(I) \cdot f_I \cdot \alpha_{I^c}$$

Así que $* \omega$ es suave. Más aún, acabamos de describir un método para calcular $* \omega$. Al operador $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ también lo llamamos “El operador estrella de Hodge”. Recuerdo que si \mathcal{g}_p es el producto interno en $T_p(M)$, denotamos también \mathcal{g}_p al producto interno inducido en $A_k(T_p(M))$. Luego, si $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces $* \omega$ es la única $(n - k)$ -forma que satisface cualquiera de las siguientes propiedades

$$\omega \wedge \tau = \mathcal{g}(* \omega, \tau) \cdot dV \quad \forall \tau \in \Omega^{n-k}(M) \quad ; \quad \tau \wedge * \omega = \mathcal{g}(\tau, \omega) \cdot dV \quad \forall \tau \in \Omega^k(M)$$

En particular, si M es compacta, la segunda propiedad nos da una forma alternativa de calcular el producto interno en $\Omega^k(M)$.

$$\langle \omega, \tau \rangle := \int_M \mathcal{g}(\omega, \tau) dV = \int_M \tau \wedge * \omega$$

Por lo que vimos del operador $*$ en espacios vectoriales, en variedades Riemannianas el operador estrella de Hodge es inversible con inversa $*^{-1} = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot *$. De hecho, si n es impar entonces $k \cdot (n - k)$ es un número par así que $*^{-1} = *$ y si n es par entonces $k \cdot (n - k) \equiv k \pmod{2}$ así que $*^{-1} = (-1)^k \cdot *$. También, por lo que vimos en espacios vectoriales, $\mathcal{g}(* \omega, * \tau) = \mathcal{g}(\omega, \tau)$ y por lo tanto

$$\langle * \omega, * \tau \rangle := \int_M \mathcal{g}(* \omega, * \tau) dV = \int_M \mathcal{g}(\omega, \tau) dV = \langle \omega, \tau \rangle$$

Así que el operador $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ es una isometría.

Si extendemos a la complexificación $*$: $\Omega^k(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^{n-k}(M)^\mathbb{C}$ y extendemos el producto interno de $\Omega^k(M)$ a un producto interno hermitiano \mathcal{g} en $\Omega^k(M)^\mathbb{C}$, entonces $*$ está caracterizado por

$$\omega \wedge \bar{\tau} = \mathcal{g}(* \omega, \tau) \cdot dV \quad \forall \tau \in \Omega^{n-k}(M)^\mathbb{C} \quad ; \quad \tau \wedge \overline{* \omega} = \mathcal{g}(\tau, \omega) \cdot dV \quad \forall \tau \in \Omega^k(M)^\mathbb{C}$$

Y siguen valiendo las propiedades $\langle * \omega, * \tau \rangle = \langle \omega, \tau \rangle$ y $** \omega = (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \omega$. Además

$$\langle \omega, \tau \rangle = \int_M \mathcal{g}(\omega, \tau) dV = \int_M \tau \wedge \overline{* \omega}$$

Si M es una variedad hermitiana, por lo demostrado en el caso de espacios vectoriales, vemos que si $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ entonces $* \omega \in \Omega^{n-q,n-p}(M)$.

2.2.3 Construcción de Operadores Adjuntos

Si M es una variedad Riemanniana/Hermitiana compacta, vimos cómo definir un producto interno en $\Omega^k(M)$, que se extiende a un producto interno hermitiano en $\Omega^k(M)^\mathbb{C}$. Veamos que, con dicho producto interno, el diferencial de formas d y los operadores de Dolbeault $\partial, \bar{\partial}$ tienen adjunta. También veremos que, si M es una

variedad Kähler con forma de Kähler \hbar , entonces el operador $L : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2}(M)$ definido por $L(\omega) = \hbar \wedge \omega$ tiene adjunta. Este último operador, llamado “operador de Lefschetz”, será importante más adelante.

- **Adjunta de d :** Si M es una variedad Riemanniana compacta y orientada, la adjunta de $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ es $d^* = (-1)^k \cdot *^{-1} d *$

Demostremos esto. Sean $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ y $\tau \in \Omega^k(M)$, tenemos que

$$d(\omega \wedge * \tau) = d\omega \wedge * \tau + (-1)^{k-1} \cdot \omega \wedge d(* \tau)$$

Integrando de ambos lados, el lado izquierdo de la igualdad se anula (por Stokes) así que

$$\langle d\omega, \tau \rangle = \int_M d\omega \wedge * \tau = (-1)^k \cdot \int_M \omega \wedge d(* \tau)$$

Por otro lado

$$\langle \omega, d^*(\tau) \rangle = (-1)^k \cdot \langle \omega, *^{-1} d(* \tau) \rangle = (-1)^k \cdot \int_M \omega \wedge d(* \tau)$$

- **Observación 1:** Si extendemos $d : \Omega^{k-1}(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^k(M)^\mathbb{C}$, entonces el operador $d^* = (-1)^k \cdot *^{-1} d *$ sigue siendo la adjunta de d .
- **Observación 2:** Si M tiene dimensión par, $*^{-1} = (-1)^k \cdot *$ así que $d^* = - * d *$.

- **Adjunta de ∂ y $\bar{\partial}$:** Si M es una variedad hermitiana compacta, entonces la adjunta del operador $\partial : \Omega^{k-1}(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^k(M)^\mathbb{C}$ es $\partial^* = - * \bar{\partial} *$ y la adjunta del operador $\bar{\partial} : \Omega^{k-1}(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^k(M)^\mathbb{C}$ es $\bar{\partial}^* = - * \partial *$.

Veamos que $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ (la otra demostración es análoga). Sean $\omega \in \Omega^{k-1}(M)^\mathbb{C}$ y sea $\tau \in \Omega^k(M)^\mathbb{C}$, tenemos que

$$\bar{\partial}(\omega \wedge * \bar{\tau}) = \bar{\partial}\omega \wedge * \bar{\tau} + (-1)^{k-1} \cdot \omega \wedge \bar{\partial}(* \bar{\tau})$$

Notar que $\bar{\partial}(* \bar{\tau}) = \overline{\partial(* \tau)}$. Integrando de ambos lados la ecuación, el lado izquierdo de la igualdad da 0 (por el teorema de Stokes para $\bar{\partial}$) así que

$$\langle \bar{\partial}\omega, \tau \rangle = \int_M \bar{\partial}\omega \wedge * \bar{\tau} = (-1)^k \cdot \int_M \omega \wedge \overline{\partial(* \tau)}$$

Por otro lado

$$\langle \omega, \bar{\partial}^*(\tau) \rangle = \int_M \omega \wedge * \overline{\partial(* \tau)} = \int_M \omega \wedge \overline{- * \partial(* \tau)} = (-1)^k \cdot \int_M \omega \wedge \overline{\partial(* \tau)}$$

Usamos que $\partial(* \tau) \in \Omega^{2n-k+1}(M)$ y M tiene dimensión real par, así que $*^2 \partial(* \tau) = (-1)^{2n-k+1} \cdot \partial(* \tau)$.

- **Observación 1:** Como $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$ y $* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{n-q,n-p}(M)$ entonces $\bar{\partial}^* = - * \bar{\partial} * : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p-1,q}(M)$. Análogamente tenemos que $\bar{\partial}^* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q-1}(M)$

- Observación 2: Los operadores $\partial^*, \bar{\partial}^*$ heredan varias propiedades de ∂ y $\bar{\partial}$
 $d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$; $\partial^* \partial^* = 0$; $\partial^* \bar{\partial}^* = -\bar{\partial}^* \partial^*$; $\bar{\partial}^* \bar{\partial}^* = 0$
- **Adjunta de L :** Si M es una variedad Kähler compacta, entonces la adjunta del operador $L : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2}(M)$ definido por $L(\omega) = \mathcal{L} \wedge \omega$ es $L^* = *^{-1} L *$

Esta demostración es particularmente sencilla

$$\langle \omega, *^{-1} L(* \tau) \rangle = \int_M \omega \wedge L(* \tau) = \int_M \omega \wedge \mathcal{L} \wedge (* \tau) = \int_M \mathcal{L} \wedge \omega \wedge (* \tau) = \langle L(\omega), \tau \rangle$$

- Observación 1: Si extendemos $L : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+2}(M)^{\mathbb{C}}$, entonces la adjunta de L seguirá siendo $L^* = *^{-1} L *$.
- Observación 2: Como $L : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q+1}(M)$ (porque $\mathcal{L} \in \Omega^{1,1}(M)$) y como $* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{n-q,n-p}(M)$, entonces $L^* : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p-1,q-1}(M)$.

Notar que los operadores $d^*, \partial^*, \bar{\partial}^*, L^*$ están bien definidos incluso si la variedad no es compacta, en cuyo caso se les llama “operadores adjuntos formales”.

Identidades de Kähler

Si M es una variedad Kähler de dimensión compleja n , las identidades de Kähler nos describen el conmutador entre el operador de Lefschetz y los operadores de formas que exhibimos hasta el momento. Recuerdo que $[f, g] := f \circ g - g \circ f$.

- i) $[L, d] = 0$; $[L, \partial] = 0$; $[L, \bar{\partial}] = 0$
- ii) $[L, d^*] = i \cdot (\bar{\partial} - \partial)$; $[L, \partial^*] = i \cdot \bar{\partial}$; $[L, \bar{\partial}^*] = -i \cdot \partial$
- iii) $[L, L^*] = (k - n) \cdot \text{Id}$ en $\Omega^k(M)$

Para ver que $[L, d] = 0$, recordemos que una forma de Kähler $\mathcal{L} \in \Omega^2(M)$ es cerrada así que, si $\omega \in \Omega^k(M)$

$$d(L(\omega)) = d(\mathcal{L} \wedge \omega) = d\mathcal{L} \wedge \omega + \mathcal{L} \wedge d\omega = \mathcal{L} \wedge d\omega = L(d\omega)$$

Similarmente se demuestra que $[L, \partial] = 0 = [L, \bar{\partial}]$, usando que $\partial \mathcal{L}, \bar{\partial} \mathcal{L} = 0$ y la regla del producto. La demostración del segundo y tercer ítem se puede encontrar en [30] (Proposición 6.5 y 6.19 respectivamente).

2.2.4 Formas Armónicas y el Teorema de Hodge

Si M es una variedad Riemanniana orientada y compacta, vimos que tenemos un producto interno en $\Omega^k(M)$ y que el operador $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ tiene un operador adjunto $d^* : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$. Para $k = 0$, identificando $\Omega^1(M) \equiv \mathcal{X}(M)$ y $\Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$, se puede verificar que $d^*(X) = \text{div}(X)$ (tomando marcos ortonormales y usando que $d^* = (-1)^k \cdot *^{-1} d *$). En particular, si $f \in C^\infty(M)$, entonces $d^* df = \text{div}(\nabla f) = \Delta f$. Podríamos pensar a $d^* d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ como una generalización del Laplaciano, pero para que la teoría funcione bien debemos definir $\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ vía $\Delta := d^* d + d d^*$. Notar que $d d^* f = 0$ si $f \in C^\infty(M)$ así que nuestra definición sigue siendo el Laplaciano usual cuando $k = 0$.

- Observación 1: $\langle \Delta\omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle \omega, \Delta\tilde{\omega} \rangle$ para todo $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$, es decir, es un operador autoadjunto.
- Observación 2: $\Delta\omega = 0$ si y solo si $d\omega = 0$ y $d^*\omega = 0$. En dicho caso decimos que ω es una forma armónica. Denotamos $\mathcal{H}^k(M)$ al espacio de formas armónicas.

La primera observación vale porque

$$\langle \Delta\omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle dd^*\omega, \tilde{\omega} \rangle + \langle d^*d\omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle d^*\omega, d^*\tilde{\omega} \rangle + \langle d\omega, d\tilde{\omega} \rangle$$

Que es simétrico si intercambiamos ω con $\tilde{\omega}$. En cuanto a la segunda observación, la vuelta es trivial y para la ida usamos la igualdad que acabamos de probar

$$0 = \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle d^*\omega, d^*\omega \rangle + \langle d\omega, d\omega \rangle = \|d^*\omega\|^2 + \|d\omega\|^2 \Rightarrow d^*\omega = 0 \text{ y } d\omega = 0$$

- Observación 3: Si hubiésemos definido $\Delta\omega := d^*d\omega$, entonces seguiría siendo un operador autoadjunto que generaliza al Laplaciano de funciones, pero tendríamos que $\Delta\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0$.
- Observación 4: El Laplaciano está bien definido incluso cuando M no es compacto. Sin embargo, en dicho caso, no está bien definido el producto interno en $\Omega^k(M)$ y por lo tanto no es cierta la observación 2.
- Observación 5: Si M es compacto, sea $f \in C^\infty(M)$, entonces $\Delta f = 0$ si y solo si f es constante.

Las formas armónicas están caracterizadas de la siguiente forma

- Proposición: Sea M una variedad Riemanniana, orientada y compacta, una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es armónica si y solo si es cerrada y minimiza la norma en su clase de de-Rham
- Demostración Ida: Sea ω una forma armónica y sea $\tilde{\omega} \in [\omega]$, escribamos $\tilde{\omega} = \omega + d\tau$. Tenemos que

$$\|\tilde{\omega}\|^2 = \|\omega\|^2 + \|d\tau\|^2 + 2\langle \omega, d\tau \rangle$$

Pero

$$\langle \omega, d\tau \rangle = \langle d^*\omega, \tau \rangle = 0$$

Pues ω es armónica. Luego

$$\|\tilde{\omega}\|^2 = \|\omega\|^2 + \|d\tau\|^2 \geq \|\omega\|^2 \Rightarrow \|\tilde{\omega}\| \geq \|\omega\|$$

Demostración Vuelta: Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada de norma mínima dentro de su clase de de-Rham, si $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ entonces

$$\|\omega\| \leq \|\omega + t \cdot d\tilde{\omega}\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Elevando al cuadrado ambas partes

$$\|\omega\|^2 \leq \|\omega\|^2 + 2t \cdot \langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle + t^2 \cdot \|d\tilde{\omega}\|^2$$

Reordenando

$$0 \leq t \cdot (2\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle + t \cdot \|d\tilde{\omega}\|^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Así que debe ser

$$2\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle + t \cdot \|d\tilde{\omega}\|^2 \geq 0 \quad \forall t > 0 \quad ; \quad 2\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle + t \cdot \|d\tilde{\omega}\|^2 \leq 0 \quad \forall t < 0$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$2\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle \geq 0 \quad ; \quad 2\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle \leq 0$$

Por lo que $\langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle = 0$ para todo $\tilde{\omega} \in \Omega^{k-1}(M)$. Luego

$$\langle d^*\omega, \tilde{\omega} \rangle = \langle \omega, d\tilde{\omega} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\omega} \in \Omega^{k-1}(M)$$

Así que $d^*\omega = 0$. Como ω era cerrada, concluimos que ω es armónica.

Notar que la clase de de-Rham de una forma cerrada $\omega \in \Omega^k(M)$ es un subespacio afín de $\Omega^k(M)$ pues $[\omega] = \omega + d(\Omega^{k-1}(M))$ y d es lineal. Luego, si $\Omega^k(M)$ fuese un espacio de Hilbert (es decir, si fuese completo), tendríamos garantizado que en toda clase de de-Rham tiene un único elemento de norma mínima. Por lo que vimos recién, tendríamos que toda clase de de-Rham contiene una única forma armónica. Si bien $\Omega^k(M)$ no es un espacio de Hilbert, este resultado es cierto y es conocido como “El Teorema de Hodge”.

- **Teorema de Hodge:** Sea M una variedad Riemanniana compacta y orientable, para toda forma cerrada $\omega \in \Omega^k(M)$ existe una única forma armónica en la clase de de-Rham $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$.

Corolario: La aplicación $\mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ dada por $\omega \rightarrow [\omega]$ es un isomorfismo lineal.

La demostración radica fuertemente en el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [30] (Teorema 5.22)

- **Teorema:** Sea M una variedad Riemanniana compacta y orientable, entonces

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta(\Omega^k(M))$$

En dimensión finita, es fácil ver que si $f : V \rightarrow V$ es un operador lineal autoadjunto, entonces $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. Este último teorema, es una generalización de este resultado que, más aún, vale para operadores elípticos autoadjuntos, como el Laplaciano (ver [30], definición 5.17).

- Demostración del Teorema de Hodge: Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada, por el teorema previo existen $\gamma \in \mathcal{H}^k(M)$ y $\tau \in \Omega^k(M)$ con $\omega = \gamma + dd^*\tau + d^*d\tau$. Como ω, γ y $dd^*\tau$ son cerradas, $d^*d\tau$ debe ser cerrada. Luego $d\tau$ es armónica ya que $\Delta(d\tau) = dd^*d\tau + d^*dd\tau = 0$. Entonces $d^*(d\tau) = 0$ así que $\omega = \gamma + dd^*\tau$ y γ es una forma armónica que está en la clase de de-Rham de ω , como queríamos ver.

La unicidad ya la probamos pues, en un espacio con producto interno, hay a lo sumo un elemento que minimiza la norma de un subespacio afín.

2.2.5 La Descomposición de Hodge

El Teorema de Hodge, por ahora, no tiene nada que ver con la geometría compleja. Veamos cómo se relaciona. Vimos que si M es una variedad hermitiana compacta, y extendemos el producto interno de $\Omega^k(M)$ a $\Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$, entonces los operadores de Dolbeault $\partial, \bar{\partial} : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$ tienen adjuntas $\partial^*, \bar{\partial}^* : \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$,

que están bien definidos incluso si M no es compacta. Definimos los laplacianos $\Delta_\partial, \Delta_{\bar{\partial}} : \Omega^k(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^k(M)^\mathbb{C}$ vía

$$\Delta_\partial := \partial^* \partial + \partial \partial^* \quad ; \quad \Delta_{\bar{\partial}} := \bar{\partial}^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^*$$

Como $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ y $\partial^* : \Omega^{p+1,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M)$ entonces tenemos que $\Delta_\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M)$ y similarmente $\Delta_{\bar{\partial}} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M)$. Análogo a lo que le sucedía a d , el Laplaciano Δ_∂ es autoadjunto y $\Delta_\partial \omega = 0 \Leftrightarrow \partial \omega = 0$ y $\partial^* \omega = 0$, similarmente sucede con $\bar{\partial}$. Si el Laplaciano original $\Delta = d^* d + d d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$, lo extendemos a la complexificación $\Delta : \Omega^k(M)^\mathbb{C} \rightarrow \Omega^k(M)^\mathbb{C}$, entonces los tres laplacianos $\Delta, \Delta_\partial, \Delta_{\bar{\partial}}$ tienen mismo dominio y codominio. El siguiente teorema relaciona estos tres operadores cuando M es una variedad de Kähler.

- **Teorema:** Si M es una variedad de Kähler, entonces

$$\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2} \Delta$$

- **Demostración:** Veamos que $\Delta = 2 \cdot \Delta_{\bar{\partial}}$, la otra igualdad tiene una demostración análoga. Por definición tenemos que

$$\Delta = dd^* + d^*d = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \bar{\partial}^*) \circ (\partial + \bar{\partial})$$

Como M es una variedad Kähler, una de las identidades de Kähler nos dice que $[L, \bar{\partial}^*] = -i \cdot \partial$. Si reemplazamos $\partial = i \cdot (L \circ \bar{\partial}^* - \bar{\partial}^* \circ L)$ en la expresión de Δ y hacemos la distributiva, hay dos términos que se cancelan y dos términos en los que aparece $\bar{\partial}^* \bar{\partial}^* = 0$. Omitiendo esos cuatro términos, nos queda

$$\Delta = \bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial^* + \partial^* \bar{\partial} + i \cdot (\partial^* L \bar{\partial}^* + L \bar{\partial}^* \partial^* - \partial^* \bar{\partial}^* L - \bar{\partial}^* L \partial^*)$$

Notar que los primeros dos términos son $\Delta_{\bar{\partial}}$. Respecto al tercer y cuarto término, otra de las identidades de Kähler nos dice que $[L, \partial^*] = i \cdot \bar{\partial}$ así que, escribiendo $\bar{\partial} = -i \cdot [L, \partial^*]$ (y usando que $\partial^* \partial^* = 0$), vemos que

$$\partial^* \bar{\partial} = -i \cdot \partial^* \circ [L, \partial^*] = -i \cdot \partial^* L \partial^* = i \cdot [L, \partial^*] \circ \partial^* = -\bar{\partial} \partial^*$$

Por lo que el tercer y cuarto término se cancelan. Restaría ver que el último término es $\Delta_{\bar{\partial}}$. Si en la definición de $\Delta_{\bar{\partial}}$ reemplazamos $\bar{\partial} = -i \cdot (L \circ \partial^* - \partial^* \circ L)$ y hacemos la distributiva, obtenemos

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial} = i \cdot (\partial^* L \bar{\partial}^* - L \partial^* \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \partial^* L - \bar{\partial}^* L \partial^*)$$

Usando que $\partial^* \bar{\partial}^* = -\bar{\partial}^* \partial^*$ en el segundo y tercer término, obtenemos precisamente el último término en la expresión de Δ .

Así que, en variedades de Kähler, es lo mismo hablar de formas armónicas, formas ∂ -armónicas y formas $\bar{\partial}$ -armónicas. La principal razón por la cual nos es relevante este teorema, es por el siguiente corolario

- **Corolario:** Si M es una variedad Kähler, entonces $\omega \in \Omega^{p,q}(M) \Rightarrow \Delta \omega \in \Omega^{p,q}(M)$

Esto claramente vale para Δ_∂ (y $\Delta_{\bar{\partial}}$), por eso vale para Δ cuando M es Kähler. Denotamos

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) := \{\omega \in \Omega^{p,q}(M) : \Delta \omega = 0\}$$

Es el espacio de (p, q) -formas armónicas. Una consecuencia directa del corolario anterior es la siguiente proposición

- **Proposición:** Si M es una variedad de Kähler, entonces

$$\mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{k,0}(M) \oplus \mathcal{H}^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{0,k}(M)$$

- **Demostración:** Por la descomposición

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Sabemos que para todo $\omega \in \mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} \subseteq \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$ existen únicas $\omega_i \in \Omega^{k-i,i}(M)$ tales que $\omega = \omega_0 + \dots + \omega_k$, basta con probar que $\Delta\omega_i = 0$ para todo i . Claramente

$$\Delta\omega_0 + \dots + \Delta\omega_k = 0$$

Pues $\Delta\omega = 0$. Pero, como M es Kähler, $\Delta\omega_i \in \Omega^{k-i,i}(M)$ y, por la unicidad de descomposición que mencionamos al principio de la demostración, $\Delta\omega_i = 0$ para todo i .

Si M , además de ser Kähler, es compacta, el teorema de Hodge nos decía que la aplicación $\pi : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ definida por $\pi(\omega) = [\omega]$ es un isomorfismo lineal. Luego, la extensión $\pi : \mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo \mathbb{C} -lineal y, por la proposición anterior

$$H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} = \pi(\mathcal{H}^{k,0}(M)) \oplus \pi(\mathcal{H}^{k-1,1}(M)) \oplus \dots \oplus \pi(\mathcal{H}^{0,k}(M))$$

Afirmo que

$$\pi(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = \{[\omega] : \omega \in \Omega^{p,q}(M) \text{ cerrada}\}$$

Donde estamos pensando a los elementos de $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ como clases del complejo de cadenas $d : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$. A continuación hago la demostración, pero antes observemos que

$$H^{p,q}(M) := \{[\omega] : \omega \in \Omega^{p,q}(M) \text{ cerrada}\}$$

No depende de la métrica de Kähler. Tenemos entonces que

- **Descomposición de Hodge:** Si M es una variedad compleja compacta que admite alguna métrica de Kähler, entonces

$$H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} = H^{k,0}(M) \oplus H^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus H^{0,k}(M)$$

Siempre vale que la suma de dichos espacios da $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$, lo novedoso es que estén en suma directa. Notar que $H^{p,q}(M) = 0$ si $p > n$ ó $q > n$ así que la longitud de la descomposición va decreciendo a partir de $k = n$.

- **Corolario:** Sean $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$, si descomponemos

$$\omega = \omega_{k,0} + \omega_{k-1,1} + \dots + \omega_{0,k} ; \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{k,0} + \tilde{\omega}_{k-1,1} + \dots + \tilde{\omega}_{0,k}$$

Con $\omega_{p,q}, \tilde{\omega}_{p,q} \in \Omega^{p,q}(M)$, y si $[-]$ denota la clase de de-Rham, entonces

$$[\omega] = [\tilde{\omega}] \Leftrightarrow [\omega_{p,q}] = [\tilde{\omega}_{p,q}] \quad \forall p + q = k$$

Antes de demostrar la igualdad $\pi(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = H^{p,q}(M)$ que quedó pendiente, necesitamos probar la siguiente proposición

- Proposición: Si M es una variedad de Kähler compacta, entonces

$$\Omega^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) \oplus \Delta(\Omega^{p,q}(M))$$

➤ Demostración: Recordemos la descomposición

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta(\Omega^k(M))$$

Esto ya nos garantiza que los espacios en cuestión están en suma directa. Complexificando de ambos lados obtenemos

$$\Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} \oplus \Delta(\Omega^k(M)^{\mathbb{C}})$$

Sea $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ y sea $k := p + q$, entonces existen $\gamma \in \mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}}$ y $\tau \in \Omega^k(M)^{\mathbb{C}}$ tales que $\omega = \gamma + \Delta\tau$. Usando las descomposiciones

$$\mathcal{H}^k(M)^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{k,0}(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}^{0,k}(M); \quad \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Existen $\gamma_{i,j} \in \mathcal{H}^{i,j}(M)$, $\tau_{i,j} \in \Omega^{i,j}(M)$ tales que

$$\gamma = \gamma_{k,0} + \gamma_{k-1,1} + \dots + \gamma_{0,k}; \quad \tau = \tau_{k,0} + \tau_{k-1,1} + \dots + \tau_{0,k}$$

Luego

$$\omega = (\gamma_{k,0} + \Delta\tau_{k,0}) + (\gamma_{k-1,1} + \Delta\tau_{k-1,1}) + \dots + (\gamma_{0,k} + \Delta\tau_{0,k})$$

Pero $\Delta\tau_{i,j} \in \Omega^{i,j}(M)$, porque M es Kähler, así que $\gamma_{i,j} + \Delta\tau_{i,j} \in \Omega^{i,j}(M)$. Como la descomposición de ω es única, debe ser $\gamma_{i,j} + \Delta\tau_{i,j} = 0$ para $(i,j) \neq (p,q)$ así que $\omega = \gamma_{p,q} + \Delta\tau_{p,q}$.

Ahora sí, demostremos la igualdad $\pi(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = H^{p,q}(M)$.

- Demostración: La inclusión $\pi(\mathcal{H}^{p,q}(M)) \subseteq H^{p,q}(M)$ es clara, veamos la otra inclusión. Sea $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ cerrada, por la proposición que acabamos de probar existen $\gamma \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$ y $\tau \in \Omega^{p,q}(M)$ tales que $\omega = \gamma + dd^*\tau + d^*d\tau$. Como γ es armónica, es cerrada y como ω y $dd^*\tau$ también son cerradas, $d^*d\tau$ también debe serlo. Luego $d\tau$ es armónica pues $\Delta(d\tau) = d(d^*d\tau) + d^*(dd\tau) = 0 + 0$. Como $d\tau$ es armónica, entonces $d^*d\tau = 0$ así que $\omega = \gamma + dd^*\tau$ y $[\omega] = [\gamma]$.

Esto demuestra que toda clase de de-Rham de una (p,q) -forma contiene una única (p,q) -forma armónica (la unicidad la teníamos de antes). En particular, el isomorfismo de Hodge se restringe a un isomorfismo $\pi : \mathcal{H}^{p,q}(M) \rightarrow H^{p,q}(M)$.

Si M es Kähler, entonces $\Delta = 2\Delta_{\bar{\partial}}$ así que, si M además es compacta, podemos reemplazar en esta última demostración “ d ” por “ $\bar{\partial}$ ” y obtendremos que la proyección $\pi : \mathcal{H}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ dada por $\omega \rightarrow [\omega]$ es un epimorfismo. Similarmente a como las formas armónicas minimizan la norma en su clase de de-Rham, se puede probar que las formas $\bar{\partial}$ -armónicas en $\Omega^{p,q}(M)$ minimizan la norma en su clase de cohomología del complejo de Dolbeault $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$. De esto deducimos que la aplicación $\pi : \mathcal{H}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ es un isomorfismo lineal.

Si bien en esta tesis no hablamos de cohomología de haces, resulta de interés el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [30] (Lema 6.18)

- Teorema: $H^{p,q}(M)$ es canónicamente isomorfo a $H^q(M, \Omega^p(M))$

En síntesis, vimos que si M es Kähler compacta, los siguientes espacios son canónicamente isomorfos

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) \cong H^{p,q}(M) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \cong H^q(M, \Omega^p(M))$$

Algunas observaciones adicionales

Una observación simple, pero importante, respecto a los espacios $H^{p,q}$, es la siguiente

- Observación 1: $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M)$

Estamos tomando la conjugación de $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$, con $k = p + q$, que si lo pensamos como clases del complejo $d : \Omega^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^{k+1}(M)^{\mathbb{C}}$ es la operación $[\omega] := [\bar{\omega}]$. La observación es obvia pues $\overline{\Omega^{p,q}(M)} = \Omega^{q,p}(M)$.

Como mencionamos antes, no toda variedad compleja admite una métrica de Kähler pues, en principio, tenemos restricciones topológicas ($H_{\text{dR}}^{2k}(M) \neq 0$ para $k = 1, \dots, n$). Uno podría preguntarse, sin embargo, si la descomposición de Hodge vale aunque M no admita una métrica de Kähler. La respuesta es “no siempre” ya que, nuevamente, tenemos restricciones topológicas.

- Observación 2: Si M es una variedad compleja compacta tal que vale la descomposición de Hodge (por ejemplo si admite una métrica Kähler), entonces $\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^{2k-1}(M)$ es par para $k = 1, \dots, n$.

Esto es porque

$$\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^{2k-1}(M) = \sum_{i=0}^{2k-1} \dim_{\mathbb{C}} H^{2k-1-i,i}(M) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \dim_{\mathbb{C}} H^{2k-1-i,i}(M)$$

Pues $H^{p,q}$ es isomorfo a $H^{q,p}$ vía la conjugación. Las “Superficies de Hoph” son variedades complejas compactas de dimensión (compleja) 2 con $\dim H_{\text{dR}}^1(S) = 1$, así que son ejemplos de variedades complejas para las que no vale la descomposición de Hodge (en particular, no admiten una métrica Kähler).

- Observación 3: Si M es una variedad Kähler, entonces $H^{k,k}(M) \neq 0 \forall k = 1, \dots, n$

Esto es porque $\not\exists \kappa^k \in \Omega^{k,k}(M)$ es cerrada, pero no exacta. Esto lo demostramos en la sección 2.1.2 cuando vimos que $H_{\text{dR}}^{2k}(M) \neq 0$ para $k = 1, \dots, n$ cuando M es Kähler.

- Comentario: Si bien no definimos lo que son “Formas holomorfas” en una variedad compleja M , vale destacar que el espacio de k -formas holomorfas en M es isomorfo a $H^{k,0}(M)$ cuando M es Kähler compacta (ver [30], Corolario 7.6)

Calculemos un ejemplo, el espacio proyectivo complejo. Es sabido que

$$\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq 2n \text{ y es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Como $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad Kähler compacta, vale la descomposición de Hodge. Esto sumado a que $H^{k,k}(M) \neq 0$ nos permite concluir que

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \leq n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Estructuras de Hodge

Una estructura de Hodge de peso $k \in \mathbb{Z}$ es un par $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k})$ siendo H un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita y $H^{p,q} \subseteq H^{\mathbb{C}}$ subespacios complejos ($p, q \in \mathbb{Z}$) tales que

- i) $H^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$
- ii) $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$

Hasta ahora vimos dos ejemplos, las formas armónicas y la cohomología de de-Rham de una variedad Kähler compacta

- 1) $H = \mathcal{H}^k(M)$; $H^{p,q} = \mathcal{H}^{p,q}(M)$
- 2) $H = H_{\text{dR}}^k(M)$; $H^{p,q} = H^{p,q}(M)$

Un morfismo entre estructuras de Hodge $(H, H^{p,q}) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{H}^{p,q})$ es un morfismo lineal $f : H \rightarrow \tilde{H}$ tal que al extenderlo a la complexificación $f : H^{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{H}^{\mathbb{C}}$ satisface que $f(H^{p,q}) \subseteq \tilde{H}^{p,q}$. Si además $f : H \rightarrow \tilde{H}$ es un isomorfismo lineal, decimos que es un isomorfismo de estructuras de Hodge, en cuyo caso $f(H^{p,q}) = \tilde{H}^{p,q}$ y $f^{-1} : \tilde{H} \rightarrow H$ es un morfismo de estructuras de Hodge.

- Ejemplo 1: Si M es una variedad Kähler compacta, entonces el isomorfismo de Hodge $\pi : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es un isomorfismo de estructuras de Hodge
- Ejemplo 2: Si M y N son variedades de Kähler compactas y $f : M \rightarrow N$ es una función holomorfa, entonces $f^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es un morfismo de estructuras de Hodge.

De esta forma, las estructuras de Hodge forman una categoría. En dicha categoría tenemos definidas las siguientes operaciones (ver **[8]**)

- Si $f : H \rightarrow \tilde{H}$ es un morfismo de estructuras de Hodge, entonces $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ y $\text{Coker}(f)$ son estructuras de Hodge.
- Si H y \tilde{H} son estructuras de Hodge de peso n , entonces $H \oplus \tilde{H}$ es una estructura de Hodge de peso n .
- Si H y \tilde{H} son estructuras de Hodge de peso n y \tilde{n} (respectivamente), entonces $H \otimes \tilde{H}$ y $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(H, \tilde{H})$ son estructuras de Hodge de peso $n + \tilde{n}$ y $\tilde{n} - n$ (respectivamente).

En este último ítem, se puede ver la necesidad de pedir que el peso k de una estructura de Hodge sea un número entero, al igual que los p, q .

Toda la sección 2.3 “Estructuras Adicionales” tendrá como objetivo mostrar que la cohomología de de-Rham de una variedad proyectiva suave (más precisamente, la cohomología primitiva), tiene más estructura que la que describimos hasta ahora. Concretamente, veremos que se trata de una estructura de Hodge, íntegra y polarizada.

Por ahora tal vez parezca innecesaria la definición de “Estructura de Hodge”, pero en el capítulo 3 de esta tesis estudiaremos familias difeomorfas de variedades Kähler compactas $\{X_t\}_{t \in S}$ que me inducirán familias de estructuras de Hodge $(H_{\text{dR}}^k(X_t), H^{p,q}(X_t))_{t \in S}$. Entender cómo varían las estructuras de Hodge nos ayudará a entender cómo varía la estructura compleja en X_t . Esto es lo que tratará de medir el “Mapa de períodos” cuyo codominio, el “Dominio de Períodos”, es el conjunto de estructuras de Hodge sobre un espacio vectorial fijo H (en realidad es el conjunto de “filtraciones” de Hodge, ver sección 3.4).

2.3 Estructuras Adicionales

Vimos que la cohomología de de-Rham de una variedad Kähler compacta satisface la descomposición de Hodge, lo que nos da una “estructura de Hodge” abstracta. El objetivo de esta sección es probar que la cohomología de una variedad Kähler compacta tiene aún más estructura, es una “estructura de Hodge, íntegra y polarizada”. En la sección 3.4 se entenderá mejor por qué es importante reconocer esta estructura adicional para entender cómo varía la estructura compleja de una familia de variedades complejas X_t parametrizadas por t .

En la sección 2.3.1 definiremos la cohomología de de-Rham entera $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$, que es el conjunto de clases de de-Rham $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$ que integradas sobre cualquier cadena singular cerrada $\sigma \in H_k(M, \mathbb{Z})$ dan un número entero. Este conjunto es un subgrupo aditivo de $H_{\text{dR}}^k(M)$, y probaremos que $\text{rank } H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) = \dim H_{\text{dR}}^k(M)$ (lo que llamamos “un reticulado en $H_{\text{dR}}^k(M)$ ”). También veremos que $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ es cerrado por el producto wedge. Para probar estas dos propiedades, usaremos el teorema de de-Rham, que nos da un isomorfismo de álgebras graduadas entre la cohomología singular $H^*(M, \mathbb{R})$ (con el producto cup) y $H_{\text{dR}}^*(M)$ (con el producto wedge). Habremos visto entonces que la cohomología de de-Rham de una variedad Kähler compacta es una “estructura de Hodge íntegra”, esto es, una estructura de Hodge $(H, H^{p,q})$ equipada con un reticulado $H_{\mathbb{Z}} \subseteq H$.

Terminamos la sección 2.3.1 mostrando un ejemplo importante de clase de de-Rham entera: La forma Kähler de Fubini-Study en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (ver sección 2.1.3). Como consecuencia, toda subvariedad compleja de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite una forma Kähler cuya clase de de-Rham es entera, y esta propiedad, en variedades complejas compactas, es característica de las subvariedades de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (teorema de inmersión de Kodaira).

En las secciones 2.3.2 y 2.3.3 buscamos describir qué es una “estructura de Hodge polarizada”. Si bien en la cohomología de de-Rham podremos definir una función Q que tendrá propiedades en común con lo que vamos a llamar “polarización”, carece una propiedad clave, no es “definida positiva”. Para obtener dicha propiedad, nos restringiremos a la llamada “cohomología primitiva”, la cual sí será una estructura de Hodge polarizada.

Comenzamos la sección 2.3.2 exhibiendo los isomorfismos de Lefschetz $L^{n-k} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ y $L^{n-k} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$, siendo $L(\omega) := \ell \wedge \omega$. Definimos las formas primitivas $\Omega_o^k(M)$ como el conjunto de k -formas ω tales que $L^{n-k+1}(\omega) = 0$ (con $k \leq n$). Similarmente definimos el conjunto de clases de de-Rham primitivas $H_o^k(M)$ (esto es lo que llamamos “cohomología primitiva”), el conjunto de (p, q) -formas primitivas $\Omega_o^{p,q}(M)$ y el conjunto de (p, q) -clases primitivas $H_o^{p,q}(M)$. Estos espacios también cumplen descomposiciones como la de Hodge

$$\Omega_o^k(M)^{\mathbb{C}} = \Omega_o^{k,0}(M) \oplus \Omega_o^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega_o^{0,k}(M)$$

$$H_o^k(M)^{\mathbb{C}} = H_o^{k,0}(M) \oplus H_o^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus H_o^{0,k}(M)$$

A esta última descomposición la llamamos “descomposición de Hodge primitiva”. Estos espacios están relacionados con la cohomología de de-Rham y los espacios $H^{p,q}(M)$ vía la llamada “descomposición de Lefschetz”

$$H_{\text{dR}}^k(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq k/2} L^i \left(H_o^{k-2i}(M) \right) ; H^{p,q}(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq \min\{p,q\}} L^i \left(H_o^{p-i,q-i}(M) \right)$$

Notar que la cohomología primitiva $\left(H_o^k(M), H_o^{p,q}(M) \right)$ forma una estructura de Hodge.

Vamos a lo que diferencia la cohomología primitiva de la cohomología de de-Rham, la polarización (sección 2.3.3). Esto es: La función $Q : H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(\omega, \tau) := (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \int_M \kappa^{n-k} \wedge \omega \wedge \tau$$

Esta función induce una forma hermitiana H en $H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ que hace de la descomposición de Hodge una descomposición ortogonal. El problema es que H no es definida positiva. Para que sea definida positiva, debemos restringirnos a la cohomología primitiva, en cuyo caso la descomposición de Hodge primitiva también resulta una descomposición ortogonal. Esto nos dice que la cohomología primitiva de una variedad Kähler compacta es una estructura de Hodge polarizada $(H, H^{p,q}, Q)$ (ver definición en la sección 2.3.3).

Si $\kappa \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ (equivalentemente, si $M \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$), entonces tenemos en $H_o^k(M)$ el reticulado $H_o^k(M, \mathbb{Z}) := H_o^k(M) \cap H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ haciendo de la cohomología primitiva una estructura de Hodge íntegra. Más aún, si $\omega, \tau \in H_o^k(M, \mathbb{Z})$, entonces $Q(\omega, \tau) \in \mathbb{Z}$. Es decir, hay cierta “coherencia” entre el reticulado y la polarización. Esto es lo que llamamos una “Estructura de Hodge íntegra y polarizada”.

2.3.1 Cohomología de de-Rham Entera

El objetivo de esta sección es definir la “Cohomología de de-Rham entera” $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ y demostrar dos propiedades importantes

- Si $\omega \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ y $\tau \in H_{\text{dR}}^l(M, \mathbb{Z})$ entonces $\omega \wedge \tau \in H_{\text{dR}}^{k+l}(M, \mathbb{Z})$
- $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) \subseteq H_{\text{dR}}^k(M)$ es un reticulado

Para demostrar dichas propiedades tendremos que hablar del Teorema de de-Rham y la (co)homología singular. Al final exhibiremos un ejemplo importante de una clase de de-Rham entera, la clase de la forma Kähler de Fubini-Study.

Grupos Abelianos y Reticulados

Si V es \mathbb{R} -espacio vectorial, una manera de definir la complexificación de V era tensorizando con \mathbb{C} , $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, definiendo $k \cdot (v \otimes z) := v \otimes (k \cdot z)$ para todo $v \in V$ y todo $k, z \in \mathbb{C}$. En dicho caso, $v \rightarrow v \otimes 1$ es la inclusión $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$.

Similarmente, si G es un grupo abeliano (es decir, un \mathbb{Z} -módulo), podemos extender G a un \mathbb{R} -espacio vectorial definiendo $G_{\mathbb{R}} := G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ con $k \cdot (g \otimes r) := g \otimes (k \cdot r)$ para todo $g \in G$ y todo $k, r \in \mathbb{R}$. Sea $i : G \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ la función $i(g) := g \otimes 1$, si denotamos $T(G)$ a la torsión de G , tenemos que

- **Proposición:** Sea G un grupo abeliano finitamente generado, entonces vale que $\text{Ker}(i) = T(G)$. Más aún, si $\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\tilde{G} := \text{Im}(i) \cong G/T(G)$, entonces es una base real de $G_{\mathbb{R}}$. En particular $\dim G_{\mathbb{R}} = \text{rank } G$.
- **Demostración:** Por el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados, sabemos que $G \cong T(G) \oplus \mathbb{Z}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. Luego

$$(T(G) \oplus \mathbb{Z}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = (T(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) = 0 \oplus (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^n = \mathbb{R}^n$$
 Y la función $i : G \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ se corresponde con la función $j : T(G) \oplus \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que vale 0 en $T(G)$ y es la inclusión en $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Es claro que $\text{Ker}(j) = T(G)$ y que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una \mathbb{Z} -base de $\text{Im}(j) = \mathbb{Z}^n$, entonces es una \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^n .

En general, si V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, decimos que $L \subseteq V$ es un reticulado en V si es un subgrupo (con la suma) tal que $\text{rank } L = \dim V$. Equivalentemente, un reticulado es un subconjunto de V de la forma

$$L = \{k_1 \cdot v_1 + \dots + k_n \cdot v_n : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$$

Con $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . En particular, la proposición anterior nos dice que \tilde{G} es un reticulado en $G_{\mathbb{R}}$.

Sean V y \tilde{V} dos \mathbb{R} -espacios vectoriales y $f : V \rightarrow \tilde{V}$ una función lineal, si $L \subseteq V$ es un reticulado, en general no es cierto que $f(L) \subseteq \text{Im}(f)$ ni que $L \cap \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$ sean reticulados. Por ejemplo, sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + \sqrt{2} \cdot y$, entonces

$$f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \quad ; \quad \mathbb{Z}^2 \cap \text{Ker}(f) = \{(0; 0)\}$$

Que son grupos de rango 2 y 0 respectivamente, cuando para ser reticulados debían ser ambos rango 1. Tenemos, sin embargo, la siguiente equivalencia

- **Proposición:** Sean V y \tilde{V} dos \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión finita, sea $L \subseteq V$ un reticulado y sea $f : V \rightarrow \tilde{V}$ una función lineal, entonces son equivalentes
 - a) $L \cap \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$ es un reticulado
 - b) $f(L) \subseteq \text{Im}(f)$ es un reticulado
 - c) Existe un reticulado $\tilde{L} \subseteq \text{Im}(f)$ tal que $f(L) \subseteq \tilde{L}$
- **Demostración:** Para ver a) \Leftrightarrow b) notar que $f(L)$ es un grupo abeliano sin torsión (por ser subgrupo de \tilde{V}) y es finitamente generado (pues L lo es) así que es un grupo libre y, en particular, proyectivo. Luego, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \cap \text{Ker}(f) \xrightarrow{i} L \xrightarrow{f} f(L) \rightarrow 0$$

Se parte y $L \cong f(L) \oplus (L \cap \text{Ker}(f))$ así que

$$\text{rank } f(L) + \text{rank}(L \cap \text{Ker}(f)) = \text{rank } L = \dim V = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f)$$

De donde se ve que

$$\text{rank } f(L) = \dim \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{rank}(L \cap \text{Ker}(f)) = \dim \text{Ker}(f)$$

La implicación $b) \Rightarrow c)$ es trivial, veamos que $c) \Rightarrow b)$. Por los mismos argumentos de antes, $f(L)$ es un grupo libre y por lo tanto tiene una \mathbb{Z} -base $\{w_1, \dots, w_m\}$. Veamos que $\{w_1, \dots, w_m\}$ genera $\text{Im}(f)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, y por lo tanto $\text{rank } f(L) \geq \dim \text{Im}(f)$. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una \mathbb{Z} -base de L , entonces es una \mathbb{R} -base de V y por lo tanto $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ genera $\text{Im}(f)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Pero $f(v_1), \dots, f(v_n) \in f(L)$ que estaba generado por $\{w_1, \dots, w_m\}$, así que este último conjunto genera $\text{Im}(f)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial, que es lo que queríamos ver. Si tenemos la hipótesis adicional de que $f(L) \subseteq \tilde{L}$ para algún reticulado $\tilde{L} \subseteq \text{Im}(f)$, entonces

$$\text{rank } f(L) \leq \text{rank } \tilde{L} = \dim \text{Im}(f)$$

Así que $\text{rank } f(L) = \dim \text{Im}(f)$ lo que demuestra que $f(L) \subseteq \text{Im}(f)$ es un reticulado.

Si G es un grupo abeliano finitamente generado y libre, entonces $i : G \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ es un monomorfismo así que, identificando G con la imagen de i , vemos que $G \subseteq G_{\mathbb{R}}$ es un reticulado. Luego, de la proposición anterior deducimos el siguiente corolario

- Corolario: Sean G y H grupos abelianos, libres y finitamente generados, si tenemos un epimorfismo lineal $f : G_{\mathbb{R}} \rightarrow H_{\mathbb{R}}$ tal que $f(G) \subseteq H$, entonces $f(G) \subseteq H_{\mathbb{R}}$ y $\text{Ker}(f) \cap G \subseteq \text{Ker}(f)$ son reticulados

Esto es cierto porque $f(G) \subseteq H$, siendo $H \subseteq H_{\mathbb{R}}$ un reticulado. Este resultado nos será útil en la sección 2.3.3. Por último, veamos que a cada reticulado $L \subseteq V$ le corresponde un reticulado dual $L^* \subseteq V^*$, lo cual nos será relevante en breve

- Observación: Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita y sea L un reticulado en V , entonces $L^* := \{f \in V^* : f(L) \subseteq \mathbb{Z}\}$ es un reticulado en V^* que llamamos "El reticulado dual". Notar que L^* es isomorfo al conjunto de morfismos de grupos $f : L \rightarrow \mathbb{Z}$.

Homología Singular

Sea X un espacio topológico y sea R un anillo (nos interesa el caso $R = \mathbb{Z}$ ó \mathbb{R}), denotamos $C_k(X, R)$ el conjunto de R -cadenas singulares, es decir, el conjunto de combinaciones R -lineales de funciones continuas $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ (siendo $\Delta^k \subseteq \mathbb{R}^k$ un k -simplex orientado). Consideremos el complejo de cadenas singulares (ver [11])

$$\dots \rightarrow C_{k+1}(X, R) \xrightarrow{\partial} C_k(X, R) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X, R) \rightarrow \dots$$

La homología de este complejo la denotamos $H_k(X, R)$, la homología singular.

Si X es una variedad diferenciable, nos interesará trabajar con funciones $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ diferenciables. Esto significa que σ se puede extender a una función diferenciable en un abierto de \mathbb{R}^k . Denotamos $C_k^{\infty}(X, R)$ a las combinaciones R -lineales de dichas funciones. Usando la misma definición de ∂ , vemos que $\partial : C_k^{\infty}(X, R) \rightarrow C_{k-1}^{\infty}(X, R)$. Denotamos $H_k^{\infty}(X, R)$ a la homología de este complejo. Sea $I : C_k^{\infty}(X, R) \rightarrow C_k(X, R)$ la inclusión, entonces $I \circ \partial = \partial \circ I$ así que induce un morfismo $I_* : H_k^{\infty}(X, R) \rightarrow H_k(X, R)$.

En **[19]** (Teorema 18.7) se demuestra que i_* es un isomorfismo, así que la teoría funciona igual ya sea trabajemos con funciones continuas o funciones diferenciables.

Veamos cómo se relaciona $H_k(X, \mathbb{Z})$ con $H_k(X, \mathbb{R})$. La inclusión $i : C_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_k(X, \mathbb{R})$ satisface $i \circ \partial = \partial \circ i$ así que pasa a la homología $i_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$. Sea $H_k(X, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$ la función definida por $(\bar{\sigma}, k) \rightarrow k \cdot i_*(\bar{\sigma})$, al ser \mathbb{Z} -bilineal me induce una función \mathbb{Z} -lineal $m : H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$. De hecho, m es \mathbb{R} -lineal y, como consecuencia del “Teorema de Coeficientes Universales” para homología (ver **[11]**), es un isomorfismo. Notar que la inclusión $H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ compuesta con m da i_* . Como m es un isomorfismo, por los resultados obtenidos en la sección anterior concluimos que

- El núcleo de $i_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$ es la torsión de $H_k(X, \mathbb{Z})$
- $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z}) := \text{Im}(i_*)$ es un reticulado en $H_k(X, \mathbb{R})$, que como grupo abeliano es isomorfo a $H_k(X, \mathbb{Z})/\text{torsión}$.

Más adelante trabajaremos con el reticulado dual $\{f \in H_k(X, \mathbb{R})^* : f(\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z})) \subseteq \mathbb{Z}\}$.

Cohomología Singular

De ahora en adelante, si R es un anillo y M es un R -módulo, denotamos $M^* := \text{Hom}_R(M, R)$. Consideremos el complejo de cadenas

$$\dots \leftarrow C_{k+1}(X, R)^* \xleftarrow{\partial^*} C_k(X, R)^* \xleftarrow{\partial^*} C_{k-1}(X, R)^* \leftarrow \dots$$

Donde $\partial^* f := f \circ \partial$. Denotamos $H^k(X, R)$ a la cohomología de este complejo, la cohomología singular. Una ventaja que tiene la cohomología singular por sobre la homología singular, es que tiene una estructura de álgebra graduada. Sea $f \in C_k(X, R)^*$, $g \in C_l(X, R)^*$ y $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ continua (diferenciable), definimos

$$(f \smile g)(\sigma) := f(\sigma|_{[v_0, v_1, \dots, v_k]}) \cdot g(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]})$$

Siendo v_0, \dots, v_{k+l} los vértices (ordenados) de Δ^{k+l} y $[v_{i_0}, \dots, v_{i_m}] \subseteq \Delta^{k+l}$ la m -cara generada por dichos vértices. Extendiendo R -linealmente a todo $C_{k+l}(X, R)$, obtenemos el producto cup $f \smile g \in C_{k+l}(X, R)^*$. Se puede verificar la siguiente propiedad (ver **[11]**, Lema 3.6)

$$\partial^*(f \smile g) = \partial^* f \smile g + (-1)^k \cdot f \smile \partial^* g$$

A partir de esto, vemos que

- Si $\partial^* f = 0$ y $\partial^* g = 0$, entonces $\partial^*(f \smile g) = 0$
- Si $f = \partial^* \tilde{f}$ y $\partial^* g = 0$, entonces $f \smile g = \partial^*(\tilde{f} \smile g)$
- Si $\partial^* f = 0$ y $g = \partial^* \tilde{g}$, entonces $f \smile g = \partial^*(\pm f \smile \tilde{g})$

Es decir, producto de cerrados da cerrado, y cerrado por exacto da exacto. Luego, el producto cup pasa a la cohomología $\smile : H^k(X, R) \times H^l(X, R) \rightarrow H^{k+l}(X, R)$ y le da a $H^*(X, R) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H^k(X, R)$ estructura de álgebra graduada.

- Ejemplo: $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/\langle x^{n+1} \rangle$, el isomorfismo identifica x con un generador de $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (ver [11], Teorema 3.12)

La cohomología de un complejo de cadenas está relacionada con la homología a partir del “Teorema de Coeficientes Universales” (ver [11]). Sea $h : H^k(X, R) \rightarrow H_k(X, R)^*$ la aplicación $h(\bar{f})(\bar{\sigma}) := f(\sigma)$, es fácil ver que está bien definida y es un epimorfismo de R -módulos. Una consecuencia del teorema de coeficientes universales, es que si R es un cuerpo (por ejemplo $R = \mathbb{R}$), entonces h es un isomorfismo.

Así como en homología singular relacionamos $H_k(X, \mathbb{Z})$ con $H_k(X, \mathbb{R})$, veamos cómo se relaciona $H^k(X, \mathbb{Z})$ con $H^k(X, \mathbb{R}) \cong H_k(X, \mathbb{R})^*$. Todo $f : C_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ morfismo de grupos se extiende de manera única a un morfismo lineal $f : C_k(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ así que tenemos una inclusión $j : C_k(X, \mathbb{Z})^* \rightarrow C_k(X, \mathbb{R})^*$. Es claro que $j \circ \partial^* = \partial^* \circ j$ así que pasa a la cohomología $j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})$. La imagen de j_* son las clases de $H^k(X, \mathbb{R})$ que contienen alguna $f \in C_k(X, \mathbb{R})^*$ (con $\partial^* f = 0$) tal que $f(C_k(X, \mathbb{Z})) \subseteq \mathbb{Z}$. Luego, la imagen de $h \circ j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})^*$ es el conjunto de funciones lineales $f : H_k(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $f(\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z})) \subseteq \mathbb{Z}$, esto es, el reticulado dual de $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z}) \subseteq H_k(X, \mathbb{R})$.

- Observación: Es trivial verificar que $j(f - g) = j(f) - j(g)$ así que j_* también satisface dicha propiedad, es decir, j_* es un morfismo de álgebras graduadas.

Para resumir, en homología tenemos un morfismo $i_* : H_k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})$ cuya imagen $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z})$ es un reticulado en $H_k(X, \mathbb{R})$, y como grupo es isomorfo a $H_k(X, \mathbb{Z})/\text{torsión}$. En cohomología tenemos un morfismo $j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})$ de álgebras graduadas y un isomorfismo lineal $h : H^k(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})^*$ que, al componerlos, obtenemos un morfismo $H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})^*$ cuya imagen es el reticulado dual de $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z})$.

El Teorema de de-Rham y la Cohomología de de-Rham entera

Sea M una variedad diferenciable, sea $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ diferenciable y sea $\tilde{\sigma}$ una extensión diferenciable de σ a un abierto de \mathbb{R}^k , entonces definimos $\sigma^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(\Delta^k)$ vía $\sigma^*(\omega) := \tilde{\sigma}^*(\omega)|_{\Delta^k}$, cuyo resultado no depende de la extensión $\tilde{\sigma}$ elegida. Para cada $\omega \in \Omega^k(M)$ definimos

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^*(\omega)$$

Que es una integral en una región compacta de \mathbb{R}^k . Extendiendo linealmente la aplicación $\sigma \rightarrow \int_{\sigma} \omega$, obtenemos una función $C_k^{\infty}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. En [19] (Teorema 18.12) se demuestra el teorema de Stokes para este tipo de integrales. Concretamente, sea $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ y sea $\sigma \in C_k^{\infty}(X, \mathbb{R})$, vale que

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$$

En particular, si $\omega \in \Omega^k(M)$ es cerrada, obtenemos una función bien definida $H_k^\infty(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\sigma \rightarrow \int_\sigma \omega$. Más aún, dos formas que están en la misma clase de de-Rham inducen la misma función, nuevamente debido al teorema de Stokes. Tenemos entonces bien definida una función $s : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_k^\infty(X, \mathbb{R})^*$. Como $H_k^\infty(X, \mathbb{R}) \cong H_k(X, \mathbb{R})$, de ahora en adelante omitimos el ∞ en la notación.

- **Teorema de de-Rham:** La función $s : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})^*$ es un isomorfismo lineal que llamamos “El isomorfismo de de-Rham”. Más aún, si componemos el isomorfismo $h : H^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_k(M, \mathbb{R})^*$ con la inversa del isomorfismo de de-Rham, obtenemos un isomorfismo $s^{-1} \circ h : H^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ de álgebras graduadas.

La demostración de que s es un isomorfismo se puede encontrar en [19] y la demostración de que $s^{-1} \circ h$ es un isomorfismo de álgebras graduadas se puede encontrar en [16].

Vía el isomorfismo de de-Rham, los funcionales $f \in H_k(M, \mathbb{R})^*$ tales que $f(\tilde{H}_k(M, \mathbb{Z})) \subseteq \mathbb{Z}$ (el reticulado dual de $\tilde{H}_k(M, \mathbb{Z}) \subseteq H_k(M, \mathbb{R})^*$) están en correspondencia biyectiva con las clases de de-Rham $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$ tales que $\int_\sigma \omega \in \mathbb{Z}$ para todo $\sigma \in \tilde{H}_k(M, \mathbb{Z})$. Denotamos $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ a las clases que satisfacen dicha propiedad y las llamamos “clases de de-Rham enteras”. Como un isomorfismo lineal manda reticulados en reticulados, $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ es un reticulado en $H_{\text{dR}}^k(M)$.

Habíamos visto que $j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{R})$ es un morfismo de álgebras graduadas y que la imagen de $h \circ j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbb{R})^*$ es el reticulado dual de $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z}) \subseteq H_k(X, \mathbb{R})$. Como s me da un isomorfismo entre dicho reticulado y $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$, la imagen de $s^{-1} \circ h \circ j_* : H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$. Más aún, como $s^{-1} \circ h$ y j_* son morfismos de álgebras graduadas, la composición también lo es así que la imagen $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ es una subálgebra de $H_{\text{dR}}^k(M)$. En otras palabras, acabamos de probar lo siguiente

- Si $\omega \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ y $\tau \in H_{\text{dR}}^l(M, \mathbb{Z})$ entonces $\omega \wedge \tau \in H_{\text{dR}}^{k+l}(M, \mathbb{Z})$

La Forma Kähler de Fubini-Study

En la sección 2.1.3 describimos una forma de Kähler $\omega \in \Omega^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ que en coordenadas $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{C}^n$ se escribía como

$$\omega_{\varphi_k^{-1}(z_1, \dots, z_n)} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{(1 + \sum_i |z_i|^2) \cdot \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i - (\sum_i \bar{z}_i \cdot dz_i) \wedge (\sum_i z_i \cdot d\bar{z}_i)}{(1 + \sum_i |z_i|^2)^2}$$

El 2π dividiendo lo habíamos justificado diciendo que era para que su clase de de-Rham fuese entera, ahora podemos especificar a qué nos referíamos. La homología singular del espacio proyectivo $H_2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ es isomorfa a \mathbb{Z} . Sea $s : (\Delta^2)^o \rightarrow \mathbb{C}$ un difeomorfismo que preserve la orientación y sea $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definida por

$$\tilde{\varphi}(z) := (1 : z : 0 : \dots : 0)$$

Entonces $\sigma : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$ definida por

$$\sigma(x) := \begin{cases} (\tilde{\varphi} \circ s)(x) & \text{si } x \in (\Delta^2)^o \\ (0 : 1 : 0 : \dots : 0) & \text{si } x \in \partial\Delta^2 \end{cases}$$

Es un generador de la homología singular, cuya imagen se identifica con $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Para ver que la forma de Kähler ω tiene clase de de-Rham entera, basta con ver que $\int_{\sigma} \omega \in \mathbb{Z}$. Notar que ω es cerrada, por ser una forma de Kähler. Como $\partial\Delta^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene medida cero, tenemos que

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^2} \sigma^*(\omega) = \int_{(\Delta^2)^o} \sigma^*(\omega) = \int_{(\Delta^2)^o} s^*(\tilde{\varphi}^*(\omega)) = \int_{\mathbb{C}} \tilde{\varphi}^*(\omega)$$

Calculemos la $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\varphi}^*(\omega) = f \, dx \, dy$. Tenemos que

$$f(z) = \tilde{\varphi}^*(\omega)_z(1, i) = \omega_{\tilde{\varphi}(z)}(d\tilde{\varphi}_z(1), d\tilde{\varphi}_z(i))$$

Para calcular $\omega_{\tilde{\varphi}(z)}$, observemos que $\tilde{\varphi}(z) = \varphi_0^{-1}(z, 0, \dots, 0)$ y usando la descripción de ω en coordenadas de φ_0 .

$$\omega_{\tilde{\varphi}(z)} = \omega_{\varphi_0^{-1}(z, 0, \dots, 0)} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{(1 + |z|^2) \cdot \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i - |z|^2 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{(1 + |z|^2)^2}$$

Como $(\varphi_0 \circ \tilde{\varphi})(z) = (z, 0, \dots, 0)$, tenemos que

$$dz_i \circ d\tilde{\varphi}_z = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{C}} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

Así que

$$(dz_i \wedge d\bar{z}_i)(d\tilde{\varphi}_z(w_1), d\tilde{\varphi}_z(w_2)) = \begin{cases} w_1 \cdot \bar{w}_2 - w_2 \cdot \bar{w}_1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

De modo que

$$\omega_{\tilde{\varphi}(z)}(d\tilde{\varphi}_z(w_1), d\tilde{\varphi}_z(w_2)) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{w_1 \cdot \bar{w}_2 - w_2 \cdot \bar{w}_1}{(1 + |z|^2)^2}$$

Concluimos entonces que

$$f(z) = \omega_{\tilde{\varphi}(z)}(d\tilde{\varphi}_z(1), d\tilde{\varphi}_z(i)) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 + |z|^2)^2}$$

Finalmente, podemos integrar f haciendo cambio de variables en coordenadas polares, obteniendo

$$\int_{\sigma} \omega = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy = 1$$

Esto demuestra que la clase de de-Rham de ω es entera. Más aún, sabemos que $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}$ y la cohomología entera es un reticulado, $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ así que $[\omega]$ debe ser un generador de la cohomología entera (ya que la integral da 1).

Más en general, toda subvariedad compleja de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admite una forma de Kähler cuya clase de de-Rham es entera. Esto es porque, como veremos a continuación, si tenemos una función diferenciable $f : M \rightarrow N$, entonces $f^* : H_{\text{dR}}^k(N, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$. En particular, si $M \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una subvariedad compleja, $i : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es la inclusión y ω es la forma Kähler de Fubini-Study, entonces $\mathcal{K} := i^*(\omega)$ es una forma Kähler en M cuya clase de de-Rham es entera. El teorema de inmersión de Kodaira nos dice que, en variedades compactas, esta propiedad es característica de las subvariedades compactas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: Si M es una variedad Kähler compacta cuya clase de de-Rham de su forma Kähler $\mathcal{K} \in \Omega^2(M)$ es entera, entonces existe un embedding holomorfo $i : M \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ para algún N lo suficientemente grande (ver [17]).

Estructuras de Hodge Íntegras

Una estructura de Hodge íntegra de peso k , es una estructura de Hodge $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k})$ equipada con un reticulado $H_{\mathbb{Z}} \subseteq H$. De esta forma, si M es una variedad Kähler compacta, $(H_{\text{dR}}^k(M), H^{p,q}(M), H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}))$ es una estructura de Hodge íntegra de peso k . Un morfismo entre estructuras de Hodge íntegras $(H, H^{p,q}, H_{\mathbb{Z}}) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{H}^{p,q}, \tilde{H}_{\mathbb{Z}})$ es un morfismo de estructuras de Hodge $f : H \rightarrow \tilde{H}$ tal que $f(H_{\mathbb{Z}}) \subseteq \tilde{H}_{\mathbb{Z}}$. Por ejemplo, si M, N son variedades Kähler compactas y $f : M \rightarrow N$ es una función holomorfa, entonces $f^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es un morfismo de estructuras de Hodge íntegras ya que, si $\omega \in H_{\text{dR}}^k(N, \mathbb{Z})$ y $\sigma \in \tilde{H}_k(M, \mathbb{Z})$, entonces

$$\int_{\sigma} f^*(\omega) = \int_{\Delta^k} \sigma^* f^*(\omega) = \int_{\Delta^k} (f \circ \sigma)^*(\omega) = \int_{f_*(\sigma)} \omega \in \mathbb{Z}$$

Pues $f_* : \tilde{H}_k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_k(N, \mathbb{Z})$. De hecho, basta con que f sea diferenciable para que $f^*(H_{\text{dR}}^k(N, \mathbb{Z})) \subseteq H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$. Todas las construcciones que se hicieron en la categoría de estructuras de Hodge, funcionan de forma similar para estructuras de Hodge íntegras.

2.3.2 Cohomología Primitiva y la Descomposición de Lefschetz

Una variedad polarizada es una variedad compleja M equipada con la clase de de-Rham de una forma de Kähler \mathcal{K} en M . Un morfismo de variedades polarizadas $(M, [\mathcal{K}]) \rightarrow (\tilde{M}, [\tilde{\mathcal{K}}])$ es una función holomorfa $f : M \rightarrow \tilde{M}$ tal que $[f^*(\tilde{\mathcal{K}})] = [\mathcal{K}]$ (si pidiésemos que $f^*(\tilde{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$, estaríamos pidiendo que f sea una isometría entre variedades Hermitianas, la condición que pedimos es más débil). Históricamente, las clasificaciones de variedades polarizadas han sido más efectivas que las de variedades complejas, como por ejemplo, la clasificación de variedades abelianas polarizadas. Los invariantes que presentaremos en esta sección y en la siguiente, la cohomología primitiva y la polarización, son invariantes de variedades polarizadas, no de variedades complejas.

Isomorfismos de Lefschetz

Sea M una variedad de Kähler, con forma de Kähler \mathcal{K} , consideremos el operador de Lefschetz $L : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2}(M)$ definido por $L(\omega) := \mathcal{K} \wedge \omega$. Si componemos i veces este operador, obtenemos $L^i(\omega) = \mathcal{K}^i \wedge \omega$. La demostración del siguiente teorema, que

se basa en la identidad de Kähler $[L, L^*] = (k - n) \cdot \text{Id}$, se puede hallar en [30] (Lema 6.20)

- **Teorema:** Si M es una variedad Kähler de dimensión n y $k \leq n$, entonces el operador $L^{n-k} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ es un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos.

El operador estrella de Hodge también es un isomorfismo entre estos espacios. La diferencia está en que el operador de Lefschetz pasa a la cohomología, pues una de las identidades de Kähler nos decía que $L \circ d = d \circ L$, mientras que el operador estrella de Hodge no. Luego, podríamos preguntarnos si $L^{n-k} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$ es un isomorfismo. La respuesta es sí, pero para ello primero debemos ver el siguiente Lema

- **Lema:** Sea M una variedad Kähler, entonces $L \circ \Delta = \Delta \circ L$
- **Demostración:** Como M es Kähler, $\Delta = 2\Delta_\partial$ así que basta con ver que $L \circ \Delta_\partial = \Delta_\partial \circ L$. De las identidades de Kähler, tenemos que

$$\partial \circ L = L \circ \partial \quad ; \quad \partial^* \circ L = L \circ \partial^* - i \cdot \bar{\partial}$$

Y también sabíamos que $\bar{\partial} \partial = -\partial \bar{\partial}$, así que

$$\begin{aligned} \Delta_\partial \circ L &= \partial \partial^* L + \partial^* \partial L = \partial \partial^* L + \partial^* L \partial = \partial(L \partial^* - i \cdot \bar{\partial}) + (L \partial^* - i \cdot \bar{\partial}) \partial = \\ &= \partial L \partial^* - i \cdot \partial \bar{\partial} + L \partial^* \partial - i \cdot \bar{\partial} \partial = L \partial \partial^* + L \partial^* \partial - i \cdot \partial \bar{\partial} + i \cdot \bar{\partial} \partial = L \circ \Delta_\partial \end{aligned}$$

Esto nos dice que L manda formas armónicas en formas armónicas, es decir, $L : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow \mathcal{H}^{k+2}(M)$. Si M es Kähler compacta y $\pi : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ es el isomorfismo de Hodge, entonces $\pi^{-1} \circ L \circ \pi = L$. Más en general, $\pi^{-1} \circ L^i \circ \pi = L^i$. Ahora sí podemos demostrar que el isomorfismo de Lefschetz pasa a la cohomología

- **Teorema:** Si M es una variedad Kähler compacta de dimensión n y $k \leq n$, entonces el operador $L^{n-k} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$ es un isomorfismo lineal.
- **Demostración:** Como M es compacta, sabemos que la cohomología de de-Rham es un espacio vectorial de dimensión finita. Por la dualidad de Poincaré, sabemos que $H_{\text{dR}}^k(M) \cong H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$ así que tienen la misma dimensión. Luego, para ver que L^{n-k} es un isomorfismo, basta ver que $\text{Ker}(L^{n-k}) = 0$. Equivalentemente, bastaría con ver que $L^{n-k} : \mathcal{H}^k(M) \rightarrow \mathcal{H}^{2n-k}(M)$ tiene núcleo trivial. Pero sabemos que $L^{n-k} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ es un isomorfismo, así que esto es cierto.

Formas y Clases Primitivas

Vimos que $L^{n-k} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{2n-k}(M)$ es un isomorfismo para $k \leq n$. Más aún, en [3] (proposición 5.27) se demuestra que $L^i : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2i}(M)$ es inyectivo si y solo si $0 \leq i \leq n - k$ y sobreyectivo si y solo si $i \geq n - k$. Luego, la primera potencia de L que tiene núcleo no trivial es L^{n-k+1} . Esto nos lleva a definir "Formas Primitivas".

- **Definición:** Sea M una variedad Kähler de dimensión n , decimos que una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es primitiva si $k \leq n$ y $L^{n-k+1}(\omega) = 0$. Denotamos $\Omega_o^k(M)$ al conjunto de formas primitivas. Por convención $\Omega_o^k(M) = 0$ si $k > n$.

Usando nuevamente la identidad de Kähler $[L, L^*] = (k - n) \cdot \text{Id}$, se puede demostrar que $\omega \in \Omega^k(M)$ es primitiva si y solo si $L^*(\omega) = 0$ (ver [30], lema 6.24).

- **Definición:** Sea M una variedad Kähler de dimensión n , denotamos

$$H_o^k(M) := \text{Ker}(L^{n-k+1}) = \{[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M) : \omega \in \Omega_o^k(M)\}$$

Es el conjunto de clases primitivas, que llamamos "Cohomología Primitiva".

Notar que el operador $L^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-2}(M)$ no pasa a la cohomología ya que $[L^*, d] = i \cdot (\bar{\partial}^* - \partial^*) \neq 0$ (identidades de Kähler), así que no vale la equivalencia que valía para formas. Si $f : (M, [\mathcal{K}]) \rightarrow (\tilde{M}, [\tilde{\mathcal{K}}])$ es un morfismo entre variedades polarizadas, entonces $f^* : H_o^k(\tilde{M}) \rightarrow H_o^k(M)$ y si f es un isomorfismo entonces f^* también lo es. Las formas y clases primitivas son necesarias para enunciar la descomposición de Lefschetz.

Descomposición de Lefschetz

Usando los isomorfismos de Lefschetz mencionados anteriormente, se pueden demostrar los siguientes teoremas (cuya demostración se puede encontrar en [30], Proposición 6.22 y Corolario 6.26).

- **Teorema de Descomposición de Lefschetz:** Sea M una variedad Kähler

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq k/2} L^i(\Omega_o^{k-2i}(M))$$

- **Teorema de Descomposición de Lefschetz (en Homología):** Sea M una variedad Kähler compacta

$$H_{\text{dR}}^k(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq k/2} L^i(H_o^{k-2i}(M))$$

Veamos cómo se relaciona esto con la descomposición de Hodge. Para ello, primero debemos hablar de las (p, q) -formas/clases primitivas.

- **Definición:** Sea M una variedad Kähler, definimos

$$\Omega_o^{p,q}(M) := \Omega^{p,q}(M) \cap \Omega_o^{p+q}(M)^\mathbb{C}$$

El conjunto de (p, q) -formas primitivas. El conjunto de (p, q) -clases primitivas es

$$H_o^{p,q}(M) := \{[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)^\mathbb{C} : \omega \in \Omega_o^{p,q}(M)\}$$

Las (p, q) -formas primitivas también satisfacen la descomposición

$$\Omega_o^k(M)^\mathbb{C} = \Omega_o^{k,0}(M) \oplus \Omega_o^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega_o^{0,k}(M)$$

- **Demostración:** Teníamos la descomposición

$$\Omega^k(M)^\mathbb{C} = \Omega^{k,0}(M) \oplus \Omega^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus \Omega^{0,k}(M)$$

Esto ya prueba que los $\Omega_o^{p,q}(M)$ están en suma directa. Sea $\omega \in \Omega_o^k(M)^\mathbb{C}$, escribamos $\omega = \omega_{k,0} + \omega_{k-1,1} + \dots + \omega_{0,k}$ con $\omega_{i,j} \in \Omega^{i,j}(M)$, afirmo que son formas primitivas. Tenemos que

$$0 = L^{n-k+1}(\omega) = L^{n-k+1}(\omega_{k,0}) + \dots + L^{n-k+1}(\omega_{0,k})$$

Como $L^{n-k+1}(\omega_{i,j}) \in \Omega^{i+n-k+1, j+n-k+1}(M)$, por la unicidad de la descomposición en $\Omega^{2n-k+2}(M)^\mathbb{C}$, debe ser $L^{n-k+1}(\omega_{k,0}), \dots, L^{n-k+1}(\omega_{0,k}) = 0$ así que son formas primitivas.

Si M es una variedad Kähler compacta, entonces

$$H_o^k(M)^{\mathbb{C}} = H_o^{k,0}(M) \oplus H_o^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus H_o^{0,k}(M)$$

La demostración es análoga a la descomposición de formas primitivas, pero usando la descomposición de Hodge en vez de la descomposición de formas. Llamamos a esta descomposición “La descomposición de Hodge primitiva”. Como $L(\bar{\omega}) = \overline{L(\omega)}$ y $\overline{\Omega^{p,q}(M)} = \Omega^{q,p}(M)$, entonces $\overline{\Omega_o^{p,q}(M)} = \Omega_o^{q,p}(M)$ y $\overline{H_o^{p,q}(M)} = H_o^{q,p}(M)$. Es decir, si $k \leq n$, la cohomología primitiva $H_o^k(M)$ junto a los $H_o^{p,q}(M)$ forman una estructura de Hodge de peso k .

Ahora sí, relacionemos $H^{p,q}(M)$ con $H_o^{p,q}(M)$ a partir de la descomposición de Lefschetz. Si complexificamos la descomposición de Lefschetz

$$H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{0 \leq i \leq k/2} L^i(H_o^{k-2i}(M)^{\mathbb{C}})$$

Usando la descomposición de Hodge primitiva, tenemos que

$$L^i(H_o^{k-2i}(M)^{\mathbb{C}}) = L^i(H_o^{k-2i,0}(M)) \oplus L^i(H_o^{k-2i-1,1}(M)) \oplus \dots \oplus L^i(H_o^{0,k-2i}(M))$$

Si reemplazamos esto en la descomposición de Lefschetz complexificada, y agrupamos aquellas componentes que tienen mismo bigrado, es decir, que pertenecen a un mismo $H^{p,q}(M)$, comparando con la descomposición de Hodge obtenemos

- Proposición: Si M es una variedad Kähler compacta, entonces

$$H^{p,q}(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq \min\{p,q\}} L^i(H_o^{p-i,q-i}(M))$$

2.3.3 Polarización

En la sección pasada describimos la relación entre $H^{p,q}(M)$ y $H_o^{p,q}(M)$, cuando M es una variedad de Kähler compacta, vía la descomposición de Lefschetz. Ambas Cohomologías me inducen estructuras de Hodge. En el primer caso, tenemos una estructura de Hodge íntegra, con reticulado $H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$. Si $[\mathcal{L}] \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ (equivalentemente, si M es una subvariedad compleja de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ para algún $n \in \mathbb{N}$), entonces también tendremos una estructura de Hodge íntegra sobre la cohomología primitiva. Concretamente

$$H_o^k(M, \mathbb{Z}) := \{[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) : L^{n-k+1}([\omega]) = 0\}$$

es un reticulado en $H_o^k(M)$. Esto es porque $L^{n-k+1} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k+2}(M)$ es un epimorfismo que satisface $L^{n-k+1}(H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})) \subseteq H_{\text{dR}}^{2n-k+2}(M, \mathbb{Z})$ (ver en la sección 2.3.1, la parte “Grupos Abelianos y Reticulados”). La ventaja de la cohomología primitiva por sobre la cohomología de de-Rham, es que tendremos más estructura, tendremos una polarización.

Sea M una variedad compleja compacta de dimensión n , la dualidad de Poincaré nos da un “Pairing perfecto” $H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^{2n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ vía

$$(\omega, \tau) \rightarrow \int_M \omega \wedge \tau$$

Se puede verificar que el resultado no depende del representante de la clase de cohomología, y nos induce un isomorfismo $H_{\text{dR}}^k(M)^* \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$ por ser un Pairing perfecto. Si M además es Kähler, tenemos un isomorfismo $L^{n-k} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2n-k}(M)$ ($k \leq n$) y componiéndolo con el Pairing de Poincaré obtenemos la llamada “Polarización” $Q : H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q(\omega, \tau) := (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \int_M L^{n-k}(\omega) \wedge \tau = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \int_M \mathcal{L}^{n-k} \wedge \omega \wedge \tau$$

El signo que agregamos es para garantizar que valga una de las relaciones de Riemann-Hodge que mencionaremos en un instante. Observemos que Q es bilineal, simétrica si k es par y anti-simétrica si k es impar. Hay una única manera de extender a la complexificación $Q : H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} \times H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ para que sea \mathbb{C} -bilineal, y sigue dada por la misma fórmula. Esta función satisface las llamadas “Relaciones Bilineales de Riemann-Hodge”

- i) $Q(\omega, \tau) = 0$ si $\omega \in H^{p,q}(M)$ y $\tau \in H^{r,s}(M)$ con $(q, p) \neq (r, s)$
- ii) $i^{p-q} \cdot Q(\omega, \bar{\omega}) > 0$ si $\omega \in H_o^{p,q}(M)$ no nula

➤ Demostración i): Si $Q(\omega, \tau) \neq 0$ con $\omega \in H^{p,q}(M)$ y $\tau \in H^{r,s}(M)$ (y con $p + q = r + s = k$), queremos ver que $r = q$ y $s = p$. Tenemos que

$$\mathcal{L}^{n-k} \wedge \omega \wedge \tau \in H^{n-k+p+r, n-k+q+s}(M) \subseteq H^{2n}(M)^{\mathbb{C}}$$

Si alguno de los exponentes de H es distinto de n , entonces $\mathcal{L}^{n-k} \wedge \omega \wedge \tau = 0$ por lo que $Q(\omega, \tau) = 0$. Luego, debe ser

$$n - k + p + r = n \quad ; \quad n - k + q + s = n$$

Reemplazando $k = p + q$ y despejando r y s en cada ecuación, obtenemos $r = q$ y $s = p$, como queríamos.

Para demostrar la segunda relación, usamos la siguiente proposición que relaciona el operador $*$ de Hodge con el operador de Lefschetz, y cuya demostración se puede encontrar en [30] (Proposición 6.29)

- Proposición: Sea M una variedad Kähler, sea $\omega \in \Omega_o^{p,q}(M)$ y sea $k = p + q$, entonces

$$* \omega = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \frac{i^{p-q}}{(n-k)!} \cdot L^{n-k}(\omega)$$

➤ Demostración ii): Sea $\omega \in \Omega_o^{p,q}(M)$ un representante de la clase primitiva en cuestión, como $\bar{\omega} \in \Omega_o^{q,p}(M)$ tenemos que

$$* \bar{\omega} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \frac{i^{q-p}}{(n-k)!} \cdot L^{n-k}(\bar{\omega})$$

Despejando $L^{n-k}(\bar{\omega}) = \mathcal{L}^{n-k} \wedge \bar{\omega}$ obtenemos

$$\mathcal{L}^{n-k} \wedge \bar{\omega} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot i^{p-q} \cdot (n-k)! \cdot * \bar{\omega}$$

Así que

$$\begin{aligned}
Q(\omega, \bar{\omega}) &= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \int_M \omega \wedge \ell^{n-k} \wedge \bar{\omega} \\
&= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot i^{p-q} \cdot (n-k)! \cdot \int_M \omega \wedge * \bar{\omega}
\end{aligned}$$

Notar que

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot i^{p-q} = (-1)^k \cdot i^{p-q} = i^{q-p}$$

Por otro lado, $* \bar{\omega} = \overline{* \omega}$ así que nos aparece el producto interno de formas (ver sección 2.2.2)

$$\int_M \omega \wedge \overline{* \omega} = \langle \omega, \omega \rangle = \|\omega\|^2$$

Reemplazando estas dos igualdades, vemos que

$$i^{p-q} \cdot Q(\omega, \bar{\omega}) = (n-k)! \cdot \|\omega\|^2 > 0$$

No es cierto que $i^{p-q} \cdot Q(\omega, \bar{\omega}) > 0$ si ω no es primitiva. Por ejemplo si tomamos la forma de Kähler $\ell \in H^{1,1}(M)$, que es real y no es primitiva

$$i^{1-1} \cdot Q(\ell, \bar{\ell}) = - \int_M \ell^n < 0$$

Ya que $\ell^n/n!$ es la forma de volumen de M . Vimos entonces que la cohomología primitiva de una variedad Kähler compacta posee la siguiente estructura

- **Definición:** Una estructura de Hodge Polarizada de peso k es una estructura de Hodge $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k})$ de peso k , equipada con una función $Q : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, simétrica si k es par y antisimétrica si k es impar, y tal que al extenderla \mathbb{C} -bilinealmente a la complexificación $Q : H^{\mathbb{C}} \times H^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ satisface
 - $Q(\omega, \tau) = 0$ si $\omega \in H^{p,q}$ y $\tau \in H^{r,s}$ con $(q,p) \neq (r,s)$
 - $i^{p-q} \cdot Q(\omega, \bar{\omega}) > 0$ si $\omega \in H^{p,q}$ es no nula

Las estructuras de Hodge polarizadas vienen equipadas naturalmente con un producto interno hermitiano. Sea $C : H^{p,q} \rightarrow H^{p,q}$ definido por $C(v) := i^{p-q} \cdot v$, por la descomposición $H^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ podemos extenderlo linealmente a $C : H^{\mathbb{C}} \rightarrow H^{\mathbb{C}}$. Afirmando que la función $H : H^{\mathbb{C}} \times H^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$H(v, w) := Q(C(v), \bar{w})$$

Es un producto interno hermitiano, que hace de la descomposición $H^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ una descomposición ortogonal.

- **Demostración:** Como Q es bilineal y C es lineal, es claro que H es lineal en la primer coordenada. Para ver que $\overline{H(v, w)} = H(w, v)$, usemos la descomposición

$$v = \sum_{p+q=k} v_{p,q} \quad ; \quad w = \sum_{r+s=k} w_{r,s}$$

Con $v_{p,q} \in H^{p,q}$ y $w_{r,s} \in H^{r,s}$. En general, al extender a la complexificación una función bilineal $Q : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, esta satisface $\overline{Q(v, w)} = Q(\bar{v}, \bar{w})$, así que

$$\overline{H(v, w)} = Q(\overline{C(v)}, w)$$

Notar que

$$\overline{C(v)} = \sum_{p+q=k} (-i)^{p-q} \cdot \overline{v_{p,q}} = (-1)^k \cdot \sum_{p+q=k} i^{p-q} \cdot \overline{v_{p,q}}$$

Usando la \mathbb{C} -bilinealidad de Q y la primer relación de Riemann-Hodge

$$\overline{H(v, w)} = Q(\overline{C(v)}, w) = (-1)^k \cdot \sum_{p+q=k} i^{p-q} \cdot Q(\overline{v_{p,q}}, w_{p,q})$$

Similarmente

$$H(w, v) = Q(C(w), \overline{v}) = \sum_{p+q=k} i^{p-q} \cdot Q(w_{p,q}, \overline{v_{p,q}})$$

Y como $Q(w_{p,q}, \overline{v_{p,q}}) = (-1)^k \cdot Q(\overline{v_{p,q}}, w_{p,q})$, concluimos la igualdad.

Si $v \in H^{p,q}$ y $w \in H^{r,s}$ con $(p, q) \neq (r, s)$, entonces $Q(v) = i^{p-q} \cdot v \in H^{p,q}$ y $\overline{w} \in \overline{H^{r,s}} = H^{s,r}$ así que, por la primer relación de Riemann-Hodge

$$H(v, w) = Q(C(v), \overline{w}) = 0$$

Por último, veamos que $H(v, v) = Q(C(v), \overline{v}) > 0$ si $v \neq 0$. Si $v \in H^{p,q}$ es trivial, por la segunda relación de Riemann-Hodge. Si $v \in H^{\mathbb{C}}$ es no nulo y lo descomponemos $v = \sum_{i+j=k} v_{i,j}$, por la ortogonalidad de la descomposición que ya probamos, vemos que

$$H(v, v) = \sum_{p+q=k} H(v_{p,q}, v_{p,q}) > 0$$

Sea \mathcal{k} la forma de Kähler de una variedad Kähler compacta M , si $\mathcal{k} \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z})$ (equivalentemente $M \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$), entonces $\omega, \tau \in H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) \Rightarrow \mathcal{k}^{n-k} \wedge \omega \wedge \tau \in H_{\text{dR}}^{2n}(M, \mathbb{Z})$ así que $Q : H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) \times H_{\text{dR}}^k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$. En particular, sucede lo mismo si nos restringimos a $H_o^k(M, \mathbb{Z})$ así que la polarización tiene cierta compactibilidad con el reticulado. Luego, la cohomología primitiva de las subvariedades compactas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tiene la siguiente estructura

- Definición: Sea $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k}, H_{\mathbb{Z}})$ una estructura de Hodge íntegra y sea Q una polarización de la estructura de Hodge tal que $Q(v, w) \in \mathbb{Z}$ si $v, w \in H_{\mathbb{Z}}$, entonces decimos que $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k}, H_{\mathbb{Z}}, Q)$ es una estructura de Hodge íntegra y polarizada.

Un morfismo entre estructuras de Hodge polarizadas $(H, Q) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{Q})$ es un morfismo de estructuras de Hodge $f : H \rightarrow \tilde{H}$ tal que $\tilde{Q}(f(v), f(w)) = Q(v, w) \forall v, w \in H$. Si son estructuras de Hodge íntegras y polarizadas $(H, H_{\mathbb{Z}}, Q) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{H}_{\mathbb{Z}}, \tilde{Q})$, pedimos que $f(H_{\mathbb{Z}}) \subseteq \tilde{H}_{\mathbb{Z}}$. Notar que un morfismo de estructuras de Hodge polarizadas es una isometría con el producto interno hermitiano inducido por cada polarización. Un morfismo de variedades polarizadas $f : (M, [\mathcal{k}]) \rightarrow (\tilde{M}, [\tilde{\mathcal{k}}])$ que además es un difeomorfismo, induce un morfismo $f^* : H_o^k(\tilde{M}) \rightarrow H_o^k(M)$ de estructuras de Hodge polarizadas. Si además $[\mathcal{k}], [\tilde{\mathcal{k}}]$ son clases de de-Rham enteras, entonces f^* es un morfismo de estructuras de Hodge íntegras y polarizadas.

- Comentario: Sea $i : \tilde{H}_k(M, \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_{2n-k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forma de intersección (ver [9], Capítulo 0, sección 4), cuando $k = n$ obtenemos un producto en $\tilde{H}_n(M, \mathbb{Z})$. Sea $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ una \mathbb{Z} -base de $\tilde{H}_n(M, \mathbb{Z})$, entonces es una \mathbb{R} -base en $H_n(M, \mathbb{R})$. Sea $\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\}$ su base dual, el isomorfismo de de-Rham me induce una base en $H_{\text{dR}}^n(M)$ que denotamos también $\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\}$. En [9] se demuestra que

$$i(\sigma_i, \sigma_j) = \int_M \sigma_i^* \wedge \sigma_j^*$$

En particular

$$Q(\sigma_i^*, \sigma_j^*) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot i(\sigma_i, \sigma_j)$$

Así que, para calcular $Q(\omega, \tau)$ cuando $\omega, \tau \in H_{\text{dR}}^n(M)$, basta con hallar una \mathbb{Z} -base $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de $\tilde{H}_n(M, \mathbb{Z})$, calcular su matriz de intersección y calcular las coordenadas de ω y τ en la base $\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\}$. De hecho

$$\omega = A_1 \cdot \sigma_1^* + \dots + A_m \cdot \sigma_m^* \Rightarrow A_i = \int_{\sigma_i} \omega \quad \forall i$$

Capítulo 3: Deformación de Variedades

3.1 Submersiones y Espacios Fibrados

Durante toda esta sección, trabajaremos con variedades y funciones diferenciables, olvidándonos un poco de la geometría compleja. En las secciones 3.1.1 y 3.1.2 damos dos maneras distintas de modelar el concepto de “familia de variedades diferenciales X_t parametrizadas por un t moviéndose en una variedad diferencial S ”, usando submersiones y espacios fibrados respectivamente. Es conveniente pensar que las variedades X_t están contenidas en una variedad más grande X . Por ejemplo

$$X_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Donde $t \in \mathbb{R}$. Podemos pensar la aplicación $t \rightarrow X_t$, con $t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, como una deformación del círculo $X_1 = S^1$. Este caso, y similares, van a estar contemplados por ambos modelos. En la sección 3.1.3, veremos bajo qué condiciones ambos modelos son equivalentes.

Recuerdo que una submersión $f : X \rightarrow S$ entre variedades diferenciales, es una función diferenciable tal que $df_p : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(S)$ es un epimorfismo para todo $p \in X$. Si tenemos una submersión sobreyectiva $f : X \rightarrow S$, por el teorema de valores regulares tendremos que $X_t := f^{-1}(t)$ es una subvariedad diferencial de X , para todo $t \in S$, de dimensión $\dim X - \dim S$. Este es el modelo que desarrollaremos en la sección 3.1.1. En general, es simple verificar si una función es una submersión, esa es la ventaja de este modelo. Una familia de variedades complejas X_t como la que describimos arriba, es fácilmente modelable de esta forma (ver sección 3.1.1). La desventaja de este modelo es que los X_t , a priori, no tienen por qué ser difeomorfos (ni homeomorfos) entre sí, la topología puede cambiar.

En la sección 3.1.2 definiremos lo que es un espacio fibrado, y veremos cómo modela la idea de deformar una variedad de forma suave y sin alterar la topología. La definición de “espacio fibrado” es similar a la de fibrado vectorial, pero las fibras, en vez de ser espacios vectoriales, son variedades diferenciales difeomorfas entre sí. Al igual que en fibrados vectoriales, un espacio fibrado será una función diferenciable $\pi : X \rightarrow S$ localmente trivializable. Denotamos $X_t := \pi^{-1}(t)$, la fibra en t , y veremos que dar trivializaciones de un espacio fibrado es equivalente a dar una familia de difeomorfismos $\varphi_t : X_0 \rightarrow X_t$ (siendo $0 \in S$ un punto distinguido) que varían diferencialmente con t al igual que los $\varphi_t^{-1} : X_t \rightarrow X_0$. Podemos pensar a $\varphi_t : X_0 \rightarrow X_t$ como una deformación de X_0 .

El segundo modelo es más “fuerte” en el sentido que todo espacio fibrado $\pi : X \rightarrow S$ es una submersión sobreyectiva, pero no toda submersión sobreyectiva es un espacio fibrado. En la sección 3.1.3, demostraremos el teorema de Ehresmann que nos da condiciones suficientes para que una submersión sobreyectiva sea un espacio fibrado. Concretamente, este teorema nos dice que si $f : X \rightarrow S$ es una submersión sobreyectiva propia, entonces es un espacio fibrado. Es decir, si usando el modelo de la sección 3.1.1 deformamos una variedad compacta en variedades compactas, la topología no cambia.

3.1.1 Deformaciones

Si X y S son variedades diferenciales y $f : X \rightarrow S$ es una submersión sobreyectiva, el teorema de valores regulares nos dice que $X_t := f^{-1}(t) \subseteq X$ es una subvariedad suave para todo $t \in S$ (y de dimensión $\dim X - \dim S$). Luego, X_t es una familia de variedades diferenciales parametrizadas por $t \in S$. Esto motiva la siguiente definición

- **Definición:** Sean X y S variedades diferenciales, S conexa, decimos que una función $f : X \rightarrow S$ es una deformación si es una submersión sobreyectiva. Si M es una variedad diferenciable, decimos que $f : X \rightarrow S$ es una deformación de M si $M \subseteq X$ y S viene equipado con un punto distinguido $0 \in S$ y $M = f^{-1}(0)$.

Comentario: Se suele usar el término “Variedad Fibrada” en lugar de “deformación”. De hecho, en la siguiente sección veremos que tiene más sentido pensar como “deformaciones” a los espacios fibrados.

Veamos algunos ejemplos. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una submersión sobreyectiva y $X_t := f^{-1}(t)$ es la circunferencia de radio \sqrt{t} , esto es una deformación de la circunferencia $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Otro ejemplo. Consideremos la familia $\tilde{X}_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot x^2 + y^2 = 1\}$ con $t \in \mathbb{R}$. Esta es una familia de variedades que en $t = 1$ me da la circunferencia así que, intuitivamente, también podríamos pensar esto como una “deformación” de la circunferencia. Sin embargo, no existe ninguna función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(t) = \tilde{X}_t$. Esto es porque $f^{-1}(t) \cap f^{-1}(s) = \emptyset$ si $t \neq s$ pero $\tilde{X}_t \cap \tilde{X}_s = \{(0; 1), (0; -1)\}$ siempre que $t \neq s$. La manera de entender esta “deformación” en términos de nuestra definición es considerando

$$X = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : t \cdot x^2 + y^2 = 1\}$$

Y tomando $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la tercera coordenada. Se puede verificar que X es una variedad suave viendo que el gradiente del polinomio en $h \in \mathbb{R}[x, y, t]$ que lo define, no se anula en ningún punto de X . También se puede verificar, por absurdo, que f es una submersión, pues $df_p : T_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección sobre la tercera coordenada y, si fuese $df_p = 0$, tendríamos $T_p(X) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ y $\nabla h(p) \in \{(0; 0)\} \times \mathbb{R}$ lo cual nunca es cierto si $p \in X$. Es claro que f es sobreyectiva y que

$$f^{-1}(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot x^2 + y^2 = 1\} \times \{t\}$$

Es decir, $X_t = \tilde{X}_t \times \{t\}$. La diferencia entre la familia $\{\tilde{X}_t\}$ y $\{X_t\}$ es que en la primera estamos considerando a todas las variedades \tilde{X}_t en un mismo plano, mientras que en la segunda, cada X_t vive en un plano distinto, vive en $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$. Esto justifica el nombre “Variedad Fibrada”, siendo X_t la fibra sobre t .

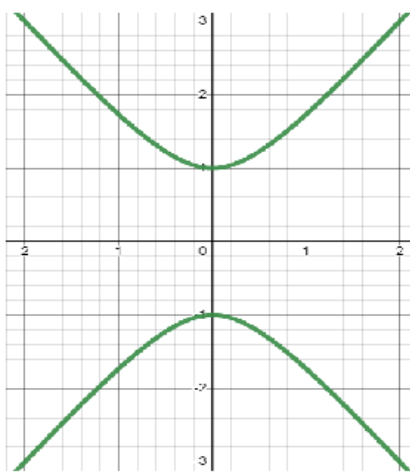
- **Observación:** Si $f : X \rightarrow S$ es una deformación, no es cierto que todos los X_t sean difeomorfos entre sí. En el ejemplo anterior, $f^{-1}(t)$ es una elipse si $t > 0$, una hipérbola si $t < 0$ y dos rectas paralelas si $t = 0$. En particular, X_0 no es difeomorfo a X_t para ningún $t > 0$.

Si pedimos que la deformación $f : X \rightarrow S$ sea una función propia, estamos pidiendo que X_t sea compacto para todo t y que, si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $\{t \in S : X_t \subseteq U\}$ sea abierto en S . Una consecuencia del teorema de Ehresmann, que veremos luego, es que si $f : X \rightarrow S$ es una deformación propia, entonces efectivamente todos los X_t son difeomorfos entre sí. Podríamos interpretar esto como “deformar una variedad compacta en variedades compactas, no altera la topología”

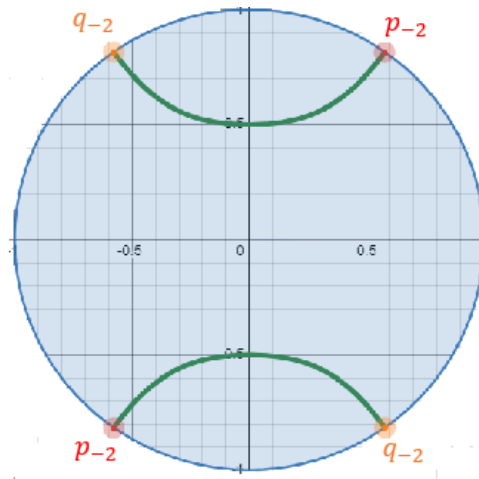
Esto nos sugiere que, al trabajar con deformaciones de variedades algebraicas, es conveniente considerar $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vía $v \rightarrow (v : 1)$ y estudiar $\overline{X}_t \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (ignorando, por ahora, que deberíamos trabajar sobre \mathbb{C}). Es decir, toda variedad algebraica V me induce una variedad proyectiva \overline{V} (compacta), y toda deformación de V por variedades algebraicas me induce una deformación de \overline{V} por variedades proyectivas (compactas). Si retomamos nuestro último ejemplo, teníamos el polinomio $P_t(x, y) := t \cdot x^2 + y^2 - 1$ cuya homogenización es $P_t^h(x, y, z) = t \cdot x^2 + y^2 - z^2$ así que

$$\overline{X}_t = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : t \cdot x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

De hecho, si $t < 0$ entonces $\overline{X}_t = \tilde{X}_t \cup \{p_t, q_t\}$ con $p_t = (1 : \sqrt{-t} : 0)$ y $q_t = (1 : -\sqrt{-t} : 0)$, si $t = 0$ entonces $\overline{X}_0 = \tilde{X}_0 \cup \{(1 : 0 : 0)\}$ y si $t > 0$ entonces $\overline{X}_t = \tilde{X}_t$.



\tilde{X}_{-2}



\overline{X}_{-2}

Si $t \neq 0$, entonces \overline{X}_t es difeomorfo a una circunferencia. Notar que, si bien \tilde{X}_0 es una variedad suave, \overline{X}_0 tiene una singularidad en el punto en el infinito $(1 : 0 : 0)$, pues es el punto de intersección de las dos rectas. Para ver esto como una deformación, tomamos

$$X = \{((x : y : z), t) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : t \cdot x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Y consideramos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección de la segunda coordenada. Se puede verificar que X es suave tomando cartas en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Concretamente, si $h \in \mathbb{R}[x, y, z, t]$ es el polinomio que define a X , y denotamos

$$h_0(y, z, t) = h(1, y, z, t) ; h_1(x, z, t) = h(x, 1, z, t) ; h_2(x, y, t) = h(x, y, 1, t)$$

Ver que X es suave es ver que $V_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : h_i(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ es una subvariedad suave para todo $i = 0, 1, 2$, esto es, que $\nabla h_i \neq 0$ en V_i (esto es fácil de verificar). Además $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es propia ya que, si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces $f^{-1}(K) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times K$ es un cerrado en un compacto.

Veamos cuándo $df_p : T_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es un epimorfismo. Al tomar coordenadas $U_i \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, el diferencial de f es la proyección sobre la tercer coordenada $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ restringida a $T_p(V_i)$. Sea $p \in X \cap (U_i \times \mathbb{R})$, que se corresponde con un punto $\tilde{p} \in V_i$, entonces $df_p = 0$ si y solo si $T_{\tilde{p}}(V_i) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, si y solo si $\nabla h_i(\tilde{p}) \in \{(0; 0)\} \times \mathbb{R}$. En V_1 y V_2 no hay ningún punto con esta propiedad, pero en V_0 tenemos el punto $(0; 0; 0)$, que se corresponde con $((1 : 0 : 0), 0) \in X$. Es por esto que X_0 tendrá una singularidad en el punto $(1 : 0 : 0)$, como habíamos predicho. Así que, para ver a f como una deformación, debemos considerar $f : X - X_0 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, que es una submersión sobreyectiva (y propia). Sin embargo, $\mathbb{R} - \{0\}$ no es conexo, así que en verdad son dos deformaciones $f^+ : X^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $f^- : X^- \rightarrow \mathbb{R}^-$, con $X^\pm := f^{-1}(\mathbb{R}^\pm)$. El teorema de Ehresmann nos dice lo que ya habíamos observado, que los $\{X_t\}_{t>0}$ son variedades difeomorfas entre sí, al igual que los $\{X_t\}_{t<0}$.

3.1.2 Espacios Fibrados

Motivación

Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación, $U \subseteq S$ un abierto y M una variedad diferenciable, decimos que una familia de funciones suaves $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ varía diferencialmente con $t \in U$ si la función $\varphi : U \times M \rightarrow X$ definida por $\varphi(t, x) := \varphi_t(x)$ es diferenciable. Notar, en dicho caso, que $(f \circ \varphi)(t, x) = t$ pues $\varphi_t(x) \in X_t = f^{-1}(t)$. Recíprocamente, si $\varphi : U \times M \rightarrow X$ es una función diferenciable tal que $f \circ \varphi : U \times M \rightarrow S$ es la proyección de la primera coordenada, entonces $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ me define una familia de funciones diferenciables $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ que varía diferencialmente con t . En síntesis, vimos que es equivalente dar

- 1) Una familia de funciones diferenciables $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ que varían diferencialmente con $t \in U$
- 2) Una función diferenciable $\varphi : U \times M \rightarrow X$ tal que $f \circ \varphi : U \times M \rightarrow S$ es la proyección en la primera coordenada

Decimos que una familia de funciones suaves $\mu_t : X_t \rightarrow M$ varía diferencialmente con $t \in U$ si la función $\mu : f^{-1}(U) \rightarrow M$ definida por $\mu(x) := \mu_t(x)$ si $x \in X_t$, es diferenciable. Notar que μ está bien definida pues $f^{-1}(U) = \coprod_{t \in U} X_t$.

Si $\varphi : U \times M \rightarrow f^{-1}(U)$ es un difeomorfismo tal que $f \circ \varphi : U \times M \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada, entonces $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ es biyectiva con inversa $\varphi_t^{-1} = \pi_2 \circ \varphi^{-1}|_{X_t}$, siendo $\pi_2 : U \times M \rightarrow M$ la proyección de la segunda coordenada. Más aún, φ_t es un difeomorfismo y las inversas $\varphi_t^{-1} : X_t \rightarrow M$ varían diferencialmente respecto a $t \in U$ (pues $\mu = \pi_2 \circ \varphi^{-1}$). Recíprocamente, si $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ es una familia de difeomorfismos que varía diferencialmente con $t \in U$ al igual que $\varphi_t^{-1} : X_t \rightarrow M$, entonces $\varphi : U \times M \rightarrow f^{-1}(U)$ definida por $\varphi(t, x) := \varphi_t(x)$ es un difeomorfismo pues

$\varphi^{-1} = f \times \mu$ siendo $\mu : f^{-1}(U) \rightarrow M$ tal que $\mu|_{X_t} = \varphi_t^{-1}$. Vimos entonces que es equivalente dar

- 1) Una familia de difeomorfismos $\varphi_t : M \rightarrow X_t$ que varían diferencialmente con $t \in U$ y cuyas inversas $\varphi_t^{-1} : X_t \rightarrow M$ también varían diferencialmente con $t \in U$
- 2) Un difeomorfismo $\varphi : U \times M \rightarrow f^{-1}(U)$ tal que $f \circ \varphi : U \times M \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada

El ítem 1) debería sernos de interés ya que uno de nuestros objetivos es probar que si $f : X \rightarrow S$ es una deformación propia, entonces los X_t son todos difeomorfos entre sí. Por otro lado, el ítem 2) está relacionado con la definición de “Espacio Fibrado”

- **Definición:** Sean B y F variedades diferenciales, un espacio fibrado con base B y fibra F es una variedad diferencial E (que se la llama “Espacio total”) con una función diferenciable y sobreyectiva $\pi : E \rightarrow B$ “localmente trivializable” en el siguiente sentido: Para todo $b \in B$ existe un entorno abierto $U \subseteq B$ de b y un difeomorfismo $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que la composición $\pi \circ \varphi : U \times F \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada.

Todo fibrado vectorial es un ejemplo de espacio fibrado con fibra \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n). Típicamente denotamos $E_t := \pi^{-1}(t)$.

- **Lema:** Si $\pi : E \rightarrow B$ es un espacio fibrado, es una submersión.
- **Demostración:** Sea $x \in E$ y sea $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ una trivialización con $\pi(x) \in U$, como $\pi \circ \varphi : U \times F \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada, tenemos que $d(\pi \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(x)} = d\pi_x \circ d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}$ es un epimorfismo. Pero $d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}$ es un isomorfismo (pues φ es difeomorfismo), así que $d\pi_x$ debe ser un epimorfismo.

Vimos entonces que todo espacio fibrado es una deformación, pero no vale la vuelta. En base a lo discutido anteriormente, una trivialización $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ del espacio fibrado me induce una familia de difeomorfismos $\varphi_t : F \rightarrow E_t$ que varía diferencialmente con t , al igual que sus inversas. En particular, toda fibra E_t es difeomorfa a F así que todas las fibras son difeomorfas entre sí. Es decir, un espacio fibrado es una deformación en la que las fibras E_t son difeomorfas y varían de forma suave. Luego, tendría mucho más sentido llamar “deformación” a un espacio fibrado.

Si $0 \in B$ es un punto distinguido y $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ es una trivialización con $0 \in U$, sea $\varphi_0 := \varphi(0, -) : F \rightarrow E_0$ es el difeomorfismo inducido por la trivialización, entonces $\tilde{\varphi} : U \times E_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ definido por

$$\tilde{\varphi}(b, x) := \varphi(b, \varphi_0^{-1}(x))$$

Es una trivialización que satisface $\tilde{\varphi}(0, x) = x$ para todo $x \in E_0$. A veces nos es útil tomar una trivialización de estas características. Podemos pensar a los difeomorfismos inducidos $\tilde{\varphi}_t : X_0 \rightarrow X_t$ como deformaciones de X_0 (notar que $\tilde{\varphi}_0$ es la identidad en X_0).

Algunas Propiedades

Análogo a los fibrados vectoriales, sean $\pi : E \rightarrow B$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{B}$ espacios fibrados, un morfismo de fibrados es un par (φ, f) siendo $\varphi : E \rightarrow \tilde{E}$ y $f : B \rightarrow \tilde{B}$ funciones diferenciables tales que $\tilde{\pi} \circ \varphi = f \circ \pi$. Si (φ, f) y (μ, g) son morfismos de fibrados, la composición entre ellos es $(\varphi \circ \mu, f \circ g)$ siempre que tenga sentido. Esto nos permite hablar de “Espacios Fibrados isomorfos”. Es claro que si dos espacios fibrados son isomorfos, entonces sus espacios totales, sus bases y sus fibras serán difeomorfas.

Las submersiones, y en particular los espacios fibrados, tienen la propiedad de levantado de funciones en la base al espacio total (en particular, caminos en la base se levantan a caminos en el espacio total)

- Proposición: Si $\pi : E \rightarrow B$ es una submersión y $h : M \rightarrow B$ es una función diferenciable, entonces para todo $p \in M$ y todo $x \in \pi^{-1}(h(p))$ existe un entorno abierto $V \subseteq M$ de p y una función diferenciable $\tilde{h} : V \rightarrow E$ tal que $\tilde{h}(p) = x$ y $\pi \circ \tilde{h} = h|_V$.

Para demostrar esto, usamos la siguiente propiedad que tienen las submersiones (Ver [19], Teorema 4.26)

- Lema: Si $\pi : E \rightarrow B$ es una submersión, entonces para todo $x \in E$ existe un entorno abierto $U \subseteq B$ de $\pi(x)$ y una función diferenciable $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $\sigma(\pi(x)) = x$ y $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$ (una sección)
- Demostración de la Proposición: Por el lema, existe un entorno abierto $U \subseteq B$ de $\pi(x) = h(p)$ y una función diferenciable $\sigma : U \rightarrow E$ tal que $\sigma(h(p)) = x$ y $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$. Sea $V := h^{-1}(U)$, que es un entorno abierto de p , y sea $\tilde{h} : V \rightarrow E$ definida por $\tilde{h} := \sigma \circ h$, es claro que es diferenciable, $\tilde{h}(p) = x$ y $\pi \circ \tilde{h} = h|_V$.

Los espacios fibrados satisfacen además la “Propiedad de Levantado de Homotopías”, que dice que si tenemos dos funciones diferenciables $f, g : M \rightarrow B$ que se levantan globalmente a $\tilde{f}, \tilde{g} : M \rightarrow E$, entonces toda homotopía entre f y g (si existe alguna) se levanta a una homotopía entre \tilde{f} y \tilde{g} . No usaremos este resultado, del cual se puede encontrar una demostración en [11] (Proposición 4.48).

Por último, veamos una gran fuente de ejemplos de espacios fibrados. Dado un grupo de Lie G actuando suavemente sobre una variedad diferenciable X , resulta natural preguntarse ¿Cuándo X/G es una variedad diferenciable? ¿Cuándo $\pi : X \rightarrow X/G$ es una submersión? ¿Cuándo $\pi : X \rightarrow X/G$ es un espacio fibrado? El siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [27], responde a todas estas preguntas. Antes de enunciar el teorema, recuerdo dos cosas. Si $g \cdot x \neq x$ para todo $g \neq 1$, decimos que la acción es libre. Decimos que la acción es “propia” si la función $G \times X \rightarrow X \times X$ dada por $(g, x) \rightarrow (g \cdot x, x)$ es una función propia. Equivalentemente, se dice que la acción es propia si para todo $K \subseteq X$ compacto el conjunto $\{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ es compacto. Ahora sí, enunciamos el teorema

- **Teorema:** Sea G un grupo de Lie actuando suavemente en una variedad diferenciable X , si la acción es libre y propia, entonces X/G es una variedad topológica de dimensión $\dim X - \dim G$. Más aún, existe una única estructura diferenciable sobre X/G que hace de la proyección $\pi : X \rightarrow X/G$ una submersión. Con dicha estructura diferenciable, $\pi : X \rightarrow X/G$ resulta un espacio fibrado.

Observar que si el grupo de Lie G es compacto, entonces la acción es automáticamente propia, así que en esos casos basta con verificar que la acción es libre. Otro teorema que nos permitirá fabricar espacios fibrados es el teorema de Ehresmann, que presentamos a continuación.

3.1.3 El Teorema de Ehresmann

Vimos que todo espacio fibrado $\pi : E \rightarrow B$ es una submersión sobreyectiva. Surge entonces la pregunta ¿Cuándo una submersión sobreyectiva es un espacio fibrado? El teorema de Ehresmann dice que una condición adicional, suficiente para que sea un espacio fibrado, es que la función sea propia.

Para probar el teorema de Ehresmann, necesitaremos algunos resultados relacionados a campos vectoriales y flujos. Si ξ es un campo vectorial suave en M , decimos que una curva $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ es integral si $\sigma'(t) = \xi(\sigma(t))$ para todo $t \in [a, b]$. En [31] (Teorema 1.48) se puede encontrar una demostración del siguiente Teorema.

- **Teorema:** Sea M una variedad diferencial y ξ un campo vectorial C^∞ en M , entonces para todo $p \in M$ existe una curva íntegra $\sigma_p : I_p \rightarrow M$, con $\sigma_p(0) = p$, maximal en el sentido de que toda curva con estas propiedades es una restricción de σ_p . Llamamos a σ_p "el flujo de p a través de ξ " y denotamos $\vartheta_\xi(p, t) := \sigma_p(t)$.

Para todo punto de M existe un entorno abierto $V \subseteq M$ y un $\varepsilon > 0$ tal que está bien definida la aplicación $\vartheta_\xi : V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ (esto es $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{p \in V} I_p$) y es C^∞ .

Para cada $t \in \mathbb{R}$ denotamos

$$U_t := \{p \in M : t \in I_p\} \subseteq M$$

Es decir, el conjunto de puntos para los cuales el flujo está bien definido hasta tiempo t . Este conjunto es abierto y $\vartheta_{\xi,t} := \vartheta_\xi(-, t) : U_t \rightarrow U_{-t}$ es un difeomorfismo. Por último, si $t, s \in \mathbb{R}$, entonces

$$\vartheta_{\xi,t} \circ \vartheta_{\xi,s} = \vartheta_{\xi,t+s}$$

En aquellos puntos en donde ambas expresiones estén bien definidas.

Un ejemplo simple, pero importante, es el siguiente. Sea M una variedad diferenciable, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo (con $U \subseteq M$ abierto) y $\xi_i := \partial/\partial\varphi_i$ un campo en U , entonces

$$\vartheta_{\xi_i}(x, t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t \cdot e_i) \quad \forall x \in U \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La verificación de esto es trivial. En consecuencia, si $x, t \in \mathbb{R}^n$ con $t = (t_1, \dots, t_n)$

$$(\vartheta_{\xi_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_n, t_n})(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t)$$

Notar que el orden de composición es irrelevante. En particular, si $0 := \varphi^{-1}(0, \dots, 0) \in U$, tenemos que

$$(\vartheta_{\xi_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_n, t_n})(0) = \varphi^{-1}(t)$$

Veamos otros resultados que necesitamos para demostrar el teorema de Ehresmann. Recuerdo que si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable entre variedades diferenciales y ξ, μ son campos en M y N respectivamente, decimos que ξ y μ están f -relacionados si $df_p(\xi_p) = \mu_{f(p)} \forall p \in M$. La demostración de los siguientes lemas se puede encontrar en [25].

- **Lema 1:** Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable, si ξ y μ son campos f -relacionados, entonces $f(\vartheta_\xi(x, t)) = \vartheta_\mu(f(x), t)$ siempre y cuando ambos flujos estén bien definidos hasta tiempo t . Más aún, si f es propia y $\vartheta_\mu(f(x), t)$ está bien definido, entonces $\vartheta_\xi(x, t)$ está bien definido.
- **Lema 2:** Si $f : M \rightarrow N$ es una submersión, entonces para todo campo μ en N existe un campo ξ en M que está f -relacionado con μ .

Ahora sí, demostremos el teorema de Ehresmann

- **Teorema de Ehresmann:** Si $f : X \rightarrow S$ es una submersión sobreyectiva y propia, entonces (X, f) es un espacio fibrado.

Demostración: Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta en S (con $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$), para cada $i = 1, \dots, n$ denotemos $\mu_i := \partial/\partial\varphi_i$ y tomemos ξ_i un campo en $f^{-1}(U)$ que este f -relacionado con μ_i (existe por el Lema 2). Vimos que

$$\vartheta_{\mu_i}(s, t) = \varphi^{-1}(\varphi(s) + t \cdot e_i) \quad \forall s \in U \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Cómo está bien definido para todo $t \in \mathbb{R}$, el Lema 1 nos dice que $\vartheta_{\xi_i}(x, t)$ está bien definido para todo $x \in f^{-1}(U)$, $t \in \mathbb{R}$ y que

$$f \circ \vartheta_{\xi_i, t} = \vartheta_{\mu_i, t} \circ f \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea $0 := \varphi^{-1}(0, \dots, 0) \in U$, definimos $G : U \times X_0 \rightarrow f^{-1}(U)$ vía

$$G(\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x) = (\vartheta_{\xi_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_n, t_n})(x)$$

Es C^∞ pues $\vartheta_{\xi_i} : f^{-1}(U) \times \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}(U)$ es C^∞ para todo i . Además

$$\begin{aligned} (f \circ G)(\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x) &= (\vartheta_{\mu_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\mu_n, t_n} \circ f)(x) = \\ &= (\vartheta_{\mu_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\mu_n, t_n})(0) = \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Así que $f \circ G : U \times X_0 \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada. Para terminar, veamos que $G^{-1} : f^{-1}(U) \rightarrow U \times X_0$ definida por

$$G^{-1}(x) = \left(f(x), (\vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1})(x) \right) \quad \text{con } (t_1, \dots, t_n) := \varphi(f(x))$$

Es la inversa de G . Observemos que está bien definida pues

$$f\left((\vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1})(x)\right) = (\vartheta_{\mu_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\mu_1, -t_1})(f(x)) = \varphi^{-1}\left(\varphi(f(x)) - (t_1, \dots, t_n)\right) = \varphi^{-1}(0, \dots, 0) = 0$$

Así que $(\vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1})(x) \in X_0$ para todo $x \in f^{-1}(U)$. Además G^{-1} es C^∞ pues ϑ_{ξ_i} , f y φ son C^∞ . Para ver que $G^{-1} \circ G = \text{Id}$, ya vimos que $f \circ G$ es la proyección en la primera coordenada así que

$$\varphi\left(f(G(\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x))\right) = (t_1, \dots, t_n)$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} &(\vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1})(G(\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x)) = \\ &(\vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1} \circ \vartheta_{\xi_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_n, t_n})(x) = x \end{aligned}$$

Pues $\vartheta_{\xi, -t} \circ \vartheta_{\xi, t} = \text{Id}$. De esto deducimos que

$$G^{-1}(G(\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x)) = (\varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n), x)$$

Para ver que $G \circ G^{-1} = \text{Id}$, si $x \in f^{-1}(U)$ y $f(x) = \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n)$

$$G(G^{-1}(x)) = (\vartheta_{\xi_1, t_1} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_n, t_n} \circ \vartheta_{\xi_n, -t_n} \circ \cdots \circ \vartheta_{\xi_1, -t_1})(x) = x$$

Todo esto demuestra que G es una trivialización local de $f : X \rightarrow S$.

Q.E.D.

El Teorema de Ehresmann nos da una correspondencia entre los espacios fibrados con fibra compacta y las submersiones sobreyectivas propias. Los espacios fibrados son importantes pues, como vimos, modelan la idea de “deformar una variedad de forma suave y sin alterar la topología”. Sin embargo, en la práctica (si se está deformando una variedad compacta), resulta más sencillo probar que una función es una submersión propia a probar que es una fibriación, como muestra el siguiente ejemplo.

- Aplicación: Sea $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, la proyección $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una submersión propia, así que S^{2n+1} tiene estructura de espacio fibrado sobre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con fibra S^1 .

Notar que no es isomorfo al espacio fibrado trivial pues los grupos de homología singular de S^{2n+1} son distintos a los de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times S^1$ (por la fórmula de Künneth). En el caso particular $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$ así que tenemos una fibriación $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ llamada “La Fibración de Hopf”.

- Demostración: Que es una función propia es trivial pues S^{2n+1} es compacto. Para ver que es una submersión, haremos las cuentas sobre la carta $U_0 = \{(a_0 : \cdots : a_n) \text{ tq } a_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, para las otras cartas, las cuentas son análogas. Sea $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la proyección, tomemos un punto $p =$

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ con $a_0 \neq 0$. Al tomar coordenadas, $d\pi_p : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ viene dado por

$$d\pi_p(x_0, \dots, x_n) = -\frac{x_0}{a_0^2} \cdot (a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{a_0} (x_1, \dots, x_n)$$

Es fácil verificar que $\text{Ker}(d\pi_p) = \mathbb{C} \cdot p$. Al restringir $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si $p \in S^{2n+1}$

$$T_p(S^{2n+1}) = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \text{Re}(\langle p, v \rangle) = 0\}$$

Donde $\langle -, - \rangle$ denota el producto interno hermitiano usual de \mathbb{C}^{n+1} . Notar que $T_p(S^{2n+1}) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ es un subespacio real. Es fácil verificar que

$$\text{Ker}(d\pi_p|_{T_p(S^{2n+1})}) = \text{Ker}(d\pi_p) \cap T_p(S^{2n+1}) = \mathbb{R} \cdot i \cdot p$$

Así que el núcleo de $d\pi_p : T_p(S^{2n+1}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ tiene dimensión real 1. Finalmente

$$\dim_{\mathbb{R}} d\pi_p(T_p(S^{2n+1})) = (2n+1) - 1 = 2n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$$

Lo que demuestra que $d\pi_p : T_p(S^{2n+1}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un epimorfismo.

Otra forma de concluir que $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un espacio fibrado, sin usar el teorema de Ehresmann, es usando el teorema de cociente por la acción de un grupo de Lie (ver sección anterior). Notar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1}/S^1$ donde S^1 actúa por multiplicación. La acción es propia, pues S^1 es compacto, y claramente es libre. Más aún, vimos que la estructura diferenciable de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hace de $\pi : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1$ una submersión, así que el teorema nos garantiza que es un espacio fibrado.

3.2 Sistemas Locales

En esta sección describiremos la correspondencia biyectiva que existe entre los siguientes conceptos.

- i) Sistemas locales sobre B
- ii) Fibrados vectoriales sobre B equipados con conexiones playas
- iii) Representaciones del grupo fundamental $\pi_1(B, 0)$

Donde B es una variedad diferenciable y $0 \in B$ es un punto arbitrario. Cada una de estas clases de objetos forman una categoría, y las correspondencias que daremos son equivalencias categóricas.

Por simplicidad, trabajaremos siempre con fibrados vectoriales complejos, y dejaremos que el lector infiera cómo son las construcciones para fibrados vectoriales reales y holomorfos.

En la sección 3.2.1 describiremos algunas nociones básicas de conexiones en fibrados vectoriales. Veremos que una conexión está caracterizada localmente (en una trivialización) por sus símbolos de Christoffel, y veremos cómo se relacionan los símbolos de Christoffel inducidos por distintas trivializaciones. Definiremos lo que es una conexión playa, definiremos la curvatura de una conexión y veremos que las conexiones playas son precisamente las conexiones de curvatura 0.

En la sección 3.2.2 describiremos la biyección entre sistemas locales y conexiones playas. Un sistema local es un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$ equipado con trivializaciones $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tales que $B = \bigcup_{i \in I} U_i$ y cuyas matrices de transición $U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ son localmente constantes. La biyección entre estos dos conceptos será bastante simple

En la sección 3.2.3 describiremos la biyección entre sistemas locales y representaciones del grupo fundamental. Recuerdo que una representación de un grupo G es un morfismo de grupos $\rho : G \rightarrow GL(V)$ siendo V un espacio vectorial. Equivalentemente, tomando $g \cdot v := \rho(g)(v)$, una representación de G es una acción lineal de G sobre sobre un \mathbb{K} -espacio vectorial V , esto es, una función $\cdot : G \times V \rightarrow V$ tal que (tomamos $g, h \in G, v \in V$ y $k \in \mathbb{K}$)

- i) $g \cdot (h \cdot v) = (g \cdot h) \cdot v$
- ii) $1 \cdot v = v$
- iii) $g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$
- iv) $g \cdot (k \cdot v) = k \cdot (g \cdot v)$

Veremos que en un sistema local $\pi : E \rightarrow B$, toda curva en B me induce un transporte paralelo entre las fibras. Es decir, toda curva $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ me induce un isomorfismo lineal $E_{\sigma(0)} \rightarrow E_{\sigma(1)}$ que no depende de la clase de homotopía de σ en B relativa a sus extremos. En particular, toda clase de homotopía $[\sigma] \in \pi_1(B, 0)$ me induce un isomorfismo $E_0 \rightarrow E_0$, esta es la representación de $\pi_1(B, 0)$ inducida por el sistema local. La demostración de que toda representación de $\pi_1(B, 0)$ induce un sistema local no nos será tan relevante, pero la haremos de todas formas.

¿Por qué de repente nos metimos con estos conceptos? En la sección pasada vimos que los espacios fibrados $\pi : E \rightarrow B$ modelaban la idea de deformar una variedad de forma de forma suave y sin alterar la topología. A un espacio fibrado, podemos asociarle un fibrado vectorial que tiene por fibra sobre b al espacio vectorial $H_{\text{dR}}^k(E_b)$, esto es lo que llamamos “el fibrado de de-Rham”. Similarmente, bajo ciertas condiciones, podemos definir el “fibrado primitivo”, que es el fibrado que tiene por fibra sobre b a $H_o^k(E_b)$. En la sección 3.2.4 veremos que estos dos fibrados vectoriales son ejemplos de sistemas locales. En particular, tenemos un transporte paralelo entre las fibras. Es decir, toda curva $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ me induce isomorfismos lineales $\tau : H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(0)}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(1)})$ y $\tau : H_o^k(E_{\sigma(0)}) \rightarrow H_o^k(E_{\sigma(1)})$. Veremos que el transporte paralelo preserva las “estructuras adicionales” de la cohomología descriptas en la sección 2.3

- τ se restringe a un isomorfismo de grupos $\tau : H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(0)}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(1)}, \mathbb{Z})$
- τ se restringe a un isomorfismo de grupos $\tau : H_o^k(E_{\sigma(0)}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_o^k(E_{\sigma(1)}, \mathbb{Z})$
- $Q_{\sigma(1)}(\tau(\omega), \tau(\tilde{\omega})) = Q_{\sigma(0)}(\omega, \tilde{\omega})$ siendo Q_b la polarización en E_b .

Todo esto será extraordinariamente importante para definir el mapa de períodos en la sección 3.4.

3.2.1 Conexiones

Recuerdo que si M es una variedad diferenciable, entonces $\mathcal{X}(M)$ denota el conjunto de campos vectoriales C^∞ en M . También recuerdo que si $\pi : E \rightarrow B$ un fibrado vectorial y $U \subseteq B$ es abierto, entonces $\Gamma(U, E)$ representa el conjunto de secciones en U . Una conexión en un fibrado vectorial complejo es una función $\nabla : \mathcal{X}(B)^\mathbb{C} \times \Gamma(B, E) \rightarrow \Gamma(B, E)$ tal que

- $\nabla_X(s)$ es $C^\infty(B)^\mathbb{C}$ -lineal en la variable $s \in \Gamma(B, E)$
- $\nabla_X(s)$ es \mathbb{C} -lineal en la variable $X \in \mathcal{X}(B)^\mathbb{C}$
- $\nabla_X(f \cdot s) = X(f) \cdot s + f \cdot \nabla_X(s)$ para toda $s \in \Gamma(B, E)$ y $f \in C^\infty(B)^\mathbb{C}$

Se puede probar que, si $U \subseteq B$ es abierto y si $X, Y \in \mathcal{X}(B)^\mathbb{C}$ y $s, \tilde{s} \in \Gamma(B, E)$ son tales que $X|_U = Y|_U$ y $s|_U = \tilde{s}|_U$, entonces $\nabla_X(s)|_U = \nabla_Y(\tilde{s})|_U$ (ver [21]). Así que una conexión en B nos induce una conexión en U , $\nabla|_U : \mathcal{X}(U)^\mathbb{C} \times \Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(U, E)$ definida por $(\nabla|_U)_X(s) := \nabla_{\tilde{X}}(\tilde{s})$, siendo \tilde{X} y \tilde{s} extensiones de X y s respectivamente (denotamos indistintamente $\nabla|_U = \nabla$).

Recordemos que es equivalente dar una trivialización de un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$ a dar un marco local $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Gamma(U, E)$. Dada una conexión, para todo marco local $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ en U existen funciones $C^\infty(U)^\mathbb{C}$ -lineales $\theta_{ij} : \mathcal{X}(U)^\mathbb{C} \rightarrow C^\infty(U)^\mathbb{C}$ tales que

$$\nabla_X(\sigma_i) = \theta_{1,i}(X) \cdot \sigma_1 + \dots + \theta_{n,i}(X) \cdot \sigma_n \quad \forall X \in \mathcal{X}(U)^\mathbb{C}$$

Estas funciones, que llamamos “Símbolos de Christoffel”, caracterizan $\nabla|_U$. Para verlo, sea $\sigma \in \Gamma(U, E)$ y $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)^\mathbb{C}$ tales que $\sigma = f_1 \cdot \sigma_1 + \dots + f_n \cdot \sigma_n$, se puede ver con las propiedades que definen a una conexión que

$$\nabla_X(\sigma) = \sum_{i=1}^n \left(X(f_i) + \sum_{j=1}^n f_j \cdot \theta_{ij}(X) \right) \cdot \sigma_i$$

Se puede demostrar que si $X, Y \in \mathcal{X}(U)^{\mathbb{C}}$ satisfacen $X_p = Y_p$ en un punto $p \in U$, entonces $\nabla_X \sigma(p) = \nabla_Y \sigma(p)$ para toda sección $\sigma \in \Gamma(U, E)$ (ver [21], Corolario 3.1). En particular $\theta_{ij}(X)(p) = \theta_{ij}(Y)(p)$ así que podemos pensar a θ_{ij} como una 1-forma que a cada $p \in U$ le asigna la transformación \mathbb{C} -lineal $v \in T_p(B)^{\mathbb{C}} \rightarrow \theta_{ij}(X)(p) \in \mathbb{C}$, siendo $X_p = v$. Esta queda determinada por la restricción a $T_p(B)$, así que $\theta_{ij} \in \Omega^1(U)^{\mathbb{C}}$. Denotemos θ a la matriz de 1-formas θ_{ij} . Si $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n\}$ es un marco local en $V \subseteq B$, con $U \cap V \neq \emptyset$, existen $C_{ij} \in C^\infty(U \cap V)^{\mathbb{C}}$ tales que

$$\tilde{\sigma}_i = C_{1,i} \cdot \sigma_1 + \dots + C_{n,i} \cdot \sigma_n \quad \text{en } U \cap V$$

De hecho, la matriz de funciones C cuya coordenada i, j es C_{ij} , es la matriz de transición entre las trivializaciones asociadas a los respectivos marcos. Por un lado, tenemos

$$\nabla_X(\tilde{\sigma}_j) = \sum_{i=1}^n \left(X(C_{i,j}) + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}(X) \cdot C_{k,j} \right) \cdot \sigma_i$$

Pero, por otro lado

$$\nabla_X(\tilde{\sigma}_j) = \sum_{k=1}^n \tilde{\theta}_{k,j}(X) \cdot \tilde{\sigma}_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n C_{i,k} \cdot \tilde{\theta}_{k,j}(X) \right) \cdot \sigma_i$$

Así que

$$\sum_{k=1}^n C_{i,k} \cdot \tilde{\theta}_{k,j}(X) = X(C_{i,j}) + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}(X) \cdot C_{k,j} \quad \forall i, j \quad \forall X \in \mathcal{X}(U \cap V)^{\mathbb{C}}$$

Pensando las cosas como 1-formas y escribiéndolo en notación matricial

$$C \cdot \tilde{\theta} = dC + \theta \cdot C \Rightarrow \tilde{\theta} = C^{-1} \cdot dC + C^{-1} \cdot \theta \cdot C$$

Notar que $C(b)$ es inversible para todo $b \in U \cap V$ por ser una matriz de cambio de base. En síntesis, vimos lo que es una conexión, vimos que está caracterizada localmente por los símbolos de Christoffel inducidos por una trivialización, y vimos cómo se relacionan los símbolos de Christoffel inducidos por distintas trivializaciones. Para terminar esta sección, definimos conexiones playas.

Decimos que una conexión es playa si existe un cubrimiento de B por trivializaciones cuyos símbolos de Christoffel son 0. Es decir, si (U, φ) es una de esas trivializaciones y $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ es el marco inducido

$$\sigma = f_1 \cdot \sigma_1 + \dots + f_n \cdot \sigma_n \Rightarrow \nabla_X(\sigma) := X(f_1) \cdot \sigma_1 + \dots + X(f_n) \cdot \sigma_n$$

Se las llama "Conexiones Playas" por el siguiente motivo. Uno puede definir la curvatura de una conexión como

$$d\theta + \theta \wedge \theta \in (\Omega^2(U)^{\mathbb{C}})^{n \times n}$$

Donde $(d\theta)_{ij} = d\theta_{ij}$ y $(\theta \wedge \theta)_{ij} = \sum_{k=1}^n \theta_{ik} \wedge \theta_{kj}$. Usando la fórmula que relaciona θ con $\tilde{\theta}$, se puede verificar que la curvatura no depende del marco $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ elegido, así que es una matriz de 2-formas definidas globalmente en B . Se lo llama “curvatura” porque, para la conexión de Levi-Civita en el fibrado tangente de una variedad Riemanniana, coincide con la curvatura de Riemann (ver [22]). Se puede demostrar que una conexión es playa si y solo si su curvatura es 0 (ver [7]).

3.2.2 Sistemas Locales y Conexiones Playas

Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$, llamamos “atlas constante” a un conjunto de trivializaciones $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tales que $B = \bigcup_{i \in I} U_i$ y cuyas matrices de transición $C : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ son funciones localmente constantes. Recuerdo que $\varphi_i : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ y la matriz de transición es la matriz C que satisface

$$(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(b, v) = (b, C(b) \cdot v) \quad \forall b \in U_i \cap U_j, \forall v \in \mathbb{C}^n$$

Un “sistema local” es un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow B$ equipado con un atlas constante maximal. No todo fibrado vectorial admite estructura de sistema local, como veremos más adelante. Veamos que un sistema local induce una conexión playa sobre el fibrado vectorial y, recíprocamente, toda conexión playa en un fibrado vectorial induce una estructura de sistema local sobre el fibrado.

Sistema Local \Rightarrow Conexión Playa

Sea $\pi : E \rightarrow B$ un sistema local, sea (U, φ) una trivialización del atlas constante y $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ el marco en U inducido por dicha trivialización, si $\sigma = f_1 \cdot \sigma_1 + \dots + f_n \cdot \sigma_n$ es una sección con $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$, entonces definimos

$$\nabla_X(\sigma) := X(f_1) \cdot \sigma_1 + \dots + X(f_n) \cdot \sigma_n$$

Es claro que esto define una conexión en U cuyos símbolos de Christoffel son 0, lo que hay que verificar es que todas las conexiones se pegan bien formando una conexión playa en todo B . Es decir, si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra trivialización del sistema local con $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y secciones $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n\}$, y a una sección σ en $U \cap \tilde{U}$ la escribimos como

$$\sigma = f_1 \cdot \sigma_1 + \dots + f_n \cdot \sigma_n \quad ; \quad \sigma = g_1 \cdot \tilde{\sigma}_1 + \dots + g_n \cdot \tilde{\sigma}_n$$

Queremos ver que

$$X(f_1) \cdot \sigma_1 + \dots + X(f_n) \cdot \sigma_n = X(g_1) \cdot \tilde{\sigma}_1 + \dots + X(g_n) \cdot \tilde{\sigma}_n$$

Equivalentemente, queremos ver que los símbolos de Christoffel $\tilde{\theta}$ de la conexión de U , en el marco $\{\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n\}$, son cero. Pero sabemos que

$$\tilde{\theta} = C^{-1} \cdot dC + C^{-1} \cdot \theta \cdot C$$

Siendo θ los símbolos de Christoffel en el marco $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, que sabemos que son 0. Además C es localmente constante, así que $dC = 0$ lo que demuestra que $\tilde{\theta} = 0$.

Conexión Playa \Rightarrow Sistema Local

Sea ∇ una conexión playa en el fibrado vectorial y $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un cubrimiento por trivializaciones cuyos símbolos de Christoffel son 0, veamos que las matrices de transición son localmente constantes. Sea C la matriz de transición entre dos de estas trivializaciones U_i, U_j , usando la ecuación que relacionaba los símbolos de Christoffel de U_i con los de U_j a partir de C

$$0 = C^{-1} \cdot dC + C^{-1} \cdot 0 \cdot C \Rightarrow 0 = C^{-1} \cdot dC \Rightarrow dC = 0$$

Así que C es localmente constante, como queríamos ver.

Estas asignaciones nos dan una correspondencia entre sistemas locales y fibrados con conexiones playas. Más aún, podemos hacer de ambas clases una categoría, dándonos esta correspondencia una equivalencia categórica.

3.2.3 Sistemas Locales y Representaciones del Grupo Fundamental

Sistema Local \Rightarrow Representación del Grupo Fundamental

Vimos que todo sistema local $\pi : E \rightarrow B$ me induce una conexión playa ∇ . Toda conexión en un fibrado vectorial nos da una noción de “transporte paralelo”. Fijemos dos puntos $0, b_0 \in B$ y tomemos una curva suave $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ con $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = b_0$ y cuya imagen este contenida en un abierto trivializable U del sistema local, con marco $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. El transporte paralelo $\tau : E_0 \rightarrow E_{b_0}$ viene dado por

$$v = a_1 \cdot \mu_1(0) + \dots + a_n \cdot \mu_n(0) \Rightarrow \tau(v) := a_1 \cdot \mu_1(b_0) + \dots + a_n \cdot \mu_n(b_0)$$

Es clara la linealidad de τ . Si \tilde{U} es otro abierto trivializable que contiene a σ , con marco $\{\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n\}$, entonces σ está contenida en $U \cap \tilde{U}$ por lo que la matriz de transición de U a \tilde{U} en 0 es la misma que en b_0 (por ser trivializaciones de un sistema local), llamémosla C . Sea $B_t := (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$, $\tilde{B}_t = \{\tilde{\mu}_1(t), \dots, \tilde{\mu}_n(t)\}$ y $\tilde{\tau} : E_0 \rightarrow E_{b_0}$ el transporte paralelo inducido por \tilde{U}

$$[\tau(v)]_{\tilde{B}_{b_0}} = C \cdot [\tau(v)]_{B_{b_0}} = C \cdot [v]_{B_0} = [v]_{\tilde{B}_0} = [\tilde{\tau}(v)]_{\tilde{B}_{b_0}}$$

Así que $\tau = \tilde{\tau}$. Si σ es una curva arbitraria, con $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = b_0$, por ser compacta la puedo cubrir con finitos abiertos trivializables U_1, \dots, U_n . El siguiente lema debería ser claro

- Lema: Sea X un espacio topológico, $\sigma : [0; 1] \rightarrow X$ una curva continua y $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ abiertos tales que $\sigma \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$, entonces existen $i_1, \dots, i_m \subseteq \{1, \dots, n\}$ y una partición $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ tal que $\sigma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subseteq U_{i_k}$ para todo $k = 1, \dots, m$.

Si a los abiertos U_{i_1}, \dots, U_{i_m} los renombramos U_1, \dots, U_n , entonces existen abiertos trivializables U_1, \dots, U_n , posiblemente con repeticiones, que cubren a σ y una partición $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tal que $\sigma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subseteq U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Componiendo los transportes paralelos en cada abierto trivializable, obtenemos un transporte paralelo $\tau : E_0 \rightarrow E_{b_0}$. Concretamente, si denotamos C_i a la matriz de transición de U_i a U_{i+1} en la

componente conexa de $U_i \cap U_{i+1}$ que contiene a $\sigma(t_i)$, y denotamos B_0 a la base en E_0 inducida por U_1 y B_{b_0} a la base en E_{b_0} inducida por U_n , entonces

$$[\tau(v)]_{B_{b_0}} = C_{n-1} \cdots C_1 \cdot [v]_{B_0} \quad (*)$$

Si $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m \subseteq B$ es otra familia de abiertos que cubren a σ y $0 = \tilde{t}_0 < \dots < \tilde{t}_m = 1$ es otra partición del intervalo $[0; 1]$ tal que $\sigma|_{[\tilde{t}_{i-1}, \tilde{t}_i]} \subseteq \tilde{U}_i$, afirmo que definen el mismo transporte paralelo $E_0 \rightarrow E_{b_0}$. Sean $w_1, w_2, \dots \in [0; 1]$ tales que

$$\{w_1, w_2, \dots\} = \{t_0, \dots, t_n\} \cup \{\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_m\} ; \quad w_i < w_{i+1} \quad \forall i$$

Entonces, para cada i , existen r, s tales que $\sigma|_{[w_i, w_{i+1}]} \subseteq U_r \cap \tilde{U}_s$ de modo que ambas trivializaciones inducen el mismo transporte paralelo $\tau_i : E_{\sigma(w_i)} \rightarrow E_{\sigma(w_{i+1})}$, por lo antes probado. Luego, el transporte paralelo $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots : E_0 \rightarrow E_{b_0}$ no depende del cubrimiento ni la partición. Todo esto termina de probar la buena definición del transporte paralelo a lo largo de una curva en un sistema local.

Si σ y $\tilde{\sigma}$ son dos curvas que empiezan en 0 y terminan en b_0 , y si hay una homotopía entre ellas que deja fijo los extremos, afirmo que inducen el mismo transporte paralelo $E_0 \rightarrow E_{b_0}$. Sea $H : [0; 1]^2 \rightarrow B$ la homotopía, con $H(-, 0) = \sigma$ y $H(-, 1) = \tilde{\sigma}$, denotemos $\sigma_s := H(-, s)$ y denotemos $\tau_s : E_0 \rightarrow E_{b_0}$ al transporte paralelo inducido por σ_s . Veamos que para todo $s_0 \in [0; 1]$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\tau_s = \tau_{\tilde{s}}$ para todo s, \tilde{s} en $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, y por compacidad del intervalo $[0; 1]$ concluiríamos que $\tau_0 = \tau_1$, como queríamos ver.

Sea $s_0 \in [0; 1]$, tomemos abiertos trivializables $U_1, \dots, U_n \subseteq B$ y $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tales que $\sigma_{s_0}|_{[t_{i-1}, t_i]} \subseteq U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como $[t_{i-1}, t_i] \times \{s_0\} \subseteq H^{-1}(U_i)$, por el lema del tubo existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $[t_{i-1}, t_i] \times (s_0 - \varepsilon_i, s_0 + \varepsilon_i) \subseteq H^{-1}(U_i)$. Si tomamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, entonces $\sigma_s|_{[t_{i-1}, t_i]} \subseteq U_i$ para todo $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$. Por la fórmula (*), si viésemos que $\sigma_s(t_i)$ y $\sigma_{s_0}(t_i)$ están en la misma componente conexa de $U_i \cap U_{i+1}$ para todo i (con $|s - s_0| < \varepsilon$), concluiríamos que $\tau_s = \tau_{s_0}$, como queríamos ver. Pero $f(x) := H(x, t_i) = \sigma_x(t_i)$, con $x \in [s_0, s]$ ó $[s, s_0]$, es una curva en $U_i \cap U_{i+1}$ que une ambos puntos. Esto termina la demostración de que el transporte paralelo no depende de la clase de homotopía de la curva (fijando los extremos).

De esta forma, si σ es una curva cerrada con $\sigma(0) = \sigma(1) = 0$, el transporte paralelo $E_0 \rightarrow E_0$ es un endomorfismo que no depende de la clase de homotopía de σ y que es inversible, con inversa dada por el transporte paralelo de σ recorrido en sentido contrario. Es decir, tenemos una aplicación $\pi_1(B, 0) \rightarrow GL(E_0)$ que claramente es un morfismo de grupos, es decir, es una representación de $\pi_1(B, 0)$ de rango $n = \dim E_0$. Veamos cómo hacer la construcción recíproca, es decir, cómo asignarle un sistema local a una representación $\pi_1(B, 0) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Representación del Grupo Fundamental \Rightarrow Sistema Local

Sea $r : \tilde{B} \rightarrow B$ es el revestimiento universal de B , entonces $\pi_1(B, 0)$ actúa sobre $r^{-1}(0)$ de la siguiente manera. Sea $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ un representante de una clase en $\pi_1(B, 0)$,

sea $x \in r^{-1}(0)$ y sea $\sigma_x : [0; 1] \rightarrow X$ la única curva tal que $\sigma_x(0) = x$ y $r \circ \sigma_x = \sigma$, entonces $\sigma \cdot x := \sigma_x(1)$ (no depende del representante σ elegido). Podemos extender esta acción a todo \tilde{B} de la siguiente manera. Existe una única $f_\sigma : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ continua tal que $r \circ f = r$ (una transformación Deck) y $f_\sigma(x) = \sigma \cdot x \forall x \in r^{-1}(0)$. Luego definimos $\sigma \cdot x := f_\sigma(x)$ que es una acción de $\pi_1(B, 0)$ en \tilde{B} . Observar que si $x \in r^{-1}(b)$ entonces $\sigma \cdot x \in r^{-1}(b)$. Esta acción es libre y transitiva en las fibras. Se pueden encontrar más detalles en [11].

Ahora sí, dada una representación $\rho : \pi_1(B, 0) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (Notación: $\sigma \cdot v := \rho(\sigma) \cdot v$), consideremos el espacio de funciones $r^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{C}^n$. El grupo $\pi_1(B, 0)$ actúa sobre este espacio vía

$$(\sigma \cdot f)(x) := \sigma \cdot f(\sigma^{-1} \cdot x)$$

Denotaremos V_b al conjunto de funciones $r^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{C}^n$ invariantes por dicha acción, esto es, funciones que satisfacen $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$ para todo σ, x (esta será la fibra sobre b de nuestro fibrado vectorial).

- Observación: Para cada $\tilde{b}_0 \in r^{-1}(b)$ y cada $v_0 \in \mathbb{C}^n$ existe una única función invariante $f \in V_b$ tal que $f(\tilde{b}_0) = v_0$.

Esto es porque, si $\tilde{b} \in r^{-1}(b)$, existe un único σ tal que $\sigma \cdot \tilde{b}_0 = \tilde{b}$ así que

$$f(\tilde{b}) = f(\sigma \cdot \tilde{b}_0) = \sigma \cdot f(\tilde{b}_0) = \sigma \cdot v_0$$

Así que la f queda determinada y, definida así, es invariante. Considerando esto, denotamos $\mathcal{K}_b : r^{-1}(b) \times \mathbb{C}^n \rightarrow V_b$ a la función que a cada (\tilde{b}, v) le asigna la única función $f \in V_b$ tal que $f(\tilde{b}) = v$. Observemos que V_b tiene una estructura obvia de espacio vectorial y que \mathcal{K}_b es lineal en la segunda variable. Sea $\tilde{b} \in r^{-1}(b)$, es fácil verificar que $\mathcal{K}_b(\tilde{b}, -) : \mathbb{C}^n \rightarrow V_b$ es un isomorfismo lineal, así que V_b tiene dimensión n . Denotemos

$$V_\rho := \prod_{b \in B} V_b$$

Y veamos que $\pi : V_\rho \rightarrow B$ es un fibrado vectorial. Consideremos $\mathcal{K} : \tilde{B} \times \mathbb{C}^n \rightarrow V_\rho$ definida por $\mathcal{K}(\tilde{b}, v) := \mathcal{K}_{r(\tilde{b})}(\tilde{b}, v)$. Sea $U \subseteq B$ un abierto parejamente cubierto y sean $\{V_i\}_{i \in I} \subseteq \tilde{B}$ abiertos disjuntos tales que $r|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un difeomorfismo, tomemos uno de estos abiertos $V := V_{i_0}$ y denotemos $q : U \rightarrow V$ a la inversa de $r|_V$. Definimos $\varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ vía

$$\varphi(b, v) := \mathcal{K}(q(b), v)$$

Es claro que $\pi \circ \varphi : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenda y que $\varphi(b, -) : \mathbb{C}^n \rightarrow V_b$ es \mathbb{C} -lineal. Sea $\tilde{U} \subseteq \tilde{B}$ otro abierto parejamente cubierto y sean $\tilde{V}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}$ como antes, entonces la composición $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : (U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{C}^n$ es

$$(\tilde{\varphi}_j^{-1} \circ \varphi_i)(b, v) = (b, \mathcal{K}(q(b), v)(\tilde{q}(b)))$$

Entendamos qué significa la segunda coordenada. Por definición, $\mathcal{K}(q(b), v)$ es la única función $f \in V_b$ tal que $f(q(b)) = v$. Si $U \cap \tilde{U}$ es conexo, existe un (único) $\sigma \in \pi_1(B, 0)$ tal que $\sigma \cdot q(b) = \tilde{q}(b)$ para todo $b \in U \cap \tilde{U}$ así que

$$\mathcal{K}(q(b), v)(\tilde{q}(b)) = f(\tilde{q}(b)) = f(\sigma \cdot q(b)) = \sigma \cdot f(q(b)) = \sigma \cdot v$$

Por lo que la matriz de transición $U \cap \tilde{U} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es constantemente $\rho(\sigma)$. Si $U \cap \tilde{U}$ no es conexo, la matriz de transición es constante en cada componente conexa, así que es localmente constante.

- Observación: Si $U \cap \tilde{U}$ es conexo y $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, entonces la matriz de transición es la identidad.

Como la matriz de transición es diferenciable (pues es localmente constante), existe una única topología y estructura diferenciable que hace de $\pi : V_\rho \rightarrow B$ un fibrado vectorial con las trivializaciones que dimos. En particular, es un sistema local pues las trivializaciones tienen matrices de transición localmente constantes.

- Observación: $\mathcal{K}(\tilde{b}_1, v_1) = \mathcal{K}(\tilde{b}_2, v_2)$ si y solo existe $\sigma \in \pi_1(B, 0)$ con $\sigma \cdot \tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$ y $\sigma \cdot v_1 = v_2$. Luego, si consideramos $\pi_1(B, 0)$ actuando sobre $\tilde{B} \times \mathbb{C}^n$ coordenada a coordenada, tenemos una biyección $\bar{\mathcal{K}} : (\tilde{B} \times \mathbb{C}^n) / \pi_1(B, 0) \rightarrow V_\rho$ que resulta ser un difeomorfismo.

Vimos que a cada sistema local le corresponde una representación de $\pi_1(B, 0)$ y viceversa. Se puede verificar que componerlas da la identidad así que es una la inversa de la otra. Más aún, tanto los sistemas locales sobre una base como las representaciones de un grupo forman una categoría, y la correspondencia que vimos es en realidad una equivalencia categórica. Esto nos permite responder una pregunta que habíamos hecho “¿Existen fibrados vectoriales que no admitan estructura de sistema local?” Si M es simplemente conexo, todo sistema local sobre M es isomorfo al fibrado trivial así que tenemos el siguiente resultado.

- Proposición: Sea M una variedad simplemente conexa, entonces el fibrado tangente $T(M)$ admite una estructura de sistema local (o una conexión playá) si y solo si M es paralelizable.

3.2.4 El Fibrado de de-Rham y el Fibrado Primitivo

El Fibrado de de-Rham

Vimos que los espacios fibrados $\pi : E \rightarrow B$ modelaban la idea de “deformar” una variedad de forma suave y sin alterar la topología. Afirmo que el fibrado vectorial sobre B cuya fibra en $b \in B$ es $H_{\text{dR}}^k(E_b)$ (que llamamos “fibrado de de-Rham”) es un sistema local, por lo que tenemos una conexión (llamada “Conexión de Gauss-Manin”) y una representación del grupo fundamental de B (llamada “la monodromía”). Denotemos

$$R^k(E) := \prod_{b \in B} H_{\text{dR}}^k(E_b)$$

Y $\tilde{\pi} : R^k(E) \rightarrow B$ a la proyección sobre B . Sea $\varphi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ una trivialización del fibrado, con $U \subseteq B$ abierto y F la fibra, entonces $\varphi_b := \varphi(b, -) : F \rightarrow E_b$ es un difeomorfismo, así que define un isomorfismo $\varphi_b^* : H_{\text{dR}}^k(E_b) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(F)$. Defino la trivialización $\tilde{\varphi} : U \times H_{\text{dR}}^k(F) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ vía

$$\tilde{\varphi}(b, \omega) := (\varphi_b^*)^{-1}(\omega)$$

Que es biyectiva, con inversa $\tilde{\varphi}^{-1}(x) = (\tilde{\pi}(x), \varphi_{\tilde{\pi}(x)}^*(x))$. Es fácil notar que la composición $\tilde{\pi} \circ \tilde{\varphi} : U \times H_{\text{dR}}^k(F) \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada y que $\tilde{\varphi}(b, -)$ es lineal para cada $b \in U$. Si (V, μ) es otra trivialización de $\pi : E \rightarrow B$, entonces

$$(\mu^{-1} \circ \varphi)(b, x) = (b, (\mu_b^{-1} \circ \varphi_b)(x))$$

Así que $g_b := \mu_b^{-1} \circ \varphi_b : F \rightarrow F$ sería el difeomorfismo de transición entre las trivializaciones. Por otro lado

$$(\tilde{\mu}^{-1} \circ \tilde{\varphi})(b, \omega) = (b, (\mu_b^* \circ (\varphi_b^*)^{-1})(\omega)) = (b, (\varphi_b^{-1} \circ \mu_b)^*(\omega)) = (b, (g_b^*)^{-1}(\omega))$$

Así que $(g_b^*)^{-1} : H_{\text{dR}}^k(F) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(F)$ es la matriz (transformación lineal) de transición entre $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\mu}$ en b . Afirimo que la aplicación $b \rightarrow (g_b^*)^{-1}$ es localmente constante, y en particular diferenciable. Luego, existe una única topología y estructura diferenciable que hace de $\tilde{\pi} : R^k(E) \rightarrow B$ un fibrado vectorial con las trivializaciones que dimos. Más aún, es un sistema local.

Sea W una componente conexa de $U \cap V$, sean $b_1, b_2 \in W$ y sea $\sigma : [0; 1] \rightarrow U \cap V$ con $\sigma(0) = b_1$ y $\sigma(1) = b_2$, entonces $H : F \times [0; 1] \rightarrow F$ definida por

$$H(x, t) := g_{\sigma(t)}(x) = (\mu^{-1} \circ \varphi)(\sigma(t), x)$$

Me da una homotopía entre los difeomorfismos $g_{b_1}, g_{b_2} : F \rightarrow F$. Por lo tanto $(g_{b_1}^*)^{-1} = (g_{b_2}^*)^{-1}$ lo que demuestra que la matriz de transición del fibrado de de-Rham es localmente constante, como queríamos ver.

- Transporte Paralelo: Como vimos, en un sistema local tenemos bien definido un transporte paralelo entre las fibras. Una curva $\sigma : [0; 1] \rightarrow B$ con $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = b$ me induce un isomorfismo $\tau : H_{\text{dR}}^k(E_0) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b)$. Si σ está contenida en un abierto trivializable $U \subseteq B$ con trivialización φ , entonces $(\varphi_0 \circ \varphi_b^{-1})^* : H_{\text{dR}}^k(E_0) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b)$ es el transporte paralelo (no depende de la curva).

Para una curva σ arbitraria, la puedo cubrir por abiertos trivializables U_1, \dots, U_n tal que, para cierta partición $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ tenemos $\sigma(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ para $0 < i < n$, $\sigma(0) \in U_1$ y $\sigma(1) \in U_n$. Componiendo los isomorfismos $H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(t_i)}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_{\sigma(t_{i+1})})$ obtenemos el transporte paralelo $H_{\text{dR}}^k(E_0) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b)$. Este no depende de la elección de abiertos trivializables para cubrir a

σ ni de la clase de homotopía de σ . En particular, si B es simplemente conexo, para cada $b_1, b_2 \in B$ tenemos un isomorfismo canónico $H_{\text{dR}}^k(E_{b_1}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_{b_2})$.

Como vimos en la sección 2.3.1, si $f : X \rightarrow Y$ es diferenciable, entonces $f^* : H_{\text{dR}}^k(Y) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X)$ satisface que $f^*(H_{\text{dR}}^k(Y, \mathbb{Z})) \subseteq H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{Z})$. En particular, si f es un difeomorfismo, entonces $f^* : H_{\text{dR}}^k(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo de grupos. En nuestro caso, los $\varphi_0 \circ \varphi_b^{-1} : E_b \rightarrow E_0$ son difeomorfismos y, por lo tanto, los $(\varphi_0 \circ \varphi_b^{-1})^* : H_{\text{dR}}^k(E_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b, \mathbb{Z})$ son isomorfismos de grupos. Como el transporte paralelo se construye componiendo este tipo de isomorfismos, si $\tau : H_{\text{dR}}^k(E_0) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b)$ es el transporte paralelo a lo largo de una curva σ , se restringe a un isomorfismo de grupos $\tau : H_{\text{dR}}^k(E_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_b, \mathbb{Z})$. En particular, la acción de $\pi_1(B, 0)$ sobre $H_{\text{dR}}^k(E_0)$ (la monodromía) se restringe a una acción en $H_{\text{dR}}^k(E_0, \mathbb{Z})$ por isomorfismos de grupos.

El Fibrado Primitivo

Sea $\pi : E \rightarrow B$ un espacio fibrado, supongamos que E es una variedad Kähler con forma de Kähler κ y que $E_b \subseteq E$ es una subvariedad compleja para cada $b \in B$. Si $i_b : E_b \rightarrow E$ la inclusión, entonces $\kappa_b := i_b^*(\kappa)$ es una forma de Kähler en E_b , así que tiene sentido hablar de cohomología primitiva en E_b . Definimos entonces

$$R_o^k(E) := \prod_{b \in B} H_o^k(E_b)$$

Y $\tilde{\pi} : R_o^k(E) \rightarrow B$ la proyección. Tomemos $0 \in B$ un punto arbitrario y tomemos una trivialización $\varphi : U \times E_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$, con U un entorno abierto y conexo de 0 , tal que $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in E_0$. Sea $b \in U$, el difeomorfismo $\varphi_b : E_0 \rightarrow E_b$ me induce un isomorfismo $\varphi_b^* : H_{\text{dR}}^k(E_b) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(E_0)$. Sea $\sigma : [0; 1] \rightarrow U$ una curva con $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = b$, entonces $H : E_0 \times [0; 1] \rightarrow E$ definida por

$$H(x, t) := \varphi(\sigma(t), x)$$

Me da una homotopía entre $i_0 : E_0 \rightarrow E$ y $i_b \circ \varphi_b : E_0 \rightarrow E$. Luego, a nivel de cohomología de de-Rham tenemos

$$\varphi_b^*(\kappa_b) = \varphi_b^*(i_b^*(\kappa)) = (i_b \circ \varphi_b)^*(\kappa) = i_0^*(\kappa) = \kappa_0$$

De donde se deduce que $\varphi_b^* : H_o^k(E_b) \rightarrow H_o^k(E_0)$, y es un isomorfismo. Definimos entonces $\tilde{\varphi} : U \times H_o^k(E_0) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ vía

$$\tilde{\varphi}(b, \omega) := (\varphi_b^*)^{-1}(\omega)$$

Si tomamos otro punto $0' \in B$ y otra trivialización $\mu : V \times E_{0'} \rightarrow \pi^{-1}(V)$ de iguales características que antes, que me induce una trivialización $\tilde{\mu} : U \times H_o^k(E_{0'}) \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$, entonces la “matriz” de transición $U \cap V \rightarrow \text{Hom}(H_o^k(E_0), H_o^k(E_{0'}))$ es localmente constante, y la demostración es completamente análoga a la del caso del fibrado de de-Rham. Luego, $\tilde{\pi} : R_o^k(E) \rightarrow B$ es un sistema local con las trivializaciones que describimos y lo llamamos “El Fibrado Primitivo”.

- Observación: Si $\kappa \in H_{\text{dR}}^2(E, \mathbb{Z})$, entonces $\kappa_b \in H_{\text{dR}}^2(E_b, \mathbb{Z})$ así que tenemos un reticulado $H_o^k(E_b, \mathbb{Z}) \subseteq H_o^k(E_b)$. Al igual que en el fibrado de de-Rham, el transporte paralelo en $R_o^k(E)$ a lo largo de una curva en B que va de 0 a b me induce un isomorfismo $\tau : H_o^k(E_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_o^k(E_b, \mathbb{Z})$.

Si E_b es compacto para todo $b \in B$, entonces tenemos una polarización Q_b definida sobre $H_{\text{dR}}^k(E_b)$ (pero solo sobre $H_o^k(E_b)$ satisface la segunda relación de Riemann-Hodge). Sea $\varphi : U \times E_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ una trivialización, entonces $\varphi_b : E_0 \rightarrow E_b$ es un difeomorfismo y $\varphi_b^*(\kappa_b) = \kappa_0$ (en cohomología) así que

$$\int_{E_b} \kappa_b^{n-k} \wedge \omega \wedge \tilde{\omega} = \int_{E_0} \varphi_b^*(\kappa_b^{n-k} \wedge \omega \wedge \tilde{\omega}) = \int_{E_0} \kappa_0^{n-k} \wedge \varphi_b^*(\omega) \wedge \varphi_b^*(\tilde{\omega})$$

Por lo tanto $Q_0(\varphi_b^*(\omega), \varphi_b^*(\tilde{\omega})) = Q_b(\omega, \tilde{\omega})$ para todo $b \in U$. Como el transporte paralelo en $R_o^k(E)$ se construye componiendo isomorfismos $(\varphi_b^*)^{-1} : H_o^k(E_0) \rightarrow H_o^k(E_b)$ inducidos por trivializaciones, concluimos que $Q_b(\tau(\omega), \tau(\tilde{\omega})) = Q_0(\omega, \tilde{\omega})$ para todo transporte paralelo $\tau : H_o^k(E_0) \rightarrow H_o^k(E_b)$. Sin embargo, esto no nos da un morfismo de estructuras de Hodge polarizadas, pues necesitaríamos que los φ_b sean biholomorfismos para que preserven los componentes de la descomposición de Hodge.

3.3 El Fibrado Tangente de la Grasmaniana

En la sección 3.4 hablaremos del mapa de períodos. Una propiedad importante que satisface dicho mapa, es la llamada “transversalidad de Griffiths”. Para poder enunciar esta propiedad, debemos entender la identificación $T_S(\text{Grass}_k(V)) \equiv \text{Hom}(S, V/S)$, ese es el objetivo de esta sección.

En la sección 3.3.1 probaremos que la proyección $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ es una submersión, lo cual nos permitirá concluir que toda curva en $\text{Grass}_k(V)$ se levanta localmente a una curva en $\text{Ind}_k(V)$.

Usando esto, en la sección 3.3.2 identificaremos $T_S(\text{Grass}_k(V)) \equiv (\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$ para cierta relación de equivalencia. Concretamente, si $I := (v_1, \dots, v_k)$ es una base de S y $w := (w_1, \dots, w_k) \in V^k$, el vector tangente asociado a (I, w) es el vector velocidad de la curva $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ en la Grasmaniana, siendo $\sigma_i(t) = v_i + t \cdot w_i$ (notar que $\sigma(0) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = S$). La relación de equivalencia identifica dos pares (I, w) y (J, \tilde{w}) que inducen el mismo vector tangente. Sea $C_{I,J} \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ la matriz de cambio de base de I a J , veremos que

$$(I, w) \sim (J, \tilde{w}) \Leftrightarrow \tilde{w} \equiv C_{I,J} \cdot w \pmod{S^k}$$

Comenzamos la sección 3.3.3 describiendo dos fibrados vectoriales sobre la Grasmaniana. El fibrado tautológico, cuya fibra sobre $S \in \text{Grass}_k(V)$ es S , y la Grasmaniana afín, cuya fibra sobre S es V/S . Tomando el “hom interno” entre ambos fibrados vectoriales, obtenemos el fibrado cuya fibra sobre S es $\text{Hom}(S, V/S)$. Entendiendo la estructura de este fibrado, ahora sí podemos plantearnos si es isomorfo al fibrado tangente $T(\text{Grass}_k(V))$.

Para terminar, exhibimos el isomorfismo $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$ que a cada par (I, w) , con $I = (v_1, \dots, v_k)$ y $w = (w_1, \dots, w_k)$, le asigna la transformación lineal $f : S \rightarrow V/S$ definida sobre la base I por $f(v_i) := [w_i]$ (se puede probar que todo par (J, \tilde{w}) en la clase de equivalencia de (I, w) induce la misma transformación lineal). Componiendo con el isomorfismo $T_S(\text{Grass}_k(V)) \rightarrow (\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$ obtenemos el isomorfismo deseado de fibrados vectoriales.

3.3.1 La Submersión $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$

Nuestro primer objetivo es probar que la proyección $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$, que a cada k -upla de vectores linealmente independientes (v_1, \dots, v_k) le asigna el subespacio de V generado por dichos vectores, es una submersión. En la sección 1.2.4 describimos cartas (U_{T_0}, φ) para la Grasmaniana, que se construían tomando dos subespacios $S_0, T_0 \subseteq V$, de dimensión k y $n - k$ respectivamente, tales que $S_0 \oplus T_0 = V$. El abierto U_{T_0} es el conjunto de subespacios de dimensión k que está en suma directa con T_0 . Si elegimos una base $\{w_1, \dots, w_k\}$ en S_0 y una base $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ en T_0 , uniéndolas obtenemos una base en V . Elegir una base en V permite identificar $\text{Ind}_k(V)$ con $\mathbb{C}_*^{n \times k}$, el conjunto de matrices en $\mathbb{C}^{n \times k}$ de rango k . Vía estas identificaciones, tenemos que

$$\pi^{-1}(U_{T_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times k} : \det(A_1) \neq 0 \right\}$$

Donde $A_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$. La elección de bases en S_0 y T_0 nos permite identificar $\text{Hom}(S_0, T_0) \cong \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ y vemos que, con todas estas identificaciones, la función $\varphi \circ \pi : \pi^{-1}(U_{T_0}) \rightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ viene dada por

$$(\varphi \circ \pi) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = -A_2 \cdot A_1^{-1}$$

Queremos ver que esta función es una submersión, y para ello usamos los siguientes resultados conocidos

- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $U \subseteq V$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ y $g : U \rightarrow \mathbb{C}^{m \times k}$ funciones diferenciables y $h : V \rightarrow \mathbb{C}^{n \times k}$ una función definida por $h(v) := f(v) \cdot g(v)$, entonces

$$dh_x(v) = f(x) \cdot dg_x(v) + df_x(v) \cdot g(x)$$

- Sea $f : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ la función $f(A) = A^{-1}$, entonces

$$df_A(M) = -A^{-1} \cdot M \cdot A^{-1}$$

En nuestro caso $U = \pi^{-1}(U_{T_0}) \subseteq \mathbb{C}^{n \times k}$ y definimos $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{k \times k}$ y $g : U \rightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ vía

$$f \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = -A_2 \quad ; \quad g \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A_1^{-1}$$

De modo que $\varphi \circ \pi = f \cdot g$. Notar que f es lineal, así que su diferencial en cualquier punto es sí misma. Por otro lado, g es la proyección del primer bloque compuesta con la función invertir, así que haciendo regla de la cadena $dg_A(M) = -A_1^{-1} \cdot M_1 \cdot A_1^{-1}$. Uniendo esto con la regla del producto, obtenemos que

$$d(\varphi \circ \pi)_A(M) = (A_2 A_1^{-1} \cdot M_1 - M_2) \cdot A_1^{-1}$$

Para ver que $d(\varphi \circ \pi)_A : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ es un epimorfismo, basta con ver que su núcleo tiene dimensión k^2 . Es fácil verificar que

$$\text{Ker}(d(\varphi \circ \pi)_A) = \left\{ \begin{pmatrix} M \\ A_2 A_1^{-1} \cdot M \end{pmatrix} : M \in \mathbb{C}^{k \times k} \right\}$$

Que claramente tiene dimensión k^2 .

3.3.2 Una primera descripción del Fibrado Tangente de la Grasmaniana

Para describir el fibrado tangente de la Grasmaniana, primero debemos entender como son las curvas en $\text{Grass}_k(V)$. Sea $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ una curva suave en $\text{Ind}_k(V)$ (siendo $\sigma_1, \dots, \sigma_k : [0; 1] \rightarrow V$ suaves), entonces $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle := \pi(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ es una curva suave en $\text{Grass}_k(V)$. Más aún, como $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ es una submersión, toda curva en $\text{Grass}_k(V)$ es localmente de esta forma (toda curva se levanta localmente a una curva en $\text{Ind}_k(V)$). Buscamos determinar cuándo dos curvas $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ y $\tilde{\sigma} = \langle \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k \rangle$ satisfacen $\sigma'(0) = \tilde{\sigma}'(0)$.

- Observación: Sea $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ una curva en $\text{Grass}_k(V)$, sea $v_i := \sigma_i(0)$ y sea $w_i := \sigma_i'(0)$, entonces

$$\sigma'(0) = d\pi_{(v_1, \dots, v_k)}(w_1, \dots, w_k)$$

Esto es porque $\tilde{\sigma} := (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ es una curva en $\text{Ind}_k(V)$ con $\tilde{\sigma}(0) = (v_1, \dots, v_k)$ y con $\tilde{\sigma}'(0) = (w_1, \dots, w_k)$ por lo que

$$d\pi_{(v_1, \dots, v_k)}(w_1, \dots, w_k) = (\pi \circ \tilde{\sigma})'(0) = \sigma'(0)$$

Así que estudiar el diferencial de la proyección π nos ayudará a determinar cuándo dos curvas en $\text{Grass}_k(V)$ tienen el mismo vector velocidad inicial. Recordemos que $\text{Ind}_k(V) \subseteq V^k$ es un abierto y V^k es un espacio vectorial así que, si (v_1, \dots, v_k) es una base de un $S \in \text{Grass}_k(V)$, entonces $d\pi_{(v_1, \dots, v_k)} : V^k \rightarrow T_S(\text{Grass}_k(V))$. Lo primero que nos va a ser útil, es relacionar $d\pi_I$ con $d\pi_J$ cuando I y J son bases de un mismo subespacio $S \subseteq V$. De acá en adelante denotamos $C_{I,J} \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ a la matriz de cambio de base entre I y J . Por otro lado, si $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$, denotamos $m_A : V^k \rightarrow V^k$ a la función $m_A(v_1, \dots, v_k) = A \cdot (v_1, \dots, v_k)$ (la acción de $\mathbb{C}^{k \times k}$ en V^k , que es la misma que la de $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ sobre $\text{Ind}_k(V)$). Ahora sí, tenemos la siguiente proposición

- Proposición: Si I y J son bases de un mismo subespacio $S \in \text{Grass}_k(V)$, entonces

$$d\pi_I = d\pi_J \circ m_{C_{I,J}}$$

- Demostración: Denotemos $C = C_{I,J} \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$. Si $(v_1, \dots, v_k) \in \text{Ind}_k(V)$, habíamos visto que

$$\langle C \cdot (v_1, \dots, v_k) \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Así que $\pi \circ m_C = \pi$, pensando a $m_C : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Ind}_k(V)$. Luego, usando la regla de la cadena

$$d\pi_I = d(\pi \circ m_C)_I = d\pi_{m_C(I)} \circ d(m_C)_I$$

Pero $m_C(I) = C \cdot I = J$ y $d(m_C)_I = m_C$ pues es una transformación lineal. Así concluimos que $d\pi_I = d\pi_J \circ m_C$

Otra observación importante es la siguiente

- Proposición: Sea I una base de un subespacio $S \in \text{Grass}_k(V)$, entonces $\text{Ker}(d\pi_I) = S^k$

- Demostración: Sea $I = (v_1, \dots, v_k)$ y sea $(w_1, \dots, w_k) \in S^k$, consideremos las curvas $\sigma_1, \dots, \sigma_k : \mathbb{R} \rightarrow V$ definidas por

$$\sigma_i(t) := t \cdot w_i + v_i$$

Sea $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) : \mathbb{R} \rightarrow V^k$, entonces $\tilde{\sigma}(0) = I \in \text{Ind}_k(V)$ que es un abierto en V^k , así que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\sigma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{Ind}_k(V)$. Sea $\sigma = \pi(\tilde{\sigma})$, notar que

$$d\pi_I(w_1, \dots, w_k) = \sigma'(0)$$

Pero $\sigma_i \in S$ para todo i , pues $v_i, w_i \in S$, así que $\sigma = \pi(\tilde{\sigma})$ es constantemente S . Luego $\sigma'(0) = 0$ y $(w_1, \dots, w_k) \in \text{Ker}(d\pi_I)$. Esto prueba que $S^k \subseteq \text{Ker}(d\pi_I)$. Para ver que vale la igualdad, veamos que ambos espacios tienen la misma dimensión. Recordemos que $\pi : \text{Ind}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ es una submersión así

que $\text{Im}(d\pi_I) = T_S(\text{Grass}_k(V))$ que tiene dimensión $k \cdot (n - k)$ (si $\dim V = n$).

Luego

$$\dim \text{Ker}(d\pi_I) = n \cdot k - k \cdot (n - k) = k^2 = \dim(S^k)$$

Tenemos entonces un isomorfismo $d\pi_I : V^k/S^k \rightarrow T_S(\text{Grass}_k(V))$. El problema es que dicho isomorfismo depende de la elección de una base I en S . Afortunadamente, ya estamos en condiciones de determinar cuándo dos curvas que pasan por un mismo punto en $\text{Grass}_k(V)$, tienen el mismo vector velocidad.

- **Proposición:** Si I y J son base de un mismo subespacio $S \in \text{Grass}_k(V)$, sea $C \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ es la matriz de cambio de base de I a J , entonces

$$d\pi_I(w_1, \dots, w_k) = d\pi_J(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \Leftrightarrow (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \equiv C \cdot (w_1, \dots, w_k) \pmod{S^k}$$

Equivalentemente

$$d\pi_I(w_1, \dots, w_k) = d\pi_J(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \Leftrightarrow \tilde{w}_i \equiv \sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot w_j \pmod{S} \quad \forall i$$

- **Demostración:** Sabemos que $d\pi_I = d\pi_J \circ m_C$ así que

$$\begin{aligned} d\pi_I(w_1, \dots, w_k) = d\pi_J(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) &\Leftrightarrow d\pi_J(C \cdot (w_1, \dots, w_k)) = d\pi_J(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \\ &\Leftrightarrow C \cdot (w_1, \dots, w_k) - (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \in \text{Ker}(d\pi_J) \end{aligned}$$

Y como $\text{Ker}(d\pi_J) = S^k$, obtenemos el resultado.

Como corolario, obtenemos la respuesta a nuestra pregunta inicial

- **Corolario:** Sean $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ y $\tilde{\sigma} = \langle \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k \rangle$ curvas en $\text{Grass}_k(V)$ con $\sigma(0) = \tilde{\sigma}(0)$, denotemos para cada $i = 1, \dots, k$

$$v_i := \sigma_i(0) \quad ; \quad \tilde{v}_i := \tilde{\sigma}_i(0) \quad ; \quad w_i := \sigma_i'(0) \quad ; \quad \tilde{w}_i := \tilde{\sigma}_i'(0)$$

Sea $C \in \text{GL}_k(\mathbb{C})$ la matriz de cambio de base de (v_1, \dots, v_k) a $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$, entonces

$$\sigma'(0) = \tilde{\sigma}'(0) \Leftrightarrow (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k) \equiv C \cdot (w_1, \dots, w_k) \pmod{S^k}$$

Equivalentemente

$$\sigma'(0) = \tilde{\sigma}'(0) \Leftrightarrow \tilde{w}_i \equiv \sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot w_j \pmod{S} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Sea S un espacio vectorial de dimensión k , denotemos $\text{Base}(S)$ al conjunto de bases en S , que se identifica con $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ al fijar una base en S . En base a lo recién demostrado, vemos que $T_S(\text{Grass}_k(V))$ se identifica con $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$ donde $(I, w) \sim (J, \tilde{w})$ si y solo si $\tilde{w} \equiv C_{I,J} \cdot w \pmod{S^k}$. Intuitivamente, el vector tangente $(I, w) = ((v_1, \dots, v_k), (w_1, \dots, w_k))$ me está diciendo "Mové la base (v_1, \dots, v_k) desplazando el vector v_i en la dirección w_i ". Si J es otra base del subespacio, desplazar la base I en la dirección w es equivalente a desplazar la base J en la dirección $C_{I,J} \cdot w$, esto es $(I, w) \sim (J, C_{I,J} \cdot w)$. Si una misma base I decido desplazarla en dos direcciones distintas w y \tilde{w} , tendrán el mismo efecto sobre el desplazamiento del subespacio (es decir $(I, w) \sim (I, \tilde{w})$) si y solo si $w \equiv \tilde{w} \pmod{S^k}$. Esto es porque desplazar un vector de la base I a lo largo de S no cambia el subespacio.

Para entender la estructura de espacio vectorial de $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$, debería ser claro que $(I, w) + (I, \tilde{w}) = (I, w + \tilde{w})$. Si tenemos dos elementos distintos (I, w) y (J, \tilde{w}) sabemos que $(I, w) \sim (J, C_{I,J} \cdot w)$ así que

$$(I, w) + (J, \tilde{w}) = (J, C_{I,J} \cdot w) + (J, \tilde{w}) = (J, C_{I,J} \cdot w + \tilde{w}) = (I, w + C_{J,I} \cdot \tilde{w})$$

Y el producto escalar es $k \cdot (I, w) = (I, k \cdot w)$. Se puede verificar que estas operaciones están bien definidas (no dependen del representante de la clase) y el elemento neutro es la clase $\text{Base}(V) \times S^k$. También se puede verificar que la biyección $T_S(\text{Grass}_k(V)) \leftrightarrow (\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$ es un isomorfismo lineal.

En la siguiente sección veremos que el fibrado tangente $T(\text{Grass}_k(V))$ es naturalmente isomorfo al fibrado vectorial sobre la Grasmaniana cuya fibra en $S \in \text{Grass}_k(V)$ es $\text{Hom}(S, V/S)$. Esta identificación es, en algún sentido, más “prolija” que la que dimos.

3.3.3 El isomorfismo con el fibrado $S \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$

El fibrado Tautológico y la Grasmaniana afín

El fibrado tautológico es el fibrado vectorial sobre la Grasmaniana que tiene por fibra sobre $S \in \text{Grass}_k(V)$ al espacio vectorial S (por eso el nombre). La Grasmaniana afín es el fibrado vectorial sobre la Grasmaniana que tiene por fibra sobre $S \in \text{Grass}_k(V)$ a V/S (en breve justificaremos el nombre). Denotamos

$$\text{Taut}_k(V) := \coprod_{S \in \text{Grass}_k(V)} S \quad ; \quad \text{AffGr}_k(V) := \coprod_{S \in \text{Grass}_k(V)} V/S$$

Y tomamos $\pi : \text{Taut}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ y $\tilde{\pi} : \text{AffGr}_k(V) \rightarrow \text{Grass}_k(V)$ las proyecciones. Fijemos $S_0, T_0 \subseteq V$ subespacios de dimensión k y $n - k$ respectivamente, tales que $V = S_0 \oplus T_0$. Recuerdo que U_{T_0} es el conjunto de subespacios de dimensión k que están en suma directa con T_0 , y este conjunto forma un abierto en $\text{Grass}_k(V)$. Sea $S \in U_{T_0}$, denotamos $\vartheta_S : V \rightarrow S$ a la proyección inducida por la descomposición $V = S \oplus T_0$ y denotemos $\pi_S : V \rightarrow V/S$ a la proyección al cociente. Luego, $\varphi : U_{T_0} \times S_0 \rightarrow \pi^{-1}(U_{T_0})$ y $\tilde{\varphi} : U_{T_0} \times T_0 \rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_{T_0})$ definidas por

$$\varphi(S, v) := \vartheta_S(v) \quad ; \quad \tilde{\varphi}(S, v) := \pi_S(v)$$

Son trivializaciones del fibrado tautológico y la Grasmaniana afín respectivamente. Es claro que $\varphi_S = \vartheta_S|_{S_0} : S_0 \rightarrow S$ es un isomorfismo lineal ya que el núcleo de ϑ_S es T_0 y $S_0 \cap T_0 = 0$. Similarmente $\tilde{\varphi}_S = \pi_S|_{T_0} : T_0 \rightarrow V/S$ es un isomorfismo lineal ya que $S \in U_{T_0}$ y $S \cap T_0 = 0$. Haciendo algunas cuentas (un tanto tediosas), se puede demostrar que si tomamos otras trivializaciones construidas de esta manera a partir de otros subespacios \tilde{S}_0, \tilde{T}_0 , entonces la matriz de transición es holomorfa así que ambos fibrados son fibrados vectoriales holomorfos.

Con la topología y estructura compleja sobre $\text{Taut}_k(V)$ que hace que estas funciones sean trivializaciones, resulta ser un espacio biholomorfo a una subvariedad de $\text{Grass}_k(V) \times V$. Concretamente

$$\text{Taut}_k(V) \equiv \{(S, v) : S \in \text{Grass}_k(V) \text{ y } v \in S\} \subseteq \text{Grass}_k(V) \times V$$

Esto nos permite ver al fibrado tautológico como un sub-fibrado del fibrado trivial $\text{Grass}_k(V) \times V \rightarrow \text{Grass}_k(V)$.

Si V tiene un producto interno hermitiano, se puede considerar sobre la Grasmaniana el fibrado vectorial que tiene por fibra sobre $S \in \text{Grass}_k(V)$ a S^\perp . Llamemos $\text{Taut}_k^\perp(V)$ al espacio total de este fibrado, el cual también resulta biholomorfo a una subvariedad de $\text{Grass}_k(V) \times V$

$$\text{Taut}_k^\perp(V) \equiv \{(S, v) : S \in \text{Grass}_k(V) \text{ y } v \in S^\perp\} \subseteq \text{Grass}_k(V) \times V$$

Así como S^\perp es isomorfo a V/S , el fibrado vectorial $\text{Taut}_k^\perp(V)$ es isomorfo a $\text{AffGr}_k(V)$. Todo subespacio afín de V de dimensión k se puede representar de manera única como $S + v$ con $S \in \text{Grass}_k(V)$ y $v \in S^\perp$. Luego, el conjunto de subespacios afines de V de dimensión k se identifica con $\text{Taut}_k^\perp(V) \equiv \text{AffGr}_k(V)$, por eso el nombre "Grasmaniana afín".

El "Hom Interno" (ver sección 1.3.1) entre el fibrado tautológico y la Grasmaniana afín, esto es $\underline{\text{Hom}}(\text{Taut}_k(V), \text{AffGr}_k(V))$, nos da un fibrado vectorial sobre la Grasmaniana que tiene por fibra sobre $S \in \text{Grass}_k(V)$ a $\text{Hom}(S, V/S)$. A continuación mostramos la identificación $T_S(V) \equiv \text{Hom}(S, V/S)$ que induce un isomorfismo de fibrados vectoriales.

El Isomorfismo

Previamente exhibimos un isomorfismo $T_S(\text{Grass}_k(V)) \rightarrow (\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$. Nuestro objetivo ahora es definir un isomorfismo $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$ obteniendo así el isomorfismo $T_S(\text{Grass}_k(V)) \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$ que buscábamos.

Sea $(I, w) \in \text{Base}(S) \times V^k$, digamos $I = (v_1, \dots, v_k)$ y $w = (w_1, \dots, w_k)$, entonces defino $f_{(I,w)} : S \rightarrow V/S$ como el único morfismo lineal con

$$f_{(I,w)}(v_i) = [w_i]$$

Veamos que $(I, w) \sim (J, \tilde{w}) \Rightarrow f_{(I,w)} = f_{(J,\tilde{w})}$. Si C la matriz de cambio de base de I a J , entonces $\tilde{w} \equiv C \cdot w \pmod{S^k}$. Si $J = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k)$ y $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k)$, entonces

$$\tilde{v}_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot v_j \quad ; \quad \tilde{w}_i \equiv \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot w_j \pmod{S}$$

Por lo tanto

$$f_{(I,w)}(\tilde{v}_i) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot f_{(I,w)}(v_j) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot [w_j] = \left[\sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot w_j \right] = [\tilde{w}_i]$$

Así que $f_{(I,w)} = f_{(J,\tilde{w})}$. Luego, tenemos bien definida una aplicación $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$. Afirmo que es un isomorfismo lineal. Veamos primero que es aditiva. Sea f_1 la función asociada a (I, w) , f_2 la función asociada a (J, \tilde{w}) y f la función asociada a $(I, w) + (J, \tilde{w})$, habíamos visto que

$$(I, w) + (J, \tilde{w}) = (J, C \cdot w + \tilde{w})$$

Siendo C la matriz de cambio de base de I a J . Luego, f está definida por

$$f(\tilde{v}_i) = \left[\sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot w_j + \tilde{w}_i \right]$$

Veamos que coincide con $f_1 + f_2$. Tenemos que

$$\tilde{v}_i = \sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot v_j \Rightarrow f_1(\tilde{v}_i) = \left[\sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot w_j \right] \Rightarrow (f_1 + f_2)(\tilde{v}_i) = \left[\sum_{j=1}^k C_{ij} \cdot w_j + \tilde{w}_i \right]$$

Así que $f = f_1 + f_2$. Esto demuestra que la aplicación $(\text{Base}(S) \times V^k)/\sim \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$ es aditiva, y la demostración de que saca escalares es trivial, así que es un morfismo lineal. El núcleo de la aplicación es trivial ya que, si la función asociada a (I, w) es la función nula, significa que $w \in S^k$ y entonces (I, w) es el neutro de la suma. Finalmente, es un isomorfismo ya que dominio y codominio tienen la misma dimensión

$$\dim \text{Hom}(S, V/S) = \dim S \cdot \dim(V/S) = k \cdot (n - k) = \dim \text{Grass}_k(V)$$

Componiendo esta aplicación con el isomorfismo $T_S(\text{Grass}_k(V)) \rightarrow (\text{Base}(S) \times V^k)/\sim$ que habíamos exhibido antes, obtenemos el isomorfismo $T_S(\text{Grass}_k(V)) \rightarrow \text{Hom}(S, V/S)$. Tomando trivializaciones en ambos fibrados vectoriales, se puede verificar que esto induce un isomorfismo entre ambos fibrados vectoriales.

- Síntesis: Sea $S \in \text{Grass}_k(V)$ y sea $\sigma = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ una curva en $\text{Grass}_k(V)$ con $\sigma(0) = S$. Si $v_i := \sigma_i(0)$ y $w_i := \sigma_i'(0)$ para todo i , entonces $\sigma'(0) \in T_S(\text{Grass}_k(V))$ se identifica con $f \in \text{Hom}(S, V/S)$ definida por

$$f(v_i) = [w_i]$$

3.4 El Mapa de Períodos

En la sección 3.1 vimos que los espacios fibrados modelaban la idea de deformar una variedad de forma suave y sin alterar la topología. Si estábamos deformando una variedad compacta, el teorema de Ehresmann nos decía que una tal deformación la podíamos modelar como una submersión propia y sobreyectiva $f : X \rightarrow S$.

Usando este modelo, si X_0 es una variedad **compleja** compacta, queremos deformarla en otras variedades complejas X_t , difeomorfas a X_0 , pero no biholomorfas. Es decir, queremos deformar X_0 sin alterar su estructura diferenciable, pero alterando su estructura compleja. Modelar esta idea, nos permite darle “geometría” al espacio móduli de estructuras complejas sobre una variedad diferenciable. La manera de modelar esto, es la siguiente: Sean X y S variedades complejas y sea $f : X \rightarrow S$ una submersión holomorfa, propia y sobreyectiva, entonces $X_t := f^{-1}(t)$ es una familia de variedades complejas difeomorfas entre sí (por Ehresmann), pero no necesariamente biholomorfas. Una función $f : X \rightarrow S$ con tales propiedades es lo que llamaremos una “deformación compleja”.

Dada una deformación compleja $f : X \rightarrow S$, buscamos medir de alguna forma cómo cambia la estructura compleja de los X_t en función de $t \in S$. Una manera de hacer esto, es estudiar cómo cambian los invariantes complejos $H^{p,q}(X_t)$. Si X_t es Kähler para todo $t \in S$, entonces estos invariantes no son independientes entre sí, pues satisfacen

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & H_{\text{dR}}^k(X_t)^{\mathbb{C}} = H^{k,0}(X_t) \oplus H^{k-1,1}(X_t) \oplus \dots \oplus H^{0,k}(X_t) \\ \text{ii)} \quad & \overline{H^{p,q}(X_t)} = H^{q,p}(X_t) \end{aligned}$$

Así que, en lugar de estudiar cómo varía cada $H^{p,q}(X_t)$ por separado, es conveniente estudiar cómo varía la estructura de Hodge $(H_{\text{dR}}^k(X_t), H^{p,q}(X_t))$ en función de t . Esto es lo que busca medir el mapa de períodos.

Como $f : X \rightarrow S$ es un espacio fibrado, el fibrado de de-Rham asociado, cuya fibra en $t \in S$ es $H_{\text{dR}}^k(X_t)$, es un sistema local. Luego, si S es simplemente conexo, tenemos una identificación canónica $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ vía el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva (no depende de la curva elegida porque S es simplemente conexo). Esto facilita estudiar cómo varía la estructura de Hodge en cuestión ya que, vía este isomorfismo, se identifica con una estructura de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_0)$.

El dominio de períodos (local) es el conjunto de estructuras de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_0)$, que podemos pensar como una subvariedad de $\prod_{i=0}^n \text{Grass}_{b_i}(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$, siendo $b_i = \dim H^{k-i,i}(X_t)$ (que podremos suponer que no depende de t). El mapa de períodos (local) es la función que a cada $t \in S$ le asigna la estructura de Hodge correspondiente en $H_{\text{dR}}^k(X_0)$. Es decir, el dominio de períodos es el codominio del mapa de períodos. Esta definición tiene dos problemas

- i) El mapa de períodos, así definido, no es una función holomorfa (porque $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$)
- ii) ¿Qué hacemos cuando S no es simplemente conexo?

El primero de estos problemas tiene solución. Griffiths se dio cuenta que, si bien la estructura de Hodge no varía de forma holomorfa, la filtración $F^{k,k}(X_t) \supseteq \dots \supseteq F^{k,0}(X_t)$ definida por

$$F^{k,i}(X_t) := H^{k,0}(X_t) \oplus H^{k-1,1}(X_t) \oplus \dots \oplus H^{i,k-i}(X_t) \subseteq H_{\text{dR}}^k(X_t)^{\mathbb{C}}$$

Sí varía de manera holomorfa. Más aún, gracias a la propiedad $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$, podemos recuperar los espacios $H^{p,q}(X_t)$ vía

$$H^{p,q}(X_t) = F^{k,p}(X_t) \cap \overline{F^{k,q}(X_t)} \text{ si } k = p + q$$

Así que no estamos perdiendo información de la estructura de Hodge. Esta equivalencia entre estructuras de Hodge y las llamadas “filtraciones de Hodge” la desarrollamos en la sección 3.4.1. Luego, el dominio de períodos D en verdad es el conjunto de filtraciones de Hodge sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$, que lo podemos pensar como una subvariedad de $\text{Flag}_{\tilde{b}_k, \dots, \tilde{b}_1}(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$, siendo $\tilde{b}_i = \dim F^{k,i}(X_t)$, que no depende de t .

Veamos ahora cómo resolver la segunda cuestión “Qué hacemos si S no es simplemente conexo”. El problema es que ahora tenemos muchas identificaciones $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$. Acá entra en juego la monodromía, es decir, la acción de $\pi_1(S, 0)$ sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$ por transporte paralelo. Dicha acción me induce una acción sobre el dominio de períodos D . Cada identificación $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ (inducida por una curva $\sigma : t \rightarrow 0$) me induce una filtración de Hodge sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$, pero todas ellas están en la misma clase de equivalencia $D/\pi_1(S, 0)$. De esta forma, el mapa de períodos $S \rightarrow D/\pi_1(S, 0)$ queda bien definido.

Acá aparece un problema muy grave, el espacio $D/\pi_1(S, 0)$ podría ni siquiera ser Hausdorff. Es acá donde entra en juego la cohomología primitiva. Uno puede hacer todas las mismas construcciones que hicimos pero con la cohomología primitiva, obteniendo el “mapa de períodos polarizado” y el “dominio de períodos polarizado”. Concretamente, si Q_t es la polarización en $H_o^k(X_t)$, el dominio de períodos polarizado \tilde{D} será el conjunto de filtraciones de Hodge en $H_o^k(X_0)$ polarizadas por Q_0 . Usando que el transporte paralelo preserva el reticulado y la polarización, podremos probar en la sección 3.4.3 que, al cocientar por la monodromía, $\tilde{D}/\pi_1(S, 0)$ es un espacio Hausdorff (de hecho es un orbifold). En esta sección también describimos la geometría de \tilde{D} en términos de $\dim H_o^k(X_t)$ y $\dim H_o^{p,q}(X_t)$ (que no dependen de t), y enunciamos el teorema de Griffiths, que dice que el mapa de períodos (polarizado o no polarizado) es holomorfo y satisface la “transversalidad de Griffiths”, que es una propiedad que satisface el diferencial del mapa de períodos.

Por último, en la sección 3.4.4, describimos el dominio de períodos, el mapa de períodos y la monodromía en el caso de la familia de Legendre

$$X_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - t)\}$$

Como estamos trabajando con dimensiones chicas, vale que $H_o^1(X_t) = H_{\text{dR}}^1(X_t)$ así que no hay diferencia entre el mapa de períodos polarizado y no polarizado.

3.4.1 Filtraciones de Hodge

En la sección 2.2.5 vimos que una estructura de Hodge de peso k es un par $(H, \{H^{p,q}\}_{p+q=k})$ que satisface la descomposición de Hodge y que $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$, siendo nuestros principales ejemplos la cohomología de de-Rham y la cohomología primitiva de una variedad Kähler compacta. Las “Filtraciones de Hodge” forman una categoría equivalente, cuya importancia se evidenciará en la siguiente sección. Una filtración de Hodge de peso k es un par $(H, \{F^p\}_{p \in \mathbb{Z}})$ siendo H un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita y $F^p \subseteq H^{\mathbb{C}}$ subespacios que satisfacen

- i) $F^p \supseteq F^{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$
- ii) $H^{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$

Un morfismo de filtraciones de Hodge $(H, F^p) \rightarrow (\tilde{H}, \tilde{F}^p)$ es una transformación lineal $f : H \rightarrow \tilde{H}$ tal que, al extenderla a la complexificación, satisface $f(F^p) \subseteq \tilde{F}^p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Una estructura de Hodge $(H, H^{p,q})$ de peso k induce una filtración de Hodge de peso k sobre H vía

$$F^p := \bigoplus_{i \geq p} H^{i, k-i}$$

Recíprocamente, una filtración de Hodge (H, F^p) de peso k induce una estructura de Hodge de peso k vía

$$H^{p,q} := F^p \cap \overline{F^q}$$

Es fácil verificar que esta es una correspondencia biyectiva y que un morfismo de estructuras de Hodge es un morfismo de filtraciones de Hodge, así que son categorías equivalentes. Notar que, en general, el conjunto de descomposiciones de un espacio vectorial no están en correspondencia biyectiva con las filtraciones $F^p \supseteq F^{p+1}$. La condición $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$ es la que garantiza que haya una biyección.

En el caso de la cohomología de de-Rham a una variedad Kähler compacta M , la filtración de Hodge correspondiente es

$$F^{k,p}(M) := H^{k,0}(M) \oplus H^{k-1,1}(M) \oplus \dots \oplus H^{p,k-p}(M)$$

Con $F^{k,p}(M) = 0$ si $p > k$ y con $F^{k,p}(M) = H_{\text{dR}}^k(M)^{\mathbb{C}}$ si $p \leq 0$. Más precisamente, la filtración de Hodge de peso k es $(H_{\text{dR}}^k(M), \{F^{k,p}(M)\}_{p \in \mathbb{Z}})$. Similarmente, denotamos $F_0^{k,p}(M)$ a la filtración de Hodge primitiva de una variedad Kähler compacta. En este contexto, la descomposición de Lefschetz toma la forma

$$F^{k,p}(M) = \bigoplus_{0 \leq i \leq \min\{p, k/2\}} L^i \left(F_0^{k-2i; \min\{p-i, k-2i\}}(M) \right)$$

Así como las estructuras de Hodge están en correspondencia con las filtraciones de Hodge, las estructuras de Hodge polarizadas están en correspondencia con las filtraciones de Hodge polarizadas. Esto es, una filtración de Hodge (H, F^p) de peso k equipada con una función \mathbb{R} -bilineal $Q : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, al extenderla a la complexificación \mathbb{C} -bilinealmente, satisface

- i) $Q(F^p, F^{k-p+q}) = 0$
 ii) $i^{p-q} \cdot Q(v, \bar{v}) > 0 \quad \forall v \in F^p \cap \overline{F^q} \quad \forall p + q = k$

Y la correspondencia biyectiva es exactamente la misma. También las estructuras de Hodge íntegras están en biyección con las filtraciones de Hodge íntegras, es decir, el conjunto de filtraciones de Hodge (H, F^p) equipadas con un reticulado $H_{\mathbb{Z}} \subseteq H$.

3.4.2 Deformación de Variedades Complejas y el Mapa de Períodos

Sean X y S variedades complejas y sea $f : X \rightarrow S$ una submersión holomorfa sobreyectiva, el teorema de valores regulares nos dice que $X_t := f^{-1}(t)$ es una familia de subvariedades complejas de X parametrizadas por $t \in S$. Más aún, si f es propia, el teorema de Ehresmann nos dice que $f : X \rightarrow S$ es un espacio fibrado. En particular, las fibras $\{X_t\}_{t \in S}$ son todas difeomorfas entre sí, pero en general no son biholomorfas. Nuestro objetivo es estudiar cómo cambia la estructura compleja en función de $t \in S$.

- **Definición:** Llamamos “Deformación Compleja” a una submersión holomorfa, propia y sobreyectiva $f : X \rightarrow S$, siendo X y S variedades complejas y S conexa. Si M es una variedad compleja compacta, decimos que $f : X \rightarrow S$ es una deformación de M si, además de ser una deformación compleja, S viene equipada con un punto distinguido $0 \in S$ tal que $M = X_0$.

El ejemplo que habíamos considerado en el caso real, llevado al caso complejo, es la familia $X_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : t \cdot x^2 + y^2 = 1\}$, con $t \in \mathbb{C}$, que al considerar $\mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y clausurar obteníamos

$$\bar{X}_t = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : t \cdot x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Esta es una familia de variedades complejas compactas, y para verla como una deformación compleja considerábamos

$$X := \{(x : y : z), t) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - \{0\}) : t \cdot x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Y tomábamos $f : X \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ la proyección en la segunda coordenada, de modo que $f^{-1}(t) = \bar{X}_t \times \{t\}$. Excluíamos el caso $t = 0$ pues \bar{X}_0 tenía una singularidad en el punto $(1 : 0 : 0)$. A diferencia del caso real, excluir el caso $t = 0$ no parte el codominio en dos componentes conexas. Como $\mathbb{C} - \{0\}$ no es simplemente conexo, el fibrado de de-Rham $R^k(X)$ asociado a al espacio fibrado $f : X \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ tendrá, en principio, monodromía no trivial. El teorema de Ehresmann nos dice que todas las fibras son difeomorfas entre sí y, efectivamente, sabemos que son difeomorfas a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$ por la clasificación de cuádricas (ver **[10]**). En particular, todas las fibras son biholomorfas entre sí ya que, por el teorema de uniformización de Riemann, S^2 tiene una única estructura compleja módulo biholomorfismos. Luego, este no es un ejemplo interesante de deformación compleja, pues la estructura compleja no cambia.

Un ejemplo más interesante es la familia de Legendre, que es una familia de curvas elípticas

$$X_t = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - t)\}$$

Al clausurar en el espacio proyectivo nos da

$$\bar{X}_t = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : y^2z - x \cdot (x - z) \cdot (x - t \cdot z) = 0\}$$

Se puede verificar que esto es una variedad singular si y solo si $t = 0$ ó 1 . Excluyendo dichos casos, construimos $X \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - \{0; 1\})$ y tomamos $f : X \rightarrow \mathbb{C} - \{0; 1\}$ la proyección en la segunda coordenada. Estas variedades son difeomorfas al toro, así que existe $p(t) \in \mathbb{H}$ tal que X_t es biholomorfo al toro complejo $T(1, p(t))$. Al número $p(t)$ se le dice “el período” de X_t .

- Comentario: Dada una variedad compleja compacta M , existe una deformación “universal” de M llamada “deformación versal”. Es universal en el sentido de que toda deformación compleja de M es, en algún sentido, una sub-deformación de la deformación versal. Típicamente, si $f : X \rightarrow S$ es la deformación versal, entonces X tiene dimensión finita, pero X no es una variedad compleja ya que puede tener singularidades, es lo que se llama un “Espacio Complejo”. No nos explayaremos con este tema, que se puede encontrar en [26]

Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja, nuestro objetivo es describir el cambio de las estructuras complejas de las fibras X_t , en función de $t \in S$. Si $0 \in S$ un punto distinguido, tomemos una trivialización $\varphi : U \times X_0 \rightarrow f^{-1}(U)$, con $0 \in U$, tal que $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in X_0$. Luego, $\varphi_t : X_0 \rightarrow X_t$ definida por $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ nos da una familia de difeomorfismos, con $\varphi_0 = \text{Id}$, que varían diferencialmente con t al igual que sus inversas (ver sección 3.1.2). Pullbackeando la estructura compleja de X_t a una estructura compleja $J(t)$ en X_0 , vía el difeomorfismo φ_t , obtenemos una familia de estructuras complejas $\{J(t)\}_{t \in U}$ sobre X_0 , tales que $(X_0, J(t))$ es biholomorfo a X_t para todo $t \in U$.

- Observación: En general, si X e Y son variedad diferenciables y J es una estructura cuasi-compleja en Y (ver sección 1.3.2), entonces todo difeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ me induce una estructura cuasi-compleja $f^*(J)$ en X definida por

$$f^*(J)_p = df_{f(p)}^{-1} \circ J_{f(p)} \circ df_p$$

Que es la única estructura compleja en $T_p(M)$ que hace del diferencial $df_p : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$ una función \mathbb{C} -lineal para todo p , es decir, que hace de $f : X \rightarrow Y$ un biholomorfismo. Más aún, $f^*(J)$ es íntegra (inducida por una estructura compleja en X) si y solo si J también lo es.

Si \tilde{J}_t es la estructura compleja en X_t , tomando $J(t) := \varphi_t^*(\tilde{J}_t)$ transformamos el problema de estudiar cómo varía la estructura compleja de los $\{X_t\}_{t \in U}$ en estudiar cómo varía la familia de estructuras complejas $\{J(t)\}_{t \in U}$ en X_0 . Hay distintas maneras de estudiar cómo varía dicha familia. Una de ellas es considerar el espacio de estructuras cuasi-complejas en X_0 , que denotamos $\text{CCplx}(X_0)$. Este es el conjunto de secciones del espacio fibrado sobre X_0 que tiene a $\text{Cplx}(T_x(X_0))$ por fibra sobre $x \in X_0$ (ver la sección 1.1.3 para una descripción de $\text{Cplx}(V)$ como variedad compleja, cuando V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión par). De esta forma tenemos que $J : U \rightarrow \text{CCplx}(X_0)$. Si queremos que estructuras complejas biholomorfas representen el mismo punto en el

codominio, tenemos que cocientar por la acción del grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(X_0)$ sobre $\text{CCplx}(X_0)$ vía pull-back. De esta forma, $J : U \rightarrow \text{CCplx}(X_0)/\text{Diff}(X_0)$ es la función que queremos estudiar. Este es el enfoque desarrollado en **[17]** (sección 6.1 del libro), pero no es el enfoque que desarrollaremos.

Otro enfoque que uno podría tomar es el del mapa de Kodaira-Spencer, del cual damos una breve descripción. Sea $v \in T_0(S)$ y sea ξ un campo holomorfo definido en un entorno abierto U de 0 con $\xi_0 = v$, entonces para cada $p \in X_0$ existe un entorno abierto $\tilde{U} \subseteq X$ y un campo holomorfo $\tilde{\xi}$ en \tilde{U} tal que $df_x(\tilde{\xi}_x) = \xi_{f(x)}$ para todo $x \in \tilde{U}$ (ver en **[25]**, la demostración del teorema 2.1). A diferencia del caso diferenciable, no podemos usar partición de la unidad para pegar estos campos, o mejor dicho, el resultado no sería un campo holomorfo. Como X_0 es compacto, podemos cubrirlo con finitos \tilde{U}_i . Sea $\tilde{\xi}_{ij} := \tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_j$ en $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$, entonces $df(\tilde{\xi}_{ij}) \equiv 0$ así que $\tilde{\xi}_{ij}(x) \in T_x(X_0)$ para todo $x \in X_0$. Además $\tilde{\xi}_{jk} - \tilde{\xi}_{ik} + \tilde{\xi}_{ij} = 0$, por construcción. Sea $U_i := \tilde{U}_i \cap X_0$, el mapa de Kodaira-Spencer asigna a $v \in T_0(S)$ la clase

$$[\tilde{\xi}_{ij}] \in H^1(\{U_i\}, T(X_0)) := \frac{\left\{ \{\tilde{\xi}_{ij}\} : \tilde{\xi}_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j, T(X_0)) \text{ y } \tilde{\xi}_{jk} - \tilde{\xi}_{ik} + \tilde{\xi}_{ij} = 0 \right\}}{\left\{ \{\tilde{\xi}_{ij}\} : \tilde{\xi}_{ij} = \mu_i - \mu_j \text{ con } \mu_i \in \mathcal{O}(U_i, T(X_0)) \right\}}$$

Notar que la clase no necesariamente es 0 pues los $\tilde{\xi}_i$ con los que construimos $\tilde{\xi}_{i,j}$ no necesariamente son campos en $T(X_0)$. La clase de $\tilde{\xi}_{ij}$ no depende de los campos $\tilde{\xi}_i$ elegidos para levantar ξ , pero sí depende del campo ξ . Para que dependa únicamente del vector v , hay que tomar límite directo sobre los entornos abiertos de 0 y los cubrimientos de X_0 por abiertos, obteniendo así una función $T_0(S) \rightarrow H^1(X_0, T(X_0))$ bien definida, el mapa de Kodaira-Spencer. Ciertos resultados nos llevan a interpretar esta función como una medida de la deformación infinitesimal de X_0 cuando muevo 0 en la dirección $v \in T_0(S)$. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones, el mapa de Kodaira-Spencer es constantemente 0 si y solo si las fibras son biholomorfas entre sí (ver **[24]**). Otro ejemplo, es que si el mapa de Kodaira-Spencer es biyectivo, entonces la deformación $f : X \rightarrow S$ es una deformación Versal (ver **[23]**). No desarrollaremos mucho más este enfoque.

El enfoque que sí desarrollaremos, es el del mapa de períodos, desarrollado por Griffiths. Este enfoque consiste en estudiar cómo varían los espacios $H^{p,q}(X_t)$, que son invariantes de la estructura compleja. Consideremos las siguientes proposiciones (ver **[30]**, Proposición 9.20 y 9.23)

- **Proposición:** Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja y $0 \in S$. Si X_0 es Kähler, entonces $\dim H^{p,q}(X_t)$ es constante para t en un entorno abierto de 0 .
- **Proposición:** Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja y $0 \in S$. Si X_0 es Kähler, entonces X_t es Kähler para todo t en un entorno abierto de 0

Como corolario, sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja y sea $0 \in S$, entonces el conjunto de los $t \in S$ tales que X_t es Kähler y $\dim H^{p,q}(X_t) = \dim H^{p,q}(X_0)$ para todo p, q , forma un abierto en S . Sea $U \subseteq S$ dicho abierto, entonces $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ es una

deformación compleja que satisface estas dos propiedades. Luego, de acá en adelante supondremos que $f : X \rightarrow S$ es una deformación compleja con X_t Kähler para todo $t \in S$ y tal que $\dim H^{p,q}(X_t)$ es constante, igual a un número $b \in \mathbb{N}_0$ (o $b_{p,q}$ si hace falta especificar).

Ahora sí, bajo estas condiciones, estudiemos cómo varían los $H^{p,q}(X_t)$. Si $\varphi_t : X_0 \rightarrow X_t$ es el difeomorfismo inducido por una trivialización, entonces $\varphi_t^* : H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ es un isomorfismo. Si extendemos este isomorfismo a la complexificación, vemos que $H^{p,q}(X_t)$ se identifica con el subespacio $H_t^{p,q} := \varphi_t^*(H^{p,q}(X_t)) \subseteq H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$ así que estudiar cómo varían los $H^{p,q}(X_t)$ resulta equivalente a estudiar cómo varían los subespacios $H_t^{p,q}$. A priori, esta identificación depende de la elección de una trivialización. Observemos, sin embargo, que el isomorfismo $\varphi_t^* : H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ es precisamente el transporte paralelo del fibrado de de-Rham $R^k(X)$, a lo largo de cualquier curva contenida en U que vaya de 0 a t . En particular, si S es simplemente conexo, tenemos una identificación canónica $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ definida en todo S y que no depende de la elección de ninguna trivialización.

Por lo pronto, supongamos S simplemente conexo. Luego, para cada k y cada p, q con $p + q = k$ tenemos bien definida una aplicación $t \in S \rightarrow H_t^{p,q} \in \text{Grass}_b(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$, que está en correspondencia con la familia $\{H^{p,q}(X_t)\}_{t \in S}$ vía el transporte paralelo en $R^k(X)$. Para distintos valores de p, q , las aplicaciones $t \rightarrow H_t^{p,q}$ no son independientes entre sí. Como X_t es Kähler compacta, los $\{H^{p,q}(X_t)\}_{t \in S}$ forman una estructura de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_t)$, y por lo tanto tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}} = H_t^{k,0} \oplus H_t^{k-1,1} \oplus \dots \oplus H_t^{0,k} \\ \text{ii)} \quad & \overline{H_t^{p,q}} = H_t^{q,p} \end{aligned}$$

Es decir, para cada $t \in S$, tenemos una estructura de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$ de peso k . El mapa de períodos no consiste en estudiar cómo varían los $H_t^{p,q}$ individualmente, sino en estudiar cómo varía la estructura de Hodge $\{H_t^{p,q} : p + q = k\}$ en $H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$. Podemos pensar esto como una aplicación cuyo dominio es S y cuyo codominio son las estructuras de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_0)$ de peso k , pensando este último conjunto como un subespacio de $\prod_{p+q=k} \text{Grass}_{b_{p,q}}(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$. Notar, sin embargo, que no es posible que todos los $H_t^{p,q}$ varíen de manera holomorfa puesto que $\overline{H_t^{p,q}} = H_t^{q,p}$. Así que, así como lo definimos, el mapa de períodos no es una función holomorfa. Afortunadamente, la filtración de Hodge asociada

$$\mathcal{P}^{k,i}(t) := H_t^{k,0} \oplus H_t^{k-1,1} \oplus \dots \oplus H_t^{i,k-i} \subseteq H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$$

Sí varía de manera holomorfa. Luego, la función $\mathcal{P}^k := (\mathcal{P}^{k,k}, \dots, \mathcal{P}^{k,0})$ que va de S en el conjunto de filtraciones de Hodge en $H_{\text{dR}}^k(X_0)$ de peso k , es una función holomorfa y es lo que llamamos “El mapa de períodos local”. El término “local” se debe a que, en general, S no es simplemente conexo y todas estas construcciones valen si tomamos un entrono abierto simplemente conexo de 0. Observemos que, como las filtraciones de Hodge están en biyección con las estructuras de Hodge, no estamos perdiendo

información de los espacios $H_t^{p,q}$. El codominio del mapa de períodos es lo que llamamos “El dominio de períodos local”, y podemos pensarlo como un subespacio de $\text{Flag}_{\tilde{b}_k, \dots, \tilde{b}_1}(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$ siendo $\tilde{b}_i := b_{k,0} + \dots + b_{i,k-i}$.

Como dijimos, cuando S no es simplemente conexo, tenemos definido el mapa de períodos en un entorno simplemente conexo de $0 \in S$. Si quisiésemos extender el mapa de períodos a todo S , nos encontramos con un problema, la monodromía del sistema local $R^k(X)$. Dado $t \in S$, por cada clase de homotopía de caminos de 0 a t tenemos un isomorfismo $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$. Consideremos $\pi_1(S, 0)$ actuando sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$ por transporte paralelo, lo cual me induce una acción de $\pi_1(S, 0)$ en $H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$ y en $\text{Grass}_b(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})$. Sean σ y $\tilde{\sigma}$ dos clases de homotopía de caminos de 0 a t , y sean $H_t^{p,q}, \tilde{H}_t^{p,q} \subseteq H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}}$ los subespacios inducidos por los isomorfismos $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$ inducidos por cada clase, es claro que $(\tilde{\sigma} * \sigma^{-1}) \cdot H_t^{p,q} = \tilde{H}_t^{p,q}$ con $\tilde{\sigma} * \sigma^{-1}$ en $\pi_1(S, 0)$, así que la clase de equivalencia $H_t^{p,q} \in \text{Grass}_b(H_{\text{dR}}^k(X_0)^{\mathbb{C}})/\pi_1(S, 0)$ no depende del camino $\sigma : 0 \rightarrow t$ elegido. Luego, $\mathcal{P}^k := (\mathcal{P}^{k,0}, \dots, \mathcal{P}^{k,k})$ queda bien definido globalmente si cocientamos su codominio, el espacio de filtraciones de Hodge sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$ de peso k , por la acción de $\pi_1(S, 0)$. Esta aplicación es lo que llamamos “el mapa de períodos global” y su codominio es “el dominio de períodos global”.

- **Observación:** El transporte paralelo $H_{\text{dR}}^k(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0)$, por construcción, me da un isomorfismo de grupos $H_{\text{dR}}^k(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(X_0, \mathbb{Z})$ (ver sección 3.2.4). Localmente (en un entorno simplemente conexo de 0), si queremos estudiar cómo varían las estructuras de Hodge íntegras $(H_{\text{dR}}^k(X_t), H^{p,q}(X_t), H_{\text{dR}}^k(X_t, \mathbb{Z}))$, el transporte paralelo me las identifica con $(H_{\text{dR}}^k(X_0), H_t^{p,q}, H_{\text{dR}}^k(X_0, \mathbb{Z}))$, el reticulado queda fijo.

Globalmente, la acción del grupo fundamental $\pi_1(S, 0)$ se restringe a una acción sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0, \mathbb{Z})$, así que a monodromía no es solo una representación lineal, es una representación lineal que preserva un reticulado.

La acción del grupo fundamental sobre $H_{\text{dR}}^k(X_0)$, en principio, no es ni libre ni propiamente discontinua así que no hay nada que me garantice que $H_{\text{dR}}^k(X_0)/\pi_1(S, 0)$ sea siquiera Hausdorff (lo mismo sucede cuando cocientamos el dominio de períodos local por la monodromía). Si todo lo que hicimos con la cohomología de de-Rham lo reproducimos para cohomología primitiva, obtendremos el “mapa de períodos polarizado”. La ventaja es que, al tener una polarización en la cohomología primitiva, como la monodromía preserva la polarización en $H_0^k(X_0)$, la acción del grupo fundamental será propiamente discontinua y por lo tanto el “dominio de períodos global polarizado” será un espacio Hausdorff (más aún, será un orbifold). Es por esto que se suele trabajar con cohomología primitiva. La desventaja, es que no es un invariante complejo, sino un invariante de variedades polarizadas.

Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja, supongamos que X es una variedad Kähler con forma de Kähler $\kappa \in H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{Z})$. Notar que los ejemplos que dimos satisfacen esta propiedad pues X resultaba ser una subvariedad de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^m$, que es una variedad Kähler con clase de de-Rham entera. Sea $\kappa_t := i_t^*(\kappa)$, siendo $i_t : X_t \rightarrow X$ la inclusión, entonces $\kappa_t \in H_{\text{dR}}^2(X_t, \mathbb{Z})$ es una forma de Kähler en X_t . Por lo que vimos en la sección 3.2.4, el fibrado primitivo $R_o^k(X) := \coprod_{t \in S} H_o^k(X_t)$ es un sistema local y el transporte paralelo $\tau : H_o^k(X_0) \rightarrow H_o^k(X_t)$ preserva la polarización Q_t en X_t , e induce un isomorfismo entre los reticulados $\tau : H_o^k(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_o^k(X_t, \mathbb{Z})$.

Supongamos que $\dim H_o^{p,q}(X_t)$ no depende de t . Si S es simplemente conexo, el transporte paralelo nos da una identificación canónica $\tau : H_o^k(X_t) \rightarrow H_o^k(X_0)$ que identifica la estructura de Hodge íntegra y polarizada $(H_o^k(X_t), H_o^{p,q}(X_t), H_o^k(X_t, \mathbb{Z}), Q_t)$ con $(H_o^k(X_0), \tau(H_o^{p,q}(X_t)), H_o^k(X_0, \mathbb{Z}), Q_0)$. Notar que el reticulado y la polarización quedan fijos, lo único que varía es $\tau(H_o^{p,q}(X_t))$, pero de modo tal que Q_0 siga siendo una polarización sobre la estructura de Hodge asociada a t . El “mapa de períodos local polarizado” es la aplicación que a cada $t \in S$ le asigna $\tilde{\mathcal{P}}^k(t)$, la filtración de Hodge íntegra y polarizada asociada a la estructura de Hodge en $H_o^k(X_0)$ que indicamos. El codominio de dicha aplicación es lo que llamamos “dominio de períodos local polarizado”. Describiremos este espacio con más detalle en la siguiente sección.

Si S no es simplemente conexo, el mapa de períodos polarizado está bien definido en un entorno simplemente conexo de 0. Si tratamos de extenderlo a todo S , nuevamente nos encontramos con el obstáculo de la monodromía. Si el dominio de períodos local polarizado, lo cocientamos por la acción de la monodromía (esto es el “dominio de períodos global polarizado”) entonces nos queda bien definido en todo S el “mapa de períodos global polarizado”. La monodromía asocia a cada $\sigma \in \pi_1(S, 0)$ un isomorfismo lineal $\sigma : H_o^k(X_0) \rightarrow H_o^k(X_0)$ que se restringe a un isomorfismo $H_o^k(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_o^k(X_0, \mathbb{Z})$ de grupos. A diferencia del caso no polarizado, el isomorfismo lineal asociado a σ preserva una polarización, es decir, $Q_0(\sigma \cdot \omega, \sigma \cdot \tilde{\omega}) = Q_0(\omega, \tilde{\omega})$. Como explayaremos en la siguiente sección, esto implicará que la acción de $\pi_1(S, 0)$ es propiamente discontinua.

- Observación: La descomposición de Lefschetz me relaciona el mapa de períodos \mathcal{P} con el mapa de períodos polarizado $\tilde{\mathcal{P}}$

3.4.3 Propiedades del Dominio de Períodos y del Mapa de Períodos

Sea H un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, $L \subseteq H$ un reticulado, $k \in \mathbb{N}_0$ y $Q : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal, simétrica si k es par y anti-simétrica si k es impar, y tal que $Q(v, w) \in \mathbb{Z}$ si $v, w \in L$. Por cada secuencia de números $\tilde{b}_k \leq \dots \leq \tilde{b}_1$ con $\tilde{b}_i + \tilde{b}_{k-i+1} = \dim H$ para todo i , consideremos el conjunto de banderas $(F^k \subseteq \dots \subseteq F^1) \in \text{Flag}_{\tilde{b}_k, \dots, \tilde{b}_1}(H^{\mathbb{C}})$ tales que

- $H^{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F^{k-p+1}} \quad \forall p$ (equivalentemente $F^p \cap \overline{F^{k-p+1}} = 0$)
- $Q(F^p, F^{k-p+1}) = 0 \quad \forall p$
- $i^{p-q} \cdot Q(v, \bar{v}) > 0 \quad \forall v \in F^p \cap \overline{F^q}, p + q = k$

Denotamos a este conjunto $D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H, Q)$, el dominio de períodos polarizado. Tomando $H = H_o^k(X_0)$ y $Q = Q_o$, obtenemos el codominio del mapa de períodos local polarizado. Las banderas que satisfacen la primera relación, forman un abierto en el espacio de banderas y forman el dominio de períodos (no polarizado) que denotamos $D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H)$. Sea G el conjunto de automorfismos lineales $f : H \rightarrow H$ tales que $\det f = 1$ y $Q(f(v), f(w)) = Q(v, w)$ para todo $v, w \in H$, es claro que G es un grupo con la composición y actúa sobre $D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H, Q)$ vía

$$f \cdot (F^k \subseteq \dots \subseteq F^1) := (f(F^k) \subseteq \dots \subseteq f(F^1))$$

Siendo $f : H^{\mathbb{C}} \rightarrow H^{\mathbb{C}}$ la extensión \mathbb{C} -lineal. Es fácil verificar que el resultado sigue perteneciendo al dominio de períodos polarizado. Sea $(F_0^k \subseteq \dots \subseteq F_0^1) \in D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H, Q)$ un elemento arbitrario y $V \subseteq G$ el subgrupo de morfismos que dejan fija dicha bandera, en [5] (proposición 4.4.2) se demuestra que

$$D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H, Q) \cong G/V$$

Más aún, sea $h^{p,q} := \dim(F^p \cap \overline{F^q}) = \tilde{b}_p - \tilde{b}_{p+1}$ (si $p + q = k$), entonces ([5], Proposición 4.4.4)

- Si k es impar, digamos $k = 2m + 1$, entonces $\dim H$ es par (por la descomposición de Hodge), digamos $\dim H = 2n$. Luego

$$G \cong \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad V = \prod_{p \leq m} \mathrm{U}(h^{p,q})$$

- Si k es par, digamos $k = 2m$, sea $s := h^{0,k} + h^{2,k-2} + \dots + h^{k,0}$ y sea $t = h^{1,k-1} + h^{3,k-3} + \dots + h^{k-1,1}$, entonces

$$G \cong \mathrm{SO}(s, t) \quad ; \quad V = \mathrm{SO}(h^{m,m}) \times \prod_{p < m} \mathrm{U}(h^{p,q})$$

En el primer caso, el dominio de períodos resulta conexo. En el segundo caso, el dominio de períodos es conexo si y solo si $s = 0$ ó $t = 0$, caso contrario tiene dos componentes conexas. Notar que en ambos casos V resulta compacto, y usando la siguiente proposición, concluimos que la proyección $\pi : G \rightarrow G/V$ es una función propia (ver [15])

- Proposición: Si G es un grupo topológico y $H \subseteq G$ es un subgrupo compacto, entonces la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ es una función propia. Es decir, si $K \subseteq G/H$ es compacto, entonces $\pi^{-1}(K)$ es compacto.

Volviendo al mapa de períodos, dada una deformación compleja $f : X \rightarrow S$ con un punto distinguido $0 \in S$ y una forma de Kähler entera en X , a cada $\sigma \in \pi_1(S, 0)$ le asignábamos un automorfismo lineal $\sigma : H_o^k(X_0) \rightarrow H_o^k(X_0)$. Dicho automorfismo se restringe a un isomorfismo de grupos $\sigma : H_o^k(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_o^k(X_0, \mathbb{Z})$ así que $\det \sigma = \pm 1$. Además, habíamos visto que $Q_o(\sigma \cdot \omega, \sigma \cdot \tilde{\omega}) = Q_o(\omega, \tilde{\omega})$. Si denotamos $\tilde{\pi}_1(S, 0)$ al grupo de automorfismos $H_o^k(X_0) \rightarrow H_o^k(X_0)$ inducido por $\pi_1(S, 0)$, y denotamos $\tilde{\pi}_1^+(S, 0)$ a aquellos automorfismos de determinante 1, entonces $\tilde{\pi}_1^+(S, 0) \subseteq G$.

Nuestro objetivo es ver que la acción de $\pi_1(S, 0)$ sobre $D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H_o^k(X_0), Q_0)$, por transporte paralelo, es propiamente discontinua (equivalentemente, verlo para la acción de $\tilde{\pi}_1(S, 0)$ sobre dicho espacio). Consideremos primero la acción de $\tilde{\pi}_1^+(S, 0) \subseteq G$ sobre G/V por multiplicación. Sean $K_1, K_2 \subseteq G/V$ compactos, como $\pi : G \rightarrow G/V$ es propia, entonces $\tilde{K}_i := \pi^{-1}(K_i)$ es compacto para $i = 1; 2$. Además

$$\{\sigma \in \tilde{\pi}_1^+(S, 0) : (\sigma \cdot K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \subseteq \tilde{K}_2 \cdot \tilde{K}_1^{-1}$$

Ya que, si σ está en dicho conjunto, entonces existe $\bar{k} \in K_1$ tal que $\sigma \cdot \bar{k} \in K_2$ y por lo tanto $\sigma = (\sigma \cdot k) \cdot k^{-1} \in \tilde{K}_2 \cdot \tilde{K}_1^{-1}$. Como \tilde{K}_1 y \tilde{K}_2 son compactos, $\tilde{K}_2 \cdot \tilde{K}_1^{-1}$ es compacto así que tenemos un conjunto discreto (pues $\tilde{\pi}_1^+(S, 0)$ es un subgrupo discreto) contenido en un compacto. Luego, es un conjunto finito.

Denotemos $\tilde{\pi}_1^-(S, 0)$ a los elementos de $\tilde{\pi}_1(S, 0)$ de determinante -1 . Si tomamos un elemento σ_0 en dicho conjunto, entonces $\sigma \in \tilde{\pi}_1^-(S, 0) \rightarrow \sigma \circ \sigma_0^{-1} \in \tilde{\pi}_1^+(S, 0)$ es una biyección. Si $K \subseteq D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H_o^k(X_0), Q_0)$ es compacto, la biyección $\tilde{\pi}_1^-(S, 0) \leftrightarrow \tilde{\pi}_1^+(S, 0)$ me induce una biyección

$$\{\sigma \in \tilde{\pi}_1^-(S, 0) : (\sigma \cdot K) \cap K \neq \emptyset\} \leftrightarrow \{\sigma \in \tilde{\pi}_1^+(S, 0) : (\sigma \cdot \sigma_0 \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$$

Y este segundo conjunto vimos que es finito, pues K y $\sigma_0 \cdot K$ son compactos. Esto demuestra que $\{\sigma \in \tilde{\pi}_1(S, 0) : (\sigma \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito y por lo tanto la acción de $\tilde{\pi}_1(S, 0)$ sobre el dominio de períodos polarizado es propiamente discontinua. Luego, el dominio de períodos polarizado global $D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H_o^k(X_0), Q_0)/\pi_1(S, 0)$, es un espacio Hausdorff. De hecho, es un “orbifold”, pero no necesariamente una variedad ya que la acción podría no ser libre.

El siguiente teorema, debido a Griffiths, contiene dos propiedades muy importantes del mapa de períodos local. Las enunciamos para el caso no polarizado, pero valen exactamente las mismas propiedades en el caso polarizado.

- **Teorema:** Sea $f : X \rightarrow S$ una deformación compleja con S simplemente conexo y $0 \in S$ un punto distinguido, entonces
 - i) El mapa de períodos $\mathcal{P}^k : S \rightarrow D_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k}(H_o^k(X_0))$ es holomorfo
 - ii) La imagen de $d(\mathcal{P}^{k,i})_t : T_t(S) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}^{k,i}(t), H_{\text{dR}}^k(X_0)^\mathbb{C}/\mathcal{P}^{k,i}(t))$ está contenida en $\text{Hom}(\mathcal{P}^{k,i}(t), \mathcal{P}^{k,i-1}(t)/\mathcal{P}^{k,i}(t))$

Observemos que $\mathcal{P}^{k,i} : S \rightarrow \text{Grass}_b(H_{\text{dR}}^k(X_0)^\mathbb{C})$ así que, al tomar el diferencial, estamos tomando la identificación del tangente de la Grasmaniana descrita en la sección 3.3. La segunda propiedad se la conoce como “transversalidad de Griffiths”. Una demostración de este teorema se puede encontrar en [30] (Teorema 10.9 y 10.12).

- **Comentario:** El mapa de períodos está relacionado con el mapa de Kodaira-Spencer. Dicha relación se puede encontrar en el libro de Voisin [30] (Teorema 10.21)

El mapa de períodos polarizado ha demostrado ser útil en la clasificación de variedades algebraicas de dimensión 1, de variedades abelianas (variedades algebraicas de la forma \mathbb{C}^n/L siendo $L \subseteq \mathbb{C}^n$ un reticulado) y de superficies K3 (variedades complejas de dimensión 2, compactas, simplemente conexas y que admiten una 2-forma nunca nula).

3.4.4 La Familia de Legendre

En la sección 3.4.2 hablamos de la “Familia de Legendre” vista como una deformación compleja. Concretamente, tomamos

$$X = \{(x : y : z), t\} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C} - \{0; 1\}) : y^2z - x \cdot (x - z) \cdot (x - t \cdot z) = 0\}$$

Y tomamos $f : X \rightarrow \mathbb{C} - \{0; 1\}$ la proyección de la segunda coordenada. Denotemos

$$X_t := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : y^2z - x \cdot (x - z) \cdot (x - t \cdot z) = 0\}$$

Como X_t es difeomorfo a un toro, su cohomología $H_{\text{dR}}^k(X_t)$ tiene dimensión 1; 2; 1 para $k = 0; 1; 2$ respectivamente. Luego, para $k = 0$ y 2, la descomposición de Hodge y la descomposición de Hodge primitiva son triviales así que solo tiene sentido estudiar el mapa de períodos en $k = 1$. Como X_t tiene dimensión real 2, toda 1-forma es una 1-forma primitiva así que los mapas de períodos, polarizado y no polarizado, coinciden. Como $\overline{H^{1,0}(X_t)} = H^{0,1}(X_t)$, tienen la misma dimensión, y como $H_{\text{dR}}^1(X_t)^{\mathbb{C}} = H^{1,0}(X_t) \oplus H^{0,1}(X_t)$, que tiene dimensión 2, entonces ambos sumandos tienen dimensión 1. La filtración de Hodge asociada es $H_{\text{dR}}^1(X_t)^{\mathbb{C}} \supseteq H^{1,0}(X_t)$ así que solo estudiaremos cómo varía el espacio $H^{1,0}(X_t)$.

Generador de $H^{1,0}(X_t)$

Para estudiar como varía $H^{1,0}(X_t)$, que tiene dimensión 1, resulta práctico hallar un generador de dicho espacio. Fijemos t . Tomando $U_0 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : z \neq 0\}$ y la carta correspondiente del espacio proyectivo, $X_t \cap U_0$ se identifica con

$$V_0 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x \cdot (x - 1) \cdot (x - t)\}$$

Que es una subvariedad de \mathbb{C}^2 definida como los ceros de un polinomio $y^2 - p(x)$, así que el tangente de V_0 en (x, y) son los $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ que multiplicados con el gradiente del polinomio en (x, y) dan cero, es decir

$$T_{(x,y)}(V_0) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : 2y \cdot b = p'(x) \cdot a\}$$

En esta carta, definimos $\omega \in \Omega^1(X_t)$ en coordenadas vía

$$\omega_{(x:y:1)} = \frac{dx}{y} \quad \forall (x, y) \in V_0$$

Esto parecería estar mal definido en $y = 0$, en cuyo caso $x = 0$ ó 1 ó t . Sin embargo, si $(a, b) \in T_{(x,y)}(V_0)$ con $y \neq 0$ y $p'(x) \neq 0$, entonces $2b/p'(x) = a/y$ así que $dx/y = 2dy/p'(x)$. Luego, tomando límite cuando $y \rightarrow 0$

$$\omega_{(x:0:1)} = \frac{2dy}{p'(x)} \quad \text{si } x = 0 \text{ ó } 1 \text{ ó } t$$

Como p no tiene raíces múltiples, $p'(0), p'(1), p'(t) \neq 0$ así que ω está bien definida en todo V_0 . Para definirla en todo $X_t = V_0 \cup \{(0 : 1 : 0)\}$, tomando la carta U_1 en el espacio proyectivo, $X_t \cap U_1$ se identifica con una subvariedad $V_1 \subseteq \mathbb{C}^2$, y ω en coordenadas es

$$\omega_{(x:1:z)} = dx - \frac{x}{z} dz \quad \forall (x, z) \in V_1$$

De forma similar a como hicimos antes, se puede ver que está bien definida en $(x, z) = (0; 0)$. Con las expresiones que dimos en coordenadas, es fácil verificar que $d\omega = 0$ y en [5] se demuestra que ω es una $(1; 0)$ -forma y que no es exacta, así que es un generador de $H^{1,0}(X_t)$ como queríamos ver.

El Mapa de Períodos

Fijemos un $t_0 \in \mathbb{C} - \{0; 1\}$. Como X_{t_0} tiene dimensión compleja 1, en la sección 2.3.3 vimos que para calcular la polarización Q_{t_0} en $H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ es conveniente tomar una \mathbb{Z} -base en $H_1(X_{t_0}, \mathbb{Z})$ y calcular su matriz de intersección. Como X_{t_0} es un toro, podemos elegir una base $\{\delta, \gamma\}$ cuya matriz de intersección sea

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $H_1(X_{t_0}, \mathbb{Z}) \subseteq H_1(X_{t_0}, \mathbb{R})$ es un reticulado, $\{\delta, \gamma\}$ es una base de $H_1(X_{t_0}, \mathbb{R})$. Sea $\{\delta^*, \gamma^*\}$ su base dual, el isomorfismo de de-Rham $H_1(X_{t_0}, \mathbb{R})^* \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ nos dice que existen formas $\delta^*, \gamma^* \in H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ tales que

$$\delta^*(\sigma) = \int_{\sigma} \delta^* \quad ; \quad \gamma^*(\sigma) = \int_{\sigma} \gamma^* \quad \forall \sigma \in H_1(X_{t_0}, \mathbb{R})$$

Y $\{\delta^*, \gamma^*\}$ es una base de $H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$. Más aún, es una \mathbb{Z} -base de $H_{\text{dR}}^1(X_{t_0}, \mathbb{Z})$. La ventaja de tomar una base de estas características son dos. La primera es que es sencillo expresar las coordenadas de una forma $\omega \in H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ en esta base

$$\omega = A \cdot \delta^* + B \cdot \gamma^* \Rightarrow A = \int_{\delta} \omega \quad \text{y} \quad B = \int_{\gamma} \omega$$

La segunda ventaja es que, una vez calculamos las coordenadas de $\omega, \tilde{\omega} \in H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ en la base $\{\delta^*, \gamma^*\}$, podemos calcular fácilmente $Q_{t_0}(\omega, \tilde{\omega})$ usando la bilinealidad de Q_{t_0} y usando las relaciones

$$Q_{t_0}(\delta^*, \delta^*) = 0 \quad ; \quad Q_{t_0}(\delta^*, \gamma^*) = 1 \quad ; \quad Q_{t_0}(\gamma^*, \delta^*) = -1 \quad ; \quad Q_{t_0}(\gamma^*, \gamma^*) = 0$$

Teniendo todo esto en consideración, calculemos el mapa de períodos. Tomemos $U \subseteq \mathbb{C} - \{0; 1\}$ un entorno abierto simplemente conexo de t_0 y, para cada $t \in U$, tomemos $\tau : H_{\text{dR}}^1(X_t) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ el transporte paralelo. Previamente describimos un generador ω_t de $H^{1,0}(X_t)$, así que el mapa de períodos local es

$$\mathcal{P}^1(t) := \tau(H^{1,0}(X_t)) = \mathbb{C} \cdot \tau(\omega_t) \subseteq H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})^{\mathbb{C}}$$

Las coordenadas de $\tau(\omega_t)$ en la base $\{\delta^*, \gamma^*\}$ son

$$A(t) := \int_{\delta} \tau(\omega_t) \quad ; \quad B(t) := \int_{\gamma} \tau(\omega_t)$$

Respecto a la polarización, usando los valores de Q_{t_0} en $\{\delta^*, \gamma^*\}$ y la bilinealidad de Q_{t_0} vemos que

$$Q_{t_0}(\tau(\omega_t), \overline{\tau(\omega_t)}) = A(t) \cdot \overline{B(t)} - \overline{A(t)} \cdot B(t) = -2i \cdot \text{Im}(B(t) \cdot \overline{A(t)})$$

Como $\omega_t \in H_o^{1,0}(X_t) = H^{1,0}(X_t)$, la segunda relación de Riemann-Hodge nos dice que

$$i \cdot Q_t(\omega_t, \overline{\omega_t}) > 0$$

Y como el transporte paralelo preserva la polarización

$$2 \cdot \text{Im}(B(t) \cdot \overline{A(t)}) = i \cdot Q_{t_0}(\tau(\omega_t), \overline{\tau(\omega_t)}) = i \cdot Q_t(\omega_t, \overline{\omega_t}) > 0$$

Así que $\text{Im}(B(t) \cdot \overline{A(t)}) > 0$. En particular $A(t), B(t) \neq 0$ y si $p(t) := B(t)/A(t)$, entonces $\text{Im}(p(t)) > 0$. Luego

$$\tilde{\mathcal{P}}^1(t) = \mathbb{C} \cdot (\delta^* + p(t) \cdot \gamma^*) \subseteq H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})^{\mathbb{C}}$$

Así que $p : U \rightarrow \mathbb{H}$ condensa toda la información del mapa de períodos local. Notar que el dominio de períodos polarizado se identifica con \mathbb{H} . Para extender el mapa de períodos a todo $\mathbb{C} - \{0; 1\}$, debemos cocientar \mathbb{H} por la monodromía. Para calcular la monodromía, en [5] se prueba que si $\sigma \in H_1(X, \mathbb{Z})$, entonces la función $C : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$C(t) := \int_{\sigma} \tau(\omega_t)$$

Satisface la ecuación diferencial de Picard-Fuchs

$$t \cdot (t - 1) \cdot C''(t) + (2t - 1) \cdot C'(t) + \frac{1}{4} C(t) = 0$$

El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C} - \{0; 1\}, t_0)$ está generado por dos círculos, uno que rodea a 0 y otro que rodea a 1. Llamémoslos a y b respectivamente. Sea A la matriz del isomorfismo $a : H_{\text{dR}}^1(X_{t_0}) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(X_{t_0})$ en la base $\{\delta^*, \gamma^*\}$ y B la matriz de b , en [5] se prueba que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Que generan el grupo

$$\tilde{\pi}_1(\mathbb{C} - \{0; 1\}, t_0) = \{C \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : C \equiv \text{Id} \pmod{2}\} =: \Gamma(2)$$

El cual actúa sobre el dominio de períodos polarizado \mathbb{H} vía

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

Así que $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ es el dominio de períodos global polarizado.

Bibliografía

- 1) Alekseevsky, D. V. (1997). *Flag manifolds*. Sbornik Radova, 11(3-35), 2.
- 2) André Weil, A. (1958). *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind. no. 1267. Hermann, Paris.
- 3) Ballmann, W. (2006). *Lectures on Kähler manifolds* (Vol. 2). European mathematical society.
- 4) Borel, A. (1953). *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*. American Journal of Mathematics, 75(3), 409-448.
- 5) Carlson, J., Müller-Stach, S., & Peters, C. (2017). *Period mappings and period domains*. Cambridge University Press.
- 6) Cattani, E. (2010). *Introduction to Kähler manifolds*. International Centre for Theoretical Physics.
- 7) Eduardo Cattani, Fouad El Zein, Phillip A. Griffiths, Lê Dung Tráng (eds). *Hodge Theory*. Princeton University Press; 2014.
- 8) Filippini, S. A., Ruddat, H., & Thompson, A. (2015). An introduction to Hodge structures. *Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics: Lecture Notes on Concentrated Graduate Courses*, 83-130.
- 9) Griffiths, P., & Harris, J. (2014). *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons.
- 10) Hartshorne, R. (2013). *Algebraic geometry* (Vol. 52). Springer Science & Business Media.
- 11) Hatcher, Allen: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- 12) <https://math.stackexchange.com/questions/37606/does-the-quotient-manifold-inherit-the-riemannian-structure>
- 13) <https://math.stackexchange.com/questions/275925/determinant-of-a-linear-map-given-by-conjugation>
- 14) <https://mathoverflow.net/questions/394798/smooth-submanifold-of-a-complex-manifold-with-invariant-tangent-space-under-mult>
- 15) <https://math.stackexchange.com/questions/1223645/is-the-projection-onto-a-quotient-by-a-compact-normal-subgroup-proper>
- 16) <https://math.stackexchange.com/questions/2588046/cup-and-wedge-product-in-singular-and-de-rham-cohomology>
- 17) Huybrechts, D. (2005). *Complex geometry: an introduction* (Vol. 78). Berlin: Springer.
- 18) Imayoshi, Y., & Taniguchi, M. (2012). *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer Science & Business Media.
- 19) John M. Lee (2003). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag.
- 20) Joshua P. Bowman. *The Manifold of Complex Structures on a Vector Space*. Cornell Department of Mathematics.
- 21) Kim A. Frøyshov (2018). *Vector bundles and connections*. Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo.
- 22) Kobayashi, S.; Nomizu, K. (2009) [1963]. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library. Vol. 1. Wiley.

- 23) Kodaira, K. and D. Spencer. 1962. A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces. *Acta Math.*
- 24) Kodaira, K., L. Nirenberg, and D. Spencer. 1958. On the existence of deformations of complex structures. *Ann. Math.*
- 25) Mathew George. *Ehresmann's Theorem*. The Ohio State University.
- 26) Palamodov, V. P. (1976). Deformations of complex spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 31(3), 129.
- 27) Schmitt, S. *The quotient manifold theorem*. Heidelberg University.
- 28) Silverman, J. H. (2009). *The arithmetic of elliptic curves* (Vol. 106, pp. xx+-513). New York: Springer.
- 29) Tzon-Tzer Lu, Sheng-Hua Shiou, *Inverses of 2x2 Block Matrices*, Nacional Taiwan Ocean University.
- 30) Voisin C. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Schneps L, trans. Cambridge University Press; 2002.
- 31) Warner, F. W. (1983). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* (Vol. 94). Springer Science & Business Media.
- 32) Zinger, A. (2010). *Notes on vector bundles*. Stony Brook Department of Mathematics.
- 33) Zykoski, B. Notes on Kodaira-Spencer Theory.
https://public.websites.umich.edu/~zykoskib/kodaira_spencer.pdf