**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**
**Departamento de Matemática**

## Tesis de Licenciatura

# Una familia de ecuaciones diferenciales con crecimiento no estándar

**Mónica Lidia Jacob**

**Directora**: Claudia Lederman

Fecha de Presentación
13 de Junio de 2024

# Agradecimientos

En agosto del 2020, cuando vi que la pandemia iba para largo y la virtualidad me facilitaba la cursada, decidí emprender el tramo final que tenía inconcluso de la Licenciatura en Matemática, con 12 materias por cursar y la Tesis. Me contacté con Daniel Carando, quien se constituyó en el faro que iluminó este tramo. Además de las dos materias que cursé con él, me alentó en cada ocasión en que le iba comunicando mis avances y mis dificultades.

Agradezco a Teresa Krick y a Ezequiel Rela quienes, a pesar de no haber cursado con ellos, me brindaron los videos de sus maravillosas clases de Álgebra III y Análisis Real.

Un agradecimiento muy especial para Claudia Lederman, quien además de su excelencia académica, me acompañó con entusiasmo y accedió a encuentros intensivos semanales para el diseño y la corrección de esta Tesis.

Muchísimas gracias por aceptar ser Jurados: Andrea Ceretani (quien también fue J.T.P. de Ecuaciones Diferenciales) y Pablo Amster.

Además de los que ya nombré, han dejado marcas imborrables los docentes de la primera etapa de la Licenciatura: Guillermo Hansen, Carlos Ruiz, Alicia Conde, Enzo Gentile, Ángel Larotonda, Juan José Martínez, Adrián Paenza, Manuel Balanzat, Ricardo Noriega, Guillermo Martínez, María del Carmen Calvo, Cristina López, Juan Sabia, Daniel Perrucci, Gabriela Armentano, Constanza Sánchez de la Vega y en especial, mi querido y admirado Norberto Fava.

De la actualidad, agradezco a los profesores Leandro Vendramin, Guillermo Henry, Juan Pablo Pinasco, Jorge Devoto, Gabriela Jerónimo y Martín Mereb. En cuanto a los docentes de T.P., agradezco a Mariano Merzbacher, Mariano Negri, Martín Blufstein, Agustín Barreto, Rocío Diaz Martin, Daniel Grimaldi, Lucía Busolini, Guido Arnone y Juan Zuccotti.

Gracias a los amigos de Exactas que gané en este tiempo: Guillermo Herrmann, Matías Conde, Santiago Varela, Gabriel Sac Himelfarb y Rocío Bernardini. A mis "profesores ocasionales": Julián Epstein, Rocío Nores. Y a mis compañeros Ramiro Akris y Cecilia Duhau.

A todos ellos muchísimas gracias por sus aportes.

En cuanto a mi familia, agradezco en primer lugar a mi padre, Mario, el legado de su curiosidad y eterna ansia de saber. A mi madre, Lucía, la lucidez con que cursa sus "primeros" 97 años. A mis abuelas, tías y tíos (en especial a Rosa y Freddy), primos y primas. A mis amados sobrinos Lore, Maru, Maxi, Vane y mis "sobrinietos" Juli, Rami, Emma y Thommy.

A mis amigas de primaria y al maravilloso grupo de más de 30 amigas que formamos las egresadas del Lenguas Vivas. Y el recuerdo imborrable de la inolvidable y amada profesora de Matemáticas Margarita Oría de Chouhy Aguirre.

A mis queridos amigos Fernando y Ernesto, de la Licenciatura en Física. A mis amigos de teatro. A mis compañeras de la Licenciatura en Psicología y del Posgrado en Psicoanálisis. A mis colegas y amigos psicoanalistas, en especial, mis queridos Alejandra, Andrea, Olga P., Roberto y el recordado Félix.

A mis afectos de tantos años: Olga M. (acaba de partir), Martín, Cristina, Nilda, Silvia, Roby, Marta, Ana Lía, Isabel, Verónica, Mariana P., Mariana G., Lucio, Daniela y Pablo.

Dedico esta Tesis a la memoria de Diana Liaskowsky, quien condujo mi análisis en el que aprendí a apostar, emprender, avanzar y concluir todo aquello que me motive, sin tener en cuenta ni la edad ni las dificultades que se presenten.

Muchísimas gracias a todos ellos por acompañarme en este proyecto.

# Resumen

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales aparecen en el modelado de diversas disciplinas. La teoría clásica asume que los términos no lineales involucrados son de tipo potencia. Sin embargo, estas ecuaciones resultan ser insuficientes para describir algunos fenómenos y una clase más general se está empleando para el modelado de medios inhomogéneos y anisotrópicos. Este tipo de ecuaciones no lineales, donde la ley de crecimiento es más general que una potencia, se conoce como ecuaciones con crecimiento no estándar.

En esta tesis nos concentramos en ecuaciones diferenciales con crecimiento no estándar conocidas como ecuaciones con exponentes variables. Sus aplicaciones incluyen el modelado de fluidos no Newtonianos, la reconstrucción de imágenes y el proceso de filtración de gases en medios porosos inhomogéneos.

En primer lugar, presentamos modelos que involucran ecuaciones diferenciales no lineales con exponentes variables, provenientes de aplicaciones, y luego presentamos las herramientas matemáticas que se utilizan para estudiar este tipo de ecuaciones.

A continuación nos enfocamos en una familia particular de ecuaciones con crecimiento no estándar inicialmente considerada en el trabajo de X. Fan. Desarrollamos un estudio detallado de resultados conocidos para esta familia y además obtenemos un resultado novedoso para la misma. Finalmente presentamos ejemplos de ecuaciones donde estos resultados se aplican.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

La teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se enfoca en problemas no lineales—aquellos para los cuales no se verifica que una combinación lineal de soluciones es solución. Estas ecuaciones aparecen en el modelado de diversas disciplinas, entre ellas la ingeniería, la física, la química y la biología.

La teoría clásica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales asume que los términos no lineales involucrados son del tipo potencia. Sin embargo, esta clase de ecuaciones resulta ser insuficiente para describir algunos fenómenos físicos. Hoy en día se está empleando una clase más general para el modelado de materiales inhomogéneos (con distintas propiedades en distintos puntos), anisotrópicos (con diferente comportamiento en distintas direcciones), procesos difusivos en medios porosos fuertemente inhomogéneos, y en modelos que abarcan desde la ciencia de materiales moderna, hasta la meteorología y la restauración de imágenes.

Este tipo de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, donde la ley de crecimiento es más general que una potencia, se conoce como ecuaciones con crecimiento o estructura no estándar—denominación introducida en [54] y [55]. Incluye una amplia clase de ecuaciones que inspira investigaciones recientes en la comunidad matemática y requiere una variedad de herramientas modernas para construir un entorno analítico funcional adecuado.

En esta tesis nos concentramos en una clase de ecuaciones diferenciales con crecimiento no estándar conocida como ecuaciones en derivadas parciales con exponentes variables. Tienen una vasta gama de aplicaciones, tales como el modelado de fluidos no Newtonianos (por ejemplo fluidos electrorreológicos [63] o termorreológicos [4]). Otras áreas de aplicación incluyen la elasticidad no lineal [70], reconstrucción de imágenes [1] y [20], el modelado de conductores eléctricos [71], así como el proceso de filtración de gases en medios porosos no homogéneos [5].

Los espacios funcionales adecuados para el estudio del tipo de ecuaciones aquí consideradas son los Espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y los de Sobolev $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, donde $1 < p(x) < \infty$, que generalizan a los espacios clásicos de Lebesgue y Sobolev $L^p(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ y son estudiados en detalle en [29].

En la tesis, en primer lugar, presentamos algunos modelos que involucran ecuaciones diferenciales no lineales con exponentes variables, provenientes de distintas aplicaciones.

Luego, presentamos las herramientas matemáticas que se utilizan para estudiar este tipo de ecuaciones.

A continuación nos enfocamos en el estudio de una familia particular de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con crecimiento no estándar de la forma

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u) \quad \text{en}\, \Omega. \tag{1.1}$$

Esta familia de ecuaciones viene dada por $A(x,s,\eta)$ que satisface

$$\lambda_0|\eta|^{p(x)-2}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,\eta)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0|\eta|^{p(x)-2}|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

donde $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0$, y tiene un miembro derecho dado por $B(x,s,\eta) \not\equiv 0$. En el caso particular en que $p(x) \equiv 2$ la ecuación es uniformemente elíptica ya que cumple

$$\lambda_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,\eta)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Sin embargo, $p(x)$ es variable y cumple $1 < p_{min} \leq p(x) \leq p_{max} < \infty$. En consecuencia la ecuación (1.1) no es uniformemente elíptica. En efecto, (1.2) indica que es singular en las regiones donde $1 < p(x) < 2 \ \big(\lambda_0|\eta|^{p(x)-2} \to \infty$ cuando $|\eta| \to 0\big)$, y degenerada en aquellas donde $p(x) > 2 \ \big(\Lambda_0|\eta|^{p(x)-2} \to 0$ cuando $|\eta| \to 0\big)$.

Esta familia fue inicialmente considerada en el trabajo de X. Fan [32], donde se probó la regularidad $C^{1,\alpha}$ de soluciones débiles acotadas. En [68], N. Wolanski probó una Desigualdad de Harnack para esta familia.

En el trabajo de C. Lederman y N. Wolanski [48] (ver Sección 3 de dicho trabajo), utilizando las hipótesis consideradas en [32], se probaron distintos resultados para estas ecuaciones. Entre ellos, existencia de solución, unicidad y acotación de soluciones.

El método utilizado para probar existencia de solución consiste en mostrar que, dada $\phi \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, existe un minimizante $u$ del funcional de energía

$$\mathcal{J}_\Omega(v) = \int_\Omega F(x,v,\nabla v)\,dx, \tag{1.3}$$

en $\phi + W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ y en consecuencia $u$ es solución de (1.1), con

$$A(x,s,\eta) = \nabla_\eta F(x,s,\eta),$$
$$B(x,s,\eta) = F_s(x,s,\eta).$$

En la tesis desarrollamos un estudio detallado de resultados conocidos para esta familia de ecuaciones.

Analizamos además la relación entre las distintas nociones de solución para las ecuaciones estudiadas. A saber, débil, viscosa y clásica. Estos resultados son novedosos para esta familia. Esta clase de resultados tiene aplicaciones en distintos contextos, por ejemplo, en el estudio de problemas de frontera libre (ver [13], [36], [69]).

Finalmente presentamos ejemplos de ecuaciones para las cuales se aplican los resultados estudiados.

Un ejemplo particular en esta clase de ecuaciones viene dado por

$$\Delta_{p(x)}u := \mathrm{div}(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x).$$

El operador $\Delta_{p(x)}$, llamado $p(x)$-Laplaciano, extiende el Laplaciano, que se obtiene en el caso particular en que $p(x) \equiv 2$, y el $p$-Laplaciano, en el caso en que $p(x) \equiv p$. Este es un operador prototípico en la clase de operadores con crecimiento no estándar.

También se encuentra en la familia considerada la ecuación de la forma (1.1), proveniente del funcional de energía (1.3), para $F$ dada por

$$F(x, s, \eta) = G(x, \eta) + f(x, s),$$

con

$$G(x, \eta) = \widetilde{G}\big(|\eta|^{p(x)}\big), \qquad f(x, s) = g(x)s,$$

donde $\widetilde{G}'' \geq 0$.

# Organización de la Tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 presentamos algunos modelos que involucran ecuaciones diferenciales no lineales con exponentes variables, provenientes de distintas aplicaciones.

En los Capítulos 3, 4 y 5 presentamos distintas definiciones y resultados preliminares que serán necesarios para el estudio de la familia de ecuaciones que abordamos. En particular, introducimos los Espacios de Sobolev con exponente variable $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ que son los apropiados para trabajar con estas ecuaciones.

En el Capítulo 6 desarrollamos un estudio detallado de resultados conocidos para la familia de ecuaciones

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u) \quad \text{en}\, \Omega.$$

Incluimos resultados de existencia de solución, Principio de comparación, unicidad de solución. También, acotación de soluciones, Principio del máximo, regularidad de soluciones y Desigualdad de Harnack.

Analizamos además la relación entre las distintas nociones de solución para las ecuaciones estudiadas. A saber, débil, viscosa y clásica. Estos resultados son novedosos para esta familia.

Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos ejemplos de ecuaciones para las cuales se aplican los resultados del Capítulo 6. Además, incluimos un Apéndice donde comentamos interesantes resultados para ecuaciones diferenciales con crecimiento no estándar que en particular incluyen ecuaciones que no hemos tratado en la tesis.

# Capítulo 2

# Algunos modelos con exponentes variables

El estudio sistemático reciente de ecuaciones diferenciales con exponentes variables fue motivado por la descripción de distintos modelos tales como fluidos electrorreológicos y termorreológicos, procesamiento de imágenes, o robótica. Para una introducción a estos temas referimos a [40] y [60].

## 2.1. Procesamiento de imágenes

Este ejemplo se debe a Chen, Levine, Rao [20], y concierne a aplicaciones a la restauración de imágenes. Consideremos una entrada $I$—la imagen recibida—que corresponde a tonos de gris en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponemos que $I$ está compuesta por la imagen verdadera corrompida por el ruido. Supongamos que el ruido es aditivo, es decir, $I = T + \eta$, donde $T$ es la imagen verdadera y $\eta$ es el ruido. El efecto del ruido se puede eliminar suavizando la entrada. Suavizar corresponde a minimizar la energía

$$E_1(v) = \int_\Omega (|\nabla v(x)|^2 + |v(x) - I(x)|^2)\, dx.$$

Desafortunadamente, suavizar destruye los pequeños detalles de la imagen, por lo que este procedimiento no es satisfactorio. Un enfoque mejor es el suavizado de variación total. Dado que un borde en la imagen da lugar a un gradiente muy grande, los conjuntos de nivel alrededor del borde son muy distintos, por lo que este método hace un buen trabajo preservando los bordes. El suavizado de variación total corresponde a minimizar la energía

$$E_2(v) = \int_\Omega (|\nabla v(x)| + |v(x) - I(x)|^2)\, dx.$$

Lamentablemente, el suavizado de variación total no solo preserva los bordes, sino que también crea bordes donde no los había en la imagen original. Al observar $E_1$ y $E_2$, Chen, Levine y Rao sugirieron que una energía apropiada es

$$E(v) = \int_\Omega \Big( \frac{|\nabla v(x)|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{1}{2}|v(x) - I(x)|^2 \Big)\, dx,$$

donde $1 \leq p(x) \leq 2$. Esta función deberá ser cercana a 1 donde probablemente haya bordes, y cercana a 2 donde probablemente no haya bordes. La ubicación aproximada de los bordes se puede determinar simplemente suavizando los datos de entrada y observando dónde el gradiente es grande.

Con técnicas similares a las desarrolladas en el Capítulo 6, se prueba que un minimizante de $E$ es solución de

$$\Delta_{p(x)} u = u - I.$$

## 2.2. Fluidos no Newtonianos

### 2.2.1. Introducción

Las ecuaciones que modelan un fluido homogéneo, incompresible (ver por ejemplo [3] y [52]) son

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \operatorname{div}(S(x, Du)) + \nabla\pi & = f, \\ \operatorname{div} u & = 0, \end{cases}$$

donde $u$ es la velocidad, $\pi$ la presión y $f$ la fuerza externa.

La primera ecuación describe la conservación del momento y la segunda es la condición de incompresibilidad.

Se denomina tensor de esfuerzo a

$$T = -\pi I + S(x, Du),$$

donde

$$Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$$

es la parte simétrica del gradiente de $u$, llamado también tensor de deformación.

En el caso en que $S(x, Du)$ tiene la forma

$$S(x, Du) = \nu Du,$$

con $\nu$ una constante positiva, al fluido se lo llama Newtoniano. Un ejemplo de este tipo de fluidos es el agua.

Si $S(x, Du)$ depende de $Du$ en forma no lineal, al fluido se lo llama no Newtoniano. Ejemplos de este tipo de fluidos son pintura, sangre, ketchup, dentífrico.

### 2.2.2. Fluidos electrorreológicos

Los fluidos electrorreológicos (referimos a Ružička [63] para una monografía sobre este tema) son fluidos que se caracterizan por su capacidad para experimentar cambios significativos en sus propiedades mecánicas al aplicarles un campo eléctrico. Esta propiedad puede ser aprovechada en aplicaciones tecnológicas, como embragues, amortiguadores y equipamiento de rehabilitación, por nombrar algunas. Se atribuye a Winslow [67] la primera observación del comportamiento de los fluidos electrorreológicos en 1949. Los primeros fluidos tenían grandes impedimentos, como ser, la naturaleza abrasiva y la inestabilidad de la suspensión y los enormes requisitos de voltaje necesarios para un cambio significativo en las propiedades del material. Se realizaron grandes avances para superar dichos obstáculos y en la actualidad se dispone de materiales que hacen posibles los dispositivos mencionados anteriormente.

La ecuación constitutiva para el movimiento de un fluido electrorreológico es

$$u_t - \mathrm{div} S(x, Du) + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi = f, \tag{2.1}$$

donde $u$ es la velocidad del fluido, $\pi$ es la presión, $f$ representa la fuerza externa y el tensor de esfuerzo $T$ tiene la forma

$$T = -\pi I + S(x, Du),$$
$$S(x, Du) = \mu(x)\left[1 + |Du(x)|^2\right]^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x),$$

donde $Du = (\nabla u + \nabla u^t)/2$ es la parte simétrica del gradiente de $u$, y $\mu$ y $p(x)$ dependen del campo eléctrico.

Observamos que el término diferencial de orden más alto en (2.1) es

$$\mathrm{div}\Big(\mu(x)\left[1 + |Du(x)|^2\right]^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x)\Big).$$

### 2.2.3. Fluidos termorreológicos

En los últimos años se han propuesto distintas relaciones constitutivas no lineales para el tensor de esfuerzos. En [61], Rajagopal y Ružička han discutido modelos matemáticos de fluidos electrorreológicos donde, como condición de crecimiento, el exponente depende del campo eléctrico. En el trabajo [4], los autores están interesados en el análisis de flujos estacionarios de fluidos que están fuertemente influenciados por el campo de temperatura, en lugar de por un campo eléctrico externo, los llamados fluidos termorreológicos. Los autores estudian un sistema de ecuaciones que describe un flujo termoconvectivo estacionario de un fluido no Newtoniano. Suponen que el tensor de esfuerzos $T$ tiene la forma

$$T = -\pi I + \big(\mu(\theta) + \tau(\theta)|D(u)|^{p(\theta)-2}\big)D(u),$$

donde $u$ es el vector velocidad, $\pi$ es la presión, $\theta$ es la temperatura y $\mu$, $p$ y $\tau$ son coeficientes dados que dependen de la temperatura. $D(u)$ es el tensor de deformación.

Las ecuaciones consideradas en [4] son las siguientes: $\Omega$ es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N = 2,3$ y las funciones $\theta(x)$, $u(x) = (u_1, ..., u_N)$, $\pi(x)$ satisfacen las ecuaciones

$$(u \cdot \nabla)b(\theta) = \Delta\theta + g,$$

$$\theta(x) = \theta_1(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$(u \cdot \nabla)u = \mathrm{div}\Big(\big(\mu(\theta) + \tau(\theta)|D(u)|^{p(\theta)-2}\big)D(u)\Big) - \nabla\pi + f,$$

$$\mathrm{div} u = 0,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

En estas ecuaciones $u, \pi$ y $\theta$ son respectivamente el campo de velocidad, la presión y la temperatura del fluido,

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t),$$

es el tensor de deformación, $f$ es la fuerza externa. Los coeficientes $b$, $\mu$, $p$ y $\tau$ dependen de la temperatura $\theta$.

## 2.3. Medios porosos no homogéneos

Las ecuaciones del tipo

$$u_t - \mathrm{div}(|u|^{\gamma(x,t)}\nabla u) = f \quad \text{en} \quad \Omega \times [0, T], \tag{2.2}$$

con exponente variable $\gamma(x,t)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N = 3$, aparecen de manera natural en la mecánica de medios continuos. Consideremos el movimiento de un gas barotrópico ideal—es decir, su densidad depende sólo de la presión—a través de un medio poroso (por ejemplo, arena, arcilla). Sea $\rho$ la densidad del gas, $V$ la velocidad y $p$ la presión. El movimiento está gobernado por la ley de conservación de masa

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = 0,$$

la ley de Darcy, que para un medio no homogéneo tiene la forma

$$V = -k(x)\nabla p,$$

donde $k(x)$ es una matriz dada, y la ecuación de estado $p = P(\rho)$. Generalmente se asume que $P(s) = \mu s^\alpha$ con $\mu$ y $\alpha$ constantes. Las condiciones anteriores llevan entonces a la ecuación para la densidad $\rho$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\mu\alpha}{1+\alpha}\mathrm{div}(k(x)\nabla\rho^{1+\alpha}).$$

Si además se asume que $p$ puede depender explícitamente de $(x,t)$ y tiene la forma $p = \mu\rho^{\gamma(x,t)}$, la ecuación para $\rho$ se convierte en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu\,\mathrm{div}(k(x)\rho\nabla\rho^{\gamma(x,t)}),$$

y puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu\,\mathrm{div}\Big(k(x)\gamma\,\rho^{\gamma}\nabla\rho + (\rho^{\gamma+1}\ln\rho)k(x)\nabla\gamma\Big). \tag{2.3}$$

En [5] se deduce la ecuación (2.3) y se estudia la ecuación (2.2), que es una versión simplificada de (2.3).

# Capítulo 3

# Preliminares I

## 3.1. Algunos resultados de análisis real y funcional

**Teorema 3.1** (Desigualdad de Chebyshev). *Si $f(x) \geq 0$ es una función medible en $E \subset \mathbb{R}^N$ y $C > 0$, entonces*
$$|\{x : x \in E,\ f(x) \geq C\}| \leq \frac{1}{C} \int_E f(x)\, dx.$$

*Demostración.* En efecto, sea $E' = \{x : x \in E,\ f(x) \geq C\}$. Entonces

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{E'} f(x)\, dx + \int_{E \setminus E'} f(x)\, dx \geq \int_{E'} f(x)\, dx \geq C|E'|.$$

□

**Teorema 3.2** (Teorema de Egorov). *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de medida finita. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E que converge en casi todo punto a una función medible y finita $f$. Entonces, para todo $\delta > 0$, existe un conjunto cerrado $F \subset E$ tal que*
$$|E \setminus F| < \delta \quad y$$
$$f_k \longrightarrow f \quad \textit{uniformemente en } F.$$

*Demostración.* Ver Teorema 4.17 en [66]. □

**Teorema 3.3** (Lema de Fatou). *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en $E \subset \mathbb{R}^N$. Entonces,*

$$\int_E (\liminf_{k\to\infty} f_k)\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\, dx.$$

*Demostración.* Ver Teorema 5.17 en [66]. □

**Teorema 3.4** (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en $E \subset \mathbb{R}^N$ que converge en casi todo punto a cierta función medible $f$. Supongamos que existe una función medible $\phi$, definida en $E$, tal que*

$$\int_E \phi \, dx < \infty,$$

$$0 \leq f_k(x) \leq \phi(x), \quad \text{c.t.p.}\ x \in E, \quad \forall k \geq 1.$$

*Entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, dx = \int_E f \, dx. \tag{3.1}$$

La función $\phi$ suele llamarse función mayorante, lo que justifica que al teorema se lo conozca también como Teorema de convergencia mayorada.

*Demostración.* Ver Teorema 5.19 en [66]. □

**Teorema 3.5** (Teorema sobre convergencia débil en espacios de Banach reflexivos)**.** *Sea $B$ un espacio de Banach reflexivo, y sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $B$. Entonces, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ y $x \in B$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ (es decir, $x_{n_k}$ converge débilmente a $x$ en la topología $\sigma(B, B')$). Más precisamente,*

$$\langle f, x_{n_k} \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall f \in B'.$$

*Además, si $\|x_n\| \leq C \quad \forall n$, entonces $\|x\| \leq C$.*

*Demostración.* Ver Teorema 3.18 y Proposición 3.5 de [14]. □

**Teorema 3.6.** *Sea $B$ un espacio de Banach y $C \subset B$ un conjunto convexo y cerrado. Entonces, $C$ es débilmente cerrado en $\sigma(B, B')$, es decir, cerrado en la topología débil $\sigma(B, B')$.*

*Demostración.* Ver el Teorema 3.7 en [14]. □

El Teorema de la divergencia expresa una relación entre una integral de volumen sobre una región y una integral de superficie tomada sobre la frontera de esa región.

**Definición 3.1** (Frontera de clase $C^1$)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. Decimos que $\partial\Omega$ es $C^1$, si para cada punto $x^0 \in \partial\Omega$, existen $r > 0$ y una función $C^1$ $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ tales que —reordenando las variables y reorientando los ejes coordenados, si es necesario—tenemos

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{N-1})\}.$$

**Teorema 3.7** (Teorema de la divergencia)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera de clase $C^1$. Si $\boldsymbol{v} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x)),\ v_i \in C^1(\bar{\Omega}), 1 \leq i \leq N$, entonces*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

*donde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$ es el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$ y*

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

*Demostración.* La demostración en el caso de $\mathbb{R}^3$ puede encontrarse en el Teorema 12.6 de [7] con hipótesis simplificadas. Para el caso de $\mathbb{R}^N$, ver Teorema 5.16 y Observación, en [31] (pág 236). □

**Teorema 3.8** (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea $H, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espacio de Hilbert. Sea $\mathcal{L} : H \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe una única $u \in H$ tal que*

$$\langle u, v\rangle = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H.$$

*Además,*

$$\|u\|_H = \|\mathcal{L}\|_{H'}.$$

*Demostración.* Ver Teorema 5.5 en [14]. □

A continuación enunciaremos el Teorema de Lax Milgram, para lo cual necesitamos dos definiciones previas.

**Definición 3.2** (Continuidad de $a(\cdot,\cdot)$)**.** Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $a(\cdot,\cdot)$ es continua, si existe $C_1 \geq 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|\, \|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

**Definición 3.3** (Coercividad de $a(\cdot,\cdot)$)**.** Sea $H, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espacio de Hilbert. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva, si existe $C_2 > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq C_2 \|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

**Teorema 3.9** (Teorema de Lax Milgram)**.** *Sea $H, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espacio de Hilbert. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Dado $\mathcal{L} : H \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, existe una única $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H.$$

*Además,*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{C_2} \|\mathcal{L}\|_{H'},$$

*donde $C_2$ es la constante de coercividad de $a(\cdot,\cdot)$.*

*Demostración.* Ver Corolario 5.8 en [14]. □

## 3.2. Algunas desigualdades

En esta sección incluimos algunas desigualdades que serán de utilidad en el Capítulo 6.

**Lema 3.1.** *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $a, b \geq 0$*, entonces*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{3.2}$$

*Demostración.* Si $p = 1$, entonces (3.2) es una igualdad trivial. Para $p > 1$, la función $t^p$ es convexa en $[0, \infty)$; es decir, su gráfica se encuentra por debajo de la línea que une los puntos $(a, a^p)$ y $(b, b^p)$. Entonces,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2},$$

de donde se deduce inmediatamente (3.2). □

**Lema 3.2.** *Sean* $\eta$, $\eta' \in \mathbb{R}^N$ *tales que* $|\eta'| \geq |\eta|$ *y* $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$*. Entonces, se cumple la desigualdad*

$$|\eta' + t(\eta - \eta')| \geq \frac{1}{4}|\eta - \eta'|.$$

*Demostración.* Dado que $|\eta'| \geq |\eta|$, obtenemos

$$|\eta - \eta'| \leq |\eta| + |\eta'| \leq 2|\eta'|. \tag{3.3}$$

Para $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$, usando (3.3) deducimos

$$\begin{aligned}
|\eta' + t(\eta - \eta')| = |\eta' - t(\eta' - \eta)| &\geq \Big| |\eta'| - |t(\eta' - \eta)| \Big| \\
&\geq |\eta'| - t|\eta' - \eta| \geq \frac{1}{2}|\eta - \eta'| - t|\eta - \eta'| \\
&\geq \frac{1}{2}|\eta - \eta'| - \frac{1}{4}|\eta - \eta'| = \frac{1}{4}|\eta - \eta'|.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.10** (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $a, b \geq 0$*,* $\varepsilon > 0$ *y* $1 < p, q < \infty$*, tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Entonces*

*i)*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3.4}$$

*ii)*

$$ab \leq \varepsilon^p \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^q}\frac{b^q}{q}.$$

*iii)*

$$a \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon, p).$$

*Demostración.* La desigualdad (3.4) es una consecuencia directa de la concavidad de la función logaritmo en $(0, \infty)$

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) = \log(ab).$$

Para probar $ii)$ observemos que si $\varepsilon > 0$, (3.4) implica que

$$ab = (a\varepsilon)\frac{b}{\varepsilon} \leq \varepsilon^p \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^q}\frac{b^q}{q}.$$

Finalmente, deducimos de $ii)$ que

$$a = a1 \leq \varepsilon^p \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^q}\frac{1}{q} = \bar{\varepsilon}a^p + \bar{C}(\varepsilon, p),$$

con $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^p}{p}$. Es decir, se obtiene $iii)$. □

## 3.3. Continuidad Hölder

Sea $x_0$ un punto en $\mathbb{R}^N$ y $f$ una función definida en un conjunto acotado $D$ que contiene a $x_0$. Si $0 < \alpha < 1$, decimos que $f$ es Hölder continua con exponente $\alpha$ en $x_0$, si la cantidad

$$[f]_{\alpha;x_0} = \sup_D \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}, \tag{3.5}$$

es finita.

Claramente, si $f$ es Hölder continua en $x_0$, entonces $f$ es continua en $x_0$. Cuando (3.5) es finita para $\alpha = 1$, se dice que es Lipschitz continua en $x_0$.

Ejemplo. La función $f$ en $B_1(0)$ dada por

$$f(x) = |x|^\beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

es Hölder continua con exponente $\beta$ en $x = 0$, y es Lipschitz continua cuando $\beta = 1$.

La noción de continuidad Hölder se extiende fácilmente a todo $D$ (no necesariamente acotado). Decimos que $f$ es uniformemente Hölder continua con exponente $\alpha$ en $D$, si la cantidad

$$[f]_{x;D} = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^a}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

es finita; y localmente Hölder continua con exponente $\alpha$ en $D$, si $f$ es uniformemente Hölder continua con exponente $\alpha$ en los subconjuntos compactos de $D$.

La continuidad Hölder resulta ser una medida cuantitativa de la continuidad, que es especialmente adecuada para el estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En cierto sentido, también puede ser vista como una diferenciabilidad fraccionaria. Esto sugiere una ampliación natural de los espacios conocidos de funciones diferenciables.

Sea $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$ y $k$ un entero no negativo. Los espacios de Hölder $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})\big(C^{k,\alpha}(\Omega)\big)$ se definen como los subespacios de $C^k(\bar{\Omega})\big(C^k(\Omega)\big)$ que consisten en funciones cuyas $k$-ésimas derivadas parciales son uniformemente Hölder continuas (localmente Hölder continuas) con exponente $\alpha$ en $\Omega$. Por simplicidad se escribe

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega),$$

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = C^{\alpha}(\bar{\Omega}),$$

sobreentendiendo que $0 < \alpha < 1$ siempre que se utilice esta notación. También estableciendo

$$C^{k,0}(\Omega) = C^{k}(\Omega),$$

$$C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^{k}(\bar{\Omega}),$$

se pueden incluir los espacios $C^k(\Omega), C^k(\bar{\Omega})$ entre los espacios $C^{k,\alpha}(\Omega), C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, para $0 \leq \alpha \leq 1$. Notando

$$\begin{aligned} [u]_{k,0;\Omega} &= \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^{\beta}u|, \quad k = 0, 1, 2, ... \\ [u]_{k,\alpha;\Omega} &= \sup_{|\beta|=k} [D^{\beta}u]_{\alpha;\Omega}, \end{aligned}$$

se definen las normas

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} &= |u|_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} [u]_{j,0;\Omega}, \\ \|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} &= |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega}, \end{aligned}$$

en los espacios $C^k(\bar{\Omega})$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ respectivamente. Referimos a [38] para mas detalles sobre estos espacios.

# Capítulo 4

# Preliminares II

Antes de tratar los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable, vamos a presentar una serie de definiciones y enunciados de teoremas básicos acerca de espacios de Lebesgue y de Sobolev con $p$ constante. Hemos recurrido en este caso a [2], [14] y [30].

## 4.1. Espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$

**Definición 4.1.** Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a la clase de todas las funciones medibles $u$, definidas en $\Omega$, para las cuales

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty. \tag{4.1}$$

Es decir

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ es medible y } |u|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Los elementos de $L^p(\Omega)$ son así clases de equivalencia de funciones medibles que satisfacen (4.1), o sea, dos funciones son equivalentes si son iguales en casi todo punto de $\Omega$. Por conveniencia, escribimos $u \in L^p(\Omega)$ si $u$ satisface (4.1), y $u = 0$ en $L^p(\Omega)$ si $u(x) = 0$ c.t.p. en $\Omega$.

Evidentemente, $cu \in L^p(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$. Para confirmar que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial, debemos mostrar que si $u, v \in L^p(\Omega)$, entonces $u + v \in L^p(\Omega)$. Esta demostración la haremos usando el Lema 3.1.

Vamos a demostrar entonces que la suma de funciones de $L^p(\Omega)$ es una función del mismo espacio. Si $u, v \in L^p(\Omega)$ entonces, integrando sobre $\Omega$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

se confirma que $u + v \in L^p(\Omega)$. Vamos a definir una norma en estos espacios.

**Definición 4.2** (Norma en $L^p(\Omega)$)**.** Definimos en $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

**Definición 4.3** (Norma infinito)**.** En el caso en que $p = \infty$ definimos la norma infinito, por

$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\ sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Vamos a demostrar que la definición dada en (4.2) constituye una norma en el espacio $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. Pero, vamos a necesitar para esa demostración, contar con la Desigualdad de Hölder.

**Teorema 4.1** (Desigualdad de Hölder)**.** *Para $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $p'$ al exponente conjugado, definido como*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

*Supongamos que $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{4.3}$$

*Demostración.* La conclusión es obvia si $p = 1$ o $p = \infty$; por lo tanto, asumimos que $1 < p < \infty$. Recordando la Desigualdad de Young (Teorema 3.10),

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \quad \forall a \geq 0, \forall b \geq 0,$$

tenemos,

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{1}{p} |u(x)|^p + \frac{1}{p'} |v(x)|^{p'} \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Se sigue que $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \|v\|_{p'}^{p'}. \tag{4.4}$$

Sustituyendo $u$ por $\lambda^{1/p'} u$ ($\lambda > 0$) en (4.4), obtenemos

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'} \|v\|_{p'}^{p'}. \tag{4.5}$$

Al elegir $\lambda = \|u\|_p^{-1} \|v\|_p^{p'/p}$, para minimizar el lado derecho en (4.5), obtenemos (4.3). $\square$

**Lema 4.1** (Recíproca de la Desigualdad de Hölder)**.** *Una función* $u$ *medible pertenece a* $L^p(\Omega)$ *si y solo si*

$$\sup\left\{\int_\Omega |u(x)|v(x)\,dx : u(x) \geq 0 \quad \textit{en}\,\Omega, \quad \|v\|_{p'} \leq 1\right\},$$

*es finito, y entonces ese supremo es igual a* $\|u\|_p$*.*

*Demostración.* Ver Lema 2.7 de [2]. □

**Teorema 4.2.** *La definición* (4.2) *es una norma en* $L^p(\Omega)$*, para* $1 \leq p < \infty$*.*

*Demostración.* Es claro que $\|u\|_p \geq 0$ y que $\|u\|_p = 0$, si y solo si $u = 0$ en $L^p(\Omega)$. Además,

$$\|cu\|_p = |c|\ \|u\|_p \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nos falta demostrar que la definición (4.2) verifica la desigualdad triangular conocida como Desigualdad de Minkowski

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \tag{4.6}$$

La desigualdad (4.6) ciertamente se cumple si $p = 1$ ya que

$$\int_\Omega |u(x) + v(x)|\,dx \leq \int_\Omega |u(x)|\,dx + \int_\Omega |v(x)|\,dx.$$

Para $1 < p < \infty$, observemos que para $w \geq 0$, $\|w\|_{p'} \leq 1$, tenemos, por la Desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(|u(x)| + |v(x)|\Big) w(x)\,dx \\
&\quad\leq \int_\Omega |u(x)|w(x)\,dx + \int_\Omega |v(x)|w(x)\,dx \\
&\quad\leq \|u\|_p + \|v\|_p,
\end{aligned}$$

donde $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ se deduce aplicando el Lema 4.1. □

**Teorema 4.3.** $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach, para cualquier* $p$*,* $1 \leq p \leq \infty$*.*

*Demostración.* Ver Teorema 2.16 de [2]. □

**Teorema 4.4.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $L^p(\Omega)$ *y sea* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_p \to 0$*. Entonces, existe una subsucesión* $\{f_{n_k}\}$ *y una función* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *c.t.p.* $x \in \Omega$*,*
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ *y* *c.t.p.* $x \in \Omega$*.*

*Demostración.* Ver Teorema 4.9 en [14] □

**Teorema 4.5.** $L^p(\Omega)$ *es separable si y solo si* $1 \leq p < \infty$*.*

*Demostración.* Ver Teorema 2.21 de [2]. □

**Teorema 4.6** (Teorema de reflexividad de $L^p(\Omega)$)**.** $L^p(\Omega)$ *es reflexivo si y solo si* $1 < p < \infty$*.*

*Demostración.* Ver Teorema 2.46 de [2]. □

## 4.2. Espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Vamos a presentar una serie de definiciones y teoremas básicos, que podemos encontrar en [2], [14] y [30]. Comencemos introduciendo la noción de derivada débil.

**Definición 4.4** (Derivada débil de orden 1)**.** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, $1 \leq i \leq N$; $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que $v$ es la derivada de $u$ con respecto a $x_i$ en sentido débil, si

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

**Definición 4.5** (Derivada débil de orden $\alpha$)**.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ un multi-índice. Decimos que una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil de orden $\alpha$ si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

En tal caso, se dice que $v$ es la derivada débil de orden $\alpha$ de $u$ y se nota $v = D^\alpha u$.

Esta es una buena definición en el sentido que si $v_1$ y $v_2$ son derivadas débiles de $u$ de orden $\alpha$, entonces $v_1 = v_2$ en casi todo punto. Además si $u \in C^k(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| \leq k$, la derivada débil de orden $\alpha$ existe y coincide con la usual.

**Definición 4.6.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\}.$$

**Definición 4.7.**

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y escribimos

$$\nabla u = grad\ u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots.. \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big).$$

En el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

o bien, una norma equivalente

$$\left( \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad (\text{si } 1 \leq p < \infty).$$

**Teorema 4.7.** *Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$,
2. *Existe una constante $C$ tal que*
$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \ldots, N,$$
3. *Existe una constante $C$ tal que $\forall \omega \subset\subset \Omega$, y $\forall h \in \mathbb{R}^N$, con $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, tenemos*
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$
$\big($*Notar que $\tau_h u(x) = u(x+h)$ tiene sentido para $x \in \omega$ y $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$*$\big)$.

*Además, podemos tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en (ii) y (iii).*

*Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, tenemos*
$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

*Demostración.* Ver Proposición 9.3 en [14]. □

**Definición 4.8.** Sea $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Definimos
$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$
El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$, provisto de la norma de $W^{1,p}(\Omega)$, es un espacio de Banach separable; es reflexivo si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$, con el producto escalar de $H^1(\Omega)$, es un espacio de Hilbert.

**Definición 4.9** (Operador lineal compacto)**.** Dados $X, Y$ espacios de Banach y $K : X \to Y$ un operador lineal acotado (o continuo), se dice que $K$ es compacto si, para toda sucesión acotada $\{u_k\}$ en $X$, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ tal que $\{K u_{k_j}\}$ converge en $Y$.

**Teorema 4.8** (Teorema de Rellich Kondrachov)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, con $\partial\Omega$ de clase $C^1$. Supongamos que $1 \leq p < \infty$. Entonces, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, es decir, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección compacta.*

*Además, si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.*

*Demostración.* Ver Teorema 9.16 de [14]. □

## 4.3. Espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Antes de introducir los Espacios de Sobolev con exponente variable, con los que trabajaremos para estudiar la familia de ecuaciones que nos interesa, presentaremos los Espacios de Lebesgue con exponente variable. Referimos a [29] para un estudio detallado de estos espacios.

**Observación 4.1.** En el caso en que $p$ es constante, definimos la norma de $u \in L^p(\Omega)$, según (4.2). Pero en el caso en que tengamos $p(x)$, es decir, un exponente $p$ que depende de $x$, no tiene sentido la expresión

$$\left( \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx \right)^{\frac{1}{p(x)}} . \tag{4.7}$$

Por lo tanto, no podemos definir la norma de $u$, $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$, por medio de (4.7). Vamos a definir la norma para un exponente $p(x)$ variable, de manera tal que coincida con (4.2) en el caso en que $p(x)$ sea constante. Para eso conviene previamente observar algunas consecuencias de la definición (4.2), válidas cuando $p$ es constante. Llamando $\lambda$ al número que define la norma, en el caso $p$ constante, obtenemos

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \lambda \iff \int_\Omega |u|^p\, dx = \lambda^p$$

$$\iff \int_\Omega \frac{|u|^p}{\lambda^p} = 1 \iff \int_\Omega \left| \frac{u}{\lambda} \right|^p dx = 1\,.$$

Mas aún, no es difícil verificar que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 \Big/ \int_\Omega \left| \frac{u}{\lambda} \right|^p dx \leq 1 \right\}. \tag{4.8}$$

Definiremos la norma para el caso de un exponente $p(x)$ variable, de la siguiente manera

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 \Big/ \int_\Omega \left| \frac{u}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \tag{4.9}$$

Observamos entonces, que en el caso $p$ igual constante, (4.8) y (4.9) coinciden.

Definiremos el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, como el conjunto de las funciones medibles $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx$ sea finita y definimos la norma según (4.9).

**Definición 4.10.** Llamamos exponente variable sobre $\Omega$, a una función $p : \Omega \to (1, \infty)$ medible y acotada.

**Notación 4.1.** Denotamos $p_{\text{máx}} = \operatorname{ess\,sup} p(x)$ y $p_{\text{mín}} = \operatorname{ess\,inf} p(x)$, donde $1 < p_{min} \leq p_{max} < +\infty$

**Definición 4.11** (Espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$)**.** Definimos el espacio de Lebesgue con exponente variable, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, que consiste de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ para las cuales el modular

$$\varrho_{p(\cdot)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx,$$

es finito. Es decir,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible} \,/\, \varrho_{p(\cdot)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}.$$

**Definición 4.12.** Definimos la llamada norma de Luxemburgo sobre este espacio por medio de

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{p(\cdot)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(u/\lambda) \leq 1\}. \tag{4.10}$$

**Proposición 4.1.** *La definición* (4.10) *es una norma en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

*Demostración.* Ver Teorema 2.1.7 en [29]. □

Para demostrar que esta norma hace de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ un espacio de Banach necesitamos resultados previos.

**Proposición 4.2.** *Tenemos que*

$$\text{mín}\left\{\Big(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p_{min}}}, \Big(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p_{max}}}\right\} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$
$$\leq \text{máx}\left\{\Big(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p_{min}}}, \Big(\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p_{max}}}\right\}.$$

*Demostración.*

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \geq 1 \implies \|u\|^{p_{min}}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|^{p_{max}}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < 1 \implies \|u\|^{p_{max}}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \rho_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|^{p_{min}}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

□

Como consecuencia de esta proposición tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 4.3.** *Propiedad de la bola unitaria. Sea* $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Entonces*

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 1 \iff \varrho_{p(\cdot)}(u) \leq 1.$$

**Proposición 4.4.** *Sean* $u, u_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\|u_k - u\|_{p(\cdot)} \to 0 \iff \varrho_{p(\cdot)}(u_k - u) \to 0.$$

**Lema 4.2.** *Sea* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Existe una subsucesión* $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *y una función medible* $u$ *en* $\Omega$ *tal que* $u_{n_j} \to u$ *c.t.p. en* $\Omega$.

*Demostración.* Ver Lema 2.3.15 en [29]. □

**Teorema 4.9.** *La norma* $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ *hace de* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Luego, por el Lema 4.2 existe $u:\Omega\to\mathbb{R}$ medible y una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_j}\to u$ c.t.p. en $\Omega$.

Tenemos entonces que

$$|u_{n_j}(x)-u(x)|^{p(x)}\to 0 \quad \text{c.t.p. en}\,\Omega.$$

Sean $\lambda>0$ y $0<\varepsilon<1$. Por ser $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, podemos afirmar que existe $N_0=N_0(\lambda,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $||\lambda(u_m-u_n)||_{p(\cdot)}<\varepsilon$ para todo $m,n\geq N_0$.

Por la Proposición 4.2, obtenemos que

$$\rho_{p(\cdot)}(\lambda(u_m-u_n))\leq\varepsilon.$$

Por el Lema de Fatou (Teorema 3.3) resulta

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(\lambda(u_m-u)) &= \int_\Omega |\lambda(u_m(x)-u(x))|^{p(x)}\,dx\\ &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty}|\lambda(u_m(x)-u_{n_j}(x))|^{p(x)}\,dx\\ &\leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega|\lambda(u_m(x)-u_{n_j}(x))|^{p(x)}\,dx\\ &= \liminf_{j\to\infty}\rho_{p(x)}(\lambda(u_m-u_{n_j}))\\ &\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Concluimos así que $\rho_{p(\cdot)}(\lambda(u_m-u))\to 0$ cuando $m\to\infty$ para todo $\lambda>0$.

Por la Proposición 4.4, $\|\lambda(u_m-u)\|_{p(\cdot)}\to 0$ y entonces resulta que $||u_m-u||_{p(\cdot)}\to 0$, como queríamos probar. □

**Teorema 4.10.** *El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es separable.*

*Demostración.* Ver Lema 3.4.4 en [29]. □

**Teorema 4.11.** *Sea $p'(x)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1.$$

*Entonces $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ es el dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Mas aún, si $p_{\text{mín}}>1$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es reflexivo.*

*Demostración.* Ver Teoremas 3.2.13 y 3.4.7 en [29]. □

**Teorema 4.12.** *Sean $q(x)\leq p(x)$. Si $|\Omega|$ tiene medida finita, entonces*

$$\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}\leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

*donde la constante $C$ depende únicamente de $|\Omega|$, $p_{\text{mín}}$ y $p_{\text{máx}}$.*

*Demostración.* Ver el Teorema 3.3.1 y el Corolario 3.3.4 de [29]. $\square$

**Teorema 4.13** (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $p'(x)$ como en el Teorema 4.11. Entonces*

$$\int_\Omega |f|\,|g|\,dx \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}\,\|g\|_{p'(\cdot)},$$

*para todas las $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$.*

*Demostración.* Ver Lema 3.2.20 en [29]. $\square$

## 4.4. Espacios de Sobolev con exponente variable $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

Ahora estamos en condiciones de introducir los Espacios de Sobolev con exponente variable con los que trabajaremos en el Capítulo 6.

**Definición 4.13** (Espacio $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Definimos $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles $u$ tales que $u$ y la derivada distribucional $\nabla u$ están en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Es decir

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega) : u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ y } |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}.$$

En este espacio definimos la norma como

$$\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\,|\nabla u|\,\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}. \tag{4.11}$$

**Teorema 4.14.** *El espacio de Sobolev $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. En particular, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, que es un espacio de Banach por el Teorema 4.9. Por lo tanto, existen $u, g_1, \ldots, g_N \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tales que $u_n \to u$ y $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to g_j$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ para $j = 1, \ldots, N$.

Luego, si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\phi\,dx\\ &= -\int_\Omega g_j\phi\,dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ y $\frac{\partial u}{\partial x_j} = g_j$.

Concluimos así que $u_n \to u$ en $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, como queríamos demostrar. $\square$

**Observación 4.2.** Por el Teorema 4.10, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es separable y, por el Teorema 4.11, es reflexivo. Por otra parte, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega) \times (L^{p(\cdot)}(\Omega))^N$ es cerrado (la inclusión viene dada por la aplicación $u \mapsto (u, \nabla u)$). Concluimos entonces que $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es también separable y reflexivo.

Al igual que en los espacios $W^{1,p}(\Omega)$, en muchas aplicaciones es importante considerar el espacio de funciones $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ que se anulan en $\partial\Omega$. Si bien a priori esto puede no tener sentido, dado que estas funciones están definidas en casi todo punto y $|\partial\Omega| = 0$, es posible dar un sentido a este hecho de la siguiente manera

**Definición 4.14.** Llamamos $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ a la clausura de las funciones de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Notemos que, por ser cerrado en $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, que es Banach reflexivo, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ resulta del mismo modo Banach reflexivo.

**Teorema 4.15** (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega$ un dominio acotado. Supongamos que $\nabla p \in L^\infty(\Omega)$. Se tiene que para toda $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, vale la desigualdad*

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

*con una constante $C$ que depende únicamente de $N$, $\operatorname{diam}(\Omega)$ y $\|p\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$.*

*Demostración.* Ver [29], Teorema 8.2.4. □

# Capítulo 5

# Preliminares III

## 5.1. Introducción a los métodos de energía

En el Capítulo 6 se prueba la existencia de solución de la ecuación

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u),$$

minimizando un funcional de energía apropiado. Los argumentos ahí empleados permiten también obtener estimaciones para la solución.

Aquí presentamos un análisis hecho en la Sección 2.2.5 del libro de Evans [30] donde se introducen los métodos de energía para estudiar la ecuación de Poisson $-\Delta u = f$.

**Teorema 5.1** (Principio del máximo)**.** *Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es armónica en un abierto $\Omega$ acotado, es decir,*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{en } \Omega,$$

*donde $\Delta$ es el operador Laplaciano. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Demostración.* Ver el Teorema 4 de [30], Sección 2.2.3. □

Consideremos ahora el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u & = f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u & = g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

**Teorema 5.2** (Unicidad 1)**.** *Supongamos que $\Omega$ es abierto acotado. Entonces, existe a lo sumo una $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de* (5.1)*.*

*Demostración.* Supongamos que $v$ es otra solución y tomemos $w = u - v$. Utilizando el Principio del máximo (Teorema 5.1), obtenemos que $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$. Intercambiando $u$ y $v$ concluimos que $u \equiv v$ en $\overline{\Omega}$. □

Por otro lado, podemos dar una demostración alternativa con un argumento de energía.

**Teorema 5.3** (Unicidad 2)**.** *Supongamos que $\Omega$ es abierto acotado y $\partial\Omega$ es $C^1$. Entonces, existe a lo sumo una $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solución de* (5.1).

*Demostración.* Supongamos que $v$ es otra solución y tomemos $w = u - v$. Entonces, $\Delta w = 0$ en $\Omega$, y una integración por partes muestra que

$$0 = -\int_\Omega w\Delta w\, dx = \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx.$$

Es decir, $\nabla w \equiv 0$ en $\Omega$. Además, dado que $w = 0$ en $\partial\Omega$, deducimos que $w = u - v \equiv 0$ en $\Omega$. □

Demostraremos ahora que una solución al problema de valor de contorno (5.1), para la Ecuación de Poisson, puede ser caracterizado como el minimizante de una funcional apropiada. Para ello, definimos el funcional de energía

$$I(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2\, dx - \int_\Omega wf\, dx, \tag{5.2}$$

donde $w$ pertenece al conjunto admisible

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = g \text{ en } \partial\Omega\}.$$

**Teorema 5.4** (Principio de Dirichlet)**.** *Supongamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ resuelve* (5.1). *Entonces*

$$I(u) = \min_{w\in\mathcal{A}} I(w). \tag{5.3}$$

*Inversamente, si $u \in \mathcal{A}$ satisface* (5.3)*, entonces $u$ resuelve el problema de contorno* (5.1)*. En otras palabras, si $u \in \mathcal{A}$, decir que u es solución de la ecuación en derivadas parciales $-\Delta u = f$ es equivalente a decir que $u$ minimiza la energía $I(\cdot)$.*

*Demostración.* **1.** Elijamos $w \in \mathcal{A}$. Entonces el problema (5.1) implica

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)\, dx.$$

Una integración por partes conduce a

$$0 = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)\big)\, dx,$$

y allí no hay término de contorno, dado que $u - w = g - g = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto,

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 - fu\big)dx = \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla w - wf\big)dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf)\, dx.$$

En consecuencia,

$$I(u) \leq I(w) \quad (w \in \mathcal{A}).$$

Dado que $u \in \mathcal{A}$, esto conduce a (5.3).

**2.** Ahora, en cambio, supongamos que vale (5.3). Fijemos cualquier $v \in C_0^\infty(\Omega)$ y consideremos $u + tv$ para $t \in \mathbb{R}$. Dado que $u + tv \in \mathcal{A}$, para cada $t$, la función escalar

$$\Phi(t) = I(u + tv),$$

tiene un mínimo en $t = 0$. Entonces

$$\Phi'(0) = 0,$$

siempre que esta derivada exista. Pero

$$\Phi'(0) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - vf)\, dx.$$

En consecuencia,

$$0 = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - vf)\, dx.$$

Esta identidad es válida para cada función $v \in C_0^\infty(\Omega)$, y así $-\Delta u = f$ en $\Omega$. □

## 5.2. La ecuación lineal $\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$

En esta sección consideraremos ecuaciones elípticas lineales de segundo orden.

Haremos en primer lugar un análisis de un ejemplo sencillo para luego estudiar uno mas general, que será abordado con otras técnicas en los Capítulos 6 y 7.

**Ejemplo 1.** (Problema de Dirichlet homogéneo para el Laplaciano).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Buscamos una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = f \quad \text{en } \Omega \\ u & = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

donde $f \in C(\overline{\Omega})$ es una función dada. La condición de frontera $u = 0$ en $\partial\Omega$, se llama condición de Dirichlet (homogénea).

Una solución clásica del problema (5.4) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (5.4) en el sentido usual.

Una solución débil del problema (5.4) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

No es difícil probar que toda solución clásica de (5.4) es una solución débil.

Dada $f \in L^2(\Omega)$, la existencia de una única solución débil de (5.4) es una consecuencia del Teorema de representación de Riesz (Teorema 3.8).

**Ejemplo 2.** Veamos un nuevo ejemplo: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Consideremos funciones $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq N$, tales que la matriz $(a_{ij})$ es simétrica y satisface la condición de elipticidad uniforme

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ con } \alpha > 0. \tag{5.5}$$

Dada $f \in C(\overline{\Omega})$, buscamos una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) & = f \quad \text{en } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Una solución clásica de (5.6) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (5.6) en el sentido usual. Una solución débil de (5.6) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} = \int_\Omega (-f)v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

No es difícil probar (ver Sección 9.5 de [14]), que toda solución clásica de (5.6) es una solución débil. Por otra parte, para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (5.6). El resultado se obtiene aplicando el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 3.9) en el espacio $H = H_0^1(\Omega)$ con la forma bilineal continua

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

En efecto, la coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ proviene de la hipótesis de elipticidad (5.5) y de la Desigualdad de Poincaré (Teorema 4.15).

## 5.3. Soluciones viscosas de ecuaciones elípticas

En esta Tesis estudiamos una familia de ecuaciones diferenciales no lineales con estructura de divergencia. Hay ecuaciones de segundo orden no lineales, que aparecen frecuentemente en aplicaciones, llamadas ecuaciones completamente no lineales, que tienen una estructura más general.

Por ejemplo

$$\text{máx}\left(\Delta u, \frac{1}{2}u_{xx} + 2u_{yy}\right) = 0 \quad \text{en}\, \mathbb{R}^2. \tag{5.7}$$

También en $\mathbb{R}^N$

$$\det(D^2u) = f,$$

ecuación conocida como Monge Ampere.

En [22], M. G. Crandall y P. L. Lions, desarrollaron una teoría de soluciones viscosas para ecuaciones en derivadas parciales no lineales que es muy útil para demostrar la existencia de soluciones y otras propiedades de estas ecuaciones.

Para introducir la noción de solución viscosa de una ecuación elíptica de segundo orden completamente no lineal, recurrimos al texto [16] de L. A. Caffarelli y X. Cabré.

En [16], los autores motivan la idea de la definición de solución viscosa considerando primero el ejemplo de la ecuación $u_{xx} = 1$ en una dimensión ($N = 1$). Claramente, si $u_{xx} = 1$, al integrar dos veces queda un polinomio de segundo grado con coeficientes a determinar. Se puede ver que una función continua $u$ definida en un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$ tiene la forma $u(x) = a + bx + x^2/2$ para algunas constantes $a$ y $b$ (es decir, $u$ es una solución clásica de $u'' = 1$) si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) Si $p(x)$ es una parábola (es decir, un polinomio de grado 2) y $u - p$ tiene un máximo local en $x_0 \in I$, entonces $p''(x_0) \geq 1$.

2) Si $p(x)$ es una parábola y $u - p$ tiene un mínimo local en $x_0 \in I$, entonces $p''(x_0) \leq 1$.

Supongamos que $u$ es una solución clásica de $u'' = 1$ y justifiquemos la primera condición. Si $u - p$ tiene un máximo local en $x_0$, entonces $(u - p)'' \leq 0$, es decir, $u'' - p'' \leq 0$, con lo cual (siendo $u'' = 1$) se obtiene que $(1 - p''(x_0)) \leq 0$ y por lo tanto $p''(x_0) \geq 1$. Análogamente para la segunda condición. Es decir, si $u$ es una solución clásica de $u_{xx} = 1$, entonces $u$ es continua y se cumplen las condiciones 1) y 2).

Recíprocamente, si $u$ es continua y se cumplen 1) y 2), entonces $u \in C^2$ y $u_{xx} = 1$. En efecto, se puede ver que $u$ tiene que coincidir en $[x_1, x_2]$ con la parábola de la forma $a + bx + x^2/2$ que pasa por $(x_1, u(x_1))$ y $(x_2, u(x_2))$. En consecuencia, si $u$ es continua, 1) y 2) es una forma equivalente de decir que $u$ es solución clásica de la ecuación diferencial $u_{xx} = 1$.

Un segundo ejemplo es la ecuación $\Delta u = 0$ en más de una dimensión. Sea $\Omega$ un dominio en $\mathbb{R}^N$. Se puede demostrar que $u$ es una función armónica en $\Omega$ si y solo si $u$ es continua y se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) Si $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$, entonces $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$.

b) Si $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$, entonces $\Delta\varphi(x_0) \leq 0$.

Supongamos que $u$ es armónica en $\Omega$. Justifiquemos el ítem a). Si $\varphi \in C^2$ es tal que $u-\varphi$ tiene un máximo local en el punto $x_0$, entonces $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$ ¿Por qué? porque si existe un máximo local en $x_0$, la matriz Hessiana (matriz de las derivadas segundas) de $u - \varphi$ es semidefinida negativa en $x_0$, con lo cual será $\Delta u(x_0) \leq \Delta\varphi(x_0)$ y por lo tanto, por ser $\Delta u = 0$, se tiene que $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$. Análogamente con la condición b). Es decir, si una función $u$ es armónica, entonces $u$ es continua y se cumplen las condiciones a) y b). Se puede ver también que si $u$ es continua, a) y b) implican que $u$ es armónica en $\Omega$. En consecuencia, si $u$ es continua, a) y b) es una forma débil de decir que $u$ es solución de la ecuación $\Delta u = 0$ en $\Omega$. Estas condiciones se tomarán como definición de solución viscosa del Laplaciano en $\Omega$.

## Soluciones Viscosas

En forma similar se define la noción de solución viscosa para ecuaciones no lineales elípticas de segundo orden. En efecto, consideremos ecuaciones de la forma

$$F\big(D^2 u(x)\big) = f(x), \tag{5.8}$$

donde $x \in \Omega$ y $u$ y $f$ son funciones continuas definidas en un dominio acotado $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$.

Aquí $F : S \to \mathbb{R}$, donde $S$ es el espacio de matrices reales simétricas de $N \times N$. Supondremos que $F$ es uniformemente elíptico.

**Definición 5.1.** $F$ es uniformemente elíptico si existen dos constantes positivas $\lambda \leq \Lambda$ tales que para todo $M \in S$

$$\lambda\|N\| \leq F(M+N) - F(M) \leq \Lambda\|N\|, \quad N \geq 0.$$

Notamos $N \geq 0$ cuando $N$ es semidefinida positiva y

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

**Ejemplos**

**1.** Si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es una matriz simétrica y existen $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0$ tales que

$$\lambda_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

entonces

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

es una ecuación uniformemente elíptica.

**2.** La ecuación (5.7) es uniformemente elíptica.

**Definición 5.2.** Una función continua $u$ en $\Omega$ es una subsolución viscosa (respectivamente supersolución viscosa) de (5.8) en $\Omega$, si se cumple la siguiente condición: si $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ y $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0$, entonces

$$F\big(D^2\varphi(x_0)\big) \geq f(x_0)$$

(respectivamente si $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0$, entonces $F\big(D^2\varphi(x_0)\big) \leq f(x_0)$).

Decimos que $u$ es una solución viscosa de (5.8) si es una subsolución y una supersolución.

Decimos que $F\big(D^2u(x)\big) \geq$ (respectivamente $\leq, =$) $f(x)$ en el sentido viscoso en $\Omega$ cada vez que $u$ sea una subsolución viscosa (respectivamente supersolución, solución) de (5.8) en $\Omega$.

El siguiente resultado caracteriza a las subsoluciones viscosas de (5.8).

**Proposición 5.1.** *Son equivalentes*

*(1)* $u$ *es una subsolución viscosa de* (5.8) *en* $\Omega$.

*(2) Si* $x_0 \in \Omega$, $A$ *es un entorno de* $x_0$, $\varphi \in C^2(A)$,

$$u \leq \varphi \quad \textit{en } A \quad y \quad u(x_0) = \varphi(x_0),$$

*entonces*

$$F\big(D^2\varphi(x_0)\big) \geq f(x_0).$$

*(3) Si* $x_0 \in \Omega$, $A$ *es un entorno de* $x_0$, *vale el mismo resultado de (2) con* $\varphi$ *un paraboloide (un polinomio de grado 2).*

*Demostración.* Ver Proposición 2.4 de [16]. □

La definición de subsolución viscosa es satisfactoria ya que se tiene

**Proposición 5.2.** *Supongamos que* $u \in C^2(\Omega)$. *Entonces,* $u$ *es una subsolución viscosa de* (5.8) *en* $\Omega$ *si y solo si* $F\big(D^2u(x)\big) \geq f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

*Demostración.* Ver Corolario 2.6 de [16]. □

Claramente, también son válidos los resultados correspondientes para supersoluciones.

# Capítulo 6

# La familia $\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$

En este Capítulo estudiamos resultados para la familia

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u).$$

A saber, existencia de solución, Principio de comparación, unicidad de solución, acotación de soluciones, Principio del máximo, regularidad de soluciones y Desigualdad de Harnack. También discutimos las distintas nociones de solución para esta ecuación.

## 6.1. Hipótesis y consecuencias

En esta sección detallamos las hipótesis que vamos a utilizar en el estudio de la familia $\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$. $\Omega$ denotará un dominio $C^1$ acotado en $\mathbb{R}^N$. Además, haremos las siguientes suposiciones

### Hipótesis sobre $p(x)$

Suponemos que la función $p(x)$ es medible en $\Omega$, y verifica

$$1 < p_{\text{mín}} \leq p(x) \leq p_{\text{máx}} < \infty, \qquad x \in \Omega.$$

Asumimos además que $p(x)$ es Lipschitz continua en $\Omega$ y denotamos por $L$ la constante Lipschitz de $p(x)$, a saber, $\|\nabla p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L$.

### Hipótesis sobre $F$

Suponemos que $F$ es medible en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, y para todo $x \in \overline{\Omega}$, $F(x, \cdot, \cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Denotamos

$$A(x,s,\eta) = \nabla_\eta F(x,s,\eta),$$
$$B(x,s,\eta) = F_s(x,s,\eta).$$

## Hipótesis sobre A

Suponemos que $A \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y para todo $x \in \overline{\Omega}$, $A(x,\cdot,\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N)$. Más aún, existen constantes positivas $\lambda_0$ y $\Lambda_0$, y $\beta \in (0,1)$ tales que para todo $x, x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$, se satisfacen las siguientes condiciones

$$A(x,s,0) = 0, \tag{6.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,\eta)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0 |\eta|^{p(x)-2}|\xi|^2, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \Big| \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,\eta) \Big| \leq \Lambda_0 |\eta|^{p(x)-2}, \tag{6.3}$$

$$\big|A(x_1,s,\eta) - A(x_2,s,\eta)\big| \leq \Lambda_0 |x_1 - x_2|^\beta \big(|\eta|^{p(x_1)-1} + |\eta|^{p(x_2)-1}\big)\big(1 + \big|\log|\eta|\big|\big),$$
$$\big|A(x,s_1,\eta) - A(x,s_2,\eta)\big| \leq \Lambda_0 |s_1 - s_2| |\eta|^{p(x)-1}.$$

## Hipótesis sobre B

Suponemos que B es medible en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y para todo $x \in \overline{\Omega}$, $B(x,\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, y para cada $(x,s,\eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,

$$\big|B(x,s,\eta)\big| \leq \Lambda_0 \big(1 + |\eta|^{p(x)} + |s|^{p(x)}\big), \tag{6.4}$$

donde $\Lambda_0$ es como en las hipótesis de $A$.

**Observación 6.1.** A partir de (6.1) y (6.3) obtenemos

$$|A_i(x,s,\eta)| = |A_i(x,s,\eta) - A_i(x,s,0)| = \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,t\eta)\eta_j \, dt \right|$$
$$\leq \bar{\alpha}(p_{\text{mín}})\Lambda_0 |\eta|^{p(x)-1},$$

entonces

$$|A(x,s,\eta)| \leq \bar{\alpha}(p_{\text{mín}}) N \Lambda_0 |\eta|^{p(x)-1}. \tag{6.5}$$

A partir de (6.1) y (6.2) tenemos

$$A(x,s,\eta)\cdot\eta = (A(x,s,\eta)-A(x,s,0))\cdot\eta = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,s,t\eta)\eta_j\eta_i\,dt,$$

de manera tal que

$$A(x,s,\eta)\cdot\eta \geq \alpha(p_{\text{máx}})\lambda_0|\eta|^{p(x)}. \tag{6.6}$$

## 6.2. Existencia de solución

En esta Sección presentamos un resultado de existencia de solución de la ecuación

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u).$$

Obtendremos la solución minimizando un funcional de energía apropiado.

Necesitaremos usar el siguiente resultado preliminar.

**Lema 6.1** (Convexidad de $F$)**.** *Dadas F y A como en la Sección 6.1, se tiene*

$$F(x,s,\eta)-F(x,s,\bar\eta) \geq A(x,s,\bar\eta)\cdot(\eta-\bar\eta), \qquad \forall x\in\Omega, s\in\mathbb{R}, \eta,\bar\eta\in\ \mathbb{R}^N. \tag{6.7}$$

*Demostración.* Fijamos $x\in\Omega$, $s\in\mathbb{R}$, y consideramos la función $G:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ definida por

$$G(\eta) = F(x,s,\eta).$$

Sabemos que

$$G\in C^1(\mathbb{R}^N)\cap C^2(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}).$$

Veamos que $\forall\eta,\bar\eta\in\mathbb{R}^N$, $\eta\neq\bar\eta$,

$$G(\eta)\geq G(\bar\eta)+\nabla G(\bar\eta)\cdot(\eta-\bar\eta). \tag{6.8}$$

Como $\nabla G(\eta) = A(x,s,\eta)$ obtendremos el resultado deseado.

Observemos que (6.2) implica que

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 G(\eta)}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\xi_i\xi_j \geq 0\ \forall\eta\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N.$$

Fijados $\eta$ y $\bar\eta$, con $\bar\eta\neq\eta$, sea $g(t) = G(t\eta+(1-t)\bar\eta)$, para $t\in[0,1]$.

**Caso 1.**

Supongamos que $\forall t\in[0,1],\ t\eta+(1-t)\bar\eta\neq 0$. Entonces,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial\eta_i}((t\eta+(1-t)\bar\eta)(\eta-\bar\eta)_i,$$

$$g''(t)=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 G}{\partial\eta_i\partial\eta_j}((t\eta+(1-t)\bar{\eta})(\eta-\bar{\eta})_i(\eta-\bar{\eta})_j\geq 0,$$

$\forall t\in[0,1]$. Entonces $\exists\xi\in[0,1]$ tal que

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(\xi)}{2}\geq g(0)+g'(0),$$

lo cual implica que se verifica (6.8). Es decir, se obtiene (6.7).

**Caso 2.**

Supongamos que existe $t_0\in[0,1]$ para el cual

$$t_0\eta+(1-t_0)\bar{\eta}=0.$$

Razonando como en el Caso 1, obtenemos que

$$g''(t)\geq 0\,\forall t\in[0,t_0)\cup(t_0,1].$$

Por lo tanto, $g'(t)$ es creciente en $[0,t_0)\cup(t_0,1]$. Entonces, por continuidad de $g'$, resulta $g'$ creciente en [0,1].

Como en el Caso 1, obtenemos

$$g(1)\geq g(\tau)+g'(\tau)(1-\tau)\quad \text{para } \tau\in(t_0,1],$$

y por continuidad de $g'$,

$$g(1)\geq g(t_0)+g'(t_0)(t-t_0). \tag{6.9}$$

Análogamente, $g(\tau)\geq g(0)+g'(0)\tau$ para $\tau\in[0,t_0]$, y por continuidad de $g'$,

$$g(t_0)\geq g(0)+g'(0)t_0. \tag{6.10}$$

Combinando (6.9) y (6.10), y usando que $g'$ es creciente, obtenemos

$$\begin{aligned}g(1)&\geq g(t_0)+g'(t_0)(t-t_0)\\&\geq g(0)+g'(0)t_0+g'(t_0)(t-t_0)\\&\geq g(0)+g'(0)t_0+g'(0)(1-t_0)\\&=g(0)+g'(0),\end{aligned}$$

lo cual implica nuevamente (6.7) y concluye la demostración. □

El siguiente teorema es una versión simplificada de la Proposición 3.1 de [48].

**Teorema 6.1** (Existencia de minimizante)**.** *Sean $p, F, A, B$ como en la Sección 6.1, y sea $\Omega' \subset \Omega$ un dominio $C^1$. Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega')$. Supongamos que existen $\mu, c_1 \in \mathbb{R}_+$, $g \in L^1(\Omega)$ tales que, $\forall s \in \mathbb{R}$, y $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$,*

$$F(x,s,\eta) \geq \mu|\eta|^{p(x)} - c_1|s| - g(x) \quad \text{en}\, \Omega, \tag{6.11}$$

$$F(x,s,\eta) \leq \mu^{-1}|\eta|^{p(x)} + c_1|s| + g(x) \quad \text{en}\, \Omega. \tag{6.12}$$

*Entonces, existe $v$ un minimizante en $u + W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega')$ de*

$$J_{\Omega'}(w) = \int_{\Omega'} F(x,w,\nabla w)dx. \tag{6.13}$$

*Además, $\|v\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')} \leq C$, para una constante $C$ dependiendo solamente de $\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}$, $\|g\|_{L^1(\Omega')}$, $|\Omega'|$, $\operatorname{diam}(\Omega')$, $N$, $p_{\text{mín}}$, $p_{\text{máx}}$, $L$, $\mu$, $c_1$.*

*Demostración.* Veamos que existe un minimizante de (6.13) en

$$\mathcal{K} = \{w \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega')/w - u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega')\}.$$

Sea

$$-\infty \leq I = \inf_{w\in\mathcal{K}} J_{\Omega'}(w) \leq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)dx. \tag{6.14}$$

Observemos que, por (6.11) y (6.12),

$$\Big|\int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)dx\Big| \leq \mu^{-1}\int_{\Omega'} |\nabla u|^{p(x)}dx + c_1\int_{\Omega'} |u|dx + \int_{\Omega'} |g(x)|dx < +\infty, \tag{6.15}$$

pues $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega')$, $g \in L^1(\Omega)$.

Aquí usamos también que, por el Teorema 4.12,

$$\|u\|_{L^1(\Omega')} \leq C\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}, \tag{6.16}$$

donde $C$ depende de $|\Omega'|$, $p_{\text{mín}}$, $p_{\text{máx}}$. Sea $\{v_n\} \subset \mathcal{K}$ una sucesión minimizante, es decir, tal que

$$I = \lim_{n\to\infty} J_{\Omega'}(v_n). \tag{6.17}$$

Por (6.14) y (6.17) se tiene que

$$J_{\Omega'}(v_n) \leq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)dx + 1, \tag{6.18}$$

para $n$ suficientemente grande. Entonces, por (6.11),

$$\mu\int_{\Omega'} |\nabla v_n|^{p(x)}dx \leq \int_{\Omega'} F(x,u,\nabla u)dx + 1 + \int_{\Omega'} g(x)dx + c_1\int_{\Omega'} |v_n|dx. \tag{6.19}$$

Veamos que existe una constante tal que $\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}\,dx\le C$. Por lo tanto, podemos suponer que $\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}\,dx\ge 1$. Por la Desigualdad de Poincaré (Teorema 4.15),

$$\|v_n-u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}\le C_{\Omega'}\|\nabla(v_n-u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}. \tag{6.20}$$

Entonces, por (6.20), el Teorema 4.12 y la Proposición 4.2, llegamos a

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{L^1(\Omega')}\le C\|v_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}&\le C\Big[\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}+\|\nabla v_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}\Big] \qquad (6.21)\\ &\le C\Big[\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}+\Big(\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}dx\Big)^{1/p_{\text{mín}}}\Big],\end{aligned}$$

con $C$ dependiendo de $p_{\text{mín}},p_{\text{máx}},N,L,|\Omega'|,\mathrm{diam}(\Omega')$.

Por lo tanto, para $\varepsilon>0$, por la Desigualdad de Young (Teorema 3.10),

$$\|v_n\|_{L^1(\Omega')}\le\bar C\left[1+\Big(\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}dx\Big)^{1/p_{\text{mín}}}\right]\le\widetilde C+\varepsilon\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}dx, \tag{6.22}$$

donde $\bar C$ depende de $p_{min},p_{max},N,L,|\Omega'|,\mathrm{diam}(\Omega')$ y $\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}$ y $\widetilde C$ depende de las mismas constantes y también de $\varepsilon$.

De (6.19), (6.22), (6.15) y (6.16), tomando $\varepsilon=\frac{\mu}{2c_1}$, obtenemos

$$\int_{\Omega'}|\nabla v_n|^{p(x)}\,dx\le\widehat C, \tag{6.23}$$

con $\widehat C$ dependiendo de $p_{min},p_{max},N,L,|\Omega'|,\mathrm{diam}(\Omega'),\|u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')},\mu,c_1$ y $\|g\|_{L^1(\Omega')}$.

Luego, las expresiones (6.22), (6.23) y (6.11) implican que $I>-\infty$.

De las estimaciones (6.23) y (6.21) obtenemos que

$$\|v_n\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}\le\widehat{\widehat C}, \tag{6.24}$$

donde $\widehat{\widehat C}$ depende de las mismas constantes que $\widehat C$. Por los Teoremas 4.4, 3.5, 4.8, 4.12, y la Observación 4.2, existe una subsucesión que seguimos denotando $\{v_n\}$ y $v\in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, tales que

$$v_n\rightharpoonup v\quad\text{débilmente en}\quad W^{1,p(\cdot)}(\Omega'),$$
$$v_n\to v\quad\text{en}\quad L^1(\Omega'),$$

y en casi todo punto de $\Omega$, con $v$ satisfaciendo también la estimación (6.24).

Además, como $\mathcal{K}$ es convexo y cerrado, $v\in\mathcal{K}$ por el Teorema 3.6. Por el Teorema de Egorov (Teorema 3.2) $\forall\varepsilon>0,\exists\Omega_\varepsilon\subset\Omega'$ , tal que $|\Omega'\setminus\Omega_\varepsilon|<\varepsilon$ y $v_n\to v$ uniformemente en $\Omega_\varepsilon$.

Por otra parte, dado $K>0$, como $v\in L^1(\Omega')$ y $|\nabla v|\in L^1(\Omega')$, por el Teorema 4.12, por la Desigualdad de Chebyshev (Teorema 3.1), denotando $\Omega_K=\{x\in\Omega'\,/\,|v|+|\nabla v|\le K\}$, para $K > 0$, se tiene que $|\Omega' \setminus \Omega_K| \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si llamamos $\Omega_{\varepsilon,K} = \Omega_\varepsilon \cap \Omega_K$. Entonces, $|\Omega' \setminus \Omega_{\varepsilon,K}| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $K \to \infty$. De (6.11) obtenemos

$$F(x, v_n, \nabla v_n) \geq -c_1|v_n| - g(x).$$

Entonces

$$\int_{\Omega'} F(x, v_n, \nabla v_n)dx = \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx + \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx$$

$$\geq -c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v_n|dx - \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g(x)dx + \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx.$$

Por lo tanto, usando que $v_n \to v \in L^1(\Omega')$, obtenemos

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} F(x, v_n, \nabla v_n)dx = \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega'} F(x, v_n, \nabla v_n)dx$$

$$\geq \limsup_{n\to\infty} \Big( - c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v_n|dx - \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g(x)dx + \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big( - c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v_n|dx\Big) - \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g(x)dx + \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx$$

$$= -c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v|dx - \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g(x)dx + \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)dx.$$

En consecuencia,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)\, dx \leq I + c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v|dx + \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g\, dx. \tag{6.25}$$

Veamos que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v, \nabla v)dx \leq I + c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v|dx + \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g\, dx. \tag{6.26}$$

En efecto,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v_n, \nabla v_n)\, dx - \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v, \nabla v)\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} \Big[F(x, v_n, \nabla v_n) - F(x, v_n, \nabla v)\Big]\, dx + \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} \Big[F(x, v_n, \nabla v) - F(x, v, \nabla v)\Big]\, dx$$

$$= A_n + B_n.$$

Por un lado $B_n \to 0$ por Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue (Teorema 3.4), ya que $F(x,v_n,\nabla v) - F(x,v,\nabla v) \to 0$ uniformemente en $\Omega_{\varepsilon,K}$, y está uniformemente acotado en $\Omega_{\varepsilon,K}$.

Aquí usamos que $F_s(x,s,\eta) = B(x,s,\eta)$ cumple que

$$|B(x,s,\eta)| \leq C_K \quad si \quad x \in \Omega', \quad |s| \leq 2K \quad y \quad |\eta| \leq K,$$

por (6.4). Por el Lema 6.1 tenemos que

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x,v_n,\nabla v_n)dx - \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} F(x,v_n,\nabla v)dx \\ &\geq \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} A(x,v_n,\nabla v)\cdot(\nabla v_n - \nabla v)dx \\ &= \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} \Big(A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\Big)\cdot(\nabla v_n - \nabla v)dx \\ &+ \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} A(x,v,\nabla v)\cdot(\nabla v_n - \nabla v)dx = (I)_n + (II)_n. \end{aligned}$$

Usando la Desigualdad de Hölder (Teorema 4.13) y el Teorema 4.12 y recordando la estimación (6.24), tenemos que

$$\Big|\int_{\Omega_{\varepsilon,K}} \Big(A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\Big)\cdot(\nabla v_n - \nabla v)dx\Big|$$

$$\leq \int_{\Omega'} \Big|\Big(A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\Big)\chi_{\Omega_{\varepsilon,K}}\Big||\nabla v_n - \nabla v|dx$$

$$\leq 2\Bigg\|\Bigg|\Big(A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\Big)\chi_{\Omega_{\varepsilon,K}}\Bigg|\Bigg\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} \| \nabla v_n - \nabla v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

$$\leq 2C\Big\|\,\Big|A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\Big|\,\chi_{\Omega_{\varepsilon,K}}\Big\|_{L^{p_{max}}(\Omega')}\Big(\|\nabla v_n\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')} + \|\nabla v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega')}\Big)$$

$$\leq \widehat{\widehat{C}} \sup_{\Omega_{\varepsilon,K}} \big|A(x,v_n,\nabla v) - A(x,v,\nabla v)\big|.$$

Como $A(x,v_n,\nabla v) \to A(x,v,\nabla v)$ uniformemente en $\Omega_{\varepsilon,K}$ por la continuidad de $A$, deducimos que $|(I)_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además $(II)_n$ también tiende a $0$. En efecto,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,K}} A(x,v,\nabla v)\cdot(\nabla v_n - \nabla v)\,dx = \int_{\Omega'} A(x,v,\nabla v)\chi_{\Omega_{\varepsilon,K}}\cdot(\nabla v_n - \nabla v)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pues
$$|A(x, v, \nabla v)\chi_{\Omega_{\varepsilon,K}}| \in L^{\infty}(\Omega') \subset L^{p'(\cdot)}(\Omega'),$$
y $\nabla v_n \rightharpoonup \nabla v$ débilmente en $L^{p(\cdot)}(\Omega_{\varepsilon,K})$. Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon,K}} \big(F(x, v_n, \nabla v_n) - F(x, v, \nabla v)\big) dx \geq 0. \tag{6.27}$$

De (6.25) y (6.27) deducimos (6.26). Además, por (6.12),

$$\int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} F(x, v, \nabla v)dx \leq \mu^{-1} \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |\nabla v|^{p(x)} dx + c_1 \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} |v|dx + \int_{\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K}} g(x)dx. \tag{6.28}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ y $K \to \infty$, obtenemos de (6.26) y (6.28)

$$J_{\Omega'}(v) = \int_{\Omega'} F(x, v, \nabla v)\, dx \leq I.$$

Aquí hemos usado que
$$|\Omega' \setminus \Omega_{\varepsilon,K}| \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\, K\to+\infty]{} 0,$$
la Proposición 4.2 y que

$$\|\nabla v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K})} \leq C\|\nabla v\|_{L^{p_{max}}(\Omega'\setminus\Omega_{\varepsilon,K})},$$

por el Teorema 4.12. Finalmente, como $v \in \mathcal{K}$, resulta $J_{\Omega'}(v) = I$.

Es decir, $v$ es un minimizante de $J_{\Omega'}(w)$ en $\mathcal{K}$. □

Como consecuencia del Teorema de existencia de minimizante (Teorema 6.1) obtenemos

**Teorema 6.2** (Existencia de solución)**.** *Sean $p$, $F$, $A$, $B$, $\Omega'$ y $u$ como en el Teorema 6.1. Entonces existe $v \in u + W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega')$ tal que*

$$\mathrm{div} A(x, v, \nabla v) = B(x, v, \nabla v) \quad \textit{en} \quad \Omega'.$$

*Demostración.* Sea $v \in \mathcal{K}$, donde

$$\mathcal{K} = \{w \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega')/w - u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega')\},$$

un minimizante de
$$J_{\Omega'}(w) = \int_{\Omega'} F(x, w, \nabla w)\, dx.$$

Veamos que $v$ satisface

$$\mathrm{div} A(x, v, \nabla v) = B(x, v, \nabla v) \quad \text{en}\, \Omega',$$

donde

$$A(x,s,\eta) = \nabla_\eta F(x,s,\eta),$$
$$B(x,s,\eta) = F_s(x,s,\eta).$$

Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ y $t \in \mathbb{R}$, se cumple que $v + t\,\varphi \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, si definimos $h(t) = J_{\Omega'}(v + t\,\varphi)$, se cumple que $h(0) \le h(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Veamos que

$$h'(0) = \int_{\Omega'} A(x,v,\nabla v)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_{\Omega'} B(x,v,\nabla v)\varphi\,dx.$$

Entonces, se tendrá que $h'(0) = 0$, de donde se deduce el resultado deseado. En efecto, tomemos $t_n \to 0$ y consideremos, para $|t_n| \le 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{h(t_n)-h(0)}{t_n} = \int_{\Omega'} \frac{(F(x,v+t_n\varphi,\nabla v+t_n\nabla\varphi) - F(x,v,\nabla v))}{t_n}dx\\
&= \int_{\Omega'} \frac{F(x,v+t_n\varphi,\nabla v+t_n\nabla\varphi) - F(x,v,\nabla v+t_n\nabla\varphi)}{t_n}dx\\
&+ \int_{\Omega'} \frac{F(x,v,\nabla v+t_n\nabla\varphi) - F(x,v,\nabla v)}{t_n}dx\\
&= \int_{\Omega'} G_n(x)\,dx + \int_{\Omega'} H_n(x)\,dx = B_n + A_n.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Existen $|s_n| \le |t_n| \le 1$ tales que

$$G_n(x) = \frac{F(x,v+t_n\varphi,\nabla v+t_n\nabla\varphi) - F(x,v,\nabla v+t_n\nabla\varphi)}{t_n}$$

$$= F_s(x,v+s_n\varphi,\nabla v+t_n\nabla\varphi)\varphi \underset{n\to\infty}{\to} B(x,v,\nabla v)\varphi,$$

puntualmente para $x \in \Omega'$. Además, usando la hipótesis (6.4) y la desigualdad (3.2), obtenemos

$$\big|G_n(x)\big| = \big|B\big(x,v+s_n\varphi,\nabla v+t_n\nabla\varphi\big)\varphi\big| \le$$

$$\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega')}\Lambda_0\big(1 + |v+s_n\varphi|^{p(x)} + |\nabla v+t_n\nabla\varphi|^{p(x)}\big)$$

$$\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega')}\Lambda_0\left(1 + 2^{p_{max}}\left(|v|^{p(x)} + |\varphi|^{p(x)}\right) + 2^{p_{max}}\left(|\nabla v|^{p(x)} + |\nabla\varphi|^{p(x)}\right)\right) = \widetilde{g}(x),$$

donde $\widetilde{g}(x) \in L^1(\Omega')$. Aplicando el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue (Teorema 3.4), deducimos que

$$B_n = \int_{\Omega'} G_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\Omega'} B(x,v,\nabla v)\varphi\,dx. \tag{6.30}$$

Por otra parte, existen $|\bar{s}_n| \leq |t_n| \leq 1$ tales que

$$H_n(x) = \frac{F(x, v, \nabla v + t_n \nabla\varphi) - F(x, v, \nabla v)}{t_n}$$

$$= \big(\nabla_\eta F(x, v, \nabla v + \bar{s}_n \nabla\varphi)\big) \cdot \nabla\varphi \to A(x, v, \nabla v) \cdot \nabla\varphi,$$

puntualmente para $x \in \Omega'$. Además, usando (6.5) y la desigualdad (3.2), obtenemos que

$$|H_n(x)| = \big|A(x, v, \nabla v + \bar{s}_n \nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi|$$

$$\leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega')} C |\nabla v + \bar{s}_n \nabla\varphi|^{p(x)-1}$$

$$\leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega')} C 2^{p_{max}} \big(|\nabla v|^{p(x)-1} + |\nabla\varphi|^{p(x)-1}\big) = \widetilde{h}(x),$$

donde $\widetilde{h}(x) \in L^1(\Omega')$. Aplicando nuevamente el Teorema de convergencia mayorada de Lebesgue, resulta

$$A_n = \int_{\Omega'} H_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega'} A(x, v, \nabla v) \cdot \nabla\varphi. \tag{6.31}$$

Finalmente, de (6.29), (6.30) y (6.31), se deduce el resultado deseado. □

## 6.3. Principio de comparación y unicidad de solución

En esta Sección presentamos un Principio de comparación y un resultado de unicidad. Comencemos dando algunas definiciones preliminares.

**Definición 6.1.** Sean $u, v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Decimos que $v \geq u$ en $\partial\Omega$, si $(u - v)^+ = \max(u - v, 0) \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

**Definición 6.2.** Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Decimos que

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) \geq B(x, u, \nabla u) \quad \text{en } \Omega,$$

si se cumple que

$$-\int_\Omega A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi\, dx \geq \int_\Omega B(x, u, \nabla u)\varphi\, dx,$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\varphi \geq 0$. Análogamente para

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) \leq B(x, u, \nabla u) \quad \text{en}\, \Omega.$$

El siguiente resultado es una versión simplificada de la Proposición 3.4 de [48].

**Proposición 6.1** (Principio de comparación)**.** *Sean $p$, $A$ y $B$ como en la Sección 6.1. Supongamos además que*

$$A(x,s,\eta) = A(x,\eta), \quad B(x,s,\eta) = B(x).$$

*Sean $u, v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tales que*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}A(x,\nabla u) &\geq B(x) \text{ en } \Omega, \\ \mathrm{div}A(x,\nabla v) &\leq B(x) \text{ en } \Omega, \\ u &\leq v \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

*Entonces $u \leq v$ en $\Omega$.*

*Demostración.* Dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se cumple que

$$-\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi \geq \int_\Omega B(x)\varphi.$$

Como $v \geq u$ en $\partial\Omega$, se tiene que

$$(u-v)^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Sean $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tales que

$$\varphi_j \to (u-v)^+ = w \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega),$$

con $\varphi_j \geq 0$. Entonces

$$-\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi_j \geq \int_\Omega B(x)\varphi_j. \tag{6.32}$$

Observemos por (6.5) que se tiene $|A(x,\nabla u)| \in L^{p'(x)}$. En efecto, esta afirmación se deduce de

$$\int_\Omega |A(x,\nabla u)|^{p'(x)} \leq C\int_\Omega |\nabla u|^{(p(x)-1)p'(x)} = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}.$$

Aquí hemos usado que

$$\frac{1}{p'(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1 \implies \frac{1}{p'(x)} = 1 - \frac{1}{p(x)} = \frac{p(x)-1}{p(x)} \implies p(x) = p'(x)(p(x)-1).$$

Por la Desigualdad de Hölder (Teorema 4.13),

$$\Big|\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi_j - \int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla w\Big|$$

$$= \Big|\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot(\nabla\varphi_j - \nabla w)\Big| \leq \int_\Omega |A(x,\nabla u)|\,|\nabla\varphi_j - \nabla w|$$

$$\leq 2\|A(x,\nabla u)\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}\|\nabla\varphi_j-\nabla w\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Es decir

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi_j \underset{j\to\infty}{\to} \int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla w.$$

Como supusimos que $B(x,u,\nabla u)=B(x)$, la hipótesis (6.4) toma la forma

$$|B(x)|\leq\Lambda_0,$$

en $\Omega$. Por lo tanto

$$B\in L^\infty(\Omega)\subset L^{p'(\cdot)}(\Omega).$$

Entonces, aplicando la Desigualdad de Hölder nuevamente,

$$\Big|\int_\Omega B(x)\varphi_j-\int_\Omega B(x)w\Big|=\Big|\int_\Omega B(x)(\varphi_j-w)\Big|\leq 2\|B\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}\|\nabla\varphi_j-w\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Es decir

$$\int_\Omega B(x)\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_\Omega B(x)w.$$

Entonces, pasando al límite en (6.32), obtenemos

$$-\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla w\,dx\geq\int_\Omega B(x)w\,dx. \tag{6.33}$$

Además, como para todo $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi\geq 0$, se cumple que

$$-\int_\Omega A(x,\nabla v)\cdot\nabla\varphi\,dx\leq\int_\Omega B(x)\varphi\,dx,$$

el mismo razonamiento anterior implica que

$$-\int_\Omega A(x,\nabla v)\cdot\nabla w\,dx\leq\int_\Omega B(x)w\,dx. \tag{6.34}$$

Juntando (6.33) y (6.34) y denotando

$$\Omega^+=\{x\in\Omega/u-v>0\},$$

obtenemos

$$0\geq\int_\Omega\big(A(x,\nabla u)-A(x,\nabla v)\big)\cdot\nabla w=\int_{\Omega^+}\big(A(x,\nabla u)-A(x,\nabla v)\big)\cdot\nabla(u-v). \tag{6.35}$$

Para $0\leq\tau\leq 1$ llamemos $u^\tau=v+\tau(u-v)$ y para cada $x\in\Omega$ fijo denotemos

$$f(\tau)=A(x,\nabla u^\tau)\cdot\nabla(u-v)=\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla u^\tau)(u-v)_{x_i}.$$

Entonces,

$$f'(\tau) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x, \nabla u^\tau)(u-v)_{x_i}(u-v)_{x_j}.$$

Como

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(\tau)\, d\tau,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^+} \big(A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v)\big)\cdot\nabla(u-v)\, dx = \\
&= \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|\geq|\nabla u|\}} \big(A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v)\big)\cdot\nabla(u-v) dx \\
&+ \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|<|\nabla u|\}} \big(A(x,\nabla u) - A(x,\nabla v)\big)\cdot\nabla(u-v) dx \\
&= \int_0^1 \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|\geq|\nabla u|\}} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,\nabla u^\tau)(u-v)_{x_i}(u-v)_{x_j}\, dx\, d\tau \\
&+ \int_0^1 \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|<|\nabla u|\}} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x,\nabla u^{(1-\tau)})(u-v)_{x_i}(u-v)_{x_j}\, dx\, d\tau \\
&\geq \lambda_0 \int_0^{\frac14} \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|\geq|\nabla u|\}} |\nabla u^\tau|^{p(x)-2}|\nabla(u-v)|^2\, dx \\
&+\lambda_0 \int_0^{\frac14} \int_{\Omega^+\cap\{|\nabla v|<|\nabla u|\}} |\nabla u^{(1-\tau)}|^{p(x)-2}|\nabla(u-v)|^2\, dx = (I) + (II),
\end{aligned}$$

la última desigualdad es debida a la hipótesis (6.2). Para acotar $(I)$ usamos el Lema 3.2 y obtenemos para $0 \leq \tau \leq \frac14$, como $|\nabla v| \geq |\nabla u|$,

$$|\nabla u^\tau| = |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)| \geq \frac14 |\nabla u - \nabla v|.$$

Además,

$$|\nabla u^\tau| \leq |\nabla v| + \tau|\nabla u - \nabla v| \leq 2(|\nabla u| + |\nabla v|).$$

Entonces, si $p(x) \geq 2$,

$$|\nabla u^\tau|^{p(x)-2} \geq \frac{1}{4^{p_{max}-2}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)-2}.$$

Si $p(x) < 2$,

$$|\nabla u^\tau|^{p(x)-2} \geq 2^{p_{min}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}.$$

Por lo tanto

$$(I) \geq \widetilde{\alpha}\lambda_0 \int_{\Omega^+\cap\{p(x)\geq 2\}\cap\{|\nabla v|\geq|\nabla u|\}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)}\, dx +$$

$$+\widetilde{\alpha}\lambda_0 \int_{\Omega^+\cap\{p(x)<2\}\cap\{|\nabla v|\geq|\nabla u|\}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}|\nabla u - \nabla v|^2\, dx,$$

para $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(p_{min}, p_{max})$.

Para acotar $(II)$ observemos que

$$\nabla u^{(1-\tau)} = \nabla v + (1-\tau)(\nabla u - \nabla v) = \nabla u + \tau(\nabla v - \nabla u),$$

con $0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$ y $|\nabla u| > |\nabla v|$. En forma análoga, resulta

$$(II) \geq \widetilde{\alpha}\lambda_0 \int_{\Omega^+\cap\{p(x)\geq 2\}\cap\{|\nabla v|<|\nabla u|\}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)}\, dx +$$

$$+\widetilde{\alpha}\lambda_0 \int_{\Omega^+\cap\{p(x)<2\}\cap\{|\nabla v|<|\nabla u|\}} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-2}|\nabla u - \nabla v|^2\, dx.$$

Recordando (6.35), concluimos que

$$0 \geq \widetilde{\alpha}\lambda_0\Big(\int_{\Omega^+\cap\{p(x)\geq 2\}} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega^+\cap\{p(x)<2\}} \Big(|\nabla u| + |\nabla v|\Big)^{p(x)-2}|\nabla u - \nabla v|^2\, dx\Big).$$

Finalmente, recordando la definición de $\Omega^+$, vemos que

$$0 \geq \int_{\Omega\cap\{p(x)\geq 2\}} |\nabla(u-v)^+|^{p(x)} dx + \int_{\Omega\cap\{p(x)<2\}} \Big(|\nabla u| + |\nabla v|\Big)^{p(x)-2}|\nabla(u-v)^+|^2\, dx,$$

lo cual implica que $\nabla(u-v)^+ = 0$ en $\Omega$. Como $(u-v)^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, la Desigualdad de Poincaré (Teorema 4.15) da $(u-v)^+ = 0$ en $\Omega$. Es decir que $u \leq v$ en $\Omega$. $\square$

Como consecuencia inmediata del Principio de comparación obtenemos el siguiente resultado de unicidad.

**Corolario 6.1** (Unicidad)**.** *Sean $p$, $A$ y $B$ como en la Proposición 6.1. Sea $\varphi \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ y sean $u_1, u_2 \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tales que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} A(x, \nabla u_i) & = B(x) \quad \textit{en} \quad \Omega, \\ u_i & = \varphi \qquad \textit{en} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

*para i=1,2. Entonces $u_1 = u_2$ en $\Omega$.*

## 6.4. Acotación de soluciones y Principio del máximo

El siguiente resultado dice que las soluciones de la ecuación con dato de borde acotado, son acotadas. Fue obtenido en la Proposición 3.5 de [48] bajo condiciones más generales.

**Proposición 6.2.** *Supongamos las mismas hipótesis sobre $p$, $F$, $A$ y $B$ que en el Teorema 6.1, y sea $\Omega' \subset \Omega$ un dominio $C^1$. Supongamos además que*

$$A(x, s, \eta) = A(x, \eta), \qquad B(x, s, \eta) = B(x).$$

*Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} \mathrm{div}A(x, \nabla u) & = B(x) \quad \textit{en}\, \Omega', \\ |u| & \leq M \quad \textit{en}\, \partial\Omega', \end{cases}$$

*para una constante positiva $M$. Entonces, existe $C$ tal que $|u| \leq C$ en $\Omega'$, donde $C$ depende solo de $M$, $|\Omega'|$, $\mathrm{diam}(\Omega')$, $N$, $\lambda_0$, $\Lambda_0$, $L$, $p_{min}$, $p_{max}$, $\|g\|_{L^1(\Omega')}$, $\mu$, $c_1$.*

*Demostración.* Sea $v^+$ la solución de

$$\begin{cases} \mathrm{div}A(x, \nabla v^+) & = B(x) \quad \text{en}\, \Omega' \\ v^+ & = M \quad \text{en}\, \partial\Omega', \end{cases}$$

que existe y es única por los Teoremas 6.1 y 6.2 y el Corolario 6.1. Entonces, por la estimación del Teorema 6.1, se tiene que $\|v^+\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega')}$ depende sólo de $M$, $|\Omega'|$, $\mathrm{diam}(\Omega')$, $N$ y las constantes en las condiciones estructurales.

Recordando (6.4), (6.5) y (6.6), deducimos que estamos bajo las hipótesis del Teorema 4.1 en [33] y por lo tanto $v^+ \in L^\infty(\Omega)$, con una cota que depende solo de $M$, $|\Omega'|$, $\mathrm{diam}(\Omega')$, $N$ y las constantes en las condiciones estructurales.

Por el Principio de comparación (Proposición 6.1), tenemos $u \leq v^+$ en $\Omega'$, de donde sale la cota superior.

Procediendo en forma análoga con $v^-$, la solución de

$$\begin{cases} \mathrm{div}A(x, \nabla v^-) & = B(x) \quad \text{en}\, \Omega' \\ v^- & = -M \quad \text{en}\, \partial\Omega', \end{cases}$$

obtenemos la cota inferior y esto concluye la demostración. □

También se cumple un Principio del máximo para esta familia de ecuaciones, que se deduce del Principio de comparación (Proposición 6.1).

**Proposición 6.3** (Principio del máximo)**.** *Sean $p$ y $A$ como en la Sección 6.1. Supongamos además que*

$$A(x, s, \eta) = A(x, \eta).$$

*Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} A(x, \nabla u) = 0 & \text{en } \Omega \\ -M_1 \leq u \leq M_2 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

*para $M_1, M_2 \geq 0$. Entonces, $-M_1 \leq u \leq M_2$ en $\Omega$.*

*Demostración.* De (6.1) se deduce que si $v^+ = M_2$ y $v^- = -M_1$, entonces $\operatorname{div} A(x, \nabla v^+) = 0$ y $\operatorname{div} A(x, \nabla v^-) = 0$ en $\Omega$. Aplicando el Principio de comparación (Proposición 6.1), obtenemos

$$-M_1 = v^- \leq u \leq v^+ = M_2 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

□

## 6.5. Regularidad de soluciones

En [32], X. Fan estudió la ecuación

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u),$$

bajo las hipótesis sobre $p(x)$, $A$ y $B$ que consideramos en la Sección 6.1. Allí obtuvo diferentes resultados de regularidad para esta ecuación, considerando distintas condiciones de contorno. En particular obtuvo (ver [32], Teorema 1.1) el siguiente resultado de regularidad local.

**Teorema 6.3.** *Sean $p$, $A$ y $B$ como en la Sección 6.1. Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución debil de*

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

*Entonces, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, donde el exponente $\alpha$ de Hölder depende sólo de $N$, $p_{min}$, $p_{max}$, $L$, $\lambda_0$, $\Lambda_0$, $\beta$ y $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Además, para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$,*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C,$$

*donde $C$ depende sólo de $N$, $p_{min}$, $p_{max}$, $L$, $\lambda_0$, $\Lambda_0$, $\beta$, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.*

**Observación 6.2.** El Teorema 6.3 se aplica a soluciones débiles de $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ que son acotadas. La Proposición 6.2 da condiciones bajo las cuales las soluciones son acotadas.

Por otra parte, si $p_{min} > N$, por el Teorema de Rellich Kondrachov (Teorema 4.8) y el Teorema 4.12 obtenemos que si $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, entonces $u$ es acotada.

## 6.6. Desigualdad de Harnack

Recordemos que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto, $u$ es no negativa y armónica en $\Omega$ y $\Omega' \subset\subset \Omega$ es abierto conexo, entonces se cumple que

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u,$$

donde $C$ es una constante positiva que depende solo de $N$, $\Omega$ y $\Omega'$. Este resultado se conoce como Desigualdad de Harnack (ver Teorema 11 en [30], Sección 2.2).

En [68] (Teorema 1.1), N. Wolanski probó una Desigualdad de Harnack que se aplica a la familia de ecuaciones que estudiamos en esta Tesis. Este resultado tiene numerosas aplicaciones. Ver por ejemplo [47] y [48] donde se aplica para obtener estimaciones en problemas de minimización, y en [36] y [37] donde se aplica para obtener resultados de regularidad para un problema de frontera libre.

La Desigualdad de Harnack probada en [68] es la siguiente

**Teorema 6.4** (Desigualdad de Harnack). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Sean $p$, $A$ y $B$ como en la Sección 6.1. Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ una solución no negativa de*

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u) \quad \textit{en} \quad \Omega.$$

*Si $B_{4R} \subset \Omega$, existen constantes $C > 0$ y $\mu \geq 0$ tales que*

$$\sup_{B_R} u \leq C\big(\inf_{B_R} u + R + \mu R\big),$$

*donde $C$ y $\mu$ dependen sólo de $N, L, \lambda_0, \Lambda_0, \|u\|_{L^\infty(B_{4R})}, p_{min}$ y $p_{max}$.*

## 6.7. Distintas nociones de solución

En esta sección analizamos la relación entre las distintas nociones de solución para las ecuaciones estudiadas. A saber, débil, viscosa y clásica. Los resultados de esta sección son novedosos para el operador en estudio. Resultados de este tipo para el operador $\Delta_{p(x)}$ fueron obtenidos en [36], [42] y [58].

Esta clase de resultados tiene aplicaciones en distintos contextos, por ejemplo, en el estudio de problemas de frontera libre (ver [13], [36], [69]).

En efecto, frecuentemente ocurre que la función en estudio se obtiene minimizando un funcional de energía, y por lo tanto esta es solución débil de una ecuación. Saber que además es solución de la ecuación en sentido viscoso permite probar propiedades adicionales de la misma.

A lo largo de la sección supondremos que

$$A(x,s,\eta) = A(x,\eta), \qquad B(x,s,\eta) = B(x),$$

y que $p$, $A$ y $B$ satisfacen las hipótesis de la Sección 6.1. Supondremos además que $A \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ y $B \in C(\Omega)$.

**Definición 6.3** (Subsolución débil)**.** Decimos que $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es una subsolución débil de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se cumple que

$$-\int_\Omega A(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi \, dx \geq \int_\Omega \varphi \, B(x) \, dx.$$

**Definición 6.4** (Supersolución débil)**.** Decimos que $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es una supersolución débil de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, se cumple que

$$-\int_\Omega A(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi \, dx \leq \int_\Omega \varphi \, B(x) \, dx.$$

**Definición 6.5** (Solución débil)**.** Decimos que $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ es una solución débil de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si es simultáneamente una subsolución y una supersolución débil en $\Omega$.

**Definición 6.6.** Dadas $u, v \in C(\Omega)$, decimos que $v$ toca estrictamente a $u$ por debajo (respectivamente por arriba) en $x_0 \in \Omega$, si $u(x_0) = v(x_0)$ y $u(x) > v(x)$ (respectivamente $u(x) < v(x)$) para todo $x \neq x_0$ en un entorno $O$ de $x_0$.

**Definición 6.7** (Subsolución viscosa)**.** Sea $u \in C(\Omega)$. Decimos que $u$ es una subsolución viscosa de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si para toda $v \in C^2(\Omega)$, si $v$ toca estrictamente a $u$ por arriba en $x_0 \in \Omega$ y $\nabla v(x_0) \neq 0$, entonces $\mathrm{div}A(x_0, \nabla v(x_0)) \geq B(x_0)$.

**Definición 6.8** (Supersolución viscosa)**.** Sea $u \in C(\Omega)$. Decimos que $u$ es una supersolución viscosa de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$ si para toda $v \in C^2(\Omega)$, si $v$ toca estrictamente a $u$ por debajo en $x_0 \in \Omega$ y $\nabla v(x_0) \neq 0$, entonces $\mathrm{div}A(x_0, \nabla v(x_0)) \leq B(x_0)$.

**Definición 6.9** (Solución viscosa)**.** Sea $u \in C(\Omega)$. Decimos que $u$ es una solución viscosa de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si es simultáneamente una subsolución y una supersolución viscosa en $\Omega$.

**Definición 6.10** (Subsolución clásica)**.** Decimos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es una subsolución clásica de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si $\nabla u \neq 0$ en $\Omega$ y

$$\mathrm{div}A(x, \nabla u) \geq B(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

**Definición 6.11** (Supersolución clásica)**.** Decimos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es una supersolución clásica de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si $\nabla u \neq 0$ en $\Omega$ y

$$\mathrm{div}A(x, \nabla u) \leq B(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

**Definición 6.12** (Solución clásica)**.** Decimos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de $\mathrm{div}A(x,\nabla u) = B(x)$ en $\Omega$, si es simultáneamente una subsolución y una supersolución clásica en $\Omega$.

**Proposición 6.4.** *Sea $\Omega$ un dominio acotado de clase $C^1$. Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$, con $\nabla u \neq 0$ en $\Omega$, tal que*

$$\mathrm{div}A(x,\nabla u) \leq B(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

*(es decir, $u$ es una supersolución clásica). Entonces, $u$ es una supersolución débil de*

$$\mathrm{div}A(x,\nabla u) = B(x) \quad \textit{en}\, \Omega.$$

*Análogamente para subsoluciones.*

*Demostración.* Como $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces $u, \nabla u \in C(\overline{\Omega})$ y, por lo tanto, $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Dada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, se tiene que

$$\int_\Omega \mathrm{div}A(x,\nabla u)\phi\, dx \leq \int_\Omega \phi B(x)\, dx. \tag{6.36}$$

Por el Teorema de la divergencia (Teorema 3.7), tenemos que

$$0 = \int_{\partial\Omega} A(x,\nabla u)\,\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_\Omega \mathrm{div}(A(x,\nabla u)\phi)\, dx, \tag{6.37}$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$, porque $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Además,

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\big((A(x,\nabla u)\phi\big)dx = \int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}A(x,\nabla u)\phi\, dx. \tag{6.38}$$

Juntando (6.36), (6.37) y (6.38), obtenemos

$$-\int_\Omega A(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\, dx \leq \int_\Omega \phi B(x)\, dx,$$

lo cual demuestra que $u$ es una supersolución débil de $\mathrm{div}A(x,\nabla u) = B(x)$ en $\Omega$. □

**Proposición 6.5.** *Sean $A$ y $B$ como en la Sección 6.1. Supongamos además que $A \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ y $B \in C(\Omega)$. Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap C(\Omega)$ una supersolución débil de*

$$\mathrm{div}A(x,\nabla u) = B(x) \quad \textit{en}\, \Omega.$$

*Entonces, $u$ es una supersolución viscosa de*

$$\mathrm{div}A(x,\nabla u) = B(x) \quad \textit{en}\, \Omega.$$

*Análogamente para subsoluciones.*

*Demostración.* Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap C(\Omega)$ una supersolución débil de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$. Queremos ver que $u$ es una supersolución viscosa de $\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x)$ en $\Omega$.

Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces, existe $x_0 \in \Omega$ y $v \in C^2(\Omega)$, con $\nabla v(x_0) \neq 0$, tal que

$$\begin{cases} u(x_0) & = v(x_0), \\ u(x) & > v(x) \quad \forall x \neq x_0 \text{ en un entorno } O \text{ de } x_0 \end{cases} \tag{6.39}$$

y tal que $\mathrm{div}A(x_0, \nabla v(x_0)) > B(x_0)$.

Como $v \in C^2(\Omega)$, se tiene $\nabla v(x) \neq 0$ en $B_r(x_0)$ y

$$\mathrm{div}A(x, \nabla v(x)) \geq B(x) \qquad \text{en } B_r(x_0), \tag{6.40}$$

para algún $r > 0$ pequeño. Sea

$$m = \min(u - v) \quad \text{sobre } \partial B_r(x_0). \tag{6.41}$$

Entonces, $m > 0$. Consideremos $\widetilde{v}(x) = v(x) + m$ en $\Omega$. Entonces, $\widetilde{v} \in W^{1,p(\cdot)}(B_r(x_0))$ y por (6.40) y la Proposición 6.4, $\widetilde{v}$ es una subsolución débil de $\mathrm{div}A(x, \nabla\widetilde{v}) = B(x)$ en $B_r(x_0)$.

Además, por definición de $m$, se tiene que $u \geq \widetilde{v}$ en $\partial B_r(x_0)$. Entonces, por el Principio de comparación (Proposición 6.1), se tiene que $u \geq \widetilde{v}$ en $B_r(x_0)$. Es decir,

$$u(x) \geq v(x) + m \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

y en particular

$$v(x_0) = u(x_0) \geq v(x_0) + m,$$

lo cual contradice (6.39) y (6.41) y concluye la demostración. □

**Observación 6.3.** En la Proposición 6.5 tenemos que

$$w = \widetilde{v} - u \in W^{1,p(\cdot)}(B_r(x_0)) \cap C(\bar{B}_r(x_0)),$$

$$w \leq 0 \quad en \quad \partial B_r(x_0).$$

Sea $w^+ = \max(w, 0)$. Entonces,

$$w^+ \in W^{1,p(\cdot)}(B_r(x_0)) \cap C(\bar{B}_r(x_0)),$$

$$w^+ = 0 \text{ en } \partial B_r(x_0).$$

Con los mismos argumentos empleados en la demostración del Teorema 9.17 de [14], deducimos que

$$w^+ \in W_0^{1,p(\cdot)}(B_r(x_0)),$$

lo que permite la aplicación del Principio de comparación (Proposición 6.1) en la Proposición 6.5.

**Corolario 6.2.** *Sea $\Omega$ un dominio acotado de clase $C^1$. Sean A y B como en la Sección 6.1. Supongamos además que $A \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ y $B \in C(\Omega)$. Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$, con $\nabla u \neq 0$ en $\Omega$, tal que*

$$\mathrm{div}A(x, \nabla u) \leq B(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

*(es decir, $u$ es una supersolución clásica). Entonces, $u$ es una supersolución viscosa de*

$$\mathrm{div}A(x, \nabla u) = B(x) \quad \textit{en } \Omega.$$

*Análogamente para subsoluciones.*

*Demostración.* El resultado es consecuencia de las Proposiciones 6.4 y 6.5. □

# Capítulo 7

# Ejemplos

En este capítulo presentamos ejemplos de ecuaciones para las cuales se aplican los resultados del Capítulo 6.

En particular, los resultados de la sección 6.5 resultan novedosos para varios de estos ejemplos.

## 7.1. Ejemplo 1

En la Sección 5.1, estudiamos el Principio de Dirichlet para la ecuación de Poisson (Teorema 5.4). Vamos a comprobar que, para una $F$ apropiada, un minimizante de energía de la Sección 6.1, es solución de la ecuación $-\Delta u = f$. Partimos de (5.2), es decir

$$I(w) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf)dx,$$

reemplazamos $J_\Omega$ por $I$, quedando

$$J_\Omega(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf(x)\, dx,$$

donde suponemos $f \in L^\infty(\Omega)$. Tomemos entonces en la Sección 6.1

$$F(x, s, \eta) = \frac{1}{2}|\eta|^2 - sf(x),$$

con lo cual

$$J_\Omega(w) = \int_\Omega F(x, w, \nabla w)dx = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf(x)\Big)dx.$$

En este caso vemos que las condiciones que relacionan $A$ y $B$ con $F$ quedan

$$A(x, s, \eta) = \nabla_\eta F(x, s, \eta) = \frac{2}{2}\eta = \eta,$$

$$B(x,s,\eta) = F_s(x,s,\eta) = -f(x).$$

Queda entonces

$$A(x,u,\nabla u) = \nabla u,$$

$$B(x,u,\nabla u) = -f(x).$$

Reemplazando ambas expresiones en la ecuación

$$\mathrm{div} A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u),$$

obtenemos

$$\mathrm{div} A(x,u,\nabla u) = \mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u \implies \Delta u = -f(x).$$

Es decir

$$-\Delta u = f(x).$$

Habiendo así comprobado que existe un minimizante del funcional de energía (5.2) propuesto en la Sección 5.1, que este es efectivamente solución de la ecuación diferencial, y que el resto de los resultados del Capítulo 6 también se aplican.

## 7.2. Ejemplo 2

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i,j \leq N$, satisfaciendo la condición de elipticidad uniforme. Es decir, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Sea $f \in L^\infty(\Omega)$. Consideramos

$$F(x,s,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j + f(x)s = \frac{1}{2}\langle A(x)\eta,\eta\rangle + f(x)s.$$

Entonces, $F$ satisface nuestras hipótesis,

$$F_\eta(x,s,\eta) = A(x)\eta, \qquad F_s(x,s,\eta) = f(x).$$

La ecuación que se obtiene es

$$\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f,$$

y todos los resultados del Capítulo 6 se aplican a esta ecuación. Observar que esta ecuación fue analizada en el Capítulo 5 con otras técnicas (Teorema de Lax Milgram).

## 7.3. Ejemplo 3

Consideremos $F$, $A$ y $B$ como en la Sección 6.1, en el caso particular en que $p(x) \equiv 2$. Entonces la ecuación toma la forma

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u),$$

donde $A(x, s, \eta)$ satisface

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(x, s, \eta)\xi_i \xi_j \leq \Lambda_0 |\xi|^2.$$

Es decir, se obtiene una ecuación no lineal uniformemente elíptica, para la cual se aplican todos los resultados del Capítulo 6.

## 7.4. Ejemplo 4

Consideremos, para $1 < p < \infty$ y $f \in L^\infty(\Omega)$,

$$J_\Omega(w) = \int_\Omega \Big( \frac{|\nabla w|^p}{p} + f w \Big)\, dx = \int_\Omega F(x, w, \nabla w)\, dx,$$

$$F(x, s, \eta) = \frac{1}{p} |\eta|^p + s f(x),$$

$$A(x, s, \eta) = \nabla_\eta F(x, s, \eta) = \nabla_\eta \Big( \frac{1}{p} |\eta|^p + s f(x) \Big) =$$

$$= |\eta|^{p-2} \eta,$$

$$B(x, s, \eta) = F_s(x, s, \eta) = f(x),$$

$$A(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

Tomando divergencia miembro a miembro

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Por otro lado,

$$B(x, u, \nabla u) = f(x).$$

Entonces, la ecuación

$$\mathrm{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u),$$

queda

$$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x).$$

El operador $\Delta_p$ se conoce como $p$-Laplaciano.

## 7.5. Ejemplo 5

Consideremos $F$, $A$ y $B$ como en la Sección 6.1, en el caso particular en que $p(x) \equiv p$ y $F$ toma la forma
$$F(x,s,\eta) = G(s,\eta) + sf(x).$$
Entonces la ecuación resulta
$$\text{div}A(u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u),$$
donde $A(s,\eta)$ satisface
$$\lambda_0|\eta|^{p-2}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(s,\eta)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0|\eta|^{p-2}|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$
Es decir, se obtiene una ecuación que generaliza al $p$-Laplaciano, para la cual se aplican los resultados del Capítulo 6.

## 7.6. Ejemplo 6

Consideremos, para $f \in L^\infty(\Omega)$,
$$J_\Omega(w) = \int_\Omega \Big(\frac{|\nabla w|^{p(x)}}{p(x)} + fw\Big)\,dx = \int_\Omega F(x,w,\nabla w)\,dx.$$
$$F(x,s,\eta) = \frac{1}{p(x)}|\eta|^{p(x)} + sf(x). \tag{7.1}$$
$$A(x,s,\eta) = \nabla_\eta F(x,s,\eta) = \nabla_\eta\Big(\frac{1}{p(x)}|\eta|^{p(x)} + sf(x)\Big) =$$
$$= \nabla_\eta\Big(\frac{1}{p(x)}e^{\frac{p(x)}{2}\ln|\eta|^2} + sf(x)\Big) =$$
$$= |\eta|^{p(x)-2}\eta,$$
$$B(x,s,\eta) = F_s(x,s,\eta) = f(x),$$
$$A(x,u,\nabla u) = |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.$$
Tomando divergencia miembro a miembro
$$\text{div}A(x,u,\nabla u) = \text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$
Por otro lado
$$B(x,u,\nabla u) = f(x).$$

Entonces, la ecuación

$$\mathrm{div} A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u),$$

queda

$$\Delta_{p(x)} u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x).$$

El operador $\Delta_{p(x)}$ se conoce como $p(x)$-Laplaciano.

En el caso particular en que $p(x) \equiv 2$, queda, $\mathrm{div}(\nabla u) = f(x)$, es decir, $\Delta u = f(x)$ que es el resultado presentado en el Ejemplo 7.1.

Por otra parte, cuando $p(x) \equiv p$ obtenemos el resultado presentado en el Ejemplo 7.4.

Observemos que en este caso particular en que $F$ tiene la forma (7.1), el hecho que un minimizante es solución de la ecuación, se obtiene de forma mas sencilla que en la Sección 6.2 (Teorema 6.2). De hecho, sea $t > 0$ y $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea $u$ un minimizante de $J_\Omega$. Usando la minimalidad de $u$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{t}\left(J_\Omega(u-t\xi) - J_\Omega(u)\right)\\
&= \frac{1}{t}\int_\Omega |\nabla u - t\nabla\xi|^{p(x)}\frac{1}{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}\frac{1}{p(x)}\,dx - \int_\Omega f\xi\,dx\\
&\leq -\int_\Omega |\nabla u - t\nabla\xi|^{p(x)-2}(\nabla u - t\nabla\xi)\cdot\nabla\xi\,dx - \int_\Omega f\xi\,dx.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado la estimación (6.7). Si hacemos $t \to 0$, obtenemos

$$0 \leq -\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\xi\,dx - \int_\Omega f\xi\,dx,$$

que da como resultado $\Delta_{p(x)}u \geq f$. Análogamente obtenemos $\Delta_{p(x)}u \leq f$.

## 7.7. Ejemplo 7

Sean $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i,j \leq N$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, que satisfacen, para $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0$,

$$\lambda_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Consideramos, para $f \in L^\infty(\Omega)$,

$$F(x,s,\eta) = \frac{1}{p(x)}\big|A(x)\eta\big|^{p(x)} + f(x)s.$$

Entonces $F$ satisface nuestras hipótesis,

$$F_\eta(x,s,\eta) = \left|A(x)\eta\right|^{p(x)-2}A^2(x)\eta,$$
$$F_s(x,s,\eta) = f(x),$$

y la ecuación que se obtiene es

$$\operatorname{div}\Big(\left|A(x)\nabla u\right|^{p(x)-2}A^2(x)\nabla u\Big) = f(x), \tag{7.2}$$

conocida como "weighted $p(x)$ - Laplacian".

Cuando $A(x) = I$, (7.2) coincide con $\Delta_{p(x)}$.

## 7.8. Ejemplo 8

Un ejemplo de función $F$ que satisface las hipótesis de la Sección 6.1 (ver Ejemplo 5.2 en [48]) es

$$F(x,s,\eta) = G(x,\eta) + f(x,s),$$

con

$$G(x,\eta) = \widetilde{G}\big(|\eta|^{p(x)}\big),$$

con $p(x)$ como en la Sección 6.1, y $\widetilde{G} \in C^2\big([0,\infty)\big)$ una función que satisface:

$$c_0 \le \widetilde{G}'(t) \le C_0,$$
$$0 \le \widetilde{G}''(t) \le \frac{C_0}{1+t} \qquad c_0, C_0 \text{ constantes positivas,}$$

y

$$f(x,s) = g(x)s, \qquad \text{con} \quad g \in L^\infty(\Omega).$$

## 7.9. Ejemplo 9

Si $F_1$ y $F_2$ satisfacen las hipótesis discutidas en el Capítulo 6, entonces

$$F(x,s,\eta) = a_1(x)F_1(x,s,\eta) + a_2(x)F_2(x,s,\eta),$$

también las cumplen, para cualquier elección de funciones Hölder continuas $a_1(x), a_2(x)$ acotadas superior e inferiormente por constantes positivas (ver Observación 5.1 en [48]). Así obtenemos nuevas ecuaciones de la forma

$$\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) = B(x,u,\nabla u),$$

para las cuales los resultados del Capítulo 6 se aplican.

# Apéndice A

# Otros resultados para ecuaciones con crecimiento no estándar

En los últimos años ha habido un interés creciente sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con crecimiento no estándar. Esto se debe a sus numerosas aplicaciones y a los desafíos matemáticos que este tipo de problemas plantea.

Remarcamos que es imposible dar una lista completa de referencias actualizadas sobre este tema y remitimos al lector interesado, por ejemplo, a las referencias [39], [21], [59] y a los trabajos allí citados.

En este Apéndice comentaremos algunos interesantes trabajos para este tipo de ecuaciones, que en particular incluyen ecuaciones que no hemos tratado en la Tesis.

Comenzamos refiriendo a los trabajos [26], [27], [28] y [8] donde se desarrollan métodos numéricos para aproximar soluciones débiles del problema de Dirichlet para el $p(x)$-Laplaciano.

Además, en el trabajo [53] se considera el límite al tomar $p(x) \to \infty$ en una familia de soluciones de la ecuación $p(x)$-Laplaciano homogénea, y se identifica la ecuación que se obtiene en el límite.

Por otra parte, en [46], [36] y [37], se obtienen resultados de regularidad para problemas de frontera libre asociados al $p(x)$-Laplaciano. En [47] y [45] se estudia un problema de perturbación singular para el $p(x)$-Laplaciano. En [34], [47] y [62] se estudian problemas de minimización para el $p(x)$-Laplaciano y en [49] se estudia un problema de diseño óptimo para este operador. Otros resultados para el $p(x)$-Laplaciano pueden encontrarse en [64], [9] y [19].

En [50], el autor obtiene diversos resultados para el operador no lineal degenerado conocido como $g$-Laplaciano, definido como

$$\Delta_g u := \mathrm{div}\Big(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\Big),$$

con ciertas condiciones de crecimiento sobre la función $g$. Este operador extiende al $p$-

Laplaciano, que se obtiene al tomar $g(t) = t^{p-1}$.

Para trabajar con estas ecuaciones se definen espacios de Sobolev generalizados, conocidos como Espacios de Orlicz-Sobolev. Estos se definen en forma análoga a los espacios de Sobolev con exponente variable $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ y se denotan por $W^{1,G}(\Omega)$, donde $G$ es una función tal que $G' = g$. La norma se obtiene en forma similar a (4.9) y (4.11), reemplazando en la definición a la función $|t|^{p(x)}$ por $G(t)$.

En [57] y [13] se obtienen resultados para un problema de frontera libre asociado al $g$-Laplaciano. En [12], [24] y [69] se estudian problemas de minimización. En [23], [56] y [65] se estudian problemas de optimización de forma para este operador y en [17] se obtienen resultados de continuidad respecto a perturbaciones de dominio.

Entre otras interesantes ecuaciones con crecimiento no estándar, mencionamos el $p$-Laplaciano anisotrópico, que viene dado por

$$\sum_{i=1}^{N} \left(|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\right)_{x_i} = 0, \quad 2 \leq p_1 \leq \dots p_N,$$

y es estudiada en [11] y [51].

También, ecuaciones con doble fase, de la forma

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + a(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right) = 0, \quad 2 \leq q < p,$$

y $a(x) \geq a_0 > 0$ que son estudiadas en [10] y [25].

Referimos además a ecuaciones totalmente no lineales con exponente variable, de la forma

$$|\nabla u|^{p(x)} F(D^2 u) = f,$$

estudiadas en [15].

Antontsev y Shmarev estudian en [6] una familia de problemas parabólicos con crecimiento no estándar, que incluye en particular a la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x,t).$$

Por último, mencionamos que hay una gran atención reciente en el estudio de problemas con “difusión anómala”, debido al interés que estos presentan en las aplicaciones a distintas disciplinas, tales como ciencias naturales, finanzas y procesamiento de señales. En estos casos, en lugar de considerarse operadores diferenciales, se consideran operadores integrales. Los espacios adecuados para trabajar con estas ecuaciones se conocen como Espacios de Orlicz-Sobolev fraccionarios.

Mientras que las ecuaciones diferenciales tienen en cuenta sólo lo que está ocurriendo en un entorno de un punto $x$, y en ese sentido son “locales”, las ecuaciones integrales tienen en cuenta lo que está ocurriendo en puntos lejanos a $x$ y en ese sentido son “no locales”.

En los trabajos [41], [43], [35] y [18], se estudian operadores no locales que constituyen versiones fraccionarias de los operadores $p$-Laplaciano, $p(x)$-Laplaciano, $g$-Laplaciano y $p$-Laplaciano anisotrópico, respectivamente.

# Notación

- $N$: dimensión espacial.
- $|S|$: medida de Lebesgue $N$-dimensional del conjunto $S$.
- $B_r(x_0)$: bola abierta de radio $r$ y centro $x_0$.
- $B_r$: bola abierta de radio $r$ y centro $0$.
- $\chi_S$: función característica del conjunto $S$.
- $\langle \xi , \eta \rangle$ y $\xi \cdot \eta$ ambos denotan el producto escalar en $\mathbb{R}^N$.
- Si $V, U$ son abiertos de $\mathbb{R}^N$, $V \subset\subset U$ denota $V \subset \overline{V} \subset U$, con $\overline{V}$ compacto.
- $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} = \text{ínf}\{\alpha \,/\, f(x) \leq \alpha \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en}\, \Omega\}$.
- $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} = \sup\{\beta \,/\, f(x) \geq \beta \quad \text{c.t.p.} \quad \text{en}\, \Omega\}$.

# Bibliografía


[1] R. Aboulaich, D. Meskine, A. Souissi, *New diffusion models in image processing*, Comput. Math. Appl. **56** (2008), 874-882.

[2] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, Second Edition, 2003.

[3] L. Anand, E. Fried, M. E. Gurtin, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] S. N. Antontsev, J. F. Rodrigues, *On stationary thermo-rheological viscous flows*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sci. Mat. **52 (1)** (2006), 19-36.

[5] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions*, Nonlinear Anal. **60** (2005), 515-545.

[6] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, *Global estimates for solutions of singular parabolic and elliptic equations with variable nonlinearity*, Nonlinear Analysis **195** (2020), 111724.

[7] T. M. Apostol, *Calculus, Volumen II*, Reverté, 1985.

[8] A. Aragón, J. Fernández Bonder, D. Rubio, *Effective numerical computations of p(x)–Laplace equations in 2D*, Int. J. Comput. Math. **100 (11)** (2023), 2111-2123.

[9] C. Baroncini, J. Fernández Bonder, *An extension of a theorem of V. Šverák to variable exponent spaces*. Commun. Pure Appl. Anal. **14 (5)** (2015), 1987-2007.

[10] P. Baroni, M. Colombo, G. Mingione, *Regularity for general functionals with double phase*. Calc. Var. Partial Differential Equations **57 (2)** (2018), Art. 62, 48 pp.

[11] P. Bousquet, L. Brasco, *Lipschitz regularity for orthotropic functionals with nonstandard growth conditions*. Rev. Mat. Iberoam. **36 (7)** (2020), 1989-2032.

[12] J. Braga, M. Ederson, D. R. Moreira, *Uniform Lipschitz regularity for classes of minimizers in two phase free boundary problems in Orlicz spaces with small density on the negative phase*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **31 (4)** (2014), 823-850.

[13] J. E. M. Braga, R. A. Leitão, J. E. L. Oliveira, *Free boundary theory for singular/degenerate nonlinear equations with right hand side: a non-variational approach*. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **59 (2)** (2020), Paper No. 86, 29 p.

[14] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[15] A. Bronzi, E. Pimentel, G.C. Rampasso, E.V. Teixeira, *Regularity of solutions to a class of variable-exponent fully nonlinear elliptic equations*. J. Funct. Anal. **279 (12)** (2020), 108781.

[16] X. Cabré, L. A. Caffarelli, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[17] N. Cantizano, A. Salort, J. Spedaletti, *Continuity of solutions for the $\Delta\varphi$-Laplacian operator*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **151, no. 4**, (2021), 1355–1382.

[18] I. Ceresa Dussel, J. Fernández Bonder, *A Bourgain-Brezis-Mironescu formula for anisotropic fractional Sobolev spaces and applications to anisotropic fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **519 (2)** (2023), Paper 126805, 25pp.

[19] S. Challal, A. Lyaghfouri, J. F. Rodrigues, R. Teymurazyan, *On the regularity of the free boundary for quasilinear obstacle problems*. Interfaces Free Bound. **16 (3)** (2014), 359-394.

[20] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), 1383-1406.

[21] I. Chlebicka, P. Gwiazda, A. Swierczewska-Gwiazda, A. Wroblewska-Kaminska, *Partial Differential Equations in Anisotropic Musielak-Orlicz Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2021.

[22] M. G. Crandall, P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **277 (1)** (1983), 1-42.

[23] J.V. Da Silva, A. Salort, A. Silva, J. Spedaletti, *A constrained shape optimization problem in Orlicz-Sobolev spaces*, Journal of Differential Equations **267 (9)** (2019), 5493-5520.

[24] J. V. Da Silva, A. Silva, H. Vivas, *Lipschitz regularity of almost minimizers in a Bernoulli problem with non-standard growth*. Discrete and Continuous Dynamical Systems **44 (6)** (2024), 1555-1586.

[25] C. De Filippis, *Optimal gradient estimates for multi-phase integrals*. Math. Eng. **4 (5)** (2022), Paper No. 43, 36 p.

[26] L. Del Pezzo, A. L. Lombardi, S. Martínez, *Interior penalty discontinuous Galerkin FEM for the p(x)-Laplacian*, SIAM J. Numer. Anal. **50 (5)** (2012), 2497-2521.

[27] L. Del Pezzo, S. Martínez, *The decomposition-coordination method for the p(x)-laplacian*, preprint 2014.

[28] L. Del Pezzo, S. Martínez, *Order of convergence of the finite element method for the p(x)-Laplacian*, IMA J. Numer. Anal. **35 (4)** (2015), 1864-1887.

[29] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ružička, *Lebesque and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer, 2011.

[30] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, V 19, Providence, 1998.

[31] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 2015.

[32] X. Fan, *Global $C^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form*, J. Differential Equations **235** (2007), 397-417.

[33] X. Fan, D. Zhao, *A class of De Giorgi type and Hölder continuity*, Nonlinear Analysis **36** (1999), 295-318.

[34] J. Fernandez Bonder, S. Martínez, N. Wolanski, *A free boundary problem for the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal. **72** (2010), 1078-1103.

[35] J. Fernández Bonder, A. Salort, *Fractional order Orlicz-Sobolev spaces*, Journal of Functional Analysis **277** (2019), 333–367.

[36] F. Ferrari, C. Lederman, *Regularity of flat free boundaries for a $p(x)$-Laplacian problem with right hand side*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **212** (2021), Article ID 1124444, 25 p.

[37] F. Ferrari, C. Lederman, *Regularity of Lipschitz free boundaries for a $p(x)$-Laplacian problem with right hand side*, J. Math. Pures Appl. **171 (9)** (2023), 26-74.

[38] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[39] P. Harjulehto, P. Hästö, *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 2236, Springer, 2019.

[40] P. Harjulehto, P. Hästö, U. V. Le, and M. Nuortio. *Overview of differential equations with non-standard growth*. Nonlinear Anal. **72** (2010), 4551–4574.

[41] H. Ishii, G. Nakamura, *A class of integral equations and approximation of $p$-Laplace equations*, Calc. Var. **37** (2010), 485–522.

[42] P. Juutinen, T. Lukkari, M. Parviainen, *Equivalence of viscosity and weak solutions for the p(x)-Laplacian*. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **27 (6)** (2010), 1471–1487.

[43] U. Kaufmann, J. Rossi, R, Vidal, *Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional p(x)-Laplacians*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **76** (2017), 10 p.

[44] O. Kovácik, J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592-618.

[45] C. Lederman, N. Wolanski, *An inhomogeneous singular perturbation problem for the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal. **138** (2016), 300-325.

[46] C. Lederman, N. Wolanski, *Weak solutions and regularity of the interface in an inhomogeneous free boundary problem for the $p(x)$-Laplacian*, Interfaces Free Bound. **19 (2)** (2017), 201-241.

[47] C. Lederman, N. Wolanski, *An inhomogeneous minimization problems for the p(x)-Laplacian*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **475 (1)** (2019), 423-463.

[48] C. Lederman, N. Wolanski, *Lipschitz continuity of minimizers in a problem with nonstandard growth*, Contemporary PDEs between theory and modeling, Mathematics in Engineering **3 (1)** (2021), 1-17.

[49] C. Lederman, N. Wolanski, *An optimization problem with volume constraint for an inhomogeneous operator with nonstandard growth*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A **41 (6)** (2021), 2907-2946.

[50] G. M. Lieberman, *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Uraltseva for elliptic equations*. Comm. Partial Diff. Eq. **16 (2-3)** (1991), 311–361.

[51] G. M. Lieberman, *Gradient estimates for anisotropic elliptic equations*, Adv. Differential Equations **10 (7)** (2005), 767–812.

[52] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 1: Incompressible Models*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford Clarendon Press, 1996.

[53] J. J. Manfredi, J. D. Rossi, J. M. Urbano, *Limits as $p(x) \to \infty$ of p(x)-harmonic functions*, Nonlinear Analysis **72** (2010), 309-315.

[54] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **105 (3)** (1989), 267–284.

[55] P. Marcellini, *Regularity and existance of solutions of elliptic equations with $p, q$-growth conditions*, J. Differ. Equ. **50** (1991), 1–30.

[56] S. Martínez, *An optimization problem with volume constraint in Orlicz spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **340 (2)** (2008), 1407-1421.

[57] S. Martínez, N.Wolanski, *A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces*, Adv. Math. **218 (6)** (2008), 1914-1971.

[58] M. Medina, P. Ochoa, *Equivalence of solutions for non-homogeneous p(x)-Laplace equations*, Math. Eng. **5 (2)** (2023), Paper No. 44, 19 p.

[59] G. Mingione, V. Radulescu, *Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity*, J. Math. Anal. Appl. **501 (1)** (2021), 125197, 41 pp.

[60] V. D. Radulescu, D. D. Repovs, *Partial Differential Equations with Variable Exponents: Variational Methods and Qualitative Analysis*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Book 9. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

[61] K. P. Rajagopal, M. Ružička, *Mathematical modelling of electro-rheological materials*. Cont. Mech. Therm. **13** (2001), 59-78.

[62] G.C. Rampasso, N. Wolanski, *A minimization problem for the $p(x)$-Laplacian involving area*, Ann. Mat. Pura Appl. **200 (5)** (2021), 2155-2179.

[63] M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer Verlag, Berlin, 2000.

[64] N. Saintier, A. Silva, *Local existence conditions for an equations involving the $p(x)$-Laplacian with critical exponent in $\mathbb{R}^N$*, NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **24 (2)** (2017), Paper No. 19, 36 p.

[65] A. Salort, B. Schvager, A. Silva, *Nonstandard growth optimization problems with volume constraint*, Differential and Integral Equations, Volume **36 (7-8)** (2023), 573–592.

[66] R. L. Wheeden, A. Zygmund. *Measure and Integral*, Marcel Dekker. Inc., New York, 1977.

[67] W. M. Winslow, *Induced fibrillation of suspensions*, Journal of Applied Physics **20** (1949), 1137-1140.

[68] N. Wolanski, *Local bounds, Harnack's inequality and Hölder continuity for divergence type elliptic equations with non-standard growth*, Rev. Unión Mat. Argent. **56 (1)** (2015), 73-105.

[69] N. Wolanski, *A free boundary problem in Orlicz spaces related to mean curvature*, Nonlinear Analysis **212** (2021), 112452.

[70] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Math. USSR. Izv. **29 (1)** (1987), 33-66.

[71] V. V. Zhikov, *Solvability of the three-dimensional thermistor problem*, Tr. Mat. Inst. Steklova D (Differ. Uravn. i Din. Sist.) **261** (2008), 101–114.