UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La conjetura de Willmore

Julián Masliah

Director: Gabriel Larotonda

Fecha de Presentación
24 de Julio de 2024

Índice general

1. Introducción **1**

2. Preliminares: Geometría Diferencial y Riemanniana **7**

2.1. El Lema de la introducción 7
2.2. La Variedad de Grassman 8
2.3. Hacia una definición general de curvatura 9
2.4. Desde conexiones hasta el operador de Jacobi 12
2.5. Matrices y Geometría Riemanniana local 18
2.6. Métricas conformes 26
2.7. Gauss-Bonnet y Energía de Willmore general 32

3. Preliminares: Teoría Geométrica de la Medida y Topología **35**

3.1. Sobre medidas de Radón 35
3.2. Currents, Masa y Currents Integrales 35
3.3. Varifolds generales, rectificables, e integrales 37
3.4. Espacios, Métricas Relevantes, y Observaciones 39
3.5. Propiedades y Lemas útiles de las distancias 41
3.6. Pushforwards, Variación, y Compacidad 43
3.7. Conjuntos de perímetro finito 45
3.8. Homología singular, cúbica, y de Currents 47
3.9. El Teorema de separación de Jordan-Brouwer 49

4. La Familia Canónica **51**

4.1. Definiciones Básicas 51
4.2. La Familia Canónica: definiciones y Teoremas. 53
4.3. El mapa extendido de Gauss 55

5. Familia Canónica Extendida y Familia Min-Max **59**

5.1. Algunas Definiciones, y la Meta de esta sección 59
5.2. Resultados Preliminares 60

5.3. Extensión de la Familia Canónica 65
5.4. La familia Min-Max 67

6. Teoría Min-Max de Almgren-Pitts 71
6.1. Sobre complejos simpliciales 71
6.2. Definiciones relacionadas a homotopías 72
6.3. Definiciones importantes de Teoría Min-Max 73
6.4. Construcción de sucesión de mapas 75
6.5. El Teorema Min-Max 77

7. Cota inferior de anchura 79
7.1. Introducción de la cota 79
7.2. Demostración de la cota - paso 0 80
7.3. Demostración de la cota - paso 1 81
7.4. Demostración de la cota - paso 2 82
7.5. Demostración de la cota - paso 3 85

8. La conjetura de Willmore 91
8.1. Existen superficies minimales de área mínima 91
8.2. Área mínima de superficie minimal en la esfera 96
8.3. Demostración de la conjetura de Willmore 102

Agradecimientos

Esta serie de agradecimientos, por más de no ser exhaustiva, es una lista de algunas de las muchas personas que tuvieron algún impacto a lo largo de mi crecimiento, ya sea matemático o no matemático.

Empiezo agradeciendo a mis dos padres, Valeria Goldstein y Alberto Masliah, por criarme en un ambiente sano en donde mi curiosidad fue premiada, y mis intereses fueron validados. Agradezco también a mi hermano mayor, Iván Masliah, por explicarme cómo multiplicar números cuando se lo pregunté de chiquito. Agradezco a mis cuatro abuelos, Susana Chemen, Rafael Masliah, Sara Kotliar y Ricardo Goldstein, por bancarme y estar pendientes de cada paso de mi crecimiento matemático. Agradezco a mis tíos, por ofrecerme espacios de estudio y perspectivas de vida que me formaron en mi infancia. Agradezco también a cada uno de mi seis primos. Por último en mi familia, agradezco a mi hermano menor, Noah Masliah Blanco, que nació el año que arranqué la licenciatura y hoy tiene 4 años y medio.

Al colegio Pestalozzi por formarme durante mis años de jardín, primaria y secundaria. Agradezco especialmente a Betty, Martha, Camilo y Gustavo por ayudarme a descubrir el alcance de mi interés por la matemática y a expandirlo, ya sea mediante el taller de olimpiadas matemáticas que ofrecía el colegio, o mediante conversaciones por fuera de horarios de clase.

A la Olimpiada Matemática Argentina por permitirme viajar a competencias en distintos lugares del mundo y brindarme un grupo de amigos y amigas que mantengo hasta el día de hoy. Agradezco puntualmente a Patricia Fauring y Flora Gutiérrez, por estar a cargo de la Olimpiada y estar presentes en cada entrenamiento en ciudad universitaria al que asistí.

A mi director, Gabriel Larotonda, por estar dispuesto en trabajar conmigo en una Tesis cuyo tema elegí sin saber si iba a encontrar quien me dirigiera. Agradezco a Carlos di Fiore por enseñarme el paper del que se trata todo este trabajo. Agradezco también a Ezequiel Rela y Guillermo Henry por ser jurados de esta tesis.

A cada una de las personas no mencionadas hasta ahora que de alguna forma u otra me ayudaron a pensar alguno de los muchos problemas que tuve que resolver a lo largo de esta tesis. Puntualmente, agradezco a Ian Fleschler, Bruno Staffa, Lucas de Amorín y Janou Glaeser.

A todos los profesores que tuve durante la Licenciatura que fueron parte del desarrollo de mi madurez matemática: aparte del director y el jurado de esta tesis, agradezco a Andrea Solotar, Daniel Carando, Guillermo Cortiñas, Teresa Krick, Jonathan Barmak, Martín Mereb, Claudia Lederman, Pablo Amster y Gabriela Jerónimo. Agradezco especialmente a Gabriel Minian, por ser mi docente en tres oportunidades distintas y despertar mi interés por la geometría.

A todos y cada uno de mis amigos que no mencioné hasta ahora y que me bancaron en cada día de este larguísimo proyecto: a Lautaro Silbergleit, Juana Perdoménico, Nicolás y Lucía Martinez Mayer, Jacobo Mercado Popp, Iván Ulman, Alejandro Alatsis, Lara Fernandez Brudny, Julián Garbulsky, Julián Fledman, Julia Zanette, Zenon Mabres Louge, Camila Mildiner, Francisco Valdez, Victoria Pérez Ruiz, Matías Saucedo, Bruno Ziger, Chino Cribioli, Franco Bongiovanni, Santiago Cubino, Carlos Miguel Soto, Ivo Pajor, Marco Ventola, Facundo y Martina Alvarez Motta, Joaquín Fernandez, Lorenzo Ruiz Días, Camila García, Charo Morencos, Zoe Zaidán, Carolina Kung, Joaquín Iturriza, Julia Migliarino, Val Viñoles, Lucía Chechic, Melina Achilles, y muchos más que me puedo haber olvidado.

A la educación pública y de calidad que me brindó la Universidad de Buenos Aires.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis, expondremos la demostración que Fernando Codá Marques y André Neves dan a la conjetura de Willmore en su paper conjunto *Min-Max theory and the Willmore conjecture* publicado en el año 2014 [9]. En el proceso, también expondremos los contenidos teóricos necesarios para manejar la demostración asumiendo que el lector cursó todas las materias de la licenciatura, y completaremos algunos pasos de las demostraciones que los autores dejan para el lector, pero en muchos casos esconden ideas bastante técnicas.

Dada una superficie Σ en el espacio $\mathbb{R}^3$, recordemos que su curvatura media $H : \Sigma \to \mathbb{R}$ se define en el punto $x \in \Sigma$ como el promedio de las curvaturas principales k_1 y k_2 de Σ en x. En base a esto, Willmore definió el 1965 [18] lo siguiente.

Definición 1.0.1 (Energía de Willmore). Dada una superficie embebida, orientable y compacta (es decir, cerrada, acotada y sin borde) $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ su *energía de Willmore* se define como

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_\Sigma H^2 \, d\Sigma.$$

Observación 1.0.2. *Claramente, la energía de Willmore es invariante por traslaciones. Notemos que si le aplicamos una homotecia con factor $\lambda \in \mathbb{R}$ a Σ, H^2 en el punto correspondiente se divide por λ^2, mientras que el área de la superficie se multiplica por λ^2. De esto, es fácil concluir que la energía de Willmore es invariante por homotecias. De hecho, vale que la energía de Willmore es invariante por transformaciones conformes, y esto es algo que veremos en detalle en el próximo capítulo.*

Desde un punto de vista intuitivo, H^2 mide en cada punto de Σ cuán lejos está la superficie de ser plana en ese punto. Luego, dada la invarianza por homotecias, la energía de Willmore mide en algún sentido cuan uniformemente curvada es una superficie (mientras más baja la energía, más uniforme es la forma en la que se curva la superficie).

Dada esta intuición, tiene sentido que las superficies con menor energía de Willmore sean las inmersiones isométricas de la esfera S^2 en $\mathbb{R}^3$. Este resultado fue probado por el mismo Willmore, y tiene una demostración directa que daremos en el Capítulo 2.

Lema. *Dada una superficie embebida, orientable y compacta* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$*, vale que* $\mathcal{W}(\Sigma) \geq 4\pi$*, con igualdad en el caso de que* Σ *es una copia de* S^2 *salvo traslaciones y homotecias.*

Como Willmore pudo probar este resultado sin muchas complicaciones, dirigió su interés a minimizar esta energía sobre superficies que no fueran topológicamente esferas. Precisamente, debido a la falta de un candidato obvio a ser el óptimo, resultaba interesante determinar la superficie con género $g \geq 1$ más uniformemente curvada.

Para encontrar un candidato al Toro con la menor energía de Willmore, él consideró los toros con simetría radial y radios mayor y menor R y r respectivamente. Fijando R y llamando Σ_r al toro simétrico con radio menor r, él observó que la función $r \to \mathcal{W}(\Sigma_r)$ era continua en $(0, R)$ y se volvía arbitrariamente grande para $r \to 0$ y $r \to R$, por lo que tenía un mínimo. Calculando explícitamente, probó que este mínimo era 4π para $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$, por lo que el toro

$$(u, v) \to ((\sqrt{2} + \cos(u)) \cos(v), (\sqrt{2} + \cos(u)) \sin(v), \sin(u)) \in \mathbb{R}^3$$

y sus imágenes por transformaciones conformes se volvieron los candidatos a minimizar la energía de Willmore para superficies con género no nulo.

Esto condujo a la conjetura de la que trata esta Tesis.

Teorema (Conjetura de Willmore)**.** *Dada una superficie* Σ *orientada, compacta y embebida en* $\mathbb{R}^3$ *con género* $g \geq 1$*, vale que*

$$\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2.$$

El paper de Marques y Neves no solamente demuestra esta conjetura que estuvo abierta por casi 50 años, sinó que también se encarga de confirmar que no existen otros casos de igualdad salvo los ya mencionados.

El primer paso de esta demostración, que requerirá introducir una buena cantidad de teoría preliminar en el Capitulo 2, consiste en traducir este problema de superficies en $\mathbb{R}^3$ a uno de superficies en S^3: en efecto, extenderemos la definición de la energía de Willmore $\mathcal{W}$ a inmersiones isométricas $\Sigma \subset (M, g)$ donde (M, g) es una 3-variedad riemanniana suficientemente buena, de tal modo que $\mathcal{W}$ siga siendo una invariante conforme.

Consideremos entonces la proyección estereográfica $p : S^3 \setminus \{0, 0, 0, 1\} \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1 - x_4}, \frac{x_2}{1 - x_4}, \frac{x_3}{1 - x_4} \right).$$

Es sabido que el pullback por p de la métrica usual de $\mathbb{R}^3$ (denotada $p^* E_3$) da en $S^3 \setminus \{0, 0, 0, 1\}$ una métrica riemanniana conformemente equivalente a la que S^3 hereda de $\mathbb{R}^4$ (esta última denotada E_4).

Luego, si $\Sigma' \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie compacta, $\Sigma = p^{-1}(\Sigma)$ es una superficie compacta en $S^3 \setminus \{0,0,0,1\}$. Pensando entonces Σ como superficie de (S^3, p^*E_3), su energía de Willmore será la misma que como superficie de (S^3, E_4). La primera energía coincide con la energía de Willmore de Σ' en $\mathbb{R}^3$, mientras que la segunda, veremos en la sección 2.7 es igual a:

$$\int_{\Sigma} (1 + H^2)\, d\Sigma,$$

donde H es la función curvatura media en $\Sigma \subset (S^3, E_4$ (que definiremos formalmente más adelante). De esto, el problema original de Willmore es equivalente a minimzar la integral de $1 + H^2$ sobre $\Sigma \subset S^3$ compacta. De aquí en más, cada vez que escribamos $\mathcal{W}(\Sigma)$ para $\Sigma \subset (S^3, E_4)$, nos estaremos refiriendo a esta última integral.

Algo que resulta de sumo interés acá, es que la imagen por la proyeccion estereografica de la superficie $S^1(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^1(\frac{\sqrt{2}}{2}) \subset S^3$ (la cual se conoce como ”Toro de Clifford”), coincide con el candidato a Toro de menor energía de Willmore. En base a esto, lo que Marques y Neves prueban su paper, y lo que probaremos en esta Tesis, será lo siguiente:

Teorema (Conjetura de Willmore en S^3)**.** *Dada una superficie embebida $\Sigma \subset S^3$ cerrada de género $g \geq 1$, entonces*

$$\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2,$$

donde la igualdad se da si y solo si Σ es el toro de Clifford salvo transformaciones conformes de S^3.

Observación 1.0.3. *Previo al trabajo que estudiaremos en esta Tesis, ya se sabia que la conjetura original de Willmore valía para algunos casos particulares: el mismo Willmore lo había probado para cualquier toro que consistiera de un tubo de radio constante al rededor de una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ en el año 1971. En 1984, Langer y Singer lo probarían para Toros de Revolución. En 1999, Ros probaría la conjetura para toros en S^3 invariantes por el mapa antipodal, y el año siguiente la probaría para toros en $\mathbb{R}^3$ simétricos respecto a un punto. Por otro lado, debido a la relación entre la conjetura de Willmore y el área de matemática aplicada a la biología, en 1991 Mutz y Benisimon lograron esencialmente corroborar la conjetura experimentalmente. Otros resultados parciales que fueron obtenidos a lo largo de los años son nombrados en [9].*

Volviendo a la conjetura en sí, y recordando que una superficie es minimal si su curvatura media es constantemente nula, es claro que la conjetura de Willmore implica inmediatamente buena parte del siguiente resultado:

Teorema (Área de superficies minimales en S^3)**.** *Dada una superficie minimal embebida $\Sigma \subset S^3$ cerrada de género $g \geq 1$, entonces*

$$\acute{A}rea(\Sigma) \geq 2\pi^2,$$

donde la igualdad se da si y solo si Σ es el toro de Clifford salvo transformaciones isométricas de S^3.

Sin embargo, lo que Marques y Neves lograron hacer en su trabajo fue primero demostrar esta propiedad sobre superficies minimales, y luego lograron probar la versión trasladada a S^3 de la conjetura de Willmore como corolario de esto.

A continuación, damos un breve resumen de lo que veremos en cada capítulo de esta tesis. Informalmente, esto también servirá como un recuento informal de las ideas detrás de la demostración:

En el Capítulo 2, introduciremos los conocimientos geometría diferencial y riemanniana necesarios para encarar el trabajo de Marques y Neves. Recordaremos lo que son las formas diferenciales, hablaremos de la variedad de Grassman, definiremos la curvatura en superficies inmersas en 3-variedades Riemannianas arbitrarias, introduciremos las definiciones necesarias para definir el operador de Jacobi, y también construiremos las bases teóricas de geometría local y geometria conforme necesarias para pasar generalizar la energia de Willmore y pasar el problema a la esfera.

En el Capítulo 3, introduciremos las herramientas de teoría de la medida necesarias para trabajar con las diversas generalizaciones del concepto de superficie con las que se trabaja en el paper, al igual algunos conceptos de topología. Hablaremos de medidas de Radón, introduciremos a las Currents y los Varifolds, al igual que métricas para sus espacios. Estudiaremos propiedades de compacidad, y lemas útiles relacionados a variaciones. Además, hablaremos de la frontera reducida para conjuntos de perímetro finito. Para terminar con esta sección, mencionaremos las homologías que usaremos a lo largo de los argumentos topologicos de la tesis, e introduciremos un teorema de separación que nos permitirá decir que $S^3 \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas.

En el Capítulo 4, dada una superficie embebida compacta $\Sigma \subset S^3$, definiremos una familia pentaparamétrica de superficies (en realidad, superficies generalizadas) como $\Sigma_{(v,t)} \subset S^3$, donde $v \in B^4$ y $t \in (-\pi, \pi)$. Puntualmente, definiremos

$$\Sigma_{(v,t)} = F_v(\{x \in S^3 : d(x) < t\})$$

donde $F_v : S^3 \to S^3$ es el mapa que manda x a $y \in S^3$, $y \neq -x$, tal que $x, v, -y$ están alineados en $\mathbb{R}^4$, y d es la distancia geodésica en S^3 signada (según la componente conexa de $S^3 \setminus \Sigma$ en la que caiga el punto). Luego, veremos que $\text{Área}(\Sigma_{(v,t)}) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$ para todo (v, t) en el dominio y veremos propiedades sobre una extensión del mapa de Gauss.

En el Capítulo 5, extenderemos la familia canónica definida en el capítulo anterior a una función C que toma como dominio $\overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$ y tiene por imagen a superficies generalizadas de S^3, que será continua según una de las nociones de continuidad definidas en el Capítulo 3, cumplirá las condiciones generales de área definidas en la sección anterior, y cumplirá $C(v, -\pi) = C(v, \pi) = 0$ (en este contexto, 0 será la superficie generalizada trivial). Tras probar esto, usando que $\overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$ es homeomorfo a I^5, conseguiremos un mapa continuo Φ de I^5 a superficies generalizadas de S^3. Luego, estudiaremos varias de sus propiedades geométricas y topológicas, que se derivarán de las propiedades de la familia $\Sigma_{(v,t)}$ y del mapa extendido de Gauss.

En el Capítulo 6, comenzaremos definiendo los objetos necesarios para aplicar teoría Min-Max de Almgren-Pitts. Esto implicará meternos con definiciones que nos permitirán hablar de homotopías entre sucesiones discretas de mapas a superficies generalizadas. Luego, definiremos la anchura de una clase de equivalencia homotópica de estas sucesiones como el ínfimo entre todos los elementos de la clase del máximo área de todas las superficies en las imágenes de los mapas. A partir de acá, veremos cómo extraer una sucesión discreta de mapas a superficies generalizadas a partir del mapa Φ definido en 5. Además, veremos cómo extraer de esta sucesión de mapas una superficie minimal embebida Σ cuya área coincidirá con la anchura de la clase de equivalencia homotópica de esta sucesión.

El Capítulo 7 está completamente dedicado a probar que si Φ es un mapa lo suficientemente bueno (en particular, si cumple las propiedades que vimos que cumple Φ en 5), entonces el ancho de la familia homotópica que induce es estrictamente mayor a 4π. Para hacerlo, haremos un largo y técnico argumento topológico usando grupos de homología cúbica con coeficientes enteros.

Finalmente, el Capítulo 8 comenzará probando que el ínfimo del área de superficies minimales con género $g \geq 1$ en S^3 se realiza. Este argumento consiste en usar resultados de compacidad de superficies generalizadas para ver que existe una Σ (superficie generalizada) con área generalizada mínima, y luego usaremos argumentos de teoría geométrica de la medida para ver que Σ es una superficie en el sentido usual.

Segundo, probaremos que este mínimo es es igual a $2\pi^2$. Para eso, tomaremos la superficie de área mínima Σ, y probaremos que su índice (informalmente, la cantidad de variaciones linealmente independientes que hacen que su área decrezca localmente) es necesariamente menor o igual a 5, lo que implicará que Σ es el toro de Clifford salvo isometrías. Para hacerlo, asumiremos que el índice es mayor o igual a 6 y llegaremos a un absurdo usando la familia Min-Max asociada a Σ y una perturbación de esta familia que mantiene las mismas propiedades necesarias para usar el resultado del Capítulo 7.

Por último, probaremos la conjetura de Willmore: dada una superficie Σ, tomamos la clase de homotopía asociada mediante el mapa Φ a Σ, y usándola extraeremos una superficie minimal Σ' con área igual a la anchura de esta clase, que resultará menor o igual a $\mathcal{W}(\Sigma)$, lo que probará que $\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2$. Por último, si tengo igualdad, probaremos que existe $\Sigma_w = F_w(\Sigma)$ tal que su área coincide con $\mathcal{W}(\Sigma) = 2\pi^2$, y además obtendremos que esta Σ_w es minimal. Como F_w es conforme, Σ será conformemente equivalente a Σ_w, que será el toro de Clifford salvo isometrías.

Capítulo 2

Preliminares: Geometría Diferencial y Riemanniana

2.1. El Lema de la introducción

Aprovechamos este espacio para probar que la energía de Willmore siempre es al menos 4π, con igualdad en el caso de la esfera.

Demostración:
En esta demostración, $k_1(x)$ y $k_2(x)$ son las curvaturas principales de Σ en el punto x, $K(x) = k_1(x)k_2(x)$ la curvatura Gaussiana en x y $N : \Sigma \to S^2$ el mapa de Gauss que manda cada $x \in \Sigma$ a la normal unitaria a Σ en x que apunta para afuera.

Veamos primero que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, para todo $p \in S^2$, existe $x \in \Sigma$ tal que $N(x) = p$ y además $K(x) \geq 0$. Para verlo, considero la función continua $f_p : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida como $f(y) = \langle y, p \rangle$ (donde tomo el producto interno de $\mathbb{R}^3$ estándar). Claramente, f_p es continua sobre un compacto, por lo que tiene un máximo en un $x \in \Sigma$ tal que $f_p(x) = M$.

Luego, el plano $\Pi : \langle z, p \rangle = M$ es tangente a Σ en el en el punto x, de donde $k_1(x)$ y $k_2(x)$ tienen el mismo signo, y además tenemos que p es normal para afuera de Σ en x, por lo que $N(x) = p$.

Con esto probado, notemos que

$$H(x)^2 = \left(\frac{k_1(x) - k_2(x)}{2} \right)^2 + K(x).$$

Luego, llamando $\Sigma' = \{x \in \Sigma : K(x) \geq 0\}$, tenemos la cadena de desigualdades

$$\mathcal{W}(\Sigma) \geq \int_{\Sigma'} H^2 \; d\Sigma' \geq \int_{\Sigma'} K \; d\Sigma'.$$

De acá, recordando que K es el Jacobiano del mapa de Gauss N, y usando lo probado al principio, obtenemos que esto último es mayor o igual al área de S^2, que es 4π.

Para que la cadena de desigualdades sea una igualdad, necesitamos $\Sigma' = \Sigma$ y que $(k_1(x) - k_2(x))^2$ integre 0 en Σ, lo que implica $k_1 = k_2$ sobre Σ. El resultado sigue de que las esferas son las únicas superficies totalmente umbílicas en $\mathbb{R}^3$. $\square$

2.2. La Variedad de Grassman

El objetivo de esta sección es definir la Variedad de Grassman y hacer algunos comentarios sobre cómo es su estructura de Variedad Diferecial.

Definición 2.2.1 (Variedad de Grassman). Sean $k \leq n$ enteros positivos, la *Variedad de Grassman sobre* $\mathbb{R}^n$ (la cual notaremos $G(k,n)$ a lo largo de esta Tesis) es el conjunto de los k-subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

Dado un k-subespacio S, llamemos p_S a la proyección ortogonal de rango k que tiene a S como imagen. Para darle estructura de Variedad Diferecial a este conjunto, primero identificamos cada k-subespacio S con la matriz $E_S = 2p_S - Id_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que refleja ortogonalmente a cada punto por el subespacio S. De ahora en adelante, vamos a fijar S y describir cómo construir una carta de $G(k,n)$ al rededor de S. Para facilitarnos las cuentas, vamos a trabajar en la base ortonormal $\mathcal{B}$ que hace que p_S sea una matriz diagonal con k unos seguido de $n-k$ ceros. Llamaremos P a esta matriz, y llamemos $E = E_S = 2P - Id_n$.

Definición 2.2.2 (Matrices antidiagonales). Vamos ahora a decir que una matriz de $n\times n$ es *k-antidiagonal* si todas las entradas del cuadrante de $k \times k$ superior izquierdo y del cuadrante de $(n-k)\times(n-k)$ inferior derecho son nulas (recordemos que estamos trabajando en la base $\mathcal{B}$). Llamo $\mathbb{X}$ al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$ de las matrices k-antidiagonales y antisimétricas

Observación 2.2.3. *Como $\mathbb{X}$ este es un espacio Vectorial real de dimensión $k(n-k)$, podemos corresponderlo con $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. En particular, podemos usarlo para definir cartas.*

Recordemos que si $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e^X se define según la Serie de Taylor $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}$, que converge en toda matriz. Vale además que $(e^X)^{-1} = (e^{-X})$ y que $(e^X)^T = (e^{X^T})$. De esto, si X es antisimétrica, $(e^X)^{-1} = (e^{-X}) = e^{X^T} = (e^X)^T$, por lo que e^X es ortogonal. Algo que también vamos a usar es que si $z \in \mathbb{C}$ es autovalor de M, entonces e^z es autovalor de e^M.

Es fácil notar ahora que $EX = -XE$ para toda $X \in \mathbb{X}$. De esto, podemos probar inductivamente que $EX^i = (-X)^i E$, y luego $e^X E = Ee^{-X}$. Definimos entonces el mapa $\varphi : \mathbb{X} \to G(k,n)$ como $\phi(X) = e^X E e^{-X} = e^{2X}E$, y vamos a ver que si restringimos φ a matrices con norma suficientemente chica esto define una carta alrededor de S.

Demostración:

Primero veamos que la imagen de φ cae en el codominio: fijemos X. Como e^X es ortogonal, si llamamos Q a $e^X Pe^{-X}$, tenemos que Q es una proyección ortogonal a un subespacio T de dimensión k. Luego, $e^X Ee^{-X} = e^X(2P - Id_n)e^{-X} = 2Q - Id_n = E_T$, y φ está bien definida.

Veamos ahora que φ es inyectiva si $||X|| < \frac{\pi}{2}$: como E es inversible, nos basta con probar que si $X, Y \in \mathbb{X}$ tienen autovalores complejos de norma menor a $\frac{\pi}{2}$ y $e^{2X} = e^{2Y}$ entonces $X = Y$. Como $2X$ y $2Y$ son antisimétricas, son diagonalizables y sus autovalores son imaginarios puros, y en particular caen en $(-i\pi, i\pi)$.

Notemos ahora que $z \to e^z$ es inyectiva en $(-i\pi, i\pi)$. De esto, podemos probar que $\mathbb{V}$ es autoespacio de $2X$ con autovalor $\lambda \Leftrightarrow \mathbb{V}$ es autoespacio de e^{2X} con autovalor e^λ, donde la ida es clara y la vuelta es por la inyectividad de la exponencial restringida. De esto, como $e^{2X} = e^{2Y}$, $2X$ y $2Y$ tienen los mismos autoespacios para los mismos autovalores, y luego $X = Y$, lo que prueba inyectividad.

Comentamos ahora los últimos detalles: si $E_T \in G(k, n)$ cumple $||E_T - E|| < 2$, existe $X_T \in \mathbb{X}$ con $||X_T|| < \frac{\pi}{2}$ tal que $\varphi(X_T) = E_T$. Para verlo, notemos que -1 no puede ser autovalor de $E_T E$, ya que si lo fuera, existiría un vector v con $(E_T E)v = -v$ y luego $(E_T E - Id_n)v = -2v$, por lo que -2 es autovalor de $E_T E - Id_n$. Sin embargo, esto es absurdo ya que $(E_T - E)E = E_T E - Id_n$ y como E es ortogonal, $||E_T E - Id_n|| < 2$. Luego, como los autovalores de $E_T E$ tienen norma 1 y no son -1, les puedo tomar logaritmo y de esta forma puedo definir $X_T = \frac{1}{2}\log(E_T E)$ que se puede ver cumple todo lo deseado. □

Observación 2.2.4. *Por último, para la compatibilidad de cartas, si* $e^{2X}E_S = e^{2Y}E_T$, *la función que localmete determina* Y *en función de* X *es* $Y = \frac{1}{2}\log(e^{2X}E_S E_T)$, *que resulta un difeomorfismo en la intersección de las cartas centradas en* E_S *y* E_T.

2.3. Hacia una definición general de curvatura

Sea Σ una subvariedad de S^3, y sea $\mathfrak{X}(\Sigma)$ el conjunto de los campos suaves tangentes a Σ. Vamos a denotar $X_p = X(p)$ a la evaluación en p del campo $X \in (\Sigma)$. Dados $X, Y \in (\Sigma)$, daremos cuatro definiciones de "derivar el campo Y en la dirección del campo X".

Definición 2.3.1. Definamos una noción de derivar que vive en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Defino

$$DY(X)(p) = DY_p(X_p) = \lim_{t\to 0} \frac{Y(\alpha_p(t)) - Y(\alpha_p(0))}{t},$$

donde $\alpha_p \subset \Sigma$ es el flujo del campo X arrancado a tiempo 0 en p.

Observación 2.3.2. *Pasando a $\mathbb{R}^k$ ($k \in \{1,2,3\}$) por medio de una carta y usando regla de la cadena, notar que este α_p puede ser reemplazado por cualquier curva $\beta \subset \Sigma$ que cumpla que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = X_p$. Notar que el campo vectorial $DY(X)$ en no tiene por qué resultar tangente a Σ.*

Definición 2.3.3 (Corchete de Lie)*.* Definimos el *corchete de Lie* como

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = DY(X) - DX(Y).$$

Por definición, es directo que $[X, Y] = -[Y, X]$. Citamos además de [8, Lema 13.1] el siguiente Lema conocido, que nos será sumamente útil.

Lema 2.3.4. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, entonces $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.*

Definición 2.3.5 (Derivada Covariante en S^3)*.* Definimos la *derivada Covariante en S^3* (también conocida como la derivada Levi-Civita en S^3) como derivar y proyectar sobre el tangente de S^3. Formalmente, usando el producto interno de variedad Riemanniana en S^3, definimos

$$(\overline{\nabla}_X Y)(p) = DY_p(X_p) - \langle DY_p(X_p), p\rangle p.$$

Notar que $T_pS^3 = \{p\}^\perp$. De esto, si $\beta \subset \Sigma$ cumple $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = X_p$, vale $\langle Y(\beta(t)), \beta(t)\rangle = 0$. Derivando respecto a t y evaluando en $t = 0$ (usando que $(\langle f(t)g(t)\rangle)' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$), obtenemos que

$$\langle DY_p(X_p), p\rangle + \langle Y_p, X_p\rangle = 0.$$

De esto, obtenemos la fórmula

$$(\overline{\nabla}_X Y)(p) = DY_p(X_p) + \langle Y_p, X_p\rangle.$$

Definición 2.3.6 (Derivada Covariante en Σ)*.* La última noción de derivada es la derivada covariante ∇ en Σ, que resulta de derivar y proyectar al tangente $T_p\Sigma$ de Σ en vez de S^3. Sea N_p un vector en T_pS^3 unitario ortogonal a $T_p\Sigma$, definimos

$$\nabla_X Y(p) = \overline{\nabla}_X Y(p) - \langle \overline{\nabla}_X Y(p), N_p\rangle N_p = DY_p(X_p) + \langle Y_p, X_p\rangle p - \langle DY_p(X_p), N_p\rangle N_p$$

Observación 2.3.7. *Tomemos ahora $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Tenemos que $\langle Y_p, N_p\rangle = 0$ en Σ. Tomando $p = p(t)$ una curva en Σ por p con velocidad inicial $p'(0) = X_p$ (para que esto sea posible usamos que X_p es tangente). Pensando a N como campo en Σ, componiendo con la curva $p(t)$, derivando y evaluando en 0 obtenemos que*

$$\langle DY_p(X_p), N_p\rangle + \langle Y_p, DN_p(X_p)\rangle = 0.$$

De esto, podemos escribir la derivada covariante en el caso de campos tangentes a Σ *como*

$$(\nabla_X Y)(p) = DY_p(X_p) + \langle Y_p, X_p \rangle p + \langle Y_p, DN_p(X_p) \rangle N_p.$$

Otra cosa que podemos ver, es que si hacemos lo mismo pero con $\langle X_p, N_p \rangle = 0$ *y con una curva por* p *con velocidad inicial* Y_p*, obtenemos que*

$$\langle DX_p(Y_p), N_p \rangle + \langle X_p, DN_p(Y_p) \rangle = 0.$$

De esta identidad y $\langle DY_p(X_p), N_p \rangle + \langle Y_p, DN_p(X_p) \rangle = 0$*, tenemos restando que*

$$\langle DN_p(X_p), Y_p \rangle - \langle DN_p(Y_p), X_p \rangle = \langle N_p, DY_p(X_p) - DX_p(Y_p) \rangle = \langle N_p, [X, Y](p) \rangle = 0,$$

donde la última igualdad sale de que $[X, Y](p)$ *es un campo tangente a* Σ *en* p*. Abusando notación, notemos que podemos pensar a* DN_p *como un operador lineal de vectores en* $T_p\Sigma$ *a vectores en* $T_{N(p)}S^3$*. Más aún, si* $\beta \subset \Sigma$ *con* $\beta(0) = p$ *y* $\beta'(0) = v \in T_p\Sigma$*, tenemos que derivando* $\langle N_{\beta(t)}, \beta(t) \rangle = 0$ *y evaluando en* $t = 0$ *obtenemos* $\langle DN_p v, p \rangle + \langle N_p, v \rangle = 0$*. Como* $N_p \perp v$ *por definición, ambos terminos deben ser nulos y luego todo elemento de la imagen de* DN_p *es ortogonal a* $N(p)$ *y a* p*, por lo que cae en* $T_p\Sigma$*.*

Podemos entonces pensar a DN_p como endomorfismo en el espacio vectorial $T_p\Sigma$. Además, por la identidad obtenida anteriormente, como X e Y eran campos arbitrarios en Σ,

$$\langle DN_p v, w \rangle = \langle v, DN_p w \rangle$$

para todo par de vectores v, w en $T_p\Sigma$. Esto nos permite dar nuevas definiciones.

Definición 2.3.8 (Operador de forma). Dado $p \in \Sigma$, defino al *operador de forma de la inclusión* $\Sigma \subset S^3$ como $S_p = -DN_p \in \mathrm{End}(T_p\Sigma)$, que resulta un operador lineal simétrico. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, podemos definir $(SX)(p) = S_p X_p$ para todo $p \in \Sigma$, lo que nos da un nuevo campo tangente allí. De esto, S es interpretable como un operador lineal $S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Observación 2.3.9. *Con esta definición, y la última escritura que habíamos dado de la derivada covariante, podemos también escribir*

$$(\nabla_X Y)(p) = DY_p(X_p) + \langle Y_p, X_p \rangle p - \langle (SX)_p, Y_p \rangle N_p.$$

El hecho de que S_p sea simétrica es lo que nos permite definir una de las nociones de curvatura que usaremos a lo largo de esta Tesis.

Definición 2.3.10 (Curvatura). Para cada $p \in \Sigma$ podemos diagonalizar S_p con una base ortonormal de autovectores de S_p. Notando $\{v_1(p), v_2(p)\}$ a estos vectores en $T_p\Sigma$, y $k_1(p), k_2(p)$ a los autovalores respectivos, llamo *curvaturas principales de* Σ a los k_i y *direcciones principales de curvatura de* Σ a los v_i.

Esto nos permite extender nuestra definición conocida de superficie minimal a superficies en cualquier 3-variedad Riemanniana. Para terminar esta sección, probaremos un Lema que solamente requiere trabajar con las nociones recién introducidas y nos será útil cerca del final de esta Tesis.

Lema 2.3.11. *Sea $\Sigma \subset S^3$ una superficie minimal conexa que cumple $\langle N_p, w\rangle = 0$ para todo $p \in \Sigma$, donde $w \neq 0$ es un vector fijo, entonces Σ es una gran esfera.*

Demostración:
Sea P_p la proyección ortogonal sobre $T_p\Sigma$. Sabemos, usando la hipótesis, que

$$P_p(w) = w - \langle w, p\rangle p - \langle w, N_p\rangle N_p = w - \langle w, p\rangle p.$$

Si tomamos $\langle N_p, w\rangle = 0$, componemos N_p con una curva $\beta(t) \subset \Sigma$ con $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = v \in T_p\Sigma$ y derivamos respecto a t, tenemos que

$$0 = \langle DN_p v, w\rangle = \langle DN_p v, P_p(w)\rangle = \langle v, DN_p(P_p(w))\rangle$$

ya que $DN_p v \in T_p\Sigma$ y DN_p es simétrico (y por lo tanto autoadjunto). De esto, tomando $v = DN_p(P_p(w))$ (que notemos, cae en $T_p\Sigma$), obtenemos que $S_p(P_p(w)) = 0$.

Notemos entonces que si $P_p(w) \neq 0$, la matriz S_p tiene núclo no trivial. Como tiene autovalores opuestos (por ser Σ minimal) cuyo producto es 0 (de lo contrario, sería inversible), ambos autovalores de S_p son nulos, y $S_p = 0$ para todo $p \in \Sigma$ con $P_p(w) \neq 0$. Además, $P_p(w) = 0 \Rightarrow w = \langle w, p\rangle \Rightarrow p = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, $S_p = 0$ para todos salvo a lo sumo dos puntos de Σ. De esto, por continuidad obtenemos que $DN_p = 0$ para todo $p \in \Sigma$, lo que implica que la función $p \to N_p$ es constante en Σ.

Sea N_0 tal que $N_p = N_0$ para todo $p \in \Sigma$, tenemos que $\langle p, N_0\rangle = \langle p, N_p\rangle = 0$ para todo $p \in \Sigma$. Luego, definiendo $S_0 = N_0^{\perp} \cap S^3$, tenemos que $\Sigma \subset S_0$, que resulta una gran esfera de S^3. Como ambas son variedades de la misma dimensión, Σ es abierta y cerrada en S_0. Como Σ es conexa, tenemos entonces $\Sigma = S_0$. $\square$

2.4. Desde conexiones hasta el operador de Jacobi

Sobre el final de la demostración de la conjetura de Willmore, nos serán útiles algunas propiedades sobre el operador de Jacobi. El objetivo de esta sección sera repasar la teoría necesaria para definirlo y probar las propiedades que usaremos.

Recordemos que una conexión es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que $\nabla(X, Y)$ es $\mathcal{C}^\infty$-lineal en la primera coordenada, $\mathbb{R}$-lineal en la segunda, y tal que $\nabla(X, f.Y) = f.\nabla(X, Y) + X(f).Y$ para toda $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ suave, donde $X(f)(p)$ se define como $Df_p(X_p)$. En general escribimos $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$. Es fácil notar que tanto a mano que tanto $\overline{\nabla}$ como ∇ definidos en 2.3.5 y 2.3.6 se tratan de conexiones.

Notando que $p \to Df_p(X_p)$ es suave cuando f y X lo son, podemos pensar a X como un operador lineal $X : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ que además resulta una derivación, ya que vale $X(f.g) = X(f).g + f.X(g)$. En base a esto, probemos un Lema.

Lema 2.4.1. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y ∇ la conexión definida en 2.3.6. Si defino $g(p) = \langle Y_p, Z_p \rangle$, tengo $g \in C^\infty(\Sigma)$, y más aún, vale lo siguiente:*

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Demostración:
La suavidad de g es clara tomando cartas y coordenadas a todo. Por otro lado, por definición

$$X(g)(p) = Dg_p(X_p) = (g \circ \beta)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle Y_{\beta(t)} Z_{\beta(t)} \rangle,$$

pero esto último por derivada del producto interno es

$$\langle DY_p(X_p), Z_p \rangle + \langle Y_p, DZ_p(X_p) \rangle,$$

que es igual a lo que queremos una vez proyectamos ortogonalmente. □

A esta propiedad se la conoce como *compatibilidad de la conexión con la métrica riemanniana*. Vale que toda conexión Levi-Civita es compatible con la métrica de la cual proviene (es decir, podríamos haber probado lo mismo para S^3 y $\overline{\nabla}$, en particular).

Definición 2.4.2 (Torsión). Dada una conexión ∇, su *torsión* es

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Observación 2.4.3. *No es difícil ver que tanto $\overline{\nabla}$ como ∇ (definidas en 2.3.5 y 2.3.6) son conexiones libres de torsión. En general, vale que dada una variedad riemanniana M, existe una única conexión sin torsión compatible con la métrica, que es la que venimos llamando conexión Levi-Civita.*

Probamos ahora la ecuacion de Codazzi. Recordemos al operador S definido en 2.3.8.

Teorema 2.4.4 (Ecuación de Codazzi). *Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, si ∇ es la conexión Levi-Civita de Σ vale que*

$$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) = S[X,Y]$$

Demostración:

Para hacer esta cuenta utilizaremos la regla de Leibniz para derivar un producto en espacios vectoriales: si X, E, F, G son espacios vectoriales, $S : E \times F \to G$ es bilineal continua y $f : \Omega \to E$, $g : \Omega \to F$ son suaves, donde $\Omega \subset X$ es abierto, entonces la función $h = S(f, g) : X \to G$ es suave y vale

$$D_x h(v) = S(D_x f(v), g(x)) + S(f(x), D_x g(v)).$$

Fijamos entonces p. Sea $U \subset \mathbb{R}^4$ entorno de p, engordamos N a U. Tenemos entonces $N : U \to \mathbb{R}^4$ y $DN : U \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$. Sea $S : \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \times \mathbb{R}^4$ la forma lineal evaluación, tenemos y sea $\beta \subset \Sigma$ con $\beta(0) = 0$ y $\beta'(0) = X_p$. Si $Z = SY \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, derivo $Z(\beta(t))$ y evalúo en $t = 0$ tendremos

$$DZ_p(X_p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ S(-DN_{\beta(t)}, Y_{\beta(t)}) = S(D_p(-DN_p(X_p)), Y_p) + S(-DN_p, DY_p(X_p)).$$

Notemos que $D_p(-DN_p(X_p))(Y_p)$ es bilineal, y como N y β son C^2, es también simétrica. Reescribiendo entonces esto como $-D^2N_p(X_p, Y_p)$ y sacándonos de encima S, tenemos que

$$DZ_p(X_p) = -D^2N_p(X_p, Y_p) - DN_p(DY_p(X_p)).$$

Usando entonces la ecuación $\nabla_X Y = DY(X) + \langle Y, X\rangle(p) - \langle SX, Y\rangle N$ a la que habíamos llegado antes para $Y = SY$, tenemos que

$$\nabla_X(SY)(p) = -D^2N_p(X_p, Y_p) - DN_p(Y_p(X_p)) + \langle S_pY_p, X_p\rangle p - \langle S_pX_p, S_pY_p\rangle N_p.$$

Tenemos entonces que todo es simétrico en X e Y salvo el segundo término. Luego,

$$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) = S(DY(X) - DX(Y)) = S[X, Y],$$

lo que completa la prueba. $\square$

A raíz de esta igualdad, podemos definir un nuevo Tensor.

Definición 2.4.5 (Tensor de Codazzi). Definimos el *tensor de Codazzi* ∇S en Σ como

$$\nabla S(X, Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y).$$

Observación 2.4.6. *Como $\nabla_X Y(p)$ depende solo puntualmente de p, vale que ∇S en p depende solamente del valor de X en p. Para ver que lo mismo vale con Y, usamos otra propiedad que nos interesa demostrar, que es que este tensor resulta simétrico.*

En efecto, $\nabla S(X, Y) = \nabla_X(SY) - S(\nabla_X Y) = \nabla_Y(SX) + S[X, Y] - S(\nabla_X Y)$, donde la última igualdad es por 2.4.4. Además, como ∇ tiene torsión nula, esto es igual a

$$\nabla_Y(SX) + S(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - S(\nabla_X Y) = \nabla_Y(SX) - S(\nabla_Y X) = \nabla S(Y, X)$$

y estamos.

Podemos entonces definir la derivada covariante del tensor S *en la dirección de* X *como* $(\nabla_X S)Y = S(X,Y)$. *Tenemos así* $\nabla_X S : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$, *y esto induce* $\nabla_X S(p)$, *que para todo* $p \in \Sigma$ *resulta un endomorfismo lineal de* $T_p\Sigma$ *(recordemos que el tensor de Codazzi tiene dependencia puntual). Con estas definiciones, vale que la derivada covariante es una derivación, ya que* $\nabla_X(SY) = (\nabla_X S)Y + S(\nabla_X Y)$.

Introduzcamos ahora la siguiente propiedad conocida sobre la existencia de ganchos con condición inicial. El siguiente Teorema es conocido, y se puede encontrar en [5, Capítulo 3, Ejercicio 7]. Su prueba es una aplicación directa del transporte paralelo.

Teorema 2.4.7. *Dado* $p \in \Sigma$ *y* $B = \{v_1, v_2\}$ *una base ortonormal de* T_pM, *existe un entorno* U *de* p *en* Σ *y existen campos* ∂_1, ∂_2 *en* U *tangentes a* Σ *tales que* $B_q = \{\partial_1(q), \partial_2(q)\}$ *es una base ortonormal de* $T_q\Sigma$ *para todo* $q \in U$ *con* $B_p = B$, *y tales que* $\nabla_{\partial_i}\partial_i = 0$ *para* $i = 1, 2$.

Estos campos también reciben el nombre de *campos coordenados ortonormales* o *frame geodésico.*

Definamos ahora más conceptos necesarios para llegar al operador de Jacobi.

Definición 2.4.8 (Gradiente). Dada $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ suave, el *gradiente de* f *en* p es el único vector $\nabla f(p) \in T_p\Sigma$ tal que para todo $v \in T_p\Sigma$ vale

$$Df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

(Recordar que tenemos existencia y unicidad por el Teorema de representación de Riesz.)

A $Df_p(v)$ también se le llama *derivada direccional de* f *en* p *en la dirección* v. Podemos calcularla tomando una curva β apropiada y derivando $f(\beta(t))$.

Si $\{\partial_1, \partial_2\}$ es un frame geodésico en un entorno U de p en Σ, se define $\partial_i f : U \to \mathbb{R}$ como

$$\partial_i f(q) = Df_q(\partial_i(q)) = \langle \nabla f(q), \partial_i(q) \rangle.$$

De esto, las $\partial_i f$ nos dan las dos coordenadas del gradiante de f en un frame dado.

Definición 2.4.9 (Laplaciano). Sea define el *Laplaciano* de f en p como la traza de $\nabla^2 f$. Más precisamente, si $\{\partial_1, \partial_2\}$ es frame geodésico en p, defino

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f,$$

donde $\partial_i^2 f = \partial_i(\partial_i(f))$.

Observación 2.4.10. *Notemos que $\Delta(f) : \Sigma \to \mathbb{R}$ resulta una función suave. Se puede probar que es independiente del frame geodésico elegido, ya que si consideramos el operador bilineal*

$$\nabla Df(X,Y) = X(Df(Y)) - Df(\nabla_X Y),$$

tenemos que $\partial_i(Df(\partial_i)) = \partial_i^2 f$ y $Df_p(\nabla_{\partial_i}\partial_i(p)) = Df_p(0) = 0$ para $i = 1, 2$. Luego, $\Delta(f)$ es la traza de este operador, y esta no depende de la base ortonormal elegida.

Volviendo al operador S, cuyos autovalores son las curvaturas principales, teníamos definida la curvatura media en Σ como $H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2}Tr(S_p)$. Además, definimos $|S|^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Esto da lugar a un nuevo Lema:

Lema 2.4.11. *Dado $p \in \Sigma$, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, $\{\partial_1, \partial_2\}$ frame geodésico en un entorno de p tal que $\partial_i(p)$ son las direcciones principales de curvatura en p, entonces*

$$\langle(\nabla_X S)\partial_i, \partial_i\rangle_p = X(\langle S\partial_i, \partial_i\rangle)(p),$$

donde pensamos a X como derivación. Como consecuencia de esto,

$$Tr(\nabla_X S) = X(Tr(S)) = 2X(H) = 2\langle\nabla H, X\rangle.$$

Demostración:
Fijo p y el frame geodésico en su entorno $\{\partial_1, \partial_2\}$. Por 2.4.1, tenemos que

$$X(\langle S\partial_i, \partial_i\rangle) = \langle\nabla_X(S\partial_i), \partial_i\rangle + \langle S\partial_i, \nabla_X\partial_i\rangle.$$

Por ser la derivada covariante una derivación y por ser S simétrica, esto es igual a

$$\langle(\nabla_X S)\partial_i + S(\nabla_X\partial_i), \partial_i\rangle + \langle S\partial_i, \nabla_X\partial_i\rangle = \langle(\nabla_X S)\partial_i, \partial_i\rangle + 2\langle\nabla_X\partial_i, S\partial_i\rangle.$$

Para probar lo primero, basta entonces ver $\langle\nabla_X\partial_i(p), v_i\rangle = 0$ ya que $S_p v_i = k_i(p)v_i$. Definamos entonces $g(q) = \langle\partial_i(q), \partial_i(q)\rangle = 1$ en un entorno de p. Derivando g en la dirección del campo X y evaluando en p, tenemos

$$0 = Dg_p(X_p) = X(g)(p) = 2\langle\nabla_X\partial_i(p), v_i\rangle$$

donde la última igualdad es por $v_i \in T_p\Sigma$. Esto prueba lo primero.

Para ver lo segundo, recordamos que la traza de un operador no cambia por pasar de una base ortonormal a otra, y recordamos la definición de gradiente. □

Finalmente, estamos en condiciones de definir el operador de Jacobi y probar la propiedad que usaremos sobre el final de esta Tesis.

Definición 2.4.12 (Operador de Jacobi). Dado $\Sigma \subset S^3$ superficie, el *operador de Jacobi de* Σ se define como $J : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ tal que $J(f) = \Delta f + 2f + |S|^2 f$.

Lema 2.4.13. *Sea $w \neq 0$, $f(p) = \langle N_p, w\rangle$, que resulta una función suave $f : \Sigma \to \mathbb{R}$, entonces vale que*

$$\Delta f = -2\langle \nabla H, w\rangle + 2H\langle p, w\rangle - |S|^2 f,$$

donde en este caso pensamos p como la función identidad en $\mathbb{R}^4$. En particular, si Σ es minimal, como $H = \nabla H = 0$, vale que $J(f) = 2f$.

Demostración:
Dado $w \in \mathbb{R}^4$, definimos $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ como el campo que proyecta w ortogonalmente a T_pM. Si derivo f a lo largo del flujo de un campo X, obtenemos que

$$X(f)(p) = Df_p(X_p) = \langle DN_pX_p, w\rangle + 0 = -\langle S_pX_p, W(p)\rangle,$$

donde la segunda igualdad sale de derivada de producto interno. De esto, tenemos $X(f) = -\langle SX, W\rangle = -\langle X, SW\rangle$. Por 2.4.1, volviendo a aplicar X a ambos lados tenemos que

$$X(X(f))(p) = -\langle \nabla_X X(p), SW(p)\rangle - \langle X_p \nabla_X(SW)(p)\rangle.$$

Sea ahora $\{\partial_1, \partial_2\}$ un frame geodésico en p en el sentido de las direcciones principales de curvatura, tomando $X = \partial_1$ y usando que $\nabla_{\partial_1}\partial_1 = 0$, tenemos que

$$\partial_1^2 f = -\langle \partial_1, \nabla_{\partial_1}(SW)\rangle = -\langle \partial_1, (\nabla_{\partial_1}S)W + S(\nabla_{\partial_1}W)\rangle = -\langle (\nabla_W S)\partial_1, \partial_1 - \langle \nabla_{\partial_1}W, S\partial_1\rangle,$$

donde la segunda igualdad es por ser la derivada covariante del tensor S una derivación, y la tercera es por la simetría de esta derivada covariante ($\nabla_X SY = \nabla_Y SX$).

Ahora, como $(S\partial_1)(p) = S_p v_1 = k_1(p)$, haciendo lo mismo con ∂_2, sumando, y usando 2.4.11 tenemos que

$$\Delta f = -2\langle \nabla H, W\rangle - k_1\langle \nabla_{\partial_1}W, v_1\rangle - k_2\langle \nabla_{\partial_2}W, v_2\rangle.$$

Para terminar, notemos que podemos escribir W como $W(p) = w - \langle w, p\rangle p - \langle w, N\rangle N$. Si derivamos $W(\beta(t))$ a lo largo de una curva por p con velocidad inicial v_1, la dirección principal de curvatura, obtenemos tras usar derivada del producto interno dos veces que

$$DW_p(v_1) = -\langle w, v_1\rangle p - \langle w, p\rangle v_1 - \langle w, DN_p(v_1)\rangle N_p - \langle w, N_p\rangle DN_p(v_1).$$

Sin embargo, como $DN_p(v_1) = -k_1(p)v_1$ y $v_1 = \partial_1(p)$, por la definición de la derivada covariante obtenemos que

$$\nabla_{\partial_1}W(p) = -\langle w, p\rangle v_1 + k_1(p)\langle w, N_p\rangle v_1,$$

de donde $\langle \nabla_{\partial_1} W, v_1 \rangle = -\langle w, p \rangle + k_1(p) f(p)$.

Haciendo lo mismo con $i = 2$ y reemplazando todo, obtenemos

$$\Delta f = -2\langle \nabla H, W \rangle + (k_1 + k_2)\langle w, p \rangle - (k_1^2 + k_2^2) f,$$

que es exactamente lo que queríamos. El corolario sobre el operador de Jacobi es inmediato desde acá. $\square$

Por último, citamos el siguiente resultado de [3, Proposición 3.1] que relaciona segundas variaciones de área y el operador de Jacobi.

Teorema 2.4.14. *Sea Σ una subvariedad compacta minimal de codimensión 1 de una variedad Riemanniana M con normal N. Sea $T = fN$, donde f es una función suave con soporte compacto en el interior de un entorno compacto de M que contiene a Σ. Si $\Sigma(t)$ es una familia 1-paramétrica de de variedades inmersas tangente en $t = 0$ a la variación T, entonces*

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} \ \acute{A}rea(\Sigma(t)) = -\int_\Sigma f J(f) \ d\Sigma$$

2.5. Matrices y Geometría Riemanniana local

Primero, daremos algunas definiciones de análisis matricial que nos serán útiles más adelante.

Definición 2.5.1 (Producto interno de la traza). Dadas $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ (matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$), defino su *producto interno* como $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^t)$.

Es fácil ver que este producto es bilineal, y es simétrico porque la traza una matriz y su traspuesta coinciden. Además, $\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}(AA^t)$ es igual a la suma de los cuadrados de todas las entradas de A, por lo que esto siempre es ≥ 0, y es 0 sólamente cuando $A = 0 \in M_n(\mathbb{R})$. Luego, esto es en efecto un producto interno.

Definición 2.5.2 (Norma de Frobenius). Llamo *norma de Frobenius* de una matriz a la norma que hereda del producto interno de la traza:

$$||A||_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^t)}.$$

Además, notaremos $|A|^2 = AA^t$, que resulta una matriz semidefinida positiva, ya que (trabajando con el producto interno de $\mathbb{R}^n$), tenemos

$$\langle AA^t v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle \geq 0,$$

donde la igualdad sale expresando todo en función de los coeficientes de A y v. Como es simétrica y definida positiva, sus autovalores son reales no negativos, y podemos escribir $|A|^2 = OD^2O^t$ donde D^2 es una matriz diagonal con entradas no negativas y O es ortogonal.

Definición 2.5.3 (Módulo y valores singulares de una matriz). Dada $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$, defino el *módulo de A* como

$$|A| = ODO^t,$$

donde O ortogonal y D diagonal son tales que $AA^t = OD^2O^t$. Llamo *valores singulares de A* a los autovalores de $|A|$, y los notamos $\mu_i(A)$.

Observación 2.5.4. *Notemos que si A es simétrica, sus valores singulares coinciden con los módulos de sus autovalores λ_i. De esto, si A es simétrica, tenemos que $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)^2$ (si no lo es, por definición esto sería igual a $\sum_{i=1}^n \mu_i(A)^2$, y además sería igual a la suma de los cuadrados de las entradas de A. Esto lo usaremos más adelante).*

Volvamos entonces de nuevo a geometría. Recordemos de 2.3.8 al operador S (que manda p a $S_p \in \mathrm{End}(T_p\Sigma)$.

Definición 2.5.5 (Operador de forma sin traza). Dado $p \in \Sigma$, defino al *operador de forma sin traza* de la inclusión $\Sigma \subset S^3$ en el punto $p \in \Sigma$ como

$$S_p^0 = S_p - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S_p)Id_{T_p\Sigma}.$$

Observación 2.5.6. *A modo de observación, probamos la siguiente identidad:*

$$||S||_F^2 = 2||S^0||_F^2 + 2k_1k_2$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales / autovalores de S_p. El lado izquierdo de esto es $k_1^2 + k_2^2$ por ser S_p simétrica, y para terminar, notemos que los autovalores de S_p^0 son $k_i - \frac{1}{2}Tr(S_p)$ para $i = 1, 2$. Como S^0 es simétrica, $||S^0||_F^2$ es la suma de los cuadrados de sus autovalores, que resulta igual a $\frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2$. Esto prueba la identidad.

El objetivo de lo que queda de esta sección y la siguiente será definir nociones nuevas de curvatura. Para esto, tendremos que hablar de cartas y expresiones locales.

Definición 2.5.7 (Expresión local de un campo y su flujo). Sea M una variedad diferenciable y (U, φ) una carta de M. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ (es decir, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$), se define la *expresión local de X* como el campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$ dado por

$$\tilde{X}f(x) = X(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))$$

para todo $x \in \varphi(U)$ y $f \in C^\infty(\varphi(U))$.

Observación 2.5.8. *Notemos que estamos pensando a los campos como derivaciones, es decir X en el punto x es una derivación que toma funciones suaves cerca de x, y devuelve reales. De esto, otra forma de pensar esta misma definición es mediante la igualdad*

$$D\varphi_p(X(p)) = \tilde{X}(\varphi(p))$$

para todo $p \in U$.

Si α_t es un flujo del campo X y definimos $\rho_t(x) = \varphi(\alpha_t(\varphi^{-1}(x)))$. Recíprocamente, flujos de $\tilde{X}$ inducen flujos de X. A la vez, tenemos una correspondencia uno a uno entre campos en U y campos en $\varphi(U)$: si tengo un campo cualquiera $\tilde{X}$ en $\varphi(U)$, tenemos que $X(p) = (D\varphi_p)^{-1}(\tilde{X}(\varphi(p))) \in \mathfrak{X}(U)$ cumple que su expresión local es $\tilde{X}$.

Por último, si ∂_i son los ganchos en U inducidos por la carta, todo campo en U se escribe como suma de $f_i\partial_i$ para $i = 1, \dots, n$, $f_i \in C^\infty(U)$. De acá, si definimos $\tilde{f}_i = f_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, entonces la expresión local de X es el campo clásico en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ que viene dado por $\tilde{X} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$.

Definición 2.5.9 (Expresión local de la conexión)*.* Sea (M, g) variedad Riemanniana de dimensión m y (U, φ) carta de M, entonces la conexión de Levi-Civita (2.3.5) induce una conexión ∇^U en $\varphi(U)$ conocida como su *expresión local*. Pensando los campos como derivaciones en $C^\infty(U)$ y en $C^\infty(\varphi(U))$, definimos

$$(\nabla^U_{\tilde{X}}\tilde{Y}f)(x) = (\nabla_X Y(f \circ \varphi))(\varphi^{-1}(x))$$

para cada $f \in C^\infty(\varphi(U))$ y cada $x \in \varphi(U)$.

Observación 2.5.10. *Si pensamos a los campos en el sentido usual (es decir, como funciones suaves de $\varphi(U)$ a $T_q\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$), la expresión local de la conexión se escribe como*

$$\nabla^U_{\tilde{X}}\tilde{Y}(\varphi(p)) = D\varphi_p((\nabla_X Y)(p))$$

para todo $p \in U$. Se puede revisar a mano que ∇^U en efecto es una conexión en $\varphi(U)$. En general, omitiremos el superíndice U, y tendremos que darnos cuenta si estamos trabajando en una carta $\varphi(U)$ o en la variedad por contexto. Del mismo modo, en general omitiremos la notación $\tilde{X}$.

Hablemos ahora de métricas: recordemos que la métrica Riemanniana en $U \subset M$ es un producto interno g_p en cada T_pM para todo $p \in U$. Luego, su versión local en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ puede ser pensada como

$$\langle v, w\rangle_{x=\varphi(p)} := \langle (D\varphi_p)^{-1}v, (D\varphi_p)^{-1}w\rangle_{g_p}.$$

Esto es esencialmente declarar a $D\varphi_p$ como isometría entre T_pM y $\mathbb{R}^n$. Notando que para todo $x \in \varphi(U)$, la forma bilineal recién definida es simétrica y definida positiva, el teorema de representación Riesz nos garantiza la existencia del siguiente objeto:

Definición 2.5.11 (Expresión local de la métrica). Dada (M, g) variedad Riemanniana, (U, φ) una carta, llamo *expresión local de la métrica riemanniana* en $x \in \varphi(U)$ al operador lineal $g(x)$ definido positivo tal que

$$\langle v, w\rangle_x = \langle g(x)v, w\rangle$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$, donde el producto interno del lado derecho es el producto interno estándar de $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.5.12. *Notemos que $x \to g(x) \in GL(n, \mathbb{R})$ es suave en $\varphi(U)$. Si $x = \varphi(p)$, notamos*

$$g_{ij}(x) \coloneqq \langle g(x)e_i, e_j\rangle = \langle (D\varphi_p)^{-1}e_i, (D\varphi_p)^{-1}e_j\rangle_{g_p} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle_{g_p},$$

que simplemente son las entradas de la matriz $g(x)$. Estas funciones resultan suaves, y luego si precompongo con φ podemos quedarnos con una familia de funciones suaves $g_{ij} \in C^\infty(U)$ (estas dos g_{ij} podrían desambiguarse usando tildes o no, pero al igual que con los campos, lo haremos por contexto). Por otro lado, usaremos g^{ij} para los coeficientes de la matriz inversa

$$g^{ij}(x) = \langle (g(x))^{-1}e_i, e_j\rangle.$$

Notemos que tanto $g(x)$ como su inversa son simétricas.

Definición 2.5.13 (Operadores de Christoffel). La expresión local de la conexión en una carta (U, φ) induce una familia suave $\Gamma : \varphi(U) \to B_{sim}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ de operadores bilineales: dado $x \in \varphi(U)$ y dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, tomo cualquier par de campos X, Y en $\varphi(U)$ con $X(x) = v$, $Y(x) = w$, y defino

$$\Gamma_x(v, w) = \nabla_X Y(x) - DY_x(X_x).$$

Lema 2.5.14. *Valen las siguientes tres afirmaciones:*

1. *La definición de Γ_x no depende de la elección de X e Y.*
2. *En efecto, Γ_x es una aplicación bilineal simétrica.*
3. *Toda $\Gamma : \varphi(U) \to B_{sim}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ induce una conexión en $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Demostración:

Notemos que si fijo Y, tanto $\nabla_X Y(x)$ como $DY_x(X_x)$ solamente depende de lo que valga X en el punto x (lo segundo se puede ver en 2.3.1). Luego, si probamos 2, inmediatamente tenemos 1. Para probar esto, observamos que

$$\Gamma_x(v, w) - \Gamma_x(w, v) = \nabla_X Y(x) - \nabla_Y X(x) + DX_x(Y_x) - DY_x(X_x) = [X, Y] - [Y, X]$$

que es 0, ya que la derivada covariante tiene torsión nula.

Para la tercer propiedad, intuitivamente defino

$$\nabla_X Y(x) \coloneqq \Gamma_x(X_x, Y_x) + DY_x(X_x).$$

Para ver que esto es en efecto una conexión, la única propiedad que no es directa es $\nabla_X(f.Y) = f.\nabla_X Y + X(f)Y$. Esto, sin embargo, es una consecuencia de que $D(f.Y)_x(X_x) = f(x).DY_x(X_x) + X(f)(x).Y_x$, que sale de la definición en 2.3.1 y la derivada del producto. □

Observación 2.5.15. *Llamando $\tilde{\Gamma}$ al operador de recién, podemos definir otro $\Gamma : U \to$ Bil$(TM \times TM, TM)$ como $\Gamma_p(v, w) \coloneqq \tilde{\Gamma}_{\varphi(p)}(D\varphi_p v, D\varphi_p w)$. En la siguiente definición usaremos ambos, y será evidente de cual hablamos por contexto.*

Definición 2.5.16 (Símbolos de Christoffel, segunda clase)*.* Dados $i, j, k = 1, \ldots, n$, defino los *símbolos de Christoffel de segunda clase* como las funciones Γ_{ij}^k tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \Gamma(\partial_i, \partial_j).$$

Observación 2.5.17. *Notemos que los símbolos son funciones suaves en U (o en $\varphi(U)$ si son definidos allí). Es inmediato además que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Además, notemos que $\Gamma(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\partial_j$ ya que $D(\partial_i))\partial_j = 0$. De esto, los Γ_{ij}^k también pueden ser pensados como las coordenadas del campo que se obtiene al tomar la derivada covariante de un gancho en la dirección del otro.*

Definición 2.5.18 (Símbolos de Christoffel, primera clase)*.* Los *símbolos de Christoffel de primera clase* Γ_{ijk} se definen como

$$\Gamma_{ijk}(x) = \langle g(x)\Gamma_x(e_i, e_j), e_k\rangle,$$

donde g es la expresión local de la métrica.

Observación 2.5.19. *Se puede ver que si estamos en la variedad en vez de la carta, esta definición resulta equivalente a*

$$\Gamma_{ijk} = \langle \Gamma(\partial_i, \partial_j), \partial_k\rangle_g.$$

Veamos ahora una identidad que nos sera útil para lo que veremos después.

Lema 2.5.20 (Metricas y conexiones en expresiones locales)**.** *Si (φ, U) es una carta de una variedad riemanniana, y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$, entonces*

$$\langle g(x)\nabla_Z X(x), Y_x\rangle + \langle g(x)X_x, \nabla_Z Y(x)\rangle = \langle Dg_x(Z_x)X_x, Y_x\rangle + \langle g(x)DX_x, Y_x\rangle + \langle g(x)X_x, DY_x(Z_x)\rangle.$$

Demostración:
Consideramos la función

$$f(x) = \langle X, Y \rangle_x = \langle g(x) X_x, Y_x \rangle,$$

entonces tenemos por lo que ya sabíamos sobre compatibilidad entre métrica y producto interno (2.4.1)

$$Z(f) = \langle g(x) \nabla_Z X(x), Y_x \rangle + \langle g(x) X_x, \nabla_Z Y(x) \rangle,$$

pero por otro lado, derivando a mano tenemos que esto también debe ser igual a:

$$Df_x(Z_x) = \langle Dg_x(Z_x) X_x, Y_x \rangle + \langle g(x) DX_x, Y_x \rangle + \langle g(x) X_x, DY_x(Z_x) \rangle$$

lo que implica que ambas cosas son iguales. □

Veamos ahora cómo recuperar el operador Γ de la conexión Levi-Civita solamente a partir de la métrica g. Recordemos que un operador cuadrático es una función suave $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $Q(tv) = t^2 Q(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Derivando esta igualdad respecto a t dos veces y evaluando en $t = 0$, podemos ver que $D^2 Q_0(v, v) = 2Q(v)$, donde recordemos $D^2 Q_0(v, w) = D(DQ_0(v))(w)$ es un operador bilineal simétrico. Definiendo $\Gamma(v, w) = \frac{1}{2} D^2 Q_0(v, w)$, tenemos que Γ es un operador bilineal simétrico que satisface $\Gamma(v, v) = Q(v)$, y decimos que Q induce al operador Γ.

Usando $D^2 Q_0(v, v) = 2Q(v)$, es facil verificar que

$$\Gamma(v, w) = \frac{1}{2} D^2 Q_0(v, 2) = \frac{1}{2} \left(Q(v + w) - Q(v) - Q(w) \right).$$

A esto se lo conoce como la formula de polarizacion, y la usaremos para probar el siguiente Lema:

Lema 2.5.21 (Fórmula de Koszul)**.** *Dada (M, g) variedad riemanniana con carta (U, φ) y $x \in \varphi(U)$, existe un único operador cuadrático Q_x tal que*

$$\langle Q_x(v), g(x) w \rangle = \langle Dg_x(v) v, w \rangle - \frac{1}{2} \langle Dg_x(w) v, v \rangle$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$ (donde tomo el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$). Este operador cuadrático induce una forma bilineal Γ_x que coincide con el operador de Christoffel de la conexion Levi-Civita de M.

Demostración:
Como la imagen de $g : \varphi(U) \to M_n(\mathbb{R})$ cae en el subespacio lineal de matrices simétricas, sus derivadas son matrices simétricas también. De esto, $Dg_x(v)$, $Dg_x(w)$ y $g(x)$ son matrices simétricas.

Veamos existencia y unicidad: como g es simétrica, tomando $v \in \mathbb{R}^n$ y $w \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, la expresión del Lema implica

$$\langle g(x)Q_x(v), e_j\rangle = \langle Dg_x(v)v, e_j\rangle - \frac{1}{2}\langle Dg_x(e_j)v, v\rangle.$$

Esto define $g(x)Q_x(v)$ (a nivel función) para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Luego, multiplicando por la matriz inversa de $g(x)$ tenemos unicidad y para ver existencia, basta notar que el $g(x)Q_x$ definido a nivel función es un operador cuadrático suave (ya que luego Q_x lo sera).

En efecto, el lado derecho es suave en v, por lo que las coordenadas de $g(x)Q_x(v)$ lo son, y luego $g(x)Q_x(v)$ es suave. Por otro lado, si cambio v por tv con $t \in \mathbb{R}$ en el lado derecho, el t sale al cuadrado, y luego también lo hace en el lado izquierdo.

Nos falta entonces probar que el Γ_x que induce Q_x es el operador de Christoffel. Usando la formula de polarización y el hecho de que $Dg_x(v)(w)$ es bilineal (aunque no necesariamente simétrico), obtenemos para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned}\langle \Gamma_x(v,w), g(x)u\rangle &= \\ \frac{1}{2}\langle Dg_x(v)(w), u\rangle + \frac{1}{2}\langle Dg_x(w)(v), u\rangle - \frac{1}{4}\langle Dg_x(z)(v), w\rangle - \frac{1}{4}\langle Dg_x(z)(w), v\rangle &= \\ \frac{1}{2}\langle Dg_x(v)(w), u\rangle + \frac{1}{2}\langle Dg_x(w)(v), u\rangle - \frac{1}{2}\langle Dg_x(z)(v), w\rangle&,\end{aligned}$$

donde la ultima igualdad sale de que $Dg_x(z)$ es simétrica.

Usando esta identidad y 2.5.20, si considero campos X, Y, Z que en el punto x valen v, w, u respectivamente, tendremos tras varias cuentas que

$$\langle \Gamma_x(v,w), g(x)u\rangle = \langle \nabla_X Y(x) - DY_x(X_x), g(x)u\rangle,$$

lo que implica que Γ_x es el operador buscado. □

Con esto probado, estamos en condiciones de redefinir los conceptos de curvatura que nos serán útiles para pasar la conjetura de Willmore a S^3.

Definición 2.5.22 (Segunda forma fundamental). Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión Levi-Civita ∇, sea $\Sigma \subset M$ una subvariedad inmersa de cualquier codimensión, dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y dado $p \in \Sigma$, se define la *segunda forma fundamental* $\Pi(X, Y)$ como el campo que en p es la componente normal de $(\nabla'_X Y')_p$ respecto de Σ, donde X' y Y' son extensiones de X e Y en entornos abiertos en M de p.

Observación 2.5.23. *Es claro que $\Pi(X, Y)$ no depende de la elección de X'. Para ver que no depende de Y', veamos que Π es simétrica. En efecto, si P_N es la proyección a la normal de Σ en cada punto, tenemos*

$$\Pi(X,Y)_p = P_N(\nabla'_X Y'(p)) = P_N(\nabla'_Y X'(p) + [X', Y']_p) = P_N(\nabla'_Y X'(p)) = \Pi(Y,X)_p,$$

donde la segunda igualdad es porque ∇ es libre de torsión y la tercera es porque $[X', Y']_p = [X, Y]_p \in T_p\Sigma$ (en [8, Proposición 8.30] tomando f igual a la inclusión $i : M \to \Sigma$ se puede ver que el corchete de Lie no cambia si tomo extensiones de campos).

Observación 2.5.24. *Si ∇^* es la derivada Levi-Civita de Σ (con la métrica g restringida), tenemos por unicidad de derivadas sin torsión compatibles con la métrica que para X, Y extensiones en un entorno abierto de M de un punto en Σ de campos tangentes a Σ, vale que*

$$\nabla_X Y = \nabla^*_X Y + \Pi(X, Y).$$

Definición 2.5.25 (Operador de forma generalizado)*.* Redefinimos el *operador de forma* de la siguiente manera. Dado un campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ normal a Σ (esto quiere decir que $Z_p \perp T_p\Sigma$ en g para todo $p \in \Sigma$) y dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, llamo $-S_Z X$ a la componente tangente a Σ de $\nabla_Z X$ y llamo $D_X Z$ a su componente normal.

Observación 2.5.26. *Notemos que por definición, $\nabla_X Z = -S_Z X + D_X Z$. Sea $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ otro campo, como Y es perpendicular tanto a Z como a $D_X Z$, tenemos que $\langle Y, Z\rangle$ es la función nula, y luego*

$$0 = X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X Z, Y\rangle_g + \langle Z, \nabla_X Y\rangle_g = -\langle S_Z X, Y\rangle_g + \langle Z, \Pi(X, Y)\rangle_g.$$

De esto, obtenemos que para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M)$ normal a Σ la identidad

$$\langle S_Z X, Y\rangle_g = \langle Z, \Pi(X, Y)\rangle_g.$$

Es fácil ver de esto que $S_Z X$ es lineal en Z y en X, y además solamente depende de X y S puntualmente.

Definición 2.5.27 (Operador de forma sin traza)*.* Fijando $Z \in \mathfrak{X}(M)$, tendremos que $S_Z : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ es un operador lineal. De esto, en cada punto $p \in \Sigma$, S_Z induce una matriz. Llamo *operador de forma sin traza* a

$$S_Z^0 := S_Z - \frac{1}{m}\mathrm{Tr}(S_Z) Id,$$

donde $m = \mathrm{Dim}(\Sigma)$.

Observación 2.5.28. *Notemos que la función $\langle \nabla_X Y, N\rangle_g \in C^\infty(U)$ es el coeficiente de N en la componente normal de $\nabla_X Y$. Si Σ es una subvariedad de M de codimensión 1, este es el único coeficiente necesario para definir $\Pi(X, Y)$, y luego podemos pensar $\Pi(X, Y)$ como esta función. Haciendo esto, la aplicación $(X, Y) \to \Pi(X, Y)$ en cada punto de Σ es una forma bilineal simétrica a los reales. Luego, por Riesz existe un operador lineal $S_p \in Aut(T_pM)$ tal que*

$$\langle S_p X_p, Y_p\rangle_g = \Pi(X, Y)(p)$$

para cada $p \in \Sigma$. No es difícil ver que este S_p coincide con el operador de forma generalizado definido en 2.5.25 tomando $Z = N$. Se lo suele conocer como operador de forma de la subvariedad de codimensión 1. Se puede además ver que coincide con el operador S_p definido en 2.3.8 en el caso en el que todo vive en $\mathbb{R}^4$.

2.6. Métricas conformes

Con todo lo visto hasta ahora, daremos los preliminares de geometría conforme necesarios para pasar la conjetura de Willmore a S^3.

Definición 2.6.1 (Métricas conformes). Decimos que dos métricas riemannianas g y $\tilde{g}$ de una misma variedad M son *conformemente equivalentes* (o conformes) si para todo $x \in M$ existe una matriz conforme $A(x)$ (es decir, un múltiplo de la identidad por una matriz ortogonal) tal que

$$A(x)g(x) = \tilde{g}(x)$$

a nivel matrices.

Observación 2.6.2. *A nivel producto interno, esto es lo mismo que decir $C_x\langle v, w\rangle_{g(x)} = \langle v, w\rangle_{\tilde{g}(x)}$ para algún $C_x > 0$ real para todos $x \in M$ y $v, w \in T_xM$. Luego, a nivel expresión local de la métrica, esto es lo mismo que decir $\tilde{g} = C_x g$ para algún $C_x > 0$ para todo $x \in M$. Como tanto g como $\tilde{g}$ se pueden pensar en este contexto como funciones suaves en M, podemos escribir*

$$\tilde{g} = e^{2u} g$$

para alguna función suave $u : M \to \mathbb{R}$. Esta última noción de métricas conformes será la que usaremos en esta sección.

Observación 2.6.3. *Observemos primero que si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave y $\nabla, \tilde{\nabla}$ son sus gradientes, tenemos*

$$\langle \nabla f, v\rangle_g = Df(v) = \langle \tilde{\nabla} f, v\rangle_{\tilde{g}} = \langle e^{2u} \tilde{\nabla} f, v\rangle_g,$$

de donde $\nabla f = e^{2u} \tilde{\nabla} f$.

Observación 2.6.4. *Otra observación importante es que si Σ tiene codimensión 1 en M y $N, \tilde{N}$ son las normales de Σ según g y $\tilde{g}$, entonces existe $\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$ continua tal que $\tilde{N}_p = \lambda(p)N_p$ (ya que la ortogonalidad es preservada por transformaciones conformes). Tenemos además que*

$$1 = \langle \tilde{N}, \tilde{N}\rangle_{\tilde{g}} = \lambda^2 e^{2u} \langle N, N\rangle_g = \lambda^2 e^{2u}$$

y luego $\lambda(x) = \pm e^{-u(x)}$ para cada $x \in \Sigma$, de donde por continuidad de λ, $\tilde{N} = \pm e^{-u} N$. Eligiremos siempre $\tilde{N} = e^{-u} N$ por comodidad.

Definición 2.6.5 (Notación). Si $\Sigma \subset M$ es una subvariedad inmersa y $g, \tilde{g}$ son métricas conformes, de ahora en adelante llamaremos ∇ y $\tilde{\nabla}$ a la respectivas conexiones Levi-Civita, Π y $\tilde{\Pi}$ a las respectivas segundas formas fundamentales y S y $\tilde{S}$ a los respectivos operadores Shape.

Recordemos además que en métricas conformes, ser complemento ortogonal en una métrica o en la otra es lo mismo.

Lema 2.6.6. *Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y $p \in \Sigma$ tenemos estas tres igualdades:*

1. $\tilde{\nabla}_X Y(p) - \nabla_X Y(p) = 2\left(Du_p(X_p)Y_p + Du_p(Y_p)X_p\right) - \langle X, Y\rangle_g \nabla u(p)$.
2. $\tilde{\Pi}(X, Y) - \Pi(X, Y) = -\langle X, Y\rangle_g (\nabla u)^{\perp}$.
3. $\langle \tilde{S}_Z X, Y\rangle_g - \langle S_Z X, Y\rangle_g = -\langle X, Y\rangle_g Du(Z)$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$ *normal a* Σ.

Demostración:
Derivamos la igualdad $\tilde{g}(x) = e^{2u(x)} g(x)$ en dirección v y pasemos un sumando restando para obtener la igualdad de matrices

$$D\tilde{g}_x(v) - e^{2u(x)} Dg_x(v) = 2e^{2u(x)} Du_x(v) g(x)$$

Si evalúo la matriz en v y luego al resultado le tomo producto interno con w, obtengo

$$\langle D\tilde{g}_x(v)v, w\rangle - e^{2u(x)}\langle Dg_x(v)v, w\rangle = 2e^{2u(x)} Du_x(v)\langle g(x)v, w\rangle$$

Si tomo la igualdad de matrices con w en vez de v, evalúo en v, tomo producto interno contra v y luego multiplico por $-\frac{1}{2}$, obtenemos

$$-\frac{1}{2}\langle D\tilde{g}_x(w)v, v\rangle + \frac{1}{2}e^{2u(x)}\langle Dg_x(w)v, v\rangle = -e^{2u(x)} Du_x(w)\langle g(x)v, v\rangle.$$

Sumando estas dos igualdades y usando la fórmula de Koszul (2.5.21) dos veces, llegamos a la igualdad

$$\langle \tilde{Q}_x(v), \tilde{g}(x)w\rangle - e^{2u}\langle Q_x(v), g(x)w\rangle = 2e^{2u} Du_x(v)\langle g(x)v, w\rangle - e^{2u} Du_x(w)\langle g(x)v, v\rangle.$$

Ahora, como $Du_x(w) = \langle g(x)\nabla u(x), w\rangle$ por definición de gradiente, usando que g y $\tilde{g}$ son simétricas, y expresando todo para que me quede algo multiplicado contra w, obtenemos que

$$\tilde{g}(x)\tilde{Q}_x(v) - e^{2u} g(x) Q_x(v) = 2e^{2u} Du_x(v) g(x)v - e^{2u} g(x)\nabla u(x)\langle g(x)v, v\rangle$$

ya que si dos cosas multiplican lo mismo contra cualquier w, deben ser iguales. Reemplazando ahora $\tilde{g}(x) = e^{2u} g(x)$, podemos cancelar $e^{2u} g(x)$ (que no es nulo nunca), para llegar a

$$\tilde{Q}_x(v) - Q_x(v) = 2Du_x(v)v - \langle g(x)v, v\rangle \nabla u(x).$$

Reemplazando v por w y $v + w$, y haciendo las cuentas necesarias para usar la fórmula de polarización podemos (usando bilinealidad de $Du_x(v)w$ y que g es simétrica) llegar a

$$\tilde{\Gamma}_x(v, w) - \Gamma_x(v, w) = 2Du_x(v)w + 2Du_x(w)v - \langle g(x)v, w\rangle \nabla u(x).$$

De acá salen las tres identidades: fijados X, Y y p, si tomo $v = X_p$ y $w = Y_p$, la primer igualdad es inmediata de la definición $\Gamma_p(v, w) = \nabla_X Y(p) - DY_p(X_p)$ (al restar, los segundos términos se cancelan).

La segunda igualdad resulta de tomar la componente normal de la primera: como $2(Du_p(X_p)Y_p + Du_p(Y_p)X_p)$ es tangente a Σ el término desaparece. Para la tercera igualdad, tomamos la segunda igualdad y multiplicamos contra Z en la métrica g para obtener

$$\langle \Pi(X, Y), Z\rangle_g - \langle \tilde{\Pi}(X, Y), Z\rangle_g = -\langle X, Y\rangle_g \langle (\nabla u), Z\rangle_g = -\langle X, Y\rangle Du(Z)$$

donde podemos dejar de tomar la componente ortogonal de ∇u ya que Z es un campo normal. Recordando la identidad $\langle S_Z X, Y\rangle_g = \langle Z, \Pi(X, Y)\rangle_g$ de la sección anterior, tenemos que solo nos falta entender el término $\langle \tilde{\Pi}(X, Y), Z\rangle_g$, pero

$$\langle \tilde{\Pi}(X, Y), Z\rangle_g = e^{-2u}\langle \tilde{\Pi}(X, Y), Z\rangle_{\tilde{g}} = e^{-2u}\langle \tilde{S}_Z X, Y\rangle_{\tilde{g}} = \langle \tilde{S}_Z X, Y\rangle_g,$$

lo que prueba lo tercero. $\square$

Observación 2.6.7. *Notemos que tomando la tercer igualdad de este Lema, tenemos tras reemplazar X e Y por los ganchos ortonormales en $p \in \Sigma$ que*

$$S_Z - \tilde{S}_Z = -(Du(Z))Id_{T\Sigma}.$$

Luego, como S_Z y $\tilde{S}_Z$ difieren en un múltiplo de la identidad, los operadores de forma sin traza S_Z^0 y $\tilde{S}_Z^0$ deben ser iguales.

Recordemos ahora que cuando Σ tiene codimensión 1 en (M, g), el operador S (escrito a secas) es el operador S_N, donde $N \in \mathfrak{X}(M)$ es la extensión a M del campo normal a Σ en la métrica g.

Corolario 2.6.8. *Si Σ tiene codimensión 1 en M y N es la normal a Σ en la métrica g, entonces*

$$e^u \tilde{S} = S - Du(N)Id_{T\Sigma}$$

y $e^u \tilde{S}^0 = S^0$.

Demostración:
Como estamos en codimensión 1, $(\nabla u)^\perp = \langle \nabla u, N\rangle N = Du(N)N$. Luego, por 2 del Lema de recién, y por la definición de $\tilde{S}$ y S vale

$$\langle \tilde{S}X, Y\rangle_{\tilde{g}} \tilde{N} = \tilde{\Pi}(X, Y) = \Pi(X, Y) - Du(N)\langle X, Y\rangle_g N = \langle SX, Y\rangle_g N - Du(N)\langle X, Y\rangle_g N.$$

Reescribiendo entonces todo en función de N y de g, tenemos

$$\langle e^{2u}\tilde{S}X, Y\rangle_g \, e^{-u}N = \langle (S - Du(N)Id_{T\Sigma})X, Y\rangle_g N$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Como g es un producto interno, esto implica la primera igualdad. La segunda sale de que $e^u\tilde{S}$ y S difieren en un múltiplo de la identidad. □

Para lo que sigue, será necesario hablar de formas de volumen.

Definición 2.6.9 (Medibles y Elemento de Volumen). Dada una carta (U, φ), decimos que $\Omega \subset U$ es *medible* si $D = \varphi(U)$ lo es en $\mathbb{R}^n$. Dada $f : U \to \mathbb{R}$, decimos que f es *medible* en U si $f \circ \varphi^{-1}$ es medible en $\varphi(U)$. Definimos el *elemento de volumen* $\sqrt{g} : \varphi(U) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$\sqrt{g}(x) \coloneqq \sqrt{\det(g(x))}$$

y la *integral de f en Ω* como

$$\int_\Omega f = \int_D (f \circ \varphi^{-1})\sqrt{g}.$$

Observación 2.6.10. *Usando el teorema de cambio de variables en $\varphi(U)$, y que φ es un homeomorfismo a su imagen, obtenemos que ninguna de estas definiciones depende de la elección de la carta. Tomando una partición de la unidad subordinada a un Atlas, podemos entonces definir en M una medida $\mu(g)$ en la que todo precompacto de M mide finito.*

Si $\Sigma \subset M$ es una subvariedad inmersa, Σ hereda esta misma medida: simplemente tomo la misma definición con la restricción de g a Σ. Si $\tilde{g} = e^{2u}g$ y Σ tiene dimensión k, vale $det(\tilde{g}(x)) = e^{2ku}\ det(g(x))$. Luego, en el caso $k = 2$ (Σ es una superficie), vale

$$\sqrt{\tilde{g}} = e^{2u}\sqrt{g}.$$

Recordemos que dada una matriz A, $||A||_F^2$ es el cuadrado de la norma Frobenius de A, que coincide con la suma de los cuadrados de los autovalores de A por lo visto al principio de la sección 2.5. Tenemos entonces el siguiente lema:

Lema 2.6.11. *La integral de $||S^0||_F^2\sqrt{g}$ es invariante conforme en una superficie inmersa de codimensión 1 $\Sigma \subset M$. Es decir, si $\tilde{g}$ y g con conformes y $Dim(\Sigma) = 2$, $Dim(M) = 3$, vale que:*

$$\int_\Sigma ||\tilde{S}^0||_F^2\ d\mu(\tilde{g}) = \int_\Sigma ||S^0||_F^2\ d\mu(g).$$

Demostración:

Notar que escribimos $||S^0||_F$ en vez de $||S^0||_{Fg}$, ya que aunque S^0 como matriz depende de la elección de la métrica g (y de hecho, no necesariamente es una matriz simétrica en la métrica $\tilde{g}$) cambiar la métrica respecto a la que se ve la matriz es hacer un cambio de base, y la norma Frobenius es invariante por cambios de base.

Notemos que por 2.6.8 y el hecho de que la norma Frobenius es una norma, vale $||\tilde{S}^0||_F^2 = e^{-2u}||S^0||_F^2$. Luego, el resultado sigue del hecho de que se cancela el e^{2u} de la diferencia entre los elementos de área de $\tilde{g}$ y g en Σ. □

Estamos ahora en condiciones de hablar de curvatura seccional, que en el contexto de esta tesis sera una generalización de la curvatura Gaussiana a variedades riemannianas arbitrarias.

Definición 2.6.12 (Tensor de Curvatura / Curvatura seccional). Sea ∇ la conexion Levi-Civita de una variedad Riemanniana, se define el *tensor de Curvatura* como

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Dado un 2-plano $\pi \subset T_pM$, tomando generadores X e Y de π definimos la *curvatura seccional del 2-plano* π como

$$K(\pi) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle_g}{A(X,Y)}$$

donde $A(X,Y)^2 = ||X||_g^2||Y||_g^2 - \langle X,Y\rangle_g^2$ es el área del paralelogramo generado por $X, Y \in T_pM$.

Observación 2.6.13. *En [5, Capítulo 4, Observación 2.6] se prueba que el tensor de curvatura R evaluado en p solamente depende de X_p, Y_p y Z_p y en [5, Capítulo 4, Proposición 3.1] se prueba que la curvatura seccional $K(\pi)$ es independiente de la elección de los generadores. Una consecuencia de esto último es que si x, y es base ortonormal de π, tenemos*

$$K(x,y) = K(\pi) = \langle R(x,y)x, y\rangle_g.$$

De ahora en adelante, notamos $K(x,y)$ a la curvatura del 2-plano generado por x e y.

Observación 2.6.14. *Además, es importante notar que si $M = \mathbb{R}^n$, $R = 0$ como consecuencia de que $\nabla_X Y = DY(X)$. De esto, obtenemos que la curvatura seccional en cualquier plano de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ es nula. Por otro lado, en [8, Comentario en la página 148], se mencionan las ideas necesarias para probar que si $M = S^n$ (nuevamente, $n \geq 2$) vale $K(\pi) = 1$ para todo $p \in S^n$ y todo $\pi \subset T_pS^n$.*

A modo de comentario, agregamos que a partir de [8, Teorema 8.6] se puede ver que si Σ es una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$, la curvatura seccional $K(T_p\Sigma)$ coincide con la curvatura Gaussiana de Σ en p.

En el siguiente Lema, dado $\Sigma \subset M$ subvariedad, notaremos K y K_Σ^* a las curvaturas en M y Σ respectivamente. La demostración se puede encontrar en [5, Capítulo 6, Teorema 2.5].

Lema 2.6.15. *Sea $\Sigma \subset M$ subvariedad y sea Π su segunda forma fundamental, entonces para todo $p \in \Sigma$ y $x, y \in T_p\Sigma$ ortonormales vale*

$$K^*_\Sigma(x,y) - K(x,y) = \langle \Pi(x,x), \Pi(y,y) \rangle_g - |\Pi(x,y)|^2_g.$$

Observación 2.6.16. *Notemos que como consecuencia de esto, si Σ tiene dimensión 2, existe un único plano en $T_p\Sigma$, y tomando $x = e_1$, $y = e_2$ tenemos*

$$K_\Sigma - K_{M|T_\Sigma} = \langle \Pi(e_1,e_1), \Pi(e_2,e_2) \rangle_g - |\Pi(e_1,e_2)|^2_g.$$

Lema 2.6.17. *Sea $\Sigma \subset M$ una variedad de dimensión 2 y sea $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}Tr(S)$ la curvatura media de Σ, entonces vale*

$$\frac{1}{2}||S^0||^2_F + K_\Sigma = K_{M|T\Sigma} + H^2.$$

Demostración:

Tomo $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal que diagonalice el operador de forma S_p, para así obtener $Se_i = k_i e_i$ para $i = 1, 2$, donde k_1, k_2 son las curvaturas principales de Σ en M en el punto p.

Recordando del final de la sección anterior que $\Pi(X,Y)(p) = \langle S_p X_p, Y_p \rangle_g N$, tenemos entonces por la consecuencia de 2.6.15 en el caso de dimensión 2 tomando e_1 y e_2 que

$$K_\Sigma - K_{M|T_\Sigma} = k_1 k_2.$$

Recordando ahora que la norma de Frobenius proviene del producto interno de matrices $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^t) = \mathrm{Tr}(AB)$ cuando A, B son simétricas, tenemos

$$||S^0||^2_F = ||S - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)Id||^2_F = ||S||^2_F + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(S)^2||Id||^2_F - 2\mathrm{Tr}(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)S).$$

Notemos ahora que $||Id||^2_F = \mathrm{Tr}(Id^2) = 2$ y que $\mathrm{Tr}(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)S) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)\mathrm{Tr}(S)$. Luego, obtenemos

$$||S^0||^2_F = ||S||^2_F - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)^2,$$

y como $||S||^2_F = k_1^2 + k_2^2$ y $\mathrm{Tr}(S)^2 = k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2$, tenemos

$$||S^0||^2_F = \frac{1}{2}k_1^2 - k_1k_2 + \frac{1}{2}k_2^2 = 2H^2 - 2k_1k_2 = 2H^2 - 2(K_\Sigma - K_{M|T_\Sigma}),$$

donde la última igualdad es por lo visto al principio de la prueba. El resultado sigue dividiendo por 2 y sumando K_Σ. □

2.7. Gauss-Bonnet y Energía de Willmore general

Empecemos citando una versión del Teorema de Gauss-Bonnet que aplica a contextos más generales que superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$. A partir del hecho de que toda 2-variedad diferenciable sin borde es triangulable, lo que tenemos en [8, Teorema 9.7] es lo siguiente:

Teorema 2.7.1 (Gauss-Bonnet general)**.** *Sea M una 2-variedad riemanniana compacta sin borde orientada, entonces*

$$\int_M K_M \, dM = 2\pi\chi(M).$$

Teniendo esto, podemos finalmente extender la definición de la energía de Willmore.

Definición 2.7.2 (Energía de Willmore general). Dada (M, g) una variedad Riemanniana y $\Sigma \subset (M, g)$ una inmersión isométrica, se define la *energía de Willmore* de la inmersión como

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_\Sigma K_{M|\Sigma} + H^2.$$

Observación 2.7.3. *Notemos que como $K_{\mathbb{R}^3|\Sigma} = 0$, esta definición extiende la energía de Willmore que conocíamos.*

El resultado en el que culmina todo lo trabajado en este capítulo es el siguiente:

Corolario 2.7.4. *La energía de Willmore general es invariante conforme.*

Demostración:
Por 2.6.17, alcanza con ver que tanto la integral de K_Σ como la integral de $||S^0||_F^2$ sobre Σ son conformemente invariantes.

Por Gauss-Bonnet general (2.7.1), la integral de K_Σ es invariante topológico y luego conforme. Por otro lado, la integral de $||S^0||_F^2$ es conforme por 2.6.11. □

Ahora, notemos lo siguiente.

Lema 2.7.5. *Sea $p : S^3 \backslash \{0, 0, 0, 1\} \to \mathbb{R}^3$ la proyección estereográfica, E_3 la métrica estándar de $\mathbb{R}^3$, y E_4 la métrica Riemanniana que S^3 hereda como subespacio de $\mathbb{R}^4$, entonces p^*E_3 y E_4 son métricas conformes sobre $S^3 \setminus \{0, 0, 0, 1\}$.*

Demostración:
Notemos que por definición de pullback de métrica, $\langle v, w\rangle_{p^*E_3} = \langle Dp(v), Dp(w)\rangle_{E_3}$. Usaremos que una matriz A representa una transformación lineal conforme sí y sólo sí $||Av|| = C||v||$ para un $C > 0$ independiente de v. Queremos entonces ver que existe $C > 0$ tal que

$$\langle Dp(v), Dp(v)\rangle_{E_3} = C\langle v, v\rangle_{E_4}$$

para todo $q \in S^3$ y $v \in T_qS^3$.

Fijo $q \in S^3$ y $v \in T_qS^3$. Notemos que $\langle v, q\rangle_{E_4} = 0$. Tomemos $\alpha \subset S^3$ con $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = v$. Tenemos entonces que $Dp_q(v) = (p \circ \alpha)'(0)$.

Escribamos entonces $\alpha(t) = (x_1, x_2, x_3, x_4)(t)$, donde x_1, x_2, x_3, x_4 son funciones en t. Tenemos entonces

$$p(\alpha(t)) = \frac{(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{1 - x_4(t)}.$$

Que derivando y evaluando en 0, nos da que

$$Dp_q(v) = \frac{x_4'(0)\,(x_1(0), x_2(0), x_3(0))}{(1 - x_4(0))^2} + \frac{(x_1'(0), x_2'(0), x_3'(0))}{1 - x_4(0)}.$$

Ahora, si escribo $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ y reemplazo, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Dp_q(v), Dp_q(v)\rangle_{E_3} &= \langle \frac{v_4(q_1, q_2, q_3)}{(1 - q_4)^2} + \frac{(v_1, v_2, v_3)}{(1 - q_4)}, \frac{v_4(q_1, q_2, q_3)}{(1 - q_4)^2} + \frac{(v_1, v_2, v_3)}{(1 - q_4)}\rangle_{E_3} \\ &= ||(q_1, q_2, q_3)||^2 \frac{v_4^2}{(1 - q_4)^4} + \frac{||(v_1, v_2, v_3)||^2}{(1 - q_4)^2} + \frac{2v_4\langle(v_1, v_2, v_3), (q_1, q_2, q_3)\rangle}{(1 - q_4)^3}.\end{aligned}$$

Ahora, como v y q son ortogonales, tenemos que $\langle(v_1, v_2, v_3), (q_1, q_2, q_3)\rangle = -q_4v_4$. Por otro lado, como $||q|| = 1$, tenemos que $||(q_1, q_2, q_3)||^2 = 1 - q_4^2$. Reemplazando ambas identidades en lo que tenemos, llegamos a:

$$\begin{aligned}\langle Dp_q(v), Dp_q(v)\rangle_{E_3} &= \frac{(1 - q_4^2)}{(1 - q_4)^4}v_4^2 + \frac{-2q_4}{(1 - q_4)^3}v_4^2 + \frac{1}{(1 - q_4)^2}||(v_1, v_2, v_3)||^2 \\ &= \frac{1 + q_4}{(1 - q_4)^3}v_4^2 - \frac{2q_4}{(1 - q_4)^3}v_4^2 + \frac{1}{(1 - q_4)^2}||(v_1, v_2, v_3)||^2 \\ &= \frac{1}{(1 - q_4)^2}v_4^2 + \frac{1}{(1 - q_4)^2}||(v_1, v_2, v_3)||^2\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es por diferencia de cuadrados. Finalmente, tomando $C = (1 - q_4)^{-2}$ (que es un real positivo para todo $q \in S^3 \setminus \{0, 0, 0, 1\}$), tenemos

$$\langle Dp_q(v), Dp_q(v)\rangle_{E_3} = Cv_4^2 + C||(v_1, v_2, v_3)||^2 = C||v||^2,$$

lo que completa la prueba. □

Como consecuencia de este último Lema, si $\tilde{\Sigma}$ es una superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$, su energía de Willmore se puede calcular tanto sobre $\tilde{\Sigma}$ en $(\mathbb{R}^3, E_3)$ como sobre $\Sigma := p^{-1}(\tilde{\Sigma})$

en $(S^3 \setminus \{0,0,0,1\}, p^*E_3)$ haciendo la misma cuenta (ya que la métrica p^*E_3 es tal que p es una isometría).

Como 2.7.5 prueba que p^*E_3 y E_4 son métricas conformes sobre $S^3 \setminus \{0,0,0,1\}$, tenemos por 2.7.4 que

$$\int_{\tilde{\Sigma}} H^2 \, d\tilde{\Sigma} = \int_{\Sigma} K_{S^3|\Sigma} + H^2 \, d\Sigma = \int_{\Sigma} 1 + H^2 \, d\Sigma,$$

ya que $K_{S^3} = 1$ en cualquier plano cuando tomamos S^3 con la métrica E_4 (2.6.14).

Notemos además que dado $\Sigma \subset S^3$ superficie inmersa, podemos rotar S^3 tal que $(0,0,0,1)$ no caiga en Σ, y esto no cambia la integral de $1 + H^2$ sobre Σ. Esto termina de probar que la conjetura de Willmore es equivalente a encontrar $\Sigma \subset S^3$ cerrada de género $g \geq 1$ tal que

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (1 + H^2) \, d\Sigma$$

es mínimo, y esto es lo que haremos lo que resta de esta Tesis.

Capítulo 3

Preliminares: Teoría Geométrica de la Medida y Topología

3.1. Sobre medidas de Radón

Recordemos que una *medida* sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ subaditiva tal que $\mu(\emptyset) = 0$, y un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *μ-medible* si

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

para todo $B \subset \mathbb{R}^n$.

Recordemos que una medida es *Borel Regular* si todo conjunto Boreliano es medible y además todo para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ existe $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que B es boreliano, $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$. De esto, podemos recordar que una *medida de Radón* es una medida Borel regular en la que los conjuntos compactos miden finito.

Con esto, podemos introducir la convergencia débil de Medidas de Radón y recordar un Teorema de Compacidad que nos será útil en esta sección:

Definición 3.1.1 (Convergencia débil de Medidas de Radón). Decimos que una sucesión de medidas de Radón sobre $\mathbb{R}^n$ μ_k *converge débil* a la medida de Radón μ si para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ vale $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$.

Teorema 3.1.2. *Sea $\{\mu_k\}$ una sucesión de medidas de Radón sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $\sup \mu_k(K)$ es finito $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, entonces existe subsucesión $\{\mu_{k_j}\}$ y μ medida de Radón en $\mathbb{R}^n$ tal que μ_{k_j} converge débil a μ.*

3.2. Currents, Masa y Currents Integrales

Sea M una variedad diferencial de dimensión n, llamo $D^m(M)$ al cjto de las m-formas diferenciales de soporte compacto de M. Ahora vamos a definir muchos de los objetos que usaremos a lo largo de esta Tesis.

Definición 3.2.1 (Convergencia de m-formas)*.* Decimos que $\omega_k \in D^m(M)$ tiende a ω si existe un abierto $M' \subset\subset M$ tal que $\mathrm{sop}(\omega_k) \subset M'$ para todo k y además todas las derivadas de todos los coeficientes de los ω_k tienden uniformemente a todas las derivadas de todos los coeficientes de ω.

Definición 3.2.2 (Currents y convergencia débil)*.* Una *current m-dimensional* es un mapa lineal continuo $T : D^m(M) \to \mathbb{R}$. Decimos que una sucesión de m-currents T^k *converge débilmente* a una current m-dimensional T si $T^k(\omega) \to T(\omega)$ para todo $\omega \in D^m(M)$.

Definición 3.2.3 (Frontera)*.* Decimos que una current $(m-1)$-dimensional S es la *frontera* de otra m-current T si $T(d\omega) = S(\omega)$ para todo $\omega \in D^{m-1}(M)$, donde d es el diferencial exterior. En este caso, notamos $S = \partial T$.

Observación 3.2.4. *Notemos que si N es una subvariedad suave k-dimensional de M con frontera suave, N induce la k-current $[|N|](\omega) = \int_N \omega$ (es decir, la current viene dada por la integración de k-formas). Luego, podemos decir que las currents generalizan el concepto de subvariedad. Notar que por Stokes, $[|\partial N|] = \partial[|N|]$, ya que dan lo mismo en cada $(k-1)$-forma.*

Notamos $\Lambda_m(\mathbb{R}^{m+n})$ al m-ésimo producto exterior de $\mathbb{R}^{m+n}$ como $\mathbb{R}$-e.v. Notamos $\Lambda^m(\mathbb{R}^{m+n}) = \Lambda_m((\mathbb{R}^{m+n})^*) = \Lambda_m(\mathbb{R}^{m+n})^*$. Llamaremos m-vector simple a los elementos de $\Lambda_m(\mathbb{R}^{m+n})$ de la forma $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_m$, y diremos que la longitud de un m-vector simple (la cual notaremos $|v_1 \wedge \ldots \wedge v_m|$) es la medida de Hausdorff m-dimensional del paralelogramo generado por $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Definición 3.2.5 (Comasa de formas diferenciales y Masa de Currents)*.* Sea $\omega \in \Lambda^m(\mathbb{R}^{m+n})$, definimos la *comasa* de ω como

$$||\omega|| = \text{máx}\left\{\omega(v_1 \wedge \ldots \wedge v_m) : |v_1 \wedge \ldots \wedge v_m| = 1\right\}.$$

Sea entonces $\omega \in D^m(M)$, defino su *comasa* como $\text{máx}_{p \in M} ||\omega(p)||$, y si T es una current, defino la *masa* de T como $\mathbf{M}(T) = \sup\{T(\omega) : ||\omega|| \leq 1\}$.

Definición 3.2.6 (Masa finita y localmente finita)*.* Sea Ω abierto, definimos $||T||(\Omega) = \sup\{T(\omega) : \mathrm{sop}(\omega) \subset \Omega \text{ y } ||\omega|| \leq 1\}$. Decimos que T tiene *masa finita* si $\mathbf{M}(T) < +\infty$ y que T tiene *masa localmente finita* si para todo abierto acotado Ω, $||T||(\Omega) < +\infty$ (notar que $||T||(\mathbb{R}^n) = \mathbf{M}(T)$).

Definición 3.2.7 (Currents integramente rectificables y Currents integrales)*.* Una current T de masa localmente finita será *integramente rectificable* si existe una sucesión de subvariedades $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{m+n}$ (recordemos que M estaba embedida en $\mathbb{R}^{m+n}$), una sucesión de subconjuntos cerrados $K_i \subset \Sigma_i$ y una sucesión de enteros k_i tal que para todo $\omega \in D^m$, vale que

$$T(\omega) = \sum_i k_i \int_{K_i} \omega.$$

Definición 3.2.8 (Currents integrales). Decimos que una current T es *integral* si tanto T como ∂T son íntegramente rectificables.

Observación 3.2.9. *En cierta bibliografía, se define current integral como las currents íntegramente rectificables con borde de masa localmente finita. La equivalencia entre ambas definiciones es inmediata por el Teorema de rectificabilidad de fronteras, que se puede encontrar en (bibliografía pendiente). Este teorema nos dice que toda Current rectificable con borde de masa localmente finita tiene borde íntegramente rectificable.*

Por último, definimos en esta sección este objeto que usaremos mucho más adelante.

Definición 3.2.10. Dado un mapa $\phi : I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$ y un real positivo $r \in \mathbb{R}_{>0}$, definimos

$$\mathbf{m}(\phi, r) = \sup\{||\phi(x)||(B_r(p)) : x \in I^n, p \in M\}.$$

3.3. Varifolds generales, rectificables, e integrales

Definición 3.3.1 (Varifold y peso de un Varifold). Un *Varifold k-dimensional V* en $\mathbb{R}^n$ es una medida de Radón sobre el fibrado trivial de la Variedad de Grassman $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times G(k, n)$. El *peso* de un Varifold V es la medida $||V||$ que se obtiene de proyectar V a $\mathbb{R}^n$. Es decir, defino

$$||V||(A) := V(A \times G(k, n))$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 3.3.2. *Si B es un Boreliano de una subvariedad m-dimensional compacta sin borde M embebida en $\mathbb{R}^n$, defino $\varphi : C_c(M \times G(m, n)) \to \mathbb{R}$ como*

$$\phi(k) = \int_B k(x, \mathit{Tan}(M, x))d\mathcal{H}^m,$$

donde $\mathit{Tan}(M, x) \in G(m, n)$ es el tangente a M en $x \in M$. Notemos que φ es un funcional lineal, y pensado el primer espacio con la norma infinito, este resulta continuo ya que su norma se puede acotar por $\mathcal{H}^m(M)$. Luego, el Teorema de Riesz-Markov nos dice que existe una medida de Radón $\mathbf{v}_m(B)$ tal que:

$$\int k d\mathbf{v}_m(B) = \varphi(k)$$

para todo $k \in C_c(M \times G(m, n))$.

Con esto, $\mathbf{v}_m(B)$ es un Varifold que hace que para toda $k : \mathbb{R}^n \times G(m, n) \to \mathbb{R}$ continua de soporte compacto valga:

$$\int k d\mathbf{v}_m(B) = \int_B k(x, Tan(M, x))d\mathcal{H}^m$$

ya que ambos lados de la igualdad estan soportados en M. Puedo entonces pensar Varifolds como generalizaciones de conjuntos Borelianos dentro de Variedades.

Recordamos que un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se dice *k-rectificable* si tiene diemnsión de Hausdorff k, $\mathcal{H}^k(M) < +\infty$, y además existe una colección contable de funciones Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H}^k(M \setminus \bigcup_i f_i(\mathbb{R}^k)) = 0$. Una observación por la misma definición, es que los conjuntos rectificables admiten tangentes en casi todo punto (como consecuencia del Teorema de Radamacher).

Definición 3.3.3 (Varifolds integrales, primera definición). Diremos que un m-Varifold en $\mathbb{R}^n$ es *integral* si existe una sucesión B_i de conjuntos de Borel de subvariedades continuamente diferenciables M_i de $\mathbb{R}^n$ tales que $V = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{v}_m(B_i)$.

Observación 3.3.4. *Notar que por la unicidad del plano tangente, un Varifold integral V queda unívocamente determinado por su peso $||V||$.*

A continuación damos una definición equivalente de Varifold.

Definición 3.3.5 (Varifolds integrales, segunda definición). Sea U abierto de $\mathbb{R}^n$, llamo *Varifold integral de dimensión k en U* a cualquier par $V = (M, f)$, donde M es un subconjunto k-rectificable de U y $f : M \to \mathbb{N}$ es un mapa Boreliano (es decir, la preimagen de todo entero positivo es un boreliano de M).

Observación 3.3.6. *Un Varifold integral V con la segunda definición induce*

$$||V||(A) = \int_{M \cap A} f d\mathcal{H}^k$$

para todo conjunto de Borel A en U, que luego induce V en la otra definición por unicidad de tangente. De acá, podemos definir el área de un Varifold integral como $\mathcal{A}(V) := ||V||(U)$. Notemos que si T es una k-current integral con soporte en M, T induce un k-varifold integral $|T|$ una vez le tomo módulo a todos los coeficientes. En [16, Comentario 3.1.3] se prueba que en este caso, $\mathbf{M}(T)$ coincide con $\mathcal{A}(|T|)$, cosa que usaremos en esta sección repetidas veces.

Basandonos en la segunda definición que dimos para Varifold integral, podemos definir un nuevo tipo de Varifold:

Definición 3.3.7 (Varifolds rectificables). Sea U abierto de $\mathbb{R}^n$, llamo *Varifold rectificable de dimensión k en U* a cualquier par $V = (M, f)$, donde M es un subconjunto k-rectificable de U y $f : M \to \mathbb{R}_{>0}$ es integrable respecto a $\mathcal{H}^k$.

Observación 3.3.8. *La forma en la que este Varifold induce una medida de Radón sobre $G_k(\mathbb{R}^n)$ es la siguiente: para todo $A \subset G_k(\mathbb{R}^n)$, defino:*

$$V(A) = \int_{\Gamma_{M,A}} f d\mathcal{H}^k,$$

donde $\Gamma_{M,A}$ es el subconjunto de los $x \in M$ tales que $(x, Tan(M, X)) \in A$.

Definición 3.3.9 (Convergencia de Varifolds en Topología débil). Decimos que una sucesión de Varifolds rectificables V_k convergen en la topología débil al Varifold V si las V_k convergen débilmente a V como medidas de Radón.

3.4. Espacios, Métricas Relevantes, y Observaciones

Sea (M, g) una 3-variedad compacta embedida isométricamente en $\mathbb{R}^L$, vamos a introducir los siguientes espacios:

- $\mathbf{I}_k(M)$ son las Currents k-dimensionales integrales con $\text{sop}(T) \subset M$.
- $\mathcal{Z}_k(M)$ son las $T \in \mathbf{I}_k(M)$ con borde nulo.
- $\mathcal{V}_k(M)$ es la clausura en la topología débil de los Varifolds k-dimensionales rectificables de $\mathbb{R}^L$ cuyo peso tiene soporte contenido en M.

Observación 3.4.1. *Dado $T \in \mathbf{I}_k(M)$, notaremos $|T|$ al Varifold integral que surge de tomar módulo en los coeficientes de T, y notaremos $||T||$ al peso de $|T|$. Notar que si $U \subset M$ es un abierto que satisface $\mathcal{H}^2(\partial U) < +\infty$, puedo pensar a U como 3-subvariedad y luego U tiene una 3-current asociada que caerá en $\mathbf{I}_3(M)$ y notaremos $[|U|]$.*

Introducidos los conjuntos con los que vamos a trabajar y la notación, vamos a definir algunas métricas importantes:

Definición 3.4.2 (Métrica Masa en el espacio de Currents integrales). Defino en $\mathbf{I}_k(M)$ la *métrica masa* como $\mathbf{M}(S, T) = \mathbf{M}(S - T)$, donde recordamos que $\mathbf{M}(T)$ se define como $\sup \{T(\omega) : ||\omega|| \leq 1\}$ donde $\omega \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^L)$, y en este caso coincide con $\mathcal{A}(|T|)$.

Observación 3.4.3. *Probemos que esto es en efecto una distancia: por un lado $\mathbf{M}(T) = 0 \Leftrightarrow T(\omega) = 0$ para todo $\omega \in D^k(\mathbb{R}^L)$ con $||\omega|| \leq 1 \Leftrightarrow T = 0$. Por otro, podemos multiplicar k-currents por -1 para ver que $\mathbf{M}(A) = \mathbf{M}(-A)$ y concluir que $\mathbf{M}$ es simétrica. Por último, para probar desigualdad triangular basta ver que $\mathbf{M}(S + T) \leq \mathbf{M}(S) + \mathbf{M}(T)$, y esto es cierto porque en el lado derecho tomamos supremo sobre un conjunto más grande de pares de k-currents.*

Definición 3.4.4 (Métrica bemol en el espacio de Currents integrales). Defino en $\mathbf{I}_k(M)$ la *métrica bemol* como $\mathcal{F}(S, T) = \inf \{\mathbf{M}(P) + \mathbf{M}(Q) : S - T = P + \partial Q\}$ donde se toman $P \in \mathbf{I}_k(M)$ y $Q \in \mathbf{I}_{k+1}(M)$. Notamos además $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T, 0)$.

Observación 3.4.5. *Observemos primero que*

$$\partial Q + \partial(-Q)(\omega) = Q(d\omega) - Q(d\omega) = 0$$

de donde $\partial(-Q) = -\partial Q$*. Similarmente podemos probar* $\partial(A + B) = \partial A + \partial B$*. Luego, como* $\mathbf{M}(A) = \mathbf{M}(-A)$*, reemplazando* P *y* Q *por* $-P$ *y* $-Q$ *tenemos que* $\mathcal{F}$ *es simétrica.*

Para probar desigualdad triangular basta ver que $\mathcal{F}(T_1+T_2) \leq \mathcal{F}(T_1)+\mathcal{F}(T_2)$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, existen* P_i*,* Q_i*, con* $T_i = P_i + \partial Q_A$ *y* $\mathbf{M}(P_i) + \mathbf{M}(Q_i) \leq \mathcal{F}(T_i) + \frac{\varepsilon}{2}$ *para* $i = 1, 2$*. Tenemos entonces que* $T_1 + T_2 = (P_1 + P_2) + \partial(Q_1 + Q_2)$ *de donde*

$$\mathcal{F}(T_1 + T_2) \leq \mathbf{M}(P_1 + P_2) + \mathbf{M}(Q_1 + Q_2) \leq \mathcal{F}(T_1) + \mathcal{F}(T_2) + \varepsilon$$

por la desigualdad triangular en la métrica masa, lo que prueba lo deseado.

A priori, esto es solo una pseudométrica, ya que no probamos aún $\mathcal{F}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$*. Esto lo vamos a probar en la siguiente sección. Notar además que* $\mathcal{F}(T) \leq \mathbf{M}(T)$ *para todo* $T \in \mathbf{I}_k(M)$ *ya que puedo tomar* $P = T$ *y* $Q = 0$*.*

Definición 3.4.6 (Métrica **F** sobre el espacio de Varifolds). Defino la *métrica* **F** en $\mathcal{V}_k(M)$ como $\mathbf{F}(V,W) = \sup\{V(f) - W(f) : f \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L)), |f| \leq 1, Lip(f) \leq 1\}$, donde notamos $V(f) = \int f dV$.

Observación 3.4.7. *Llamo* X *al conjunto* $\{f \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L)), |f| \leq 1, Lip(f) \leq 1\}$*. Para ver que* $\mathbf{F}$ *es una distancia, primero noto que si* $\mathbf{F}(V,W) = 0$ *entonces toda* f *en* X *integra igual respecto a ambas medidas. De esto, toda* f *en* $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ *que sea Lipschitz integra igual en* V *y* W*. Como las* C^1 *de soporte compacto son Lipschitz, y estas son densas en* C_c*, tenemos que toda* f *en* $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ *integra igual respecto a* V *y* W*, por lo que* $V = W$*. Además, para probar simetría podemos reemplazar* f *por* $-f$ *al tomar supremo y para probar la desigualdad triangular es directa por estar tomando supremo en un conjunto más grande.*

Se puede ver también que esta métrica induce la Topología débil en $\mathcal{V}_k(M)$*: tenemos que* $\mathbf{F}(V_n, V) \to 0 \Leftrightarrow V_n(f) \to V(f)$ *para toda* f *en* $X \Leftrightarrow V_n(f) \to V(f)$ *para toda* f *Lipschitz, y nuevamente por densidad tenemos que esto sucede* $\Leftrightarrow V_n(f) \to V(f)$ *para toda* $f \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$*, por lo que estamos.*

Definición 3.4.8 (Métrica **F** sobre el espacio de Currents integrales). Defino la *métrica* **F** en $\mathbf{I}_k(M)$ como $\mathbf{F}(S,T) = \mathcal{F}(S,T) + \mathbf{F}(|S|, |T|)$.

Terminamos la sección introduciendo y redefiniendo notación:

- $\mathbf{I}_k(M)$ y $\mathcal{Z}_k(M)$ serán los espacios mencionados al principio de esta sección dotados de la topología inducida por $\mathcal{F}$.
- Notaremos $\mathbf{I}_k(M; \mathbf{M})$ y $\mathcal{Z}_k(M; \mathbf{M})$ y $\mathbf{I}_k(M; \mathbf{F})$ y $\mathcal{Z}_k(M; \mathbf{F})$ a estos espacios con la topología inducida por las métricas **M** y **F** respectívamente.
- De ahora en adelante, $\mathcal{V}_k(M)$ llevará la topología débil de Varifolds.

- Si ν es la métrica bemol, $\mathbf{F}$, o masa, noto $\mathbf{B}_r^\nu = \{S \in \mathcal{Z}_k(M) : \nu(T,S) < r\}$.
- Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son subconjuntos de $\mathcal{V}_k(M)$ notaremos $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ al ínfimo de las distancias.

3.5. Propiedades y Lemas útiles de las distancias

Lo primero que vamos a ver es que la masa es semi-continua inferior con respecto a la convergencia débil: si $\{T^n\}$ es una sucesión en $\mathbf{I}_k(M)$ con $T^n \to T$, con T una k-current cualquiera, entonces

$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf \mathbf{M}(T^n).$$

Esto es así ya que si $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de k-formas con $||\omega_i|| \leq 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$ y $T(\omega_i) \to \mathbf{M}(T)$, tenemos que $T^n(\omega_i) \to T(\omega_i)$ para todo i, y luego, como $T^n(\omega_i) \leq \mathbf{M}(T^n)$ tenemos que $T(\omega_i) \leq \liminf \mathbf{M}(T^n)$ para todo i, por lo que ganamos tomando $i \to +\infty$.

Con la métrica $\mathbf{F}$ para currents vale algo más fuerte, que es que la masa es continua: en efecto, si $\mathbf{F}(T^n, T) \to 0$ por definición tengo que $|T_n| \to |T|$ en la topología débil de Varifolds, que es la topología inducida por convergencia débil de medidas de Radón. En particular $||T^n||(\mathbb{R}^L) \to ||T||(\mathbb{R}^L)$, es decir $\mathcal{A}(T^n) \to \mathcal{A}(T)$, lo que quiere decir que $\mathbf{M}(T_n) \to \mathbf{M}(T)$.

Citamos ahora el Teorema de Compacidad de Federer-Fleming [16, Teorema 3.11], que dice lo siguiente:

Teorema 3.5.1 (Compacidad de Federer-Fleming)**.** *Sea $\{T_j\}$ una sucesión de k-currents integramente rectificables en U con*

$$\sup(||T_j||(W) + ||\partial T_j||(W)) < +\infty \text{ para todo } W \text{ abierto con } W \subset\subset U,$$

entonces existe una current T integramente rectificable y una subsucesión T_{j_k} tal que $T_{j_k} \to T$ débilmente.

Observación 3.5.2. *Otra versión de lo mismo pero para currents integrales podremos encontrarla en (bibliografía pendiente) y nos dice que bajo las mismas hipótesis, si además las T_j son currents integrales, entonces T es una current integral.*

Con esto, podemos terminar de probar que $\mathcal{F}$ es una métrica.

Lema 3.5.3. *Sea $A \in \mathbf{I}_k(M)$ tal que $\mathcal{F}(A) = 0$, entonces $A = 0$.*

Demostración:

Tomemos $\{P_n\} \subset \mathbf{I}_k(M)$ y $\{Q_n\} \subset \mathbf{I}_{k+1}(M)$ tales que $A = P_n + \partial Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}(P_n) \to 0$ y $\mathbf{M}(Q_n) \to 0$.

Por las ultimas condiciones, sabemos que existen C_1 y C_2 reales que son cotas uniformes de $\mathbf{M}(P_n)$ y $\mathbf{M}(Q_n)$ respectivamente. Además, por desigualdad triangular con la norma Masa, $\mathbf{M}(\partial Q_n)$ se puede acotar uniformemente por $\mathbf{M}(A) + C_1$. Luego, puedo usar 3.5.1 con Q_n y quedarme con $\{Q_{n_k}\}$ y Q íntegramente rectificable tal que $Q_{n_k} \to Q$ débilmente.

Como la masa es semi-continua inferior con respecto a la convergencia débil, tenemos que $\mathbf{M}(Q) \leq \liminf \mathbf{M}(Q_{n_k}) = 0$, y luego $Q = 0$. De esto, para todo ω k-forma tengo que $\partial Q_{n_k}(\omega) = Q_{n_k}(d\omega) \to 0$, por lo que ∂Q_{n_k} también converge débilmente a 0.

Tenemos entonces que $P_{n_k} = A - \partial Q_{n_k} \to A$, y por semi-continuidad inferior de la masa tenemos que $\mathbf{M}(A) \leq \liminf \mathbf{M}(P_{n_k}) = 0$, por lo que $\mathbf{M}(A) = 0$ y $A = 0$. □

Observación 3.5.4. *Como comentario, vale también que $\mathcal{F}$ no es solamente una distancia cualquiera, sino que esta induce la misma topología que la dada por la convergencia débil de Currents (esto se puede encontrar en [16, Teorema 7.2]). Por lo tanto, cuando hablemos de la topología bemol, también estaremos hablando de la topología inducida por la convergencia débil.*

Observación 3.5.5. *Otra propiedad que usaremos es que $\mathbf{F}(|S|, |T|) \leq \mathbf{M}(S, T)$ para todos $S, T \in \mathbf{I}_k(M)$: planteando $|S| = (M, \theta_S)$ y $|T| = (M, \theta_T)$, con $\theta_S, \theta_T : M \to \mathbb{N}$ borelianos, tenemos que para toda $f \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ con $|f| \leq 1$ y Lip$(f) \leq 1$ vale que*

$$|S|(f) - |T|(f) = \int_M f\theta_S - f\theta_T d\mathcal{H}^k \leq \int_M |f||\theta_S - \theta_T| d\mathcal{H}^k \leq \int_M |\theta_S - \theta_T| d\mathcal{H}^k$$

Pero esto ultimo simplemente es $\mathcal{A}(|S - T|)$, que es igual a $\mathbf{M}(S - T)$, lo que prueba la desigualdad cuando tomamos supremo. Como consecuencia de esto, tenemos que

$$\mathcal{F}(S - T) \leq \mathbf{F}(S, T) \leq 2\mathbf{M}(S - T).$$

Introducimos ahora el siguiente Teorema que citamos de (bibliografía pendiente)

Teorema 3.5.6. *Sea $T, T_1, T_2, \ldots$ en $\mathcal{Z}_k(M)$ tales que $T_n \to T$ en $\mathcal{F}$ y $|T_n| \to V$ en la topología débil de Varifolds, entonces $||T|| \leq ||V||$, y*

$$||T|| = ||V|| \Leftrightarrow |T| = V \Leftrightarrow \mathbf{M}(T) = \mathcal{A}(V)$$

Con esto y lo anterior podemos probar el último Lema de esta sección.

Lema 3.5.7. *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{Z}_k(M;\mathbf{F})$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $S \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{Z}_k(M)$ cumplen que $\mathbf{M}(T) < \mathbf{M}(S) + \delta$ y que $\mathcal{F}(S,T) \leq \delta$, entonces vale que $\mathbf{F}(S,T) \leq \varepsilon$.*

Demostración:

Probemos primero que si $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{Z}_k(M)$ y $T \in \mathcal{Z}_k(M)$ entonces $\mathbf{F}(T_n,T) \to 0$ si y solo si $\mathcal{F}(T_n,T) \to 0$ y $\mathbf{M}(T_n) \to \mathbf{M}(T)$.

Para la ida, si $\mathbf{F}(T,T_n) \to 0$, tenemos que $T_n \to T$ en $\mathcal{F}$, y como la masa es continua en $\mathbf{F}$ estamos.

Para la vuelta, sabemos que $T_n \to T$ en la Topología bemol y nos falta probar que $|T_n| \to |T|$ en la topología débil de Varifolds. Sea ahora T_{i_j} subsucesión, veremos que existe subsubsucesión $T_{i_{j_k}}$ tal que $|T_{i_{j_k}}| \to |T|$ de donde tendremos que $|T_i| \to |T|$ y luego $\mathcal{F}(S,T_i) \to 0$. Para verlo, notemos que $|T_{i_j}|$ es una sucesión de medidas de Radón que tal que $||T_{i_j}||(\mathbb{R}^n) \to ||T||(\mathbb{R}^n)$ ya que $\mathbf{M}(T_n) \to \mathbf{M}(T)$. Luego, $||T_{i_j}||(\mathbb{R}^n)$ esta uniformemente acotado y podemos usar el Teorema de Compacidad de Medidas de Radón para decir que existe $|T_{i_{j_k}}| \to V$ con V un Varifold. Notando que $\mathbf{M}(T_{i_{j_k}}) \to \mathbf{M}(T)$ por condición y que $\mathbf{M}(T_{i_{j_k}}) \to ||V||(\mathbb{R}^n)$ por convergencia débil, tenemos que $\mathbf{M}(S) = ||V||(\mathbb{R}^n)$ y luego $V = |S|$ por 3.5.6, lo que prueba la primera equivalencia.

Supongamos ahora que el Lema no vale, es decir, existen $\varepsilon > 0$ y $T_n \in \mathcal{Z}_k(M)$, $S_n\mathcal{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{M}(T_n) < \mathbf{M}(S_n) + \frac{1}{n}$ y $\mathcal{F}(S_n,T_n) \leq \frac{1}{n}$ pero $\mathbf{F}(S_n,T_n) > \varepsilon$.

Como $\mathcal{S}$ es compacto, existen una subsucesión S_{n_k} y un $S \in \mathcal{S}$ tal que $\mathbf{F}(S_{n_k},S) \to 0$. Tenemos de lo anterior que $\mathcal{F}(S_{n_k},S) \to 0$, lo que implica que $\mathcal{F}(T_{n_k},S) \to 0$, pero además tenemos que $\mathbf{M}(S_{n_k}) \to \mathbf{M}(S)$. Como la masa es semi-continua inferior respecto a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}(T_{n_k},S) \to 0$, tenemos que $\mathbf{M}(S) \leq \liminf \mathbf{M}(T_{n_k})$, pero además tenemos por construcción que $\limsup \mathbf{M}(T_{n_k}) \leq \limsup \mathbf{M}(S_{n_k}) + \frac{1}{n_k} = \mathbf{M}(S)$. Luego, $\lim \mathbf{M}(T_{n_k})$ existe y vale $\mathbf{M}(S)$.

Tenemos entonces $\mathcal{F}(T_{n_k},S) \to 0$ y $\mathbf{M}(T_{n_k}) \to \mathbf{M}(S)$, que por lo dicho al principio implica $\mathbf{F}(T_{n_k},S) \to 0$, pero esto implica $\mathbf{F}(T_{n_k},S_{n_k}) \to 0$ por construcción, y eso es absurdo. $\square$

3.6. Pushforwards, Variación, y Compacidad

En esta sección, M sera una variedad Riemanniana arbitraria.

Definición 3.6.1 (Pushforward de una Current). Sea $F : M \to M$ un mapa C^1, dada $T \in \mathbf{I}_k(M)$ defino el *push-forward de* T como la Current $F_\#(T)$ definida por $F_\#(T)(\omega) = T(F_*(\omega))$ (esto define una Current ya que los pullbacks de formas diferenciales son continuos y lineales).

De ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario, las siguientes definiciones provienen de [4].

Definición 3.6.2 (Pushforward de un Varifold). Sea $F : M \to M$ un difeomorfismo C^1, dado $V = (\Gamma, f)$ un Varifold integral, defino el *push-forward de* V como

$$F_{\#}(V) = (F(\Gamma), f \circ F^{-1}).$$

Definición 3.6.3 (Primera variación y Varifolds estacionarios). Sea $\mathfrak{X}_c(M)$ el conjunto de los campos vectoriales C^1 tangentes a M con soporte compacto, defino $\delta : \mathcal{V}_k(M) \times \mathfrak{X}_c(M) \to \mathbb{R}$ como:

$$\delta(V, X) = (\frac{\partial}{\partial t})|_{t=0} \ ||F_{t\#}(V)||(M).$$

Acá, $F_t(x) = F(t, x)$ con $F : I \times M \to M$ una variación en M con campo variacional X (es decir, F es tal que I es un intervalo que contiene al 0 y $\frac{\partial F}{\partial t}|_{t=0} = X$).

A δ le llamaremos *primera variación*. Diremos que un Varifold V es *estacionario* si $\delta(V, X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}_c(M)$.

Definición 3.6.4 (Curvatura media generalizada). Diremos que un Varifold V tiene *curvatura media generalizada acotada* si existe $C \geq 0$ tal que

$$|\delta(V, X)| \leq C \int_M |X| \ d||V||$$

para todo $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ donde $||V||$ es la medida sobre M inducida por V. Si V es un Varifold con curvatura media generalizada acotada, defino a la *curvatura media generalizada* de V como el mapa acotado boreliano $H : M \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\delta(V, X) = -\int \langle X, H \rangle \ d||V||$$

para todo $X \in \mathfrak{X}_c(M)$.

Observación 3.6.5. *Para probar la existencia de H (salvo en un subconjunto del dominio que mide 0 en $||V||$) cuando V tiene curvatura media generalizada acotada, basta notar que $X \to \delta(V, X)$ es un mapa lineal, y combinar la existencia de C con el teorema de representación de Riesz y Radon-Nikodym. Por otro lado, resulta inmediato que V es estacionario si y solo si H es el mapa nulo.*

Este resultado nos será útil:

Lema 3.6.6. *Sea M y $\Sigma \subset M$ es una subvariedad compacta embebida minimal, entonces el Varifold inducido por Σ $\mathbf{v}(\Sigma)$ es estacionario.*

Demostración:
Llamemos H al vector curvatura media de Σ, dado por multiplicar la curvatura media de Σ por la de Σ N en cada punto. Por la fórmula de la primera variación del área (bibliografía pendiente), H resulta ser por definición la curvatura media generalizada del Varifold $\mathbf{v}(\Sigma)$. Esto implica el resultado. □

Un último teorema que nos será importante tener en cuenta es el Teorema de Compacidad de Allard para Varifolds integrales. Usando el Teorema de convergencia de medidas de Radón se puede probar lo siguiente ([15, Remark 42.8]):

Teorema 3.6.7 (Teorema de Compacidad de Allard)**.** *Sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de n-Varifolds integrales estacionarios en M con variación localmente acotada en M, tales que*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}(||V_j||(W)+||\delta V_j||(W))<+\infty \text{ para todo } W\subset\subset M,$$

entonces existe una subsucesión $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un n-Varifold integral V en M tal que $V_k\to V$ en la métrica $\mathbf{F}$ de Varifolds. Además, vale que $||\delta V||\leq \liminf_{j\to\infty}||\delta V_j||$.

3.7. Conjuntos de perímetro finito

Dedicamos la siguiente sección a recapitular las definiciones y los teoremas necesarios de Teoría Geométrica de la Medida para lograr definir y dar algunas propiedades sobre los conjuntos de perímetro finito y la frontera reducida.

Definición 3.7.1 (Funciones de variación acotada). Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, diremos que una función $f:U\to\mathbb{R}$ que cae en $L^1(U)$ es de *variación acotada en* U, si

$$\sup\left\{\int_U f(x).\mathrm{Div}(g)(x)\,dx : g\in C^1_c(U,\mathbb{R}^n),\ |g|\leq 1\right\}<+\infty.$$

Llamo $BV(U)$ al conjunto de funciones de variación acotada en U. Si $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, diremos que f es de *variación localmente acotada en* U si $f|_V\in BV(V)$ para todo V abierto compactamente contenido en U. En este caso, notamos $f\in BV_{\mathrm{loc}}(U)$.

Definición 3.7.2 (Conjuntos de perímetro finito). Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto, diremos que un conjunto medible Lebesgue $E\subset U$ tiene *perímetro finito en* U si $\chi_E\in BV(U)$, donde χ_E es la función indicadora del conjunto E. Si $\chi_E\in BV_{\mathrm{loc}}(U)$, diremos que E es de *perímetro localmente finito.*

Citamos ahora de [7, Capítulo 5.1, Teorema 1] el Teorema de estructura para funciones de varición localmente acotada.

Teorema 3.7.3 (Estructura para variación localmente acotada). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in BV_{loc}(U)$, entonces existen μ_f una medida de Radón sobre U y $\sigma_f : U \to \mathbb{R}^n$ una función μ_f-medible tal que $||\sigma_f(z)|| = 1$ para todo $z \in U$ salvo μ_f-medida 0 y además valga*

$$\int_U f(x).Div(g)(x)\; dx = -\int_U \langle g, \sigma_f \rangle \; d\mu_f$$

para toda $g \in C^1_c(U, \mathbb{R}^n)$.

Observación 3.7.4. *Si $f = \chi_E \in BV_{loc}(U)$, se suele definir $\upsilon_E \coloneqq -\sigma_f$ y $||\partial_E|| \coloneqq \mu_f$. De este modo, la igualdad del Teorema de estructura se convierte en*

$$\int_E Div(g)(x)\; dx = \int_U \langle g, \upsilon_E \rangle \; d||\partial E||$$

para toda $g \in C^1_c(U, \mathbb{R}^n)$.

En la siguiente definición, $\overline{B}(x, r)$ denota la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ de centro x y radio r y $⨍$ denota a la integral dividida por la $||\partial E||$-medida del dominio de integración.

Definición 3.7.5 (Frontera reducida). Sea E un conjunto de perímetro localmente finito en $\mathbb{R}^n$, defino a la *frontera reducida de E* (y la noto $\partial^* E$), a los $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen simultáneamente:

1. $||\partial E||(\overline{B}(x, r)) > 0$ para todo $r > 0$.
2. $\lim_{r \to 0^+} \left(⨍_{\overline{B}(x,r)} \upsilon_E \; d||\partial E|| \right) = \upsilon_E(x)$.
3. $||\upsilon_E(x)|| = 1$.

Observación 3.7.6. *Sea ∂E la frontera topológica de E, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial E$ existe un $r > 0$ tal que $\overline{B}(x, r)$ esta totalmente contenido en E o en $\mathbb{R}^n \setminus E$. Considerando entonces la observación anterior, tenemos que si $g \in C^1_c(U, \mathbb{R}^n)$ tiene soporte contenido en $\overline{B}(x, r)$, vale que*

$$\int_U \langle g, \upsilon_E \rangle \; d||\partial E|| = 0$$

por el teorema de la divergencia. Tomando funciones que en $\overline{B}(x, r/2)$ sean aproximaciones suaves de υ_E y tengan soporte en $\overline{B}(x, r)$, podemos probar que $||\partial E||(\overline{B}(x, r/2)) = 0$, y luego la frontera reducida esta contenida en la frontera topológica.

Estamos entonces en condiciones de citar el teorema de estructura para conjuntos de perímetro finito de [7, Capítulo 5.7, Teorema 2]. Aunque solamente necesitaremos usar el último ítem del Teorema, citamos el Teorema entero por completitud.

Teorema 3.7.7 (Estructura para perímetro finito). *Sea E un conjunto de perímetro localmente finito en $\mathbb{R}^n$, entonces:*

1. *$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k \cup N$, donde K_k es el subconjunto de una hipersuperficie C_1 S_k para todo $k \in \mathbb{N}$ y $||\partial E||(N) = 0$.*
2. *$\upsilon_E|_{S_k}$ es normal a S_k para todo k.*
3. *La medida $||\partial E||$ es la restricción de $\mathcal{H}^{n-1}$ a $\partial^* E$.*

La forma en la que usaremos este teorema, será en combinación con [15, Comentario 27.7]. Puntualmente, queremos el siguiente Lema:

Lema 3.7.8. *Sea $A \subset U$ un subconjunto, entonces A tiene perímetro (localmente) finito en U si y solo si la current $\partial[|A|]$ tiene masa (localmente) finita. Si pasa esto, vale que*

$$||\partial[|A|]||(W) = \int_W ||\partial A||$$

para todo W abierto compactamente contenido en A. En particular, si U es compacto, vale que

$$\mathbf{M}(\partial[|A|]) = \int_U ||\partial A||.$$

Observación 3.7.9. *Notemos que todas las definiciones y los teoremas presentados en esta sección provienen de una bibliografía que trabaja con abiertos de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, todas estas definiciones y teoremas se pueden tomar en abiertos de variedades Riemannianas arbitrarias. En concreto aplicaremos estos últimos teoremas en S^3 tomando $W = U = S^3$.*

Observación 3.7.10. *Como consecuencia de este ultimo Lema, podemos extender lo dicho en 3.4.1 para incluir a los abiertos de perímetro finito en M.*

3.8. Homología singular, cúbica, y de Currents

Dedicaremos esta sección para definir los grupos de homología con los que trabajaremos a lo largo de esta Tesis. Empecemos definiendo los grupos de homología con la generalidad necesaria para luego definir los 3 tipos de homología que usaremos.

Definición 3.8.1 (Complejos de cadenas). Dado un espacio topologico X, un *complejo de cadenas* $C(X)$ es una sucesión de grupos abelianos $C_0, C_1, C_2, \ldots$ y una sucesión de morfismos de grupos $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ llamados *morfismos de frontera* tales que $\partial_n \circ \partial_{n-1} : C_n \to C_{n-2}$ es el morfismo trivial para todo $n \geq 1$ (por convención, tomo $\partial_0 : C_0 \to 0$ como el morfismo trivial).

Definición 3.8.2 (Grupos de homología). Dado un espacio topológico X, y un complejo de cadenas $C(X)$, defino el *n-ésimo grupo de homología de X* como el grupo cociente

$$H_n(X) \coloneqq \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}).$$

Observación 3.8.3. *Todas las homologías que usaremos a lo largo de esta Tesis usaran coeficientes enteros, por lo que no generalizaremos la discusión mas allá de ello.*

Notando que $H_n(X)$ a priori depende de la elección del complejo de cadenas $C(X)$, daremos los complejos $C(X)$ para definir las nociones de homología que nos serán útiles, y luego citaremos Teoremas de isomorfismo para ver que los grupos de homología son iguales en los tres casos.

Definición 3.8.4 (Homología singular). Dado $n \geq 0$, defino $C_n(X)$ como el grupo libre generado por los mapas continuos $f_n : \Delta^n \to X$, donde Δ^n es el n-simplex. En este caso, tomo Δ_n que manda cada f_n en la base de $C_n(X)$ a

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_n^{(i)} \in C_{n-1}(X),$$

donde $f_n^{(i)}$ es la restricción de f_n al $(n-1)$-simplex que se obtiene de omitir el vértice i de Δ^n (y luego podemos pensar $f_n^{(i)} : \Delta^{n-1} \to X$).

Observación 3.8.5. *De manera análoga, podemos definir $C_n^L(X)$ es el grupo libre generado por los mapas Lipschitz $f_n : \Delta^n \to X$ y luego definir $H_n^L(X)$.*

En general, cuando escribamos $H_n(X)$ para X un espacio topológico, estaremos hablando del grupo de homología singular a menos que aclaremos lo contrario.

Definición 3.8.6 (Homología de Currents). Dado X un espacio topologico que admite estructura de variedad diferenciable compacta, recordemos que $\mathbf{I}_n(X)$ son las Currents integrales n-dimensionales con soporte en X. Notando que con la suma de Currents, $\mathbf{I}_n(X)$ es un grupo abeliano, definimos $C_n(X) = \mathbf{I}_n(X)$ y tomo el morfimo de frontera como $\partial(T) = \partial T \in C_{n-1}(X)$ para toda $T \in C_n(X)$.

Observación 3.8.7. *Notemos que $\partial^2 = 0$ ya que $d^2 = 0$ donde d es el diferencial exterior, por lo que hay buena definición. Además, bajo la definición de current integral que dimos, es claro que ∂ va de $\mathbf{I}_n(X)$ a $\mathbf{I}_{n-1}(X)$.*

Por ultimo, para definir la homología singular cúbica necesitaremos ver otras cosas antes. Dado $n \geq 0$, defino $Q_n(X)$ como el grupo libre generado por los mapas continuos $f_n : I^n \to X$, donde $I = [0,1]$ y consideremos ∂', que manda f_n en la base de $Q_n(X)$ a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f_n^{(i,0)} - f_n^{(i,1)}) \in Q_{n-1}(X),$$

donde $f_n^{(i,j)}$, $j = 0,1$ es la restricción de f_n al $(n-1)$-cubo que se obtiene de igualar la coordenada i de I^n a j (y luego podemos pensar $f_n^{(i)} : I^{n-1} \to X$).

Consideremos ahora $D_n(X)$ el grupo libre generado por los $f_n : I^n \to X$ que son constantes en la k-ésima coordenada de I^n para algún $1 \leq k \leq n$. Notemos que $\partial'(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$, ya que si un g generador de $D_n(X)$ es constante en la coordenada k, $g_n^{(k,0)} - g_n^{(k,1)} = 0$, y $g_n^{(i,j)} \in D_{n-1}(X)$ para todo $i \neq k$.

Definición 3.8.8 (Homología singular cúbica)*.* Dado $n \geq 0$, defino $C_n(X)$ como el grupo cociente $\frac{Q_n(X)}{D_n(X)}$ y defino $\partial := \overline{\partial'} : C_n X \to C_{n-1}(X)$, que pasa bien al cociente ya que $\partial'(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$.

Observación 3.8.9. *Se puede ver $\partial'^2 = 0$ sobre los elementos de la base de $Q_n(X)$. Esto nos deja ver que $\partial^2 = 0$ sobre $C_n(X)$.*

Para terminar esta sección, nos falta hablar de los isomorfismos entre las tres homologías. Notaremos H^{Sing}, H^{Cur}, y H^Q para diferenciar entre las homologias singulares, de currents y cubicas en lo que queda de esta sección (y haremos lo mismo con C).

En [12, Corolario 1.6] se prueba que si X es un espacio localmente contractil mediante mapas Lipschitz (en particular, si X es una variedad Riemanniana), el mapa $[\ ] : C_n^L(X) \to \mathbf{I}_n(X)$ que lleva f_n a la n-current inducida por su imagen y el mapa inclusión $i : C_n^L(X) \to C_n^{\text{Sing}}(X)$ inducen isomorfismos $H_n^L(X) \to H^{\text{Cur}}(X)$ y $H_n^L(X) \to H_n^{\text{sing}}(X)$ respectivamente.

Por otro lado, en [6] se desarrolla la teoria de los modelos aciclicos y se la usa para probar el isomorfismo entre H^{sing} y H^Q. En este caso, entender el isomorfismo no nos será necesario.

3.9. El Teorema de separación de Jordan-Brouwer

En la primer sección de la demostración de la conjetura de Willmore, usaremos que si Σ es una superficie cerrada sin borde y conexa de S^3, entonces $S^3 \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas. Esto depende de una versión generalizada del teorema de la curva de Jordan, que enunciaremos a continuación. La demostración del Teorema se encuentra en [14, Teorema 7.1.].

Teorema 3.9.1. *Sea X una hipersuperficie cerrada sin borde de $\mathbb{R}^n$, entonces X divide a $\mathbb{R}^n$ en dos componentes conexas.*

Usando esto, veamos la versión del Teorema de separación que nosotros usaremos.

Lema 3.9.2. *Sea $\Sigma \subset S^3$ una subvariedad conexa, compacta y sin borde con $Dim(\Sigma) = 2$, entonces $S^3 \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas.*

Demostración:
Consideremos $p : S^3 \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^3$ la proyección estereográfica, que es biyectiva, continua, y tiene inversa continua $p^{-1} : \mathbb{R}^3 \to S^3 \setminus \{x\}$.

Como Σ es compacta sin bordes y p es continua, $p(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$ resulta una variedad compacta sin bordes. De esto, tomando el teorema para $n = 3$ obtenemos que $\mathbb{R}^3 \setminus p(\Sigma)$ tiene dos componentes conexas, X_1 y X_2.

De acá, tenemos que $S^3 \setminus \Sigma$ se divide en los 3 subconjuntos disjuntos $\{x\}$, $p^{-1}(X_1)$, y $p^{-1}(X_2)$. Por continuidad, $p^{-1}(X_1)$, y $p^{-1}(X_2)$ son conexos y abiertos. Si algún punto de $p^{-1}(X_1)$, y algún punto de $p^{-1}(X_2)$ pertenecieran a la misma componente conexa, tendríamos que la unión de ambos conjuntos es conexa. Esto es absurdo, ya que $X_1 \cup X_2$ sería conexo por continuidad de p.

Por último, notemos que como $S^3 \setminus \Sigma$ es abierto, existe r tal que la bola geodésica de S^3 centrada en x de radio r $B_r(x)$ no interseca a Σ. Como $B_r(x) \setminus \{x\} \subset S^3$ es conexo, es subconjunto de $p^{-1}(X_1)$ o de $p^{-1}(X_2)$. Sin pérdida de generalidad, tenemos entonces $B_r(x) \setminus \{x\} \subset p^{-1}(X_1)$, y como $B_r(x)$ es conexo, tenemos que:

1. $p^{-1}(X_1) \cup \{x\}$ es conexo,
2. $p^{-1}(X_2)$ es conexo,
3. $p^{-1}(X_1) \cup p^{-1}(X_2) \cup \{x\} = S^3 \setminus \Sigma$ no es conexo,

por lo que $S^3 \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas. $\square$

Capítulo 4

La Familia Canónica

4.1. Definiciones Básicas

Noto $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ y $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ a la bola unitaria abierta y esfera unitaria respectívamente. Uso $B^4_R(Q)$ para referirme a la bola abierta de $\mathbb{R}^4$ centrada en Q con radio R y uso $B_r(p)$ para referirme a la bola abierta de S^3 centrada en p de radio r con la distancia geodésica esférica.

Definición 4.1.1. Para cada $v \in B^4$, defino $F_v : S^3 \to S^3$ como $F_v(x) = \frac{(1-|v|^2)}{|x-v|^2}(x-v)-v$.

Lema 4.1.2. *El mapa $F_v : S^3 \to S^3$ está bien definido y es conforme.*

Demostración:
Para buenda definición, nos basta ver $\langle F_v(x), F_v(x)\rangle = 1$ para todo $x \in S^3$. Esto es igual a $(\frac{(1-|v|^2)}{|x-v|^2})^2\langle(x-v),(x-v)\rangle - 2\frac{(1-|v|^2)}{|x-v|^2}\langle(x-v),v\rangle + \langle v,v\rangle$, que es igual a $\frac{(1-|v|^2)^2-2(1-|v|^2)\langle(x-v),v\rangle}{|x-v|^2} + |v|^2$, y queremos ver que esto vale 1. Como $|x-v|^2 \neq 0$ y $(1-|v|^2) \neq 0$, multiplicando por $|x-v|^2$ y dividiendo por $(1-|v|^2)$ esto es equivalente a ver $(1-|v|^2) - 2\langle(x-v),v\rangle = |x-v|^2$, y esto es claro tras escribir todo en función de $\langle x,x\rangle = 1$, de $\langle x,v\rangle$ y de $\langle v,v\rangle$.

Para ver que es conforme, notando $F_v = F$ y fijando $x \in S^3$, basta ver que el diferencial DF_x es el producto entre una matriz ortogonal y un escalar real, que por álgebra Lineal es equivalente a probar que $|DF_x(w)| = C|w|$ para algún $C > 0$ real independiente de w, para todo $w \in T_x(S^3)$.

Sea entonces $x(t)$ una curva en S^3 con $x(0) = x$, $x'(0) = w$, tenemos que $DF_x(w) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(F \circ x)(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{(1-|v|^2)}{|x(t)-v|^2}(x(t)-v)-v\right)$, y sacando el escalar $(1-|v|^2)$ que podemos al final incluir en C, y notando que $\frac{d}{dt}|_{t=0}v = 0$, lo que nos queda calcular es:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{(x(t)-v)}{|x(t)-v|^2}\right)$$

Tras reemplazar $|x(t)-v|^2$ por $\langle x(t)-v, x(t)-v\rangle$, tras usar derivada del cociente, derivada del producto interno, y reemplazando $t=0$ tenemos que esto es igual a:

$$\frac{w|x-v|^2 - 2\langle x-v, w\rangle(x-v)}{|x-v|^4}$$

Multiplicando por $|x-v|^4 \neq 0$ (lo agregamos a C), nos queda ver que

$$w|x-v|^2 - 2\langle x-v, w\rangle(x-v)$$

es de la forma $\hat{C}|w|$ con $\hat{C}>0$ independiente de w, pero esto al cuadrado es:

$$\begin{aligned} &= \Big\langle w|x-v|^2 - 2\langle x-v,w\rangle(x-v), w|x-v|^2 - 2\langle x-v,w\rangle(x-v)\Big\rangle \\ &= |x-v|^4\langle w,w\rangle - 4\langle x-v,w\rangle^2|x-v|^2 + 4\langle x-v,w\rangle^2|x-v|^2 \\ &= |x-v|^4|w|^2 \end{aligned}$$

y ganamos tomando $\hat{C} = |x-v|^4$. $\square$

Observación 4.1.3. *Como comentario, notemos que x, v, y $-F_v(x)$ están alineados. De esto, podemos entender $F_v(x)$ geométricamente como el simétrico por S^3 al punto en el que la recta por x y v vuelve a cortar S^3, y de esto en particular $v/|v|$ y $-v/|v|$ son preservados por F_v.*

Sea $\Sigma \subset S^3$ una superficie cerrada embedida de género g. Llamo A y A^* a las dos componentes conexas de $S^3 - \Sigma$ (3.9.2). Llamo N a la normal unitaria de Σ que apunta hacia A^*. Defino también $D^2_+(r) = \{s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 : |s| < r,\ s_1 \geq 0\}$ a la semicircunferencia de radio r centrada en 0.

Veamos ahora lo siguiente:

Lema 4.1.4. *Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente chico, el mapa $\Lambda : \Sigma \times D^2_+(3\varepsilon) \to \overline{B}^4$ definido como*

$$\Lambda(p,s) = (1-s_1)(\cos(s_2)p + \sin(s_2)N(p))$$

resulta un difeomorfismo entre $\Sigma \times D^2_+(3\varepsilon)$ y un entorno de Σ en $\overline{B}^4$:

Demostración:
El mapa en si esta bien definido siempre que $3\varepsilon < 1$. Para usar el Teorema de la función inversa necesitamos ver que la matriz diferencial $D\Lambda_{(p,0,0)}$ es inversible. Considerando una curva $\alpha(t) = (p(t), s_1(t), s_2(t))$ en $\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con $\alpha(0) = (p,0,0)$ y $\alpha'(t) = (p', s_1', s_2')$ con $p' \in T_p(\Sigma)$ un vector arbitrario y s_1', s_2' arbitrarios, tenemos que

$$D\Lambda_{(p,0,0)}\begin{pmatrix} p' \\ s_1' \\ s_2' \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\Lambda(\alpha(t))) = -s_1'p + p' + s_2'N(p)$$

donde la ultima igualdad es por regla de la cadena y una serie de cancelaciones (en el medio aparece $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(N(p(t)))$ que es mas complicada de calcular, pero se la multiplica por cero). Notemos que esto es nulo cuando (p', s_1', s_2') es nulo ya que los vectores p' y $N(p)$ son ortonormales y ambos caen en $T_p(S^3)$ que es un espacio del que p es ortonormal. En particular, $p', N(p), p$ son linealmente independientes y ganamos. □

Con todo probado, llamo entonces Ω_r a $\Lambda(\Sigma \times D^2_+(r))$ para todo $r \leq 3\varepsilon$.

Definición 4.1.5. Sea $\phi : [0, 3\varepsilon] \to [0, 1]$ suave tal que es constante 0 en $[0, \varepsilon]$, constante 1 en $[2\varepsilon, 3\varepsilon]$, y estrictamente creciente en $[\varepsilon, 2\varepsilon]$. Considero el mapa continuo $T : \overline{B}^4 \to \overline{B}^4$ que es igual a la identidad en $\overline{B}^4 \setminus \Omega_{3\varepsilon}$ y que en $\Omega_{3\varepsilon}$ se define como $T(\Lambda(p, s)) = \Lambda(p, \phi(|s|)s)$.

Notemos que T manda un entorno tubular de Σ a Σ.

Definición 4.1.6 (Distancia signada). Definamos A_v, A_v^*, y Σ_v como $F_v(A)$, $F_v(A^*)$ y $F_v(\Sigma) = \partial A_v$ respectivamente. Además, definimos $d_v : S^3 \to \mathbb{R}$ como:

$$d_v(x) = \begin{cases} d(x, \Sigma_v) & \text{para } x \in A_v^* \\ -d(x, \Sigma_v) & \text{para } x \in A_v \end{cases}.$$

4.2. La Familia Canónica: definiciones y Teoremas.

Definición 4.2.1 (Familia canónica). Dado $\Sigma \subset S^3$ una 2-variedad, defino a *la familia canonica de* Σ como la familia 5-dimensional de subconjuntos 2-rectificables de S^3 dados por $\Sigma_{(v,t)} = \partial A_{(v,t)}$, donde $A_{(v,t)} := \{x \in S^3 : d_v(x) < t\}$, $\forall v \in B^4$ y $t \in [-\pi, \pi]$.

Observación 4.2.2. *Notemos que $A_{(v,0)} = A_v$, que $A_{(v,\pi)} = S^3$, y que $A_{(v,-\pi)} = \emptyset$, de donde $\Sigma_{(v,0)} = \Sigma_v$ y $\Sigma_{(v,\pi)} = \Sigma_{(v,-\pi)} = \emptyset$. Además, para que la definición sea buena, tenemos que ver que $\Sigma_{(v,t)}$ siempre es 2-rectificable: sea N_v el vector normal de Σ_v dado por $DF_v(N)/||DF_v(N)||$, considero $\psi_{(v,t)} : \Sigma_v \to S^3$ dado por $\psi_{(v,t)}(y) = cos(t)y + sin(t)N_v(y)$. No es difícil probar que $\Sigma_{(v,t)} \subset \psi_{(v,t)}(\left\{p \in \Sigma_v : Jac\ \psi_{(v,t)}(p) \geq 0\right\})$, y entendiendo la contención se puede probar lo deseado.*

Probemos ahora este Lema:

Lema 4.2.3. *Sean $k_1(v)$ y $k_2(v)$ las curvaturas principales de Σ_v en S^3, y sea $H(v) = \frac{k_1(v)+k_2(v)}{2}$, entonces*

$$Jac\ \psi_{(v,t)}(y) = (1 + H(v)^2) - (\sin(t) + H(v)\cos(t))^2 - \frac{(k_1(v) - k_2(v))^2}{4}\sin^2(t).$$

Demostración:

Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de direcciones principales con curvaturas principales $k_1(v)$ y $k_2(v)$ respectívamente. Recordando que $e_1(y)$ y $e_2(y)$ son los autovectores para los autovalores $k_1(v)(y)$ y $k_2(v)(y)$ de $S_v(y) = -DN_v(y)$, tenemos que $-DN_v(y)(e_i) = k_i(v)(y)e_i$ para todo $y \in \Sigma_v$. Pensando a x como la función identidad, obtenemos:

$$D\psi_{(v,t)|_y} e_i = \cos(t)D(Id)(e_i) + \sin(t)DN_v(y)(e_i) = (\cos(t) - k_i(v)\sin(t))e_i$$

para $i = 1, 2$.

Luego, $\text{Jac } \psi_{(v,t)}(y) = (\cos(t) - k_1(v)\sin(t))(\cos(t) - k_2(v)\sin(t))$, y podemos concluír la demostración expandiendo esto y el lado derecho de la igualdad, usando en el medio que $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. $\square$

Con este Lema probado, podemos demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 4.2.4. *Para cada $(v,t) \in B^4 \times (-\pi, \pi)$, vale que:*

$$\textit{área}(\Sigma_{(v,t)}) \leq W(\Sigma).$$

Si Σ no es una esfera geodésica, la igualdad sucede sí y sólo sí $t = 0$ y Σ_v es una superficie minimal.

Demostración:

Por contención de conjuntos, $\text{área}(\Sigma_{(v,t)}) \leq \text{área}(\psi_{(v,t)}(\left\{p : \text{Jac } \psi_{(v,t)}(p) \geq 0\right\}))$, que por la Fórmula de Área es menor o igual a:

$$\int_{\left\{p : \text{Jac } \psi_{(v,t)}(p) \geq 0\right\}} (\text{Jac } \psi_{(v,t)})\, d\Sigma_v \leq \int_{\left\{p : \text{Jac } \psi_{(v,t)}(p) \geq 0\right\}} (1 + H(v)^2)\, d\Sigma_v$$

$$\leq \int_{\Sigma_v} (1 + H(v)^2)\, d\Sigma_v = W(\Sigma_v) = W(\Sigma).$$

donde la primera desigualdad es por el Lema de recién, la segunda es por contención de conjuntos y la última igualdad es por invarianza de la energía de Willmore por transformaciones conformes.

Si tenemos igualdad, entonces vale que $\Sigma_{(v,t)} = \left\{p : \text{Jac } \psi_{(v,t)}(p) \geq 0\right\}$, $\sin(t) + H(v)\cos(t) = 0$ en Σ_v, y $\frac{(k_1(v) - k_2(v))}{4}\sin(t) = 0$ en Σ_v. Si Σ no es una esfera geodésica, $k_1(v) - k_2(v)$ no es constantemente 0, de donde $sin(t) = 0$ y $t = 0$, por la tercera condición. Por la segunda condición, reemplazando $t = 0$ vale que $H(v) = 0$ para todo v en Σ_v, y luego Σ_v es minimal. $\square$

4.3. El mapa extendido de Gauss

Para cada $p \in \Sigma$ y $k \in [-\infty, +\infty]$, considero

$$\overline{Q}_{p,k} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}} p + \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}} N(p),$$

que cae en S^3. Esto induce un mapa $\overline{Q} : \overline{\Omega}_\varepsilon \to S^3$ que manda $\Lambda(p,s)$ a $\overline{Q}_{p,k}$, donde $k = s_2/\sqrt{\varepsilon^2 - s_2^2}$. Este mapa lo podemos extender a $\overline{Q} : \overline{\Omega}_\varepsilon \cup S^3 \to S^3$ de la siguiente manera:

$$\overline{Q}(v) = \begin{cases} \overline{Q}(v) & \text{para } v \in \overline{\Omega}_\varepsilon \\ T(v) & \text{para } v \in A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon \\ -T(v) & \text{para } v \in A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon \end{cases} .$$

El siguiente Teorema nos resultará de suma importancia más adelante.

Teorema 4.3.1. *El mapa $\overline{Q}$ es continuo, y si lo restrinjo a S^3,*

$$\overline{Q} : S^3 \to S^3$$

es un mapa de grado g.

Demostración:
Como $\overline{Q} : \overline{\Omega}_\varepsilon \to S^3$ es continua, y $\overline{\Omega}_\varepsilon$, S^3 son dos cerrados de $\mathbb{R}^4$ que cubren el dominio de $\overline{Q}$, para ver continuidad alcanza con probar que la restricción $\overline{Q} : S^3 \to S^3$ es continua.

Por definición, y por continuidad de T (la continuidad de T se puede probar por Lema del Pegado), $\overline{Q} : S^3 \to S^3$ es continua en $S^3 \cap \overline{\Omega}_\varepsilon$, en $A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, y en $A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$. Solo falta entonces es entender $\overline{Q}$ cerca de los bordes de $S^3 \cap \overline{\Omega}_\varepsilon$.

Definamos $v_{(p,t)} = \Lambda(p,(0,t)) = \cos(t)p + \sin(t)N(p) \in \overline{\Omega}_{2\varepsilon} \cap S^3$ (notar que todo punto de $\overline{\Omega}_{2\varepsilon} \cap S^3$ se puede parametrizar así).

Si $v_{(p,t)} \in S^3 \cap \overline{\Omega}_\varepsilon$, tenemos que por un lado $\lim_{t\to\varepsilon^-} \overline{Q}(v_{(p,t)}) = \overline{Q}_{p,+\infty} = -p$, y por el otro lado, $\lim_{t\to-\varepsilon^+} \overline{Q}(v_{(p,t)} = \overline{Q}_{p,-\infty} = p$.

Si $v_{(p,t)} \in A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, tenemos por definición de $\overline{Q}$ que

$$\lim_{t\to-\varepsilon^-} \overline{Q}(v_{(p,t)}) = \lim_{t\to-\varepsilon^-} T(v_{(p,t)}) = \lim_{t\to 0^-} \Lambda(p,(0,t)) = p,$$

que coincide con el límite que buscábamos.

Por último, si $v_{(p,t)} \in A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ tenemos $\lim_{t\to\varepsilon^+} \overline{Q}(v_{(p,t)}) = \lim_{t\to\varepsilon^+} -T(v_{(p,t)}) = \lim_{t\to 0^+} -\Lambda(p,(0,t)) = -p$, que coincide con el límite que buscábamos. Luego, $\overline{Q}$ es continua.

Nos falta ahora probar que el grado de $\overline{Q} : S^3 \to S^3$ es g. Para hacerlo, vamos a usar que $\overline{Q}$ es suave en cada una de las 3 componentes donde se define por partes. Llamo dV a la forma de volumen de S^3 y llamo ∇ a la conexión inducida en S^3. Como el volumen de superficie tridimensional de S^3 es $2\pi^2$, queremos probar que $\int_{S^3} \overline{Q}^*(dV) = 2\pi^2 g$.

Notemos para empezar que T restringido a $A \setminus \overline{Q}_\varepsilon$ es un difeomorfismo desde allí hasta A, y que T restringido a $A^* \setminus \overline{Q}_\varepsilon$ A^* es un difeo desde $A^* \setminus \overline{Q}_\varepsilon$ a A^*. De esto, tenemos:

$$\int_{A\setminus\overline{Q}_\varepsilon} \overline{Q}^*(dV) = \int_{A\setminus\overline{Q}_\varepsilon} T^*(dV) = \int_A dV = \mathrm{Vol}(A)$$

y como en $\mathbb{R}^4$ multiplicar por -1 es un difeomorfismo que presenta orientación, tenemos:

$$\int_{A^*\setminus\overline{Q}_\varepsilon} \overline{Q}^*(dV) = \int_{A\setminus\overline{Q}_\varepsilon} (-T)^*(dV) = \int_{-A^*} dV = \mathrm{Vol}(-A^*) = \mathrm{Vol}(A^*).$$

Como $\mathrm{Vol}(A) + \mathrm{Vol}(A^*) = \mathrm{Vol}(S^3) - \mathrm{Vol}(\Sigma) = 2\pi^2$, solamente nos falta probar que $\int_{\overline{Q}_\varepsilon \cap S^3} \overline{Q}^*(dV) = \pi^2(2g-2)$.

Por convención, diremos que $\{e_1, e_2, e_3\} \in T_p(S^3)$ forman una base orientada positivamente si $\{e_1, e_2, e_3, p\} \in T_p(\mathbb{R}^4)$ lo hacen, y que decimos que $\{e_1, e_2\} \in T_p(\Sigma)$ estan orientados positivamente si $\{e_1, e_2, N(p)\} \in T_p(S^3)$ lo están.

Sea $G : \Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to S^3 \cap \overline{\Omega}_\varepsilon$ el mapa definido por

$$G(p,t) = \Lambda(p,(0,t)) = cos(t)p + sin(t)N(p).$$

Calculando la derivada en $t = 0$ y p genérico, es fácil chequear que si ε es suficientemente pequeño, G es un difeomorfismo. Además, si tomo la base de $\Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ que hace que $\{e_1, e_2, \partial_t\}$ esté orientado positivamente cuando $\{e_1, e_2\} \in T_p(\Sigma)$ lo esté, tenemos que:

$$G_*(e_1 \wedge e_2 \wedge \partial_t)|_{(p,0)} = e_1 \wedge e_2 \wedge N(p)$$

Acá G_* es pushforward de formas, y recordemos que para revisar que dos formas de Volumen son iguales basta con revisar que valen lo mismo evaluadas en un campo, ya que todas dos son una múltiplo de la otra. Luego, ganamos tomando el campo $(e_1, e_2, N(p))$.

De esto, G preserva orientación. De esto, si defino $Q = \overline{Q} \circ G$, que resulta quedar definido como $Q(p,t) = -\frac{t}{\varepsilon}p - \frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}N(p)$ (va de $\Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ a S^3), tenemos que $\int_{\overline{Q}_\varepsilon \cap S^3} \overline{Q}^*(dV) = \int_{\Sigma\times[-\varepsilon,\varepsilon]} G^*(Q^*(dV)) = \int_{\Sigma\times[-\varepsilon,\varepsilon]} Q^*(dV)$.

Sea ahora $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $T_p\Sigma$ que diagonaliza la segunda forma fundamental, tenemos en particular que $\nabla_{e_i} N = -k_i e_i$ para $i = 1, 2$. De esto, como el diferencial evaluado en e_i de la función $(p,t) \to p$ es e_i (pensarlo evaluandola en una curva que en 0 pasa por p con dirección e_i), tenemos que $DQ|_{(p,t)}(e_i) = -\frac{t}{\varepsilon}e_i - \frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}(-ke_i) = (-\frac{t}{\varepsilon} + k_i\frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon})e_i$.

Por otro lado, tenemos que $DQ|_{(p,t)}(\partial_t) = -\frac{1}{\varepsilon}p+\frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}N(p)$ tras derivar con respecto a t.

Ahora, es fácil revisar que $\left\{DQ|_{(p,t)}(e_1), DQ|_{(p,t)}(e_2), DQ|_{(p,t)}(\partial_t)\right\}$ es una base ortogonal, y que el vector $Q(p,t)$ tiene norma 1 y es ortogonal a estos tres. De esto, si $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^4}$ es la forma de volumen estandar en $\mathbb{R}^4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} Q^*(dV)|_{(p,t)}(e_1,e_2,\partial_t) &= dV|_{Q(p,t)}(DQ(e_1), DQ(e_2,), DQ(\partial_t)) \\ &= \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^4}(DQ(e_1), DQ(e_2), DQ(\partial_t), Q(p,t)). \end{aligned}$$

Para calcular este volumen, considero la base ortonormal $\{e_1, e_2, N(p), p\}$, y tenemos que en esta base, $(DQ(e_1), DQ(e_2), DQ(\partial_t), Q(p,t))$ se escribe como

$$\begin{pmatrix} -\frac{t}{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\varepsilon} & \frac{t}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-t^2}} \\ 0 & 0 & \frac{t}{\varepsilon} & \frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante resulta igual a

$$(-\frac{t}{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}k_1)(-\frac{t}{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}{\varepsilon}k_2)(\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(k_1k_2\sqrt{\varepsilon^2-t^2}-(k_1+k_2)t+\frac{t^2}{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}\right).$$

Luego, tenemos que

$$\int_{\Sigma\times[-\varepsilon,\varepsilon]} Q^*(dV) = -\int_\Sigma\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(k_1k_2\sqrt{\varepsilon^2-t^2}-(k_1+k_2)t+\frac{t^2}{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}\right)dtd\Sigma$$

Notemos ahora que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2-t^2}dt$ se puede resolver sustituyendo $u=\varepsilon\sin(t)$, para obtener $\varepsilon^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(u)du = \frac{\pi\varepsilon^2}{2}$. Con la misma sustitución, se ve $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{t^2}{\sqrt{\varepsilon^2-t^2}}dt = \varepsilon^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(u)du = \frac{\pi\varepsilon^2}{2}$. Juntando esto y usando que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}tdt$, tenemos que la integral de arriba da:

$$-\frac{\varepsilon^2\pi}{2\varepsilon^2}\int_\Sigma k_1k_2\ d\Sigma - \int_\Sigma 0\ d\Sigma - \frac{\varepsilon^2\pi}{2\varepsilon^2}\int_\Sigma 1\ d\Sigma = -\frac{\pi}{2}\int_\Sigma (k_1k_2+1)\ d\Sigma.$$

Notemos ahora de la prueba de 2.6.17 que en S^3 vale que la curvatura Gaussiana K_Σ es igual a $K_{S^3|T\Sigma}+k_1k_2 = 1+k_1k_2$. Luego, el Teorema de Gauss-Bonnet generalizado (2.7.1) nos dice que

$$-\frac{\pi}{2}\int_\Sigma(1+k_1k_2)\ d\Sigma = -\frac{\pi}{2}\int_\Sigma K_\Sigma\ d\Sigma = -\frac{\pi}{2}(2\pi\chi(\Sigma)) = -\pi^2(2-2g) = \pi^2(2g-2),$$

de donde $\int_{\overline{Q}_\varepsilon \cap S^3} \overline{Q}^*(dV) = \pi^2(2g-2)$ como queríamos ver. □

El último Teorema de esta sección también nos será útil a futuro. Este nos dice que las áreas de los $\Sigma_{(v,t)}$ no pueden concentrarse cerca de un punto:

Teorema 4.3.2. *Para todo $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que*

$$\text{Área } (\Sigma_{(v,t)} \cap B_r(q)) \leq \delta$$

para todo $q \in S^3$, $v \in B^4$ y $t \in [-\pi, \pi]$.

La prueba del resultado excede los límites de esta tesis, por lo que no lo probaremos.

Capítulo 5

Familia Canónica Extendida y Familia Min-Max

5.1. Algunas Definiciones, y la Meta de esta sección

El objetivo de esta parte de la prueba es extender (y reparametrizar) la familia canónica definida en 4.2.1 para que en vez de ir desde $B^4 \times [-\pi, \pi]$ a subconjuntos 2-rectificables de S^3, vaya desde $\overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$ a 2-currents integrables de S^3. Al mismo tiempo, lograremos que la familia sea continua en algún sentido útil.

Dado $k \in [-\infty, +\infty]$, considero $\overline{r}_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(k) \in [0, \pi]$ y considero $\overline{R}_k = \sqrt{2(1 - k/\sqrt{1 + k^2})}$, de modo que vale:

$$B^4_{\overline{R}_k}(\overline{Q}_{p,k}) \cap S^3 = B_{\overline{r}_k}(\overline{Q}_{p,k}).$$

Tomo ahora $\overline{r} : \overline{\Omega}_\varepsilon \to [0, \pi]$ que manda $\Lambda(p, s)$ a $\overline{r}_k$, para $k = s_2/\sqrt{\varepsilon^2 - s_2^2}$. Extiendo esta función a una $\overline{r} : S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon \to [0, \pi]$, donde $\overline{r}(v)$ se define igual sobre $\overline{\Omega}_\varepsilon$, vale 0 en $A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, y vale π en $A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$.

Con estas definiciones podemos enunciar formalmente el primer objetivo de este capítulo, en la forma del siguiente Teorema:

Teorema 5.1.1. *El siguiente mapa está bien definido y es continuo en la Topología bemol para Currents:*

$$C : \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi] \to \mathcal{Z}_2(S^3)$$

$$C(v, t) = \begin{cases} \partial[|A_{(T(v),t)}|] & \textit{para } v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon \\ \partial[|B_{\overline{r}(v)+t}(\overline{Q}(v))|] & \textit{para } v \in S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon \end{cases}.$$

Además, vale que $\mathbf{M}(C(v, t)) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$, $C(v, \pi) = 0$ *y* $C(v, -\pi) = 0$ *para todo* $(v, t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$.

Esto será probado al final de esta sección.

5.2. Resultados Preliminares

En la siguiente sección, usaremos Δ para referirnos a la diferencia simétrica entre dos conjuntos.

Recordemos al mapa $\Lambda : \Sigma \times D_+^2(3\varepsilon) \to \overline{B}^4$, el cuál habíamos definido como $\Lambda(p,s) = (1-s_1)(\cos(s_2)p + \sin(s_2)N(p))$. Si v_n es una sucesión en B^4 que converge a $p \in \Sigma$, entonces para n suficientemente grande existen únicos $p_n \in \Sigma$ y $s_n \in D_+^2(3\varepsilon)$ tales que $v_n = \Lambda(p_n, s_n)$. Como Λ era difeomorfo a su imagen, es claro que $p_n \to p$ y que $s_n \to 0$.

Notando además que $\frac{(s_n)_2}{(s_n)_1} \in [-\infty, +\infty]$ para todo n, tenemos que o bien existe una subsucesión s_{n_j} tal que $\frac{(s_{n_j})_2}{(s_{n_j})_1} \to +\infty$, o existe una tal que $\frac{(s_{n_j})_2}{(s_{n_j})_1} \to -\infty$, o $\frac{(s_n)_2}{(s_n)_1}$ eventualmente cae en un compacto y luego existe subsucesión tal que $\frac{(s_{n_j})_2}{(s_{n_j})_1} \to c \in \mathbb{R}$. Luego, tomando una subsucesión podemos asumir sin perder generalidad que $\frac{(s_n)_2}{(s_n)_1} \to k \in [-\infty, +\infty]$.

Probemos ahora el siguiente Lema.

Lema 5.2.1. *Sea $(v_n, t_n) \in B^4 \times [-\pi, \pi]$ una sucesión que converge a $(v,t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$.*

1. *Si $v \in B^4$ entonces $\lim_{n\to+\infty} Vol(A_{(v_n,t_n)} \ \Delta \ A_{(v,t)}) = 0$.*
2. *Si $v \in A$ entonces $\lim_{n\to+\infty} Vol(A_{(v_n,t_n)} \ \Delta \ B_{\pi+t}(v)) = 0$ y para todo $\delta > 0$, si n es suficientemente grande vale que*
$$\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\pi+t+\delta}(v) \setminus B_{\pi+t-\delta}(v).$$
3. *Si $v \in A^*$ entonces $\lim_{n\to+\infty} Vol(A_{(v_n,t_n)} \ \Delta \ B_t(-v)) = 0$ y para todo $\delta > 0$, si n es suficientemente grande vale que*
$$\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{t+\delta}(-v) \setminus B_{t-\delta}(-v).$$

Demostración:
Llamemos N_v al vector normal a Σ_v con la dirección de $DF_v(N)$. Considero el mapa exponencial normal de Σ_v $exp_v : \Sigma_v \times \mathbb{R} \to S^3$, dado por
$$\exp_v(y,t) = \cos(t)y + \sin(t)N_v(y).$$
Como Σ_v es compacto, sabemos que para todo $x \in S^3$ existe al menos un $y \in \Sigma_v$ tal que $x = \exp_v(y, d_v(x))$. Como consecuencia de esto, $(A_{(v,t)} \setminus A_{(v,s)}) \subset \exp_v(\Sigma_v \times [s,t))$ si

$s \leq t$.

Probemos entonces 1: sea $\delta > 0$, notemos existe $\eta > 0$ tal que

$$\text{Vol}(\exp_v(\delta_v \times [t-\eta, t+\eta])) \leq \delta.$$

Usando la interpretación geométrica de F_v, tenemos que la sucesión de superficies Σ_{v_n} tiende uniformemente a Σ_v (ya que v_n tiende a $v \in B^4$). Como además $t_n \to t$, con desigualdad triangular podemos ver que $A_{(v,t-\eta)} \subset A_{(v_n,t_n)} \subset A_{(v,t+\eta)}$ para $n \geq n_0$.

Tenemos entonces que para $n \geq n_0$, por un lado $A_{(v_n,t_n)} \cup A_{(v,t)} \subset A_{(v,t+\eta)}$ y por el otro $A_{(v,t-\eta)} \subset A_{(v_n,t_n)} \cap A_{(v,t)}$. De esto, si $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A_{(v_n,t_n)} \,\Delta\, A_{(v,t)}) &\leq \text{Vol}(A_{(v,t+\eta)} \setminus A_{(v,t-\eta)}) \\ &\leq \text{Vol}(\exp_v(\delta_v \times [t-\eta, t+\eta])) \leq \delta, \end{aligned}$$

por lo que estamos.

Probemos ahora 2. Como $v \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(v) \subset A$. Dado $\delta > 0$, por la interpretación geométrica de F_v tenemos que al acercarse v_n a v, $F_{v_n}(B_r(v))$ tiende a cubrir cada vez una parte más grande de S^3. En particular

$$\overline{B}_{\pi-\delta/2}(v) \subset F_{v_n}(B_r(v)) \subset F_{v_n}(A) = A_{(v_n,0)}$$

para todo $n \geq n_0$. Notar que como Σ_{v_n} es el borde de $A_{(v_n,0)}$, este cae en $B_{\delta/2}(-v) = S^3 \setminus \overline{B}_{\pi-\delta/2}(v)$ para estos n. Pidamos además a n_0 que sea suficientemente grande tal que $|t_n - t| \leq \frac{\delta}{2}$.

Con esto, si $t \geq 0$, tenemos que $\overline{B}_{\pi-\delta}(v) \subset A_{(v_n,-\delta/2)} \subset A_{(v_n,t_n)}$ por el párrafo anterior y desigualdad triangular. De esto, $\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset B_\delta(-v)$, por lo que $\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\pi+t+\delta}(v) \setminus B_{\pi+t-\delta}(v)$, ya que $\overline{B}_r(v) = S^3$ para todo $r \geq \pi$ (ya que dos puntos en S^3 distan en a lo sumo π geodésicamente).

De esto mismo, $\overline{B}_{\pi+t}(v) = S^3$ y luego

$$\text{Vol}(A_{(v_n,t_n)} \,\Delta\, B_{\pi+t}(v)) \leq \text{Vol}(S^3 \setminus A_{(v_n,t_n)}) \leq \text{Vol}(B_\delta(-v))$$

por lo que 2 vale si $t \geq 0$.

Notar además que como $A_{(v_n,0)}$ tiende a cubrir todo S^3, si $t > 0$ tenemos que $A_{(v_n,t_n)} = S^3$ para n suficientemente grande (y luego $\Sigma_{(v_n,t_n)} = \emptyset$).

Si ahora $t < 0$, tomo $n_1 \geq n_0$ tal que $t_n < 0$ para todo $n \geq n_1$. De acá, si $x \in A_{(v_n,t_n)}$ y $y \in \Sigma_{v_n}$ es tal que realiza la distancia (es decir $d_{v_n}(x) = -d(x,y)$), tenemos por la desigualdad triangular que

$$d(x,-v) \geq d(x,y) - d(y,-v) = -d_{v_n}(x) - d(y,-v) \geq -t_n - \delta/2 \geq t - \delta,$$

donde la desigualdad $d_{v_n}(x) + d(y,-v) \leq t_n + \delta/2$ sale por la definición de $A_{(v_n,t_n)}$ y por $\Sigma_{v_n} \subset B_{\delta/2}(-v)$. De esto, $A_{(v_n,t_n)} \subset S^3 \setminus \overline{B}_{-t-\delta}(v) = B_{\pi+t+\delta}(v)$ para todo $n \geq n_1$.

Además, si $x \in B_{\pi+t-\delta}(v)$, x cae afuera de $B_{\delta/2}(-v)$ y de $\Sigma_{v_n} \subset B_{\delta/2}(-v)$ tenemos que:

$$d(x, \Sigma_{v_n}) > d(x, \partial B_{\delta/2}(-v)) > -t + \delta/2 \geq -t_n,$$

donde la penúltima desigualdad es por $d(x, -v) > \delta - t$ y por desigualdad triangular. De esto, $x \in A_{(v_n,t_n)}$ y luego $B_{\pi+t-\delta}(v) \subset A_{(v_n,t_n)} \subset B_{\pi+t+\delta}(v)$ para todo $n \geq n_1$.

De esto, $\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\pi+t+\delta}(v) \setminus B_{\pi+t-\delta}(v)$ por el mismo argumento de frontera que hicimos antes en esta demostración. Además de la misma contención, tenemos que

$$(A_{(v_n,t_n)} \; \Delta \; B_{\pi+t}(v)) \subset \overline{B}_{\pi+t+\delta}(v) \setminus B_{\pi+t-\delta}(v)$$

y el volumen deseado tiende a 0, lo que completa la demostración del Lema 2 para $t < 0$.

Para demostrar 3 hacemos exactamente lo mismo que acabamos de hacer para probar 2, cambiando el signo cuando sea necesario. □

Con este Lema probado, nuestro próximo objetivo es entender qué pasa cuando la sucesión de este Lema tiende a un punto en Σ. Eso se puede entender mediante las observaciones hechas al principio de esta sección y medinte un Lema que enunciaremos en breve.

Sin embargo, antes de enunciar este Lema, enunciaremos y probaremos un Lema intermedio que nos será útil.

Lema 5.2.2. *Existe $r_0 > 0$ tal que $\forall p \in \Sigma$ vale que:*

$$B_{r_0}(\cos(r_0)p - \sin(r_0)N(p)) \subset A \subset \overline{A} \subset S^3 \setminus B_{r_0}(\cos(r_0)p + \sin(r_0)N(p)).$$

Demostración:
Para empezar, es un resultado clásico de geometría riemanniana que si r_0 es suficientemente chico y $x \in S^3$ cumple $d(x, \Sigma) \leq r_0$, existe un único $q \in \Sigma$ tal que la geodésica más corta uniendo x y q es ortogonal a Σ en q. Una prueba de esto se puede extraer como consecuencia de [13, Capítulo 5, Lema 3.3] y de que Σ es una variedad compacta. En particular, vale $d(x, q) = d(x, \Sigma)$.

Sean $x_1 = \cos(r_0)p - \sin(r_0)N(p)$ y $x_2 = \cos(r_0)p + \sin(r_0)N(p)$, entonces $d(x_1, \Sigma) = d(x_2, \Sigma) = r_0$. De esto, $B_{r_0}(x_1) \cap \Sigma = B_{r_0}(x_2) \cap \Sigma = \emptyset$. Como $x_1 \in A$ y $x_2 \in A^*$, tenemos $A \subset B_{r_0}(x_1)$, $A^* \subset B_{r_0}(x_2)$ y estamos. □

Ahora, enunciaremos un Teorema que también usaremos para probar el Lema que buscamos demostrar, cuya demostración excede los límites de esta Tesis.

Teorema 5.2.3. *Existe una constante fija $C_0 > 0$ y para cada $r \in (0, \pi/4)$ existen $C_1 > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ (que dependen de r) tales que si $\langle p, N\rangle = 0$, con $p, N \in S^3$ entonces para todo $0 < s \leq \varepsilon_0$ y $|t| \leq \varepsilon_0$, vale que*

$$B^4_{\overline{R}-aC_0}(\overline{Q}) \cap S^3 \subset F_v(B^4_{\sqrt{2}}(-N) \cap S^3) \subset B^4_{\overline{R}+aC_0}(\overline{Q}) \cap S^3$$

y que

$$F_v(\Delta(p, N, r)) \subset B^4_{\overline{R}+aC_1}(\overline{Q}) \setminus B^4_{\overline{R}-aC_1}(\overline{Q})$$

donde $\Delta(p, N, r) = S^3 \setminus (B_r(\cos(r)p + \sin(r)N) \cup B_r(\cos(r)p - \sin(r)N))$, $v = (1 - s)(\cos(t)p + \sin(t)N(p))$, $a = \sqrt{|(s,t)|}$, y si $k = \frac{t}{s}$, entonces se define $\overline{Q} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}p - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}N(p)$ y $\overline{R} = \sqrt{2 - \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}}$.

Por último, antes de enunciar el Lema recordemos $\overline{Q}_{p,k} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}p + \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}N(p)$. Estamos ahora listos para enunciar y demostrar lo siguiente:

Lema 5.2.4. *Sea $(v_n, t_n) \in B^4 \times [-\pi, \pi]$ una sucesión que converge a (p, t), con $p \in \Sigma$ y $t \in [-\pi, \pi]$, tal que $v_n = \Lambda(p_n, (s_{n1}, s_{n2}))$, con $\frac{(s_n)_2}{(s_n)_1} \to k \in [-\infty, \infty]$, entonces $\lim_{n\to+\infty} Vol(A_{(v_n,t_n)} \,\Delta\, B_{\overline{r}_k+t}(\overline{Q}_{p,k})) = 0$.*
Además, $\forall\delta > 0$ vale que $\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \setminus \overline{B}_{\overline{r}_k+t-\delta}(\overline{Q}_{p,k})$ para n suficientemente grande.

Demostración:
Sea $k_n = \frac{s_{n2}}{s_{n1}}$, sabemos que $k_n \to k$ y que $p_n \to p$. Para cada $q \in \Sigma$, defino $B_q = B_{\pi/2}(-N(q)) = B^4_{\sqrt{2}}(-N(q)) \cap S^3$. Tomando r_0 del Lema 3.3, notando que $B_{r_0}(\cos(r_0)p - \sin(r_0)N(p))$ está totalmente contenida en B_{p_n}, y notando que $B_{r_0}(\cos(r_0)p + \sin(r_0)N(p))$ no interseca a B_{p_n}, tenemos que:

$$A \,\Delta\, B_{p_n} \subset S^3 \setminus (B_{r_0}(\cos(r_0)p + \sin(r_0)N(p)) \cup B_{r_0}(\cos(r_0)p - \sin(r_0)N(p)))\,.$$

Ahora, por el Teorema 3.4 existe un $C_0 > 0$ y un n_0 tal que

$$B^4_{\overline{R}_{k_n}-C_0\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \cap S^3 \subset F_{v_n}(B_{p_n}) \subset B^4_{\overline{R}_{k_n}+C_0\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \cap S^3$$

para todo $n \geq n_0$, donde $a_n = |(s_{n1}, s_{n2})| = s_{n1}\sqrt{1 + k_n^2}$ (notar $a_n \to 0$).

Nos gustaría probar esta misma doble contención para $F_{v_n}(A)$. Prestando notación del Teorema 3.4, y como F_v es biyectiva, tenemos $F_{v_n}(A) \,\Delta\, F_{v_n}(B_{p_n}) = F_{v_n}(A \,\Delta\, B_{p_n}) = F_{v_n}(S^3 \setminus \Delta(p_n, N(p_n), r_0)) = S^3 \setminus F_v(\Delta(p_n, N(p_n), r_0))$, pero por el mismo Teorema sabíamos que:

$$F_v(\Delta(p_n, N(p), r_0)) \subset B^4_{\overline{R}_{k_n}+C_1\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \setminus B^4_{\overline{R}_{k_n}-C_1\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}),$$

donde C_1 depende de r_0 pero r_0 está fijo. Luego, podemos tomar $C = \min\{C_0, C_1\}$, y como $B^4_{R_{k_n}-C\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$ contiene a $F_{v_n}(B_{p_n})$ pero no se interseca con $(F_{v_n}(B_{p_n}) \Delta F_{v_n}(A))$, tenemos que contiene a $F_{v_n}(A)$. De una manera similar, $S^3 \setminus B^4_{R_{k_n}+C\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$ no se interseca con $(F_{v_n}(B_{p_n}) \Delta F_{v_n}(A))$ ni con $F_{v_n}(B_{p_n})$, por lo que juntando todo llegamos a

$$B^4_{R_{k_n}-C\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \cap S^3 \subset F_{v_n}(A) \subset B^4_{R_{k_n}+C\sqrt{a_n}}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \cap S^3,$$

donde nuevamente $a_n \to 0$.

De esto, y de la definición de $\overline{r}_{k_n}$, para todo $\delta > 0$ existe $n_1 \geq n_0$ tal que para todo $n \geq n_1$ vale que

$$B_{\overline{r}_{k_n}-\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \subset F_{v_n}(A) \subset B_{\overline{r}_{k_n}+\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n}),$$

por lo que $\Sigma_{v_n} \subset \overline{B}_{\overline{r}_{k_n}+\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \setminus B_{\overline{r}_{k_n}-\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$.

Si $\overline{r}_k = \pi$ tenemos $B_{\pi-\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \subset F_{v_n}(A)$ y $\Sigma_{v_n} \subset S^3 \setminus B_{\pi-\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$. Acá estamos en una situación análoga a la demostración de Lema 3.2 (2), y podemos terminar tras seguir la misma demostración que en ese Lema y ajustando n_0 para que $\overline{Q}_{p_n,k_n}$ y $\overline{Q}_{p,k}$ estén lo suficientemente cerca. Similarmente, si $\overline{r}_k = 0$ tenemos $F_{v_n}(A) \subset B_{\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$ y $\Sigma_{v_n} \subset \overline{B}_{\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n})$, y la misma idea funciona.

Supongamos ahora que $\overline{r}_k \in (0, \pi)$. y tomemos $0 < \delta < \min\{\overline{r}_k, \pi - \overline{r}_k\}$. Tomemos $n_2 \geq n_1$ tal que si $n \geq n_2$ entonces $|t_n - t| + d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \ \overline{Q}_{p,k}) + |\overline{r}_{k_n} - \overline{r}_k| < \delta/2$. De esto, si $n \geq n_2$, $\overline{Q}_{p,k} \in F_{v_n}(A)$ pero $-\overline{Q}_{p,k} \notin F_{v_n}(A)$.

Probemos ahora que $A_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k})$ para $n \geq n_2$. Fijamos n y fijamos $x \in A_{(v_n,t_n)}$. Sabemos que $d_{v_n}(x) < t_n$ y que $x = exp_{v_n}(y, d_n(x))$ para algún $y \in \Sigma_{v_n}$.

Si $d_{v_n}(x) \geq 0$, $d(x, \overline{Q}_{p,k}) \leq d(x, y) + d(y, \ \overline{Q}_{p_n,k_n}) + d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \ \overline{Q}_{p,k})$. Ahora, $d(x, y) < t_n \leq t + |t_n + t|$. Además, $d(y, \ \overline{Q}_{p_n,k_n}) \leq \overline{r}_{k_n} + \delta/2 \leq \overline{r}_k + |\overline{r}_{k_n} - \overline{r}_k| + \delta/2$ por la contención de bolas que probamos arriba. Juntando todo, tenemos

$$d(x, \overline{Q}_{p,k}) \leq t + \overline{r}_k + |\overline{r}_{k_n} - \overline{r}_k| + \delta/2 + d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \ \overline{Q}_{p,k}) \leq \overline{r}_k + t + \delta,$$

que es lo que queríamos.

Si $d_{v_n}(x) < 0$, $x \in F_{v_n}(A)$, y todo camino continuo de x a $-\overline{Q}_{p_n,k_n}$ interseca a Σ_{v_n}, ya que $F_{v_n}(A) \subset B_{\overline{r}_{k_n}+\delta/2}$. De esto, $d(x, -\overline{Q}_{p,k}) \geq d(x, -\overline{Q}_{p_n,k_n}) \ - \ d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \overline{Q}_{p,k})$, que es mayor o igual a $d(x, \Sigma_{v_n}) + d(\Sigma_{v_n}, -\overline{Q}_{p_n,k_n}) - d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \overline{Q}_{p,k})$. En este caso, tenemos que $d(x, \Sigma) = -d_{v_n}(x) > -t_n$ y tenemos que como los puntos de Σ_{v_n} distan a lo sumo $\overline{r}_{k_n} + \delta/2$ de $\overline{Q}_{p_n,k_n}$ por la contención de bolas, distan en al menos $\pi - \overline{r}_{k_n} - \delta/2$ de $-\overline{Q}_{p_n,k_n}$. Juntando todo, nos queda

$$d(x, -\overline{Q}_{p,k}) > \pi - (t_n + \overline{r}_{k_n} + d(\overline{Q}_{p_n,k_n}, \overline{Q}_{p,k})) - \delta/2 \geq \pi - t - \overline{r}_k - \delta$$

y luego $d(x, \overline{Q}_{p,k}) \leq \overline{r}_k + t + \delta$, de donde concluímos $A_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k})$.

Para probar $\overline{B}_{\overline{r}_k+t-\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \subset A_{(v_n,t_n)}$ procedemos similarmente: considero x tal que $d_{v_n}(x) \geq t_n$, tomamos $y \in \Sigma_{v_n}$ tal que $x = exp_{v_n}(y, d_n(x))$, y tratamos de probar que $d(x, \overline{Q}_{p,k}) > \overline{r}_k + t - \delta$ (para probar la inclusión inversa entre los complementos).

Si $d_{v_n}(x) > 0$, uso que cualquier camino desde $x \in F_{v_n}(A^*)$ hasta $\overline{Q}_{p,k} \in F_{v_n}(A)$ interseca a Σ_{v_n} (ya que $B_{\overline{r}_{k_n}-\delta/2}(\overline{Q}_{p_n,k_n}) \subset F_{v_n}(A)$), y la cuenta es análoga al caso $d_{v_n}(x) < 0$ de la contención anterior.

Si $d_{v_n}(x) < 0$, pruebo que $d(x,\ -\overline{Q}_{p,k}) \leq \pi - \overline{r}_k - t + \delta$ con una cuenta análoga al caso $d_{v_n}(x) > 0$ de la contención anterior.

Tenemos entonces $\overline{B}_{\overline{r}_k+t-\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \subset A_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \subset A_{(v_n,t_n)}$. De esto, es claro que $\Sigma_{(v_n,t_n)} \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \setminus \overline{B}_{\overline{r}_k+t-\delta}(\overline{Q}_{p,k})$ y que:

$$(A_{(v_n,t_n)}\ \Delta\ \overline{B}_{\overline{r}_k+t}(\overline{Q}_{p,k})) \subset \overline{B}_{\overline{r}_k+t+\delta}(\overline{Q}_{p,k}) \setminus \overline{B}_{\overline{r}_k+t-\delta}(\overline{Q}_{p,k}),$$

lo que implica el resulado ya que $\delta > 0$ puede ser arbitrariamente chico. □

5.3. Extensión de la Familia Canónica

Recordemos que la función $\overline{r} : \overline{\Omega}_\varepsilon \to [0, \pi]$ estaba definida como $\overline{r}(\Lambda(p,s)) = \overline{r}_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(k)$, donde $k = s_2/\sqrt{\varepsilon^2 - s_2^2}$, y recordemos que esta función se extendía a la función $\overline{r} : S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon \to [0, \pi]$ tomando $\overline{r}(v) = 0$ en $A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, y $\overline{r}(v) = \pi$ en $A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$.

Observación 5.3.1. *Veamos que esta última $\overline{r}$ es continua: claramente, es continua en las dos componentes donde es constante, y tambien en Ω_ε, ya que ahí es composición de funciones continuas.*

Además, si tomamos $v(t) = \Lambda(p, (0, t)) = \cos(t)p + \sin(t)N(p) \in \Omega_{2\varepsilon} \cap S^3$, y tenemos que $\lim_{t\to\varepsilon^-} \overline{r}(v(t)) = \lim_{k\to+\infty}(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)) = 0$ por un lado, mientras que $\lim_{t\to-\varepsilon^+} \overline{r}(v(t)) = \lim_{k\to-\infty}(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)) = \pi$ por el otro, lo que implica la continuidad deseada por Lema del pegado.

Probemos ahora este Lema:

Lema 5.3.2. *Sea $U : \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi] \to \mathbf{I}_3(S^3)$ el mapa definido por*

$$U(v,t) = \begin{cases} [|A_{(T(v),t)}|] & \text{para } v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon \\ [|B_{\overline{r}(v)+t}(\overline{Q}(v))|] & \text{para } v \in S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon \end{cases}.$$

entonces U está bien definido y es conitnuo respecto a la topología que induce la métrica **M**.

Demostración:

Notar que $A_{(T(v),t)}$ tiene frontera de área finita para todo $v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$. De esto, $[|A_{(T(v),t)}|] \in \mathbf{I}_3(S^3)$ ya que $A_{(T(v),t)}$ es una 3-subvariedad de S^3 y $\partial A_{(T(v),t)}$ es una 2-subvariedad rectificable de S^3. Como lo mismo se puede decir inmediatamente para $B_{\overline{r}(v)+t}(\overline{Q}(v))$, U está bien definido.

Usaremos que si V_1, V_2 son subconjuntos abiertos de S^3, vale que

$$\mathbf{M}([|V_1|]-[|V_2|]) = \mathbf{M}([|V_1 \setminus V_2|]-[|V_2 \setminus V_1|]) = \mathbf{M}([|V_1 \setminus V_2|]+[|V_2 \setminus V_1|]) = \mathrm{Vol}(V_1 \,\Delta\, V_2).$$

donde la segunda igualdad se puede probar tomando una sucesión de funciones suaves que aproximen a 1 en $V_1 \setminus V_2$ y a -1 en $V_2 \setminus V_1$ y la tercera igualdad es por 3.3.6.

Con esto, podemos usar los resultados de la sección anterior para probar la continuidad de U: si $(v_n, t_n) \to (v, t)$ con $v_n, v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, tenemos por el ítem 1 de 5.2.1 que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(U(v_n, t_n) - U(v, t)) = 0$.

Si $(v_n, t_n) \to (v, t)$ con $v \in A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$. Por continuidad de T, $T(v_n) \to T(v)$, con $T(v) \in A \setminus \Sigma$ por definición de T, y tenemos que $\overline{r}(v) = \pi$. De esto, tenemos por un lado que $U(v, t) = [|B_{\pi+t}(T(v))|]$ y por el otro tenemos que si n es suficientemente grande, $U(v_n, t_n) = |[B_{\pi+t_n}(T(v))]|$ si $v_n \in S^3$ (ya que v_n eventualmente cae en $A \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$) y $U(v_n, t_n) = |[A_{(T(v_n),t_n)}]|$ si $v_n \in B^4$.

Usando el ítem 2 de 5.2.1 y que $\mathrm{Vol}(B_{\pi+t}(T(v)) \,\Delta\, B_{\pi+t_n}(T(v))) \to 0$, tenemos que necesariamente

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}(U(v_n, t_n) - U(v, t)) = 0.$$

El caso $(v_n, t_n) \to (v, t)$ con $v \in A^* \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ sale de una manera análoga usando el ítem 3 de 5.2.1.

Recordemos además que por el Teorema 4.3.1 $\overline{Q}$ es continua en v, y que por el principio de esta subsección, $\overline{r}$ también lo es. De esto, la restricción de U a $\overline{\Omega}_\varepsilon$ es continua en la topología inducida por $\mathbf{M}$ por el mismo argumento de volumen de diferencia simétrica. Luego nos falta entonces solamente el caso $(v_n, t_n) \to (v, t)$ con $v_n \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ y $v \in \partial\overline{\Omega}_\varepsilon$.

Como $v_n \in \overline{\Omega}_{2\varepsilon}$ para n suficientemenete grande, escribo $v_n = \Lambda(p_n, s_n)$ y $v = \Lambda(p, s)$, donde $\varepsilon = |s| < |s_n|$, y donde $s_n, s \in D^2_+(2\varepsilon)$. Es claro que $\frac{(s_n)_2}{(s_n)_1} \to \frac{s_2}{s_1} \in [-\infty, +\infty]$, y defino este valor como k. Recordando la definición de T, tenemos que $T(v_n) = \Lambda(p_n, u_n)$, donde $u_n = \phi(|s_n|)s_n$.

Notemos que de esto, $\frac{u_{n2}}{u_{n1}} \to k$, $u_n \to 0$ y luego $T(v_n) \to T(v) \in \Sigma$. Luego, podemos usar el Lema 3.5 y la propiedad sobre diferencia simétrica para ver que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}([|A_{(T(v_n),t_n)}|] - [|B_{\overline{r}_k+t}(\overline{Q}_{p,k})|]) = 0.$$

Como $U(v_n, t_n) = [|A_{(T(v_n),t_n)}|]$, basta probar que $U(v, t) = [|B_{\overline{r}_k+t}(\overline{Q}_{p,k}))|]$, por lo que nos alcanza con ver que $\overline{r}_k + t = \overline{r}(v) + t$ y que $\overline{Q}_{p,k} = \overline{Q}(v)$.

Recordemos que si $v = \Lambda(p,s)$, $\overline{r}(v)$ se definía como $\overline{r}_k$ y $\overline{Q}(v)$ se definía como $\overline{p,k}$ para $k = \frac{s_2}{\sqrt{\varepsilon^2 - s_2^2}}$. Como pedimos que $\varepsilon = |s|$, este k coincide con $\frac{s_2}{s_1}$, que es el k que habíamos definido arriba, y luego tenemos las igualdades deseadas. $\square$

Notemos que de 5.1.1 tenemoos $C(v,t) = \partial U(v,t)$ para todo $(v,t) \in \overline{B} \times [-\pi,\pi]$. Este mapa esta bien definido ya que como $U(v,t) \in \mathbf{I}_3(S^3)$ y $\partial^2 = 0$, vale $C(v,t) \in \mathcal{Z}_2(S^3)$. Nos falta entonces probar que $\mathbf{M}(C(v,t)) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$ $\forall (v,t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi,\pi]$ y que C es continuo en $\mathcal{F}$ para terminar la prueba.

Como $\mathcal{W}(\Sigma) \geq 4\pi$, lo primero es cierto para $v \in S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon$, ya que en este caso $C(v,t)$ es una current inducida por una subvariedad de área a lo sumo 4π (esfera de radio ≤ 1). Luego, nos basta con ver el caso $v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$.

Notemos que como $T(v) \in B^4$, $A_{(T(v),t)}$ es un abierto de S^3 y tiene perímetro localmente finito, por ser su borde una variedad 2-rectificable. Recordemos de la sección 3.7 que si $\partial^* A_{(T(v),t)}$ es la frontera reducida de $A_{(T(v),t)}$, entonces por 3.7.8 y el ítem (3) de 3.7.7, vale que

$$\mathbf{M}(\partial[|A_{(T(v),t)}|]) = \int_{S^3} ||\partial A_{(T(v),t)}|| = \mathcal{H}^2(\partial^* A_{(T(v),t)})).$$

donde recordemos que $||\partial A_{(T(v),t)}||$ en la segunda igualdad es la medida que induce el conjunto de perímetro localmente finito $A_{(T(v),t)}$. Como además la frontera reducida está contenida en la frontera topológica (3.7.6), tenemos que $\mathcal{H}^2(\partial^* A_{(T(v),t)})) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_{(T(v),t)})) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$. Esto prueba la desigualdad deseada.

Probemos ahora que el mapa es continuo en la topología bemol para currents: queremos ver que $\mathcal{F}(C(v_n,t_n), C(v,t)) \to 0$ cuando $v_n \to v$ y $t_n \to t$, pero por definición $\mathcal{F}(C(v_n,t_n), C(v,t)) \leq \mathbf{M}(Q)$ para todo $Q \in \mathbf{I}_3(S^3)$ tal que $C(v_n,t_n) - C(v,t) = \partial Q$. Como el diferencial de formas es lineal, se puede probar que la frontera en currents también lo es, y luego podemos tomar $Q = U(v_n,t_n) - U(v,t)$ de donde el resultado es directo por el Lema 5.3.2.

Lo último que nos falta probar es que $C(v,\pi) = C(v,-\pi) = 0$. Si $v \in S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon$, tenemos que como la imagen de $\overline{r}(v)$ es $[0,\pi]$, $U(v,\pi) = [|S^3|]$ y $U(v,-\pi) = 0$, por lo que estamos. Si $v \in B^4 \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, tenemos que ningún punto $p \in S^3$ puede distar en π o más de $\Sigma_{T(v)}$ (ya que sinó $\Sigma_{T(v)} \subset \{-p\}$). De esto, $A_{(T(v),\pi)} = S^3$, $A_{(T(v),-\pi)} = \emptyset$, lo que termina de probar lo deseado.

Esto concluye la demostración de 5.1.1.

5.4. La familia Min-Max

El objetivo de lo que queda de este capítulo es construir un mapa Φ hacia $\mathcal{Z}_2(S^3)$ sobre el cual aplicar Teoría Min-Max. Recordemos la definición del mapa C de la sección anterior. Notar que podemos extender este mapa a $\overline{B}^4 \times \mathbb{R}$ definiendo $C(v,t) = 0$ para todo $|t| > \pi$. Llamaremos C a esta extensión. Por el Teorema de extensión de Tietze, como $S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon$ es compacto en $\overline{B}^4$ podemos también extender $\overline{r}$ a una función continua $\overline{r} : \overline{B}^4 \to [0,\pi]$.

Tomemos un homeomorfismo que preserve orientación $f : I^4 \to \overline{B}^4$ (notar que $f|_{\partial I^4}$ es un homeomorfismo de ∂I^4 a S^3), y tomemos además $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(s) = 0$ para $s \leq \frac{1}{2}$ y $\gamma(s) = 2s - 1$ para $s \geq \frac{1}{2}$.

Definición 5.4.1 (Familia Min-Max). Definimos la *familia Min-Max de* Σ como el mapa $\Phi : I^5 \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ dado por

$$\Phi(x,t) = C\left(f(x),\ 2\pi(2t-1) + \gamma(|f(x)|)(\frac{\pi}{2} - \overline{r}(f(x))\right).$$

Notemos que si $x \in \partial I^4$ entonces por la definición del mapa C en 5.1.1 tenemos que $\gamma(|f(x)|) = 1$ y luego $\Phi(x,t) = \partial[|B_{2\pi(2t-1)+\pi/2}(\overline{Q}(f(x)))|]$.

Vamos ahora a probar un Teorema que resumirá todas las propiedades útiles de Φ. Llamaremos $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}_2(S^3)$ al conjunto de las grandes esferas (no orientadas) en S^3. Por definición, este conjunto se puede pensar topológicamente como el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^3$. Recordemos la definición de $\mathbf{m}(\Phi,r)$ dada en 3.2.

Teorema 5.4.2. *Sea $\Sigma \subset S^3$ una superficie embebida de género g, entonces el mapa $\Phi : I^5 \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *Φ es continuo respecto a la topología bemol de Currents.*
2. *$\Phi(I^4 \times \{0\}) = \Phi(I^4 \times \{1\}) = \{0\}$.*
3. *$\sup\{\mathbf{M}(\phi(x)) : x \in I^5\} \leq \mathcal{W}(\Sigma)$*
4. *La restricción $\Phi : \partial I^4 \times I \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ es continua en la métrica $\mathbf{F}$.*
5. *Para todo $c \in I^4$ el mapa $\alpha : I \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ dado por $\alpha(t) = \Phi(c,t)$ cumple que $\alpha(t) = \partial[|U(t)|]\ \forall t \in [0,1]$, donde los conjuntos $U(t)$ tienen perímetro finito en S^3, $U(0) = \emptyset$. $U(1) = S^3$ y $t \to [|U(t)|]$ es continua en $\mathbf{M}$.*
6. *$\max\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \partial I^5\} = 4\pi$, y si se alcanza el máximo en x, entonces $|\Phi(x)| \in \mathcal{T}$.*
7. *Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $(x,t) \in \partial I^5$ cumple $\mathbf{F}(|\Phi(x,t)|, \mathcal{T}) \leq \varepsilon$, entonces $|t - \frac{1}{2}| \leq \delta$.*
8. *El mapa $|\Phi| : \partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\} \to \mathcal{T}$ que se define como $|\Phi|(x,\frac{1}{2}) = |\Phi(x,\frac{1}{2})| = |\partial B_{\pi/2}(\overline{Q}(f(x)))|$ cumple que*

$$|\Phi|_*([\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}]) = 2g \in H_3(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}.$$

9. *$\lim_{r\to 0} \mathbf{m}(\Phi,r) = 0$.*

Demostración:

(1) es consecuencia directa de 5.1.1, ya que f es continua. Para (2), notemos que como $0 \leq \overline{r} \leq \pi$, tenemos que $2\pi + \gamma(|f(x)|)(\frac{\pi}{2} - \overline{r}(f(x))) > \pi$, de donde $\Phi(x,1) = C(f(x), 2\pi + \gamma(|f(x)|)(\frac{\pi}{2} - \overline{r}(f(x)))) = 0$. Similarmente, $-2\pi + \gamma(|f(x)|)(\frac{\pi}{2} - \overline{r}(f(x))) < -\pi$ y $\Phi(x,0) = 0$ para todo x. Además, (3) es también consecuencia directa de 5.1.1.

Para probar (4), basta probar que la restricción de C a S^3 es continua en $\mathbf{F}$. Para hacerlo, basta probar que C es continua en la métrica bemol de Currents (cosa que ya hicimos en 5.1.1) y que si $(v_n, t_n) \to (v, t)$ con $v_n, v \in S^3$ entonces

$$\mathbf{F}(|\partial[|B_{\overline{r}(v_n)+t_n}(\overline{Q}(v_n))|]|,\ |\partial[|B_{\overline{r}(v)+t}(\overline{Q}(v))|]|) \to 0.$$

Esto se puede probar usando que las $f \in C_c(G_2(\mathbb{R}^4))$ que tomo para calcular esta distancia son 1-Lipschitz, y usando que los planos tangentes a 2-esferas cercanas en S^3 son cercanos.

Para probar (5), basta tomar $U(t) = U(v,t)$, con U definido como en 5.3.2. Que $U(t)$ tiene perímetro finito en S^3 lo probamos cuando vimos que las fronteras eran 2-rectificables, y lo probado en este mismo Teorema implica todo lo demás.

Para (6), notemos que si $(x,t) \in \partial I^5$, entonces $t = 0$, $t = 1$, o $x \in \partial I^4$. Los primeros dos casos son irrelevantes ya que $\Phi = 0$, y para los demás tenemos que $\Phi(x,t) = \partial[|B_{2\pi(2t-1)+\pi/2}(\overline{Q}(f(x)))|]$, de donde la masa es el área de una esfera de radio a lo sumo 1 (es decir a lo sumo 4π), y la igualdad se consigue en el caso $t = \frac{1}{2}$, que es equivalente a $\Phi(x,t) \in \mathcal{T}$ (para $x \in \partial I^4$). Notar que esto último y (4) implican (7).

Para (8), considero el revestimiento de dos cartas $\mathcal{T}$ dado por $\pi : S^3 \to \mathcal{T}$, $\pi(p) = |\partial B_{\pi/2}(p)|$. Por definición, tenemos $|\Phi|(x, \frac{1}{2}) = \pi(\overline{Q}(f(x))) = (\pi \circ \overline{Q} \circ f)(x)$, de donde por [10, Página 189, propiedad (b)] el grado de esta composición es el producto de los grados de f (1 por homeo), $\overline{Q}$ (g por el Teorema 4.3.1) y π (2 por ser revestimiento de dos cartas). Luego, el grado de $x \to |\Phi|(x, \frac{1}{2})$ es $2g$ y estamos.

(9) es consecuencia inmediata de 4.3.2 por la definición de $\mathbf{m}(\Phi, r)$ y por la relación entre Masa local y área. $\square$

Capítulo 6

Teoría Min-Max de Almgren-Pitts

6.1. Sobre complejos simpliciales

Noto (M, g) a una 3-variedad riemanniana compacta. Llamo I^n al n-cubo, I_0^n a su frontera, y para cada j, $I(1, j)$ es el 1-complejo simplicial que consiste en I partido en 3^j cachos iguales. Llamo $I(n, j)$ al complejo que sale de multiplicar $I(1, j)$ n veces. Llamo $I(n, j)_p$ a las p-celdas del complejo, y $I_0(n, j)_p$ son las contenidas en el borde. $I_0(n, j)$ es el subcomplejo borde.

Sea α una p-celda, llamo $\alpha(k)$ al subcomplejo p-dimensional de $I(n, j + k)$ generado por lo contenido en α. Para $q \leq p$, llamo $\alpha(k)_q$ al conjunto de las q-celdas de $\alpha(k)$. $\alpha_0(k)_q$ es lo mismo pero pido soporte contenido en el borde de α.

Defino los subcomplejos de $I(n, j)$ top, bottom y side, que son respectivamente $T(n, j) = I(n-1, j) \otimes \langle[1]\rangle$, $B(n, j) = I(n-1, j) \otimes \langle[0]\rangle$, y $S(n, j) = I_0(n-1, j) \otimes I(1, j)$. Noto $T(n, j)_p$ y análogo con bottom y side a sets de p-celdas. Llamo ∂ al morfismo de borde de toda la vida. Defino una función distancia d entre vértices de $I(n, j)$ que es 3^j veces la Manhattan (así, dos vértices están unidos por una 1-celda sí y sólo sí su distancia es 1).

Por último, defino el mapa *nearest* como $\mathbf{n}(i, j) : I(n, i)_0 \to I(n, j)_0$, que manda un vértice de $I(n, i)$ al más cercano en $I(n, j)$ según la métrica d. Notar mínimo existe y es único. Notar que si $i \leq j$ entonces es el mapa trivial. Notar que $\mathbf{n}(k, i) = \mathbf{n}(j, i) \circ \mathbf{n}(k, j)$ cuando $i \leq j \leq k$.

Definición 6.1.1 (Bondad). Dado un mapa $\phi : I(n, j)_0 \to \mathcal{Z}_k(M)$, defino a la *bondad* de ϕ como:

$$\mathbf{b}(\phi) = \sup\left\{\frac{\mathbf{M}(\phi(x) - \phi(y))}{d(x, y)} : x, y \in I(n, j)_0,\ x \neq y\right\}.$$

Observación 6.1.2. *Usando que la Masa de una current es una métrica que cumple desigualdad triangular se puede verificar que* $\mathbf{b}(\phi) < \delta \Leftrightarrow \mathbf{M}(\phi(x) - \phi(y)) < \delta$ *para todos los* x, y *con* $d(x, y) = 1$.

6.2. Definiciones relacionadas a homotopías

Definición 6.2.1 (Mapas n-homotópicos con bondad δ). Sea $\Phi_0 : \partial I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$ una función continua en la métrica estandar de ∂I^n y la $\mathbf{F}$ de $\mathcal{Z}_2(M)$, que además cumple que $\Phi_0(I^{n-1} \times \{0\}) = \Phi_0(I^{n-1} \times \{1\}) = 0$. Diremos que $\phi_i : I(n, k_i)_0 \to \mathcal{Z}_2(M)$ para $i = 1, 2$ son *n-homotópicas en* $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ *con bondad* δ si existen $k \in \mathbb{N}$ y $\psi : I(1, k)_0 \times I(n, k)_0 \to \mathcal{Z}_2(M)$ tales que:

1. $\mathbf{b}(\psi) < \delta$ (donde pienso $I(1, k)_0 \times I(n, k)_0$ como $I(n + 1, k)_0$).

2. $\psi([0], x) = \phi_1(\mathbf{n}(k, k_1)(x))$ y $\psi([1], x) = \phi_2(\mathbf{n}(k, k_2)(x))$.

3. $\psi(I(1, k)_0 \times T(n, k)_0) = \psi(I(1, k)_0 \times B(n, k)_0) = \{0\}$.

4. Si x en $S(n, k)_0$, $\mathcal{F}(\psi(t, x) - \Phi_0(x)) \leq \delta$ y $\mathbf{M}(\psi(t, x)) \leq \mathbf{M}(\Phi_0(x)) + \delta$.

Observación 6.2.2. *Notar que por* (2) *y* (3), $\phi_i = 0$ *en* $T(n, k_i)_0 \cup B(n, k_i)_0$, *mientras que por* (2) *y* (4) *tenemos que* $\mathcal{F}(\phi_i(x) - \Phi_0(x)) \leq \delta$ *y* $\mathbf{M}(\phi_i(x)) - \mathbf{M}(\Phi_0(x)) \leq \delta$ *para* $i = 1, 2$. *Es claro que ser n-homotópicas con bondad δ es simétrico. Además, se puede ver que si* ϕ_1 *y* ϕ_2 *son n-homotópicas en* $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ *con bondad* δ_1 *y si* ϕ_2 *y* ϕ_3 *lo son con bondad* δ_2, *entones* ϕ_1 *y* ϕ_3 *lo son con bondad* $\delta = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Definición 6.2.3 (Sucesión de mapas $(n, \mathbf{M})$-homotópica). Diremos que una sucesión $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones desde $I(n, k_i)_0$ hacia $\mathcal{Z}_2(M)$ es una *sucesión de mapas* $(n, \mathbf{M})$-*homotópica hacia* $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ si:

- k_i es creciente y $k_i \to \infty$.

- ϕ_i es n-homotópica a ϕ_{i+1} en $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ con bondad δ_i.

- $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$.

- $\sup\{\mathbf{M}(\phi_i(x))\} < \infty$ entre todos los $i \in \mathbb{N}$ y todos los $x \in I(n, k_i)_0$.

Veamos ahora un Lema que nos dice que en estas sucesiones, ϕ_i tiende a Φ_0 en la métrica $\mathbf{F}$ en la frontera de su dominio.

Lema 6.2.4. *Sea* $S = \{\phi_i\}$ *una sucesión de mapas a* $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ $(n, \mathbf{M})$-*homotópica, entonces*

$$\text{lím sup}\,\{\mathbf{F}(\phi_i(x), \Phi_0(x)) : x \in I_0(n, k_i)_0\} = 0,$$

donde $I(n, k_i)_0$ *en este contexto es el dominio de* ϕ_i.

Demostración:

Sabemos $\phi_i(x) = \Phi_0(x) = 0$ para $x \in T(n,k_i)_0 \cup B(n,k_i)_0$ y que como Φ_0 es continua en $\mathbf{F}$, tenemos que $\Phi_0(I^n)$ es un compacto de $(\mathcal{Z}_2(M), \mathbf{F})$. El Lema es luego consecuencia directa del Lema 3.5.7 usando (4) en la definición de ser n-homotópicas. $\square$

Definición 6.2.5 (Homotopía entre sucesiones de mapas homotópicas). Consideremos dos sucesiones de mapas $(n, \mathbf{M})$-homotópicas hacia $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$ que llamaremos $S_1 = \{\phi_i^1\}$ y $S_2 = \{\phi_i^2\}$. Diremos que S_1 y S_2 son *homotópicas* si existe una sucesión $\delta_i \to 0$ de reales no negativos tales que ϕ_i^1 y ϕ_i^2 son n-homotópicas con bondad δ_i en $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$.

Observación 6.2.6. *Notar que relacionar dos sucesiones de mapas $(n, \mathbf{M})$-homotópicas si son homotópicas define una relación de equivalencia. Al conjunto de las clases de equivalencia definidas por esta relación le llamo $\pi_n^\#(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$.*

Además, defino $\pi_n^\#(\mathcal{Z}_2(M; \mathcal{F}), \{0\})$ haciendo exactamente lo mismo pero redefiniendo la función bondad $\mathbf{b}$ usando $\mathcal{F}$ en vez de la masa $\mathbf{M}$ y fijando $\Phi_0 = \{0\}$.

6.3. Definiciones importantes de Teoría Min-Max

Definición 6.3.1 (Anchura). Sea $\Pi \in \pi_n^\#(\mathcal{Z}_2(M; \mathcal{F}), \{0\})$, defino $\mathbf{L} : \Pi \to [0, +\infty)$ como

$$\mathbf{L}(S) = \limsup_{i \to \infty} \left\{ \max_{x \in \mathrm{Dom}(\phi_i)} \mathbf{M}(\phi_i(x)) \right\}.$$

Llamaremos *anchura* de Π a $\inf\{\mathbf{L}(S) : S \in \Pi\}$ y lo notaremos $\mathbf{L}(\Pi)$ (donde $S = \{\phi_i\}_i$ tanto acá como en la definición de arriba).

Observación 6.3.2. *Notemos que $\mathbf{L}$ vale siempre finito ya que $\mathbf{M}(\phi_i(x))$ tiene supremo finito por definición.*

Consideremos el mapa $\mathbf{K} : \Pi \to \{K : K \subset \mathcal{V}_2(M) \text{ compacto}\}$ dado por

$$\mathbf{K}(S) = \{V \in \mathcal{V}_2(M) : V = \lim_{j \to \infty} |\phi_{i_j}(x_j)|\}$$

donde el límite es en el sentido de convergencia de Varifolds, donde i_j es una sucesión creciente, y donde $x_j \in \mathrm{Dom}(\phi_{i_j})$. Algo importante y no trivial es lo siguiente:

Lema 6.3.3. *El mapa $\mathbf{K}$ está bien definido.*

Demostración:
Basta ver que $\mathbf{K}(S)$ es en efecto un compacto de $\mathcal{V}_2(M)$. Para ello, veamos que $\mathbf{K}(S)$ es un cerrado de $\mathcal{V}_2(M)$ dentro de un compacto de $\mathcal{V}_2(M)$.

Considero $F = \{|\phi_{i_j}(x_j)| : i \in \mathbb{N}, x_j \in \mathrm{Dom}(\phi_i)\}$. Tenemos que $\mathcal{A}(V)$ está uniformemente acotada para V en F, y como el área es continua en $\mathcal{V}_2(M)$, lo está también en $\overline{F}$. Luego, por el teorema de compacidad de medidas de Radón 3.1.2, $\overline{F}$ resulta un compacto de $\mathcal{V}_2(M)$. Como $\mathbf{K}(S) \subset \overline{F}$, nos basta con probar que $\mathbf{K}(S)$ es un cerrado:

Para verlo, tomo $\{V^n\}_n$ sucesión en $\mathbf{K}(S)$ tal que $V^n \to V \in \mathcal{V}_2(M)$, y tomo los $|\phi_{i_j^n}(x_j^n)|$ tales que $\lim_{j\to\infty} |\phi_{i_j^n}(x_j^n)| = V^n$ para todo n (acá, n se usa solo como superíndice). Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer sin perder generalidad que $\mathbf{F}(|\phi_{i_j^n}(x_j^n)|, V^n) < \frac{1}{j}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que i_n^n es creciente. De esto, tomando $|\phi_{i_n^n}(x_n^n)|$ tenemos que

$$\mathbf{F}(|\phi_{i_n^n}(x_n^n)|, V) \leq \mathbf{F}(|\phi_{i_n^n}(x_n^n)|, V^n) + \mathbf{F}(V^n, V) \leq \frac{1}{n} + \mathbf{F}(V^n, V) \to 0,$$

y como i_n^n es creciente, concluimos que $V \in \mathbf{K}(S)$. □

Definición 6.3.4 (Sucesión crítica / Conjunto crítico). Diremos que $S \in \Pi$ es una *sucesión crítica* de Π si $\mathbf{L}(\Pi) = \mathbf{L}(S)$. Dada una sucesión crítica S, a $\mathbf{C}(S) = \mathbf{K}(S) \cap \{V : \mathcal{A}(V) = \mathbf{L}(S)\}$ le llamo *conjunto crítico* de S.

Lema 6.3.5. $\mathbf{C}(S) \subset \mathcal{V}_2(M)$ *es un compacto no vacío.*

Demostración:
Veamos primero que $\mathbf{C}(S)$ no es vacío. Definamos para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathrm{Dom}(\phi_i)$ que maximiza $\mathbf{M}(\phi_i(x_i))$. Podemos entonces quedarnos con una sucesión i_j tal que $\mathbf{M}(\phi_{i_j}(x_{i_j})) = \mathcal{A}(|\phi_{i_j}(x_{i_j})|) \to \mathbf{L}(S)$. Como puedo acotar superiormente de manera uniforme a las áreas de la sucesión, usando acá también 3.1.2 tenemos que existe una sub-subsucesión $|\phi_{i_{j_k}}(x_{i_{j_k}})|$ que converge a un $V \in \mathcal{V}_2(M)$.

Tenemos que como el área es continua en la convergencia débil de medidas de Radón, vale que $\mathcal{A}|\phi_{i_{j_k}}(x_{i_{j_k}})| \to \mathcal{A}(V)$ y luego $\mathcal{A}(V) = \mathbf{L}(S)$, pero además vale que i_{j_k} es una sucesión creciente, por lo que $V \in \mathbf{K}(S)$ y estamos.

Nos falta ver que $\mathbf{C}(S)$ es compacto, pero como $\mathbf{K}(S)$ es compacto, basta ver que $\{V : \mathcal{A}(V) = \mathbf{L}(S)\}$ es cerrado. Para ver esto, alcanza con notar que $\mathcal{A} : \mathcal{V}_2(M) \to \mathbb{R}$ es continua con la métrica estandar de ambos espacios, y que $\{V : \mathcal{A}(V) = \mathbf{L}(S)\}$ es la preimagen de un cerrado en $\mathbb{R}$. □

6.4. Construcción de sucesión de mapas

Como la teoría Min-Max se aplica a elementos de $\pi_n^\#(\mathcal{Z}_2(M;\mathbf{M}),\Phi_0)$, queremos saber generar una sucesión de mapas $(n,\mathbf{M})$-homotópica a $(\mathcal{Z}_2(M;\mathbf{M}),\Phi_0)$ a partir de un mapa suficientemente bueno $\Phi : I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$.

Sea $c = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{3},0) \in I^{n-1}\times\{0\}$. Considero las siguientes hipótesis que un mapa $\Phi : I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$ continuo en la topología bemol puede o no cumplir:

(H_1) $\Phi|_{I_0^n}$ es continuo en la métrica $\mathbf{F}$.

(H_2) $\Phi(I^{n-1}\times\{0\}) = \Phi(I^{n-1}\times\{1\}) = 0$

(H_3) $\mathbf{L}(\Phi) = \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^n\}$ es finito.

(H_4) $\lim_{r\to 0}\mathbf{m}(\Phi,r) = 0$ (recordar esta definición de 3.2).

(H_5) El mapa $\gamma : I \to \mathcal{Z}_2(M)$ dado por $\gamma(t) = \Phi(c+te_n)$ define una clase no trivial en el grupo de homotopía $\pi_1(\mathcal{Z}_2(M;\mathcal{F}),\{0\})$.

Veamos primero entonces que el mapa que construimos hace dos secciones cumple estas hipótesis:

Lema 6.4.1. *Sea Φ la familia Min-Max definida en (5.4.1), entonces Φ satisface las hipótesis de H_1 a H_5.*

Demostración:
Debido al Teorema 5.4.2, es inmediato que valen las primeras 4 hipótesis. Probemos entonces que vale 5.

Primero, como Φ es continuo en $\mathbf{F}$, lo es en $\mathcal{F}$ por definición. Como además $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$, γ es un ciclo continuo en $\mathcal{Z}_2(M;\mathcal{F})$. Llamemos ahora α a un ciclo continuo arbitrario en $\mathcal{Z}_2(M;\mathcal{F})$ y mas adelante veremos cosas en el caso particular $\alpha = \gamma$. De ahora en más $[\alpha]$ a la clase que α genera en el π_1.

Al ser $\alpha : I \to \mathcal{Z}_2(M;\mathcal{F})$ es continua saliendo de un compacto, es uniformemente continua y luego para cada $\delta > 0$, si i es suficientemente grande tenemos que para todo $x \in I(1,i)_0 \setminus \{1\}$ vale que $\mathcal{F}(\gamma(x+3^{-i}),\gamma(x)) < \delta$. Notar que este i depende de α.

En [1, Corolario 1.14], se obtiene en el corolario que si M es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $T \in \mathbf{I}_k(M)$ con $\mathcal{F}(T) < \delta$ existe un $Q \in \mathbf{I}_{k+1}(M)$ tal que $\partial Q = T$ y tal que $\mathcal{F}(T) = \mathbf{M}(Q)$. Esto implica que si i es suficientemente grande, entonces $\forall x \in I(1,i)_0 \setminus \{1\}$ existen $A_i^\alpha(x) \in \mathbf{I}_3(S^3)$ tales que

$$\partial A_i^\alpha(x) = \alpha(x+3^{-i}) - \alpha(x) \quad \text{y} \quad \mathbf{M}(A_i^\alpha(x)) = \mathcal{F}(\partial A_i^\alpha(x)).$$

Ahora, por lo dicho en 3.8, podemos pensar a las 3-currents con soporte en S^3 como los elementos del grupo de homología $H_3(S^3)$ que inducen mediante el isomorfismo descrito al final de la sección. Esto es lo que haremos de ahora en adelante.

Usando esta correspondencia, la construcción general de Almgren en [1, Sección 3.2] prueba en el caso particular de $m = 1$, $k = 2$, $A = S^3$ que el mapa $F : \pi_1(\mathcal{Z}_2(S^3; \mathcal{F})) \to H_3(S^3; \mathbb{Z})$ dado por

$$F[\alpha] = [\Sigma_{j=0}^{3^i-1} A_i^\alpha(j3^{-i})] \in H_3(S^3; \mathbb{Z})$$

donde i es suficientemente grande, está bien definido (es decir, no depende de i y manda ciclos homotópicos a cadenas que difieren en un 3-ciclo) y además es un isomorfismo de grupos. De esto, lo que queremos se reduce a probar que $F[\gamma] \neq 0$ en $H_3(S^3; \mathbb{Z})$.

Tenemos $F[\gamma] = [\Sigma_{j=0}^{3^i-1} A_i(j3^{-i})]$ para i suficientemente grande (notamos $A_i^\gamma = A_i$). Por el punto 5 del Teorema 5.4.2, sabemos además que $\gamma(x + 3^{-i}) - \gamma(x) = \partial([|U(x + 3^{-i})|] - [|U(x)|])$. Con esto, si definimos

$$B(x) = [|U(x + 3^{-i})|] - [|U(x)|] - A_i(x) \in \mathbf{I}(S^3)$$

tenemos que $\partial B(x) = 0$.

Ahora, podemos usar el Teorema de constancia, que aparece en [15, Teorema 2.34] y nos dice que si U es un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y T es una n-current sin borde en U entonces $T = c[|U|]$ para alguna constante c. Para usarlo con $U = S^3$, cubrimos a S^3 usando dos cartas difeomorfas a $\mathbb{R}^3$ y consideramos el pushforward de T a estas cartas, para luego aplicar el lema en $\mathbb{R}^3$ dos veces.

Debido a esto, como $B(x) \in \mathbf{I}_3(S^3)$ $B(x) = k[|S^3|]$ para algún $k = k(x) \in \mathbb{Z}$. De esto, como $t \to [|U(t)|]$ es continua en $\mathbf{M}$ (y luego uniformemente continua), como γ es uniformemente continua en $\mathcal{F}$ y como $\mathbf{M}(A_i(x)) = \mathcal{F}(\partial A_i(x))$, tenemos que $\mathbf{M}(B(x)) \to 0$ cuando i tiende a infinito, y luego $k(x) = 0$ y $B(x) = 0$ para todo x si i es suficientemente grande.

Para terminar, notemos que esto implica que si i es suficientemente grande, $A_i(x) = [|U(x + 3^{-i})|] - [|U(x)|]$ para todo x, de donde

$$F[\gamma] = [\Sigma_{j=0}^{3^i-1} \ [|U(x + 3^{-i})|] - [|U(x)|] \ ],$$

que por suma telescópica es $[\ [|U(1)|] - [||U(0)|]\ ] = [S^3]$, pero si $[S^3]$ fuera $[0]$ en $H_3(S^3, \mathbb{Z})$, tendríamos que la current $[S^3] = [0]$ en homología de currents, pero luego S^3 sería el borde de una 4-current con soporte en S^3 y la única 4-current con soporte allí es la nula, que tiene borde nulo. Absurdo. $\square$

Con esto probado, invocamos el siguiente Teorema, que nos permitirá construir las sucesiones de mapas que estudiamos en la sección anterior.

Teorema 6.4.2. *Sea Φ un mapa que cumple las 5 hipótesis anteriormente nombradas, entonces existe una sucesión de mapas $(n, \mathbf{M})$-homotópica hacia $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi|_{I_0^n})$ $\tilde{\phi}_i : I(n, k_i)_0 \to \mathcal{Z}_2(M)$ que cumple las siguientes propiedades:*

(1) Existe una sucesión de enteros positivos que tiende a infinito $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para cualquier sucesión $x_i \in I(n, k_i)_0$ vale que

$$\limsup_{i\to+\infty} \mathbf{M}(\tilde{\Phi}_i(x_i)) \leq \limsup_{i\to+\infty}\{\mathbf{M}(\phi(x)) : x, x_i \in \alpha,\ \alpha \in I(n, l_i)_n\}$$

y como consecuencia $\mathbf{L}(\{\tilde{\phi}_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^n\}$.

(2) $\lim_{i\to+\infty} \sup\{\mathcal{F}(\tilde{\phi}_i(x) - \Phi(x)) : x \in I(n, k_i)_0\} = 0$.

(3) La sucesión de mapas $v_i : I(1, k_i)_0 \to \mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M})$ definidos por

$$v_i(x) = \tilde{\phi}_i(c + xe_n)$$

es una sucesión de mapas $(1, \mathbf{M})$-homotópica hacia $(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \{0\})$ que pertenece a un elemento no trivial de $\pi_1^\#(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \{0\})$.

Esta demostración excede los límites de esta Tesis.

Definición 6.4.3 (Clase de homotopía asociada). Sea Σ una superficie cerrada embebida en S^3 y sea Φ su familia Min-Max asociada, entonces defino la *clase de homotopía asociada a* Σ como la clase de homotopía de $S = \{\tilde{\phi}_i\}$ dada por el Teorema recién probado.

6.5. El Teorema Min-Max

Nuestro objetivo será adaptar el Teorema Min-Max de Pitts al contexto de lo que tenemos. Supongamos que tenemos $\Phi : I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$ continuo en la topología bemol que cumple las hipótesis (H_1) y (H_2). Llamamos $|\Phi| : I^n \to \mathcal{V}_2(M)$ al mapa dado por $|\Phi|(x) = |\Phi(x)|$ para cada $x \in I^n$, y tomemos $\Pi \in \pi_n^\#(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi_0)$.

Tenemos entonces los siguientes dos Teoremas, cuyas pruebas exceden esta Tesis.

Teorema 6.5.1 (Existencia de sucesiones críticas)**.** *Existe al menos una sucesión crítica $S^* \in \Pi$, y para cada sucesión crítica $S^* \in \Pi$ existe $S \in \Pi$ tal que $\mathbf{C}(S) \subset \mathbf{C}(S^*)$ y todo elemento de $\mathbf{C}(S)$ es un Varifold estacionario o un elemento de $|\Phi|(I_0^n)$.*

Teorema 6.5.2 (Teorema Min-Max)**.** *Sea* $\Phi : I^n \to \mathcal{Z}_2(M)$ *continuo en la topología bemol que cumple (*H_1*) y (*H_2*) Sea* $\Pi \in \pi_n^{\#}(\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}), \Phi|_{I_0^n})$ *tal que*

$$\text{máx}\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I_0^n\} < \mathbf{L}(\Pi) < +\infty,$$

entonces existe un Varifold estacionario íntegro Σ *cuyo soporte es una superficie minimal embebida tal que* $||\Sigma||(M) = \mathbf{L}(\Pi)$*, y si* $S^* \in \Pi$ *es una sucesión crítica, podemos tomar* $\Sigma \in \mathbf{C}(S^*)$*.*

Capítulo 7

Cota inferior de anchura

7.1. Introducción de la cota

Llamemos $\mathcal{T} \subset \mathcal{V}_2(S^3)$ al subconjunto de los Varifolds que son inducidos por grandes esferas de S^3 (no orientadas) con multiplicidad 1. Como habíamos dicho antes, $\mathcal{T}$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

Sea $\Phi : I^5 \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ continuo en la topología bemol cumpliendo las 5 hipótesis nombradas en 6.4. De esta manera, se puede aplicar el Teorema 6.4.2. Consideremos además las siguientes hipótesis:

(H_6) $\max\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I_0^5\} = 4\pi$ y para todo x que realice este máximo, $\Phi(x) \in \mathcal{T}$.

(H_7) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I_0^5$ que cumpla $\mathcal{F}(|\Phi(x)|, \mathcal{T}) \leq \varepsilon$, vale que $x \in J_\delta = \partial I^4 \times [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta]$.

(H_8) $|\Phi|(\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}) \subset \mathcal{T}$ y $|\Phi|_*([\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}]) \neq 0 \in H_3(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z})$.

Observación 7.1.1. *Notar que por 5.4.2, la familia Min-Max cumple* (H_6), (H_7) *y* (H_8).

Definamos $\hat{\Phi} : \partial I^4 \times I \to \mathcal{T}$ como $\hat{\Phi}(z, t) = |\Phi(z, \frac{1}{2})|$. Notemos además que aplicando el Teorema 6.4.2 a Φ, tendremos una sucesión de mapas $(5, \mathbf{M})$-homotópica hacia $(\mathcal{Z}_2(S^3; \mathbf{M}), \Phi_{|I_0^5})$

$$C = \{\tilde{\phi}_i\} \text{ tal que } \mathbf{L}(C) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^5\}.$$

Le llamaremos Π a la clase $(5, \mathbf{M})$-homotópica correspondiente a esta sucesión.

Estamos entonces en condiciones de enunciar el Teorema principal de este capítulo:

Teorema 7.1.2. *Si Φ cumple $(H_1) - (H_8)$, entonces $\mathbf{L}(\Pi) > 4\pi$.*

Antes de comenzar la demostración de este Teorema (que nos llevará el resto del Capítulo), enunciaremos y probaremos el siguiente Corolario, que es la razón por la que probamos 7.1.2.

Corolario 7.1.3. *Si Φ cumple las hipótesis $(H_1) - (H_8)$ y*

$$\sup\{\mathbf{M}(\phi(x)) : x \in I^5\} < 8\pi$$

entonces existe una superficie suave embebida minimal $\Sigma \subset S^3$ con género $g \geq 1$ tal que

$$\acute{A}rea(\Sigma) = \mathbf{L}(\Pi) > 4\pi.$$

Demostración:
Por 7.1.2 y por (H_6), tenemos que $4\pi = \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I_0^5\} < \mathbf{L}(\Pi)$. Como valen (H_1) y (H_2), podemos usar el Teorema 6.5.2, que nos dice que existe un Varifold estacionario íntegro Σ cuyo soporte es una superficie suave embebida minimal Σ que satisface $||\Sigma||(M) = \mathbf{L}(\Pi)$. Probemos que la multiplicidad de este Varifold es 1:

Notemos entonces que por definición $\mathbf{L}(\Pi) \leq \mathbf{L}(C) \leq \sup\{\mathbf{M}(\phi(x)) : x \in I^5\} < 8\pi$. De esto, $||\Sigma||(M) < 8\pi$. Notemos entonces que como la energía de Willmore de cualquier superficie cerrada es al menos 4π, el área de cualquier superficie minimal cerrada en S^3 es al menos 4π, por lo que $||\Sigma||$ solo puede tener multiplicidad 1.

Además, en [2, Teorema 3.1] se prueba que las únicas superficies minimales de S^3 con género 0 son las grandes esferas, pero todas estas tienen área 4π. Luego, como $||\Sigma||(M) > 4\pi$, tenemos que Σ tiene género $g \geq 1$ y estamos. $\square$

Con este corolario probado, comencemos la demostración de 7.1.2.

7.2. Demostración de la cota - paso 0

Notemos que por 6.5.2, que podemos usar porque Φ cumple (H_1) y (H_2), tenemos que $\mathbf{L}(\Pi) \geq 4\pi$ ya que toda superficie minimal en S^3 tiene área mayor o igual a 4π por ser la energia de Willmore siempre al menos eso.

Luego, si suponemos que el Teorema no vale, tenemos que $\mathbf{L}(\Pi) = 4\pi$. Consideremos la sucesión crítica $S = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Pi$ dada por 6.5.1. Tomamos $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathrm{Dom}(\phi_i) = I(5, k_i)$ y notamos $\delta_i = \mathbf{b}(\phi_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Por el mismo Teorema, cada Varifold en $\mathbf{C}(S)$ es estacionario, ya que los Varifolds en $|\Phi|(I_0^5)$ que pertenecen a $\mathbf{C}(S)$ tienen área 4π. Luego, por (H_6) estos Varifolds son grandes esferas, que al ser inducidos por superficies minimales, son estacionarios (3.6.6).

Para lo que sigue, vamos a usar grupos de homología cúbica singular con coeficientes enteros (3.8.8). Si X es un espacio topológico, llamo $C_n(X)$ al grupo de n-cadenas singulares cúbicas con coeficientes enteros. Si $f : X \to Y$ es un mapa continuo entre espacios topológicos, noto $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ y $f_* : H_n(X,\mathbb{Z}) \to H_n(Y,\mathbb{Z})$ a los morfismos inducidos por f en los grupos de cadenas y de homología respectivamente.

Algo que nos será de utilidad es que podremos identificar cualquier $\alpha \in I(5,k_i)_p$ con un p-cubo singular $\alpha : I^p \to I^5$ en I^5 mediante el mapa afín inclusión. Sea R la p-cadena dada por $R = \sum_{\alpha \in I(5,k_i)} n_\alpha \alpha \in C_p(I^5)$, donde $n_\alpha \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha$, llamaremos R_q al conjunto de las q-celdas de $I(5,k_i)$ que son caras de algún α con $n_\alpha \neq 0$. Para cualquier R que se pueda escribir de esta forma, diremos que R está *subordinado a* $I(5,k_i)$, y llamaremos soporte de R a la unión de los soportes de los α con $n_\alpha \neq 0$.

7.3. Demostración de la cota - paso 1

Nuestro objetivo en este paso será construir una 4-cadena $R(i) \in C_4(I^5)$ subordinada a $I(5,k_i)$ tal que el soporte de su frontera caiga en ∂I^5 y tal que $|\phi_i(x)|$ esté cerca de $\mathcal{T}$ para todo $x \in R(i)_0$.

Sea $\varepsilon_0 > 0$ chico a determinar más adelante, tomamos δ tal que $\mathbf{F}(|\Phi(x)|, \hat{\Phi}(x)) \leq \varepsilon_0$ para todo $x \in J_\delta = \partial I^4 \times [1/2-\delta, 1/2+\delta]$. Notar que dicho $\delta > 0$ existe ya que Φ en ∂I^5 es continuo en la métrica $\mathbf{F}$. Ahora, por (H_7), existe un $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (lo ultimo nos será útil mas adelante) tal que si $x \in \partial I^5$ cumple $\mathbf{F}(|\Phi(x)|, \mathcal{T}) < 2\varepsilon$ entonces $x \in J_\delta$.

Llamemos
$$\overline{a}(i) = \{\alpha \in I(5,k_i)_5 : \mathbf{F}(|\phi_i(x)|, \mathcal{T}) \geq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in \alpha_0\}$$
al conjunto de las 5-celdas que no tienen ningún vértice que $|\phi_i|$ mande a algo cercano a $\mathcal{T}$. Defino $a(i)$ como el conjunto de las 5-celdas $\alpha \in \overline{a}(i)$ que cumplen lo siguiente: existe una sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{l} \subset \overline{a}(i)$ tal que $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_l = \beta \otimes [0, 3^{-k_i}]$ para algun $\beta \in I(4,k_i)_4$ y tales que α_i y α_{i+1} comparten una 4-cara para todo $1 \leq i < l$.

Como ϕ_i se anula en $(I(4,k_i) \otimes \langle[0]\rangle)_0 = B(5,k_i)_0$, si ε_0 es suficientemente pequeño como $\mathbf{b}(\phi_i) \to 0$ tendremos que $\beta \otimes [0, 3^{-k_i}] \in a(i)$ para todo $\beta \in I(4,k_i)_4$. De esto, podemos pensar la unión de los $\alpha \in a(i)$ como la componente conexa de la unión de los $\alpha \in a(i)$ que contiene a $I^4 \times \{0\}$.

Sea $b(i)$ el conjunto de 4-celdas en $I(5,k_i)$ que son celdas de exactamente una 5-celda en $a(i)$. Consideremos la 5-cadena
$$A(i) = \sum_{\alpha \in a(i)} \alpha \in C_5(I^5).$$
Definiendo entonces apropiadamente una función signo $sgn : b(i) \to \{-1,1\}$, tenemos
$$\partial A(i) = \sum_{\alpha \in b(i)} sgn(\alpha)\alpha.$$

Notemos ahora que $\beta \otimes [0] \in b(i)$ para todo $\beta \in I(4,k_i)_4$. Por la definición del morfismo frontera ∂, tenemos además que $sgn(\beta \otimes [0]) = -1$ para todo $\beta \in I(4,k_i)_4$.

Llamo ahora $c(i)$ al conjunto de 4-celdas de $b(i)$ que pertenecen al subcomplejo $T(5,k_i) \cup S(5,k_i)$. Tenemos entonces que

$$b(i) \cap I_0(5,k_i)_4 = c(i) \cup \{\alpha = \beta \otimes [0] : \beta \in I(4,k_i)_4\}$$

donde la unión es disjunta. Con esto, estamos en condiciones de definir el $R(i)$ que buscamos. Definimos la 4-cadena

$$R(i) = \partial A(i) - \sum_{\alpha \in b(i) \cap I_0(5,k_i)_4} sgn(\alpha)\alpha$$

que por las dos observaciones anteriores resulta igual a

$$\partial A(i) + \sum_{\beta \in I(4,k_i)_4} \beta \otimes [0] - \sum_{\alpha \in c(i)} sgn(\alpha)\alpha.$$

Escrito de esta manera, como $\partial^2 = 0$ queda claro que el soporte de $\partial R(i)$ cae en ∂I^5. Probemos entonces el siguiente Lema:

Lema 7.3.1. *Si i es suficientemente grande y $R(i) \neq 0$, vale que*

$$\sup\{\mathbf{F}(|\phi_i(x)|, \mathcal{T}) : x \in R(i)_0\} \leq \varepsilon$$

Demostración:

Tomemos i suficientemente grande de modo que valga $5\delta_i \leq \varepsilon/2$ y fijemos $x \in R(i)_0$. Por la definición de $R(i)$, podemos encontrar una 4-celda $\alpha \in b(i) \cap (I(5,k_i)_4 \setminus I_0(5,k_i)_4)$ con $x \in \alpha_0$. Notemos que como α no cae en $I_0(5,k_i)_5$, es una cara en común de dos 5-celdas $\beta, \gamma \in I(5,k_i)_5$. Como $\alpha \in b(i)$, sin perder generalidad podemos asumir $\beta \in a(i)$ y $\gamma \notin a(i)$.

Luego, por la definición de $a(i)$, tenemos que $\gamma \notin \overline{a}(i)$, lo que quiere decir que existe $y \in \gamma_0$ tal que $\mathbf{F}(|\phi_i(x)|, \mathcal{T}) < \varepsilon/2$. Luego, como x e y pertenecen a la misma 5-celda de $I(5,k_i)$, tenemos que $d(x,y) \leq 5$ y vale que

$$\mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T}) \leq \mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T}) + \mathbf{F}(|\phi_i(y)|, |\phi_i(x)|) < \frac{\varepsilon}{2} + \mathbf{M}(\phi_i(x), \phi_i(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 5\delta_i < \varepsilon,$$

lo que prueba lo deseado. $\square$

7.4. Demostración de la cota - paso 2

Nuestros próximos objetivos son probar que el soporte de $R(i)$ separa $I^4 \times \{0\}$ de $I^4 \times \{1\}$ y probar que $\partial R(i)$ y $\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}$ inducen el mismo elemento en $H_3(\partial I^4 \times I, \mathbb{Z})$. Esto lo haremos por medio de dos Lemas.

Lema 7.4.1. *Si i es suficientemente grande, ninguna celda de $a(i)$ es de la forma $\beta \otimes [1-3^{-k_i}, 1]$, con $\beta \in I(4,k_i)_4$.*

Demostración:
Supondremos que existen $\beta \in I(4,k_i)_4$ y $\alpha = \beta \otimes [1-3^{-k_i}, 1]$ en $a(i)$ y llegaremos a un absurdo. Notemos que si esto pasa, existe un camino discreto $\gamma_i : I(1,n_i)_0 \to I(5,k_i)_0$ donde $n_i \geq k_i$ y $d(\gamma_i(x), \gamma_i(y)) \leq 1$ siempre que $d(x,y) \leq 1$ que cumple que $\gamma_i([0]) \in (I(4,k_i) \otimes \langle [0] \rangle)_0$, $\gamma_i([1]) \in (I(4,k_i) \otimes \langle [1] \rangle)_0$ y tal que $\gamma_i(I(1,n_i))_0 \subset \bigcup_{\alpha \in a(i)} \alpha$ (es decir, tenemos un camino discreto contenido en el soporte de $a(i)$ que une las dos tapas opuestas de I^5). Si defino entonces $\sigma_i = \phi_i \circ \gamma_i$ tenemos que $\mathbf{F}(|\sigma_i(x)|, \mathcal{T}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in I(1,n_i)_0$.

Afirmamos ahora que γ_i es homotópico a un camino vertical, es decir, existe un mapa $\psi_i : I(1,s_i)_0 \times I(1,s_i)_0 \to I(5,k_i)_0$ que cumpla las siguientes condiciones.

1. $\psi_i([0],(y)) = \gamma_i(\mathbf{n}(s_i,n_i)(y))$ y $\psi_i([1],(y)) = c + \mathbf{n}(s_i,n_i)(y)e_5$ para todo $y \in I(1,s_i)_0$, donde notamos $c = \frac{1}{3}(1,1,1,1,0)$ y $e_5 = (0,0,0,0,1)$.

2. $\psi_i(y,[0]) \in (I(4,k_i) \otimes \langle [0] \rangle)_0$ y $\psi_i(y,[1]) \in (I(4,k_i) \otimes \langle [1] \rangle)_0$ para todo $y \in I(1,s_i)_0$.

3. Si $x, y \in I(2,s_i)_0 = I(1,s_i)_0 \times I(1,s_i)_0$ cumplen que $d(x,y) \leq 1$, entonces vale que $d(\psi_i(x), \psi_i(y)) \leq 5$.

Para probar esto, a γ_i le asocio la curva lineal a 3^{n_i} trozos $\overline{\gamma}_i : I \to I^5$ que cumple $\overline{\gamma_i}(t) = \gamma_i([t])$ para todo $[t] \in I(1,n_i)_0$.

Sea $\psi : I^2 \to I^5$ el mapa continuo definido como $\psi(a,b) = (1-a)\overline{\gamma}_i(b) + a(c + be_5)$, notemos que $\psi(0,b) = \overline{\gamma}_i(b)$ y $\psi(1,b) = c + be_5$ para todo $b \in I$. Además, vale que $\psi(I \times \{0\}) \subset I^4 \times \{0\}$ y $\psi(I \times \{1\}) \subset I^4 \times \{1\}$, y si $s_i \geq n_i$ es suficientemente grande, podemos lograr por la continuidad uniforme de ψ que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq 3^{-(k_i+2)}$ para todos $x, y \in I(2,s_i)_0$ tales que $d(x,y) \leq 1$.

Luego, para todo $x \in I(2,s_i)_0$, elegimos $\psi_i(x) \in I(5,k_i)_0$ que satisfaga $d(\psi_i(x), \psi(x)) = d(\psi(x), I(5,k_i)_0)$ (teniendo en cuenta que la elección puede no ser única). Probemos que con este s_i y esta definición, se cumplen las 3 hipótesis:

Para la primera condición, como $\psi(0,b) = \overline{\gamma}_i(b)$ y $\psi(1,b) = c + be_5$, tenemos que $\psi_i([0],(b)) = \gamma_i(b)$ y $\psi_i([1],(b)) = c + (b)e_5$ para todos los $b \in I(1,k_i)_0$. Para extenderlo a lo que queremos sobre $b \in I(1,s_i)_0$ basta recordar que $\overline{\gamma}_i(b)$ es lineal a trozos y $b \to c + be_5$ es lineal. Para la segunda condición, solamente hace falta notar que $\psi(x) \in I^4 \times \{j\}$ implica $\psi_i(x) \in (I(4,k_i) \otimes \langle [j] \rangle)_0$ para $j = 0, 1$.

Para la tercera, sabemos que si $x, y \in I(2,s_i)_0$ cumplen $d(x,y) \leq 1$ entonces $|\psi(x) - \psi(y)| \leq 3^{-(k_i+2)}$. De esto, tenemos que si pensamos $\psi_i(x)$ y $\psi_i(y)$ en I^5, en cada una de las 5 coordenadas vale que ambos puntos coinciden o difieren en 3^{-k_i}, ya que si llegaran a diferir en 2×3^{-k_i} o más, tendríamos en particular que en esa coordenada $\psi(x)$ y $\psi(y)$ diferían en al menos 3^{-k_i}, que es absurdo.

Con la homotopía probada, tomamos la sucesión $D = \{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $\sigma_i = \phi_i \circ \gamma_i$, y consideremos $v_i : I(1, k_i)_0 \to \mathcal{Z}_2(S^3)$, $v_i(x) = \phi_i(c + xe_5)$. Notemos que como ϕ_i es homotópico a ϕ_{i+1} con bondad δ_i, restringiendo las homotopías resulta claro que v_i es homotópico a v_{i+1} con la misma bondad. Como además es claro que $\mathbf{M}(v_i(x))$ esta uniformemente acotado, por estarlo $\mathbf{M}(\phi_i(x))$, tenemos que $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de mapas $(1, \mathbf{M})$-homotópica hacia $(\mathcal{Z}_2(S^3, \mathbf{M}), \{0\})$ (recordar que en dimensión 1 el subcomplejo Side $S(1, k_i)$ es vacío, por lo que siempre el mapa se toma como $\{0\}$).

Como γ_i es homotópico al camino vertical con el que definimos v_i tenemos que γ_i es homotópico a v_i en $(\mathcal{Z}_2(S^3; \mathbf{M}), \{0\})$ con bondad $5\delta_i$ tomando la homotopía $\phi_i\circ\psi_i$, ya que $d(x, y) = 1 \Rightarrow d(\psi_i(x), \psi_i(y)) \leq 5$, y si x, y distan en 5, $\mathbf{M}(\phi_i(x), \phi_i(y)) \leq 5\mathbf{b}(\phi_i) \leq 5\delta_i$. Como $5\delta_i \to 0$, tenemos entonces pegando homotopías que D es una sucesión de mapas $(1, \mathbf{M})$-homotópica hacia $(\mathcal{Z}_2(S^3, \mathbf{M}), \{0\})$, y que pertenece al mismo elemento Ω de $\pi_1^{\#}(\mathcal{Z}_2(S^3, \mathbf{M}), \{0\})$ que $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Ahora, volviendo a las definiciones iniciales, como $S = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $C = \{\tilde{\phi}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ pertenecen a Π, son homotópicas, y restringiendo la homotopía tenemos que la sucesión de mapas $x \to \tilde{\phi}_i(c + xe_5)$ pertenece a Ω. Sin embargo, por 6.4.2, esta sucesión pertenece a una clase no trivial, y luego Ω es un elemento non trivial de $\pi_1^{\#}(\mathcal{Z}_2(S^3, \mathbf{M}), \{0\})$.

De esto, por (bibliografía pendiente) tenemos que $\mathbf{L}(\Omega) > 0$. Aplicando ahora 6.5.2 a $\Omega \in \pi_1^{\#}(\mathcal{Z}_2(S^3, \mathbf{M}), \{0\})$, tenemos que existe un Varifold integral estacionario Σ cuyo soporte es una superficie minimal embebida en S^3 tal que $||\Sigma||(S^3) = \mathbf{L}(\Omega)$. Sin embargo, por un lado tenemos que $4\pi \leq ||\Sigma||(S^3)$, ya que toda superficie minimal en S^3 tiene al menos ese área, y por el otro tenemos que $\mathbf{L}(\Omega) \leq \mathbf{L}(D)$ por definición de ancho de Ω.

Además, vale que $\mathbf{L}(D) \leq \mathbf{L}(S)$: por un lado, $\mathbf{K}(D) \subset \mathbf{K}(S)$ por la contención de las imágenes de los mapas, y de esto, como $\mathbf{C}(D)$ es no vacío, existen elementos de $\mathbf{K}(D)$ (y luego en $\mathbf{K}(S)$) con área $\mathbf{L}(D)$. Con estas ultima desigualdad, notando que $\mathbf{L}(S) = \mathbf{L}(\Pi) = 4\pi$ por hipótesis, tenemos que $||\Sigma||(S^3) = 4\pi$, y como Σ es minimal, es una gran esfera.

De la misma cadena de igualdades, tenemos que $\mathbf{L}(\Omega) = \mathbf{L}(D)$, por lo que D es sucesión critica en Ω. Además, $\mathbf{C}(D) \subset \mathbf{C}(S)$ por la igualdad de longitudes. De esto, todo elemento de $\mathbf{C}(D)$ es un Varifold estacionario (porque esto valía en $\mathbf{C}(S)$). De esto, por el comentario al final de 6.5.2, podemos tomar $\Sigma \in \mathbf{C}(D)$, por lo que $\mathbf{F}(\mathbf{C}(D), \mathcal{T}) = 0$. Como al principio de la demostración habíamos visto que $\mathbf{F}(|\sigma_i(x)|, \mathcal{T}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in I(1, n_i)_0$, esto es un absurdo. $\square$

Lema 7.4.2. *Para todo i suficientemente grande, el soporte de $\partial R(i)$ cae en J_δ y*

$$[\partial R(i)] = [\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}] \text{ en } H_3(J_\delta, \mathbb{Z}).$$

En particular, $R(i) \neq 0$.

Demostración:
Tomemos i tal que vale el Lema anterior. En este caso, ninguna 4-celda de $b(i)$ cae en $I(4, k_i) \otimes \langle[1]\rangle$. De esto, por definición tenemos $c(i) \subset S(5, k_i)_4$ y si definimos

$$C(i) = \sum_{\alpha \in c(i)} sgn(\alpha)\alpha,$$

tenemos que $C(i)$ es una 4-cadena en $\partial I^4 \times I$. Recordando que

$$R(i) = \partial A(i) + \sum_{\beta \in I(4,k_i)_4} \beta \otimes [0] - C(i)$$

del paso 1, tomando borde tenemos que $\partial R(i) = \partial \left(\sum_{\beta \in I(4,k_i)_4} \beta \otimes [0]\right) - \partial C(i)$. De esto, $\partial R(i)$ resulta un 3-ciclo en $\partial I^4 \times I$ y además $[\partial R(i)] = [\partial I^4 \times \{0\}] = [\partial I^4 \times \{\frac{1}{2}\}]$ en $H_3(\partial I^4 \times I, \mathbb{Z})$, ya que las 3-cadenas difieren en el borde de una 4-cadena. Nos falta entonces solamente pasar de $\partial I^4 \times I$ a J_δ en ambas afirmaciones.

Como ya vimos que el soporte de $\partial R(i)$ cae en $\partial I^4 \times I$, por 6.2.4 en particular sabemos que $\limsup_{i \to +\infty} \{\mathbf{F}(\phi_i(x), \Phi(x)) : x \in \partial R(i)_0\} = 0$. Sea entonces $x \in \partial R(i)_0$, combinando este resultado con 7.3.1 tenemos que $\mathbf{F}(|\Phi_i(x)|, \mathcal{T}) \leq 2\varepsilon$ si i es suficientemente grande. Por lo dicho al final del segundo párrafo del Paso 1, esto implica que $x \in J_\delta$, por lo que el soporte de $\partial R(i)$ cae en J_δ a partir de un i.

Para terminar, tomamos una función continua $r : \partial I^4 \times I \to J_\delta$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in J_\delta$ (es decir, una retracción) (por ejemplo, r puede mandar cada $x \notin J_\delta$ a su proyección ortogonal al borde mas cercano de J_δ). Como r induce un homomorfismo en los grupos de homología $H_3(\partial I^4 \times I, \mathbb{Z})$ y $H_3(J_\delta, \mathbb{Z})$, tenemos lo deseado. □

7.5. Demostración de la cota - paso 3

Para terminar la demostración y la sección vamos a construir una función continua $f_i : \text{sop}(R(i)) \to \mathcal{T}$ que extienda a la restricción de $\hat{\Phi}$ a $\partial R(i)$ (recordemos $\hat{\Phi} : \partial I^4 \times I \to \mathcal{T}$ se definía como $\hat{\Phi}(z, t) = |\Phi(\frac{1}{2}, t)|$), de donde llegaremos a un absurdo por cuestiones de homología.

Lema 7.5.1. *Si i es suficientemente grande, existe $f_i : sop(R(i)) \to \mathcal{T}$ continua tal que f_i y $\hat{\Phi}$ coinciden sobre el soporte de $\partial R(i)$.*

Demostración:

Definición 7.5.2 (Métrica estándar en $\mathbb{RP}^3$). Pensando a $\mathbb{RP}^3$ como $S^3/\mathbb{Z}_2$, defino la *métrica estándar* en este espacio como $\operatorname{dist}([x],[y]) = \text{mín}\,\{d(x,y), d(x,-y)\}$ donde x, y son puntos representantes de $[x]$ e $[y]$ en S^3 y d es la métrica geodésica de S^3.

Notar que esta métrica coincide con el ángulo plano no obtuso en radianes formado por la recta que pasa por x y 0 y la recta que pasa por y y 0. Llamamos $B_r(p)$ a la bola de centro p y radio r en $\mathbb{RP}^3$ con la métrica estándar. Toda propiedad geométrica en esta demostración sera pensado con esta métrica a menos que se aclare lo contrario. Con esta métrica, $\mathbb{RP}^3$ es un espacio homogéneo debido a la acción del grupo ortogonal $O(4)$.

Invocamos ahora dos resultados clasicos que nos seran utiles para lo que sigue:

Por un lado, por [5, Capítulo 3, Proposición 4.2] sabemos que para todo x en una variedad Riemanniana existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x)$ es geodésicamente convexo (es decir, toda geodésica que empieza y termina en $B_\delta(x)$ está totalmente contenida allí).

Por otro lado, por (bibliografía pendiente) sabemos que para todo x existe un $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(x)$ es un entorno normal de p (es decir, la exponencial de T_pM a M es localmente un difeomorfismo).

Juntando ambas propiedades con la homogeneidad de $\mathbb{RP}^3$, existe $\eta > 0$ tal que toda bola de radio 11η en $\mathbb{RP}^3$ es a la vez geodésicamente convexa y un entorno normal de su centro.

Otra propiedad útil para esta sección es que la topología inducida por la $\mathbf{F}$-métrica de Varifolds en $\mathcal{T} = \mathbb{RP}^3$ coincide con la topología inducida por la distancia geodésica en el espacio proyectivo: para ver esto, queremos probar que si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y p son puntos en $\mathbb{RP}^3$ que inducen grandes esferas $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y S respectivamente,

$$\operatorname{dist}(p_n, p) \to 0 \Leftrightarrow \int_{S_n} k(x, Tan(M,x))d\mathcal{H}^2 \to \int_S k(x, Tan(M,x))d\mathcal{H}^2$$

para toda $k \in C_c(G_2(\mathbb{R}^4))$. Esto se puede ver fácilmente usando la continuidad uniforme de k, acotando por arriba la mayor distancia de un punto de S_n a S, y acotando la distancia entre los planos tangentes.

Por esta segunda propiedad, la métrica estándar de $\mathbb{RP}^3$ es continua en $\mathcal{T}$ con la métrica $\mathbf{F}$. Como además $\mathcal{T}$ es compacto, existe $c_0 > 0$ tal que si $p, q \in \mathcal{T}$ satisfacen $\mathbf{F}(p,q) < \frac{\eta}{2c_0}$, entonces $\operatorname{dist}(p,q) < \frac{\eta}{2}$. Con esto, de ahora en adelante tomamos $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{20c_0}$.

Consideremos ahora i suficientemente grande tal que valen los tres Lemas de las partes 1 y 2, y tal que además vale lo siguiente:

(a) $\mathbf{b}(\phi_i) \leq \varepsilon_0$ (esto eventualmente pasa ya que $\mathbf{b}(\phi_i) \leq \delta_i \; \forall i \in \mathbb{N}$).

(b) Para todo $x \in S(5, k_i)_0$ vale que $\mathbf{F}(\phi_i(x), \Phi(x)) < \varepsilon_0$ (recordar 6.2.4).

(c) Para todo $\alpha \in I_0(5, k_i)_4$ vale que $\sup\{\mathbf{F}(\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)) : x, y \in \alpha \cap J_\delta\} < \varepsilon_0$ (esto sucede si k_i es suficientemente grande ya que en ese caso las proyecciones de x e y a $I^4 \times \{1/2\}$ están cerca y $|\Phi|$ es uniformemente continua).

Notar que si pasara (c), valdría $\sup\{\text{dist}(\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)) : x, y \in \alpha \cap J_\delta\} < \frac{\eta}{2}$ por lo dicho en el párrafo anterior.

Definamos ahora $f_i^0 : R(i)_0 \to \mathcal{T}$ como $f_i^0(x) = \hat{\Phi}(x)$ si $x \in \partial R(i)_0$, y en el caso contrario elegimos cualquier $f_i^0(x) \in \mathcal{T}$ que realice la distancia en $\mathbf{F}$ de $|\phi_i(x)|$ a $\mathcal{T}$ (existe ya que es cerrado en $\mathcal{V}_2(S^3)$).

Veamos ahora que $\text{diam}(f_i^0(\alpha_0)) < \frac{\eta}{2}$ para todo $\alpha \in R(i)_4$. Notar que basta con probar que $\mathbf{F}(f_i^0(x), f_i^0(y)) < \frac{\eta}{2c_0}$ para todo $\alpha \in R(i)_4$ y para todos $x, y \in \alpha_0$.

Fijemos entonces α, x, y con estas condiciones y notemos que $d(x, y) \leq 4$. Si tanto x como y pertenecen a $\partial R(i)_0$, entonces como el soporte de $\partial R(i)$ cae en J_δ para este i, tenemos lo deseado por la tercer condición que cumple i.

Si solo x cae en $\partial R(i)_0$ entonces por desigualdad triangular y usando la definición de f_i^0 tenemos:

$$\mathbf{F}(f_i^0(x), f_i^0(y)) \leq \mathbf{F}(\hat{\Phi}(x), |\Phi(x)|) + \mathbf{F}(|\Phi(x)|, |\phi_i(x)|) + \mathbf{F}(|\phi_i(x)|, |\phi_i(y)|) + \mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T})$$

y basta con acotar cada termino del lado derecho. Notemos entonces que por la definición de J_δ, tenemos que $\mathbf{F}(\hat{\Phi}(x), |\Phi(x)|) \leq \varepsilon_0$. Además, como $x \in S(5, k_i)_0$, por la segunda condición que cumple i tenemos que $\mathbf{F}(|\Phi(x)|, |\phi_i(x)|) \leq \varepsilon_0$. Como también sabemos que $\mathbf{b}(\phi_i) \leq \varepsilon_0$ tenemos $\mathbf{F}(|\phi_i(x)|, |\phi_i(y)|) \leq 4\varepsilon_0$, y por ultimo tenemos $\mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T}) \leq \varepsilon_0$ por 7.3.1. Sumando todo, tenemos $\mathbf{F}(f_i^0(x), f_i^0(y)) \leq 7\varepsilon_0 < \frac{\eta}{2c_0}$ y ganamos.

Supongamos ahora que $x, y \notin \partial R(i)_0$. Por desigualdad triangular y usando la definición de f_i^0 tenemos:

$$\mathbf{F}(f_i^0(x), f_i^0(y)) \leq \mathbf{F}(\mathcal{T}, |\phi_i(x)|) + \mathbf{F}(|\phi_i(x)|, |\phi_i(y)|) + \mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T}).$$

Al igual que recien, tenemos $\mathbf{F}(|\phi_i(x)|, |\phi_i(y)|) \leq 4\varepsilon_0$ y que $\mathbf{F}(|\phi_i(y)|, \mathcal{T})$ y $\mathbf{F}(\mathcal{T}, |\phi_i(x)|)$ son menores o iguales a ε_0, por lo que la suma es a lo sumo $6\varepsilon_0 < \frac{\eta}{2c_0}$. Esto termina de probar que $\text{diam}(f_i^0(\alpha_0)) < \frac{\eta}{2}$ para todo $\alpha \in R(i)_4$.

Con esto probado, vamos a dar ahora una construcción inductiva de f_i. Primero cubrimos $\mathbb{RP}^3$ con una unión finita de bolas $\{B_{\eta/2}(p_k)\}_{k=1}^N$ tal que $B_{11\eta}(p_k)$ es un entorno normal de p_k geodésicamente convexo para todo $1 \leq k \leq N$ (notar que este cubrimiento finito existe por la compacidad de $\mathbb{RP}^3$ con la métrica estándar). Notamos ademas $R(i)^{(j)}$ y $\partial R(i)^{(j)}$ a la unión de los soportes de las q-celdas de $R(i)$ y $\partial R(i)$ para todo $q \leq j$.

Decimos que el mapa $f_i^j : R(i)^{(j)} \to \mathcal{T}$ es una j-*extensión* de f_i^0 si:

1. $f_i^j = f_i^0$ en $R(i)_0$ y $f_i^j = \hat{\Phi}$ en $\partial R(i)^{(j)}$.
2. para todo $\alpha \in R(i)_j$ con $j \geq 1$ vale que $\operatorname{diam}(f_i^j(\alpha)) \leq (2^j - 2 + 2^{j-2})\eta$.

Notar que como la condición (2) no aplica y la función esta definida en un dominio discreto, f_i^0 es una 0-extensión continua de si misma. Supongamos entonces que para $j \leq 3$ existe una j-extensión de f_i^0 que llamaremos f_i^j y que resulta continua. Veamos entonces como construir una $(j+1)$-extensión f_i^{j+1} de f_i^0 que sea continua.

Sea $\alpha \in R(i)_{j+1}$. Si $\alpha \in \partial R(i)_{j+1}$ definimos $f_i^{j+1} = \hat{\Phi}$ en α. Notar que esto nos garantiza que se cumple (2) ya que α estaría contenido en una 4-celda de $\partial R(i)$, y por (c) de la pagina anterior tenemos que $\operatorname{diam}(f_i^j(\alpha)) \leq \eta/2 \leq (2^j - 2 + 2^{j-2})\eta$ (ya que $j \geq 1$). Como $f_i^j = \hat{\Phi}$ en el soporte de $\partial\alpha$ por definición, tenemos que $f_i^{j+1} = f_i^j$ allí.

Si $\alpha \notin \partial R(i)_{j+1}$, como $f_i^j = f_i^0$ sobre $R(i)_0$ y $\operatorname{diam}(f_i^0(\alpha_0)) < \frac{\eta}{2}$, existe $1 \leq k \leq N$ tal que $f_i^j(\alpha_0) \subset B_\eta(p_k)$. Aplicando (2) a las j-caras de α, tenemos que f_i^j manda el soporte de $\partial\alpha$ a una bola centrada en p_k de radio $\eta + (2^j - 2 + 2^{j-2})\eta$. Como estamos asumiendo $j \leq 3$, esto es menor a 11η, y luego como $B_{11\eta}(p_k)$ es un entorno normal de p_k, podemos extender $f_i^j|_{\operatorname{sop}(\partial\alpha)} : \operatorname{sop}(\partial\alpha) \to B_{(2^j-1+2^{j-2})\eta}$ de $\operatorname{sop}(\partial\alpha)$ continuamente a una funcion $f_i^{j+1}|_{\operatorname{sop}(\alpha)} : \operatorname{sop}(\alpha) \to B_{(2^j-1+2^{j-2})\eta}$ moviéndonos exclusivamente por geodésicas. Notar que haciendo esto, como $B_{(2^j-1+2^{j-2})\eta}$ es geodésicamente convexo, nunca nos salimos del codominio.

Pegando las $f_i^{j+1}|_{\operatorname{sop}(\alpha)}$, podemos definir f_i^{j+1} que resulta continua del lema del pegado. Por definición, es claro que $f_i^{j+1} = f_i^j$ sobre el dominio de f_i^j (los soportes de los $\partial\alpha$), y como la imagen de cada α cae en una bola de radio $(2^j - 1 + 2^{j-2})\eta$, tenemos

$$\operatorname{diam}(f_i^{j+1}(\alpha)) \leq 2(2^j - 1 + 2^{j-2})\eta = (2^{j+1} - 2 + 2^{j-1})\eta.$$

Luego, f_i^{j+1} está bien definida y es una extensión $(j+1)$-ésima de f_i^0 que resulta continua. Siguiendo inductivamente, podemos construir una 4-extensión f_i^4 de f_i^0. Por construcción, el mapa $f_i = f_i^4 : \operatorname{sop}(R(i)) \to \mathcal{T}$ resulta continuo y satisface $f_i = \hat{\Phi}$ en el soporte de $\partial R(i)$. $\square$

Con esto, podemos terminar de probar 7.1.2. Notemos que el mapa $f_i : \operatorname{sop}(R(i)) \to \mathcal{T} \cong \mathbb{RP}^3$ induce un morfismo en los grupos de homología

$$f_{i_*} : H_*(\operatorname{sop}(R(i)), \mathbb{Z}) \to H_*(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z}).$$

Como $f_i = \hat{\Phi}$ en el soporte de $\partial R(i)$ tenemos que si $f_{i_\#}$ es el mapa que induce f_i en el complejo de cadenas, entonces

$$\hat{\Phi}_*[\partial R(i)] = f_{i_*}[\partial R(i)] = [f_{i_\#}(\partial R(i))] = [\partial f_{i_\#}(R(i))]$$

que es igual a 0 por ser el borde de una 4-cadena.

Luego, para llegar al absurdo basta con notar que juntando esto con 7.4.2 tenemos que

$$0 = \hat{\Phi}_*[\partial R(i)] = \hat{\Phi}_*[\partial I^4 \times \{1/2\}] = |\Phi|_*([\partial I^4 \times \{1/2\}]) \in H_3(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z})$$

donde la segunda igualdad se da ya que $\hat{\Phi} = |\Phi|$ sobre $\partial I^4 \times \{1/2\}$. Sin embargo, (H_8) nos dice que $|\Phi|_*([\partial I^4 \times \{1/2\}]) \neq 0 \in H_3(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z})$, lo que nos lleva al absurdo deseado.

Como el absurdo provino de suponer $\mathbf{L}(\Pi) \leq 4\pi$, acabamos de probar 7.1.2.

Capítulo 8

La conjetura de Willmore

8.1. Existen superficies minimales de área mínima

Estamos en condiciones de empezar a probar la conjetura. Llamemos $\mathcal{F}_1$ a

$$\left\{S \subset S^3 : \text{S es una superficie embebida cerrada y minimal con género } g(S) \geq 1\right\}.$$

Recordemos de los preliminares que el operador de Jacobi de una superficie Σ viene dado por $J(f) = \Delta f + |S|^2 f + 2f$ donde S es el operador de forma de Σ. Notamos índice(Σ) al índice de Σ, y lo definimos como la cantidad de autovalores positivos de J.

Dedicaremos esta sección a probar uno de los Teoremas más pesados de toda la demostración, que nos será sumamente útil para probar la conjetura de Willmore.

Teorema 8.1.1. *Existe* $\Sigma \in \mathcal{F}_1$ *tal que* $\inf_{S\in\mathcal{F}_1} \text{\'Area}(S) = \text{\'Area}(\Sigma)$.

Demostración:
Sea $\Sigma^i \in \mathcal{F}_1$ una sucesión tal que Área(Σ^i) converge al ínfimo. Pensando los Σ^i como elementos de $\mathcal{V}_2(S^3)$, que resultan estacionarios por ser las Σ^i minimales, y que tienen área uniformemente acotada por tender al mínimo, podemos usar 3.6.7. De esto, podemos asumir mediante una subsucesión que Σ^i converge en $\mathcal{V}_2(S^3)$ a un Varifold integral Σ que resulta estacionario ya que $||\delta\Sigma^i|| = 0$ para todo i.

Como el toro de Clifford tiene area $2\pi^2$, sabemos que

$$||\Sigma||(S^3) = \lim_{i\to\infty} \text{\'Area}(\Sigma^i) \leq 2\pi^2 < 8\pi(1-\delta)$$

para $\delta > 0$ pequeño.

Probamos ahora el siguiente Lema, que usaremos repetidas veces en lo que sigue de esta demostración.

Lema 8.1.2. *Existe r_0 tal que*

$$\frac{||\Sigma||(B_r(p))}{\pi r^2} \leq 2-\delta \text{ para todo } r \leq r_0 \text{ y } p \in S^3.$$

Demostración:
Si esto no pasara, tendríamos una sucesión $r_i \to 0$ y una sucesión $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en S^3 tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{||\Sigma||(B_{r_i}(q_i))}{\pi r_i^2} \geq 2-\delta$$

donde podemos asumir $q_i \to q$ por compacidad de S^3 y $q \in \Sigma$ por ser Σ cerrado en S^3 (el numerador sería eventualmente nulo sinó).

Por la fórmula de monotonía mencionada en (bibliografía pendiente) tenemos como consecuencia de esto que

$$\lim_{r\to 0} \frac{||\Sigma||(B_r(q))}{\pi r^2} \geq 2-\delta$$

Dada la función $\mu : S^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mu(p,r) = rp$, considero el cono en $\mathbb{R}^4$ $C = \mu_\#(\Sigma \times \mathbb{R})$, que resulta un 3-varifold estacionario (¿por qué?). Sea $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$ el volumen de la 3-bola, tenemos que si $g(r) = ||C||(B_r^4(0))$, entonces

$$g(r) = \int_0^r r^2 ||\Sigma||(S^3) dr = \frac{r^3}{3} ||\Sigma||(S^3).$$

De esto, obtenemos que

$$\frac{||C||(B_r^4(0))}{\omega_3 r^3} = \frac{||\Sigma||(S^3)}{4\pi} \leq 2(1-\delta) \text{ para todo } r \geq 0.$$

Además, como el cociente entre las áreas de $\mu(B_r(q) \times [1-r, 1+r])$ y $B_r^4(q)$ tiende a 1 cuando $r \to 0$, tenemos que

$$\lim_{r\to 0} \frac{||C||(B_r^4(q))}{\omega_3 r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{||C||(\mu(B_r(q) \times [1-r, 1+r]))}{\omega_3 r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{||\Sigma||(B_r(q))}{\pi r^2} \geq 2-\delta,$$

donde la segunda igualdad sale haciendo la misma integral que en la observación anterior. Juntando los dos últimos resultados y monotonía, llegamos a una contradicción, ya que tendríamos

$$2-\delta \leq \lim_{r\to 0} \frac{||C||(B_r^4(q))}{\omega_3 r^3} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{||C||(B_r^4(q))}{\omega_3 r^3} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{||C||(B_r^4(0))}{\omega_3 r^3} \leq 2-2\delta < 2-\delta,$$

lo que prueba el lema. □

Teniendo esto probado, estamos en condiciones de demostrar que Σ es suave y tiene multiplicidad 1, que es lo que nos falta. Por el Teorema de regulairdad de Allard, que citamos de (bibliografía pendiente) basta con probar que

$$\lim_{r\to 0} \frac{||\Sigma||(B_r(p))}{\pi r^2} = 1 \text{ para todo } p \in \Sigma.$$

Fijemos entonces p y Σ, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ considero el mapa $\mu^\lambda(x) = \lambda x$ definido en $\mathbb{R}^4$. Dado $j \in \mathbb{N}$, defino $\Sigma_j = \mu^j_\#(\Sigma - p)$ (donde $\Sigma - p$ es la traslación). Notemos que Σ_j es una sucesión de Varifolds bidimensionales en $\mathbb{R}^4$ cuyas curvaturas medias generalizadas convergen uniformemente a 0, de donde $||\delta\Sigma_j||(W)$ tiende a 0 para todo W compacto de $\mathbb{R}^4$. Además, sea m tal que $W \subset B^4_m(0)$, entonces

$$||\Sigma_j||(W) \leq ||\Sigma_j||(B^4_m(0)) = j^2||\Sigma_1||(B^4_m(0) \times \frac{1}{j}) = j^2||\Sigma||(B^4_{\frac{m}{j}}(p)),$$

que esta acotado como consecuencia directa de 8.1.2. Luego, estamos en condiciones de usar 3.6.7, y existe $V \in V_2(\mathbb{R}^4)$ Varifold integral estacionario tal que una subsucesión de los Σ_j converge a V en $\mathbf{F}$.

Afirmo primero que $V \subset p^\perp$, donde $p^\perp$ es el hiperplano ortogonal a p: para probarlo, basta ver que $||V||(K) = 0$ para todo K compacto en $\mathbb{R}^4 \setminus p^\perp$. Fijado K, basta entonces ver que $K_j = K \times \frac{1}{j}$ no interseca a $S^3 - p$ para j suficientemente grande.

Para verlo, considero $g : K \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{|\langle x,p\rangle|}{||x||}$, que está bien definida, es continua, y nunca se anula por definición de K. Luego, como $g > 0$ es continua y sale de un compacto, tiene un mínimo $y > 0$. Notemos entonces que $\{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{p\} : g(x) \geq y\}$ es un cono de $\mathbb{R}^4$ que no interseca a $S^3 - p$ en puntos de menor a $z = z(y)$. Luego, como K_j eventualmente cae en $B_z(0)$ y siempre cae en $g^{-1}([y, +\infty))$, estamos.

De ahora en adelante abusaremos notación y llamaremos Σ_j a la subsucesión convergente a V. Para todo $s > 0$, notemos que por convergencia y definición vale

$$\frac{||V||(B^4_s(0))}{\pi s^2} = \lim_{j\to\infty} \frac{||\Sigma_j||(B^4_s(0))}{\pi s^2} = \lim_{r\to 0} \frac{||\Sigma||(B_r(p))}{\pi r^2} \leq 2 - \delta$$

donde la ultima desigualdad sale de 8.1.2.

Ahora, juntando lo que probamos hasta ahora con [17, Corolario 3.4], tenemos que V es un cono estacionario contenido en $p^\perp$. Por (bibliografía pendiente) tenemos además que V es el cono de un 1-Varifold estacionario $\gamma \subset S^2$, que además resulta ser una unión de segmentos geodésicos que se cortan en intersecciones de a 3.

De esto, si llegaramos a probar que γ no tiene intersecciones triples, entonces γ es una geodesica de S^2, por lo que V es un plano, que al tener densidad menor a 2, tiene multiplicidad 1. Luego, terminaríamos, ya que habríamos probado que $\frac{||V||(B^4_s(0))}{\pi s^2} = 1$, y este valor coincide con $\frac{||\Sigma||(B_r(p))}{\pi r^2}$.

Sea x_0 una intersección triple de γ. Considero la sucesión de Varifolds

$$V_k = \mu^k_\#(V - x_0).$$

Por (bibliografía pendiente), tenemos que tras pasar a una subsucesión, podemos decir que V_k converge a un varifold estacionario U que consiste de tres semiplanos de $p^\perp$ $\{P_1, P_2, P_3\}$ que se intersecan en una recta común L. Si alguno de estos planos tuviera multiplicidad mayor a 1, entonces la densidad cerca de un punto q sobre L de U sería al menos 2, y luego por monotonía,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{||U||(B_r(q))}{r^2} \geq 2,$$

pero esto contradice que $\frac{||V||(B^4_s(0))}{\pi s^2} \leq 2 - \delta$ para todo $s > 0$. Absurdo. Luego, los tres semiplanos tienen multiplicidad 1.

Extraeremos ahora una subsucesión diagonal del conjunto de superficies

$$\Sigma_{i,j,k} = \mu^k_\#(\mu^j_\#(\Sigma^i - p) - x_0), \text{ con } i, j, k \in \mathbb{N}$$

a la que llamaremos $\{\Sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y que cumplirá que $|\Sigma_i| \to U$ en $\mathbf{F}$. Notemos que valen las siguientes tres propiedades:

1. Las variedades Σ_i no tienen borde, y luego $\partial\Sigma_i = 0$ si las pensamos como currents.
2. La curvatura media generalizada de Σ_i tiende a 0 uniformemente.
3. Aplicándole traslaciones y homotecias al Lema 8.1.2, tenemos que existe $C > 0$ tal que para todo R real e i entero suficientemente grande, vale que

$$||\Sigma_i||(B^4_s(x)) \leq Cs^2 \text{ para todo } x \in B^4_R(0) \text{ y } 0 \leq s \leq R.$$

Si pienso todo como Currents y considero la sucesión Σ_i, como vale 3, tenemos que para todo $W \subset\subset \mathbb{R}^4$, $\sup ||\Sigma_i||(W) < +\infty$. Como estas variedades no tienen borde, puedo usar 3.5.1 y tomando subsucesión podemos asumir que las Σ_i convergen a una $T \in \mathcal{Z}_2(\mathbb{R}^4)$ en la métrica bemol. Probaremos entonces que podemos darle orientaciones de los semiplanos $\{P_1, P_2, P_3\}$ de modo que $U = T$. Esto implicará inmediatamente un absurdo, ya que por un lado $\partial\Sigma_i \to \partial T$ implica que $\partial T = 0$, y por el otro toda manera de orientar los tres semiplanos hace que L aparezca en ∂T con un coeficiente impar (y por lo tanto no nulo).

Sea L_j el conjunto de puntos a distancia 2^{-j} o menos de la recta L, entonces tenemos que $U \setminus L_j$ consiste de semiplanos de multiplicidad 1. Como los $|\Sigma_i \setminus L_j|$ provienen de superficies orientadas cuyas curvaturas generalizadas tienden a 0 uniformemente, y tienden (como Varifolds) a $U \setminus L_j$, que es una variedad, tenemos por (bibliografía pendiente) que $\Sigma_i \cap (\mathbb{R}^4 \setminus L_j)$ converge a $U \cap (\mathbb{R}^4 \setminus L_j)$ como variedades en la métrica $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0, 1)$. Tomando las orientaciones de $\Sigma_i \cap (\mathbb{R}^4 \setminus L_j)$, esto nos permite inducirle una orientación a U y pensarlo como Current integral de ahora en más. Notaremos $|U|$ al Varifold integral que induce.

Considero ahora una 2-forma ω con soporte contenido en $B^4_R(0) \subset \mathbb{R}^4$ y con comasa $||\omega|| \leq 1$. Nos basta con probar que $U(\omega) = T(\omega)$ para terminar. Cubriendo $L_j \cap B^4_R(0)$ con un cilindro lo más pequeño posible y haciendo estimados con cubos diádicos, no es difícil ver que existe un entero N independiente de j tal que podemos cubrir al conjunto $L_j \cap B^4_R(0)$ con $N2^j$ bolas de radio 2^{-j}, que llamamos $B_1, B_2, \ldots, B_{N2^j}$. Tenemos entonces que si i es suficientemente grande,

$$||\Sigma_i||(L_j \cap B^4_R(0)) \leq \sum_{k=1}^{N2^j} ||\Sigma_i||(B_k) \leq N2^j C(2^{-j})^2 = CN2^{-j}.$$

Sea ahora $\{f, g\}$ una partición suave de la unidad subordinada al cubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}^4$ $\{L_j^\circ, (\mathbb{R}^4 \setminus L_{j+1})\}$, escribiendo $\omega = f.\omega + g.\omega$ tenemos que

$$|U(\omega) - T(\omega)| \leq |U(f.\omega) - T(f.\omega)| + |U(g.\omega) - T(g.\omega)|.$$

Como $\Sigma_i \cap (\mathbb{R}^4 \setminus L_{j+1})$ converge a $U \cap (\mathbb{R}^4 \setminus L_{j+1})$ como variedades en la métrica $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, tenemos en particular que $\Sigma_i|_{\mathbb{R}^4 \setminus L_{j+1}}(g.\omega) \to U|_{\mathbb{R}^4 \setminus L_{j+1}}(g.\omega)$. Como $g.\omega$ tiene soporte en $\mathbb{R}^4 \setminus L_j$, esto es lo mismo que decir $\Sigma_i(g.\omega) \to U(g.\omega)$, y luego $U(g.\omega) = T(g.\omega)$.

Nos falta entonces solo acotar $|U(f.\omega) - T(f.\omega)|$. Notemos que como $f.\omega$ está soportada en $L_j^\circ \cap B^4_R(0)$ y tiene comasa ≤ 1, vale

$$|U(f.\omega) - T(f.\omega)| \leq ||U||(L_j^\circ \cap B^4_R(0)) + ||T||(L_j^\circ \cap B^4_R(0))$$

como $\Sigma_i \to T$ en la topología bemol, y $|\Sigma_i| \to |U|$ a nivel Varifolds, tenemos por 3.5.6 que $||T|| \leq ||U||$, y luego

$$|U(f.\omega) - T(f.\omega)| \leq 2||U||(L_j \cap B^4_R(0)) \leq 2CN2^{-j}$$

ya que $||\Sigma_i||(L_j \cap B^4_R(0)) \to ||U||(L_j \cap B^4_R(0))$.

Esto termina de demostrar que Σ es una superficie suave de S^3 con multiplicidad 1. Como las Σ^i originales provenían de superficies minimales, y convergen a Σ en el sentido de los Varifolds que inducen, por el Teorema de regularidad de Allard (bibliografía pendiente) tenemos que $\Sigma^i \to \Sigma$ en $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$, y luego por (bibliografía pendiente) tenemos que las curvaturas seccionales de Σ_i convergen uniformemente a la de Σ Luego, por el Teorema de Gauss-Bonnet (2.7.1), $\chi(\Sigma^i) = \chi(\Sigma)$ para todo i suficientemente grande donde χ es la característica de Euler. Luego Σ tiene género no nulo, por lo que $\Sigma \in \mathcal{F}_1$. $\square$

8.2. Área mínima de superficie minimal en la esfera

Con esto probado, estamos en condiciones de encontrar las superficies minimales de S^3 con género no nulo de área mínima. Dentro del Paper de Marques y Neves, al siguiente Teorema también se lo llama Teorema B.

Teorema 8.2.1 (Área de superficies minimales en S^3 con género no nulo)**.** *Vale*

$$\operatorname*{ínf}_{S\in\mathcal{F}_1} \acute{A}rea(S) = 2\pi^2,$$

y para todo $\Sigma \in \mathcal{F}_1$, $\acute{A}rea(S) = 2\pi^2$ si y solo si Σ es el Toro de Clifford salvo isometrías de S^3.

Demostración:

Del Teorema anterior, existe Σ cuya área realiza el mínimo, y este mínimo es además $2\pi^2$ o menos. Basta entonces probar que Σ es el toro de Clifford salvo isometrías de S^3.

Consideremos a Φ la familia Min-Max definida en 5.4.1 y la clase homotópica Π asociada a Σ definida en 6.4.3. Como se cumple 5.4.2, se cumplen todas las hipótesis necesarias para que en particular valga el corolario del Teorema de la cota inferior probada en la sección anterior (7.1.3). De esto, existe $S \in \mathcal{F}_1$ tal que

$$\text{Área}(S) = \mathbf{L}(\Pi) \leq \sup\left\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^5\right\} \leq \mathcal{W}(\Sigma) = \text{Área}(\Sigma),$$

donde en el medio usamos (iii) de 5.4.2. Notar que como Σ es de área mínima, esto implica que $\mathbf{L}(\Pi) = \text{Área}(\Sigma)$.

Nuestro objetivo será ahora probar que índice$(\Sigma) \leq 5$, ya que en (bibliografía pendiente) Urbano demuestra que el toro de Clifford y las grandes esferas son las únicas superficies minimales embedidas en S^3 con índice 5 o menos.

Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^4$, definimos $\psi_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ como $\psi_i(x) = \langle N(x), e_i\rangle$ para $1 \leq i \leq 4$ y definimos $\psi_5(x) = 1$. Llamamos E al subespacio de $C^\infty(\Sigma)$ generado por las $\{\psi_j\}_{1\leq j\leq 5}$. Recordemos además que por 2.4.13 vale que $J(\psi_i) = 2\psi_i$ para $1 \leq i \leq 4$.

Recordemos ahora los mapas F_v y N_v definidos en 4.1.1 y 4.2.2 respectivamente. Por justificaciones de la misma seccion, sabemos que existe $\delta > 0$ suficientemente chico tal que el mapa $P : B^4_\delta(0) \times (-\delta, \delta) \times \Sigma \to S^3$ definido como

$$P(v, t, x) = P_{(v,t)}(x) = (\cos(t))F_v(x) + (\sin(t))N_v(x)$$

cumple $P_{(v,t)}(\Sigma) = \Sigma_{(v,t)}$ donde los $\{\Sigma_{(v,t)}\}$ son los de 4.2.1 y además $P_{(v,t)}$ es un embedding de Σ en S^3 para todo v, t en el dominio.

Si $1 \leq i \leq 4$ y $x \in \Sigma$, afirmamos que vale

$$\langle \frac{d}{ds}|_{s=0} P_{(se_i,0)}(x), N(x)\rangle = -2\langle e_i, N(x)\rangle = -2\psi_i.$$

La única igualdad que no es clara es la primera: esta se debe a que

$$P_{(se_i,0)}(x) = F_{se_i}(x) = \frac{1-|se_i|^2}{|x-se_i|^2}(x-se_i) - se_i.$$

Derivando con respecto a s usando derivada del producto interno y derivada del cociente, y evaluando en 0, obtenemos $\frac{d}{ds}|_{s=0} P_{(se_i,0)}(x) = A(x)x - 2e_i$. Sin embargo, el $A(x)x$ podemos ignorarlo al tomar producto interno contra $N(x)$ ya que $x \perp N(x)$.

De esto, usando 2.4.14 para $f = -2\psi_i$ y la linealidad de J vale que

$$\frac{d^2}{(ds)^2}|_{s=0} \text{ Área } (P_{(se_i,0)}(x)) = -4\int_\Sigma \psi_i J(\psi_i)\ d\Sigma$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Haciendo lo mismo con $\psi_5 = 1$, tenemos que

$$\frac{d^2}{(ds)^2}|_{s=0} \text{ Área } (P_{(0,s)}(x)) = -4\int_\Sigma \psi_5 J(\psi_5)\ d\Sigma$$

Dicho esto, demostramos un Lema que nos será útil en poco tiempo.

Lema 8.2.2. *Para todo $\psi \in E \setminus \{0\}$ vale que*

$$-\int_\Sigma \psi J(\psi) \ < 0.$$

Demostración:
Observemos primero que si definimos $T : E \times E \to \mathbb{R}$ como $T(f,g) = \int_\Sigma fJ(g)$, tenemos que T es claramente bilineal, pero además es simétrico ya que

$$\int_\Sigma f\Delta g\ d\Sigma = \int_\Sigma g\Delta f\ d\Sigma$$

por las fórmulas de Green, y todos los otros términos en $fJ(g)$ son simétricos en f y g.

Sea $f(v,t) = \text{Área}(\Sigma_{(v,t)}) = \text{Área}(P_{(v,t)}(\Sigma))$ para $(v,t) \in B^4_\delta(0)\times(-\delta,\delta)$. Sabemos que $f(0,0) = \mathcal{W}(\Sigma)$ y, como Σ es una superficie minimal, que $Df(0,0) = 0$. Además, por 4.2.4 tenemos que $f(v,t) \leq f(0,0)$ para todo (v,t) en el dominio, por lo que $D^2f(0,0) \leq 0$, y por las desigualdades recién obtenidas, esto implica que

$$-\int_\Sigma \psi J(\psi)\ d\Sigma \leq 0$$

para todo $\psi \in E$.

Notando que esto implica que $T(\psi, \psi) \geq 0$ para todo $\psi \in E$, tenemos que lo que queremos probar es equivalente a ver que T es definida positiva en su dominio. Si no lo fuera, sería degenerada y existiría $\phi \in E$ tal que $T(\phi, \psi) = T(\psi, \phi) = 0$ para todo $\psi \in E \setminus \{0\}$. Tomando en particular $\psi = \phi_i$ para $1 \leq i \leq 5$, tenemos que

$$\int_\Sigma \phi\psi_i \, d\Sigma = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq 4, \text{ y además} \quad \int_\Sigma J(\phi) \, d\Sigma = 0.$$

Ahora, tenemos que $\phi = \sum_{i=1}^5 a_i\psi_i$ para $a_i \in \mathbb{R}$ por definición de E. Si a_5 fuera 0, tendríamos por lo anterior que ϕ tiene norma 0 en $L^2(\Sigma)$, y luego por continuidad sería 0. De esto, dividiendo por a_5, como $\psi_5 = 1$ existe $c \in \mathbb{R}$ y ψ combinación lineal de ψ_1, ψ_2, ψ_3, y ψ_4 tal que

$$1 = c\phi + \psi.$$

Como ψ es un autovector de J con autovalor 2 y $J(1) = |S|^2 + 2$, tenemos que

$$\int_\Sigma (|S|^2 + 2) \, d\Sigma = \int_\Sigma J(1) \, d\Sigma = \int_\Sigma (cJ(\phi) + J(\psi)) \, d\Sigma = 2\int_\Sigma \psi \, d\Sigma.$$

Por otro lado, elevando al cuadrado también tenemos que $1 = c^2\phi^2 + 2c\phi\psi + \psi^2$. De esto,

$$\text{Área}(\Sigma) = \int_\Sigma (c^2\phi^2 + 2c\phi\psi + \psi^2) \, d\Sigma \geq \int_\Sigma \psi^2 \, d\Sigma,$$

donde la desigualdad se da porque $\phi\psi$ integra 0 sobre Σ, al ser ψ autofunción. Además, por la misma razón, tenemos

$$\int_\Sigma \psi^2 \, d\Sigma = \int_\Sigma \psi(1 - c\phi) \, d\Sigma = \int_\Sigma \psi \, d\Sigma.$$

Juntando todo, tenemos entonces que

$$2\text{Área}(\Sigma) = \int_\Sigma 2 \, d\Sigma \leq \int_\Sigma (|S|^2 + 2) \, d\Sigma = 2\int_\Sigma \psi \, d\Sigma \leq 2\text{Área}(\Sigma).$$

Esto solo puede ser cierto si todas las desigualdades son igualdades. En particular, necesitamos que $|S|^2$ sea constantemente cero (ya que es una función no negativa). Esto solo puede suceder si ambos autovalores de S son nulos en todo punto de Σ, cosa que replicando el final de la demostración de 2.3.11 implica que Σ es una gran esfera. Esto contradice $\Sigma \in \mathcal{F}_1$. Absurdo. □

Supongamos ahora a modo de contradicción índice$(\Sigma) \geq 6$. Nuestro objetivo será construir un mapa $C' : \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi] \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ que coincida con C (definido en 5.1.1) en todo el dominio salvo un entorno del origen. Luego, usaremos C' para probar que $\text{Área}(\Sigma) = \text{Área}(\Sigma_w)$ para algún $w \in B^4 \setminus \{0\}$, cosa que usaremos para probar que Σ es una gran esfera de S^3. Esto sería un absurdo, ya que asumimos que el género de S es no nulo.

Como índice$(\Sigma) \geq 6$, existen $f_1, f_2 \in C^\infty(\Sigma)$ autofunciones de J con autovalores λ_1 y λ_2 tales que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, f_1, f_2\}$ es un conjunto linealmente independiente (estas autofunciones son C^∞ ya que, al ser soluciones de una ecuación diferencial elíptica en derivadas parciales con coeficientes analíticos, son analíticas). Como J es un operador autoadjunto en L^2, puedo asumir sin perder generalidad que $\langle f_j, \psi_i\rangle_{L^2} = 0$ para $j = 1, 2$, $1 \leq i \leq 4$, y que $\langle f_1, f_2\rangle_{L^2} = 0$.

Consideremos ahora la función

$$\varphi = f_1\langle f_2, J(\psi_5)\rangle_{L^2} - f_2\langle f_1, J(\psi_5)\rangle_{L^2} \in C^\infty(\Sigma).$$

Notemos primero que como ψ_i son autofunciones para $1 \leq i \leq 4$, vale que $\langle \varphi, J(\psi_i)\rangle_{L^2} = 0$ para $1 \leq i \leq 4$, ya que f_1 y f_2 son ortogonales a las ψ_i en L^2 para $1 \leq i \leq 4$. Por otro lado, es fácil ver que $\langle \varphi, J(\psi_5)\rangle_{L^2} = 0$ por definición.

Por último, notemos que si llamamos $c_1 = \langle\langle f_2, J(\psi_5)\rangle_{L^2}$ y $c_2 = \langle f_1, J(\psi_5)\rangle_{L^2}$, tenemos que:

$$\langle \varphi, J(\varphi)\rangle_{L^2} = \langle f_1c_1 - f_2c_2,\ \lambda_1 f_1 c_1 - \lambda_2 c_2 f_2\rangle_{L^2} = \lambda_1||c_1f_1||^2 + \lambda_2||c_2f_2||^2 - C\langle f_1, f_2\rangle_{L^2},$$

para $C = \lambda_1c_1c_2 + \lambda_2c_1c_2$.

Como λ_1, λ_2 son positivos y f_1, f_2 ortogonales, esto es mayor a 0 a menos que $c_1 = c_2 = 0$, pero en ese caso tomamos $\varphi = f_1 \in C^\infty(\Sigma)$ y φ cumple las mismas condiciones que antes.

En conclusión, acabamos de probar que existe $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

- $-\int_\Sigma \varphi J(\varphi)\, d\Sigma < 0$
- $-\int_\Sigma \varphi J(\psi_i)\, d\Sigma = 0$ para $1 \leq i \leq 5$.

Sea X un campo tangente de S^3 que a cada $p \in \Sigma$ le asigna X_p es el vector en dirección de la normal a Σ N con magnitud φ, considero $\{\Gamma_s\}_{s\geq 0}$ el grupo de difeomorfismos de S^3 de un parámetro generados por X (es decir, Γ_s manda cada $q \in S^3$ al resultado de moverse durante tiempo s en la dirección de X empezando en q).

Dado esto, defino $f : B^4_\delta(0) \times (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ como

$$f(v, t, s) = \text{Área}(\Gamma_s(P_{(v,t)}(\Sigma)))$$

donde $P_{(v,t)}(\Sigma)$ se define como en la página anterior. Notar que $f(0, 0, 0)(\Sigma) = \text{Área}(\Sigma)$, y como toda superficie minimal es punto crítico de un funcional de área, $Df(0, 0, 0) = 0$. Además, por la elección de φ y por 2.4.14, podemos ver que $D^2f(0, 0, 0) < 0$, por lo que $(0, 0, 0)$ es máximo local y existe $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que

$$\text{Área}(\Gamma_s(P_{(v,t)}(\Sigma))) < f(0, 0, 0) = \text{Área}(\Sigma)$$

para todo $(v,t,s) \in (B^4_\delta(0) \times (-\delta_1,\delta_1) \times (-\delta_1,\delta_1)) \setminus \{(0,0,0)\}$.

Sea $\beta : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ una función chichón suave tal que $0 \leq \beta(y) \leq \delta_1/2$ para $y \in \mathbb{R}^5$, $\beta(y) = 0$ para $|y| \geq \delta_1/2$ y $\beta(y) = \frac{\delta_1}{2}$ para $|y| \leq \delta_1/4$. Definimos

$$C'(v,t) = [|\Gamma_{\beta(v,t)}(P_{(v,t)}(\Sigma)|] \in \mathcal{Z}_2(S^3) \text{ para } |(v,t)| < \delta_1.$$

Notemos que $C'(v,t) = C(v,t)$ si $\delta_1/2 < |(v,t)| < \delta_1$, por lo que podemos extender C' a un mapa continuo en la topología bemol $C' : \overline{B}^4 \times [-\pi,\pi] \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ igualándolo a C en $|(v,t)| \geq \delta_1$. Por lo recién dicho, tenemos que $\sup\{\mathbf{M}(C'(v,t)) : |(v,t)| \leq \delta_1\} < \text{Área}(\Sigma)$. Esto implica que $\sup\{\mathbf{M}(C'(v,t)) : (v,t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi,\pi]\} \leq \text{Área}(\Sigma)$ por propiedad de C.

Usaremos ahora C' para demostrar el siguiente Lema, que nos tomará la mayor parte de lo que resta de este capítulo.

Lema 8.2.3. *Existe $w \in B^4 \setminus \{0\}$ tal que Área$(\Sigma_w) =$ Área(Σ).*

Demostración:
Reemplazando C por C' en la definición 5.4.1, podemos definir $\Phi' : I^5 \to \mathcal{Z}_2(S^3)$ que, revisando la demostración del Teorema 5.4.2, termina cumpliendo las mismas hipótesis desde (H_1) hasta (H_8) que cumple Φ. Luego, podemos usar 7.1.2.

Considero la sucesión $(5,\mathbf{M})$-homotópica $S = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de mapas a $(\mathcal{Z}_2(S^3;\mathbf{M}), \Phi'_{|_{I^5_0}})$ dada por 6.4.3, y llamo Π' a la clase $(5,\mathbf{M})$-homotópica correspondiente. Por 7.1.3, obtenemos la existencia de una $\Sigma' \in \mathcal{F}_1$ tal que $4\pi < \text{Área}(\Sigma') = \mathbf{L}(\Pi')$.

De esto,

$$\text{Área}(\Sigma) \leq \text{Área}(\Sigma') = \mathbf{L}(\Pi') \leq \mathbf{L}(S) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi'(x)) : x \in I^5\} \leq \text{Área}(\Sigma),$$

lo que implica que S es una sucesión crítica, y que por 6.5.2 podemos tomar $\Sigma' \in \mathbf{C}(S)$.

Tomando subsucesión de los ϕ_i, podemos elegir $x_i \in \text{Dom}(\phi_i)$ tal que $|\phi_i(x_i)|$ converge a Σ' en la topología de Varifolds. Luego, por el punto (1) de 6.4.2 existe una sucesión $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tendiendo a infinito tal que

$$\text{Área}(\Sigma') = \lim_{i\to\infty} \mathbf{M}(\phi_i(x_i)) \leq \lim_{i\to\infty} \sup\{\mathbf{M}(\Phi'(x)) : x, x_i \in \alpha,\ \alpha \in I(n,l_i)_n\} \leq \text{Área}(\Sigma).$$

De esto, existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en I^5 tal que $\lim_{i\to\infty} \mathbf{M}(\Phi'(y_i)) = \mathcal{W}(\Sigma) = \text{Área}(\Sigma)$, con y_i en los mismos 5-símplices que los x_i. Notar que como $l_i \to \infty$, la distancia entre y_i y x_i tiende a 0, lo que junto a (2) de 6.4.2 implica que $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(\Phi'(y_i), \phi_i(x_i)) = 0$.

Por la definición de Φ', tenemos $\Phi'(y_i) = C'(v_i,t_i)$ para alguna sucesión $(v_i,t_i) \in \overline{B}^4 \times [-\pi,\pi]$, y por compacidad podemos quedarnos con una subsucesión $\{(v_i,t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a $(v,t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi,\pi]$.

Como además teníamos $\sup\{\mathbf{M}(C'(v,t)) : |(v,t)| \leq \delta_1\} < \text{Área}(\Sigma)$, $|(v_i,t_i)| \geq \delta_1/2$ y luego $C(v_i,t_i) = C'(v_i,t_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Sea ahora T el mapa definido en 4.1.5, probemos que $w = T(v)$ cae en B^4. Para hacerlo, supondremos que cae en S^3 y llegaremos a un absurdo:

Si cayera en S^3, tendríamos $v \in S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon$. Luego, por 5.1.1, tenemos que existe una esfera geodésica $S \subset S^3$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(\Phi'(y_i), S) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(C'(v_i,t_i), S) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(C(v_i,t_i), S) = 0.$$

Notemos ahora que si $\mathcal{F}(S) = \text{Área}(S) = 0$, la proposición 5.2.1 nos dice en particular que existe $q \in S^3$ tal que para todo r,

$$\Sigma_{(T(v_i),t_i)} \subset B_r(q) \text{ si } i \text{ es suficientemente grande}$$

y luego $\mathbf{M}(C(v_i,t_i))$ tendería a cero por 4.3.2. Sin embargo, esto es absurdo ya que suponiamos $\mathbf{M}(\Phi'(y_i)) = \text{Área}(\Sigma)$.

Tenemos entonces que $\mathcal{F}(S) > 0$. Recordemos entonces que tenemos dos sucesiones $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que cumplen $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(\Phi'(y_i), S) = 0$, $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(\Phi'(y_i), \phi_i(x_i)) = 0$, y $\lim_{i\to\infty} \mathbf{F}(|\phi_i(x_i)|, \Sigma') = 0$.

Estas convergencias en particular implican que $\phi_i(x_i) \to S$ en $\mathcal{F}$ y $|\phi_i(x_i)| \to \Sigma'$ en la topología débil de Varifolds. Luego, por 3.5.6, tenemos que $||S|| \leq ||\Sigma'||$, y en particular $||S||(S^3 \setminus \Sigma') = 0$. De esto, $S \subset \Sigma'$, lo que es una contradicción, ya que S es una 2-variedad de género 0 y Σ' tiene género $g \geq 1$. Esto termina de probar que $w \in B^4$.

Probemos entonces que $\text{Área}(\Sigma_w) = \text{Área}(\Sigma)$. Como $\mathbf{M}(C(v_i t_i)) = \mathbf{M}(C'(v_i,t_i))$ converge a $\text{Área}(\Sigma) = \mathcal{W}(\Sigma)$, tenemos que como Σ no es una esfera geodésica, por 4.2.4 vale que o bien $t = 0$ o $|t| = \pi$.

Descartemos ahora $|t| = \pi$: sea $p \in \Sigma_{T(v)}$, entonces por 4.3.2 tenemos que existen $r > 0$ y $0 < \delta' < \mathcal{W}(\Sigma)$ tales que

$$\text{Área}(\Sigma_{(u,s)} \cap B_r(-p)) \leq \delta' < \mathcal{W}(\Sigma)$$

para todo $(u,s) \in B^4 \times [-\pi,\pi]$.

Notemos que podemos pedir que i sea suficientemente grande tal que simultáneamente suceda que $\pi - r/2 < |t_i| \leq \pi$ y que

$$\sup_{x\in T(v)} d(x, \Sigma_{T(v_i)}) \leq r/2$$

por la continuidad de d y la compacidad de $T(v)$, donde recordamos que d es la distancia geodésica sobre S^3.

Como $d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v_i)}) \leq d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, x) + d(x, \Sigma_{T(v_i)})$ para todo $x \in S^3$, en particular vale para todo $x \in T(v)$, y tomando una sucesión convergente a un $x \in T(v)$ que minimiza $d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v)})$, tenemos

$$d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v_i)}) \leq d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v)}) + \sup_{x\in T(v)} d(x, \Sigma_{T(v_i)})$$

De esto, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, p) &\geq d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v)}) \\ &\geq d(\Sigma_{(T(v_i),t_i)}, \Sigma_{T(v_i)}) - \sup_{x\in T(v)} d(x, \Sigma_{T(v_i)}) \\ &\geq |t_i| - r/2 \end{aligned}$$

lo que implica que $\Sigma_{(T(v_i),t_i)} \subset B_r(-p)$. Sin embargo, esto es un absurdo ya que $\mathbf{M}(C(v_i, t_i))$ no podría converger a nada mayor a δ'.

Tenemos entonces que $t = 0$, y luego por definición, $C(v_i, t_i)$ tiende a $C(v, t) = C(v, 0) = \Sigma_{T(v)} = \Sigma_w$ en $\mathcal{F}$. De esto, $\phi(x_i) \to \Sigma_w$ en $\mathcal{F}$ y $|\phi(x_i)| \to \Sigma'$ en $\mathbf{F}$. Por 3.5.6 tenemos luego que $||\Sigma_w|| \leq ||\Sigma'||$ y al igual que antes, $\Sigma_w \subset \Sigma'$. Como tanto Σ_w como Σ' son 2-variedades cerradas y conexas en S^3 de la misma dimensión, Σ_w resulta cerrado y abierto en Σ', por lo que ambas variedades coinciden. Luego, Área$(\Sigma_w) =$ Área(Σ).

Usando $|(v_i, t_i)| \geq \delta_1/2$ para i suficientemente grande, tenemos además que $v \neq 0$. De la definición de T tenemos entonces $w \neq 0$, y $w \in B^4 \setminus \{0\}$ como queríamos. □

Probemos ahora que Σ debe ser una gran esfera. Sustituyendo $g = \frac{-2w}{(1+|w|^2)}$ en ([11, Ecuación 1.12]) y teniendo en cuenta que $H = 0$ en nuestro caso, obtenemos la fórmula

$$\text{Área}(\Sigma_w) = \text{Área}(\Sigma) - 4\int_\Sigma \frac{\langle w, N(x)\rangle^2}{|x - w|^4} d\Sigma.$$

De esto, Área$(\Sigma_w) =$ Área(Σ) implica que $\langle w, N(x)\rangle = 0$ para todo $x \in \Sigma$. Sin embargo, como Σ es minimal, por 2.3.11 tenemos que Σ es una gran esfera. Esto es un absurdo, ya que suponíamos Σ tiene género no nulo.

El absurdo provino de suponer índice$(\Sigma) > 6$. Luego, tenemos índice$(\Sigma) \leq 5$ y Σ resulta ser el toro de Clifford salvo isometrías. □

8.3. Demostración de la conjetura de Willmore

Estamos ahora en condiciones de demostrar la Conjetura de Willmore. Sea $\Sigma \subset S^3$ una superficie cerrada embebida de género $g \geq 1$. Podemos asumir que $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$.

Consideremos la familia min-max Φ definida en 5.4.1 y la clase de homotopia Π asociada a Σ definida en 6.4.3. Nuevamente, por el Teorema 5.4.2, se cumplen todas las hipótesis para que valga el corolario de la cota inferior (7.1.3). De esto, existe una superficie minimal Σ' con género $g \geq 1$ tal que

$$\text{Área}(\Sigma') = \mathbf{L}(\Pi) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^5\} \leq \mathcal{W}(\Sigma)$$

donde la última desigualdad sale de 5.4.2. De acá, por el Teorema B (8.2.1) es inmediato que $\mathcal{W}(\Sigma) \geq 2\pi^2$, y para terminar de probar la conjetura de Willmore solo nos queda probar los casos de igualdad. Supongamos entonces $\mathcal{W}(\Sigma) = 2\pi^2$.

Lema 8.3.1. *Existe $w \in B^4 \setminus \{0\}$ tal que Área$(\Sigma_w) = \mathcal{W}(\Sigma) = 2\pi^2$.*

Demostración:
Esta demostración se parece mucho a 8.2.3, pero la escribiremos entera por fines de completitud.

Sea C el mapa definido en 5.1.1, y sea $S = \{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Pi$ la sucesión $(5, \mathbf{M})$-homotópica de mapas a $(\mathcal{Z}_2(S^3; \mathbf{M}), \Phi'_{|_{I_0^5}})$ dada por 6.4.3. Por 8.2.1, definiendo Σ' como recién, tenemos que

$$2\pi^2 \leq \text{Área}(\Sigma') = \mathbf{L}(\Pi) \leq \mathbf{L}(S) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in I^5\} \leq \mathcal{W}(\Sigma) = 2\pi^2.$$

De esto, S es en particular una sucesión critica, y por 6.5.2 podemos tomar $\Sigma' \in \mathbf{C}(S)$.

Pasando a subsucesión, elegimos $x_i \in \text{Dom}(\phi_i)$ tal que $|\phi_i(x_i)|$ converge a Σ' en la métrica $\mathbf{F}$ de Varifolds. Luego, por el punto (1) de 6.4.2 existe una sucesión $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tendiendo a infinito tal que

$$\text{Área}(\Sigma') = \lim_{i\to\infty} \mathbf{M}(\phi_i(x_i)) \leq \limsup_{i\to\infty}\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x, x_i \in \alpha,\ \alpha \in I(n, l_i)_n\} \leq \mathcal{W}(\Sigma).$$

Al igual que en la demo de 8.2.3, existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en I^5 tal que $\lim_{i\to\infty} \mathbf{M}(\Phi(y_i)) = \mathcal{W}(\Sigma)$, con y_i en los mismos 5-símplices que los x_i. Volvemos a tener entonces por el item (2) de 6.4.2 que $\lim_{i\to\infty} \mathcal{F}(\Phi(y_i), \phi_i(x_i)) = 0$.

Por la definición de Φ, tenemos $\Phi(y_i) = C(v_i, t_i)$ para alguna sucesión $(v_i, t_i) \in \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$, y por compacidad podemos quedarnos con una subsucesión $\{(v_i, t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a $(v, t) \in \overline{B}^4 \times [-\pi, \pi]$.

Sea ahora T el mapa definido en 4.1.5, nos vuelve a interesar ver que $w = T(v)$ cae en B^4. Para verlo, asumimos que v cae en $S^3 \cup \overline{\Omega}_\varepsilon$, y al igual que en 8.2.3, obtenemos una esfera geodésica S con $\mathcal{F}(S) > 0$ tal que $\phi_i(x_i) \to S$ en $\mathcal{F}$ y $|\phi_i(x_i)| \to \Sigma'$ en $\mathbf{F}$. Por 3.5.6 nuevamente, tenemos que $||S||(S^3 \setminus \Sigma') = 0$, que implica $S \subset \Sigma'$, que es absurdo porque S y Σ' tienen distinto género.

Para terminar, como $\mathbf{M}(C(v_i, t_i))$ converge a $\mathcal{W}(\Sigma)$, al igual que en 8.2.3 podemos por 4.2.4 concluir que o bien $t = 0$ o $t = |\pi|$. El caso $|t| = \pi$ es descartado siguiendo la misma cadena de desigualdades, por lo que tenemos $t = 0$.

Esto quiere decir que $\phi(x_i) \to \Sigma_w$ en $\mathcal{F}$ por definición y continuidad de C, y como $|\phi(x_i)| \to \Sigma'$ en $\mathbf{F}$, por 3.5.6 vale de nuevo que $\Sigma_w \subset \Sigma'$ y ambas superficies coinciden. En particular, $\text{Área}(\Sigma_w) = \mathcal{W}(\Sigma) = 2\pi^2$. $\square$

De esto y 4.2.4 tenemos que necesariamente Σ_w es una superficie minimal con género $g \geq 1$ y área $2\pi^2$. Por 8.2.1, tenemos entonces que Σ_w es el toro de Clifford salvo isometrías de S^3. Como Σ_w es el resultado de aplicarle una transformación conforme a Σ, concluimos que necesariamente Σ es el toro de Clifford salvo transformaciones conformes. Esto demuestra la conjetura de Willmore.

Bibliografía

[1] Almgren, Frederick Justin, Jr. *The homotopy groups of the integral cycle groups.* Topology 1 (1962), 257–299.

[2] Brendle, Simon. *Minimal surfaces in S^3: a survey of recent results.* Bull. Math. Sci. 3 (2013), no. 1, 133–171.

[3] Calegari, Danny, *Chapter 3: Minimal Surfaces.*

[4] C. De Lellis, *Allard's interior regularity Theorem: an invitation to Stationary Varifolds.*

[5] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry.*

[6] S. Eilenberg, S. MacLane, *Acyclic models.* American journal of mathematics, (1953) 75(1), 189-199.

[7] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[8] Lee, John Marshall *Introduction to smooth manifolds.* Springer, (1997).

[9] F. C. Marques, A. Neves, *Min-Max Theory and the Willmore Conjecture*, Annals of Mathematics, (2) 179 (2014), número 2, 683–782.

[10] W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology.* Springer, (1991).

[11] S. Montiel, A. Ros, *Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area*, Invent. Math. 83 (1985), 153–166. MR 0813585.

[12] C. Riedweg and D. Schäppi. *Singular (Lipschitz) homology and homology of integral currents.* preprint.

[13] Sakai, Takashi. *Riemannian geometry.* Translated from the 1992 Japanese original by the author. Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[14] Schmaltz, Wolfgang, *The Jordan-Brower Separation Theorem.*

[15] Simon, Leon, *Lectures on Geometric Measure Theory* Proc. Centre Math. Anal., Australian National Univ. 3, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, (1983).

[16] Simon, Leon, *Introduction to Geometric Measure Theory* (2014), 131-180.

[17] Weser, Daniel *GMT Seminar: Introduction to Integral Varifolds.*

[18] T. J. Willmore, *Note on embedded surfaces*, An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Sect. I a Mat. 11B (1965), 493–496.