UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Cohomología de Hochschild de extensiones torcidas de coronas

Franco Nicolás Rufolo

Directora: Andrea Leonor Solotar
Codirectora: Mercedes Pérez-Millán

Fecha de presentación: 29 de mayo de 2024

Agradecimientos

No es fácil expresar lo agradecido que estoy con tantas personas que me ayudaron, en mayor o menor medida, a llegar hasta acá. Me voy a esforzar, pero sepan esto. Sabrán disculpar si paso por alto mencionar a alguien.

En primer lugar a mis padres, quienes estuvieron ahí desde el primer momento, en las buenas y en las malas. Porque me brindaron su apoyo y ayuda siempre que lo necesité, de todas las maneras que les fueron posibles. Agradezco también a Freddy, quien estuvo ahí a lo largo de todo este proceso y más, recibiéndome de las mejores maneras y logrando sacarme una sonrisa cuando no tenía más motivos para hacerlo.

A Aldito, Isis y Silvina, por estar, apoyarme y el cariño de siempre.

Agradezco a Andrea, por compartir sus amplios conocimientos y forma de ver las cosas conmigo, por su buena voluntad y buena onda de siempre, por guiarme durante todo este tiempo, por los cafés y por la buena dinámica de trabajo que tenemos.

A Hipólito y Pablo, por aceptar ser jurados de esta tesis y por sus observaciones, correcciones y sugerencias.

A Román, por todas las reuniones que hemos tenido y por compartir sus visiones y tantos de sus conocimientos y vivencias acerca de la vida académica conmigo.

A Mariano, por todos esos cafés en los que charlamos de cualquier cosa de matemática, por su interés contagioso en casi toda área de esta hermosa disciplina y por sus comentarios y sugerencias de siempre.

De mis amigos no hay poco para decir. Quiero agradecer a Los Guardianes y miembros de LYDP. Particularmente, quiero agradecer a Enzo, por todas las charlas en chiste y a veces no tanto que tenemos, a José, por ser mi pocket analyst y también poder hacer chistes de literalmente lo que sea, a Juani, por ser como un hermano desde el secundario, bancarme en tantas y por compartir nuestro peculiar sentido del humor, a Kevin, por saber estar ahí a su manera tan única y hacerme el aguante siempre y a Leo, por empujarme todo el tiempo para adelante, darme su opinión en tantas cosas relevantes y darme una mano cada vez que la necesito. Sin ustedes, todo esto hubiera costado muchísimo más esfuerzo. Los aprecio mucho.

Gracias Ale, por ser mi amigo hace tanto, porque cada vez que nos vemos podemos hablar como si no hubiera pasado un solo día y por entenderme en las que ni yo me entiendo.

A Andrea M, por ayudarme a dar los primeros pasos en varias áreas, por su dulzura y su apoyo contínuo.

A Mati, por nuestra larga amistad, por sus consejos de siempre y por las risas que compartimos.

A Charly, por ser mi hermano académico, por bancarme en todas y por escucharme divagar sobre lo que estoy pensando para luego darme cuenta yo solo de la respuesta que busco. A Javi, por su predisposición a pensar juntos lo que sea, compartir su forma de ver las cosas y, en general, por ser tan macanudo.

A Joaco, por todas las risas cuando charlamos (con lo mucho que nos cuesta organizarlo). A Seba O, por ponerse la diez en tantas y estar siempre. A Eze, por darme su visión tan única de muchos temas que surgieron (y surgen) en la vida de una persona. A Amanda, por la buena onda, ponerle ganas a todo y (cómo olvidarla) la miel. A Darío, por ser un tipazo, un gran docente, su buena voluntad de siempre y enseñarme tantas cosas. A Pepe, por ser más bueno que el pan, un gran amigo y siempre alentarme. A Maki, por su amabilidad, chistes y siempre estar con el mejor ánimo. A Josefina, por tener siempre re buena predisposición. A Nahuel, por los intercambios de conocimientos. A Nico, por su amabilidad de siempre y ganas de aprender más.

Respecto a los docentes con quien tuve el gusto de trabajar, agradezco a Georgi, Guido, Nacho, Jan, Seba F y Fede. Por las ganas que ponen, compartir sus conocimientos y simplemente hacer más disfrutable la labor docente.

A algunos profesores que tuve a lo largo de la carrera que siento que marcaron de alguna manera mi visión de la matemática, o simplemente hicieron la materia mucho más divertida. Entre ellos están Pablo Amster, Pablo Solernó, Ezequiel Rela y Gabriel Minian.

Agradezco, finalmente, a los que estuvieron y ya no están.

Índice general

Introducción

Las álgebras asociativas son un objeto de fundamental importancia en matemática. Aparecen en diversas áreas, como álgebra lineal, geometría algebraica, teoría de álgebras de Lie, teoría de representaciones y topología algebraica, entre muchas otras. Dos invariantes de estas fueron definidos por G. Hochschild en 1945: las teorías de homología y cohomología que llevan su nombre. Sin embargo, ya en 1937 N. Jacobson estudió [Jac37] las derivaciones y derivaciones interiores de álgebras sobre cuerpos, dos conceptos que, como se muestra más adelante, están codificados en la cohomología de Hochschild del álgebra. Muchas de las teorías de homología y cohomología en otras áreas de la matemática pueden reformularse en términos de la homología y cohomología de Hochschild.

En [Hoc42], Hochschild demostró, con métodos homológicos rudimentarios para los estándares de hoy, que toda derivación de un álgebra es interior si y solo si el álgebra es separable, esto es, $A \otimes_K L$ es semisimple para toda extensión de cuerpos $K \subseteq L$. También presentó una condición necesaria para que un álgebra sobre un cuerpo de característica 0 sea semisimple. Usando herramientas que años después H. Cartan y S. Eilenberg formalizaron y publicaron en [CE99], Hochschild reformuló estos resultados en términos de resoluciones proyectivas del álgebra y grupos de cohomología con valores en un A-bimódulo arbitrario en [Hoc45]. Con este lenguaje, los resultados anteriores se pueden expresar como sigue: un álgebra es separable si y solo si el primer grupo de cohomología del álgebra a coeficientes en cualquier bimódulo es nulo, y una condición necesaria para que un álgebra sea semisimple sobre un cuerpo de característica 0 es que su primer grupo de cohomología con coeficientes en sí misma sea nulo. En ese mismo trabajo, dio una interpretación del segundo grupo de cohomología en términos de las extensiones del álgebra. Otra interpretación del segundo grupo de cohomología fue dada por M. Gerstenhaber en [Ger64], trabajo en el cual estudió las deformaciones de un álgebra.

En particular, Cartan y Eilenberg mostraron que para calcular la homología y cohomología de un álgebra se puede utilizar cualquier resolución proyectiva del álgebra como bimódulo sobre sí misma. Es útil entonces tener resoluciones minimales para la clase de álgebras que se desea estudiar. M. Bardzell probó en [Bar97] la existencia de dichas resoluciones para las álgebras monomiales.

En esta tesis estudiamos las extensiones de un álgebra A por algún A-bimódulo torcidas por un 2-cociclo. El caso particular en el que el bimódulo es DA, el dual del álgebra, y el 2-cociclo es nulo se conoce como la extensión trivial TA del álgebra. En [CMRS03], se calcula el primer grupo de cohomología de Hochschild de TA en términos de espacios que dependen únicamente del álgebra de partida. En particular, los autores muestran que este espacio nunca es nulo. En un grado arbitrario n, muestran que la homología y cohomología del álgebra en grado n son sumandos directos de $\mathrm{HH}^n(TA)$ si A es de dimensión finita. Hasta el día de hoy no se conocen muchos más resultados que relacionen $\mathrm{HH}^n(TA)$ con espacios que dependen del álgebra de partida.

En el Capítulo 1 se desarrollan los conceptos básicos de la teoría, las herramientas que serán utilizadas en la tesis, las definiciones de la homología y cohomología de Hochschild, la resolución minimal debida a Bardzell para álgebras monomiales, la teoría de deformaciones debida a Gerstenhaber y finalmente las nociones de extensiones de álgebras.

En el Capítulo 2 se presentan los resultados que usaremos de [CMRS03], entre los cuales se encuentra la siguiente descomposición del primer grupo de cohomología de Hochschild de la extensión trivial de un álgebra:

Teorema. [CMRS03, Theorem 5.5] Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces

$$\mathrm{HH}^1(TA) \simeq A^A \oplus \mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) \oplus \mathrm{HH}^1(A) \oplus \mathrm{Alt}_A(DA).$$

Aquí, A^A es el K-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A)$ y $\mathrm{Alt}_A(DA)$ denota a

$$\{\alpha : DA \otimes_A DA \to K \text{ lineal} : \alpha(f \otimes g) = -\alpha(g \otimes f) \text{ para todos } f, g \in DA\}.$$

Además, se expone un resultado que permite relacionar la cohomología de la extensión trivial de un álgebra A con la de cualquiera de las extensiones torcidas de A.

En el Capítulo 3 se introduce la familia de álgebras de interés para esta tesis y se calculan los espacios de cohomología de las extensiones de algunas álgebras, verificando que cumplen con los resultados vistos en el Capítulo 2. Luego, se presentan unos resultados adicionales que facilitan el cálculo de un último ejemplo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones, notaciones y resultados básicos necesarios para el desarrollo de esta tesis. En la Sección 1.1 se dan las definiciones básicas de álgebras y módulos que serán utilizadas. En la Sección 1.2 se ven los conceptos necesarios de las álgebras de caminos, algunos resultados y ejemplos. La Sección 1.3 se dedica al concepto de resolución de un módulo. En la Sección 1.4 se presentan las definiciones de la homología y cohomología de Hochschild, así como la principal resolución que se utilizará en este trabajo. En la Sección 1.5 se desarrolla el concepto de deformaciones de álgebras, y su conexión con la cohomología de Hochschild. En la Sección 1.6 se estudia la noción de extensiones de álgebras, y una caracterización de ellas.

1.1. Álgebras y módulos

En esta sección se introducen las nociones de álgebras sobre un cuerpo y módulos sobre las mismas. Además, se define el álgebra envolvente de un álgebra.

Definición 1.1.1. Sea K un cuerpo. Una **K-álgebra asociativa** es un anillo A con una estructura de K-espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo, es decir,

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

para cada $a, b \in A$ y $\lambda \in K$. Se dice que A es finito dimensional, o de dimensión finita, si lo es como K-espacio vectorial. Cuando no haya riesgo de confusión, se dirá que A es un álgebra. El álgebra es unitaria (o tiene unidad) si el anillo subyacente lo es.

Definición 1.1.2. Dadas dos K-álgebras A y B, un **morfismo de K-álgebras** es un morfismo de anillos $f : A \to B$ que es K-lineal. Un **isomorfismo de K-álgebras** es un morfismo de K-álgebras biyectivo, y de existir un isomorfismo de K-álgebras entre A y B, se dice que estas son **K-álgebras isomorfas** y se nota $A \simeq B$.

Definición 1.1.3. El **álgebra opuesta** A^{op} de A es el álgebra que coincide con A como espacio vectorial, y su multiplicación $*$ se define por $a * b = ba$. El **álgebra envolvente** A^e de A es el álgebra cuyo K-espacio vectorial subyacente es $A \otimes_K A^{op}$, y cuyo producto está dado por la extensión lineal de

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes b'b.$$

Definición 1.1.4. Un **A-módulo a izquierda** es un K-espacio vectorial M junto con una operación binaria $\cdot : A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto am$ que satisface

1. $a(m + m') = am + am'$,

2. $(a+b)m = am + bm$,
3. $(ab)m = a(bm)$,
4. $1m = m$,
5. $a(\lambda m) = (\lambda a)m = \lambda(am)$,

para todos $a, b \in A$, $m, m' \in M$ y $\lambda \in K$. Se define, de manera análoga, la noción de A-módulo a derecha.

Salvo que se diga lo contrario, en este trabajo se van a considerar módulos a izquierda.

Definición 1.1.5. Dados dos A-módulos M y N, un **morfismo de A-módulos** es un morfismo de K-espacios vectoriales que cumple $f(am) = af(m)$ para todo $a \in A$ y $m \in M$. Este se dice un **isomorfismo** si es biyectivo, en cuyo caso se dice que M y N son A-módulos isomorfos.

Observación 1.1.6. Un morfismo de A-módulos es también un morfismo de K-espacios vectoriales.

Notación: Notamos por ${}_A\mathrm{Mod}$ a la categoría de A-módulos a izquierda, y por Mod_A a la categoría de A-módulos a derecha.

Observación 1.1.7. Las categorías ${}_A\mathrm{Mod}$ y $\mathrm{Mod}_{A^{op}}$ son naturalmente equivalentes.

Definición 1.1.8. Sea M un A-módulo. Se dice que M es

- **indescomponible** si es no nulo y no es suma directa de dos A-módulos no nulos,
- **noetheriano** si todos sus submódulos son finitamente generados,
- **libre** si existe un conjunto I tal que $M \simeq A^{(I)}$,
- **proyectivo** si para todo epimorfismo de A-módulos $p : N \to T$ y todo morfismo de A-módulos $f : M \to T$ existe un morfismo de A-módulos $\overline{f} : M \to N$ tal que $p\overline{f} = f$, es decir, tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "p"'] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.9. Un álgebra A es **indescomponible** si no es la suma directa de dos álgebras no nulas.

Definición 1.1.10. Un álgebra A se dice **básica** si, como A-módulo, es suma directa de A-módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos.

Definición 1.1.11. Dadas dos K-álgebras A y B, un **(A, B)-bimódulo** $M = {}_AM_B$ es una terna $(M, \cdot, *)$ tal que $(M, \cdot)$ es un A-módulo a izquierda, $(M, *)$ es un B-módulo a derecha, y las acciones son compatibles, esto es,

$$(a \cdot m) * b = a \cdot (m * b),$$

para todos $a \in A$, $b \in B$ y $m \in M$. Cuando $A = B$, se dirá que M es un A-bimódulo.

Notación: Notamos por ${}_A\mathrm{Mod}_B$ a la categoría de (A, B)-bimódulos.

Observación 1.1.12. Las categorías ${}_{A^e}\mathrm{Mod}$ y ${}_A\mathrm{Mod}_A$ son naturalmente equivalentes.

Observación 1.1.13. Si M es un A-módulo a izquierda, $DM := \mathrm{Hom}_K(M, K)$ es un A-módulo a derecha con estructura dada por $(fa)(x) = f(ax)$. De manera similar, si M es un A-módulo a derecha, DM es un A-módulo a izquierda vía $(af)(x) = f(xa)$.

Notación: En ocasiones, escribiremos $=$ en lugar de $\simeq$ para referirnos a un isomorfismo natural.

1.2. Álgebras de caminos

En esta sección se definen las nociones de carcaj y de álgebra de caminos. Además, se ven algunos ejemplos y cómo se pueden representar.

Definición 1.2.1. Un **carcaj** es una 4-upla ordenada $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, en la cual Q_0 y Q_1 son conjuntos, Q_0 es no vacío, y $s, t : Q_1 \to Q_0$ son funciones. Los elementos de Q_0 se dicen los **vértices** de Q y los de Q_1 las **flechas** de Q. Si α es una flecha, $s(\alpha)$ es el **origen** de α, y $t(\alpha)$ es el **término** de α. El carcaj Q es **finito** si tanto Q_0 como Q_1 son conjuntos finitos. El par (Q_0, Q_1) es el **grafo subyacente** de Q.

Definición 1.2.2. Un carcaj se dice **conexo** si el grafo subyacente lo es.

Definición 1.2.3. Dado un carcaj Q, se define un **camino** en Q como una secuencia de flechas $\alpha = a_n \dots a_1$ tales que $t(a_i) = s(a_{i+1})$ para todo $1 \leq i < n$. Un camino es **trivial** si $n = 0$ o, lo que es lo mismo, corresponde a un vértice e. La **longitud de un camino** α es la cantidad de flechas que lo componen, de donde $\alpha = a_n \dots a_1$ tiene longitud n. Si α es un vértice, $s(\alpha) = t(\alpha) := \alpha$, mientras que si $\alpha = a_n \dots a_1$, con $a_1, \dots, a_n$ las flechas que componen a α, se define $s(\alpha) := s(a_1)$ y $t(\alpha) := t(a_n)$. Si $s(\alpha) = t(\alpha)$, se dice que α es un **ciclo**; si además es de longitud 1, se denomina **bucle**. Se dice que Q es **acíclico** si no contiene ciclos no triviales.

Ejemplos 1.2.4. Una forma cómoda de dar un carcaj es con un dibujo: se colocan los nombres de los vértices, y una flecha del vértice i al vértice j por cada flecha α con $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$. Algunos ejemplos de carcajes son:

(i)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

(iii)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[d, "e"'] & 3 \arrow[l, "b"'] \arrow[ddl, "c"] \\ & 4 \arrow[ul, "d"] \arrow[d, "f"'] & \\ & 5 & \end{tikzcd}$$

(iv)

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & & & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "e"'] & & 5 \\ & & & 4 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.5. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q sobre K es la K-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de los caminos en Q, y el producto está dado por la concatenación de caminos, es decir, si α y β son caminos, $\beta \cdot \alpha = \beta\alpha$ si $s(\beta) = t(\alpha)$, y es cero si no. Si α es un camino en Q y e es un camino trivial, $\alpha \cdot e = \alpha$ si $e = s(\alpha)$, y cero si no, y de manera similar, $e \cdot \alpha = \alpha$ si $e = t(\alpha)$, y cero si no.

En el contexto de álgebras de caminos, se denotará E a la subálgebra KQ_0.

Observación 1.2.6. A partir de la definición se obtiene una descomposición en suma directa de KQ como espacio vectorial:

$$KQ = \bigoplus_{n \geq 0} KQ_n,$$

donde Q_n denota el conjunto de caminos de longitud n. Como $KQ_n \cdot KQ_m \subseteq KQ_{n+m}$, KQ es una K-álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada por la longitud de caminos.

Lema 1.2.7. [ASS06, Chapter II, Lemma 1.4] Sea Q un carcaj. Entonces

(i) *KQ es un álgebra asociativa.*

(ii) *KQ es unitaria si y solo si Q_0 es finito. Más aún, en este caso, $1 = \sum_{e \in Q_0} e$.*

(iii) *KQ es de dimensión finita si y solo si Q es finito y acíclico.*

De ahora en más, todas las álgebras serán unitarias.

Definición 1.2.8. Sea Q un carcaj conexo. El ideal bilátero del álgebra de caminos KQ generado por Q_1 se llama el **ideal de flechas** de KQ y se denota R. Un ideal bilátero I de KQ se dice **admisible** si existe un número natural $n \geq 2$ tal que

$$R^n \subseteq I \subseteq R^2.$$

Definición 1.2.9. Sea Q un carcaj. Una **relación con coeficientes en** K es una combinación K-lineal de caminos de longitud por lo menos dos que además son paralelos, es decir, tienen el mismo origen y término. Más explícitamente, una relación es un elemento de KQ de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i,$$

con α_i de longitud por lo menos dos, $s(\alpha_i) = s(\alpha_j)$, $t(\alpha_i) = t(\alpha_j)$ y $\lambda_i \in K$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Si $n = 1$, la relación se dice monomial.

Proposición 1.2.10. [ASS06, Chapter II, Proposition 2.6, Lemma 2.8] Sean Q un carcaj finito e I un ideal admisible de KQ.

(i) *El álgebra KQ/I es de dimensión finita.*

(ii) *El ideal I puede generarse por un conjunto finito de relaciones.*

Definición 1.2.11. Un álgebra A es **monomial** si existen un carcaj Q y un ideal admisible I generado por relaciones monomiales tales que A es isomorfa a KQ/I.

El siguiente resultado justifica el interés en los cocientes de álgebras de caminos.

Teorema 1.2.12. [ASS06, Chapter II, Theorem 3.7] Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica e indescomponible de dimensión finita. Entonces existe un único carcaj Q y existe un ideal admisible I tales que $A \simeq KQ/I$.

Ejemplos 1.2.13. (i) Consideremos el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

Para cualquier $n \geq 2$, $I = (a^n)$ es un ideal admisible de KQ.

(ii) Consideremos el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

Un ejemplo de ideal admisible de KQ es $I = (ba, cb, ac)$.

(iii) Para el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[d, "e"'] & 3 \arrow[l, "b"'] \arrow[ddl, "c"] \\ & 4 \arrow[ul, "d"] \arrow[d, "f"'] & \\ & 5 & \end{tikzcd}$$

se tiene que $I = (de, ad, eb, fe)$ es un ideal admisible del álgebra de caminos.

(iv) Para

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & & & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \arrow[rr, "d"'] \arrow[dr, "e"'] & & 5 \\ & & & 4 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$I = ((bac)^2, feb - db)$ es un posible ideal admisible de KQ.

1.3. Resoluciones

En esta sección se repasan los conceptos de resoluciones de A-módulos.

Definición 1.3.1. Dado un A-módulo M, una **resolución** (a izquierda) de M es un complejo de cadenas de A-módulos $(X_k, \mathrm{d}_k)_{k\geq 0}$ junto con un morfismo $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M$ tal que

$$\cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\mathrm{d}_2} X_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

es exacto. Se dice que ε es el **morfismo de aumentación** de la resolución, la cual se denota por $X_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$, y $(*)$ se llama el **complejo aumentado** de la resolución. La resolución se dice **proyectiva**, **libre** o **playa** si cada X_k es proyectivo, libre o playo, respectivamente.

Observación 1.3.2. En ${}_A\mathrm{Mod}$ siempre existen resoluciones libres. Es decir, si M es un A-módulo, siempre existe una resolución libre de M.

Ejemplo 1.3.3. Sea $C_n = \langle t \rangle$ el grupo cíclico de orden n. $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}[C_n]$-módulo, vía $m \cdot n = mn$ si $m \in \mathbb{Z}$ y $t \cdot n = n$. Así, una resolución libre de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[C_n]$-módulo es

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\mathrm{d}_3} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\mathrm{d}_2} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

con $\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, $d_{2k+1} = \cdot(t-1)$ y $d_{2k} = \cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right)$.

Proposición 1.3.4. [CE99, Chapter V, Proposition 1.1] Sean M y M' dos A-módulos, sea $(X_k, \mathrm{d}_k)_{k\geq 0}$ una resolución proyectiva de M y sea $(X'_k, \mathrm{d}'_k)_{k\geq 0}$ una resolución de M'. Entonces, si $f : M \to M'$ es un morfismo de módulos, existe un morfismo de complejos $(f_k)_{k\geq 0}$ tal que

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\mathrm{d}_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[d, "f"] \\ X'_0 \arrow[r, "\mathrm{d}'_0"] & M' \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, dicho morfismo es único salvo homotopía. Se dice que $(f_k)_{k\geq 0}$ levanta a f.

Definición 1.3.5. Sea M un A-módulo y sean $(X_k, \mathrm{d}_k)_{k\geq 0}$ y $(X'_k, \mathrm{d}'_k)_{k\geq 0}$ dos resoluciones proyectivas de M. Un **morfismo de comparación** entre $(X_k, \mathrm{d}_k)_{k\geq 0}$ y $(X'_k, \mathrm{d}'_k)_{k\geq 0}$ es un morfismo de complejos $(f_k)_{k\geq 0}$ de $(X_k, \mathrm{d}_k)_{k\geq 0}$ en $(X'_k, \mathrm{d}'_k)_{k\geq 0}$ que levanta a la identidad de M.

Notar que en vista de la proposición anterior en el caso particular $f = \mathrm{id}$, siempre existe un morfismo de comparación entre dos resoluciones proyectivas cualesquiera de un módulo dado.

1.4. Homología y cohomología de Hochschild

En esta sección se introducen las definiciones de la homología y cohomología de Hochschild. Luego se estudia una resolución que es útil a la hora de hacer cálculos explícitos.

Definición 1.4.1. Sean A una K-álgebra y M un A-bimódulo. Se definen la **homología de Hochschild** de A con coeficientes en M como

$$\mathrm{H}_\bullet(A, M) := \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(M, A),$$

y la **cohomología de Hochschild** de A con coeficientes en M como

$$\mathrm{H}^\bullet(A, M) := \mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M).$$

Observar que $\mathrm{H}_n(A, M)$ y $\mathrm{H}^n(A, M)$ son K-espacios vectoriales para cada n. Se denota $\mathrm{HH}_n(A)$ a $\mathrm{H}_n(A, A)$ y $\mathrm{HH}^n(A)$ a $\mathrm{H}^n(A, A)$.

Como los funtores Tor y Ext no dependen de la resolución proyectiva de A sobre A^e usada, se introduce una en particular que es útil para obtener resultados teóricos.

Para simplificar la notación, en ocasiones se escribe $\otimes$ en lugar de $\otimes_K$ y $A^{\otimes n}$ en lugar del producto tensorial $A \otimes \cdots \otimes A$ de A consigo mismo n veces. Con esto en mente, $A^{\otimes n}$ es un A-bimódulo vía

$$a(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)b = aa_1 \otimes \cdots \otimes a_n b,$$

por lo que se lo puede considerar como un A^e-módulo a izquierda. Concretamente,

$$(a \otimes b)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = aa_1 \otimes \cdots \otimes a_n b.$$

Si $n \geq 0$, la función $b'_n : A^{\otimes n+2} \to A^{\otimes n+1}$ definida por

$$b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

es un morfismo de A^e-módulos.

Proposición 1.4.2. [CE99, p. 174–175] $(A^{\otimes n+2}, b'_n)_{n\geq 0}$ es una resolución de A sobre A^e, con morfismo de aumentación $b'_0(a \otimes b) = ab$.

Definición 1.4.3. La resolución $(A^{\otimes n+2}, b'_n)_{n\geq 0}$ se llama la **resolución bar** de A.

Como A es libre sobre K, se tiene que $A^{\otimes n}$ también lo es para todo $n \geq 0$, y luego $A^{\otimes n+2} \simeq A^e \otimes A^{\otimes n}$ es libre sobre A^e. En consecuencia, la resolución bar es una resolución libre (y en particular proyectiva) de A sobre A^e.

1.4.1. Homología de Hochschild

Sea M un A-bimódulo. Si se aplica el funtor $M \otimes_{A^e} -$ a la resolución bar de A, se obtiene el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \xrightarrow{\partial_n} M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \otimes_{A^e} A^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_{A^e} A^{\otimes 2} \longrightarrow 0,$$

donde el diferencial ∂_i es el inducido por el diferencial b'_i. Se suele utilizar la identificación

$$M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \simeq M \otimes A^{\otimes n},$$

donde $m \otimes_{A^e} (a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b) \mapsto bma \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$, con la cual el complejo resultante es

$$(C_\bullet(A, M), \mathrm{d}_\bullet): \quad \cdots \longrightarrow M \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{d}_n} M \otimes A^{\otimes n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \otimes A \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M \longrightarrow 0.$$

El diferencial inducido es

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.\end{aligned}$$

Así, el n-ésimo grupo de homología de Hochschild de A con coeficientes en M es

$$\mathrm{H}_n(A, M) = \mathrm{H}_n(C_\bullet(A, M), \mathrm{d}_\bullet) = \frac{\ker \mathrm{d}_n}{\operatorname{im} \mathrm{d}_{n+1}},$$

donde la primera igualdad hace referencia a un isomorfismo natural.

Ejemplo 1.4.4. Si $A = K$, el complejo de cadenas correspondiente es

$$\cdots \longrightarrow K^{\otimes n+1} \xrightarrow{\mathrm{d}_n} K^{\otimes n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow K^{\otimes 2} \xrightarrow{\mathrm{d}_1} K \longrightarrow 0.$$

vía el isomorfismo $K^{\otimes n} \to K$, donde $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n \mapsto \lambda_1 \ldots \lambda_n$, el complejo resultante es

$$\ldots K \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{0} K \to 0,$$

por lo que $\mathrm{HH}_0(K) = K$ y $\mathrm{HH}_n(K) = 0$ para todo $n \geq 1$.

1.4.2. Cohomología de Hochschild

Sea M un A-bimódulo. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ a la resolución bar de A, se obtiene el complejo de cocadenas $(C^\bullet(A, M), \mathrm{d}^\bullet)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{\partial^1} \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+1}, M) \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+2}, M) \longrightarrow \ldots,$$

donde el diferencial ∂^i es el inducido por b'_i. En este caso, la identificación que se suele usar es

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes n+2}, M) \simeq \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, M),$$

donde $f \mapsto (a \mapsto f(1 \otimes a \otimes 1))$, mediante la cual el complejo resultante es

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{Hom}_K(A, M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n}, M) \xrightarrow{\mathrm{d}^n} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n+1}, M) \longrightarrow \ldots,$$

y el diferencial inducido es

$$\mathrm{d}^n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}.$$

Así, el n-ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M es

$$\mathrm{H}^n(A, M) = \mathrm{H}^n(C^\bullet(A, M), \mathrm{d}^\bullet) = \frac{\ker \mathrm{d}^n}{\operatorname{im} \mathrm{d}^{n-1}},$$

donde la primera igualdad hace referencia a un isomorfismo natural.

Ejemplo 1.4.5. Si $A = K$, el complejo de cocadenas correspondiente es

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \operatorname{Hom}_K(K, K) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(K^{\otimes n}, K) \xrightarrow{\mathrm{d}^n} \operatorname{Hom}_K(K^{\otimes n+1}, K) \longrightarrow \dots,$$

y pasando por el isomorfismo $\operatorname{Hom}_K(K^{\otimes n}, K) \to K$, donde $f \mapsto f(1 \otimes \cdots \otimes 1)$, se llega a

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{0} K \longrightarrow \dots,$$

de donde $\mathrm{HH}^0(K) = K$ y $\mathrm{HH}^n(K) = 0$ para todo $n \geq 1$.

1.4.3. Homología y cohomología de Hochschild en grados bajos

Se presenta ahora cómo la homología y cohomología en algunos de los primeros grados recuperan información del álgebra.

- La homología de Hochschild en grado 0 es

  $$\mathrm{H}_0(A, M) = \frac{M}{\operatorname{im} \mathrm{d}_1} = \frac{M}{[A, M]},$$

  donde $[A, M]$ es el subespacio generado por $\{ma - am : m \in M, a \in A\}$. En particular, si $M = A$, se tiene

  $$\mathrm{HH}_0(A) = \frac{A}{[A, A]}.$$

  Luego, si A es conmutativa, $\mathrm{HH}_0(A) = A$.

  Por ejemplo, cuando $A = M_n(K)$, la homología de Hochschild $\mathrm{HH}_0(A)$ es el espacio generado por la matriz identidad.

- La cohomología de Hochschild en grado 0 es

  $$\mathrm{H}^0(A, M) = \ker \mathrm{d}^0 = \{m \in M : \mathrm{d}^0(m)(a) = am - ma = 0 \text{ para todo } a \in A\}.$$

  En particular, si $M = A$, se tiene que $\mathrm{HH}^0(A) = Z(A)$, el centro de A.

- La cohomología en grado 1 es $\mathrm{H}^1(A, M) = \ker \mathrm{d}^1 / \operatorname{im} \mathrm{d}^0$, donde

  $$\begin{aligned} \ker \mathrm{d}^1 &= \{f \in \operatorname{Hom}_K(A, M) : \mathrm{d}^1(f) = 0\} \\ &= \{f \in \operatorname{Hom}_K(A, M) : \mathrm{d}^1(f)(a \otimes b) = af(b) - f(ab) + af(b) = 0 \\ &\qquad \text{para todos } a, b \in A\}, \end{aligned}$$

  es decir, $\ker \mathrm{d}^1$ es el espacio de las derivaciones K-lineales de A en M, $\operatorname{Der}_K(A, M)$. Por otro lado,

  $$\operatorname{im} \mathrm{d}^0 = \{f \in \operatorname{Hom}_K(A, M) : \text{ existe } m \in M \text{ tal que } f = \mathrm{d}^0(m)\},$$

  el cual es el espacio de las K-derivaciones interiores de A en M, $\operatorname{InDer}_K(A, M)$. Así, $\mathrm{H}^1(A, M) = \operatorname{Der}_K(A, M) / \operatorname{InDer}_K(A, M)$.

1.4.4. Producto cup y corchete de Gerstenhaber

En esta sección se presentan las definiciones del producto cup y el corchete de Gerstenhaber en la cohomología de Hochschild.

Definición 1.4.6. Sean $f \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ y $g \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$. Se define su **producto cup** $f \smile g \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes (m+n)}, A)$ como

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n}) = (-1)^{mn} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) g(a_{m+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+n})$$

para todos $a_1, \ldots, a_{m+n} \in A$. Si $m = 0$, la fórmula se interpreta como

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f(1) g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n),$$

y para $n = 0$ es similar.

Observación 1.4.7. [Wit19, p. 14–15] El producto cup induce un producto asociativo bien definido en la cohomología, que se suele denotar igual:

$$\smile : \mathrm{HH}^m(A) \times \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^{m+n}(A).$$

Definición 1.4.8. Sean $f \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes m}, A)$ y $g \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes n}, A)$. Se define su **producto círculo** $f \circ g \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes (m+n-1)}, A)$ como

$$\begin{aligned}(f \circ g)&(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n-1)(i-1)} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n-1}) \otimes a_{i+n} \otimes \cdots \otimes a_{m+n-1}).\end{aligned}$$

Si $m = 0$, entonces $f \circ g = 0$ y si $n = 0$, interpretamos que $g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n-1}) = g(1)$. Se define además su **corchete de Gerstenhaber** $[f, g] \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes (m+n-1)}, A)$ como

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \circ f.$$

Observación 1.4.9. [Wit19, p. 17–18] El corchete de Gerstenhaber pasa a la cohomología, y se lo denota de la misma manera:

$$[-,-] : \mathrm{HH}^m(A) \times \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^{m+n-1}(A).$$

1.4.5. Cohomología de Hochschild relativa a una subálgebra

Sean E una subálgebra de A y M un A-bimódulo. Se considera el complejo de Hochschild E-relativo $(C^\bullet(A, E, M), \mathrm{d}^\bullet)$ dado por

$$C^0(A, E, M) = \{m \in M : em = me \text{ para todo } e \in E\},$$

y para todo $n > 0$, el K-espacio vectorial $C^n(A, E, M)$ formado por las transformaciones lineales $f : A^{\otimes n} \to M$ tales que

$$\begin{aligned} &f(ea_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ef(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n e) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)e \\ &f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i e \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes ea_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n), \end{aligned}$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$, $1 \leq i \leq n-1$ y $e \in E$, mientras que los diferenciales son

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}.\end{aligned}$$

Definición 1.4.10. El **n-ésimo grupo de cohomología de Hochschild E-relativa de A con coeficientes en M** es

$$\mathrm{H}^n(A,E,M) := \mathrm{H}^n(C^\bullet(A,E,M),\mathrm{d}^\bullet) = \frac{\ker \mathrm{d}^n}{\operatorname{im} \mathrm{d}^{n-1}}.$$

Observación 1.4.11. Si $E = K$, la cohomología de Hochschild K-relativa es la cohomología de Hochschild usual.

Proposición 1.4.12. [GS86, p. 57] La cohomología de Hochschild E-relativa es isomorfa a la cohomología del subcomplejo $C_N^\bullet(A,E,M)$ de $C^\bullet(A,E,M)$, donde $C_N^n(A,E,M)$ es el conjunto de los $f \in C^n(A,E,M)$ tales que $f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si algún a_i pertenece a E.

Definición 1.4.13. Una K-álgebra A se dice **separable** si es proyectiva como A^e-módulo.

Teorema 1.4.14. [GS86, Theorem 1.2] Si E es una subálgebra separable de A, entonces los morfismos inducidos por la inclusión

$$H^\bullet(A,E,M) \to H^\bullet(A,M)$$

son isomorfismos.

A partir de ahora, E será una subálgebra separable de A y cuando se nombre la resolución bar de un cociente A de un álgebra de caminos, se hará referencia a la resolución $(A^{\otimes_E n+2}, b'_n)_{n\geq 0}$, donde $A^{\otimes_E n} = A \otimes_E \cdots \otimes_E A$ y $b'_n : A^{\otimes_E n+2} \to A^{\otimes_E n+1}$ es el morfismo de A^e-módulos definido por

$$b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

1.4.6. La resolución de Bardzell

Ahora se describe una resolución proyectiva minimal construída por Bardzell en [Bar97] para álgebras monomiales de dimensión finita. Para ver más detalles sobre la minimalidad de esta, consultar [Wit19].

Además de construir esta resolución en [Bar97], Bardzell prueba la exactitud de la misma en algunos lugares, y no da todos los detalles del caso general. Sköldberg da una homotopía de contracción en [Skö08, Theorem 1].

Sean entonces $A = KQ/I$ un álgebra monomial de dimensión finita, y R un conjunto minimal generador de I que consiste de relaciones monomiales tal que ningún elemento de R tiene divisores propios en R.

Dado un camino α en Q, se consideran los vértices correspondientes a orígenes y términos de las flechas que componen a α, con $\leq$ el orden natural entre ellos inducido por el recorrido de α. Sea $\mathcal{R}(\alpha)$ el conjunto de caminos de R que son subcaminos de α. Dado $p_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$, se considera

$$L_2 = \{p \in \mathcal{R}(\alpha) : s(p_1) < s(p) < t(p_1)\}.$$

Si L_2 es no vacío, sea $p_2 \in L_2$ con origen mínimo respecto de todos los $p \in L_2$. Habiendo construido $p_1, \ldots, p_i$, se considera

$$L_{i+1} = \{p \in \mathcal{R}(\alpha) : t(p_{i-1}) \leq s(p) < t(p_i)\}.$$

Si L_{i+1} es no vacío, sea $p_{i+1} \in L_{i+1}$ con origen mínimo respecto de todos los $p \in L_{i+1}$.

Definición 1.4.15. Dado $n \geq 2$, la $(n-1)$-upla $(p_1, \dots, p_{n-1})$ construida anteriormente se llama una **n-concatenación**. El subcamino de α con origen $s(p_1)$ y término $t(p_{n-1})$ se denomina **soporte de la concatenación**. El conjunto de soportes de n-concatenaciones se denota Γ_n. Se definen además $\Gamma_0 = Q_0$ y $\Gamma_1 = Q_1$.

Observación 1.4.16. Por definición, $\Gamma_2 = R$.

Dada $\gamma \in \Gamma_n$, se define

$$\mathrm{Sub}(\gamma) = \{\gamma' \in \Gamma_{n-1} : \gamma' \text{ es un subcamino de } \gamma\}.$$

Sea $n \geq 2$. Dados $\gamma \in \Gamma_n$ y $\gamma' \in \mathrm{Sub}(\gamma)$, existen $L(\gamma'), R(\gamma') \in Q$ tales que

$$\gamma = L(\gamma')\gamma' R(\gamma')$$

y $L(\gamma'), R(\gamma')$ no tienen divisores en R [Bar97, Lemma 3.4]. El Lema [Bar97, Lemma 3.3] asegura que si $n \geq 1$ y $\gamma \in \Gamma_{2n+1}$, $\mathrm{Sub}(\gamma) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, con $s(\gamma_1) = s(\gamma)$ y $t(\gamma_2) = t(\gamma)$. Luego, se puede escribir a γ como

$$\gamma = L(\gamma_1)\gamma_1 = \gamma_2 R(\gamma_2), \tag{1.1}$$

donde $L(\gamma_1), L(\gamma_2)$ son caminos.

Definición 1.4.17. La **resolución proyectiva minimal de Bardzell** de A es

$$\cdots \to A|K\Gamma_n|A \xrightarrow{\delta_n} A|K\Gamma_{n-1}|A \to \cdots \to A|K\Gamma_1|A \xrightarrow{\delta_1} A|K\Gamma_0|A,$$

donde $|$ denota al producto tensorial sobre la subálgebra separable $E = KQ_0$ de A, y los diferenciales son

$$\begin{aligned} \delta_1(1|a|1) &= a|s(a)|1 - 1|t(a)|a, \\ \delta_{2n}(1|\gamma|1) &= \sum_{\gamma' \in \mathrm{Sub}(\gamma)} L(\gamma')|\gamma'|R(\gamma'), \\ \delta_{2n+1}(1|\gamma|1) &= L(\gamma_1)|\gamma_1|1 - 1|\gamma_2|R(\gamma_2), \end{aligned}$$

con γ_1 y γ_2 como en la ecuación (1.1). El morfismo de aumentación es $\delta_0(1|e|1) = e$.

Observación 1.4.18. La presentación de la resolución recién dada es equivalente a la dada por Bardzell, debido al isomorfismo de A-bimódulos

$$\bigoplus_{\gamma \in \Gamma_n} At(\gamma) \otimes s(\gamma)A \simeq A|K\Gamma_n|A,$$

donde $\beta t(\gamma) \otimes s(\gamma)\alpha \to \beta|\gamma|\alpha$, para todos $\alpha, \beta \in A$ y $\gamma \in \Gamma_n$.

Observación 1.4.19. Cuando A es un álgebra monomial, se puede usar esta resolución para calcular la homología y cohomología de Hochschild de A.

Por un lado, si se aplica el funtor $A \otimes_{A^e} -$ a la resolución, se usa el isomorfismo $A \otimes_{A^e} A|K\Gamma_n|A \simeq A \otimes_{E^e} K\Gamma_n$, donde $a_1 \otimes a_2|\gamma|a_3 \mapsto a_3 a_1 a_2 \otimes \gamma$, se obtiene el complejo de cadenas

$$\cdots \to A \otimes_{E^e} K\Gamma_n \xrightarrow{\mathrm{d}_n} A \otimes_{E^e} \Gamma_{n-1} \to \dots \xrightarrow{\mathrm{d}_1} A \otimes_{E^e} KQ_0 \longrightarrow 0,$$

con

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1(a \otimes \gamma) &= a\gamma \otimes s(\gamma) - \gamma a \otimes t(\gamma) \\ \mathrm{d}_{2n}(a \otimes \gamma) &= \sum_{\gamma' \in \mathrm{Sub}(\gamma)} R(\gamma')aL(\gamma') \otimes \gamma' \\ \mathrm{d}_{2n+1}(a \otimes \gamma) &= aL(\gamma_1) \otimes \gamma_1 - R(\gamma_2)a \otimes \gamma_2, \end{aligned}$$

donde γ_1 y γ_2 son como en la Ecuación (1.1).

Por otro lado, al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, A)$ a la resolución y usar el isomorfismo $\operatorname{Hom}_{A^e}(A|K\Gamma_n|A, A) \simeq \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, A)$, donde $f \mapsto (\gamma \mapsto f(1|\gamma|1))$, se obtiene el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_0, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^n} \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{n+1}, A) \longrightarrow \dots,$$

con

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^0(f)(a) &= af(s(a)) - f(t(a))a \\
\mathrm{d}^{2n+1}(f)(\gamma) &= \sum_{\gamma' \in \operatorname{Sub}(\gamma)} L(\gamma')f(\gamma')R(\gamma') \\
\mathrm{d}^{2n}(f)(\gamma) &= L(\gamma_1)f(\gamma_1) - f(\gamma_2)R(\gamma_2),
\end{aligned}$$

donde γ_1 y γ_2 son como en la Ecuación (1.1).

Si no se hace aclaración, el conjunto R que se considera es el conjunto generador dado del ideal.

Ejemplo 1.4.20. Si $A = KQ/I$, con Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[d, "e"'] & 3 \arrow[l, "b"'] \arrow[ddl, "c"] \\
& 4 \arrow[ul, "d"] \arrow[d, "f"'] & \\
& 5 &
\end{tikzcd}$$

e $I = (de, ad, eb, fe)$, se tiene que $R = \{de, ad, eb, fe\}$, $\Gamma_3 = \{ade, deb, feb\}$ y $\Gamma_4 = \{adeb\}$. El complejo de cadenas que resulta de aplicar el funtor $A \otimes_{A^e} -$ y continuar como en la Observación 1.4.19 es

$$0 \longrightarrow A \otimes_{E^e} K\Gamma_3 \xrightarrow{\mathrm{d}_3} A \otimes_{E^e} KR \xrightarrow{\mathrm{d}_2} A \otimes_{E^e} KQ_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} A \otimes_{E^e} KQ_0 \longrightarrow 0.$$

Un cálculo muestra que

$$\dim_K \operatorname{HH}_n(A) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

y que $\{e_i \otimes e_i : 1 \leq i \leq 5\}$ es una base de $\operatorname{HH}_0(A)$.

Por otra parte, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, A)$ y siguiendo los pasos de la Observación 1.4.19, se obtiene el complejo de cocadenas

$$0 \to \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_0, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, A) \to 0 \to \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_3, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^3} \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_4, A) \to 0.$$

En el medio hay un cero ya que toda $f \in \operatorname{Hom}_{E^e}(KR, A)$, al ser morfismo de E^e-módulos, debe mandar los elementos de R a combinaciones lineales de caminos paralelos a ellos. Por inspección, y usando que los elementos de R son cero en A, se concluye $f = 0$.

Un cálculo muestra que en este caso,

$$\dim_K \operatorname{HH}^n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y que $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3 + e_4\|e_4 + e_5\|e_5 + e_6\|e_6\}$ es una base de $\mathrm{HH}^0(A)$. Además, $\{e\|e, f\|f\}$ es una base de $\mathrm{HH}^1(A)$ y $\{feb\|c\}$ es una base de $\mathrm{HH}^3(A)$. Se está usando la notación $\alpha\|\beta$ para denotar al único morfismo de E^e-módulos que envía α a β, y todo otro elemento de la base del dominio como K-espacio vectorial a cero.

Tanto en este ejemplo como en todo el presente trabajo se omitirá, de ahora en adelante, la notación de clase de equivalencia de los elementos.

Ejemplo 1.4.21. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I = (ba, cb, ac)$. En este caso, $R = \{ba, cb, ac\}$ y para cada $n \geq 3$,

$$\Gamma_n = \{\underbrace{acb\ldots}_{n}, \underbrace{bac\ldots}_{n}, \underbrace{cba\ldots}_{n}\} =: \{a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)}\}.$$

Tras aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ y usar la Observación 1.4.19, se obtiene el complejo de cocadenas en el cual

$$\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, A) = \begin{cases} \langle a^{(n)}\|e_2, b^{(n)}\|e_3, c^{(n)}\|e_1\rangle_K & \text{si } n \equiv 0(3) \\ \langle a^{(n)}\|a, b^{(n)}\|b, c^{(n)}\|c\rangle_K & \text{si } n \equiv 1(3) \\ 0 & \text{si } n \equiv 2(3), \end{cases}$$

donde $a^{(0)} := e_2$, $b^{(0)} := e_3$ y $c^{(0)} := e_1$. Los diferenciales son:

- Si $n \equiv 0(3)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{2n}(a^{(2n)}\|e_2) &= -a^{(2n+1)}\|a + b^{(2n+1)}\|b \\ \mathrm{d}^{2n}(b^{(2n)}\|e_3) &= -b^{(2n+1)}\|b + c^{(2n+1)}\|c \\ \mathrm{d}^{2n}(c^{(2n)}\|e_1) &= a^{(2n+1)}\|a - c^{(2n+1)}\|c, \end{aligned}$$

  por lo que una base de $\ker \mathrm{d}^{2n}$ es

$$\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1\}$$

  y una base para $\mathrm{im}\, \mathrm{d}^{2n}$ es

$$\{a^{(2n+1)}\|a - b^{(2n+1)}\|b, b^{(2n+1)}\|b - c^{(2n+1)}\|c\}.$$

  Por otra parte, como $\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n-1}, A) = 0$, entonces $\mathrm{d}^{2n-1} = 0$.

- Si $n \equiv 1(3)$, como $\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n}, A) = 0$, son $\mathrm{d}^{2n} = 0$ y $\mathrm{d}^{2n-1} = 0$. En particular, una base para $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$ es

$$\{a^{(2n-1)}\|a, b^{(2n-1)}\|b, c^{(2n-1)}\|c\}.$$

- Si $n \equiv 2(3)$, como $\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n+1}, A) = 0$, entonces $\mathrm{d}^{2n} = 0$, de donde una base de $\ker \mathrm{d}^{2n}$ es

$$\{a^{(2n)}\|a, b^{(2n)}\|b, c^{(2n)}\|c\}.$$

  Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{2n-1}(a^{(2n-1)}\|e_2) &= a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b \\ \mathrm{d}^{2n-1}(b^{(2n-1)}\|e_3) &= b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c \\ \mathrm{d}^{2n-1}(c^{(2n-1)}\|e_1) &= a^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c, \end{aligned}$$

de donde, si $\operatorname{char}(K) = 2$, con $\operatorname{char}(K)$ la característica del cuerpo K, una base de $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$ es

$$\{a^{(2n-1)}\|e_2 + b^{(2n-1)}\|e_3 + c^{(2n-1)}\|e_1\},$$

y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n-1}$ es

$$\{a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b, b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c\}.$$

Si $\operatorname{char}(K) \neq 2$, entonces $\ker \mathrm{d}^{2n-1} = 0$ y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n-1}$ es

$$\{a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b, b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c, a^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c\}.$$

Luego, si $\operatorname{char}(K) = 2$, tenemos que

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0(3) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1(3) \\ 1 & \text{si } n \equiv 2(3) \end{cases}$$

y

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n-1}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0(3) \\ 1 & \text{si } n \equiv 1(3) \\ 1 & \text{si } n \equiv 2(3). \end{cases}$$

Se pueden tomar las bases

- $\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1\}$ de $\mathrm{HH}^{2n}(A)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n)}\|a\}$ de $\mathrm{HH}^{2n}(A)$ si $n \equiv 2(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|a\}$ de $\mathrm{HH}^{2n-1}(A)$ si $n \equiv 1(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|e_2 + b^{(2n-1)}\|e_3 + c^{(2n-1)}\|e_1\}$ de $\mathrm{HH}^{2n-1}(A)$ si $n \equiv 2(3)$.

Si en cambio $\operatorname{char}(K) \neq 2$, entonces tenemos

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0(3) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1(3) \\ 0 & \text{si } n \equiv 2(3) \end{cases}$$

y

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n-1}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0(3) \\ 1 & \text{si } n \equiv 1(3) \\ 0 & \text{si } n \equiv 2(3). \end{cases}$$

Se pueden tomar las bases

- $\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1\}$ de $\mathrm{HH}^{2n}(A)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|a\}$ de $\mathrm{HH}^{2n-1}(A)$ si $n \equiv 1(3)$.

El objetivo del siguiente ejemplo es mostrar una resolución de un álgebra dada por una presentación no monomial.

Ejemplo 1.4.22. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "e"'] & 5 \\ & & & 4 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

por el ideal $((bac)^2, feb - db)$. Gracias a [CS15, p. 33–42], la siguiente es una resolución de A:

$$\cdots \longrightarrow A|K(bac)^n \oplus Kfe(bac)^{n-1}|A \longrightarrow \cdots \longrightarrow A|K(bac)^3 \oplus Kfe(bac)^2|A \xrightarrow{\delta_3}$$
$$\xrightarrow{\delta_3} A|KR|A \xrightarrow{\delta_2} A|KQ_1|A \xrightarrow{\delta_1} A|KQ_0|A \longrightarrow 0,$$

donde $R = \{(bac)^2, feb - db\}$ y los diferenciales son

$$\begin{aligned}
&\delta_1(1|a|1) = a|s(a)|1 - 1|t(a)|a\\
&\delta_2(1|(bac)^2|1) = bacba|c|1 + bacb|a|c + bac|b|ac + ba|c|bac + b|a|cbac + 1|b|acbac\\
&\delta_2(1|feb - db|1) = fe|b|1 + f|e|b + 1|f|eb - d|b|1 - 1|d|b\\
&\delta_3(1|(bac)^3|1) = bac|(bac)^2|1 - 1|(bac)^2|bac\\
&\delta_3(1|fe(bac)^2|1) = fe|(bac)^2|1 - d|(bac)^2|1 - 1|(feb - db)|acbac,
\end{aligned}$$

y para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\delta_{2n}(1|(bac)^{2n}|1) = bac|(bac)^{2n-1}|1 + 1|(bac)^{2n-1}|bac\\
&\delta_{2n}(1|fe(bac)^{2n-1}|1) = 1|fe(bac)^{2n-2}|bac + (-1)^n(fe|(bac)^{2n-1}|1 - d|(bac)^{2n-1}|1)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\delta_{2n+1}(1|(bac)^{2n+1}|1) = bac|(bac)^{2n}|1 - 1|(bac)^{2n}|bac\\
&\delta_{2n+1}(1|fe(bac)^{2n}|1) = 1|fe(bac)^{2n-1}|bac + (-1)^{n+1}(fe|(bac)^{2n}|1 - d|(bac)^{2n}|1).
\end{aligned}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ y los isomorfismos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A|K\Gamma|A, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma, A)\\
\varphi &\longmapsto (\gamma \mapsto \varphi(1|\gamma|1),
\end{aligned}$$

se obtiene el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_0, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_1, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{Hom}_{E^e}(KR, A) \xrightarrow{\mathrm{d}^2}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{d}^2} \mathrm{Hom}_{E^e}(K(bac)^3 \oplus Kfe(bac)^2, A) \longrightarrow \ldots,$$

con diferenciales

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^0(\varphi)(a) = a\varphi(s(a)) - \varphi(t(a))a\\
&\mathrm{d}^1(\varphi)((bac)^2) = bacba\varphi(c) + bacb\varphi(a)c + bac\varphi(b)ac + ba\varphi(c)bac + b\varphi(a)cbac + \varphi(b)acbac\\
&\mathrm{d}^1(\varphi)(feb - db) = fe\varphi(b) + f\varphi(e)b + \varphi(f)eb - d\varphi(b) - \varphi(d)b\\
&\mathrm{d}^2(\varphi)((bac)^3) = bac\varphi((bac)^2) - \varphi((bac)^2)bac\\
&\mathrm{d}^2(\varphi)(fe(bac)^2) = fe\varphi((bac)^2) - d\varphi((bac)^2) - \varphi(feb - db)acbac,
\end{aligned}$$

y para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n-1}(\varphi)((bac)^{2n}) &= bac\varphi((bac)^{2n-1}) + \varphi((bac)^{2n-1})bac \\
\mathrm{d}^{2n-1}(\varphi)(fe(bac)^{2n-1}) &= \varphi(fe(bac)^{2n-2})bac + (-1)^n(fe\varphi((bac)^{2n-1}) - d\varphi((bac)^{2n-1})),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n}(\varphi)((bac)^{2n+1}) &= bac\varphi((bac)^{2n}) - \varphi((bac)^{2n})bac \\
\mathrm{d}^{2n}(\varphi)(fe(bac)^{2n}) &= \varphi(fe(bac)^{2n-1})bac + (-1)^{n+1}(fe\varphi((bac)^{2n}) - d\varphi((bac)^{2n})).
\end{aligned}$$

Se consideran las siguientes bases de los espacios del complejo de cocadenas:

- $\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_0, A) = \langle e_1\|e_1, e_2\|e_2, e_3\|e_3, e_4\|e_4, e_5\|e_5, e_1\|cba, e_1\|(cba)^2, e_2\|acb,$
  $e_2\|(acb)^2, e_3\|bac\rangle_K,$
- $\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_1, A) = \langle a\|a, b\|b, c\|c, d\|d, e\|e, f\|f, a\|acba, a\|a(cba)^2, b\|bacb,$
  $c\|cbac, d\|fe, d\|febac, e\|ebac\rangle_K,$
- $\mathrm{Hom}_{E^e}(KR, A) = \langle (bac)^2\|e_3, (bac)^2\|bac, (feb-db)\|feb, (feb-db)\|febacb\rangle_K,$
- $\mathrm{Hom}_{E^e}(K(bac)^n \oplus Kfe(bac)^{n-1}, A) = \langle (bac)^n\|e_3, (bac)^n\|bac, fe(bac)^{n-1}\|fe,$
  $fe(bac)^{n-1}\|febac, fe(bac)^{n-1}\|d\rangle_K,$

para cada $n \geq 3$. Con estos elementos fijos, se calculan los diferenciales en ellos:

- Para d^0, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a - c\|c \\
\mathrm{d}^0(e_1\|cba) &= a\|acba - c\|cbac \\
\mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= b\|b - a\|a \\
\mathrm{d}^0(e_1\|(cba)^2) &= a\|a(cba)^2 \\
\mathrm{d}^0(e_3\|e_3) &= c\|c + d\|d + e\|e - b\|b \\
\mathrm{d}^0(e_2\|acb) &= b\|bacb - a\|acba \\
\mathrm{d}^0(e_4\|e_4) &= f\|f - e\|e \\
\mathrm{d}^0(e_2\|(acb)^2) &= -a\|a(cba)^2 \\
\mathrm{d}^0(e_5\|e_5) &= -d\|d - f\|f \\
\mathrm{d}^0(e_3\|bac) &= c\|cbac + d\|febac + e\|ebac - b\|bacb,
\end{aligned}$$

  de donde una base para $\ker \mathrm{d}^0$ es

$$\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3 + e_4\|e_4 + e_5\|e_5, e_1\|(cba)^2 - e_2\|(acb)^2\}$$

  y una base para $\mathrm{im}\,\mathrm{d}^0$ es

$$B = \{a\|a - c\|c, b\|b - a\|a, f\|f - e\|e, d\|d + f\|f, a\|acba - c\|cbac, b\|bacb - a\|acba,$$
$$d\|febac + e\|ebac, a\|a(cba)^2\}.$$

- Para d^1, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(e\|e) = \mathrm{d}^1(f\|f) &= (feb - db)\|feb \\
\mathrm{d}^1(d\|d) = \mathrm{d}^1(d\|fe) &= -(feb - db)\|feb \\
\mathrm{d}^1(e\|ebac) &= (feb - db)\|febacb \\
\mathrm{d}^1(d\|febac) &= -(feb - db)\|febacb,
\end{aligned}$$

y en los otros elementos vale cero, por lo que una base para $\ker \mathrm{d}^1$ es

$$B \cup \{a\|a, a\|acba, d\|d - d\|fe\},$$

y una base para $\operatorname{im} \mathrm{d}^0$ es

$$\{(feb - db)\|feb, (feb - db)\|febacb\}.$$

- En el caso de d^2, vale que $\mathrm{d}^2((bac)^2\|e_3) = fe(bac)^2\|fe - fe(bac)^2\|d$, y evaluado en los demás elementos es cero. Por lo tanto, una base de $\ker \mathrm{d}^2$ es

  $$\{(bac)^2\|bac, (feb - db)\|feb, (feb - db)\|febacb\},$$

  y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^2$ es $\{fe(bac)^2\|fe - fe(bac)^2\|d\}$.

- Si $n \geq 1$, se tiene

  $$\begin{aligned}
  &\mathrm{d}^{4n}((bac)^{4n}\|e_3) = fe(bac)^{4n}\|fe - fe(bac)^{4n}\|d\\
  &\mathrm{d}^{4n}((bac)^{4n}\|bac) = \mathrm{d}^{4n}(fe(bac)^{4n-1}\|febac) = 0\\
  &\mathrm{d}^{4n}(fe(bac)^{4n-1}\|fe) = \mathrm{d}^{4n}(fe(bac)^{4n-1}\|d) = fe(bac)^{4n}\|febac,
  \end{aligned}$$

  por lo que una base para $\ker \mathrm{d}^{4n}$ es

  $$\{(bac)^{4n}\|bac, fe(bac)^{4n-1}\|febac, fe(bac)^{4n-1}\|fe - fe(bac)^{4n-1}\|d\}$$

  y una base para $\operatorname{im} \mathrm{d}^{4n}$ es

  $$\{fe(bac)^{4n}\|fe - fe(bac)^{4n}\|d, fe(bac)^{4n}\|febac\}.$$

- Si $n \geq 1$, tenemos que

  $$\begin{aligned}
  &\mathrm{d}^{4n+1}((bac)^{4n+1}\|e_3) = -fe(bac)^{4n+1}\|fe + fe(bac)^{4n+1}\|d\\
  &\mathrm{d}^{4n+1}((bac)^{4n+1}\|bac) = \mathrm{d}^{4n+1}(fe(bac)^{4n}\|febac) = 0\\
  &\mathrm{d}^{4n+1}(fe(bac)^{4n}\|fe) = \mathrm{d}^{4n+1}(fe(bac)^{4n}\|d) = fe(bac)^{4n+1}\|febac.
  \end{aligned}$$

  Luego, una base de $\ker \mathrm{d}^{4n+1}$ es

  $$\{(bac)^{4n+1}\|bac, fe(bac)^{4n}\|febac, fe(bac)^{4n}\|fe - fe(bac)^{4n}\|d\}$$

  y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{4n+1}$ es

  $$\{fe(bac)^{4n+1}\|fe - fe(bac)^{4n+1}\|d, fe(bac)^{4n+1}\|febac\}.$$

- Si $n \geq 1$,

  $$\begin{aligned}
  &\mathrm{d}^{4n+2}((bac)^{4n+2}\|e_3) = 2(bac)^{4n+3}\|bac - fe(bac)^{4n+2}\|fe + fe(bac)^{4n+2}\|d\\
  &\mathrm{d}^{4n+2}((bac)^{4n+2}\|bac) = \mathrm{d}^{4n+2}(fe(bac)^{4n+1}\|febac) = 0\\
  &\mathrm{d}^{4n+2}(fe(bac)^{4n+1}\|fe) = \mathrm{d}^{4n+2}(fe(bac)^{4n+1}\|d) = fe(bac)^{4n+2}\|febac,
  \end{aligned}$$

  por lo que una base de $\ker \mathrm{d}^{4n+2}$ es

  $$\{(bac)^{4n+2}\|bac, fe(bac)^{4n+1}\|febac, fe(bac)^{4n+1}\|fe - fe(bac)^{4n+1}\|d\}$$

  y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{4n+2}$ es

  $$\{2(bac)^{4n+3}\|bac - fe(bac)^{4n+2}\|fe + fe(bac)^{4n+2}\|d, fe(bac)^{4n+2}\|febac\}.$$

- Si $n \geq 0$,

$$\mathrm{d}^{4n+3}((bac)^{4n+3}\|e_3) = 2(bac)^{4n+4}\|bac + fe(bac)^{4n+3}\|fe - fe(bac)^{4n+3}\mathrm{d}$$
$$\mathrm{d}^{4n+3}((bac)^{4n+3}\|bac) = \mathrm{d}^{4n+3}(fe(bac)^{4n+2}\|febac) = 0$$
$$\mathrm{d}^{4n+3}(fe(bac)^{4n+2}\|fe) = \mathrm{d}^{4n+3}(fe(bac)^{4n+2}\|d) = fe(bac)^{4n+3}\|febac.$$

  Por lo tanto, una base de $\ker \mathrm{d}^{4n+3}$ es

$$\{(bac)^{4n+3}\|bac, fe(bac)^{4n+2}\|febac, fe(bac)^{4n+2}\|fe - fe(bac)^{4n+2}\|d\}$$

  y una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{4n+3}$ es

$$\{2(bac)^{4n+4}\|bac + fe(bac)^{4n+3}\|fe - fe(bac)^{4n+3}\mathrm{d}, fe(bac)^{4n+3}\|febac\}.$$

Notoriamente, la cohomología no depende de la característica de K. Con esto,

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 3 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ 2 & \text{si } n = 3 \\ 1 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

y se pueden elegir las siguientes bases:

- $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3 + e_4\|e_4 + e_5\|e_5, e_1\|(cba)^2 - e_2\|(acb)^2\}$ para $\mathrm{HH}^0(A)$,
- $\{a\|a, a\|acba, d\|d - d\|fe\}$ para $\mathrm{HH}^1(A)$,
- $\{(bac)^2\|bac\}$ para $\mathrm{HH}^2(A)$,
- $\{(bac)^3\|bac, fe(bac)^2\|febac\}$ para $\mathrm{HH}^3(A)$,
- $\{(bac)^n\|bac\}$ para $\mathrm{HH}^n(A)$, para cualquier $n \geq 4$.

1.5. Deformaciones de álgebras

En esta sección se desarrolla la teoría de deformaciones de álgebras, la cual resulta útil para estimar la cohomología de Hochschild de ciertas álgebras.

Para interpretar la cohomología en grados 2 y 3, se desarrollan ahora algunos conceptos. Si t es una indeterminada, $A[[t]]$ es un álgebra con el producto de Cauchy:

$$\left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right)\left(\sum_{j\geq 0} b_j t^j\right) = \sum_{k\geq 0}\sum_{i+j=k} a_i b_j t^k.$$

Esta álgebra es un $K[[t]]$-módulo vía la identificación de K con la subálgebra $K\cdot 1$ de A. Es de interés estudiar nuevas estructuras de álgebra en este $K[[t]]$-módulo, de manera tal que el cociente por el ideal generado por t es isomorfo a A.

Definición 1.5.1. Una **deformación** $(A_t, *)$ **de** A **sobre** $K[[t]]$ es una estructura multiplicativa asociativa y $K[[t]]$-bilineal en el $K[[t]]$-módulo $A[[t]]$ tal que, módulo el ideal generado por t, su multiplicación se corresponde con la de A. De manera análoga, se definen las deformaciones de A sobre $K[t]$ o sobre $K[t]/(t^n)$.

Dichas multiplicaciones están determinadas por una multiplicación entre elementos de A que toman valores en $A[[t]]$ y su extensión a $A[[t]]$ es vía el producto de Cauchy. Si $*$ es una deformación de A sobre $K[[t]]$, dados $a, b \in A$, se puede escribir

$$a * b = ab + \mu_1(a \otimes b)t + \mu_2(a \otimes b)t^2 + \dots,$$

donde ab es el producto en A, y $\mu_i : A \otimes A \to A$ son transformaciones lineales. A veces se denota $\mu_0(a \otimes b) = ab$ y la deformación $(A_t, *)$ como (A_t, μ_t), donde

$$\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \dots,$$

como función de $A \otimes A$ en A_t. Cuando sea necesario se extiende μ_t como función sobre $A[[t]] \otimes_{K[[t]]} A[[t]]$, completado para que expresiones como la siguiente tengan sentido:

$$\left(\sum_{i \geq 0} a_i t^i\right) \otimes_{K[[t]]} \left(\sum_{j \geq 0} b_j t^j\right) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i+j=k} (a_i \otimes b_j) t^k.$$

En este caso,

$$\mu_t\left(\sum_{k \geq 0} c_k t^k\right) := \sum_{k \geq 0} \sum_{i+j=k} \mu_i(c_j) t^k,$$

donde $c_k \in A \otimes A$ para todo $k \geq 0$.

Por la asociatividad del producto, vale que $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in A$. Desarrollando estos productos,

$$\begin{aligned}(a * b) * c = abc + (\mu_1(ab \otimes c) + \mu_1(a \otimes b)c)t \\ + (\mu_2(ab \otimes c) + \mu_1(\mu_1(a \otimes b) \otimes c) + \mu_2(a \otimes b)c)t^2 + \dots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}a * (b * c) = abc + (\mu_1(a \otimes bc) + a\mu_1(b \otimes c))t \\ + (\mu_2(a \otimes bc) + \mu_1(a \otimes \mu_1(b \otimes c)) + a\mu_2(b \otimes c))t^2 + \dots\end{aligned}$$

por lo que la condición $(a * b) * c - a * (b * c) = 0$ para todos $a, b, c \in A$ se puede escribir como

$$\sum_{i+j=k} \mu_i(\mu_j(a \otimes b) \otimes c) - \mu_i(a \otimes \mu_j(b \otimes c)) = 0$$

para todos $a, b, c \in A$ y $k \geq 0$. Despejando los términos $(i, j) = (s, 0)$ e $(i, j) = (0, s)$, queda

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} \mu_i \circ \mu_j = \mathrm{d}^2(\mu_k)$$

para todo $k \geq 0$, donde d^2 es el diferencial del complejo de cocadenas de Hochschild. Para $k = 1$, esta ecuación dice que μ_1 es un 2-cociclo de Hochschild. Más en general, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.5.2. Sea (A_t, μ_t) una deformación de A sobre $K[[t]]$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ con $\mu_i = 0$ para todo $1 \leq i < n$. Entonces μ_n es un 2-cociclo de Hochschild.

Demostración. Tomando la ecuación de antes con $k = n$, queda

$$\mathrm{d}^2(\mu_n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} \mu_i \circ \mu_j = 0,$$

pues al ser en la suma $i, j \leq n - 1$, todos los sumandos son nulos. ∎

Definición 1.5.3. Una **deformación infinitesimal** de A es una transformación lineal $\mu_1 : A \otimes A \to A$ tal que $\mathrm{d}^2(\mu_1) = 0$, es decir, un 2-cociclo de Hochschild. La deformación infinitesimal μ_1 se dice **integrable** si existe una deformación (A_t, μ_t) de A sobre $K[[t]]$ para la cual μ_1 es la primera función de multiplicación.

Con la misma prueba de antes se ve que una deformación de A sobre $K[t]/(t^2)$ da lugar a una deformación infinitesimal. Recíprocamente, una deformación infinitesimal μ_1 da lugar a una deformación de A sobre $K[t]/(t^2)$ vía

$$a * b = ab + \mu_1(a \otimes b)t$$

para $a, b \in A$, y extendida $K[t]/(t^2)$-bilinealmente a $A[t]/(t^2)$.

La ecuación correspondiente a $k = 2$ es $\mu_1 \circ \mu_1 = \mathrm{d}^2(\mu_2)$. Como $[\mu_1, \mu_1] = 2(\mu_1 \circ \mu_1)$, si $\mathrm{char}(K) \neq 2$, se puede reescribir como $\frac{1}{2}[\mu_1, \mu_1] = \mathrm{d}^2(\mu_2)$, mientras que en característica 2 se deja expresado con el producto círculo. Además, para toda deformación infinitesimal μ_1 vale que $\mathrm{d}^3(\mu_1 \circ \mu_1) = (\mu_1 \circ \mathrm{d}^2(\mu_1)) - (\mathrm{d}^2(\mu_1) \circ \mu_1) + (\mu_1 \smile \mu_1) - (\mu_1 \smile \mu_1) = 0$. En conclusión, para que una deformación infinitesimal sea integrable debe ocurrir que $\mu_1 \circ \mu_1$ sea cero en $\mathrm{HH}^3(A)$.

Definición 1.5.4. Dos deformaciones $(A_t, \mu_t), (A'_t, \mu'_t)$ de A sobre $K[[t]]$ son **equivalentes** si existe un morfismo $\phi_t : A_t \to A'_t$ de $K[[t]]$-módulos de la forma

$$\phi_t(a) = \phi_0(a) + \phi_1(a)t + \phi_2(a)t^2 + \dots,$$

para todo $a \in A$, con $\phi_i : A \to A$ transformación lineal para todo $i \geq 0$ tales que $\phi_0 = \mathrm{id}_A$ y sobre A_t se verifica que

$$\phi_t\left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right) = \sum_{k\geq 0} \sum_{i+j=k} \phi_i(a_j)t^k,$$

tal que

$$\phi_t \mu_t(a \otimes b) = \mu'_t(\phi_t(a) \otimes \phi_t(b))$$

para todos $a, b \in A$. Esta igualdad se extiende a A_t. Una deformación de A sobre $K[[t]]$ es **trivial** si es equivalente a $A[[t]]$.

Observación 1.5.5. Un morfismo ϕ_t en las condiciones de la Definición 1.5.4 es necesariamente un isomorfismo de álgebras.

Lema 1.5.6. Si (A_t, μ_t) y (A'_t, μ'_t) son deformaciones de A sobre $K[[t]]$ que son equivalentes vía una fución ϕ_t, entonces $\mu_1 - \mu'_1 = \mathrm{d}^1(\phi_1)$. En particular, si (A_t, μ_t) es trivial, entonces μ_1 es un 2-coborde.

Demostración. Si ϕ_t es como en la Definición 1.5.4, entonces

$$ab + (\phi_1(ab) + \mu_1(a \otimes b))t + \dots = ab + (\mu'_1(a \otimes b) + \phi_1(a)b + a\phi_1(b))t + \dots$$

para todos $a, b \in A$. Igualando los coeficientes de t resulta

$$\begin{aligned}
\phi_1(ab) + \mu_1(a \otimes b) &= \mu'_1(a \otimes b) + \phi_1(a)b + a\phi_1(b) \\
\mu_1(a \otimes b) - \mu'_1(a \otimes b) &= a\phi_1(b) - \phi_1(ab) + \phi_1(a)b \\
\mu_1(a \otimes b) - \mu'_1(a \otimes b) &= \mathrm{d}^1(\phi_1)(a \otimes b),
\end{aligned}$$

como se quería ver. Si (A_t, μ_t) es trivial, entonces es equivalente a (A'_t, μ'_t), con $\mu'_0 = \mu_0$ y $\mu'_i = 0$ para todo $i > 0$. Luego, $\mu_1 = \mathrm{d}^1(\phi_1)$. ■

Lema 1.5.7. [Wit19, Lemma 5.2.6] Sea (A_t, μ_t) una deformación no trivial de A sobre $K[[t]]$. Entonces existen $n \geq 2$ y una deformación (A'_t, μ'_t) de A sobre $K[[t]]$ equivalente a (A_t, μ_t) tal que $\mu'_1 = \cdots = \mu'_{n-1} = 0$ y μ'_n es un 2-cociclo de Hochschild que no es un 2-coborde.

Definición 1.5.8. Un álgebra A se dice **rígida** si todas sus deformaciones son triviales.

Corolario 1.5.9. Si $\mathrm{HH}^2(A) = 0$, entonces A es rígida.

Ejemplo 1.5.10. Si A es un álgebra separable, entonces es rígida.

1.6. Extensiones de álgebras

En esta sección se presenta la noción de extensiones de álgebras, algunas propiedades y una definición equivalente que será utilizada en el resto de este trabajo.

Definición 1.6.1. Sean A una K-álgebra y M un A-bimódulo. Una **extensión de A por M** es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0,$$

en donde B es un álgebra, p es un morfismo de álgebras e i es una transformación lineal, tal que para todos $a \in A$ y $m \in M$,

$$i(am) = bi(m), \qquad i(ma) = i(m)b,$$

donde $b \in p^{-1}(a)$.

Definición 1.6.2. Dos extensiones de A por M se dicen **equivalentes** si existe un morfismo de álgebras $f : B \to B'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "p'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notar que gracias al Lema de los cinco, el morfismo f es un isomorfismo. Se denota por $\mathrm{Ext}(A, M)$ al conjunto de clases de equivalencia de extensiones de A por M.

Proposición 1.6.3. Sea M un A-bimódulo. Entonces $\mathrm{Ext}(A, M)$ está en biyección con $\mathrm{H}^2(A, M)$.

Demostración. La notación d^n se usará para referirse al n-ésimo diferencial del complejo de cocadenas de Hochschild.

Dada una extensión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$, sea $\gamma : A \to B$ una sección lineal de p. Así, $B \simeq A \oplus M$ como espacios vectoriales, $i(m) = (0, m)$ y $p(a, m) = a$. Bajo esta identificación, y por ser una extensión, el producto de B está dado por

$$(a, m)(a', m') = (aa', am' + ma' + \varphi(a, a')),$$

donde $\varphi : A \times A \to M$ es una función bilineal balanceada. Identificando a φ con su extensión lineal $\overline{\varphi} : A \otimes A \to M$, se ve que el producto es asociativo si y solo si φ es un 2-cociclo de Hochschild, es decir, satisface

$$a_1\varphi(a_2 \otimes a_3) + \varphi(a_1 \otimes a_2a_3) = \varphi(a_1a_2 \otimes a_3) + \varphi(a_1 \otimes a_2)a_3$$

para todos $a_1, a_2, a_3 \in A$. Notaremos dicha extensión como $A \ltimes_\varphi M$. De esta manera, se tiene una sobreyección $\ker \mathrm{d}^2 \to \mathrm{Ext}(A, M)$.

Consideremos dos extensiones equivalentes $A \ltimes_{\varphi_1} M$ y $A \ltimes_{\varphi_2} M$. Esto significa que existe un morfismo de álgebras $f : A \ltimes_{\varphi_1} M \to A \ltimes_{\varphi_2} M$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & A \ltimes_{\varphi_1} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] & A \ltimes_{\varphi_2} M \arrow[r, "p'"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Esta conmutatividad equivale a que exista $g : A \to M$ lineal tal que

$$f(a, m) = (a, m + g(a)).$$

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} f((a, m)(a', m')) &= (aa', am' + ma' + \varphi_1(a \otimes a') + g(aa')) \\ f(a, m)f(a', m') &= (aa', am' + ag(a') + ma' + g(a)a' + \varphi_2(a \otimes a')), \end{aligned}$$

y como estas expresiones deben ser iguales, se obtiene

$$\varphi_1(a \otimes a') + g(aa') = ag(a') + g(a)a' + \varphi_2(a \otimes a').$$

Finalmente, como $\mathrm{d}^1(g)(a \otimes a') = ag(a') - g(aa') + g(a)a'$, las extensiones son equivalentes si y solo si $\mathrm{d}^1(g)(a \otimes a') = \varphi_1(a \otimes a') - \varphi_2(a \otimes a')$, es decir, si y solo si φ_1 y φ_2 difieren en un 2-coborde. ■

Con la demostración de recién en mente, se define lo siguiente para resumir y fijar notación.

Definición 1.6.4. Sea A una K-álgebra, sea M un A-bimódulo y sea $\varphi : A \otimes A \to M$ un 2-cociclo de Hochschild en la resolución bar, es decir, un morfismo K-lineal tal que

$$a_1\varphi(a_2 \otimes a_3) + \varphi(a_1 \otimes a_2a_3) = \varphi(a_1a_2 \otimes a_3) + \varphi(a_1 \otimes a_2)a_3$$

para todos $a_1, a_2, a_3 \in A$. Se define la **extensión de A por M torcida por φ** como la K-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $A \oplus M$, y cuyo producto está dado por

$$(a, m)(a', m') = (aa', am' + ma' + \varphi(a \otimes a')).$$

Denotaremos a este álgebra como $A \ltimes_\varphi M$. En caso de tener un 2-cociclo φ en términos de otra resolución proyectiva $(X_k, \delta_k)_{k\geq 0}$ de M, se toma un morfismo de comparación $(f_k)_{k\geq 0}$ entre la resolución bar y $(X_k, \delta_k)_{k\geq 0}$, y se define la extensión de A por M torcida por φ como $A \ltimes_\varphi M := A \ltimes_{\varphi f_2} M$.

Observación 1.6.5. El tipo de isomorfismo de $A \ltimes_\varphi M$, donde $\varphi : A \otimes A \to M$ es un 2-cociclo de Hochschild, depende solo de la clase de cohomología de φ. Para esto, si $\psi \in \mathrm{Hom}_K(A, M)$, entonces $A \ltimes_\varphi M \simeq A \ltimes_{\varphi+\mathrm{d}^1(\psi)} M$ vía $(a, m) \mapsto (a, m - \psi(a))$, donde d^1 es el diferencial del complejo de cohomología. En particular, el tipo de isomorfismo de $A \ltimes_\varphi M$, con φ un 2-cociclo en términos de una resolución arbitraria, no depende del morfismo de comparación elegido. En efecto, si $(f_k)_{k\geq 0}$ y $(g_k)_{k\geq 0}$ son dos morfismos de comparación entre la resolución bar y $(X_k, \delta_k)_{k\geq 0}$, entonces son homotópicos, es decir, existe $(s_k)_{k\geq 0}$, con $s_k : A^{\otimes k+2} \to X_{k+1}$ una transformación lineal, tal que

$$f_k - g_k = s_{k-1}b'_k + \delta_{k+1}s_k$$

para todo $k \geq 0$ (donde $s_{-1} := 0$). En particular, $f_2 = g_2 + s_1 b'_2 + \delta_3 s_2$, y así

$$\varphi f_2 = \varphi g_2 + \varphi s_1 b'_2 + \varphi \delta_3 s_2 = \varphi g_2 + \varphi s_1 b'_2,$$

donde $\varphi\delta_3 = 0$ ya que φ es un 2-cociclo. Como $\varphi s_1 b'_2 = \mathrm{d}^1(\varphi s_1)$, entonces φf_2 y φg_2 están en la misma clase de cohomología.

El caso particular en el que $M = DA$ y $\varphi = 0$ es un caso de interés en sí mismo, por lo que se lo define aparte.

Definición 1.6.6. Sea A una K-álgebra. Se define su **extensión trivial**

$$TA := A \ltimes_0 DA,$$

es decir, la extensión de A por DA torcida por el 2-cociclo nulo.

Ejemplo 1.6.7. Sea B el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I = (aba, bab)$. Entonces, si A es el álgebra de caminos de

$$1 \xrightarrow{a} 2,$$

sabemos a partir de [FP02, Theorem 3.9] que $B \simeq TA$.

A continuación se desarrollan algunos ejemplos del cálculo de la cohomología de un álgebra a coeficientes en su dual. Estos serán aprovechados en el Capítulo 3.

Ejemplo 1.6.8. Consideremos el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

y definamos A como el álgebra de caminos del mismo dividido por el ideal (a^2). La resolución de Bardzell en este caso es

$$\cdots \longrightarrow A|Ka^n|A \longrightarrow \cdots \longrightarrow A|Ka^3|A \xrightarrow{\delta_3} A|Ka^2|A \xrightarrow{\delta_2} A|Ka|A \xrightarrow{\delta_1} A|Ke_1|A \longrightarrow 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_{2n-1}(1|a^{2n-1}|1) &= a|a^{2n-2}|1 - 1|a^{2n-2}|a \\ \delta_{2n}(1|a^{2n}|1) &= a|a^{2n-1}|1 + 1|a^{2n-1}|a \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$. Si se aplica el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, DA)$ y los isomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathrm{Hom}_{A^e}(A|Ka^n|A, DA) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(Ka^n, DA) \\ f &\longmapsto (a^n \to f(1|a^n|1)), \end{aligned}$$

se obtiene el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(Ke_1, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{Hom}_{E^e}(Ka, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{Hom}_{E^e}(Ka^2, DA) \longrightarrow \dots,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{2n+1}(f)(a^{2n+2}) &= af(a^{2n+1}) + f(a^{2n+1})a \\ \mathrm{d}^{2n}(f)(a^{2n+1}) &= af(a^{2n}) - f(a^{2n})a \end{aligned}$$

para cada $n \geq 0$.

Observando que $\mathrm{Hom}_{E^e}(Ka^n, DA) = \langle a^n \| e_1^*, a^n \| a^* \rangle_K$ para cada $n \geq 0$, donde $a^0 := e_1$ y $\{e_1^*, a^*\}$ es la base dual de $\{e_1, a\}$, se obtiene que $\mathrm{d}^{2n} = 0$ y que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{2n-1}(a^{2n-1} \| e_1^*) &= 0 \\ \mathrm{d}^{2n-1}(a^{2n-1} \| a^*) &= 2(a^{2n} \| e_1^*). \end{aligned}$$

Así, si $\mathrm{char}(K) = 2$, $\mathrm{d}^n = 0$ para todo $n \geq 0$, de donde $\mathrm{H}^n(A, DA) \simeq \mathrm{Hom}_{E^e}(Ka^n, DA)$ tiene dimensión 2 y $\{a^n \| e_1^*, a^n \| a^*\}$ es una base. Por otro lado, si $\mathrm{char}(K) \neq 2$,

$$\dim_K \mathrm{H}^n(A, DA) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Se pueden elegir las siguientes bases:

- $\{e_1 \| e_1^*, e_1 \| a^*\}$ como base de $\mathrm{H}^0(A, DA)$.
- $\{a^{2n-1} \| e_1^*\}$ como base de $\mathrm{H}^{2n-1}(A, DA)$ para cada $n \geq 1$.
- $\{a^{2n} \| a^*\}$ como base de $\mathrm{H}^{2n}(A, DA)$ para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 1.6.9. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

por el ideal (ab, ba). La resolución de Bardzell de A es

$$\cdots \longrightarrow A|K\Gamma_n|A \longrightarrow \cdots \longrightarrow A|KR|A \xrightarrow{\delta_2} A|KQ_1|A \xrightarrow{\delta_1} A|KQ_0|A \longrightarrow 0,$$

donde $\Gamma_{2n} = \{(ab)^n, (ba)^n\}$, $\Gamma_{2n-1} = \{(ab)^{n-1}a, (ba)^{n-1}b\}$ para cada $n \geq 2$ y

$$\begin{aligned} \delta_{2n}(1|(ab)^n|1) &= a|(ba)^{n-1}b|1 + 1|(ab)^{n-1}a|b, \\ \delta_{2n}(1|(ba)^n|1) &= b|(ab)^{n-1}a|1 + 1|(ba)^{n-1}b|a, \\ \delta_{2n-1}(1|(ab)^{n-1}a|1) &= a|(ba)^{n-1}|1 - 1|(ab)^{n-1}|a, \\ \delta_{2n-1}(1|(ba)^{n-1}b|1) &= b|(ab)^{n-1}|1 - 1|(ba)^{n-1}|b. \end{aligned}$$

Se aplica el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, DA)$ y los isomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathrm{Hom}_{A^e}(A|K\Gamma_n|A, DA) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, DA) \\ f &\longmapsto (x \to f(1|x|1)) \end{aligned}$$

para obtener el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_0, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_1, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \mathrm{Hom}_{E^e}(KR, DA) \longrightarrow \dots,$$

con

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{2n}(f)((ab)^n a) &= af((ba)^n) - f((ab)^n)a, \\ \mathrm{d}^{2n}(f)((ba)^n b) &= bf((ab)^n) - f((ba)^n)b, \\ \mathrm{d}^{2n-1}(f)((ab)^n) &= af((ba)^{n-1}b) + f((ab)^{n-1}a)b, \\ \mathrm{d}^{2n-1}(f)((ba)^n) &= bf((ab)^{n-1}a) + f((ba)^{n-1}b)a. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n}, DA) &= \langle (ab)^n \| e_2^*, (ba)^n \| e_1^* \rangle_K \\ \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n-1}, DA) &= \langle (ab)^{n-1} a \| b^*, (ba)^{n-1} b \| a^* \rangle_K,\end{aligned}$$

donde $\alpha^0 := e_{s(\alpha)}$, se calcula el diferencial en estos elementos y se obtiene que $\mathrm{d}^{2n} = 0$ y

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{2n-1}((ab)^{n-1} a \| b^*) &= (ab)^n \| e_2^* + (ba)^n \| e_1^* \\ \mathrm{d}^{2n-1}((ba)^{n-1} b \| a^*) &= (ab)^n \| e_2^* + (ba)^n \| e_1^*,\end{aligned}$$

de donde

$$\dim_K \mathrm{H}^n(A, DA) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Se pueden elegir las siguientes bases:

- $\{e_1 \| e_1^*, e_2 \| e_2^*\}$ como base de $\mathrm{H}^0(A, DA)$.
- $\{(ab)^{n-1} a \| b^* - (ba)^{n-1} b \| a^*\}$ como base de $\mathrm{H}^{2n-1}(A, DA)$ para cada $n \geq 1$.
- $\{(ab)^n \| e_2^*\}$ como base de $\mathrm{H}^{2n}(A, DA)$ para cada $n \geq 1$.

Ejemplo 1.6.10. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I = (ba, cb, ac)$. Al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, DA)$ a la resolución de Bardzell y los isomorfismos

$$\begin{aligned}\varphi_n : \operatorname{Hom}_{A^e}(A | K\Gamma_n | A, DA) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_n, DA) \\ f &\longmapsto (x \to f(1|x|1)),\end{aligned}$$

donde $R = \{ba, cb, ac\}$, se obtiene el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_0, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \operatorname{Hom}_{E^e}(KR, DA) \longrightarrow \dots,$$

en el cual $\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, DA) = 0$ y $\operatorname{Hom}_{E^e}(KR, DA) = \langle ba \| c^*, cb \| a^*, ac \| b^* \rangle_K$. Además,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2(ba \| c^*) &= cba \| e_1^* - bac \| e_3^* \\ \mathrm{d}^2(cb \| a^*) &= acb \| e_2^* - cba \| e_1^* \\ \mathrm{d}^2(ac \| b^*) &= bac \| e_3^* - acb \| e_2^*,\end{aligned}$$

por lo que $\{ba \| c^* + cb \| a^* + ac \| b^*\}$ es una base de $\ker \mathrm{d}^2$. Luego, $\dim_K \mathrm{H}^2(A, DA) = 1$ y una base de este espacio es $\{ba \| c^* + cb \| a^* + ac \| b^*\}$.

Si en cambio se toma el ideal $I' = (cba, acb, bac)$, procediendo de la misma manera, el complejo que se obtiene es

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_0, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, DA) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \operatorname{Hom}_{E^e}(KR, DA) \longrightarrow \dots,$$

donde $R = \{cba, acb, bac\}$ y

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, DA) &= \langle a \| (cb)^*, b \| (ac)^*, c \| (ba)^* \rangle_K \\ \operatorname{Hom}_{E^e}(KR, DA) &= \langle acb \| e_2^*, bac \| e_3^*, cba \| e_1^* \rangle_K.\end{aligned}$$

Vale que $\mathrm{d}^2 = 0$, y además

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(a\|(cb)^*) &= acb\|e_2^* + bac\|e_3^* + cba\|e_1^* \\
\mathrm{d}^1(b\|(ac)^*) &= acb\|e_2^* + bac\|e_3^* + cba\|e_1^* \\
\mathrm{d}^1(c\|(ba)^*) &= acb\|e_2^* + bac\|e_3^* + cba\|e_1^*.
\end{aligned}$$

Luego, $\dim_K \mathrm{H}^2(A, DA) = 2$ y $\{acb\|e_2^*, bac\|e_3^*\}$ es una base.

La siguiente observación y el lema nos permitirán identificar a las extensiones torcidas como deformaciones de TA.

Observación 1.6.11. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes 2}, DA)$ es un 2-cociclo de A a coeficientes en DA, se lo puede extender a $\phi \in \mathrm{Hom}_K((TA)^{\otimes 2}, TA)$, usando que

$$(TA)^{\otimes 2} = A^{\otimes 2} \oplus (A \otimes DA) \oplus (DA \otimes A) \oplus (DA)^{\otimes 2}$$

y extendiendo por cero. Explícitamente,

$$\phi((a+f) \otimes (b+g)) = \varphi(a \otimes b).$$

Lema 1.6.12. Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes 2}, DA)$ un 2-cociclo de A a coeficientes en DA y ϕ su extensión a $\mathrm{Hom}_K((TA)^{\otimes 2}, TA)$. Entonces ϕ es un 2-cociclo de TA.

Demostración. Sean $a_1, a_2, a_3 \in A$ y $f_1, f_2, f_3 \in DA$. Entonces

$$(a_1+f_1)\phi((a_2+f_2)\otimes(a_3+f_3))+\phi((a_1+f_1)\otimes(a_2+f_2)(a_3+f_3)) = a_1\varphi(a_2\otimes a_3)+\varphi(a_1\otimes a_2a_3),$$

y como φ es un 2-cociclo, esto es igual a

$$\varphi(a_1a_2\otimes a_3)+\varphi(a_1\otimes a_2)a_3 = \phi((a_1+f_1)(a_2+f_2)\otimes(a_3+f_3))+\phi((a_1+f_1)\otimes(a_2+f_2))(a_3+f_3),$$

como se quería ver. ■

Capítulo 2

Resultados en cohomología

En este capítulo se desarrollan algunos resultados que son útiles para conocer la cohomología de Hochschild de las extensiones triviales. En la Sección 2.1 se estudia la clase de las álgebras escindidas, y se recuerdan algunos resultados para el caso particular de la extensión trivial de un álgebra. En la Sección 2.2 se presenta un resultado que involucra la variedad de estructuras de álgebras asociativas, que es de utilidad para estimar la dimensión de la cohomología de Hochschild en algunos casos.

2.1. Cohomología de Hochschild de álgebras escindidas

En esta sección se desarrolla parte de la teoría ya conocida para una familia de álgebras llamadas escindidas. Se presentan resultados que involucran la extensión trivial de un álgebra.

Definición 2.1.1. Un **álgebra escindida** es una K-álgebra Λ con una subálgebra A y un ideal bilátero M tales que $\Lambda = A \oplus M$, con un morfismo de A-bimódulos $\mu : M \otimes_A M \to M$, $\mu(m \otimes m') = m \cdot m'$ tal que $(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$ para todos $m_1, m_2, m_3 \in M$. El producto de $A \oplus M$ está dado por

$$(a + m)(a' + m') = aa' + am' + ma' + m \cdot m'.$$

Ejemplo 2.1.2. La extensión trivial TA de un álgebra A es un álgebra escindida con $M = DA$ y donde el morfismo $\mu : M \otimes_A M \to M$ es nulo, lo que se denota $M^2 = 0$.

Dada un álgebra escindida Λ y $p, q \geq 0$ sea $M^{p,q}$ el subespacio vectorial de $\Lambda^{\otimes(p+q)}$ generado por los vectores de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}$ tales que exactamente p de los x_i pertenecen a M y los demás pertenecen a A, se tiene

$$\Lambda^{\otimes n} = \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}.$$

Sea X un Λ-bimódulo. El complejo de cocadenas de Hochschild a coeficientes en X induce un complejo doble $\mathcal{C}(X)$ cuya componente en el lugar (p, q) es $\mathrm{Hom}_K(M^{p,q}, X)$ y cuyo diferencial es el de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{\otimes(p+q)}, X)$ restringido a $\mathrm{Hom}_K(M^{p,q}, X)$. La imagen de este diferencial está contenida en

$$\mathrm{Hom}_K(M^{p+1,q}, X) \oplus \mathrm{Hom}_K(M^{p,q+1}, X).$$

Teorema 2.1.3. [CMRS03, Theorem 3.1] Sean $\Lambda = A \oplus M$ un álgebra escindida tal que $M^2 = 0$ y X un Λ-bimódulo tal que $MX = XM = 0$. Los diferenciales horizontales del complejo doble son nulos. En particular,

$$\mathrm{H}^n(\Lambda, X) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^q(\mathcal{C}^p(X)),$$

donde $\mathcal{C}^p(X)$ es la p-ésima columna del complejo doble.

Fijada un álgebra escindida $\Lambda = A \oplus M$, se considera la siguiente sucesión exacta corta de Λ-bimódulos:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda/M \longrightarrow 0.$$

Observar que Λ/M con las acciones de M a ambos lados nulas es isomorfo a A como Λ-bimódulo. Esta induce una sucesión exacta larga en la cohomología de Hochschild

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Lambda, M) \longrightarrow \mathrm{HH}^0(\Lambda) &\xrightarrow{\pi^0} \mathrm{H}^0(\Lambda, A) \xrightarrow{\delta^0} \\ \mathrm{H}^1(\Lambda, M) \longrightarrow \mathrm{HH}^1(\Lambda) &\xrightarrow{\pi^1} \mathrm{H}^1(\Lambda, A) \xrightarrow{\delta^1} \\ \dots \end{aligned}$$

En [CMRS03, Example 3.5] los autores muestran que $\delta^0 = 0$ en el caso $\Lambda = TA$. Entonces, en este caso, se tiene la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\mathrm{H}^1(TA, DA) \longrightarrow \mathrm{HH}^1(TA) \xrightarrow{\pi^1} \mathrm{H}^1(TA, A) \xrightarrow{\delta^1} \\ &\mathrm{H}^2(TA, DA) \longrightarrow \mathrm{HH}^2(TA) \xrightarrow{\pi^2} \mathrm{H}^2(TA, A) \xrightarrow{\delta^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.1.3 para $X = TA/DA \simeq A$ o $X = DA$, se tiene que

$$\mathrm{H}^n(TA, X) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^q(\mathcal{C}^p(X)).$$

Más aún, $\delta^n = \bigoplus_{p+q=n} \delta^{p,q}$, con

$$\delta^{p,q} : \mathrm{H}^q(\mathcal{C}^p(A)) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathcal{C}^{p+1}(DA)).$$

Teorema 2.1.4. [CMRS03, Theorem 5.5] Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces

$$\mathrm{HH}^1(TA) \simeq A^A \oplus \mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) \oplus \mathrm{HH}^1(A) \oplus \mathrm{Alt}_A(DA).$$

Aquí, A^A es el K-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A)$ y $\mathrm{Alt}_A(DA)$ denota a

$$\{\alpha : DA \otimes_A DA \to K \text{ lineal} : \alpha(f \otimes g) = -\alpha(g \otimes f) \text{ para todos } f, g \in DA\}.$$

En particular, como el centro $Z(A) \simeq A^A$ de un álgebra A es no nulo, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1.5. [CMRS03, Corollary 5.6] Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces $\mathrm{HH}^1(TA) \neq 0$.

Proposición 2.1.6. [CMRS03, Proposition 5.9] Para todo $q \geq 1$, vale que $\delta^{0,q} = 0$.

Usando esta proposición, los autores deducen el siguiente teorema:

Teorema 2.1.7. [CMRS03, Theorem 5.8] Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Entonces $\mathrm{HH}^n(A) \oplus \mathrm{HH}_n(A)$ es un sumando directo de $\mathrm{HH}^n(TA)$.

2.2. La cohomología de una deformación de un álgebra

En esta sección se presenta un resultado que involucra la variedad de estructuras de álgebras asociativas unitarias, para luego relacionar la dimensión de la cohomología de un álgebra con la de una deformación de esta.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathrm{Bil}(n) = \{f : K^n \times K^n \to K^n : \ f \text{ es bilineal}\}$, dotado con la topología inducida por la topología Zariski de K^{n^3}. Se considera el subconjunto $\mathrm{Alg}(n)$ de $\mathrm{Bil}(n)$ de productos asociativos unitarios de K^n.

Lema 2.2.1. [dlP10, p. 24] Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ vale que la función $\delta^i : \mathrm{Alg}(n) \to \mathbb{N}$ definida como $\delta^i(A) = \dim_K \mathrm{HH}^i(A)$ es semicontinua superiormente.

Observación 2.2.2. Del lema se deduce que si A es un álgebra y A_t es una deformación de A, se tiene que

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(A) \geq \dim_K \mathrm{HH}^n(A_t)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea A un álgebra. En vista del Lema 1.6.12, toda extensión torcida $A \ltimes_\varphi DA$ de A se corresponde con una deformación de TA. Luego,

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(TA) \geq \dim_K \mathrm{HH}^n(A \ltimes_\varphi DA).$$

Capítulo 3

Una clase de álgebras y algunos ejemplos

En este capítulo se desarrolla el marco teórico del tipo de álgebras que vamos a considerar en el presente trabajo. En la Sección 3.1 se define una clase de álgebras con la cual trabajaremos en ejemplos posteriores. En la Sección 3.2 se estudian algunos ejemplos de extensiones triviales y torcidas de la clase de álgebras definida en la sección anterior, y sus grupos de cohomología. En la Sección 3.3 se estudia en detalle la graduación de un álgebra monomial, y algunos resultados que se enuncian en términos de la misma. Se concluye con un ejemplo para el cual se hace uso de estos resultados.

3.1. Álgebras autoinyectivas y álgebras de Nakayama

En esta sección se definen las álgebras autoinyectivas y las álgebras de Nakayama. Se presenta un resultado que describe a las álgebras autoinyectivas de Nakayama que son básicas e indescomponibles como cocientes de álgebras de caminos.

Definición 3.1.1. Un álgebra A se dice **autoinyectiva** si A es un A-módulo inyectivo.

Observación 3.1.2. Cuando consideramos álgebras de dimensión finita, son noetherianas como módulos sobre sí mismas. Utilizando esto, se prueba que un álgebra A de dimensión finita es autoinyectiva si y solo si todo A-módulo proyectivo es inyectivo.

Definición 3.1.3. Sea M un A-módulo finitamente generado. Una **serie de composición de** M es una cadena ascendente de submódulos de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$$

tales que M_{i+1}/M_i es simple para todo $0 \leq i \leq m-1$.

Observación 3.1.4. [AF92, Proposition 11.1] Bajo la hipótesis de la definición, siempre existe una serie de composición de M.

Teorema 3.1.5. [AF92, Theorem 11.3] (Jordan-Hölder) Sea M un A-módulo y sean

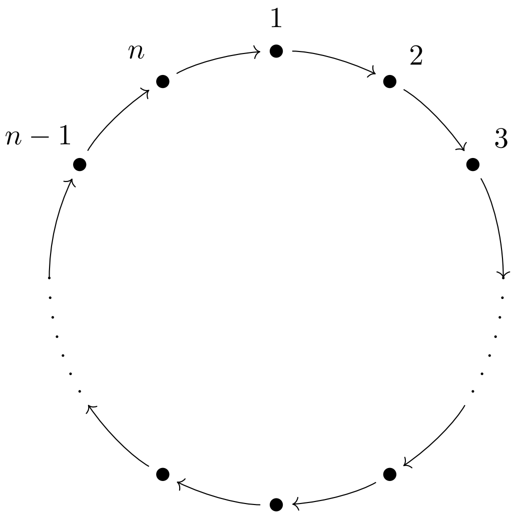
$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$$
$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M$$

dos series de composición. Es $m = n$ y existe $\sigma \in S_m$ tal que $M_{i+1}/M_i \simeq N_{\sigma(i+1)}/N_{\sigma(i)}$ para todo $0 \leq i \leq m-1$.

Definición 3.1.6. Un A-módulo M se dice **uniserial** si tiene una única serie de composición.

Definición 3.1.7. Un álgebra A se dice **serial a izquierda** si todo A-módulo a izquierda proyectivo e indescomponible es uniserial. Se definen las álgebras seriales a derecha de manera similar. Un álgebra se dice **de Nakayama** si es serial a izquierda y a derecha.

Proposición 3.1.8. [ASS06, Chapter V, Proposition 3.8] Sea A un álgebra básica e indescomponible que no es isomorfa a K. Entonces A es un álgebra autoinyectiva de Nakayama si y solo si $A \simeq KQ/I$, con Q el carcaj



para algún $n \geq 1$, con R el ideal de flechas de KQ e $I = R^k$ para cierto $k \geq 2$.

Definición 3.1.9. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq 2$, se define una (n, m)**-corona** como KQ/R^m, donde Q es el carcaj de vértices $\{1, \ldots, n\}$ y flechas $\{a_1, \ldots, a_n\}$ con $(s(a_i), t(a_i)) = (i, i+1)$ para todo $1 \leq i < n$ y $(s(a_n), t(a_n)) = (n, 1)$.

3.2. Ejemplos de coronas y sus extensiones

En esta sección se exponen algunos ejemplos de coronas junto con los cálculos de su extensión trivial y su extensión torcida por ciertos 2-cociclos. Además calculan algunos de sus grupos de cohomología de Hochschild.

Ejemplo 3.2.1. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

por el ideal (a^2). El conjunto $\{e_1, a, e_1^*, a^*\}$ es una base de la extensión trivial TA. Calculando los productos entre estos elementos, se ve que e_1 es la unidad del álgebra, que $aa^* = a^*a = e_1^*$, por lo que no se necesita agregar este elemento como generador del álgebra, y que $a^2 = (a^*)^2 = 0$. Luego, $TA \simeq K[a, \overline{a}]/(a^2, \overline{a}^2)$ vía $a \mapsto a$, $a^* \mapsto \overline{a}$, y puede presentarse a TA como el cociente del álgebra de caminos de

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] \arrow[loop right, "\overline{a}"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $(a^2, \overline{a}^2, a\overline{a} - \overline{a}a)$. En el complejo de cohomología, vemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_0, TA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|a, e_1\|\overline{a}, e_1\|a\overline{a}\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ_1, TA) &= \langle a\|e_1, a\|a, a\|\overline{a}, a\|a\overline{a}, \overline{a}\|e_1, \overline{a}\|a, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|a\overline{a}\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(KR, TA) &= \langle a^2\|e_1, a^2\|a, a^2\|\overline{a}, a^2\|a\overline{a}, \overline{a}^2\|e_1, \overline{a}^2\|a, \overline{a}^2\|\overline{a}, \overline{a}^2\|a\overline{a},\\
&\qquad (a\overline{a} - \overline{a}a)\|e_1, (a\overline{a} - \overline{a}a)\|a, (a\overline{a} - \overline{a}a)\|\overline{a}, (a\overline{a} - \overline{a}a)\|a\overline{a}\rangle_K.
\end{aligned}$$

Además, $\mathrm{d}^0 = 0$ y d^1 cumple que $\mathrm{d}^1(a\|a) = \mathrm{d}^1(a\|a\overline{a}) = \mathrm{d}^1(\overline{a}\|\overline{a}) = \mathrm{d}^1(\overline{a}\|a\overline{a}) = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(a\|e_1) &= 2a^2\|a,\\
\mathrm{d}^1(a\|\overline{a}) &= 2a^2\|a\overline{a},\\
\mathrm{d}^1(\overline{a}\|e_1) &= 2\overline{a}^2\|\overline{a},\\
\mathrm{d}^1(\overline{a}\|a) &= 2\overline{a}^2\|a\overline{a}.
\end{aligned}$$

Así, concluímos que $\dim_K \mathrm{HH}^0(TA) = 4$ con base $\{e_1\|e_1, e_1\|a, e_1\|\overline{a}, e_1\|a\overline{a}\}$. Además, si $\operatorname{char}(K) = 2$, vemos que $\mathrm{d}^1 = 0$, por lo que $\dim_K \mathrm{HH}^1(TA) = 8$ con base

$$\{a\|e_1, a\|a, a\|\overline{a}, a\|a\overline{a}, \overline{a}\|e_1, \overline{a}\|a, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|a\overline{a}\}.$$

Si en cambio $\operatorname{char}(K) \neq 2$, la dimensión de $\mathrm{HH}^1(TA)$ es 4 con base $\{a\|a, a\|a\overline{a}, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|a\overline{a}\}$. Notar que esto es coherente con la descripción dada en [CMRS03, Theorem 5.5], pues

- $A^A = \langle 1, a\rangle_K$,
- $\operatorname{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) = \begin{cases} \langle (e_1 \otimes a)^*, (a \otimes a)^*\rangle_K & \text{si } \operatorname{char}(K) = 2,\\ \langle (e_1 \otimes a)^*\rangle_K & \text{si } \operatorname{char}(K) \neq 2,\end{cases}$
- $\mathrm{HH}^1(A) = \begin{cases} \langle a\|e_1, a\|a\rangle_K & \text{si } \operatorname{char}(K) = 2,\\ \langle a\|a\rangle_K & \text{si } \operatorname{char}(K) \neq 2,\end{cases}$
- $\operatorname{Alt}_A(DA) = \begin{cases} \langle e_1^* \otimes a^*\|1, a^* \otimes a^*\|1\rangle_K & \text{si } \operatorname{char}(K) = 2,\\ 0 & \text{si } \operatorname{char}(K) \neq 2.\end{cases}$

Por otro lado podemos estudiar la extensión de A por DA torcida por el 2-cociclo $a^2\|a^*$, el cual se obtuvo en el Ejemplo 1.6.8. Para esto, empezamos a construir un morfismo de comparación entre la resolución bar de A y la resolución de Bardzell de A:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{\otimes 4} \arrow[r, "b'_2"] \arrow[d, "f_2"] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "b'_1"] \arrow[d, "f_1"] & A^{\otimes 2} \arrow[r, "b'_0"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0\\
\dots \arrow[r] & A|Ka^2|A \arrow[r, "\delta_2"] & A|Ka|A \arrow[r, "\delta_1"] & A|KQ_0|A \arrow[r, "\delta_0"] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Existe un morfismo de comparación $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{aligned}
f_0(1 \otimes 1) &= 1|e_1|1,\\
f_1(1 \otimes e_1 \otimes 1) &= 0,\\
f_1(1 \otimes a \otimes 1) &= 1|a|1,\\
f_2(1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes 1) &= 0,\\
f_2(1 \otimes e_1 \otimes a \otimes 1) &= 0,\\
f_2(1 \otimes a \otimes e_1 \otimes 1) &= 0,\\
f_2(1 \otimes a \otimes a \otimes 1) &= 1|a^2|1,
\end{aligned}$$

por lo que el morfismo resultante $F : A^{\otimes 4} \to DA$ está dado por la extensión A^e-lineal de

$$\begin{aligned}
F(1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes 1) &= 0,\\
F(1 \otimes e_1 \otimes a \otimes 1) &= 0,\\
F(1 \otimes a \otimes e_1 \otimes 1) &= 0,\\
F(1 \otimes a \otimes a \otimes 1) &= a^*,
\end{aligned}$$

y así el 2-cociclo a considerar $\varphi : A^{\otimes 2} \to DA$ en la resolución bar es $\varphi = (a \otimes a)\|a^*$. Calculando los productos entre los elementos de la base $\{e_1, a, e_1^*, a^*\}$, se ve que e_1 es la unidad del álgebra, mientras que $a^2 = a^*$, $a^3 = e_1^*$ y $a^4 = 0$. Por lo tanto no hace falta incluir a e_1^* ni a a^* entre los generadores del álgebra y existe un isomorfismo $A \ltimes_\varphi DA \simeq K[a]/(a^4)$ tal que $e_1 \mapsto 1$ y $a \mapsto a$. Una presentación posible es como el cociente del carcaj $\tilde{Q}$ dado por

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

con $I = (a^4)$. En el complejo de cohomología vemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_0, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|a, e_1\|a^2, e_1\|a^3\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_1, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a\|e_1, a\|a, a\|a^2, a\|a^3\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{R}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a^4\|e_1, a^4\|a, a^4\|a^2, a^4\|a^3\rangle_K
\end{aligned}$$

y para cada $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a^{4n}\|e_1, a^{4n}\|a, a^{4n}\|a^2, a^{4n}\|a^3\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n-1}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a^{4n-3}\|e_1, a^{4n-3}\|a, a^{4n-3}\|a^2, a^{4n-3}\|a^3\rangle_K.
\end{aligned}$$

Haciendo las cuentas explícitas, se obtiene que $\mathrm{d}^{2n} = 0$ para todo $n \geq 0$, mientras que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^{2n-1}(a^{4n-3}\|e_1) = 4a^{4n}\|a^3,\\
&\mathrm{d}^{2n-1}(a^{4n-3}\|a) = \mathrm{d}^{2n-1}(a^{4n-3}\|a^2) = \mathrm{d}^{2n-1}(a^{4n-3}\|a^3) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. De esta forma, si $\operatorname{char}(K) = 2$, resulta $\mathrm{d}^n = 0$ para todo $n \geq 0$, de donde $\dim_K \mathrm{HH}^n(A \ltimes_\varphi DA) = 4$ para todo $n \geq 0$,

$$\{a^{4n}\|e_1, a^{4n}\|a, a^{4n}\|a^2, a^{4n}\|a^3\}$$

es una base de $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ y

$$\{a^{4n-3}\|e_1, a^{4n-3}\|a, a^{4n-3}\|a^2, a^{4n-3}\|a^3\}$$

es una base de $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$. Por otro lado, si $\operatorname{char}(K) \neq 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^{2n-1} &= \langle a^{4n-3}\|a, a^{4n-3}\|a^2, a^{4n-3}\|a^3\rangle_K,\\
\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n-1} &= \langle a^{4n}\|a^3\rangle_K,
\end{aligned}$$

por lo que $\dim_K \mathrm{HH}^n(A \ltimes_\varphi DA) = 3$ para todo $n \geq 0$,

$$\{a^{4n}\|e_1, a^{4n}\|a, a^{4n}\|a^2\}$$

es una base de $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ y

$$\{a^{4n-3}\|a, a^{4n-3}\|a^2, a^{4n-3}\|a^3\}$$

es una base de $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$.

Ejemplo 3.2.2. Sea $A = KQ/I$, donde Q es el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

e $I = (ab, ba)$. La extensión trivial de A tiene como base al siguiente conjunto

$$\{e_1, e_2, a, b, e_1^*, e_2^*, a^*, b^*\}.$$

Calculando los productos entre los elementos de esta base, se ve que $e_1 + e_2$, es la unidad del álgebra, que

$$\begin{aligned} aa^* = b^*b = e_2^*, \\ a^*a = bb^* = e_1^*, \end{aligned}$$

por lo que no hace falta agregar estos elementos como generadores del álgebra, y que los demás productos que no se deducen de estos son nulos. La extensión trivial TA es isomorfa al cociente del álgebra de caminos del carcaj Q' definido como

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right=60, "\overline{b}"'] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[l, bend right=60, "\overline{a}"'] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I' = (ab, ba, a\overline{a}a, \overline{a}a\overline{a}, \overline{a}\overline{b}, \overline{b}\overline{a}, \overline{a}a - b\overline{b}, a\overline{a} - \overline{b}b)$ vía

$$\begin{aligned} a &\mapsto a, & a^* &\mapsto \overline{a}, \\ b &\mapsto b, & b^* &\mapsto \overline{b}. \end{aligned}$$

En el complejo de cohomología vemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_0, TA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{a}a, e_2\|e_2, e_2\|a\overline{a}\rangle_K, \\ \mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_1, TA) &= \langle a\|a, a\|\overline{b}, b\|b, b\|\overline{a}, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|b, \overline{b}\|\overline{b}, \overline{b}\|a\rangle_K, \\ \mathrm{Hom}_{E^e}(KR', TA) &= \langle ab\|e_2, ab\|a\overline{a}, ba\|e_1, ba\|\overline{a}a, a\overline{a}a\|a, a\overline{a}a\|\overline{b}, \overline{a}a\overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}a\overline{a}\|b, \\ &\quad \overline{a}\overline{b}\|e_1, \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a, \overline{b}\overline{a}\|e_2, \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a}, (\overline{a}a - b\overline{b})\|e_1, \\ &\quad (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a, (a\overline{a} - \overline{b}b)\|e_2, (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}\rangle_K. \end{aligned}$$

Las imágenes de los elementos de $\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_0, TA)$ y de $\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ_1, TA)$ a través de los primeros dos diferenciales son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}, \\ \mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= -a\|a + b\|b + \overline{a}\|\overline{a} - \overline{b}\|\overline{b}, \\ \mathrm{d}^0(e_1\|\overline{a}a) &= \mathrm{d}^0(e_2\|a\overline{a}) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^1(a\|a) &= (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(a\|\overline{b}) &= ab\|a\overline{a} + ba\|\overline{a}a, \\ \mathrm{d}^1(b\|b) &= -(\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a - (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(b\|\overline{a}) &= ab\|a\overline{a} + ba\|\overline{a}a, \\ \mathrm{d}^1(\overline{a}\|\overline{a}) &= (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{a}\|b) &= \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a + \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{b}\|\overline{b}) &= -(\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a - (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{b}\|a) &= \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a + \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^0 &= \langle e_1\|e_1 + e_2\|e_2, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}\rangle_K,\\
\operatorname{im} \mathrm{d}^0 &= \langle a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}\rangle_K,\\
\ker \mathrm{d}^1 &= \langle a\|a + b\|b, a\|a - \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}, \overline{a}\|b - \overline{b}\|a\rangle_K,
\end{aligned}$$

de donde $\dim_K \mathrm{HH}^0(TA) = 3$ y $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}\}$ es una base. Notar que

$$a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b} = -(a\|a + b\|b) + 2(a\|a - \overline{a}\|\overline{a}) + (\overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}),$$

por lo que en característica distinta de 2 se puede eliminar el generador $a\|a - \overline{a}\|\overline{a}$. Luego, $\dim_K \mathrm{HH}^1(TA) = 4$, con base

$$\{a\|a + b\|b, a\|a - \overline{a}\|\overline{a}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}, \overline{a}\|b\| - \overline{b}\|a\}.$$

Esto es coherente con [CMRS03, Theorem 5.5], pues

- $A^A = \langle 1\rangle_K$,
- $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) = \langle (a \otimes b)^*\rangle_K$,
- $\mathrm{HH}^1(A) = \langle a\|a\rangle_K$,
- $\mathrm{Alt}_A(DA) = \langle (a^* \otimes b^*)\|1\rangle_K$.

Por otro lado, para estudiar la extensión de A por DA torcida por el 2-cociclo $ab\|e_2^*$, el cual se obtuvo en el Ejemplo 1.6.9, vamos a usar un morfismo de comparación:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A^{\otimes 4} \arrow[r, "b'_2"] \arrow[d, "f_2"] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "b'_1"] \arrow[d, "f_1"] & A^{\otimes 2} \arrow[r, "b'_0"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0\\
\ldots \arrow[r] & A|KR|A \arrow[r, "\delta_2"] & A|KQ_1|A \arrow[r, "\delta_1"] & A|KQ_0|A \arrow[r, "\delta_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Existe un morfismo de comparación $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre la resolución bar de A y la resolución de Bardzell de A tal que

$$\begin{aligned}
f_0(1 \otimes 1) &= 1|1|1,\\
f_1(1 \otimes \alpha \otimes 1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in Q_0,\\ 1|\alpha|1 & \text{si } \alpha \in Q_1,\end{cases}\\
f_2(1 \otimes \alpha \otimes \beta \otimes 1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in Q_0 \text{ o } \beta \in Q_0,\\ x|ab|y & \text{si } \alpha\beta = xaby \text{ en } Q,\\ x|ba|y & \text{si } \alpha\beta = xbay \text{ en } Q.\end{cases}
\end{aligned}$$

Así, el morfismo resultante $F : A^{\otimes 4} \to DA$ está dado por la extensión A^e-lineal de

$$F(1 \otimes \alpha \otimes \beta \otimes 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in Q_0 \text{ o } \beta \in Q_0,\\ e_2^* & \text{si } (\alpha, \beta) = (a, b).\end{cases}$$

y el 2-cociclo $\varphi : A^{\otimes 2} \to DA$ a considerar es $\varphi = (a \otimes b)\|e_2^*$. Los productos entre los elementos de la base $\{e_1, e_2, a, b, e_1^*, e_2^*, a^*, b^*\}$ son los mismos que en TA salvo por aquellos en los que el cociclo es no nulo, es decir, $ab = e_2^*$. Así, $(0, e_1^*)$ y $(0, e_2^*)$ pueden no ser incluidos en los generadores del álgebra, y $A \ltimes_\varphi DA \simeq K\tilde{Q}/\tilde{I}$, con $\tilde{Q}$ el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, bend right=60, "\overline{b}"'] & 2 \arrow[l, shift left, "b"] \arrow[l, bend right=60, "\overline{a}"']
\end{tikzcd}$$

e $\tilde{I} = (ba, a\overline{a}a, \overline{a}a\overline{a}, \overline{a}\overline{b}, \overline{b}\overline{a}, \overline{a}a - b\overline{b}, a\overline{a} - \overline{b}b, ab - a\overline{a})$, mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{ll} e_1 \mapsto e_1, & e_2 \mapsto e_2, \\ a \mapsto a, & a^* \mapsto \overline{a}, \\ b \mapsto b, & b^* \mapsto \overline{b}. \end{array}$$

En el complejo de cohomología vemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_0, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{a}a, e_2\|e_2, e_2\|a\overline{a}\rangle_K \\ \operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_1, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a\|a, a\|\overline{b}, b\|b, b\|\overline{a}, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}\|b, \overline{b}\|\overline{b}, \overline{b}\|a\rangle_K \\ \operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{R}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle ba\|e_1, ba\|\overline{a}a, a\overline{a}a\|a, a\overline{a}a\|\overline{b}, \overline{a}a\overline{a}\|\overline{a}, \overline{a}a\overline{a}\|b, \overline{a}\overline{b}\|e_1, \\ &\qquad \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a, \overline{b}\overline{a}\|e_2, \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a}, (\overline{a}a - b\overline{b})\|e_1, (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a, \\ &\qquad (a\overline{a} - \overline{b}b)\|e_2, (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, (ab - a\overline{a})\|e_2, (ab - a\overline{a})\|a\overline{a}\rangle_K. \end{aligned}$$

Las imágenes de los elementos de $\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_0, A \ltimes_\varphi DA)$ y de $\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_1, A \ltimes_\varphi DA)$ a través de los primeros dos diferenciales son, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}, \\ \mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= -a\|a + b\|b + \overline{a}\|\overline{a} - \overline{b}\|\overline{b}, \\ \mathrm{d}^0(e_1\|\overline{a}a) &= \mathrm{d}^0(e_2\|a\overline{a}) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^1(a\|a) &= (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(a\|\overline{b}) &= \mathrm{d}^1(b\|\overline{a}) = ba\|\overline{a}a + (ab - a\overline{a})\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(b\|b) &= -(\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a - (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a} + (ab - a\overline{a})\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{a}\|\overline{a}) &= (\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a} - (ab - a\overline{a})\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{a}\|b) &= \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a + \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a} + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a} - (ab - a\overline{a})\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{b}\|\overline{b}) &= -(\overline{a}a - b\overline{b})\|\overline{a}a - (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, \\ \mathrm{d}^1(\overline{b}\|a) &= \overline{a}\overline{b}\|\overline{a}a + \overline{b}\overline{a}\|a\overline{a} - (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \ker \mathrm{d}^0 &= \langle e_1\|e_1 + e_2\|e_2, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}\rangle_K, \\ \operatorname{im} \mathrm{d}^0 &= \langle a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}\rangle_K. \end{aligned}$$

Además, como $\mathrm{d}^1(a\|a + b\|b + \overline{a}\|b - \overline{b}\|a) = 2(a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}$, entonces, si $\mathrm{char}(K) = 2$,

$$\ker \mathrm{d}^1 = \langle a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}, b\|b + \overline{a}\|\overline{a}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}, a\|a + b\|b + \overline{a}\|b - \overline{b}\|a\rangle_K$$

mientras que si $\mathrm{char}(K) \neq 2$, vemos que

$$\ker \mathrm{d}^1 = \langle a\|a - b\|b - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{b}\|\overline{b}, b\|b + \overline{a}\|\overline{a}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}\rangle_K.$$

Así, concluímos que $\dim_K \mathrm{HH}^0(A \ltimes_\varphi DA) = 3$ con base

$$\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}\},$$

y si $\mathrm{char}(K) = 2$, la dimensión de $\mathrm{HH}^1(A \ltimes_\varphi DA)$ es 3 y

$$\{b\|b + \overline{a}\|\overline{a}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}, a\|a + b\|b + \overline{a}\|b - \overline{b}\|a\}$$

es una base, mientras que si $\mathrm{char}(K) \neq 2$, entonces $\dim_K \mathrm{HH}^1(A \ltimes_\varphi DA) = 2$ y

$$\{b\|b + \overline{a}\|\overline{a}, a\|\overline{b} - b\|\overline{a}\}$$

es una base. Los resultados son coherentes con la Observación 2.2.2.

Ejemplo 3.2.3. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj Q

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I = (ba, cb, ac)$. Gracias a [FP02, Theorem 3.9], sabemos que la extensión trivial TA es isomorfa a KQ'/I', donde Q' es el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] \arrow[dl, bend right, "\overline{a}"'] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, bend right, "\overline{c}"'] & & 3 \arrow[ll, "c"] \arrow[ul, bend right, "\overline{b}"'] \end{tikzcd}$$

e I' es el ideal
$$I' = (ba, cb, ac, \overline{a}\overline{b}, \overline{b}\overline{c}, \overline{c}\overline{a}, \overline{a}a - c\overline{c}, a\overline{a} - \overline{b}b, b\overline{b} - \overline{c}c).$$

En el complejo de cohomología tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ'_0, TA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{a}a, e_2\|e_2, e_2\|a\overline{a}, e_3\|e_3, e_3\|b\overline{b}\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(KQ'_1, TA) &= \langle a\|a, b\|b, c\|c, \overline{a}\|\overline{a}, \overline{b}\|\overline{b}, \overline{c}\|\overline{c}\rangle_K,\\
\operatorname{Hom}_{E^e}(KR', TA) &= \langle ba\|\overline{c}, cb\|\overline{a}, ac\|\overline{b}, \overline{a}\overline{b}\|c, \overline{b}\overline{c}\|a, \overline{c}\overline{a}\|b,\\
&\qquad (\overline{a}a - c\overline{c})\|e_1, (\overline{a}a - c\overline{c})\|\overline{a}a, (a\overline{a} - \overline{b}b)\|e_2,\\
&\qquad (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a}, (b\overline{b} - \overline{c}c)\|e_3, (b\overline{b} - \overline{c}c)\|b\overline{b}\rangle_K,
\end{aligned}$$

y los diferenciales satisfacen

$$\begin{aligned}
d^0(e_1\|e_1) &= a\|a - c\|c - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{c}\|\overline{c},\\
d^0(e_2\|e_2) &= -a\|a + b\|b + \overline{a}\|\overline{a} - \overline{b}\|\overline{b},\\
d^0(e_3\|e_3) &= -b\|b + c\|c + \overline{b}\|\overline{b} - \overline{c}\|\overline{c},\\
d^0(e_1\|\overline{a}a) &= d^0(e_2\|a\overline{a}) = d^0(e_3\|b\overline{b}) = 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d^1(a\|a) &= (\overline{a}a - c\overline{c})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a},\\
d^1(b\|b) &= -(a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a} + (b\overline{b} - \overline{c}c)\|b\overline{b},\\
d^1(c\|c) &= -(\overline{a}a - c\overline{c})\|\overline{a}a - (b\overline{b} - \overline{c}c)\|b\overline{b},\\
d^1(\overline{a}\|\overline{a}) &= (\overline{a}a - c\overline{c})\|\overline{a}a + (a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a},\\
d^1(\overline{b}\|\overline{b}) &= -(a\overline{a} - \overline{b}b)\|a\overline{a} + (b\overline{b} - \overline{c}c)\|b\overline{b},\\
d^1(\overline{c}\|\overline{c}) &= -(\overline{a}a - c\overline{c})\|\overline{a}a - (b\overline{b} - \overline{c}c)\|b\overline{b}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\ker d^0 &= \langle e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}, e_3\|b\overline{b}\rangle_K,\\
\operatorname{im} d^0 &= \langle a\|a - c\|c - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{c}\|\overline{c}, -a\|a + b\|b + \overline{a}\|\overline{a} - \overline{b}\|\overline{b}\rangle_K,\\
\ker d^1 &= \langle a\|a - c\|c - \overline{a}\|\overline{a} + \overline{c}\|\overline{c}, -a\|a + b\|b + \overline{a}\|\overline{a} - \overline{b}\|\overline{b}, a\|a + b\|b + c\|c, a\|a - \overline{a}\|\overline{a}\rangle_K.
\end{aligned}$$

Así, vemos que $\dim_K \mathrm{HH}^0(TA) = 4$ y $\dim_K \mathrm{HH}^1(TA) = 2$. Se pueden tomar las siguientes bases:

- $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{a}a, e_2\|a\overline{a}, e_3\|b\overline{b}\}$ para $\mathrm{HH}^0(TA)$,
- $\{a\|a + b\|b + c\|c, a\|a - \overline{a}\|\overline{a}\}$ para $\mathrm{HH}^1(TA)$.

Esto es coherente con la descripción de [CMRS03, Theorem 5.5], pues

- $A^A = \langle 1\rangle_K$,
- $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) = 0$,
- $\mathrm{HH}^1(A) = \langle a\|a\rangle_K$,
- $\mathrm{Alt}_A(DA) = 0$.

Para estudiar la extensión de A por DA torcida por el 2-cociclo $ba\|c^* + cb\|a^* + ac\|b^*$, el cual se calculó en el Ejemplo 1.6.10, queremos construir un morfismo de comparación entre la resolución bar de A y la resolución de Bardzell de A:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{\otimes 4} \arrow[r, "b_2'"] \arrow[d, "f_2"] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "b_1'"] \arrow[d, "f_1"] & A^{\otimes 2} \arrow[r, "b_0'"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & A|KR|A \arrow[r, "\delta_2"] & A|KQ_1|A \arrow[r, "\delta_1"] & A|KQ_0|A \arrow[r, "\delta_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sabemos que existe un morfismo de comparación $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre estas resoluciones tal que

$$\begin{aligned}
&f_0(1\otimes 1) = 1|1|1,\\
&f_1(1\otimes\alpha\otimes 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\in Q_0,\\ 1|\alpha|1 & \text{si } \alpha\in Q_1,\end{cases}\\
&f_2(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\in Q_0 \text{ o } \beta\in Q_0,\\ 1|\alpha\beta|1 & \text{si } \alpha,\beta\in Q_1.\end{cases}
\end{aligned}$$

El morfismo $F : A^{\otimes 4} \to DA$ que se obtiene queda determinado por la extensión A^e-lineal de

$$F(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = \begin{cases} c^* & \text{si } (\alpha,\beta) = (b,a),\\ a^* & \text{si } (\alpha,\beta) = (c,b),\\ b^* & \text{si } (\alpha,\beta) = (a,c),\\ 0 & \text{si no,}\end{cases}$$

por lo que el 2-cociclo resultante $\varphi : A^{\otimes 2} \to DA$ es $\varphi = (b\otimes a)\|c^* + (c\otimes b)\|a^* + (a\otimes c)\|b^*$. Los productos entre los elementos de la base $\{e_1, e_2, e_3, a, b, c, e_1^*, e_2^*, e_3^*, a^*, b^*, c^*\}$ son los mismos que en TA salvo por aquellos en los que el cociclo es no nulo:

$$\begin{aligned}
ac &= b^*,\\
ba &= c^*,\\
cb &= a^*.
\end{aligned}$$

Luego, no es necesario incluir ninguno de los elementos del conjunto $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, a^*, b^*, c^*\}$ entre los generadores, y además $A \ltimes_\varphi DA \simeq K\tilde{Q}/\tilde{I}$, donde $\tilde{Q}$ es el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "b"] & \\
1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"]
\end{tikzcd}$$

e $\tilde{I} = (acba, bacb, cbac)$, con el isomorfismo $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ y $c \mapsto c$. En el complejo de cohomología se tienen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_0, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|cba, e_2\|e_2, e_2\|acb, e_3\|e_3, e_3\|bac\rangle_K,\\
\mathrm{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_1, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a\|a, b\|b, c\|c\rangle_K,\\
\mathrm{Hom}_{E^e}(K\tilde{R}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle acba\|a, bacb\|b, cbac\|c\rangle_K,
\end{aligned}$$

donde $\tilde{R} = \{acba, bacb, cbac\}$. Si denotamos para cada $n \geq 2$,

$$\Gamma_{2n} = \{\underbrace{acba\ldots}_{4n}, \underbrace{bacb\ldots}_{4n}, \underbrace{cbac\ldots}_{4n}\} =: \{a^{(2n)}, b^{(2n)}, c^{(2n)}\}$$

y

$$\Gamma_{2n-1} = \{\underbrace{acba\ldots}_{4n-3}, \underbrace{bacb\ldots}_{4n-3}, \underbrace{cbac\ldots}_{4n-3}\} =: \{a^{(2n-1)}, b^{(2n-1)}, c^{(2n-1)}\},$$

notando que el índice debajo de las llaves indica el largo del camino, podemos escribir $\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n}, A \ltimes_\varphi DA)$ como

$$\begin{cases}
\langle a^{(2n)}\|e_2, a^{(2n)}\|acb, b^{(2n)}\|e_3, b^{(2n)}\|bac, c^{(2n)}\|e_1, c^{(2n)}\|cba\rangle_K & \text{si } n \equiv 0(3),\\
\langle a^{(2n)}\|a, b^{(2n)}\|b, c^{(2n)}\|c\rangle_K & \text{si } n \equiv 1(3),\\
\langle a^{(2n)}\|ac, b^{(2n)}\|ba, c^{(2n)}\|cb\rangle_K & \text{si } n \equiv 2(3)
\end{cases}$$

y $\mathrm{Hom}_{E^e}(K\Gamma_{2n-1}, A \ltimes_\varphi DA)$ como

$$\begin{cases}
\langle a^{(2n-1)}\|e_2, a^{(2n-1)}\|acb, b^{(2n-1)}\|e_3, b^{(2n-1)}\|bac, c^{(2n-1)}\|e_1, c^{(2n-1)}\|cba\rangle_K & \text{si } n \equiv 0(3),\\
\langle a^{(2n-1)}\|a, b^{(2n-1)}\|b, c^{(2n-1)}\|c\rangle_K & \text{si } n \equiv 1(3),\\
\langle a^{(2n-1)}\|ac, b^{(2n-1)}\|ba, c^{(2n-1)}\|cb\rangle_K & \text{si } n \equiv 2(3).
\end{cases}$$

Definiendo $a^{(0)} = e_2$, $b^{(0)} = e_3$ y $c^{(0)} = e_1$, las descripciones anteriores coinciden con los primeros tres espacios del complejo de cocadenas para $n = 0, 1$. Con esto fijado, se calculan los diferenciales:

- $\mathrm{d}^0(e_1\|cba) = \mathrm{d}^0(e_2\|acb) = \mathrm{d}^0(e_3\|bac) = 0$ y

  $$\begin{aligned}
  \mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a - b\|b,\\
  \mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= b\|b - c\|c,\\
  \mathrm{d}^0(e_3\|e_3) &= c\|c - a\|a,
  \end{aligned}$$

  de donde
  $$\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|cba, e_2\|acb, e_3\|bac\}$$
  es una base de $\ker \mathrm{d}^0$ y
  $$\{a\|a - b\|b, b\|b - c\|c\}$$
  es una base de $\mathrm{im}\, \mathrm{d}^0$.

- $\mathrm{d}^1 = 0$, por lo que $\{a\|a, b\|b, c\|c\}$ es una base de $\ker \mathrm{d}^1$.

- Tenemos que

  $$\begin{aligned}
  \mathrm{d}^2(acba\|a) &= -a^{(3)}\|ac + b^{(3)}\|ba = -acbac\|ac + bacba\|ba,\\
  \mathrm{d}^2(bacb\|b) &= -b^{(3)}\|ba + c^{(3)}\|cb = -bacba\|ba + cbacb\|cb,\\
  \mathrm{d}^2(cbac\|c) &= a^{(3)}\|ac - c^{(3)}\|cb = acbac\|ac - cbacb\|cb,
  \end{aligned}$$

por lo que

$$\{acba\|a + bacb\|b + cbac\|c\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^2$ y

$$\{a^{(3)}\|ac - b^{(3)}\|ba, b^{(3)}\|ba - c^{(3)}\|cb\}$$

es una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^2$.

- Si $n \geq 2$ y $n \equiv 0(3)$, entonces $\mathrm{d}^{2n}(a^{(2n)}\|acb) = \mathrm{d}^{2n}(b^{(2n)}\|bac) = \mathrm{d}^{2n}(c^{(2n)}\|cba) = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n}(a^{(2n)}\|e_2) &= -a^{(2n+1)}\|a + b^{(2n+1)}\|b,\\
\mathrm{d}^{2n}(b^{(2n)}\|e_3) &= -b^{(2n+1)}\|b + c^{(2n+1)}\|c,\\
\mathrm{d}^{2n}(c^{(2n)}\|e_1) &= a^{(2n+1)}\|a - c^{(2n+1)}\|c,
\end{aligned}$$

de donde

$$\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1, a^{(2n)}\|acb, b^{(2n)}\|bac, c^{(2n)}\|cba\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n}$ y

$$\{a^{(2n+1)}\|a - b^{(2n+1)}\|b, b^{(2n+1)}\|b - c^{(2n+1)}\|c\}$$

es una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n}$. Por otro lado,

$$\mathrm{d}^{2n-1}(a^{(2n-1)}\|acb) = \mathrm{d}^{2n-1}(b^{(2n-1)}\|bac) = \mathrm{d}^{2n-1}(c^{(2n-1)}\|cba) = 0$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n-1}(a^{(2n-1)}\|e_2) &= 2a^{(2n)}\|acb + 2b^{(2n)}\|bac,\\
\mathrm{d}^{2n-1}(b^{(2n-1)}\|e_3) &= 2b^{(2n)}\|bac + 2c^{(2n)}\|cba,\\
\mathrm{d}^{2n-1}(c^{(2n-1)}\|e_1) &= 2a^{(2n)}\|acb + 2c^{(2n)}\|cba.
\end{aligned}$$

Luego, si $\operatorname{char}(K) = 2$, entonces $\mathrm{d}^{2n-1} = 0$, y en consecuencia

$$\{a^{(2n-1)}\|e_2, b^{(2n-1)}\|e_3, c^{(2n-1)}\|e_1, a^{(2n-1)}\|acb, b^{(2n-1)}\|bac, c^{(2n-1)}\|cba\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$, mientras que si $\operatorname{char}(K) \neq 2$,

$$\{a^{(2n-1)}\|acb, b^{(2n-1)}\|bac, c^{(2n-1)}\|cba\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$ y

$$\{a^{(2n)}\|acb + b^{(2n)}\|bac, b^{(2n)}\|bac + c^{(2n)}\|cba, a^{(2n)}\|acb + c^{(2n)}\|cba\}$$

es una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n-1}$.

- Si $n \geq 2$ y $n \equiv 1(3)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n}(a^{(2n)}\|a) &= -a^{(2n+1)}\|ac + b^{(2n+1)}\|ba,\\
\mathrm{d}^{2n}(b^{(2n)}\|b) &= -b^{(2n+1)}\|ba + c^{(2n+1)}\|cb,\\
\mathrm{d}^{2n}(c^{(2n)}\|c) &= a^{(2n+1)}\|ac - c^{(2n+1)}\|cb,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\{a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n}$ y

$$\{a^{(2n+1)}\|ac - b^{(2n+1)}\|ba, b^{(2n+1)}\|ba - c^{(2n+1)}\|cb\}$$

es una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n}$. Por otro lado, vale que $\mathrm{d}^{2n-1} = 0$, y luego

$$\{a^{(2n-1)}\|a, b^{(2n-1)}\|b, c^{(2n-1)}\|c\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$.

- Si $n \geq 2$ y $n \equiv 2(3)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{2n}(a^{(2n)}\|ac) &= -a^{(2n+1)}\|acb + b^{(2n+1)}\|bac,\\
\mathrm{d}^{2n}(b^{(2n)}\|ba) &= -b^{(2n+1)}\|bac + c^{(2n+1)}\|cba,\\
\mathrm{d}^{2n}(c^{(2n)}\|cb) &= a^{(2n+1)}\|acb - c^{(2n+1)}\|cba,
\end{aligned}$$

de donde

$$\{a^{(2n)}\|ac + b^{(2n)}\|ba + c^{(2n)}\|cb\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n}$ y

$$\{a^{(2n+1)}\|acb - b^{(2n+1)}\|bac, b^{(2n+1)}\|bac - c^{(2n+1)}\|cba\}$$

es una base de $\operatorname{im} \mathrm{d}^{2n}$. Por otro lado, vale que $\mathrm{d}^{2n-1} = 0$, por lo tanto

$$\{a^{(2n-1)}\|ac, b^{(2n-1)}\|ba, c^{(2n-1)}\|cb\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^{2n-1}$.

Luego, vemos que

$$\dim_K \mathrm{HH}^0(A \ltimes_\varphi DA) = 4, \ \ \dim_K \mathrm{HH}^1(A \ltimes_\varphi DA) = 1 \ \text{ y } \ \dim_K \mathrm{HH}^2(A \ltimes_\varphi DA) = 1.$$

Se pueden tomar las siguiente bases:

- $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|cba, e_2\|acb, e_3\|bac\}$ como base de $\mathrm{HH}^0(A \ltimes_\varphi DA)$,
- $\{a\|a\}$ como base de $\mathrm{HH}^1(A \ltimes_\varphi DA)$,
- $\{acba\|a + bacb\|b + cbac\|c\}$ como base de $\mathrm{HH}^2(A \ltimes_\varphi DA)$.

Si $\mathrm{char}(K) = 2$ y $n \geq 2$, tenemos que

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \equiv 0(3), \\ 1 & \text{si } n \equiv 1(3), \\ 1 & \text{si } n \equiv 2(3) \end{cases}$$

y

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \equiv 0(3), \\ 1 & \text{si } n \equiv 1(3), \\ 1 & \text{si } n \equiv 2(3). \end{cases}$$

Se pueden tomar las bases:

- $\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1, a^{(2n)}\|acb, b^{(2n)}\|bac, c^{(2n)}\|cba\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 1(3)$,

- $\{a^{(2n)}\|ac + b^{(2n)}\|ba + c^{(2n)}\|cb\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 2(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|e_2, b^{(2n-1)}\|e_3, c^{(2n-1)}\|e_1, a^{(2n-1)}\|acb\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|a\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 1(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|ac\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 2(3)$.

Por otra parte, si $\mathrm{char}(K) \neq 2$ y $n \geq 2$, tenemos

$$\dim_K \mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA) = \dim_K \mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA) = 1,$$

y se pueden tomar las siguientes bases:

- $\{a^{(2n)}\|e_2 + b^{(2n)}\|e_3 + c^{(2n)}\|e_1\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n)}\|a + b^{(2n)}\|b + c^{(2n)}\|c\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 1(3)$,
- $\{a^{(2n)}\|ac + b^{(2n)}\|ba + c^{(2n)}\|cb\}$ para $\mathrm{HH}^{2n}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 2(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|acb\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 0(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|a\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 1(3)$,
- $\{a^{(2n-1)}\|ac\}$ para $\mathrm{HH}^{2n-1}(A \ltimes_\varphi DA)$ si $n \equiv 2(3)$.

Con estos resultados y usando la Observación 2.2.2 se obtienen cotas para las dimensiones de los espacios de cohomología de Hochschild de TA.

Ejemplo 3.2.4. Sea $A = KQ/I$, donde Q es el carcaj

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "a_2"] & 3 \arrow[d, "a_3"] \\ 1 \arrow[u, "a_1"] & 4 \arrow[l, "a_4"] \end{tikzcd}$$

e $I = (a_2a_1, a_3a_2, a_4a_3, a_1a_4)$. Usando [FP02, Theorem 3.9], se concluye que su extensión trivial TA es isomorfa a KQ'/I', donde Q' es el carcaj

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "a_2"'] \arrow[d, bend right, "\overline{a_1}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\overline{a_2}"'] \arrow[d, bend left, "a_3"'] \\ 1 \arrow[u, bend right, "a_1"'] \arrow[r, bend right, "\overline{a_4}"'] & 4 \arrow[l, bend right, "a_4"'] \arrow[u, bend left, "\overline{a_3}"'] \end{tikzcd}$$

e I' es el ideal

$$(a_2a_1, a_3a_2, a_4a_3, a_1a_4, \overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \overline{a_3a_4}, \overline{a_4a_1},$$
$$\overline{a_1}a_1 - a_4\overline{a_4}, \overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_1}, \overline{a_3}a_3 - a_2\overline{a_2}, \overline{a_4}a_4 - a_3\overline{a_3}).$$

En el complejo de cohomología vemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_0, TA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{a_1}a_1, e_2\|e_2, e_2\|\overline{a_2}a_2, e_3\|e_3, e_3\|\overline{a_3}a_3, e_4\|e_4, e_4\|\overline{a_4}a_4\rangle_K, \\
\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_1, TA) &= \langle a_1\|a_1, a_2\|a_2, a_3\|a_3, a_4\|a_4, \overline{a_1}\|\overline{a_1}, \overline{a_2}\|\overline{a_2}, \overline{a_3}\|\overline{a_3}, \overline{a_4}\|\overline{a_4}\rangle_K, \\
\mathrm{Hom}_{E^e}(KR', TA) &= \langle(\overline{a_1}a_1 - a_4\overline{a_4})\|e_1, (\overline{a_1}a_1 - a_4\overline{a_4})\|\overline{a_1}a_1, (\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_1})\|e_2, \\
&\quad (\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_1})\|\overline{a_2}a_2, (\overline{a_3}a_3 - a_2\overline{a_2})\|e_3, (\overline{a_3}a_3 - a_2\overline{a_2})\|\overline{a_3}a_3, \\
&\quad (\overline{a_4}a_4 - a_3\overline{a_3})\|e_4, (\overline{a_4}a_4 - a_3\overline{a_3})\|\overline{a_4}a_4\rangle_K.
\end{aligned}$$

El diferencial d^0 vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a_1\|a_1 + \overline{a_4}\|\overline{a_4} - \overline{a_1}\|\overline{a_1} - a_4\|a_4,\\
\mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= a_2\|a_2 + \overline{a_1}\|\overline{a_1} - \overline{a_2}\|\overline{a_2} - a_1\|a_1,\\
\mathrm{d}^0(e_3\|e_3) &= a_3\|a_3 + \overline{a_2}\|\overline{a_2} - \overline{a_3}\|\overline{a_3} - a_2\|a_2,\\
\mathrm{d}^0(e_4\|e_4) &= a_4\|a_4 + \overline{a_3}\|\overline{a_3} - \overline{a_4}\|\overline{a_4} - a_3\|a_3
\end{aligned}$$

y $\mathrm{d}^0(e_1\|\overline{a_1}a_1) = \mathrm{d}^0(e_2\|\overline{a_2}a_2) = \mathrm{d}^0(e_3\|\overline{a_3}a_3) = \mathrm{d}^0(e_4\|\overline{a_4}a_4) = 0$, por lo que

$$\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3 + e_4\|e_4, e_1\|\overline{a_1}a_1, e_2\|\overline{a_2}a_2, e_3\|\overline{a_3}a_3, e_4\|\overline{a_4}a_4\}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^0$ y

$$\{a_1\|a_1+\overline{a_4}\|\overline{a_4}-\overline{a_1}\|\overline{a_1}-a_4\|a_4, a_2\|a_2+\overline{a_1}\|\overline{a_1}-\overline{a_2}\|\overline{a_2}-a_1\|a_1, a_3\|a_3+\overline{a_2}\|\overline{a_2}-\overline{a_3}\|\overline{a_3}-a_2\|a_2\}$$

es una base de $\operatorname{im}\mathrm{d}^0$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(a_1\|a_1) = \mathrm{d}^1(\overline{a_1}\|\overline{a_1}) &= (\overline{a_1}a_1 - a_4\overline{a_4})\|\overline{a_1}a_1 - (\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_1})\|\overline{a_2}a_2,\\
\mathrm{d}^1(a_2\|a_2) = \mathrm{d}^1(\overline{a_2}\|\overline{a_2}) &= (\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_1})\|\overline{a_2}a_2 - (\overline{a_3}a_3 - a_2\overline{a_2})\|\overline{a_3}a_3,\\
\mathrm{d}^1(a_3|a_3) = \mathrm{d}^1(\overline{a_3}\|\overline{a_3}) &= (\overline{a_3}a_3 - a_2\overline{a_2})\|\overline{a_3}a_3 - (\overline{a_4}a_4 - a_3\overline{a_3})\|\overline{a_4}a_4,\\
\mathrm{d}^1(a_4\|a_4) = \mathrm{d}^1(\overline{a_4}\|\overline{a_4}) &= (\overline{a_4}a_4 - a_3\overline{a_3})\|\overline{a_4}a_4 - (\overline{a_1}a_1 - a_4\overline{a_4})\|\overline{a_1}a_1,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\{a_1\|a_1 + \overline{a_4}\|\overline{a_4} - \overline{a_1}\|\overline{a_1} - a_4\|a_4, a_2\|a_2 + \overline{a_1}\|\overline{a_1} - \overline{a_2}\|\overline{a_2} - a_1\|a_1,&\\
a_3\|a_3 + \overline{a_2}\|\overline{a_2} - \overline{a_3}\|\overline{a_3} - a_2\|a_2, a_1\|a_1 + a_2\|a_2 + a_3\|a_3 + a_4\|a_4, a_4\|a_4 - \overline{a_4}\|\overline{a_4}\}&
\end{aligned}$$

es una base de $\ker \mathrm{d}^1$. Concluimos que $\dim_K \mathrm{HH}^0(TA) = 5$ y $\dim_K \mathrm{HH}^1(TA) = 2$. Se pueden tomar las siguientes bases:

- $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3 + e_4\|e_4, e_1\|\overline{a_1}a_1, e_2\|\overline{a_2}a_2, e_3\|\overline{a_3}a_3, e_4\|\overline{a_4}a_4\}$ para $\mathrm{HH}^0(TA)$,
- $\{a_1\|a_1 + a_2\|a_2 + a_3\|a_3 + a_4\|a_4, a_4\|a_4 - \overline{a_4}\|\overline{a_4}\}$ para $\mathrm{HH}^1(TA)$.

Nuevamente, esto es coherente con la descripción dada en [CMRS03, Theorem 5.5], pues

- $A^A = \langle 1\rangle_K$,
- $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) = 0$,
- $\mathrm{HH}^1(A) = \langle a_1\|a_1\rangle_K$,
- $\mathrm{Alt}_A(DA) = 0$.

3.3. Graduación en homología

En esta sección se estudia cómo la graduación de un álgebra monomial induce una graduación en su homología de Hochschild. Luego, se presentan algunos resultados relacionados con dicha graduación y se los utiliza en un ejemplo concreto.

Sea $A = KQ/I$ un álgebra monomial, con I generado por relaciones monomiales. Como se mencionó con anterioridad, KQ es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada por la longitud de caminos:

$$KQ = \bigoplus_{n\geq 0} KQ_n.$$

Una base de A está formada por los caminos no nulos. Como I es un ideal homogéneo, la graduación pasa al cociente. Más concretamente, para cada $n \geq 0$ se considera el subespacio A_n de A generado por los caminos no nulos de longitud n. Así, A es un álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n.$$

Para este tipo de álgebras tenemos la resolución de Bardzell. En esta aparecen los espacios vectoriales $K\Gamma_s$, los cuales son también $\mathbb{N}_0$-graduados:

$$K\Gamma_s = \bigoplus_{t \geq 0} KQ_t^{\Gamma_s},$$

donde $Q_t^{\Gamma_s}$ es el conjunto de caminos de Γ_s de longitud t. Aplicando el funtor $A \otimes_{A^e} -$ a $A|K\Gamma_s|A$ y usando el isomorfismo de la observación 1.4.19, obtenemos

$$A \otimes_{A^e} (A|K\Gamma_s|A) \simeq A \otimes_{E^e} K\Gamma_s = \Big(\bigoplus_{n \geq 0} A_n\Big) \otimes_{E^e} \Big(\bigoplus_{t \geq 0} KQ_t^{\Gamma_s}\Big) = \bigoplus_{N \geq 0} \bigoplus_{n+t=N} A_n \otimes_{E^e} KQ_t^{\Gamma_s}.$$

Si $\mathrm{d}_s : A \otimes_{E^e} K\Gamma_s \to A \otimes_{E^e} \Gamma_{s-1}$ es el diferencial del complejo y $P_s^N = \bigoplus_{n+t=N} A_n \otimes_{E^e} KQ_t^{\Gamma_s}$, entonces vale que $\mathrm{d}_s(P_s^N) \subseteq P_{s-1}^N$ para todo $N \geq 0$. Así, obtenemos $\mathrm{d}_s = \bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{d}_s^N$, donde $\mathrm{d}_s^N = \mathrm{d}_s|_{P_s^N}^{P_{s-1}^N}$, y para cada $N \geq 0$ el siguiente es un complejo de cadenas:

$$\cdots \longrightarrow P_s^N \xrightarrow{\mathrm{d}_s^N} P_{s-1}^N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1^N \xrightarrow{\mathrm{d}_1^N} P_0^N \longrightarrow 0.$$

Denotando $\mathrm{HH}_{s,N}(A)$ a la homología de este complejo, como

$$\ker \mathrm{d}_s = \bigoplus_{N \geq 0} \ker \mathrm{d}_s^N \ \text{ e } \ \mathrm{im}\, \mathrm{d}_s = \bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{im}\, \mathrm{d}_s^N$$

para todo $s \geq 0$, entonces

$$\mathrm{HH}_s(A) = \frac{\ker \mathrm{d}_s}{\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{s+1}} = \bigoplus_{N \geq 0} \frac{\ker \mathrm{d}_s^N}{\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{s+1}^N} = \bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{HH}_{s,N}(A).$$

Sea A una (n,m)-corona. En [KIS18, p. 7–8], los autores definen un morfismo

$$\Theta : D(A \otimes_{E^e} KQ_n) \to \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes 2}, DA)$$

que manda un elemento $(a_{m+1} \dots a_r \otimes_{E^e} a_1 \dots a_m)^*$ a la transformación lineal definida por

$$b_1 \dots b_{k_1} \otimes b_{k_1+1} \dots b_{k_1+k_2} \longmapsto \begin{cases} (a_{k_1+k_2+1} \dots a_r)^* & \text{si } m \leq k_1 + k_2 \leq r \\ & \text{y } b_l = a_l \text{ para todo } 1 \leq l \leq k_1 + k_2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Dicho morfismo induce un isomorfismo $D(\mathrm{HH}_2(A)) \simeq \mathrm{H}^2(A, DA)$ también denotado Θ. Dado que

$$\bigoplus_{N \geq 0} D(\mathrm{HH}_{2,N}(A)) \simeq D\Big(\bigoplus_{N \geq 0} \mathrm{HH}_{2,N}(A)\Big) = D(\mathrm{HH}_2(A)) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{H}^2(A, DA),$$

también se puede pensar a Θ como un morfismo $\bigoplus_{N \geq 0} D(\mathrm{HH}_{2,N}(A)) \to \mathrm{H}^2(A, DA)$.

Teorema 3.3.1. [KIS18, Theorem 4.3] Sea $A = KQ/R^m$ una (n, m)-corona, con $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq 2$. Sean $m \leq N \leq 2m-1$ y $\varphi : A \otimes A \to DA$ un 2-cociclo de Hochschild que pertenece a $\Theta(D(\mathrm{HH}_{2,N}(A)))$. Entonces el carcaj ordinario $Q_{A \ltimes_\varphi DA}$ de $A \ltimes_\varphi DA$ está dado por

$$Q_{A \ltimes_\varphi DA} = \begin{cases} Q_{TA} & \text{si } m \leq N \leq 2m-2 \\ Q & \text{si } N = 2m-1, \end{cases}$$

donde Q_{TA} es el carcaj ordinario de TA.

Aquí, carcaj ordinario hace referencia a [ASS06, Chapter II, Definition 3.1].

Corolario 3.3.2. [KIS18, Corollary 4.5] Sea $A = KQ/R^m$ una (n, m)-corona, con $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq 2$. Sea $\varphi : A \otimes A \to DA$ un 2-cociclo de Hochschild. Si $Q_{A \ltimes_\varphi DA} = Q$, entonces $A \ltimes_\varphi DA \simeq KQ/R^{2m}$.

Demostración. Como $A \ltimes_\varphi DA$ es un álgebra autoinyectiva de Nakayama [EH99], es isomorfa a KQ/R^k para cierto $k \geq 2$. Observar que $\dim_K(A) = nm$, pues A tiene n caminos de longitud i para cada $0 \leq i \leq m-1$. De la misma forma, $\dim_K(A \ltimes_\varphi DA) = nk$. Como $\dim_K(A \ltimes_\varphi DA) = 2\dim_K(A)$, se concluye que $k = 2m$, como se quería ver. ∎

Ya vimos que los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.3 son casos en los cuales el carcaj ordinario de la extensión torcida es el mismo que el del álgebra original y efectivamente las relaciones tienen el doble de largo que las del álgebra original.

Ejemplo 3.3.3. Sea A el cociente del álgebra de caminos del carcaj Q

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

por el ideal $I = (cba, acb, bac)$. Según [FP02, Theorem 3.9], la extensión trivial TA es isomorfa a KQ'/I', con Q' el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"'] \arrow[dr, bend left, "\overline{ac}"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"'] \arrow[ur, bend left, "\overline{cb}"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \arrow[ll, bend left, "\overline{ba}"] \end{tikzcd}$$

e I' el ideal

$$(cba, acb, bac, \overline{ac}a\overline{ba}, \overline{ba}b\overline{cb}, \overline{cb}c\overline{ac}, \overline{ac}\overline{cb}, \overline{ba}\overline{ac}, \overline{cbba},$$
$$\overline{ba}ba - cb\overline{cb}, c\overline{ac}a - cb\overline{cb}, ac\overline{ac} - \overline{cb}cb, a\overline{ba}b - \overline{cb}cb, \overline{ac}ac - b\overline{cb}c, ba\overline{ba} - b\overline{cb}c).$$

En el complejo de cohomología vale

$$\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_0, TA) = \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|e_2, e_2\|a\overline{ba}b, e_3\|e_3, e_3\|ba\overline{ba}\rangle_K,$$
$$\mathrm{Hom}_{E^e}(KQ'_1, TA) = \langle a\|a, a\|\overline{cb}, b\|b, b\|\overline{ac}, c\|c, c\|\overline{ba}, \overline{cb}\|\overline{cb}, \overline{cb}\|a, \overline{ac}\|\overline{ac}, \overline{ac}\|b, \overline{ba}\|\overline{ba}, \overline{ba}\|c\rangle_K,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{E^e}(KR', TA) = \langle & cba\|e_1, cba\|\overline{ba}ba, acb\|e_2, acb\|a\overline{ba}b, bac\|e_3, bac\|ba\overline{ba}, \overline{ac}a\overline{ba}\|e_3, \\ & \overline{ac}a\overline{ba}\|ba\overline{ba}, \overline{ba}b\overline{cb}\|e_1, \overline{ba}b\overline{cb}\|\overline{ba}ba, \overline{cb}c\overline{ac}\|e_2, \overline{cb}c\overline{ac}\|a\overline{ba}b, \\ & \overline{ac}\overline{cb}\|ba, \overline{ac}\overline{cb}\|\overline{ac}a, \overline{ac}\overline{cb}\|b\overline{cb}, \overline{ba}\overline{ac}\|cb, \overline{ba}\overline{ac}\|\overline{ba}b, \overline{ba}\overline{ac}\|c\overline{ac}, \\ & \overline{cbba}\|ac, \overline{cbba}\|\overline{cb}c, \overline{cbba}\|a\overline{ba}, (\overline{ba}ba - cb\overline{cb})\|e_1, \\ & (\overline{ba}ba - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba, (c\overline{ac}a - cb\overline{cb})\|e_1, (c\overline{ac}a - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba, \\ & (ac\overline{ac} - \overline{cb}cb)\|e_2, (ac\overline{ac} - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b, (a\overline{ba}b - \overline{cb}cb)\|e_2, \\ & (a\overline{ba}b - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b, (\overline{ac}ac - b\overline{cb}c)\|e_3, (\overline{ac}ac - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba}, \\ & (ba\overline{ba} - b\overline{cb}c)\|e_3, (ba\overline{ba} - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba}\rangle_K.\end{aligned}$$

Los diferenciales satisfacen $\mathrm{d}^0(e_1\|\overline{ba}ba) = \mathrm{d}^0(e_2\|a\overline{ba}b) = \mathrm{d}^0(e_3\|ba\overline{ba}) = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba},\\
\mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb},\\
\mathrm{d}^0(e_3\|e_3) &= c\|c + \overline{ba}\|\overline{ba} - b\|b - \overline{ac}\|\overline{ac},
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^0 &= \langle e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|a\overline{ba}b, e_3\|ba\overline{ba}\rangle_K,\\
\operatorname{im} \mathrm{d}^0 &= \langle a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba}, b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb}\rangle_K
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(a\|a) &= (\overline{ba}ba - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba + (c\overline{ac}a - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba + (ac\overline{ac} - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b\\
&\quad + (a\overline{ba}b - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b + (\overline{ac}ac - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba} + (ba\overline{ba} - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(a\|\overline{cb}) &= acb\|a\overline{ba}b + bac\|ba\overline{ba} + cba\|\overline{ba}ba,\\
\mathrm{d}^1(b\|b) &= -(c\overline{ac}a - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba - (ac\overline{ac} - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b - (\overline{ac}ac - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(b\|\overline{ac}) &= acb\|a\overline{ba}b + bac\|ba\overline{ba} + cba\|\overline{ba}ba,\\
\mathrm{d}^1(c\|c) &= -(\overline{ba}ba - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba - (a\overline{ba}b - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b - (ba\overline{ba} - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(c\|\overline{ba}) &= acb\|a\overline{ba}b + bac\|ba\overline{ba} + cba\|\overline{ba}ba,\\
\mathrm{d}^1(\overline{cb}\|\overline{cb}) &= -\mathrm{d}^1(a\|a),\\
\mathrm{d}^1(\overline{cb}\|a) &= \overline{ba}b\overline{cb}\|\overline{ba}ba + \overline{cb}c\overline{ac}\|a\overline{ba}b + \overline{ac}\overline{cb}\|\overline{ac}a + \overline{cb}\overline{ba}\|a\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(\overline{ac}\|\overline{ac}) &= (c\overline{ac}a - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba + (ac\overline{ac} - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b + (\overline{ac}ac - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(\overline{ac}\|b) &= \overline{ac}a\overline{ba}\|ba\overline{ba} + \overline{cb}c\overline{ac}\|a\overline{ba}b + \overline{ac}\overline{cb}\|b\overline{cb} + \overline{ba}\overline{ac}\|\overline{ba}b,\\
\mathrm{d}^1(\overline{ba}\|\overline{ba}) &= (\overline{ba}ba - cb\overline{cb})\|\overline{ba}ba + (a\overline{ba}b - \overline{cb}cb)\|a\overline{ba}b + (ba\overline{ba} - b\overline{cb}c)\|ba\overline{ba},\\
\mathrm{d}^1(\overline{ba}\|c) &= \overline{ac}a\overline{ba}\|ba\overline{ba} + \overline{ba}b\overline{cb}\|\overline{ba}ba + \overline{ba}\overline{ac}\|c\overline{ac} + \overline{cb}\overline{ba}\|\overline{cb}c,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^1 = \langle a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba}, b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb}, a\|\overline{cb} - b\|\overline{ac},&\\
a\|\overline{cb} - c\|\overline{ba}, a\|a + b\|b + c\|c, a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb}\rangle_K.&
\end{aligned}$$

Luego, son $\dim_K \mathrm{HH}^0(TA) = \dim_K \mathrm{HH}^1(TA) = 4$ y se pueden elegir las siguientes bases:

- $\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|a\overline{ba}b, e_3\|ba\overline{ba}\}$ para $\mathrm{HH}^0(TA)$,
- $\{a\|\overline{cb} - b\|\overline{ac}, a\|\overline{cb} - c\|\overline{ba}, a\|a + b\|b + c\|c, a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb}\}$ para $\mathrm{HH}^1(TA)$.

Una vez más, esto es coherente con [CMRS03, Theorem 5.5], pues

- $A^A = \langle 1\rangle_K$,
- $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{HH}_1(A), K) = \langle (cb\otimes a)^*, (ac\otimes b)^*\rangle_K$,
- $\mathrm{HH}^1(A) = \langle a\|a\rangle_K$,
- $\mathrm{Alt}_A(DA) = 0$.

Sean ahora $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ no nulos simultáneamente. Así $\lambda_1 acb\|e_2^* + \lambda_2 bac\|e_3^*$ es un 2-cociclo que no es un 2-coborde. Empezamos a construir un morfismo de comparación entre la resolución bar de A y la resolución de Bardzell de A:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{\otimes 4} \arrow[r, "b'_2"] \arrow[d, "f_2"] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "b'_1"] \arrow[d, "f_1"] & A^{\otimes 2} \arrow[r, "b'_0"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & A|KR|A \arrow[r, "\delta_2"] & A|KQ_1|A \arrow[r, "\delta_1"] & A|KQ_0|A \arrow[r, "\delta_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Existe un morfismo de comparación $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre dichas resoluciones tal que

$$f_0(1\otimes 1) = 1|1|1,$$

$$f_1(1\otimes\alpha\otimes 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\in Q_0, \\ 1|\alpha|1 & \text{si } \alpha\in Q_1, \\ b|a|1 + 1|b|a & \text{si } \alpha = ba, \\ c|b|1 + 1|c|b & \text{si } \alpha = cb, \\ a|c|1 + 1|a|c & \text{si } \alpha = ac, \end{cases}$$

$$f_2(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\in Q_0 \text{ o } \beta\in Q_0, \\ 1|\alpha\beta|1 & \text{si } \alpha\beta\in R, \\ 0 & \text{si } \alpha\in Q_1 \text{ y } \alpha\beta\notin R, \\ 0 & \text{si } \beta\in Q_1 \text{ y } \alpha\beta\notin R, \\ a|cba|1 & \text{si } \alpha = ac \text{ y } \beta = ba, \\ b|acb|1 & \text{si } \alpha = ba \text{ y } \beta = cb, \\ c|bac|1 & \text{si } \alpha = cb \text{ y } \beta = ac. \end{cases}$$

El morfismo resultante $F : A^{\otimes 4} \to DA$ está determinado por la extensión A^e-lineal de

- $F(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = 0$ si $\alpha\in Q_0$ o $\beta\in Q_0$,
- $F(1\otimes a\otimes cb\otimes 1) = F(1\otimes ac\otimes b\otimes 1) = \lambda_1 e_2^*$,
- $F(1\otimes b\otimes ac\otimes 1) = F(1\otimes ba\otimes c\otimes 1) = \lambda_2 e_3^*$,
- $F(1\otimes c\otimes ba\otimes 1) = F(1\otimes cb\otimes a\otimes 1) = 0$,
- $F(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = 0$ si $\alpha\in Q_1$ y $\alpha\beta\notin R$,
- $F(1\otimes\alpha\otimes\beta\otimes 1) = 0$ si $\beta\in Q_1$ y $\alpha\beta\notin R$,
- $F(1\otimes ac\otimes ba\otimes 1) = F(1\otimes ba\otimes cb\otimes 1) = F(1\otimes cb\otimes aca\otimes 1) = 0$,

por lo que el 2-cociclo $\varphi : A^{\otimes 2}\to DA$ a considerar es

$$\varphi = \lambda_1 a\otimes cb\|e_2^* + \lambda_1 ac\otimes b\|e_2^* + \lambda_2 b\otimes ac\|e_3^* + \lambda_2 ba\otimes c\|e_3^*.$$

Sea

$$\{e_1, e_2, e_3, a, b, c, ba, cb, ac, e_1^*, e_2^*, e_3^*, a^*, b^*, c^*, (ba)^*, (cb)^*, (ac)^*\}$$

una base de $A \ltimes_\varphi DA$. Los productos entre ellos son los mismos que en TA, salvo por $acb = \lambda_1 e_2^*$ y $bac = \lambda_2 e_3^*$. Notemos que $aa^* = b^*b = e_2^*$ y que $bb^* = c^*c = e_3^*$, por lo que, salvo multiplicación por escalares (y excluyendo los casos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$), vale que

$$acb = aa^* = b^*b$$
$$bac = bb^* = c^*c.$$

Para encontrar una expresión de la extensión torcida como cociente de un álgebra de caminos, una idea que sale de estas igualdades es usar la correspondencia $a^* \mapsto cb$, $b^* \mapsto ac$ y $c^* \mapsto ba$. También, las relaciones $ac\overline{ac} - a\overline{ba}b$ y $a\overline{ba}b - \overline{cb}cb$ comparadas con $aa^* - b^*b$ llevan a considerar

$$
\begin{aligned}
a^* &\mapsto c\overline{ac} \\
b^* &\mapsto a\overline{ba}
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
a^* &\mapsto \overline{ba}b \\
b^* &\mapsto \overline{cb}c.
\end{aligned}
$$

En lugar de explorar estas posibilidades, vamos a usar los resultados de [KIS18, p. 14–15], donde los autores estudian esta álgebra. En el Teorema 3.3.1 concluyen que $A \ltimes_\varphi DA$ es isomorfa a $K\tilde{Q}/\tilde{I}$, donde $\tilde{Q}$ es el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "b"'] \arrow[dr, bend left, "\overline{ac}"] & \\
1 \arrow[ur, "a"'] \arrow[ur, bend left, "\overline{cb}"] & & 3 \arrow[ll, "c"'] \arrow[ll, bend left, "\overline{ba}"]
\end{tikzcd}
$$

e $\tilde{I}$ es el ideal

$$(cba, \overline{ac}\overline{cb}, \overline{ba}\overline{ac}, \overline{cb}\overline{ba}, \overline{ac}a - b\overline{cb}, \overline{ba}b - c\overline{ac}, \overline{cb}c - a\overline{ba}, acb - \lambda_1\overline{cb}cb, bac - \lambda_2\overline{ac}ac).$$

En el complejo de cohomología, resulta que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_0, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle e_1\|e_1, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|e_2, e_2\|\overline{cb}cb, e_3\|e_3, e_3\|\overline{ac}ac\rangle_K, \\
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{Q}_1, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle a\|a, a\|\overline{cb}, b\|b, b\|\overline{ac}, c\|c, c\|\overline{ba}, \overline{ba}\|\overline{ba}, \overline{ba}\|c, \\
&\qquad \overline{cb}\|\overline{cb}, \overline{cb}\|a, \overline{ac}\|\overline{ac}, \overline{ac}\|b\rangle_K, \\
\operatorname{Hom}_{E^e}(K\tilde{R}, A \ltimes_\varphi DA) &= \langle cba\|e_1, \overline{ac}\overline{cb}\|ba, \overline{ac}\overline{cb}\|\overline{ac}a, \overline{ba}\overline{ac}\|cb, \overline{ba}\overline{ac}\|\overline{ba}b, \overline{cb}\overline{ba}\|ac, \overline{cb}\overline{ba}\|\overline{cb}c, \\
&\qquad (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|ba, (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|\overline{ac}a, (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|cb, (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|\overline{ba}b, \\
&\qquad (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|ac, (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|\overline{cb}c, (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|e_2, \\
&\qquad (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|acb, (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|e_3, (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|bac\rangle_K,
\end{aligned}
$$

donde si $\lambda_1 = 0$, se puede sacar a $(acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|acb$, y de la misma forma, si $\lambda_2 = 0$, se puede sacar a $(bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|bac$. Las imágenes de los primeros diferenciales en los elementos de recién valen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^0(e_1\|e_1) &= a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba}, \\
\mathrm{d}^0(e_2\|e_2) &= b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb}, \\
\mathrm{d}^0(e_3\|e_3) &= c\|c + \overline{ba}\|\overline{ba} - b\|b - \overline{ac}\|\overline{ac}, \\
\mathrm{d}^0(e_1\|\overline{ba}ba) &= \mathrm{d}^0(e_2\|\overline{cb}cb) = \mathrm{d}^0(e_3\|\overline{ac}ac) = 0,
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^0 &= \langle e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|\overline{cb}cb, e_3\|\overline{ac}ac\rangle_K, \\
\operatorname{im} \mathrm{d}^0 &= \langle a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba}, b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb}\rangle_K.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^1(a\|a) &= (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|\overline{ac}a - (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|\overline{cb}c + (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|acb,\\
\mathrm{d}^1(a\|\overline{cb}) &= cba\|\overline{ba}ba + (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|\overline{cb}cb + (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|\overline{ac}ac,\\
\mathrm{d}^1(b\|b) &= -(\overline{ac}a - b\overline{cb})\|\overline{ac}a + (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|\overline{ba}b + (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|bac,\\
\mathrm{d}^1(b\|\overline{ac}) &= cba\|\overline{ba}ba + (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|\overline{cb}cb + (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|\overline{ac}ac,\\
\mathrm{d}^1(c\|c) &= -(\overline{ba}b - c\overline{ac})\|\overline{ba}b + (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|\overline{cb}c,\\
\mathrm{d}^1(c\|\overline{ba}) &= cba\|\overline{ba}ba + (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|\overline{cb}cb + (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|\overline{ac}ac,\\
\mathrm{d}^1(\overline{ba}\|\overline{ba}) &= (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|\overline{ba}b - (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|\overline{cb}c,\\
\mathrm{d}^1(\overline{ba}\|c) &= \overline{ba}\,\overline{ac}\|\overline{ba}b + \overline{cb}\,\overline{ba}\|\overline{cb}c + (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|cb - (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|ac,\\
\mathrm{d}^1(\overline{cb}\|\overline{cb}) &= -(\overline{ac}a - b\overline{cb})\|\overline{ac}a + (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|\overline{cb}c - (acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|acb,\\
\mathrm{d}^1(\overline{cb}\|a) &= \overline{ac}\,\overline{cb}\|\overline{ac}a + \overline{cb}\,\overline{ba}\|\overline{cb}c - (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|ba\\
&\qquad + (\overline{cb}c - a\overline{ba})\|ac - \lambda_1(acb - \lambda_1\overline{cb}cb)\|acb,\\
\mathrm{d}^1(\overline{ac}\|\overline{ac}) &= (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|\overline{ac}a - (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|\overline{ba}b - (bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|bac,\\
\mathrm{d}^1(\overline{ac}\|b) &= \overline{ac}\,\overline{cb}\|\overline{ac}a + \overline{ba}\,\overline{ac}\|\overline{ba}b + (\overline{ac}a - b\overline{cb})\|ba\\
&\qquad - (\overline{ba}b - c\overline{ac})\|cb - \lambda_2(bac - \lambda_2\overline{ac}ac)\|bac,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\ker \mathrm{d}^1 = \langle a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb} - c\|c - \overline{ba}\|\overline{ba},\, b\|b + \overline{ac}\|\overline{ac} - a\|a - \overline{cb}\|\overline{cb},\\
a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb},\, a\|\overline{cb} - b\|\overline{ac},\, a\|\overline{cb} - c\|\overline{ba}\rangle_K.
\end{aligned}$$

Luego, $\dim_K \mathrm{HH}^0(A \ltimes_\varphi DA) = 4$ y

$$\{e_1\|e_1 + e_2\|e_2 + e_3\|e_3, e_1\|\overline{ba}ba, e_2\|\overline{cb}cb, e_3\|\overline{ac}ac\}$$

es una base, mientras que $\dim_K \mathrm{HH}^1(A \ltimes_\varphi DA) = 3$ y

$$\{a\|a + \overline{cb}\|\overline{cb}, a\|\overline{cb} - b\|\overline{ac}, a\|\overline{cb} - c\|\overline{ba}\}$$

es una base. Notar que esto es coherente con la Observación 2.2.2.

Todos estos resultados podrían ser aplicados al estudio de la cohomología de Hochschild de extensiones triviales en grados mayores que 1.

Bibliografía

[AF92] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller. *Rings and categories of modules.*, volume 13 of *Grad. Texts Math.* New York: Springer-Verlag, 2nd. ed. edition, 1992.

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1: Techniques of representation theory.*, volume 65 of *Lond. Math. Soc. Stud. Texts.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[Bar97] Michael J. Bardzell. The alternating syzygy behavior of monomial algebras. *J. Algebra*, 188(1): 69–89, 1997.

[CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton, NJ: Princeton University Press, paperback ed. edition, 1999.

[CMRS03] Claude Cibils, Eduardo Marcos, María Julia Redondo, and Andrea Solotar. Cohomology of split algebras and of trivial extensions. *Glasg. Math. J.*, 45(1): 21–40, 2003.

[CS15] Sergio Chouhy and Andrea Solotar. Projective resolutions of associative algebras and ambiguities. *J. Algebra*, 432: 22–61, 2015.

[dlP10] José-Antonio de la Peña. Degenerations of algebras. Presentación realizada en el Taller sobre Estructuras Algebraicas, disponible en `https://indico.ictp.it/event/a09132/session/49/contribution/25`, 2010.

[EH99] Karin Erdmann and Thorsten Holm. Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n. *Forum Math.*, 11(2): 177–201, 1999.

[FP02] Elsa A. Fernández and María Inés Platzeck. Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner. *J. Algebra*, 249(2): 326–344, 2002.

[Ger64] Murray Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. Math. (2)*, 79:59–103, 1964.

[GS86] Murray Gerstenhaber and Samuel D. Schack. Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein. *J. Pure Appl. Algebra*, 43: 53–74, 1986.

[Hoc42] G. Hochschild. Semi-simple algebras and generalized derivations. *Am. J. Math.*, 64: 677–694, 1942.

[Hoc45] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. Math. (2)*, 46: 58–67, 1945.

[Jac37] N. Jacobson. Abstract derivation and Lie algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 42: 206–224, 1937.

[KIS18] Hideyuki Koie, Tomohiro Itagaki, and Katsunori Sanada. The ordinary quivers of Hochschild extension algebras for self-injective Nakayama algebras. In *Proceedings of the 50th symposium on ring theory and representation theory, University of Yamanashi, Yamanashi, Japan, October 7–10, 2017*, pages 94–99. Yamanashi: Symposium on Ring Theory and Representation Theory Organizing Committee, 2018.

[Skö08] Emil Sköldberg. A contracting homotopy for Bardzell's resolution. *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, 108A(2): 111–117, 2008.

[Wit19] Sarah J. Witherspoon. *Hochschild cohomology for algebras*, volume 204 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2019.