



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Funciones de Morse perfectas

Josefina Villar

Director: Gabriel Minian

Fecha de Presentación: 27/09/2024

Agradecimientos

A mi mamá y a mi papá, por el amor incondicional, por sembrar en mí la curiosidad y la responsabilidad, por permitirme estudiar tranquila sin tener que preocuparme por otras cosas.

A Gabriel Minian, en calidad de Director y en calidad de Profesor. Gracias por enseñarme siempre algo más que lo que dice el teorema, por hacerte un tiempo para dirigir esta tesis y transmitirme tu forma de ver la matemática.

A Gabriel Larotonda y Mariano Suárez-Álvarez, por aceptar ser jurados de este trabajo, por comprometerse a leerlo en poco tiempo, y por las correcciones y comentarios que me hicieron.

A mi hermana, por existir, por ser hermana, por abrirme el camino y por ser ejemplo de superación.

A Gua, Zo y Mica, mis amigas de siempre, mi cable a tierra. Gracias por darle color a mi vida, por estar siempre y compartir conmigo ese tiempito que queda entre laburo, facultad y demás.

A Leo, mi novio, mi cómplice. Gracias por todo tu amor, por transmitirme alegría y confianza todos los días, por ser protagonista de los buenos, por apoyarme en los difíciles, y por sostenerme y cuidarme en los MUY difíciles.

A los Guardianes, porque sí, por el lore y porque están ahí de guardaespaldas, de gym bros, de editores de contenido, de generadores de momentos graciosos.

A Fran Greco, Ro, Santi, Juli, Cami, Nahue, El Marian, Tomi (Justin), Tomi Chimentos, Nico Ibañez, Nico Agote, Chino's, Gabi Sac, Iván, Seba Freire, y muchos otros, por hacer de mi paso por la facultad una linda experiencia.

A Chanu por el denseo matemático y por la buena bibliografía, a FRV por escucharme en un momento crítico y abrirme los ojos, y a Greco por aparecer cada vez que estos parecían cerrarse.

A los profes que tuve a lo largo de la carrera. Gracias por transmitirme sus conocimientos y su pasión por la matemática.

A las mujeres del dm y de Exactas en general, de ellas aprendo y por ellas me atrevo.

A mis profes del CBC de mate para Bio, quienes me incentivaron a que curse de oyente análisis para matemáticos; y a Maxi, quién, además de dar clases espectaculares, me animó a cambiar de carrera.

A Mariano y a Chili, de River, por forjar en mí el arte de la disciplina y por mostrarme que las grandes metas se alcanzan trabajando duro y a diario.

A todos los que estuvieron a mi lado, ya sea con su presencia en la defensa o con un mensaje de apoyo a la distancia.

Índice general

Introducción	3
1. Teoría de Morse	6
1.1. Definiciones y resultados básicos	6
1.2. Desigualdades de Morse	14
1.3. Cohomología de de Rham	16
1.4. Pegado de variedades y cirugía	17
1.5. Funciones de Morse perfectas	21
1.6. El papel del grupo fundamental	27
1.7. Otras funciones de Morse en S^n	34
2. Funciones perfectas y Teorema de h-cobordismo	36
2.1. Cobordismo	36
2.2. Teoría de Manijas	41
2.3. Teoría de intersección y cancelación de manijas	48
2.4. CW-complejo asociado a una descomposición	53
2.5. h-cobordismo	54
2.6. Teorema de existencia de funciones de Morse perfectas	57
3. Funciones perfectas y s-cobordismo	60
3.1. El caso no simplemente conexo	60
3.1.1. Generalización del segundo teorema de cancelación	60
3.1.2. Revestimiento universal del complejo asociado a una descomposición	62
3.1.3. Descomposición en manijas de un h-cobordismo	64
3.2. El grupo de Whitehead y el Teorema de s-cobordismo	66
3.3. Existencia de funciones de Morse perfectas en variedades no simplemente conexas	68
3.3.1. Comentarios finales	72
Bibliografía	74

Introducción

La topología diferencial estudia las propiedades globales de las variedades diferenciables (a diferencia de la geometría diferencial que esencialmente estudia sus propiedades locales). Uno de los problemas fundamentales del área es la clasificación de variedades diferenciables a menos de difeomorfismo. Para abordar este problema existen diversos invariantes que permiten distinguir variedades no difeomorfas y técnicas que facilitan el estudio de su topología. Una de las herramientas clásicas más relevantes es la teoría de Morse, que surge del trabajo de M. Morse sobre los puntos críticos de funciones suaves a valores reales [Mor34] y que ha evolucionado considerablemente con el tiempo.

Una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida en una variedad diferenciable cerrada (compacta y sin borde) M , es una función suave cuyos puntos críticos son no degenerados; es decir, aquellos en los que la diferencial de f se anula y la matriz Hessiana es inversible. El índice de un punto crítico no degenerado $p \in M$ se define como el número de autovalores negativos (contados con multiplicidad) de la matriz Hessiana de f en una carta alrededor de p , indicando así en cuántas direcciones principales f decrece.

Una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nos proporciona una forma de “reconstruir” la variedad diferenciable M mediante la adjunción de manijas. Dada una variedad diferenciable N de dimensión n con borde no vacío, un entero $0 \leq k \leq n$, y un embedding $\varphi : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial N$, se define una variedad diferenciable

$$\chi(N, \varphi, k) = \frac{N \cup^d (D^k \times D^{n-k})}{\{\varphi(x, y) \sim (x, y)\}_{(x, y) \in \partial D^k \times D^{n-k}}}.$$

Decimos que M se obtiene a partir de N adjuntando una k -manija si M es difeomorfa a $\chi(N, \varphi, k)$, para algún embedding φ .

Un resultado fundamental de la teoría de Morse establece que, dada una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y un valor crítico $c \in \mathbb{R}$ de f , si $\epsilon > 0$ es tal que $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ no contiene otro valor crítico de f , entonces la variedad $f^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ se obtiene a partir de $f^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ adjuntando tantas k -manijas como puntos críticos de índice k haya en $f^{-1}(c)$. Esto permite descomponer la variedad M en manijas, con c_k manijas de índice k .

Desde el punto de vista homotópico, el resultado anterior implica que la variedad $f^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ es homotópicamente equivalente a un espacio que se obtiene a partir de $f^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ adjuntando tantas k -celdas como puntos críticos de índice k haya en $f^{-1}(c)$. Como consecuencia, si c_k denota la cantidad de puntos críticos de f de índice k y b_k es el k -ésimo número de Betti de M , se deduce que $b_k \leq c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Una función de Morse perfecta es aquella en la que $b_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. El objetivo de esta tesis es determinar cuáles variedades diferenciables cerradas admiten funciones de Morse perfectas.

Dada una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene una descomposición en manijas. Recíprocamente, toda descomposición en manijas puede obtenerse a partir de una función de Morse [MSS65]. Así, la existencia de una función de Morse perfecta es equivalente a la existencia de una descomposición en manijas “minimal”, con b_k manijas de índice k (donde el número de k -manijas de una descomposición es siempre mayor o igual a b_k). En la década de 1960, Smale desarrolló técnicas para cancelar manijas en una descomposición, y con ello probó la conjetura de Poincaré generalizada [Sma61a] y el teorema de h-cobordismo [Sma62]. Aplicando estas técnicas, demostraremos que

toda variedad cerrada, simplemente conexa, de dimensión mayor o igual a 6 y cuya homología sea libre de torsión, admite funciones de Morse perfectas. Este es el resultado principal de esta tesis.

En los casos en que la variedad no es simplemente conexa, el teorema de h -cobordismo falla. Las distintas clases de h -cobordismos se encuentran clasificadas por la torsión de Whitehead. Este resultado, probado por Barden [Bar64], Mazur [Maz63] y Stallings [Sta65], se conoce como el Teorema de s -cobordismo. Exploraremos las técnicas involucradas en la demostración de este teorema con el objetivo de generalizar el teorema de existencia de funciones de Morse perfectas, desarrollando resultados originales en el proceso.

En el Capítulo 1, introduciremos la teoría de Morse clásica, enunciando los principales resultados y demostrando algunos de ellos. Como aplicación de la teoría de Morse, demostraremos el Teorema de Reeb, el cual establece condiciones suficientes para que una variedad diferenciable cerrada sea homeomorfa a la esfera, ampliando la demostración encontrada en [Mil64]. Luego, demostraremos que la propiedad de admitir funciones de Morse perfectas se preserva bajo la suma conexa y el producto de variedades. También exploraremos la relación entre el grupo fundamental de la variedad y la existencia de este tipo de funciones, obteniendo una limitación: si el rango del grupo fundamental es estrictamente mayor que b_1 , entonces la variedad no admitirá funciones de Morse perfectas. En particular, si $\pi_1(M)$ es no trivial y perfecto (es decir, su abelianizado es cero), entonces M no admitirá funciones de Morse perfectas. Un resultado conocido, pero cuya demostración detallada no se encuentra en la literatura, es que para cada $n \geq 4$ y para cada grupo finitamente presentado G , existe una variedad diferenciable cerrada, conexa y orientada, de dimensión n , cuyo grupo fundamental es isomorfo a G . En este capítulo, daremos una demostración de este resultado y, junto con el hecho de que la esfera de Poincaré no admite funciones de Morse perfectas, deduciremos que para todo $n \geq 3$, existen variedades diferenciables cerradas y orientadas de dimensión n que no admiten funciones de Morse perfectas.

Sabiendo que, para que una variedad diferenciable M admita funciones de Morse perfectas, es condición necesaria que $rk(\pi_1(M)) = b_1$, nos preguntamos si hay alguna otra condición que el grupo fundamental de la variedad deba satisfacer. En particular, nos preguntamos si la presencia de torsión en el grupo fundamental es una obstrucción para la existencia de funciones de Morse perfectas. Para responder a esta pregunta, exhibiremos un ejemplo original de una variedad diferenciable M de dimensión $n \geq 6$ cuyo grupo fundamental tiene torsión, pero que admite funciones de Morse perfectas. Luego, generalizaremos este ejemplo obteniendo un resultado original (Teorema 1.6.6), que establece que para todo $n \geq 6$ y para todo grupo G finitamente presentado, cuyo rango coincida con el rango del abelianizado (como \mathbb{Z} -módulo), existe una variedad diferenciable M cerrada, orientada y conexa, de dimensión n , cuyo grupo fundamental es isomorfo a G y que admite funciones de Morse perfectas. Este teorema será demostrado en el capítulo siguiente. Concluimos entonces que, en dimensiones mayores o iguales a 6, el grupo fundamental no representa, por sí solo, más obstrucciones que la desigualdad $rk(\pi_1(M)) > b_1$.

En el Capítulo 2 desarrollaremos la teoría de manijas y las técnicas para demostrar el teorema de h -cobordismo propuestas por Smale. Estas técnicas serán empleadas para demostrar que en variedades cerradas, simplemente conexas, de dimensión $n \geq 6$, la condición de que la homología sea libre de torsión es suficiente para garantizar la existencia

de funciones de Morse perfectas. Como aplicación de este teorema, deduciremos que las esferas exóticas admiten funciones de Morse perfectas. Además, utilizaremos la teoría de manijas para demostrar el Teorema 1.6.6.

En el Capítulo 3, generalizaremos los resultados del capítulo anterior y demostraremos el Teorema de s -cobordismo. Describiremos el grupo de Whitehead y la torsión de Whitehead, siguiendo [Mil66] y [Coh73], y aplicaremos estas construcciones para obtener un resultado más general sobre la existencia de funciones de Morse perfectas.

Capítulo 1

Teoría de Morse

La teoría de Morse fue introducida por M. Morse en la década de 1920, mientras estudiaba las propiedades de los puntos críticos y el cálculo variacional. Las ideas desarrolladas por el autor nos permiten estudiar la topología de una variedad diferenciable a partir de las funciones suaves a valores reales definidas en ella. Sus contribuciones originales están descriptas en [Mor34]. El objetivo de la primera parte de este capítulo es proporcionar una visión general de la teoría de Morse clásica, presentando sus resultados principales, ejemplos y algunas demostraciones e ideas fundamentales, tomando como referencia el trabajo de Milnor en [Mil63] y [MSS65]. Para más detalle remitimos al lector a dicha fuente, así como también a [Hir12, Capítulo 6].

1.1. Definiciones y resultados básicos

Dada una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, diremos que $p \in M$ es un punto crítico si su diferencial en p es 0. Diremos que $p \in M$ es un punto crítico no degenerado si existe una carta (U, φ) alrededor de p en M tal que la matriz Hessiana de $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ es no degenerada. Es decir, si $\left(\frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi(p)} \right)_{ij}$ es inversible para alguna carta (U, φ) de M alrededor de p .

Notaremos $H_{\varphi(p)}\hat{f}$ a la matriz Hessiana de f en p en la carta (U, φ) . Cuando no querramos hacer énfasis en la carta, la notaremos simplemente como $H_p f$.

Observación 1.1.1. Si existe una carta (U, φ) de M alrededor de p tal que $H_{\varphi}\hat{f}$ es inversible, entonces para toda carta (V, ψ) de M alrededor de p se verifica que $H_{\psi(p)}(f \circ \psi^{-1})$ es inversible. En efecto, notando $\rho = \varphi \circ \psi^{-1}$, se tiene que $f \circ \psi^{-1} = \hat{f} \circ \rho$, con $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Luego,

$$\nabla_{\psi(x)}(f \circ \psi^{-1}) = \nabla_{\varphi(x)}\hat{f} \cdot D_{\psi(x)}\rho \quad (\forall x \in V),$$

y entonces

$$H_{\psi(p)}(f \circ \psi^{-1}) = H_{\varphi(p)}\hat{f} \cdot D_{\psi(p)} + \underbrace{\nabla_{\varphi(p)}\hat{f}}_0 \cdot D_{\psi(p)}^2\rho = H_{\varphi(p)}\hat{f} \cdot D_{\psi(p)}\rho$$

es inversible, al serlo $H_{\varphi(p)}\hat{f}$ y $D_{\psi(p)}$.

Así, la propiedad de ser punto crítico no degenerado es independiente de cartas.

Una forma alternativa de definir punto crítico sin pasar por cartas es pensar al Hessiano como una forma bilineal simétrica. Para ello, dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave y $p \in M$ punto crítico, se define

$$\mathcal{H}_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_p f(v, w) = X_p(Yf)$$

donde X, Y son campos suaves en M tales que $X_p = v$ y $Y_p = w$.

Al ser p un punto crítico de f , $[X, Y]_p(f) = 0$ y como

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf),$$

se tiene que $\mathcal{H}_p(f)(v, w) = \mathcal{H}_p(f)(w, v)$, probando la simetría de $\mathcal{H}_p f$. Más aún, como $X_p(Yf)$ no depende de X y $Y_p(Xf)$ no depende de Y , se sigue que $H_p f$ no depende de los campos X e Y que consideremos, así que es un operador bien definido, bilineal y simétrico.

Diremos que p es un punto crítico no degenerado de f si $\mathcal{H}_p f$ es no degenerada. Notar que si identificamos $T_p M$ con \mathbb{R}^n vía una carta (U, φ) de M alrededor de p y tomamos la matriz de la forma bilineal $\mathcal{H}_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, recuperamos la matriz $H_{\varphi(p)} \hat{f}$. Es claro entonces que las dos definiciones de punto crítico no degenerado coinciden.

Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave y $p \in M$ un punto crítico no degenerado, podemos tomar una carta (U, φ) alrededor de p en M tal que $\left(\frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi(q)} \right)_{ij}$ sea inversible para todo $q \in U$ (achicando U de ser necesario). Luego, p es el único punto crítico de f en U ya que de existir $q \in U - \{p\}$ punto crítico de f , definiendo $g : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) = \left(\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_n} \right)$ vemos que g es suave, su matriz diferencial en q es $\left(\frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi(q)} \right)_{ij}$ y $g(\varphi(p)) = g(\varphi(q)) = 0$, entonces existe $0 < t < 1$ tal que

$$\frac{d}{dt} \Big|_t g(\varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p))) = 0$$

y por lo tanto $D_{\varphi(q)} g$ no es inversible, absurdo.

Esto prueba que los puntos críticos no degenerados son aislados. En particular, si M es compacta, toda función de Morse en M tiene finitos puntos críticos.

El comportamiento de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave alrededor de un punto crítico no degenerado dependerá de su índice.

Definición 1.1.2. Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave y $H_p f$ la matriz Hessiana de f en una carta. $H_p f$ es simétrica y no degenerada, así que admite una escritura de la forma $H_p f = C^T D C$ con D una matriz diagonal con -1 y 1 en la diagonal. Se define el índice de p como la cantidad de -1 en D , y lo notamos i_p .

El índice de p resulta bien definido, no depende de la carta ya que equivale al índice de la forma bilineal $\mathcal{H}_p f$. Este número es la cantidad de autovalores negativos de $H_p f$ y por ende es la cantidad de direcciones principales en las que la función decrece.

En un entorno de un punto crítico no degenerado sabemos cómo se comporta la función. Ese es el resultado del siguiente lema de Morse.

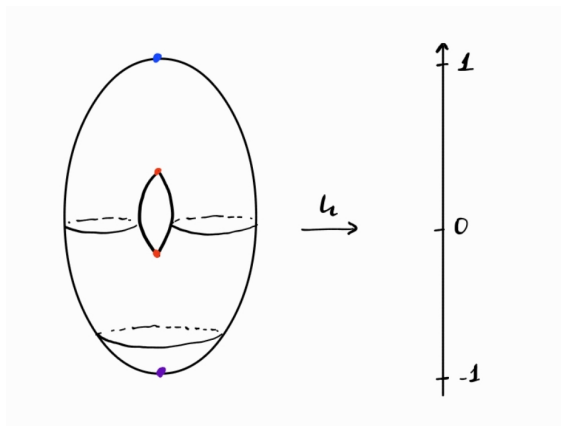


Figura 1.1: Función altura en el toro. Los puntos críticos de índice 1 están representados en rojo, el máximo en azul y el mínimo en violeta.

Lema 1.1.3. Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y $p \in M$ punto crítico no degenerado de índice k , existe (U, φ) carta de M alrededor de p tal que $\varphi(p) = 0$ y $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ satisface

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \quad (\forall x \in \varphi(U)).$$

Definición 1.1.4. Una función de Morse sobre una variedad diferenciable M sin borde es una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos críticos son no degenerados.

En el caso en que M tenga borde, pediremos además que f sea constante en las componentes de borde y que los puntos críticos se hallen únicamente en el interior de M .

Ejemplo 1.1.5. Las siguientes funciones son funciones de Morse.

1. $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$. Esta función tiene como único punto crítico el $(0, 0)$ y su índice es 1.
2. $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$, la función altura definida en la esfera. Esta función tiene dos puntos críticos: un máximo (índice n) y un mínimo (índice 0).
3. $h : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, la función altura definida en el toro. Esta función tiene un máximo, un mínimo y dos puntos silla (ver Figura 1.1).

En toda variedad diferenciable compacta existen funciones de Morse. Más aún, dada una variedad diferenciable M compacta, podemos darle una topología razonable a $C^\infty(M)$ -el conjunto de funciones suaves de M en \mathbb{R} - en la cual las funciones de Morse resultaran densas. Como $C^\infty(M)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial, para definir una topología bastará dar una base de abiertos alrededor de la función 0. Luego, trasladamos esta base a una base de abiertos alrededor de cada función. Sea $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un conjunto de cartas que cubren a M , y sea $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un conjunto de compactos tal que $K_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Notemos por $g_\alpha = g \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Para cada $\delta > 0$ definimos

$$N_\delta(\mathcal{U}, \mathcal{K}) = \left\{ g \in C^\infty(M) : |g_\alpha| < \delta, \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta \text{ y } \left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta \text{ en } \varphi_\alpha(C_\alpha) \forall i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Notar que $\{N_\delta\}_\delta$ es cerrado por intersecciones finitas, así que si consideramos

$$\mathcal{B} = \{f + N_\delta\}_{f \in C^\infty(M), \delta > 0}$$

se tiene que \mathcal{B} es una base topológica. Le damos a $C^\infty(M)$ la topología inducida por esta base, y nos referiremos a ella como la topología C^2 , ya que tiene en cuenta únicamente el comportamiento de las derivadas hasta orden 2. Se puede probar que esta topología no depende del cubrimiento \mathcal{U} , ni del refinamiento por compactos \mathcal{K} elegido.

Con esta topología, las funciones de Morse son densas en $C^\infty(M)$.

Proposición 1.1.6. *Sea M una variedad cerrada, entonces las funciones de Morse forman un abierto denso de $C^\infty(M)$ con la topología C^2 .*

Dada una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos extraer información sobre la topología de M a partir de estudiar cómo varían los conjuntos de nivel de f . Para cada $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $M_c = f^{-1}(-\infty, c]$. Si $\inf f < c < \sup f$, entonces M_c tiene interior no vacío y resulta una subvariedad de codimensión 0 de M , con borde $\partial M_c = f^{-1}(c)$. En caso de que f alcance un valor máximo b , M_b coincidirá con M , y no tendrá borde si M no lo tiene.

Supongamos que tenemos una función de Morse $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $p \in U$, $c = f(p)$ y $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ el gradiente de f en p . Notar que $\nabla f(p)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f y que es ortogonal al conjunto de nivel $f^{-1}(c)$. En particular, ∇f es un campo suave en U , que al restringirlo al borde de la subvariedad $f^{-1}(-\infty, c]$, apunta hacia afuera de la misma.

Ejemplo 1.1.7. Consideremos la función altura $h : (x, y, z) \in M \mapsto z \in \mathbb{R}$, definida sobre el abierto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z\}$. Dado $c > 0$, se tiene que $h^{-1}(c) = \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < c\}$ es un disco abierto de radio \sqrt{c} y las subvariedades M_c y $M_{c'}$ son difeomorfos para todos $c, c' > 0$, basta considerar el difeomorfismo $\rho : M_c \rightarrow M_{c'}$ definido por $\rho(x, y, z) \mapsto (x, y, z + (c' - c))$. Notar que el campo gradiente de h es constantemente $(0, 0, 1)$, y el flujo de dicho campo es $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $\Phi(t, (x, y, z)) = (x, y, z + t)$. Fijando cada $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo y de hecho tomando $t = c' - c$ recuperamos el difeomorfismo ρ .

El ejemplo anterior sugiere que podemos utilizar el flujo del campo gradiente de la función para demostrar que ciertos conjuntos de nivel son difeomorfos. Emplearemos esta técnica en variedades más generales que abiertos de \mathbb{R}^n , para lo cual necesitaremos una definición de campo gradiente para variedades.

Sea g una métrica Riemanniana en M . Esta métrica induce un producto interno $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ en cada tangente, que notaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Al ser $T_p M$ un espacio vectorial de dimensión $n = \dim M$, tenemos un isomorfismo entre $T_p M$ y su dual $(T_p M)^*$. Para cada $\varphi \in (T_p M)^*$, existe un único $v \in T_p M$ tal que $\varphi(w) = \langle v, w \rangle_p$ para todo $w \in T_p M$.

Definición 1.1.8. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Se define el gradiente de f como el campo suave $\text{grad}(f)$ satisfaciendo

$$d_p f(v) = \langle \text{grad}(f)_p, v \rangle_p \quad \text{para cada } p \in M \text{ y } v \in T_p M.$$

Así definido, $\text{grad}(f)$ depende de la métrica Riemanniana. En el caso en que $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica Euclídea, recuperamos el gradiente ∇f .

Observación 1.1.9. Dada (M, g) variedad Riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, se verifica

1. $p \in M$ es punto crítico de f si y solo si $\text{grad} f_p = 0$,

2. si $\alpha : J \rightarrow M$ es una curva integral de $\text{grad}(f)$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto alrededor de 0, y $\alpha(t_0) = q$, entonces

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f \circ \alpha(t) = \langle \text{grad}(f)_q, \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \alpha(t) \rangle_q = \langle \text{grad}(f)_q, \text{grad}(f)_q \rangle_q \geq 0.$$

En particular, f es estrictamente creciente sobre las curvas de nivel que no pasan por puntos críticos (o equivalentemente, que no arrancan en puntos críticos).

Otra forma de definir campo gradiente es la introducida por Milnor para variedades compactas en [MSS65].

Definición 1.1.10. Sea M una variedad compacta, y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Decimos que un campo suave ζ en M es un campo gradiente para f si

1. $\zeta(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ es positiva en $M - \{\text{puntos críticos de } f\}$, y
2. Para cada punto crítico $p \in M$ de f , existe una carta (U, φ) tal que la escritura en estas coordenadas de f y ζ es

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1, \dots, x_n) &= f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2, \\ \hat{\zeta}(x_1, \dots, x_n) &= (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

siendo k el índice de p .

Campos gradientes de este estilo hay muchos, ya que fuera de los puntos críticos solo pedimos positividad. La ventaja de esta definición es que nos permite trabajar en el contexto de variedades diferenciables sin tener que introducir una métrica Riemanniana y, a la hora de pegar variedades o componer cobordismos, no tener que preocuparnos por estos detalles.

El ejemplo 1.1.7 es un caso muy particular de uno de los principales resultados de la teoría de Morse, enunciado a continuación.

Teorema 1.1.11. Sea M una variedad diferenciable sin borde, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f^{-1}([a, b])$ es compacto y no posee puntos críticos. Entonces M_a es difeomorfo a M_b y $M_a \subset M_b$ es un retracto (suave) por deformación fuerte.

Demostración. La idea de la demostración consiste en

1. Definir un campo $X \in \mathcal{X}(M)$ con soporte compacto, tal que coincida con $\frac{\text{grad}(f)}{\|\text{grad}(f)\|^2}$ en un entorno de $f^{-1}([a, b])$.
2. Considerar el flujo Φ del campo X , el cual está definido en $\mathbb{R} \times M$, por ser X de soporte compacto. La idea consiste en levantar M_a en la dirección de las trayectorias del campo X , observando que en $f^{-1}[a, b]$ el campo gradiente de X tiene norma 1 y entonces la velocidad de las curvas integrales de X es 1. Esto permite ir levantando los conjuntos de nivel de esta región al mismo tiempo e induce un difeomorfismo entre M_a y M_b . Para obtener un retracto por deformación fuerte, se fija M_a y se aplasta M_b siguiendo la dirección de las curvas integrales de forma tal que a tiempo t se haya recorrido una distancia de $t(b - a)$.

□

De hecho, la demostración anterior permite probar el siguiente teorema.

Teorema 1.1.12. *Sea M una variedad diferenciable compacta, con borde y $f : M \rightarrow [a, b]$ una función suave sin puntos críticos en $M - \partial M$, con $f(\partial M) = \{a, b\}$, entonces existe $G : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M$ difeomorfismo tal que $fG(x, t) = t$.*

En particular $f^{-1}(s)$ es difeomorfo a $f^{-1}(t) \forall s, t \in [a, b]$.

Una de las aplicaciones clásicas del teorema anterior es el teorema de Reeb, que establece una condición suficiente para que una variedad diferenciable cerrada sea homeomorfa a una esfera.

Teorema 1.1.13 (Reeb). *Sea M^n una variedad diferenciable cerrada y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave con exactamente 2 puntos críticos, entonces M es homeomorfa a S^n .*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave con exactamente 2 puntos críticos, que han de ser un máximo y un mínimo porque M es compacta. Sean $p \in M$ mínimo, $q \in M$ máximo, $a = f(p)$ y $b = f(q)$.

Supongamos primero que la función f es de Morse. Sean $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas en M alrededor de p y q tales que

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = a + x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad x \in \varphi(U),$$

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = b - x_1^2 - \dots - x_n^2 \quad x \in \psi(V).$$

Tomemos $\epsilon > 0$ lo suficientemente chico de forma tal que $M_{a+\epsilon^2} = f^{-1}(-\infty, a + \epsilon^2] \subseteq U$ y $f^{-1}([b - \epsilon^2, \infty)) \subseteq V$. Se tiene que

1. $M_{a+\epsilon^2}$ es difeomorfo a D^n ya que

$$M_{a+\epsilon^2} = \{x \in U : f(x) \leq a + \epsilon^2\} \xrightarrow{\cong} \{x \in \varphi(U) : a + \|x\|^2 \leq a + \epsilon^2\} \cong D^n.$$

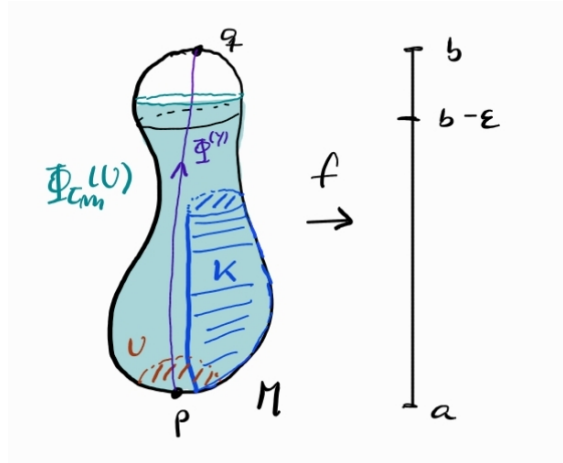
De forma similar, $f^{-1}([b - \epsilon^2, \infty))$ es difeomorfo a D^n .

2. $f^{-1}([a + \epsilon^2, b - \epsilon^2])$ es difeomorfo a $S^{n-1} \times [a + \epsilon^2, b - \epsilon^2]$. Esto se sigue del teorema 1.1.12 y de que $\partial M_{a+\epsilon^2} = f^{-1}(a + \epsilon^2)$ es difeomorfo a S^{n-1} .

Luego M es homeomorfa a $D^n \cup_l S^{n-1} \times I \cup_j D^n$, que a su vez es homeomorfa a S^n .

El caso general, en el que p y q pueden ser puntos degenerados, puede leerse de [Mil64]. La idea consiste en probar que $M - q$ es difeomorfo a \mathbb{R}^n usando el resultado de Brown y Satallings, que dice que toda variedad diferenciable con la propiedad de que todo compacto está contenido en un abierto difeomorfo a \mathbb{R}^n es ella misma difeomorfa a \mathbb{R}^n . Para verificar que $M - q$ tiene esta propiedad, se toma una carta (U, φ) alrededor de p tal que U es precompacto y $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. Dado $K \subseteq M - q$ compacto, el abierto a considerar es un abierto difeomorfo a U (y por lo tanto difeomorfo a \mathbb{R}^n) que se obtiene estirando U en la dirección de las curvas integrales del campo gradiente de f hasta que cubra a K . Daremos los detalles de este paso ya que no se encuentran en la referencia dada.

Sean f, M, p y q como antes y sea $K \subseteq M - q$ un compacto. Como f alcanza su máximo valor en q únicamente, se tiene que $f(x) < b$ para todo $x \in K$. Al ser K y \bar{U} compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $K \subseteq f^{-1}[a, b - \epsilon]$ y $f(\partial U) \subseteq [a, b - \epsilon]$. Sea Φ el flujo del campo gradiente de f , que por ser M compacta está definido a todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Notamos por $\Phi^{(x)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ a la curva integral que arranca en x . Consideremos la función continua $\tau : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por


 Figura 1.2: Función f con dos puntos críticos en M .

$$\tau(x) = t_x = \min \left\{ t \in \mathbb{R} : f(\Phi^{(x)}(t)) = b - \epsilon \right\}.$$

Observar que el conjunto sobre el cual estamos tomando mínimo es no vacío, gracias a que f es creciente en la curvas integrales del campo gradiente. Al ser ∂U compacto, τ alcanza un máximo t_m . Luego,

$$f(\Phi^{(x)}(t)) \geq b - \epsilon \text{ para todo } t \geq t_m \text{ y para todo } x \in \partial U. \quad (1.1)$$

Estiraremos U utilizando el difeomorfismo $\Phi_{t_m} : M \rightarrow M$, $\Phi_{t_m}(y) = \Phi^{(y)}(t_m)$. Así, $\Phi_{t_m}(U)$ es un abierto de M difeomorfo a \mathbb{R}^n . Veremos que este abierto contiene a K viendo que contiene $f^{-1}[a, b - \epsilon)$, como se ilustra en la Figura 1.2.

En efecto, sea $y \in f^{-1}[a, b - \epsilon)$. Si $y = p$, entonces $y \in U$ y como $\varphi^{(y)}$ es constantemente y se tiene que $y \in \Phi_{t_m}(U)$. Si $y \neq p$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^{(y)}(t) = p$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^{(y)}(t) = q$, de modo que existe algún tiempo t en el que $\Phi^{(y)}(t) \in \partial U$. Sea $t_0 > 0$ el máximo tal que $\Phi_{-t_0}^{(y)} \in \partial U$. Luego, para todo $t > t_0$ se tiene que $\Phi^{(y)}(-t) \in U$. A su vez, si $t_0 \geq t_m$ tendríamos que el punto $x = \Phi^{(y)}(-t_0) \in \partial U$ satisface que $f(\Phi^{(x)}(t_0)) = f(y) \geq b - \epsilon$ por (1.1), lo cual es absurdo. Así, $t_0 < t_m$ y existe $\delta > 0$ tal que $t_0 + \delta < t_m$. Vemos entonces que $\Phi_{-(t_0+\delta)}^{(y)} \in U$ y al ser $t_0 + \delta - t_m < 0$, que

$$\Phi_{t_0+\delta-t_m} \circ \Phi_{-t_0-\delta}^{(y)} \in U.$$

En consecuencia, se verifica

$$y = \Phi_{t_m}(\Phi_{t_0+\delta-t_m} \circ \Phi_{-t_0-\delta}^{(y)}) \in \Phi_{t_m}(U),$$

como queríamos. □

Dado X un espacio topológico, podemos pegarle un disco de dimensión $k \in \mathbb{N}_0$ por medio de una función $\varphi : \partial D^k \rightarrow X$. Se obtiene así un espacio topológico

$$X \cup_{\varphi} D^k = \frac{X \cup D^k}{\{x \sim \varphi(x) : x \in \partial D^k\}}.$$

Cabe destacar que φ no es necesariamente inyectiva, lo que implica que al pegarle el disco de dimensión k a X , es posible que se identifiquen puntos del borde del disco.

Se llama k -celda al interior de D^k , visto en $X \cup_{\varphi} D^k$, y se la denota e^k . Diremos que el espacio $X \cup_{\varphi} D^k$ se obtiene a partir de X adjuntando una k -celda, y lo notaremos $X \cup e^k$. A continuación, enunciaremos otro de los principales resultados de la teoría de Morse, el cual explica cómo cambian los conjuntos de nivel de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ al pasar por un punto crítico.

Teorema 1.1.14. *Sea M sin borde, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in M$ punto crítico de f de índice k , $c = f(p)$ y $\epsilon > 0$ tal que $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ no contiene puntos críticos distintos de p . Entonces $M_{c+\epsilon}$ es homotópicamente equivalente a adjuntarle una k -celda a $M_{c-\epsilon}$.*

Recordemos que un CW-complejo es un espacio topológico que se construye de manera inductiva. Se parte de un conjunto discreto de puntos (0-celdas) no vacío, conocido como el 0-esqueleto. Luego, para cada n , se le adjuntan n -celdas al $(n - 1)$ -esqueleto, el cual está compuesto por la unión de todas las celdas de dimensión menor o igual a $(n - 1)$. Aplicando el teorema anterior cada vez que se pase por un valor crítico de la función, obtendremos un CW-complejo homotópicamente equivalente a M . Ese es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1.1.15. *Sea M una variedad cerrada y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse, entonces M es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con tantas k -celdas como puntos críticos de índice k .*

Demostración. En esta demostración, utilizaremos la notación $X \simeq Y$ para indicar que X e Y son homotópicamente equivalentes.

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, con $a = \min f, b = \max f$. Sabemos que si c es un valor crítico de f y $\epsilon > 0$ es lo suficientemente chico como para que $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ no contenga otro valor crítico distinto de c , entonces

$$M_{c+\epsilon} = M_{c-\epsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_r},$$

donde r es la cantidad de puntos en $f^{-1}(c)$ y k_1, \dots, k_r los índices de estos puntos. Si ya supiésemos que $M_{c-\epsilon}$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo, con tantas celdas de dimensión k como puntos críticos de índice k haya en $f^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$, entonces podríamos probar que $M_{c+\epsilon}$ es también un CW-complejo, con tantas celdas de tamaño k como puntos críticos de índice k haya en $f^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$, utilizando que

1. Si X es un CW complejo y se le adjunta una k -celda, entonces $X \cup e^k$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo Y que tiene a X como subcomplejo, y cuyas celdas son las de X más una de dimensión k .
2. Si $N \simeq X$, entonces $N \cup e^k \simeq X \cup e^k$.

Estos resultados se deducen de aproximación celular (ver por ejemplo [Hat02]) y del gluing theorem for adjunctions spaces [Bro06, Teorema 7.5.7].

Demostremos el teorema haciendo inducción en la cantidad de valores críticos de f . Sean $a = c_0 < c_1 < \dots < c_s = b$ los valores críticos de f . Como f alcanza máximo y mínimo, sabemos que $s \geq 1$. M_{c_0} es un conjunto finito de puntos, por lo que es un CW-complejo de dimensión 0. Sea $\epsilon > 0$ tal que $c_0 < c_1 - \epsilon < c_1 < c_1 + \epsilon < c_2$. Como no hay valores críticos en $f^{-1}(c_0, c_1 - \epsilon]$, por el teorema 1.1.12 se tiene que $M_{c_1-\epsilon} \equiv M_{c_0} \times [c_0, c_1 - \epsilon]$. En particular, $M_{c_1-\epsilon} \equiv M_{c_0}$. Por el teorema 1.1.14, $M_{c_1+\epsilon} \simeq M_{c_1-\epsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_r}$. Así que

$$M_{c_1+\epsilon} \simeq M_{c_0} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_{r_1}}.$$

Por el ítem 1, $M_{c_0} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_r}$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con tantas celdas de dimensión k como puntos críticos de índice k haya en $f^{-1}[c_0, c_1 + \epsilon]$. Luego el teorema vale cuando hay 2 valores críticos, ie. cuando $s \geq 1$.

Supongamos cierto el teorema para f con m valores críticos. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse con $m + 1$ valores críticos. Al igual que antes, $M_{c_{m-1}} \equiv M_{c_{m-\epsilon}}$, y

$$M_{c_{m+\epsilon}} \simeq M_{c_{m-\epsilon}} \cup e_1^n \dots \cup e_r^n \simeq M_{c_{m-1}} \cup e_1^n \dots \cup e_r^n,$$

con $r = \#f^{-1}(c_m)$ y que por ser $c_m = \max f$, estos puntos son todos de índice $n = \dim M$. Por hipótesis inductiva, $M_{c_{m-1}} \simeq X$, con X un CW-complejo con la cantidad apropiada de celdas de cada dimensión. Aplicando el ítem 2, se tiene

$$M_{c_{m-1}} \cup e_1^n \dots \cup e_r^n \simeq X \cup e_1^n \dots \cup e_r^n$$

y aplicando el ítem 1, $X \cup e_1^n \dots \cup e_r^n \simeq Y$, con Y un CW-complejo con las celdas de X más las celdas r celdas de dimensión n , por lo que Y tiene la cantidad apropiada de celdas de cada dimensión. Juntando todo, se tiene que $M = M_{c_{m+\epsilon}} \simeq Y$. □

1.2. Desigualdades de Morse

En lo que sigue, consideraremos la homología con coeficientes en \mathbb{Z} . Recordemos que un complejo de cadenas (C_*, d) es una sucesión de morfismos de \mathbb{Z} -módulos

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tal que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Decimos que es finitamente generado si todos los C_j son finitamente generados y son todos 0 salvo finitos.

Notaremos por $rg(\mathcal{M})$ al rango de un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado \mathcal{M} , el cual es la dimensión de su parte libre.

Dado un complejo de cadenas (C_*, d) finitamente generado, se define el k -ésimo número de Betti b_k como el rango de $H_k(C_*)$. Así, $b_k = rg\left(\frac{\ker d_k}{\text{Im } d_{k+1}}\right) \leq rg(C_k)$. Será de nuestro interés el caso en que el complejo de cadenas está formado por \mathbb{Z} -módulos libres. En este caso, si g_k es la cantidad mínima de generadores de $H_k(C_*)$, entonces

$$b_k \leq g_k \leq \dim(\ker d_k) \leq \dim(C_k).$$

Sea $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $C_j = 0$ para todo $j > r$. Haciendo inducción en r se prueba que

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j rg(C_j) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b_j. \quad (1.2)$$

En efecto, si $r = 0$ entonces $C_0 = H_0(C_*)$, de modo que $rg(C_0) = b_0$. Para el paso inductivo, supongamos que la ecuación (1.2) vale para $r - 1$. Sea $i_k = rg(\text{Im } d_k)$, $n_k = rg(\ker d_k)$ y $c_k = rg(C_k)$. Notar que $b_r = n_r$ pues $d_{r+1} = 0$ e $i_r = c_r - n_r$, así que

$$c_r = b_r + i_r. \quad (1.3)$$

Por otro lado, el complejo de cadenas (C'_*, d') definido por

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \frac{C_{r-1}}{\text{Im } d_r} \xrightarrow{d_{r-1}} \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

también es finitamente generado, $b'_j = b_j$ para todo $0 \leq j \leq r-1$, y como $C'_j = 0$ para todo $j > r-1$, aplica la hipótesis inductiva. Se tiene entonces que

$$(-1)^{r-1}rg \left(\frac{C_{r-1}}{Im d_r} \right) + \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j c_j = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j b_j. \quad (1.4)$$

Como $rg \left(\frac{C_{r-1}}{Im d_r} \right) = c_{r-1} - i_r = c_{r-1} - (c_r - b_r)$, se tiene que

$$(-1)^{r-1}rg \left(\frac{C_{r-1}}{Im d_r} \right) = (-1)^{r-1}c_{r-1} + (-1)^r c_r + (-1)^{r-1}b_r.$$

La igualdad deseada se obtiene reemplazando la ecuación anterior en (1.4).

Si X es un espacio topológico con homología finitamente generada, se define la característica de Euler de X como

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i.$$

Cuando X es un CW-complejo compacto (es decir, con finita cantidad de celdas), la igualdad (1.2) nos dice que $\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i$, donde α_i denota la cantidad de celdas de dimensión i . Esto se deduce del hecho que la homología de X se puede calcular a partir de un complejo de cadenas, donde cada C_i es el \mathbb{Z} -módulo libre generado por las i -celdas de X .

Como consecuencia de (1.2) se deducen las desigualdades de Morse.

Proposición 1.2.1 (Desigualdades de Morse). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse y c_k la cantidad de puntos críticos de índice k , se verifican las siguientes desigualdades:*

1. *Desigualdad débil: $b_k \leq c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

2. *Desigualdad fuerte:*

$$b_j - b_{j-1} + \dots + (-1)^j b_0 \leq c_j - c_{j-1} + \dots + (-1)^j c_0$$

para cada $0 \leq j \leq n$.

3. $\chi(M) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j$.

Demostración. La igualdad (3) se deduce del párrafo previo a la proposición, y del hecho que si M es homotópicamente equivalente a un CW-complejo X , entonces $H_*(M) = H_*(X)$ y $\chi(M) = \chi(X)$. La desigualdad fuerte implica la débil, así que probaremos la fuerte. Sabemos que M es homotópicamente equivalente a un CW-complejo X con c_k celdas de dimensión k . Dado $j \in \{0, \dots, n\}$ consideramos el j -esqueleto $X^{(j)}$. Así, el complejo de cadenas de $X^{(j)}$ viene dado por

$$0 \rightarrow C_j \xrightarrow{d_j} C_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0.$$

Si $i < j$, entonces $b_i(X^{(j)}) = b_i(X) = b_i(M)$. Mientras que $H_j(X^{(j)}) = \ker(d_j)$, y $H_j(X)$ es un cociente de $H_j(X^{(j)})$, por lo que $b_j(X) \leq b_j(X^{(j)})$. Luego,

$$b_j(X) - b_{j-1}(X) + \dots + (-1)^j b_0(X) \leq \underbrace{b_j(X^{(j)}) - b_{j-1}(X^{(j)}) + \dots + (-1)^j b_0(X^{(j)})}_{(-1)^j \chi(X^{(j)})}$$

y como

$$(-1)^j \chi(X^{(j)}) = c_j - c_{j-1} + \dots + (-1)^j c_0,$$

se deduce la desigualdad deseada. \square

Corolario 1.2.2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse tal que $c_k = 0$ o $c_{k-1} = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, entonces $b_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que $c_j = b_j$ para todo $j < k$. Veamos que $c_k = b_k$. Si $c_k = 0$, entonces $b_k = 0$. Si $c_k \neq 0$, por hipótesis ha de ser $c_{k+1} = 0$ y entonces $b_{k+1} = 0$. Usando la desigualdad fuerte de Morse para $k+1$ se tiene

$$\underbrace{b_{k+1}}_0 - b_k + \dots + (-1)^{k+1} b_0 \leq \underbrace{c_{k+1}}_0 - c_k + \dots + (-1)^{k+1} c_0.$$

Al ser $c_j = b_j$ para todo $j < k$, estos términos se cancelan y se deduce que $-b_k \leq -c_k$, por lo que $c_k \leq b_k$. Como siempre se tiene que $b_k \leq c_k$, probamos que $c_k = b_k$. Notar que, para $k = 0$, la condición de la hipótesis es vacía. Luego, se verifica la igualdad $c_k = b_k$ para todo $k \geq 0$. \square

A una función de Morse que cumpla $b_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se la llama función de Morse perfecta (ver Sección 1.5).

1.3. Cohomología de de Rham

En esta sección se recordarán las nociones básicas sobre la cohomología de de Rham, que pueden encontrarse en [Lee03] o [BT13].

Notemos por $\Omega^k(M)$ al \mathbb{R} -espacio vectorial de k -formas diferenciales en M , y sea $d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ la diferencial exterior. La cohomología de de Rham de M es la cohomología del complejo de cadenas de \mathbb{R} -espacios vectoriales

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0.$$

Notación: $H_{dR}^k(M) = \frac{\ker d_k}{\text{Im}(d_{k-1})}$.

$H_{dR}^k(M)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial y notamos por $(H_{dR}^k(M))^*$ a su espacio dual. Dada ω una k -forma en M , notamos por $[\omega] \in H_{dR}^k(M)$ a su clase.

Dados $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^s(M)$, se define su producto exterior (o producto wedge) como la $k+s$ forma $\omega \wedge \eta$ en M que satisface

$$\omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+s}) = \frac{1}{k!s!} \sum_{\sigma \in S_{k+s}} (-1)^\omega \omega(X_1, \dots, X_k) \eta(X_{k+1}, \dots, X_{k+s})$$

para todos X_1, \dots, X_{k+s} campos suaves en M . La diferencial exterior satisface la siguiente fórmula respecto del producto exterior:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

para toda $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^s(M)$.

Gracias a esta fórmula, el producto exterior $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{k+s}(M)$ pasa bien a la cohomología y define un operador \mathbb{R} -lineal

$$\wedge : H_{dR}^k(M) \times H_{dR}^{n-k}(M) \rightarrow H_{dR}^n(M), [\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta].$$

Si M es cerrada y orientada, el teorema de Stokes nos da la buena definición del operador de integración $I : [\omega] \in H_{dR}^n(M) \mapsto \int_M \omega$.

Teorema 1.3.1 (Dualidad de Poincaré). *Sea M una variedad diferenciable cerrada y orientable de dimensión n . El operador*

$$D : H_{dR}^k(M) \rightarrow \left(H_{dR}^{n-k}(M) \right)^*$$

$$[\omega] \mapsto \left(D([\omega]) : [\eta] \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \right)$$

es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales. En particular, $H_{dR}^k(M) \simeq H_{dR}^{n-k}(M)$ como \mathbb{R} -espacios vectoriales.

De Rham probó que los grupos de cohomología singular con coeficientes en \mathbb{R} , que notamos $H^k(M, \mathbb{R})$, son isomorfos a los grupos de cohomología $H_{dR}^k(M)$. A su vez, el teorema de coeficientes universales en cohomología nos dice que

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T_{k-1} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

donde T_{k-1} denota la parte de torsión de $H_{k-1}(M, \mathbb{Z})$.

Teniendo en cuenta que $\dim H^k(M, \mathbb{R}) = \text{rg} H^k(M, \mathbb{Z})$, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.3.2. *Si M es una variedad diferenciable, cerrada y orientada, de dimensión n , entonces $b_k = b_{n-k}$, para todo $k = 0, \dots, n$.*

1.4. Pegado de variedades y cirugía

Dadas M y N variedades diferenciables de dimensión n , con borde, nos interesa armarnos una variedad diferenciable pegando M y N a través de su borde. Nos concentramos primero en el caso en que los bordes son difeomorfos, aunque puede hacerse en general con componentes de borde.

Decimos que $V \subseteq M$ es un **dominio regular** si V es una subvariedad de M de codimensión 0, con borde y cerrada como espacio topológico.

Teorema 1.4.1. *Sean M, N variedades diferenciables de dimensión n , con borde, y $h : \partial N \rightarrow \partial M$ un difeomorfismo. El espacio topológico $M \cup_h N = \frac{M \cup N}{\{x \sim h(x)\}}$ es una variedad diferenciable con una estructura diferenciable inducida por M y N de forma tal que existen dominios regulares M', N' difeomorfos a M y N tales que*

$$M \cup_h N = M' \cup N' \text{ y } M' \cap N' = \partial M' = \partial N'.$$

La demostración puede leerse de [Lee03]. Mencionaremos únicamente cómo es la estructura diferenciable que estamos considerando. Sea $\rho : M \overset{d}{\cup} N \rightarrow M \cup_h N$ la proyección al cociente. Sea \mathcal{A} un atlas del interior de M y \mathcal{B} un atlas del interior de N . El atlas que consideraremos en $M \cup N$ será $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, con \mathcal{C} un conjunto de cartas alrededor de los puntos $p \in \partial N$ que describimos a continuación. Consideremos $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$ entornos cuello de M y N , siendo $\iota_M : [0, 1) \rightarrow \partial M$ y $\iota_N : [0, 1) \rightarrow \partial N$ los respectivos embeddings. Para cada $p \in \partial N$, sea (B, φ) una carta alrededor de p en ∂N , con B lo suficientemente chico de forma tal que $h(B)$ sea un dominio de una carta φ en ∂M . Tenemos un homeomorfismo a un abierto de \mathbb{R}^n dado por $\phi : (-1, 1) \times B \rightarrow (-1, 1) \times \varphi(B)$, $\phi(t, x) = (t, \varphi(x))$. Precomponiendo ϕ con la inversa del homeomorfismo $f : (-1, 1) \times B \rightarrow U \cup_h V$ definido por

$$f(t, x) = \begin{cases} \rho(\iota_M(-t, h(x))) & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ \rho(\iota_N(t, x)) & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

obtenemos una carta de $M \cup_h N$ alrededor de p . El conjunto de estas cartas es el conjunto \mathcal{C} mencionado.

Más aún, esta estructura diferenciable es única a menos de difeomorfismo.

Lema 1.4.2. Sean $W_1 = M_1 \cup N_1, W_2 = M_2 \cup N_2$ variedades diferenciables de dimensión n sin borde, con M_i, N_i subvariedades de dimensión n con borde $V_i = \partial M_i = \partial N_i = M_i \cap N_i$, $i = 1, 2$. Supongamos que existe $h : W_1 \rightarrow W_2$ homeomorfismo tal que $h|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$ y $h|_{N_1} : N_1 \rightarrow N_2$ son difeomorfismos. Entonces existe $f : W_1 \rightarrow W_2$ difeomorfismo que coincide con h afuera de un entorno de V_1 .

Una demostración posible es usando el hecho de que dos entornos cuellos cualesquiera de una variedad diferenciable con borde son isotópicos, como lo hace Hirsch en [Hir12, Teorema 8.1.9]. Otra demostración puede hallarse en [Mun67].

Notar que si M y N son conexas, entonces $M \cup_h N$ también lo es. En el caso en que M y N sean orientadas, se tiene la siguiente observación.

Observación 1.4.3. Si M y N son variedades orientadas, de dimensión n , y $h : \partial N \rightarrow \partial M$ es un difeomorfismo que invierte la orientación, entonces podemos darle una orientación a $M \cup_h N$ a partir de la de M y la de N . Basta ver que podemos orientar los puntos de $h(\partial N)$ en $M \cup_h N$ de forma compatible con las orientaciones de M y N . Si $p \in \partial N$ y $\eta \in T_p N$ es un vector que apunta hacia el exterior de N , entonces $f_*(\eta)$ es un vector en $T_{f(p)} M$ que apunta hacia el interior de M . Tomando entornos cuello $\iota_M : [0, 1) \rightarrow \partial M$, $\iota_N : [0, 1) \rightarrow \partial N$, y la carta f definida en \mathcal{C} , vemos que se vuelve a revertir hacia donde apunta $f_*(\eta)$ en M (mirar la coordenada $t \in (-1, 1)$). Así, tomando \mathcal{A}, \mathcal{B} atlas orientados de los interiores de M y N , y \mathcal{C} el conjunto de cartas definido anteriormente, pero tomando cartas (B, φ) orientadas de ∂N -con la orientación inducida en el borde-, se obtiene un atlas orientado de $M \cup_h N$.

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Notaremos por $c_k(f)$ a la cantidad de puntos críticos de f de índice k y por $c(f)$ a la cantidad total de puntos críticos. Nos interesa no solo pegar variedades a través de su borde, sino también funciones de Morse. En esa línea, presentamos el siguiente resultado, que será fundamental para construir funciones de Morse a partir de otras que ya conozcamos.

Lema 1.4.4. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de Morse tales que

$$f(\partial M) = \max f = b = g(\partial N) = \min g.$$

Sean ξ y ξ' campos gradientes para f y g respectivamente, normalizados salvo en pequeños entornos de los puntos críticos. Entonces, existe $F : M \cup_h N \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, que coincide con f en M , con g en N y tal que $\xi \cup_h \xi'$ es un campo gradiente para F . En particular, $c_k(F) = c_k(f) + c_k(g)$ para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. A la hora de dar el atlas, para armar el conjunto de cartas \mathcal{C} se ha de tomar entornos cuello alrededor de ∂M y ∂N , que surjan de considerar las curvas integrales de los campos gradientes de f y g normalizados. Así, f y g se comportan de forma lineal en los respectivos entornos cuello. Luego, al pegar estos cuellos para formar las cartas, las funciones se pegarán bien y el pegado resultará suave. En este escenario, es claro entonces que $\xi \cup_h \xi'$ es un campo gradiente para $F = f \cup_h g$. \square

Una primera aplicación de este lema se encuentra al final del capítulo, donde, a partir de una estructura celular de S^n , obtendremos una función de Morse con el mismo

número de puntos críticos que celdas en la estructura dada.

Sean M, N variedades diferenciables de dimensión n , con borde, y $f, g : \partial N \rightarrow \partial M$ dos difeomorfismos. Nos gustaría poder determinar cuándo $M \cup_f N$ y $M \cup_g N$ son difeomorfas. Si podemos deformar f en g , entonces lo serán. La noción de isotopía hace precisa esta afirmación.

Definición 1.4.5. Sean Q, M variedades diferenciables, una isotopía de Q en M es una función suave $F : Q \times I \rightarrow M$, tal que $F_t : Q \rightarrow M$ es un embedding para todo $t \in I$.

Decimos que dos embeddings $f, g : Q \rightarrow M$ son isotópicos si existe una isotopía $F : Q \times I \rightarrow M$ tal que $F_0 = f$ y $F_1 = g$.

En el caso en que $Q = M$ y $F_t : M \rightarrow M$ sea un difeomorfismo para todo $t \in I$ diremos que F es una **difeotopía** o una isotopía ambiente. También, en caso de tener $f, g : Q \rightarrow M$ difeomorfismos, diremos que son difeomorfismos isotópicos cuando la isotopía F sea un difeomorfismo para todo $t \in I$.

A continuación, enunciamos los resultados principales de extensión de isotopías. Para una demostración de los mismos ver [Hir12].

El soporte de una isotopía $F : V \times I \rightarrow M$ se define como la clausura del conjunto de puntos $x \in V$ tales que $F_t(x) \neq F_0(x)$ para algún $t \in I$. Lo notaremos $Supp(F)$,

$$Supp(F) = \overline{\{x \in V : F(x, t) \neq F(x, 0) \text{ para algún } t\}}.$$

Teorema 1.4.6. Sea $Q \subseteq M$ una subvariedad compacta y $F : Q \times I \rightarrow M$ una isotopía de Q en M . Si $F(Q \times I) \subseteq \partial M$ o $F(Q \times I) \subseteq M - Int(\partial M)$, entonces F se extiende a una difeotopía en M con soporte compacto.

Dada una isotopía $F : Q \times I \rightarrow M$ se define su recorrido como el embedding

$$\hat{F} : Q \times I \rightarrow M \times I, \quad \hat{F}(x, t) = (F(x, t), t).$$

Teorema 1.4.7. Sea $U \subseteq M$ abierto y $A \subseteq U$ compacto. Si $F : U \times I \rightarrow M$ es una isotopía tal que $\hat{F}(Q \times I) \subseteq M \times I$ es abierto, entonces existe una difeotopía \tilde{F} de M con soporte compacto y que coincide con F en un entorno de $A \times I$.

Teorema 1.4.8. Sean N, M variedades diferenciables y $Q \subseteq N$ una subvariedad compacta. Dados dos embeddings $f_0, f_1 : Q \rightarrow M - \partial M$ isotópicos en $M - \partial M$ tal que uno de los dos se extiende a un embedding $N \rightarrow M$, entonces el otro también.

Teorema 1.4.9. Sean M, N variedades diferenciables de dimensión n , con borde. Si $f, g : \partial N \rightarrow \partial M$ son difeomorfismos isotópicos, entonces $M \cup_f N$ y $M \cup_g N$ son difeomorfos vía un difeomorfismo ϕ que manda M en M y N en N .

Demostración. Sea $F : \partial N \times I \rightarrow \partial M$ una isotopía tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y F_t es un difeomorfismo para todo $t \in I$. Tomando $G = g^{-1}F : \partial N \times I \rightarrow \partial N$ tenemos una difeotopía entre $g^{-1}f$ y la identidad Id . Veamos que podemos extender $g^{-1}f$ a un difeomorfismo $h : N \rightarrow N$. Primero extendemos la difeotopía G a $\partial N \times [0, 1 + \frac{1}{2}]$ definiendo $G_t = Id$ para todo $1 \leq t \leq 1 + \frac{1}{2}$. Consideramos un entorno cuello de $\iota : \partial N \times [0, 2) \rightarrow N$ y definimos $h : N \rightarrow N$ como

$$h(p) = \begin{cases} \iota(G_t(x), t) & \text{si } p = \iota(x, t), 1 \leq t \leq 1 + \frac{1}{2} \\ p & \text{si } p \in N - \iota(\partial N \times [0, 1]) \end{cases}$$

Así definida, h es un difeomorfismo y extiende a $g^{-1}f$. Notar que para todo $x \in \partial N$ se tiene que $g(h(x)) = gg^{-1}f(x) = f(x)$. Podemos entonces definir $\varphi : M \cup_f N \rightarrow M \cup_g N$ de forma tal que $\varphi|_M = Id$ y $\varphi_N = h$. El mapa φ es el difeomorfismo que se buscaba. \square

Sea M una variedad diferenciable cerrada, conexa, de dimensión n y sea $\varphi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow M$ un embedding. Sea $M' = M - Int(\varphi(S^k \times D^{n-k}))$, M' es una variedad diferenciable de dimensión n , con borde $\partial M' = \varphi(S^k \times \partial D^{n-k})$. Aplicando el teorema 1.4.1, obtenemos una variedad diferenciable $M[\varphi] = M' \cup_{\varphi|_{S^k \times \partial D^{n-k}}} D^{k+1} \times S^{n-k-1}$.

Definición 1.4.10. Dada M variedad diferenciable cerrada, conexa, de dimensión n y $\varphi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow M$ un embedding, se define la cirugía de tipo $(k, n - k)$ en M con mapa φ como la variedad diferenciable

$$M[\varphi] = M - Int(\varphi(S^k \times D^{n-k})) \cup_{\varphi|_{S^k \times \partial D^{n-k}}} D^{k+1} \times S^{n-k-1}.$$

Así definida, $M[\varphi]$ resulta cerrada, conexa y de la misma dimensión que M . Notar que para cualquier $x \in D^{n-k}$, la clase de homotopía de $\varphi|_{S^k \times \{x\}}$ en M pasa a ser nula en $\pi_k(M[\varphi])$.

Si M es orientada, para que la variedad $M[\varphi]$ sea orientada con la orientación inducida por M , las orientaciones de $S^k \times S^{n-k-1}$ como borde de $M - \varphi(S^k \times D^{n-k})$ y como borde de $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ deben ser opuestas. Así, la función de pegado -que es la identidad- revierte la orientación y, por la observación 1.4.3, define una orientación compatible en $M[\varphi]$. Si φ preserva la orientación usual de $S^k \times D^{n-k}$, entonces la orientación de $S^k \times S^{n-k-1}$ como borde de $M - \varphi(S^k \times D^{n-k})$ coincide con la orientación estándar de $S^k \times S^{n-k-1}$ como borde de $S^k \times D^{n-k}$. A su vez, la orientación de $S^k \times S^{n-k-1}$ como borde de $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ es la orientación usual de $S^k \times S^{n-k-1}$. Así, las dos orientaciones difieren únicamente por un signo, dependiendo de k y n , y como el pegado es vía el mapa identidad, invirtiendo la orientación de $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ de ser necesario, podemos definir una orientación inducida por la orientación de M , que compatible en toda la variedad.

Un caso particular de cirugía de tipo 0 es la suma conexa de variedades diferenciales.

Definición 1.4.11 (Suma conexa). Sean M y N variedades diferenciables conexas. Se define la suma conexa de M y N como la variedad diferenciable

$$M\#N = (M \overset{d}{\cup} N)[\varphi],$$

con $\varphi : S^0 \times D^n \rightarrow M \overset{d}{\cup} N$ embedding tal que $\varphi(\{-1\} \times D^n) \subseteq N$ y $\varphi(\{1\} \times D^n) \subseteq M$.

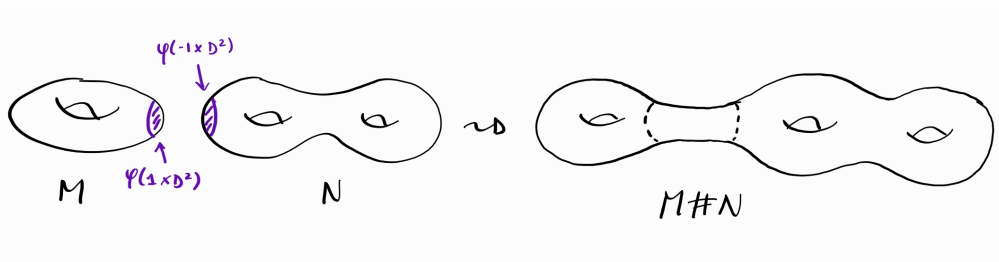


Figura 1.3: Suma conexa de un toro y un toro con dos manijas.

La suma conexa está bien definida, no depende del embedding φ gracias al resultado de Palais y Cerf que dice que hay una única forma de embeber discos en variedades

diferenciables conexas, salvo quizá por la orientación (ver por ejemplo [Hir12, Sección 8.3]). En el caso en que M y N sean orientadas, pedimos que φ preserve la orientación, y en consecuencia, $M\#N$ es una variedad orientada. En la Figura 1.3 puede verse un ejemplo de suma conexa.

1.5. Funciones de Morse perfectas

Dada una variedad diferenciable cerrada M y una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene un CW-complejo X homotópicamente equivalente a M con tantas celdas de dimensión k como puntos críticos de índice k tenga f . Teniendo en cuenta las desigualdades de Morse 1.2.1, sabemos que $b_k \leq c_k$, donde b_k denota el k -ésimo número de Betti de M y c_k es la cantidad de puntos críticos de índice k de f . Notar que c_k es también la cantidad de celdas de dimensión k de X . Así, a menor cantidad de puntos críticos, menor es la cantidad de celdas del CW-complejo en cuestión. ¿Existen funciones de Morse en M con exactamente b_k puntos críticos de índice k para todo $k \in \mathbb{N}_0$? A este tipo de funciones se las conoce como funciones de Morse perfectas, y constituyen el tema central de la tesis.

En esta sección, comenzaremos a estudiar la existencia de funciones de Morse perfectas, presentando algunos ejemplos sencillos. Posteriormente, exploraremos qué tipos de variedades diferenciables admiten funciones de Morse perfectas y cuáles no, tratando de detectar qué características de las variedades impiden la existencia de tales funciones.

Definición 1.5.1. Una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice perfecta si $b_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo 1.5.2. La esfera n -dimensional admite funciones de Morse perfectas. Sabemos que

$$H_i S^n = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{si } i \neq 0, n \end{cases}$$

de modo que si $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse perfecta, tendrá 1 mínimo absoluto, 1 máximo absoluto, y ningún otro punto crítico. La función altura $h : (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mapsto x_{n+1} \in \mathbb{R}$ es una función de Morse perfecta.

Ejemplo 1.5.3. La función altura en el toro $T = S^1 \times S^1$ es una función de Morse perfecta, ya que posee únicamente 4 puntos críticos: 1 mínimo, 1 máximo y 2 puntos críticos de índice 1.

Podemos aplicar el corolario 1.2.2 al espacio proyectivo complejo de dimensión n , considerando la función que da Milnor en [Mil63, 1.4]. Sea

$$\mathbb{C}P^n = \frac{\{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{j=0}^n |z_j|^2 = 1\}}{\sim}$$

con \sim la relación de equivalencia definida por

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \text{ y } (z_0, \dots, z_n) = \lambda(z'_0, \dots, z'_n).$$

Como variedad diferenciable sobre \mathbb{R} , la dimensión de $\mathbb{C}P^n$ es $2n$. Notamos por $[z_0 : \dots : z_n]$ a la clase de (z_0, \dots, z_n) en $\mathbb{C}P^n$.

Ejemplo 1.5.4. $\mathbb{C}P^n$ admite funciones de Morse perfectas.

Consideramos la función $f : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f[z_0, \dots, z_n] = \sum_{j=0}^n c_j |z_j|^2,$$

con $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ valores en \mathbb{R} . Para cada $i = 0, \dots, n$ sea

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_i \neq 0\},$$

y $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ el homeomorfismo definido por

$$\varphi([z_0, \dots, z_n]) = (x_0, y_0, \dots, \hat{x}_i, \hat{y}_i, \dots, x_n, y_n),$$

con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\frac{z_j |z_i|}{z_i} = x_j + iy_j, \text{ para cada } j \neq i.$$

La notación \hat{x}_i, \hat{y}_i indica que esas coordenadas no figuran en la $2n$ -tupla. Notar que $|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$ y que $|z_i|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} (x_j^2 + y_j^2)$. Luego, la función f en la carta (U, φ) satisface

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, \dots, \hat{x}_i, \hat{y}_i, \dots, x_n, y_n) &= a_i \left(1 - \sum_{j \neq i} (x_j^2 + y_j^2) \right) + \sum_{j \neq i} a_j (x_j^2 + y_j^2) \\ &= a_i + \sum_{j \neq i} (a_j - a_i) (x_j^2 + y_j^2). \end{aligned}$$

Así, $p_i = [0 : \dots : 1 : \dots, 0]$, con un 1 en la i -ésima coordenada es el único punto crítico en U_i , y su índice es $2 \cdot \#\{j < i\} = 2i$. Esto vale para cada $i = 0, \dots, n$. Luego, f tiene un punto crítico de índice $2k$ para todo $k = 0, \dots, n$. Aplicando el corolario 1.2.2, deducimos que $\mathbb{C}P^n$ admite funciones de Morse perfectas. \square

Observación 1.5.5. Sea M una variedad diferenciable cerrada, cuyas componentes conexas son M_1, \dots, M_r . Como la homología de M es la suma directa de las homologías de cada componente, los números de Betti satisfacen

$$b_k(M) = \sum_{i=1}^r b_k(M_i). \quad (1.5)$$

Si para cada $i = 1, \dots, r$ existe una función de Morse perfecta $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}$, entonces podemos definir una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, que valga f_i en la componente M_i . Así definida, f es una función de Morse, y

$$c_k(f) = \sum_{i=1}^r c_k(f_i) = \sum_{i=1}^r b_k(M_i) = b_k(M),$$

por lo que f es perfecta. Recíprocamente, si existe una función de Morse perfecta $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definiendo $f_i = f|_{M_i}$ se tiene que $f_i : M_i \rightarrow \mathbb{R}$ es de Morse. Como f es perfecta, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$b_k(M) = c_k(f) = c_k(f_1) + \dots + c_k(f_r).$$

Teniendo en cuenta (1.5) y que $b_k(f_i) \leq c_k(f_i)$, se tiene que $b_k(f_i) = c_k(f_i)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $i = 1, \dots, r$. Luego, cada f_i es perfecta.

La observación anterior nos permite concluir que M admite funciones de Morse perfectas si y solo si cada una de sus componentes conexas las admite. Por lo tanto, a partir de ahora nos centraremos en estudiar la existencia de funciones de Morse perfectas en variedades conexas.

Los ejemplos más básicos (1.5.2 y 1.5.3) son suficientes para demostrar la existencia de funciones de Morse perfectas en superficies cerradas y orientadas.

Proposición 1.5.6. *Toda superficie orientada, cerrada y conexa admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Sabemos que toda superficie orientada, cerrada y conexa es difeomorfa a una suma conexas de g toros, siendo $g \geq 0$ el género de la superficie. Sea $S \equiv T_1^2 \# \dots \# T_g^2$, con $T_i^2 = S^1 \times S^1$. La homología de S viene dada por

$$H_i S = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 2 \end{cases}$$

Una función de Morse perfecta $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ tendrá que tener 1 mínimo, 1 máximo y $2g$ puntos críticos no degenerados de índice 1. A menos de un difeomorfismo, podemos pensar a S como subconjunto de \mathbb{R}^3 apilando las g copias de los toros tal y como lo muestra la Figura 1.4. Podemos tomar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura y cumple lo deseado. \square

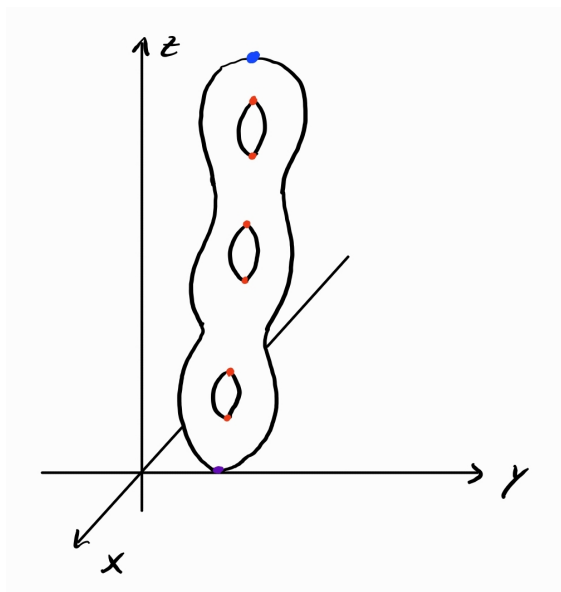


Figura 1.4: Suma conexas de g toros, $g = 3$. La función altura tiene $2g + 2$ puntos críticos: el violeta de índice 0, $2g$ de índice 1 marcados en rojo y el azul de índice 2.

¿Qué podemos decir de las superficies no orientables?

Ejemplo 1.5.7. Sea $\mathbb{R}P^2$ el plano proyectivo. Notar que $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ es de torsión, así que $b_1 = 0$. Sin embargo, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \neq 0$. Si X es un CW-complejo homotópicamente equivalente a $\mathbb{R}P^2$, tendrá grupo fundamental no trivial y por lo tanto la cantidad de 1-celdas c_1 será mayor que cero. En consecuencia, cualquier función de Morse tendrá al menos un punto crítico de índice 1, por lo que $c_1 \geq 1 > b_1$. Luego, $\mathbb{R}P^2$ no admite funciones de Morse perfectas.

Lo mismo ocurre con cualquier superficie cerrada, conexa no orientable. En efecto, por la clasificación de superficies, una tal superficie es difeomorfa a una suma conexa de g planos proyectivos, siendo g el género de la superficie. La homología de una superficie S no orientable de género g viene dada por

$$H_i S = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases} .$$

Luego, $c_1 \geq g > g - 1 = b_1$. Este fenómeno es un caso particular de la siguiente proposición.

Decimos que la homología de M tiene torsión si $H_k(M)$ tiene torsión para algún $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.5.8. *Sea M una variedad diferenciable cuya homología tiene torsión, entonces M no admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Tor}(H_k(M)) \neq 0$ y g_k la cantidad mínima de generadores de $H_k(M)$ entonces $g_k > b_k$. Cualquier estructura de CW-complejo de M tendrá al menos g_k celdas de dimensión k . Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse, se tiene que $c_k(f) \geq g_k > b_k$, por lo que f no es perfecta. \square

Hemos visto que las superficies cerradas orientables admiten funciones de Morse perfectas y que las no orientables no. ¿Qué pasa en general? Como las variedades no orientables tienen homología con torsión, no admitirán funciones de Morse.

Proposición 1.5.9. *Sea M una variedad diferenciable cerrada de dimensión n , entonces $H_{n-1}(M)$ es libre de torsión si M es orientable, mientras que si no es orientable la torsión de $H_{n-1}(M)$ es \mathbb{Z}_2 .*

La demostración puede leerse de [Hat02, 3.28].

Corolario 1.5.10. *Las variedades diferenciables compactas no orientables no admiten funciones de Morse perfectas.*

Basta entonces estudiar el caso orientable, y en dimensión ≥ 3 .

Comencemos estudiando variedades diferenciables cerradas, cuya homología sea sencilla. Un ejemplo de este tipo de variedades son las esferas.

Vimos en que S^n admite funciones de Morse perfectas. ¿Qué pasa con las variedades diferenciales que tienen la homología de la esfera, pero no son homeomorfas a la esfera?

Definición 1.5.11. Una variedad topológica M de dimensión n es una n -esfera homológica si $H_*(M) = H_*(S^n)$.

Proposición 1.5.12. *Sea M^n una variedad diferenciable compacta, que es una n -esfera homológica, pero no es homeomorfa a S^n , entonces M no admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Si existiese $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse perfecta, entonces f tendría exactamente 2 puntos críticos (un mínimo y un máximo). Luego, por Reeb 1.1.13, sería homeomorfa a S^n , contradiciendo la hipótesis. \square

La esfera de Poincaré es el primer ejemplo de esfera homológica, construido por Henri Poincaré a partir de una descomposición de Heegaard. Este tipo de descomposiciones es un caso particular de descomposición en manijas, que se introducirá en el

siguiente capítulo. Para una breve descripción de la construcción original de la esfera de Poincaré, se remite al lector a [Sti12]. A continuación, presentaremos una de las ocho construcciones de la esfera de Poincaré propuestas por Kirby y Schalermann en su artículo [KS79].

Ejemplo 1.5.13 (La esfera de Poincaré). Sea $SO(3)$ el grupo de matrices ortogonales de 3×3 con coeficientes en \mathbb{R} y determinante 1, y $SU(2)$ el grupo de matrices unitarias de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{C} y determinante 1. Como variedad diferenciable $SO(3)$ es difeomorfa al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^3$, cuyo revestimiento universal es $\rho : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$. A su vez, si consideramos a $SU(2)$ como variedad diferenciable sobre \mathbb{R} , resulta difeomorfa a S^3 . Luego, vía estas identificaciones, se tiene $q : SU(2) \rightarrow SO(3)$ es revestimiento universal,

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{R}P^3 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ SU(2) & \xrightarrow{q} & SO(3). \end{array}$$

Sea $I \subseteq SO(3)$ el grupo de simetrías del icosaedro. I es isomorfo al grupo alternante A_5 , de orden 60, y actúa sobre $SO(3)$ por translaciones. Se define la esfera de Poincaré PS^3 como el cociente $SO(3)/I$. Otra forma de obtener la esfera de Poincaré es a partir del revestimiento universal q . Sea $I^* = q^{-1}(I)$. Al ser q un revestimiento de dos hojas, I^* es de orden 120. Este grupo se conoce como el grupo icosaédrico binario y tiene la propiedad de que su abelianizado I^{*ab} es cero. La esfera de Poincaré se obtiene como el cociente de la acción de I^* sobre $SU(2)$. Más aún, esta acción preserva la orientación de $SU(2)$. Así, $PS^3 = SU(2)/I^*$ es una variedad diferencial cerrada y orientada de dimensión 3 con grupo fundamental isomorfo a I^* . Se tiene que $H_1(PS^3) = I^{*ab} = 0$, $H^3(PS^3) = \mathbb{Z}$ por ser orientada, y $H_2(PS^3) \cong H^1(PS^3)$ por dualidad de Poincaré, de modo que $H_2(PS^3) = 0$. Luego, la esfera de Poincaré PS^3 tiene la homología de S^3 , pero su grupo fundamental es no trivial, así que por la proposición anterior no admite funciones de Morse perfectas.

Más aún, cualquier función de Morse PS^3 tendrá al menos 6 puntos críticos. En efecto, sea $f : PS^3 \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse y X un CW-complejo homotópicamente equivalente a PS^3 con c_k celdas de dimensión k . Sabemos que $\pi_1(X) = I^* \neq 0$ así que $c_1 \geq 1$. Al ser no abeliano, $\pi_1(X)$ ha de tener al menos dos generadores, por lo que $c_1 \geq 2$. El grupo fundamental de un CW-complejo queda determinado por su 2-esqueleto, y al ser $\pi_1(X)^{ab} = 0$, X deberá tener 2-celdas. Luego, $c_2 \geq 1$. Como f alcanza máximo y mínimo, $c_0 \geq 1$ y $c_3 \geq 1$, así que en total tenemos al menos 5 puntos críticos. Utilizando las desigualdades de Morse 1.2.1 vemos que

$$c_2 - c_1 + c_0 \geq b_2 - b_1 + b_0 = 1.$$

Así, $c_2 + c_0 \geq 1 + c_1 \geq 3$ y en consecuencia $c_2 \geq 2$ o $c_0 \geq 2$. Concluimos que f tiene al menos 6 puntos críticos. De hecho, existe una función de Morse en PS^3 con exactamente 6 puntos críticos, y una forma de obtenerla es a partir de un splitting de Heegaard.

La proposición nos dice que toda n -esfera homológica no homeomorfa a S^n no admite funciones de Morse perfectas. ¿Qué pasa con aquellas que sí son homeomorfas a S^n , pero no difeomorfas?

Una **n -esfera exótica** es una variedad diferenciable M de dimensión n , homeomorfa a S^n , pero no difeomorfa a S^n . En la década de 1950, Milnor demuestra la existencia de este tipo de esferas, dando una construcción -en [Mil56]- de una esfera exótica de dimensión

7. Años posteriores se encontraron más ejemplos de estos espacios y se probó que 7 es la dimensión más chica en las que existen esferas exóticas. En el capítulo 2 daremos un resultado que nos permitirá concluir que todas las esferas exóticas admiten funciones de Morse perfectas.

Observación 1.5.14. Sean M y N variedades diferenciables cerradas, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de Morse. Consideremos la función $F : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = f(x) + g(y)$. Dado $(x, y) \in M \times N$ y $(U \times V, \varphi \times \psi)$ carta de $M \times N$ alrededor de (x, y) se tiene que la matriz diferencial de $\hat{F} = F \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ en $(\varphi(x), \varphi(y))$ es

$$D_{(\varphi(x), \varphi(y))} \hat{F} = (D_{\varphi(x)} \hat{f}, D_{\varphi(y)} \hat{g}),$$

de modo que (x, y) es punto crítico de F si y solo si x es punto crítico de f e y es punto crítico de g . Además, la matriz Hessiana de \hat{F} es la matriz por bloques

$$H_{(\varphi(x), \varphi(y))} \hat{F} = \begin{pmatrix} H_{\varphi(x)} \hat{f} & 0 \\ 0 & H_{\varphi(y)} \hat{g} \end{pmatrix}$$

asi que $(x, y) \in M \times N$ es un punto crítico no degenerado de F si y solo si x e y son puntos críticos no degenerados de f y g respectivamente y, en tal caso, $i_{(x,y)} = i_x + i_y$.

La observación anterior nos permite concluir el siguiente resultado.

Proposición 1.5.15. Sean M y N variedades diferenciables cerradas que admiten funciones de Morse perfectas, entonces $M \times N$ también admite funciones de Morse perfectas.

Demostración. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de Morse perfectas, y sea $F : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ como en la observación anterior. Notemos por $b_k(M)$, $b_k(N)$ y $b_k(M \times N)$ al k -ésimo número de Betti de M , N y $M \times N$ respectivamente, y sean $c_k(f)$, $c_k(g)$ y $c_k(F)$ la cantidad de puntos críticos de índice k de f , g y F respectivamente. Por la observación anterior sabemos que

$$c_k(F) = \# \{(x, y) \in M : x, y \text{ puntos críticos de } M \text{ y } N \text{ resp. y } k = i_x + i_y\}.$$

Así que $c_k(F) = \sum_{i+j=k} c_i(f)c_j(g)$. Ahora bien, como f y g son funciones de Morse perfectas, sabemos que $b_i(M) = c_i(f)$ y $b_j(N) = c_j(g)$ para todo $i, j \geq 0$. Además, como M admite funciones de Morse perfectas, $H_*(M)$ es libre de torsión. En este caso, la fórmula de Künneth para M , N y $M \times N$ nos dice que

$$b_k(M \times N) = \sum_{i+j=k} b_i(M)b_j(N).$$

de lo que se sigue que $b_k(M \times N) = c_k(F)$. Concluimos que F es una función de Morse perfecta. □

Usando esta proposición y haciendo inducción en la cantidad de factores, se deduce que el producto de finitas variedades diferenciables que admiten funciones de Morse perfectas también admite funciones de Morse perfectas.

Corolario 1.5.16. Sea $M = M_1 \times \dots \times M_r$ el producto de variedades diferenciales M_i que admiten funciones de Morse perfectas, entonces M admite funciones de Morse perfectas.

Como las esferas admiten funciones de Morse perfectas, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.5.17. *La variedad $M = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_r}$, con $r \geq 1$ y $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, admite funciones de Morse perfectas.*

Corolario 1.5.18. *El toro n -dimensional $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ admite funciones de Morse perfectas.*

Si uno mira con atención, en el caso de superficies orientadas probamos que toda superficie orientada de género $g \geq 0$ admite funciones de Morse perfectas tomando un difeomorfismo entre nuestra superficie y la suma conexa de g toros, y consideramos la función altura. Esta función altura la armamos "pegando" funciones altura definidas en cada sumando (en cada toro \mathbb{T}). La siguiente proposición es una generalización de esto.

Proposición 1.5.19. *Sean M y N variedades diferenciables cerradas, conexas, de dimensión n . Supongamos que M y N admiten funciones de Morse perfectas, entonces la suma conexa $M\#N$ también admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de Morse perfectas. M es conexa, así que $b_0(M) = 1$ y, por 1.3.2, $b_n(M) = 1$. Análogamente, $b_0(N) = 1 = b_n(N)$. Sea $p \in M$ el máximo de f y $q \in N$ el mínimo de g . A menos de sumarle una constante a g podemos suponer que $f(p) = g(q) = c$. Sea $\epsilon > 0$ tal que f no posee valores críticos en $[c - \epsilon, c]$ y g no posee valores críticos en $(c, c + \epsilon]$. Tomamos $U = f^{-1}(c - \epsilon, c]$ y $V = g^{-1}[c, c + \epsilon)$ abiertos de M y N cuyas clausuras son difeomorfas a discos D^n . Se tiene un embedding $\varphi : S^0 \times D^n \rightarrow M \cup N$ tal que $\varphi(-1 \times D^n) = \overline{U}$ y $\varphi(1 \times D^n) = \overline{V}$, y consideramos la suma conexa $M\#N = (M \cup N) / \varphi$. Sea $F : M\#N \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M - U \\ g(x) & \text{si } x \in N - V \\ c + t\epsilon & \text{si } x = (t, z) \in D^1 \times S^{n-1}. \end{cases}$$

Notar que F está bien definida como función continua (se pega bien) y F es suave en $M - \overline{U}$, en $N - \overline{V}$ y en $D^1 \times S^{n-1}$. Usando el lema 1.4.4, concluimos que F es suave. Notar que, por como definimos F , sus puntos críticos son exactamente los de f y los de g , salvo por p y q , con los mismos índices. Además,

$$H_k(M\#N) = H_k(M) \oplus H_k(N) \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

por lo que $b_k(M\#N) = b_k(M) + b_k(N) = c_k(f) + c_k(g) = c_k(F)$ para todo $1 \leq k \leq n - 1$. Y, al ser $M\#N$ conexa, $b_0(M\#N) = b_n(M\#N) = 1$. Como F tiene un sólo mínimo local (absoluto) que es el de f y un sólo máximo local (absoluto) que es el de g , vale también $b_0(M\#N) = c_0(F)$ y $b_n(M\#N) = c_n(F)$. Luego F resulta perfecta. \square

1.6. El papel del grupo fundamental

En esta sección, estudiaremos cómo influye el grupo fundamental de una variedad diferenciable en la existencia de funciones de Morse perfectas.

El rango de un grupo finitamente generado G es el mínimo cardinal de un conjunto de generadores de G . A este valor lo denotaremos $rk(G)$. Es importante destacar que, para un grupo abeliano finitamente generado existen dos nociones diferentes de rango, las cuales desafortunadamente reciben el mismo nombre en la literatura. La primera noción, que consideraremos como el rango de G visto como grupo abeliano, corresponde a la dimensión de su parte libre como \mathbb{Z} -módulo. Este rango lo seguiremos denotando $rg(G)$, como hicimos previamente en la tesis. La segunda noción, que corresponde al

rango de G visto como grupo, la denotaremos $rk(G)$.

Dado G un grupo, notaremos por G^{ab} a su abelianizado. Es decir,

$$G^{ab} = \frac{G}{[G, G]}$$

siendo $[G, G]$ el subgrupo generado por los elementos de la forma $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Un grupo G se dice **perfecto** si su abelianizado es 0. Un ejemplo de grupo perfecto es el grupo icosaédrico binario, isomorfo al grupo fundamental de la esfera de Poincaré (ver 1.5.13). Vimos que toda función de Morse definida en la esfera de Poincaré debía tener al menos 1 punto crítico de índice 1 y, como $b_1 = 0$, entonces no admitía funciones de Morse perfectas. Ese resultado es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 1.6.1. *Sea M una variedad diferenciable cerrada cuyo grupo fundamental tiene rango estrictamente mayor a b_1 , entonces M no admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y X un CW-complejo homotópicamente equivalente a M , con c_k celdas de dimensión k . Sabemos que $\pi_1(M) \cong \pi_1(X)$ y que el rango de $\pi_1(X)$ es menor o igual a c_1 , ya que la inclusión del 1-esqueleto $X^{(1)} \rightarrow X$ induce un epimorfismo en los grupos fundamentales y $rk(\pi_1(X^{(1)})) = c_1$. Luego,

$$b_1 < rk(\pi_1(M)) = rk(\pi_1(X)) \leq c_1$$

y entonces f no es perfecta. □

Corolario 1.6.2. *Sea M una variedad diferencial cerrada cuyo grupo fundamental es no trivial y perfecto, entonces M no admite funciones de Morse perfectas.*

Dado G grupo finitamente presentado, es posible construir una variedad diferenciable cerrada y orientada M , de dimensión $n \geq 4$, con grupo fundamental isomorfo a G . Esta construcción la llevaremos a cabo a continuación. Notar primero que, si tomamos $n \geq 4$ y G un grupo perfecto finitamente presentado, entonces existirá una variedad diferenciable M de dimensión n que no admite funciones de Morse perfectas. En dimensión 3 también existen variedades con esta propiedad, siendo la esfera de Poincaré un ejemplo de éstas. Se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.6.3. *Para todo $n \geq 3$ existen variedades diferenciables cerradas y orientadas que no admiten funciones de Morse perfectas.*

Sea G un grupo finitamente presentado. Tomemos $\langle a_1, \dots, a_m | r_1, \dots, r_s \rangle$ una presentación finita de G . Sea N la suma conexas de m copias de $S^1 \times S^{n-1}$. Notar que N es una variedad diferenciable cerrada, conexas de dimensión n , embebida en \mathbb{R}^{n+2} . Consideraremos $n \geq 4$.

Por van Kampen, dadas M y N variedades diferenciables de dimensión $n \geq 3$, se puede probar que $\pi_1(M \# N) = \pi_1(M) * \pi_1(N)$ donde $*$ denota el producto libre de grupos. Haciendo inducción, se demuestra que

$$\pi_1 \left(\#_{i=1}^m S^1 \times S^{n-1} \right) = \pi_1(S^1 \times S^{n-1}) * \dots * \pi_1(S^1 \times S^{n-1}) = F(m),$$

donde $F(m)$ denota el grupo libre de rango m . Queremos modificar nuestra variedad N para que su grupo fundamental sea isomorfo a G . De manera similar a lo que se hace con CW-complejos, le vamos a pegar un disco por cada relación, mediante una función

de adjunción que identifique el borde del disco con la composición de loops representados por los a_i 's según la relación en cuestión. Como estamos trabajando en variedades diferenciables, lo que haremos será cirugía de tipo $(k, n - k)$ para k apropiado.

Concretamente, para cada $i = 1, \dots, m$ consideramos la i -ésima copia de $S^1 \times S^{n-1}$ en N y notamos por a_i a la clase de $S^1 \times p_i$, eligiendo en S^1 la orientación usual y $p_i \in S^{n-1}$. Sea $r_1 = a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \cdot \dots \cdot a_{j_s}^{\epsilon_{j_s}}$ visto como elemento de $\pi_1(N)$ mediante la concatenación de los loops a_{j_i} recorridos respetando la orientación, si $\epsilon_{j_i} = 1$, e invirtiéndola si $\epsilon_{j_i} = -1$.

Tomemos un entorno tubular de r_1 , mediante un embedding $\varphi : S^1 \times D^{n-1} \rightarrow N$ que preserve la orientación, y tal que la clase de $\varphi|_{S^1 \times 0}$ en $\pi_1(N)$ sea r_1 . Obtenemos así una variedad diferenciable cerrada, conexa y orientada $M_1 = N[\varphi]$. Notar que M_1 surge de pegarle una copia de $D^2 \times S^{n-2}$ al borde de $N' = N - \text{Int}(\varphi(S^1 \times D^{n-1}))$ a través de la curva r_1 , la cual queremos que se pueda contraer en la nueva variedad.

Afirmación: $\langle a_1, \dots, a_m | r_1 \rangle$ es una presentación de $\pi_1(M_1)$.

Demostración. Sea $\tau : S^1 \times S^{n-2} \times (-1, 1) \rightarrow M_1$ embedding tal que al restringirlo a $S^1 \times S^{n-2} \times (-1, 0]$ y a $S^1 \times S^{n-2} \times [0, 1)$ nos da cuellos $U_1 \subset D^2 \times S^{n-2}$ y $U_2 \subset N'$ respectivamente. Así, $U_1 \cup U_2$ es un entorno bicuello de $\varphi(S^1 \times S^{n-2})$ en M_1 . Definimos

- $W_1 = N' \cup U_1$,
- $W_2 = (D^2 \times S^{n-2}) \cup U_2$.

Entonces, W_1 y W_2 son abiertos de M_1 , $M_1 = W_1 \cup W_2$ y $W_1 \cap W_2 = U_1 \cup U_2$. Usando van Kampen, se tiene que

$$\pi_1(M_1) = \frac{\pi_1(W_1) * \pi_1(W_2)}{\langle \iota_1(\gamma) \iota_2^{-1}(\gamma) : \gamma \in \pi_1(W_1 \cap W_2) \rangle_N}. \quad (1.6)$$

Ahora bien,

- $N' = N - \varphi(S^1 \times \mathring{D}^{n-1}) \subset W_1$ es retracto por deformación.
- $D^2 \times S^{n-2} \subset W_2$ es retracto por deformación. En particular, $\pi_1(W_2) = 0$.
- $\varphi(S^1 \times S^{n-2}) \subset W_1 \cap W_2$ es retracto por deformación y, viendo a $\pi_1(\varphi(S^1 \times S^{n-2}))$ como subgrupo de $\pi_1(N) = F(a_1, \dots, a_m)$, se tiene que $\pi_1(\varphi(S^1 \times S^{n-2})) = \langle r_1 \rangle$.

Nos gustaría llegar a que $\pi_1(M_1) = \frac{\pi_1(N)}{\pi_1(W_1 \cap W_2)}$ está presentado por $\langle a_1, \dots, a_m | r_1 \rangle$. Teniendo en cuenta (1.6) y los ítems anteriores, basta ver que $\pi_1(N) = \pi_1(N')$. Esto es sencillo ya que

- $N_1 = N - \varphi(S^1 \times 0) \subset N'$ es un retracto por deformación fuerte, por lo que $\pi_1(N_1) = \pi_1(N')$.
- $\pi_1(N) = \pi_1(N_1)$ (sale aplicando van Kampen a N con los abiertos N_1 y $\varphi(S^1 \times \mathring{D}^{n-1})$).

Esto prueba lo que queríamos en el caso en que hay una sola relación. Aplicando tantas cirugías como relaciones y repitiendo el procedimiento obtenemos una variedad diferenciable cerrada, conexa M de dimensión $n \geq 4$, cuyo grupo fundamental es G .

En el último ítem, se requiere que $D^{n-1} - \{0\}$ sea simplemente conexo, y es allí dónde se utiliza que $n \geq 4$. \square

Esto demuestra la siguiente proposición.

Proposición 1.6.4. *Sea G un grupo finitamente presentado y $n \geq 4$, entonces existe una variedad diferenciable cerrada, orientada, conexa, de dimensión n , cuyo grupo fundamental es isomorfo a G .*

Hasta ahora, hemos identificado dos condiciones sobre el grupo fundamental de una variedad M que impiden la existencia de funciones de Morse perfectas:

1. La desigualdad $rk(\pi_1(M)) > b_1$, y
2. La presencia de torsión en $H_1(M) = \pi_1(M)^{ab}$.

Sin embargo, la segunda condición implica la primera. En efecto, dado que

$$rk(\pi_1(M)) \geq rk(\pi_1(M)^{ab}) \geq rg(\pi_1(M)^{ab}) = b_1, \quad (1.7)$$

si $H_1(M)$ tiene torsión, entonces la segunda desigualdad de (1.7) es estricta, y entonces $rk(\pi_1(M)) > b_1$. Por lo tanto, una condición necesaria para que una variedad M admita funciones de Morse perfectas es que $rk(\pi_1(M)) = b_1 = rg(\pi_1(M)^{ab})$.

En particular, nos interesa determinar si la presencia de torsión en el grupo fundamental constituye una obstrucción a la existencia de tales funciones. La respuesta a esta pregunta es que no necesariamente, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.5. Consideremos el grupo G presentado por $\langle a, b | [a, b]^2 \rangle$. Al ser no abeliano y generado por 2 elementos, la mínima cantidad de generadores de G es 2. Sea M la variedad diferenciable de dimensión 6 que se obtiene a partir de la construcción anterior.

Es decir, $M = N[\varphi]$, con $N = (S^1 \times S^5) \# (S^1 \times S^5)$ y $\varphi : S^1 \times D^5 \rightarrow N$ embedding tal que $\varphi(S^1 \times 0) = (aba^{-1}b^{-1})^2$. M es una variedad diferenciable cerrada, conexa, orientable, de dimensión 6 con $\pi_1(M) = G$ y $H_1(M) = \pi_1(M)^{ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Se tiene entonces que $b_1 = rg(H_1(M))$ coincide con la cantidad mínima de generadores de G . Veremos a continuación una idea de cómo probar que M admite funciones de Morse perfectas y, en el capítulo siguiente, demostraremos este hecho usando teoría de manijas.

Calculemos primero la homología de M . Tomemos $A = N - \varphi(S^1 \times \tilde{D}^5)$ con $\varphi(S^1 \times \tilde{D}^5)$ un entorno ligeramente engrosado de $\varphi(S^1 \times D^5)$ y sea $B = \tilde{D}^2 \times S^4$. Notar que A y B son abiertos que cubren a M , y $A \cap B \simeq S^1 \times S^4$. La homología de B es la de S^4 mientras que la de $A \cap B$ es la de $S^1 \times S^4$, que por la fórmula de Künneth viene dada por

$$H_k(A \cap B) = H_k(S^1 \times S^4) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 1, 4, 5 \\ 0 & \text{si } k = 2, 3 \text{ o } k > 5. \end{cases}$$

De conocer $H_*(A)$, podríamos calcular $H_*(M)$ usando Mayer Vietoris. Sabemos que $H_*(A) = H_*(N - \varphi(S^1 \times 0))$, y esta última se puede calcular a partir de la homología de N . Por Künneth,

$$H_k(S^1 \times S^5) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 1, 5, 6 \\ 0 & \text{si } k = 2, 3, 4 \text{ o } k > 6. \end{cases}$$

Y, como la homología de la suma conexa de variedades de dimensión ≥ 3 es la suma de las homologías para $1 \leq k \leq n - 1$, se tiene

$$H_k(N) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 6 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } k = 1, 5 \\ 0 & \text{si } k = 2, 3, 4 \text{ o } k > 6. \end{cases}$$

Sea $U = N - \varphi(S^1 \times 0)$. Por van Kampen, $\pi_1(U) = \pi_1(N)$, así que $H_1(U) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Además, U es conexo, por lo que $H_0(U) = \mathbb{Z}$. Sea $V = \varphi(S^1 \times \mathring{D}^5)$, de modo que $N = U \cup V$, y $U \cap V \cong S^1 \times S^4$. Si consideramos la sucesión exacta larga de Mayer Vietoris para $N = U \cup V$, se deduce que $H_k(U) = 0$ para $k = 2, 3$, así que $H_k(A) = 0$ si $k = 2, 3$. Mirando la sucesión de Mayer Vietoris para $M = A \cup B$, se tiene

$$\dots \rightarrow H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(M) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(M) \rightarrow 0.$$

Notar que $H_2(A) = 0 = H_2(B)$, así que se tiene

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(M) \rightarrow \underbrace{H_1(A \cap B)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_1(A) \oplus H_1(B)}_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_1(M)}_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{H_0(A \cap B)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_0(A) \oplus H_0(B)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_0(M)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como la suma alternada de los rangos de estos \mathbb{Z} -módulos debe dar 0, ha de ser $b_2 = \text{rg}(H_2(M)) = 1$. Mientras que $H_3(M) = 0$, puesto que tanto $H_2(A \cap B)$ como $H_2(A)$ y $H_2(B)$ son 0. Además, como M es cerrada y orientable, el resultado 1.3.2 nos dice que $b_k = b_{6-k}$, así que $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = b_2 = 1, b_5 = b_1 = 2$ y $b_6 = b_0 = 1$.

Para ver que M admite funciones de Morse perfectas, debemos encontrar una función de Morse $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente b_k puntos críticos de índice k . Una forma de proceder es la siguiente:

Paso 1: Definir una función de Morse perfecta $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ y un embedding $\varphi : S^1 \times D^5 \rightarrow N$ de forma tal de tener control del comportamiento de f sobre el borde de $N' = N - \varphi(S^1 \times \mathring{D}^5)$.

Por las proposiciones 1.5.15 y 1.5.19, sabemos que existe una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse perfecta, que surge de considerar el producto de funciones altura $h_1 \times h_5 : S^1 \times S^5 \rightarrow \mathbb{R}$ y luego pegar dos copias de esta función para obtener la función f . Recordar que en el pegado debemos ajustar la segunda función (correspondiente a la segunda copia de $S^1 \times S^5$), sumando una constante. Esta constante se la sumaremos a h_1 , la función altura de S^1 . Notar que f tiene exactamente 1 punto crítico de índices 0 y 6, y 2 puntos críticos de índices 1 y 5. Para realizar la cirugía que dará origen a M , pediremos que la función φ recorra $(aba^{-1}b^{-1})^2$ de forma tal que la componente en S^5 no aporte valor en f . Es decir, si $\varphi(z, 0) = (x, y) \in S^1 \times S^5$ (alguna de las dos copias), entonces el punto y se encuentra en el ecuador $S^4 \subseteq S^5$. En tal caso, tendremos $f(\varphi(z, 0)) = (h_1 \# h_1)(x)$. Tomemos $0 < r < 1$ suficientemente chico de forma tal que tengamos un embedding $\varphi : S^1 \times D^5 \rightarrow N$ tal que para cada $z \in S^1$, $\varphi(z \times D^5)$ sea una bola cerrada de radio r alrededor de $p_2 \circ \varphi(z, 0)$, con $p_2 : S^1 \times S^5 \rightarrow S^5$ la proyección, siempre que $\varphi(z, 0)$ caiga en una copia de $S^1 \times S^5$ y tal que $D^4 = D^5 \cap \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_5 = 0\}$ caiga en el ecuador de S^5 . De esta forma, $f \circ \varphi|_{S^1 \times \partial D^5}(e^{2\pi it}, w)$ es de la forma $\text{sen}(8\pi t) \times rh_4(w)$, con $h_4 : S^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura. La presencia del 8 en la fórmula es porque φ recorre 8 veces a S^1 (sin distinguir las copias), producto de que la relación $(aba^{-1}b^{-1})^2$ consta de 8 letras, pero sólo cada 2 se obtiene un máximo y un mínimo.

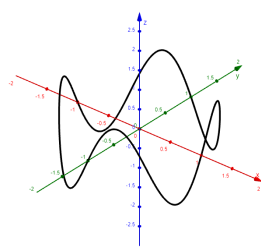
Paso 2: Definir una función suave $g : D^2 \times S^4 \rightarrow \mathbb{R}$ que al restringirla a $\partial D^2 \times S^4$ coincida con $f \circ \varphi$, y g tenga un punto crítico de índice 2 y uno de índice 4.

Para ello, se define $g(x, y) = \rho(x) + rh_4(y)$, con $\rho : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una cierta función que tenga en el interior de D^2 un punto crítico de índice 0 y un punto crítico de índice 2. Esto nos garantizará que la función g tenga en su interior 4 puntos críticos, uno por cada índice 0, 1, 5 y 6. Podemos definir ρ en el anillo $A = \partial D^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$ y luego en el disco de radio $\frac{1}{2}$. Consideremos las curvas

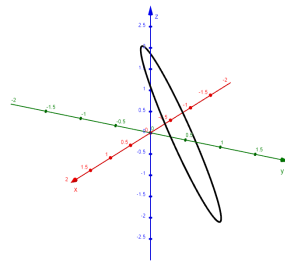
$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t), \text{sen}(8\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ y}$$

$$\beta(t) = \left(\frac{1}{2} \cos(2\pi(t + 1/16)) - 0,15, \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi(t + 1/16)) + 0,35, -2 \text{sen}(2\pi t) \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

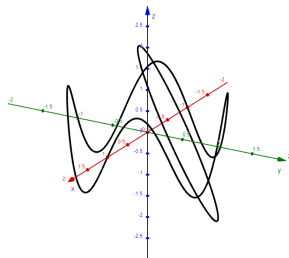
cuyas gráficas se muestran en la Figura 1.6.5



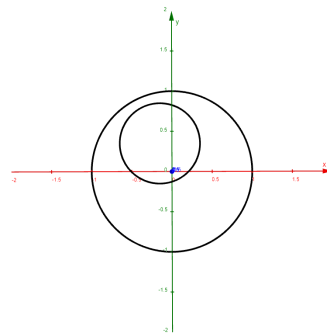
(a) Curva α



(b) Curva β



(c) Curva α y β



(d) Curvas α y β desde arriba

Definimos ρ en A , considerando franjas del anillo, tal y como lo indican las fórmulas a continuación.

$$\rho : S^1 \times [1/2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho(z, s) = 2 \left(s - \frac{1}{2} \right) \text{sen}(8\pi l_j(t)) + 2(1 - s)(-2) \text{sen}(2\pi t)$$

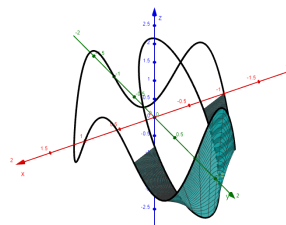
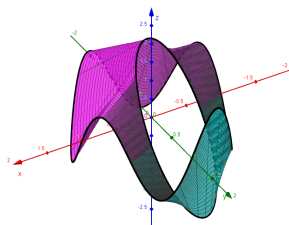
con $sz = (x, y)$ satisfaciendo

$$x = 2 \left(s - \frac{1}{2} \right) \cos(2\pi l_j(t)) + 2(1 - s) \left(\frac{1}{2} \cos(2\pi(t + 1/16)) - 0,15 \right),$$

$$y = 2 \left(s - \frac{1}{2} \right) \sin(2\pi l_j(t)) + 2(1 - s) \left(\frac{1}{2} \sin(2\pi(t + 1/16)) + 0,35 \right),$$

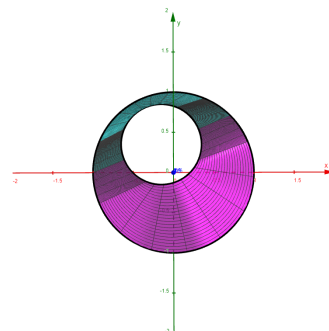
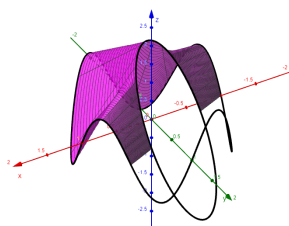
$t \in I_j, I_j = \left[\frac{j}{8}, \frac{j+1}{8} \right], j = 0, \dots, 7$ y l_j función lineal apropiada.

Así definida, ρ resulta suave en el interior de A (salvo en finitos 'rayos', los cuales pueden suavizarse) y su gráfico se obtiene trazando rectas desde los puntos de la curva α hacia puntos correspondientes de la curva β (determinados por las funciones lineales l_j). En la Figura 1.6.5 se muestra el gráfico de ρ .



(e) Gráfico de ρ restringida a A . Las rectas en rosa son aquellas en las que $\alpha < \beta$, y en celeste las rectas en las que $\beta < \alpha$.

(f) Aquí se muestran las rectas en celeste, que son las trayectorias en las que los puntos del círculo β crecen hacia los puntos de la curva α .



(g) Aquí se muestran las rectas en rosa, que son las trayectorias en las que los puntos de la curva α crecen hacia el círculo β .

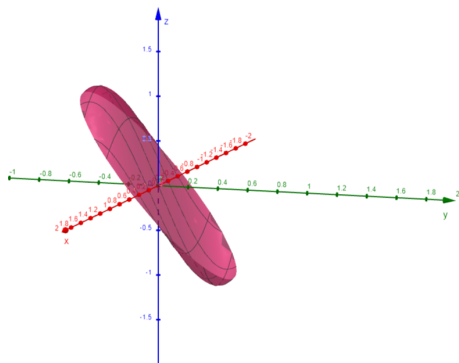
(h) Gráfica de ρ vista desde arriba.

Notar que ρ no posee puntos críticos en el interior de A . A continuación, se define ρ en $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$ para que pegue bien en ∂B con la definición de ρ en A , resulte suave en el interior de B y tenga allí 2 puntos críticos (un mínimo y un máximo absolutos), como en la Figura 1.6.5.

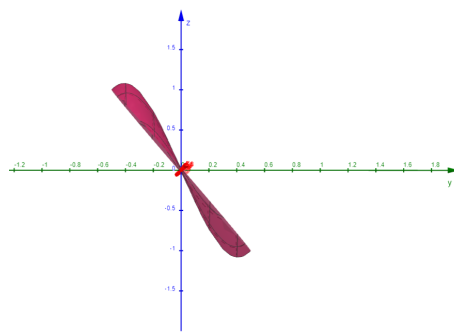
Luego, ρ es una función suave en D^2 salvo quizá en ∂B . Podemos modificarla un poco en un entorno de este conjunto para que resulte suave y esta modificación no agregue puntos críticos.

A partir de esta ρ obtenemos la función g deseada, con exactamente un punto crítico de cada índice 0, 1, 5 y 6.

Paso 3: Definir una función $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ pegando las funciones f y g . La función F será continua (bien definida) y suave en $M - \varphi(S^1 \times \partial D^5)$. Si modificamos F en un entorno de este conjunto, podemos suavizarla. La idea es hacerlo de forma tal que solo se agreguen dos puntos críticos, uno de índice 1 y otro de índice 5. Tras suavizar, F no es una función de Morse perfecta, ya que tiene exactamente un punto crítico extra de cada uno de los



(i) ρ en B (para que pegue bien, solo debemos trasladarla).



(j) Otro ángulo.

siguientes índices: 0, 1, 5 y 6. Aplicando los resultados 2.3.8 y 2.3.10, demostrados en la sección siguiente, es posible modificar ligeramente la función F para cancelar estos puntos críticos. La función obtenida resulta entonces una función de Morse perfecta en M . \square

Notar que, en el ejemplo anterior, al construir la función F no usamos cómo era la relación de la presentación del grupo, sino la cantidad de letras que la forman (8 en este caso), y por ello tomamos $\rho(x, y) = \sin(8\pi y)$, $\forall (x, y) \in \partial D^2$. Adaptando la construcción según la cantidad de letras de la relación y permitiendo que el grupo tenga más relaciones, podemos llevar a cabo un procedimiento similar para exhibir una variedad diferenciable M que tenga como grupo fundamental a un grupo G , satisfaciendo $rk(G) = rg(G^{ab})$, y tal que M admita funciones de Morse perfectas.

Teorema 1.6.6. *Sea G un grupo finitamente presentado, cuya cantidad mínima de generadores coincide con el rango de G^{ab} como grupo abeliano, y sea $n \geq 6$. Entonces, existe una variedad diferenciable M cerrada, orientada y conexa, de dimensión n , cuyo grupo fundamental es isomorfo a G y tal que admite funciones de Morse perfectas.*

Demostraremos este teorema en el siguiente capítulo, utilizando teoría de manijas.

1.7. Otras funciones de Morse en S^n

Sabemos que S^n admite una estructura de CW-complejo con 2 celdas de dimensión k para cada $k = 0, \dots, n$. Por otro lado, toda función de Morse $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ define un CW-complejo X , homotópicamente equivalente a S^n , con tantas k -celdas como puntos críticos de f de índice k . Para concluir este capítulo, comentaremos cómo obtener una función de Morse en S^n con exactamente 2 puntos críticos de cada índice $k = 0, \dots, n$.

Hacemos inducción en n .

Para $n = 1$ podemos tomar $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = h \circ \rho$, siendo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura y $\rho : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un embedding como se ilustra en la Figura 1.5.

Paso inductivo: supongamos que tenemos una función $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse tal que tiene 2 puntos críticos de índice $k = 0, \dots, n - 1$. Podemos suponer que $f(S^n) \subset$

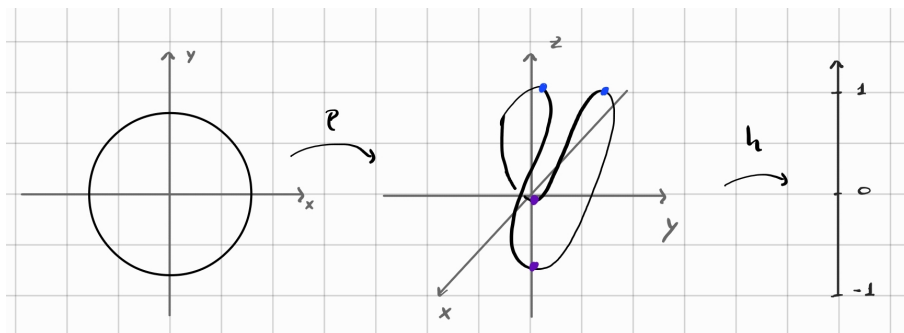


Figura 1.5: Función $f = h \circ \rho$.

$[0, 1 - \epsilon]$. Definimos $F : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x, t) = t^2 + (1 - t^2)f(x)$. Notar que F es suave, $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = 1 = F(x, -1)$. Además,

$$d_{(x,t)}F = (d_x F(-, t), d_t F(x, -)) = ((1 - t^2)d_x f, 2t(1 - f(x))). \tag{1.8}$$

Con lo cual, (x, t) es punto crítico de F si y solo si $t = 0$ (ver última coordenada de (1.8)) y $d_x f = 0$. Es decir, los puntos críticos de F son de la forma $(x, 0)$ son $x \in S^{n-1}$ punto crítico de f . Además, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t) = 1 - f(x) > 0$, así que en la dirección que se agregó (la de la variable t), la función tiene un mínimo local. Luego los puntos críticos de F tienen el mismo índice que los de f . La idea será tapar el cilindro con discos para obtener S^n y extender la F para que allí tenga un máximo en cada tapa. Sea $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - \|x\|^2$. Notar que $g(x) = 1$ en $\partial D^n = S^{n-1}$ y alcanza un máximo en $x = 0$. Podemos pegar 2 copias de g a f , como lo indica el lema 1.4.4, y obtener así la función deseada (ver Figura 1.6).

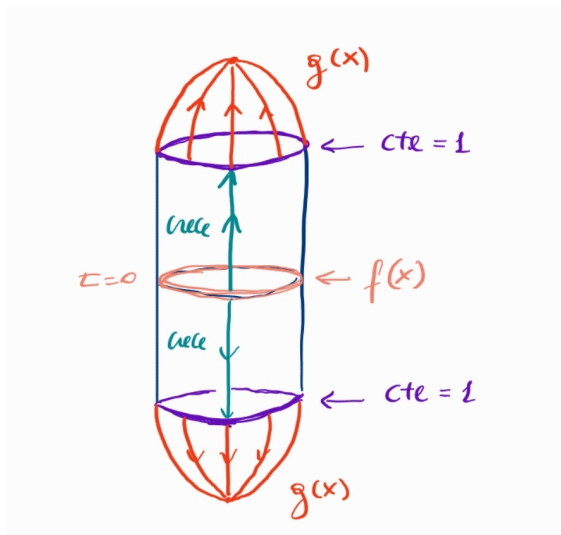


Figura 1.6: F en S^n , aquí $n = 2$.

Comentario: El mismo procedimiento de antes nos permite probar la existencia de una función de Morse en S^1 con 2 máximos y 2 mínimos. Partimos de una función f definida en $S^0 = \{-1, 1\}$, por ejemplo la función 0 (será de Morse porque en dimensión 0 no hay dirección en la que derivar). Definimos $F : S^0 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x, t) = t^2$ (hay una sola dirección para derivar, que es la de t , y dos componentes conexas, así que tenemos dos mínimos) y le pegamos la función $g(x) = 2 - x^2$ definida en D^1 .

Capítulo 2

Funciones perfectas y Teorema de h-cobordismo

Una función de Morse perfecta en una variedad cerrada M tiene la menor cantidad de puntos críticos posibles, y existe un CW-complejo homotópicamente equivalente a M con esa cantidad de celdas. A su vez, toda función de Morse induce una descomposición en manijas de la variedad, con tantas manijas de índice k como puntos críticos de índice k tenga la función de Morse. La afirmación recíproca también es cierta. En particular, tener una función de Morse perfecta en M equivale a una descomposición en manijas “minimal” de M . Así, la búsqueda de funciones de Morse perfectas puede pensarse como una búsqueda de funciones de Morse con pocos puntos críticos, o equivalentemente, como una búsqueda de una descomposición de la variedad en pocas manijas. Este enfoque está estrechamente relacionado con el trabajo de Smale [Sma61a] en la conjetura de Poincaré generalizada. Años más tarde, Smale demostró un teorema que permite decidir si dos variedades cerradas, simplemente conexas, de dimensión $n \geq 5$ son difeomorfas. Este teorema, conocido como el teorema de h -cobordismo, fue demostrado por el autor [Sma62] empleando técnicas de cancelación de manijas. Desde el punto de vista de funciones de Morse, la cancelación de manijas se corresponde con la cancelación de puntos críticos, tal y como lo describe Milnor en [MSS65]. Utilizaremos estas técnicas para demostrar la existencia de funciones de Morse perfectas en variedades cerradas, simplemente conexas, de dimensión mayor o igual que 6, cuya homología sea libre de torsión, así como también el Teorema 1.6.6 enunciado en el capítulo anterior. Comenzaremos definiendo la noción de cobordismo y luego introduciremos los resultados básicos de la teoría de manijas, y su relación con la teoría de Morse. Hecho esto, describiremos brevemente los resultados de la teoría de intersección y estudiaremos el CW-complejo asociado a una descomposición en manijas. Luego, comentaremos el teorema de h -cobordismo y finalizaremos con la demostración del teorema de existencia de funciones de Morse perfectas mencionado.

A partir de ahora, la cantidad de puntos críticos de índice k de una función de Morse se denotará, en la mayoría de los casos, por μ_k en lugar de c_k . Este cambio en la notación se elige por comodidad y para evitar confusiones con otros conceptos que se introducirán más adelante en el texto.

2.1. Cobordismo

En esta sección introducimos la noción de cobordismo y damos algunos resultados de la teoría de Morse aplicada en este contexto. Tomaremos como referencia principal

el trabajo de Milnor [MSS65].

Una n -**triada** $(W; V_0, V_1)$ es una variedad diferenciable W , compacta, de dimensión n , con borde $\partial W = V_0 \cup V_1$, y V_0, V_1 subvariedades cerradas de W de dimensión $n - 1$.

Sean $(W; V_0, V_1)$ y $(W'; V'_0, V'_1)$ dos n -triadas, y $h : V'_1 \rightarrow V_1$ un difeomorfismo. Podemos pegar las variedades W y W' por medio de la función h , obteniendo así una variedad $W \cup_h W'$ bien definida (a menos de difeomorfismo) gracias al teorema 1.4.1. Obtenemos así la n -triada $(W \cup_h W'; V_0, V'_0)$.

Dos variedades diferenciables M_0 y M_1 de dimensión $n - 1$ son **cobordantes** si existe una n -triada $(W; V_0, V_1)$, junto con difeomorfismos $h_i : M_i \rightarrow V_i, i = 0, 1$. En tal caso, decimos que $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ es un **cobordismo** entre M_0 y M_1 . En ocasiones, diremos que $(W; V_0, V_1)$ es un cobordismo, sin especificar las variedades M_i ni los difeomorfismos h_i .

Es fácil ver que toda variedad cerrada M es cobordante consigo misma, tomando el cobordismo $(M \times I, M \times \{0\}, M \times \{1\}, \iota_0, \iota_1)$ con $\iota_i : x \in M \mapsto (x, i) \in M \times \{i\}$, para $i = 0, 1$. A este cobordismo se lo llama cobordismo trivial.

Otros ejemplos de variedades cobordantes se muestran en la Figura 2.1.

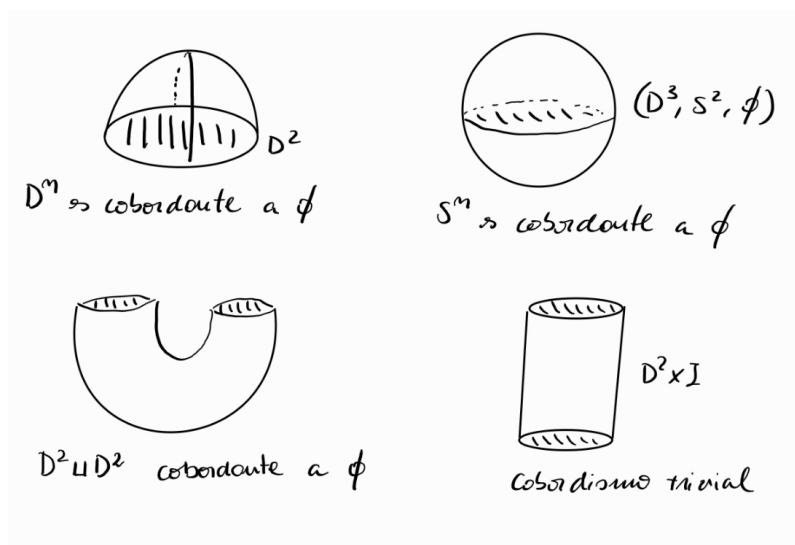


Figura 2.1: Ejemplos de cobordismos.

Gracias a que podemos pegar n -triadas, si M_0 y M_1 son cobordantes, y M_1 y M_2 también lo son, entonces M_0 y M_2 resultan cobordantes. Así, ser cobordante es una relación de equivalencia (la simetría es automática).

Dadas M_0 y M_1 variedades cobordantes, podrían existir distintos cobordismos entre ellas. Distinguiremos cobordismos a menos de difeomorfismo. Concretamente, decimos que dos cobordismos $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ y $(W'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ son equivalentes si existe un difeomorfismo $g : W \rightarrow W'$ tal que $g(V_i) = V'_i$ y $h'_i \circ g|_{V_i} = h_i$ para $i = 0, 1$. A tal difeomorfismo lo notamos $g : (W; V_0, V_1; h_0, h_1) \rightarrow (W'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$. Como lo sugiere la definición, es una relación de equivalencia.

Las clases de cobordismos pueden componerse. Ese es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. *Sea $c = (W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ una clase de cobordismo entre M_0 y M_1 , y $c' = (W'; V'_1, V_2; h'_1, h_2)$ una entre M_1 y M_2 . Entonces existe una clase de cobordismo cc' entre M_0 y M_2 , bien definida. Podemos tomar como representante a la tupa $(W \cup_h W'; V_0, V_2; h_0, h_2)$, con $h = h_1^{-1} \circ h'_1$.*

Demostración. Notar que $(W \cup_h W'; V_0, V_2; h_0, h_2)$ es un cobordismo de M_0 a M_2 . Veamos que si cambiamos de representantes de c (y/o de c') obtenemos un cobordismo equivalente. Sea $(X; Y_0, Y_1; f_0, f_1)$ otro representante de c y $g : (W; V_0, V_1; h_0, h_1) \rightarrow (X; Y_0, Y_1; f_0, f_1)$. Sean $f = f_1^{-1} \circ h'_1$ y $h = h_1^{-1} \circ h'_1$. Definimos $G : W \cup_h W' \rightarrow X \cup_g W'$ pegando g y la identidad:

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in W \\ x & \text{si } x \in W' \end{cases}$$

Notar que G está bien definida: Si $x \in W'$, como $h_1 = f_1 \circ g|_{V_1}$ se tiene que $h(x) = h_1^{-1}h_1(x) = g|_{V_1}^{-1} \circ f_1^{-1} \circ h'_1 = g|_{V_1}^{-1} \circ f$, así que $g(h(x)) = f(x) = x \in X \cup_f W'$ y es un homeomorfismo. Además $G|_W = g : W \rightarrow X$ y $G|_{W'} = id : W' \rightarrow W'$ son difeomorfismos, así que el lema 1.4.2 nos garantiza la existencia de un difeomorfismo \tilde{G} que coincide con G en un entorno de V_1 . Para ver que $\tilde{G} : (W \cup_h W'; V_0, V_2; h_0, h_2) \rightarrow (X \cup_g W'; Y_0, Y_2; f_0, h_2)$ resta ver que $f_0\tilde{G}|_{V_0} = h_0$ y $h_2 \circ \tilde{G}|_{V_2} = h_2$, pero esto es se sigue de que $\tilde{G} = G$ en esos conjuntos, y de la definición de G .

Hemos probado que la clase de $(W \cup_h W'; V_0, V_2; h_0, h_2)$ no depende del representante de c . Análogamente, puede probarse que no depende del representante de c' y, entonces, queda bien definida la composición cc' . \square

Observación 2.1.2. La composición de clases de cobordismo es asociativa (ya que el pegado de variedades lo es) y hay un neutro: dada M variedad diferenciable cerrada de dimensión n , la clase c con representante $(M \times I; M \times 0, M \times 1; i_0, i_1)$ satisface que $c'c = c'$ y $c''c = c''$ para todas clases de cobordismo c' de M a N y c'' de N a M . Tenemos así una categoría cuyos objetos son variedades diferenciables cerradas de dimensión $n - 1$ y cuyos morfismos son clases de cobordismos.

La teoría de Morse permite estudiar las clases de cobordismos, a partir de descomponer cada cobordismo en una composición de cobordismos más simples. Una función de Morse en una n -tríada $(W; V_0, V_1)$ es una función de Morse $f : W \rightarrow [a, b]$ tal que $V_0 = f^{-1}(a)$ y $V_1 = f^{-1}(b)$. Recordar que una función de Morse en una variedad con borde tiene, por definición, todos sus puntos críticos en el interior (y son no degenerados). Con una demostración similar a la vista en el Capítulo 1, puede probarse la existencia de funciones de Morse para tríadas. La idea consta de dos pasos:

1. Conseguir una función $f : W \rightarrow [a, b]$ suave tal que $f^{-1}(a) = V_0$ y $f^{-1}(b) = V_1$ sin puntos críticos en un entorno de ∂W .
2. Modificar la f del ítem anterior en el interior de W para eliminar los puntos críticos degenerados que pueda tener.

Las funciones de Morse en $(W; V_0, V_1)$ son un abierto denso en el espacio de funciones

$$\{f : (W, V_0, V_1) \rightarrow ([a, b], a, b) \text{ suave}\}$$

con la topología C^2 introducida en el capítulo anterior [MSS65].

Un **cobordismo elemental** es un cobordismo $(W; V_0, V_1)$ que admite una función de Morse $f : (W; V_0, V_1) \rightarrow ([a, b], a, b)$ con un único punto crítico. Dada una función de Morse f en $(W; V, V')$, con puntos críticos p_1, \dots, p_m , podemos modificarla en pequeños entornos E_i de cada punto crítico p_i , y así obtener una función de Morse g en $(W; V_0, V_1)$, que coincida con f fuera de $\bigcup_{i=1}^m E_i$, y que tenga los mismos puntos críticos que f , pero satisfaciendo que $g(p_i) \neq g(p_j)$ si $i \neq j$. Así, todo cobordismo (W, V, V') admite una función de Morse $f : W \rightarrow [a, b]$ cuyos puntos críticos se encuentran todos en distintos niveles. Sean $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$ los valores críticos de f . Para cada $i = 1, \dots, m$ definimos el cobordismo elemental $(W_i, V_{i-1}, V_i) = (f^{-1}[c_{i-1}, c_i], f^{-1}(c_{i-1}), f^{-1}(c_i))$. La composición de estos cobordismos nos da el cobordismo original y, de este modo, todo cobordismo puede escribirse como composición de cobordismos elementales.

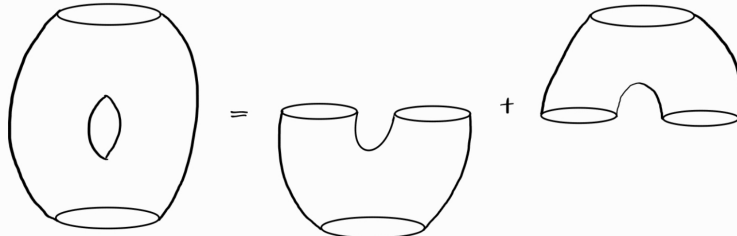


Figura 2.2: (W, S^1, S^1) visto como composición de cobordismos elementales, siendo W el toro con dos discos removidos.

La Figura 2.2 da cuenta de cómo descomponer el cobordismo (W, S^1, S^1) , con $W = \mathbb{T} - (\mathring{D}_1^2 \cup \mathring{D}_2^2)$, en cobordismos elementales.

Supongamos que se quiere conseguir una función de Morse perfecta sobre una variedad diferenciable cerrada M . Para ello debemos ser capaces de calcular, o tener cierto control sobre los números de Betti b_k . La homología de M se puede calcular a partir de un CW-complejo homotópicamente equivalente. Toda función de Morse induce un CW-complejo homotópicamente equivalente a M , con c_k celdas de dimensión k , como vimos en 1.1.15. Sin embargo, calcular la homología a partir de este complejo no parece a priori algo sencillo, ya que no tenemos una descripción de su estructura ni de los mapas de adjunción de las celdas. Para tener un mayor control sobre la estructura del CW-complejo sería útil ir “armándolo” a medida que recorremos los valores críticos de la función de Morse. Para ello es necesario que primero aparezcan los puntos críticos de índice 0, luego los de índice 1 y así hasta llegar a los puntos críticos de índice $n = \dim M$.

Sea $(W; V, V')$ triada, $\dim W = n$. Decimos que una función de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ es **autoindexante** si $V = f^{-1}(-\frac{1}{2})$, $V' = f^{-1}(n + \frac{1}{2})$ y tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y todo punto crítico p de índice k , se tiene $f(p) = k$.

Smale prueba en su paper [Sma61a] que todo cobordismo admite una función de Morse autoindexante, utilizando teoría de manijas. Cerraremos esta sección discutiendo la demostración realizada por Milnor en [MSS65]. Esta demostración sirve de ejemplo de cómo modificar una función de Morse dada y de cómo trabajar con el campo gradiente de dicha función.

Teorema 2.1.3. *Sea $(W; V_0, V_1)$ una triada y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces existe una función de Morse autoindexante $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ con los mismos puntos críticos que f y con el mismo índice.*

Demostración. La función f induce una descomposición de $(W; V_0, V_1)$ en cobordismos elementales. Supongamos que esta descomposición consta de dos cobordismos elementales, es decir, $(W; V_0, V_1) = cc'$, con c, c' cobordismos elementales. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f : W \rightarrow [0, 1]$, $V_0 = f^{-1}(0)$, $V_1 = f^{-1}(1)$, $c = f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ y $c' = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$. Sean p y p' los puntos críticos de f , de índices k y k' respectivamente, y $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Supongamos que el punto crítico de mayor índice aparece primero, es decir, que $k \geq k'$. Vamos a modificar la función f de forma tal que preserve los puntos críticos, pero que ahora aparezca primero el punto crítico de menor índice (como ocurre con las funciones autoindexantes). Para esto, siguiendo la exposición de Milnor en [MSS65], tomamos un campo gradiente ξ de la función f y trabajamos con los conjuntos K_p y $K_{p'}$ compuestos por los puntos en las trayectorias de ξ que tienden a p y a p' respectivamente, cuando t tiende a ∞ o $-\infty$. Es decir,

$$K_p = \left\{ x \in W : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^x(t) = p \text{ ó } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^x(t) = p \right\},$$

$$K_{p'} = \left\{ x \in W : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^x(t) = p' \text{ ó } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^x(t) = p' \right\}.$$

Se pueden probar los siguientes resultados:

1. Si $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$ y $a, a' \in (0, 1)$ cualesquiera, entonces existe $g : W \rightarrow [0, 1]$ de Morse tal que g y f tienen los mismos puntos críticos p y p' , $g(p) = a, g(p') = a'$, g coincide con f en un entorno de ∂W y difiere por una constante en un entorno de p y de p' . Además ξ es campo gradiente para g .
2. El resultado anterior se extiende al caso en el que se tienen 2 conjuntos de puntos críticos al mismo nivel. Es decir, el que caso de que los puntos críticos de f sean $\{p_1, \dots, p_r\} \cup \{p'_1, \dots, p'_s\}$, con los primeros a un cierto nivel $f(p_1)$ y los segundos a otro nivel $f(p'_1)$ y tales que $K_{p_i} \cap K_{p'_j} = \emptyset$ para todos i, j .
3. Si $k \geq k'$, es posible alterar el campo gradiente ξ en un entorno de $V = f^{-1}(c)$, $f(p_1) < c < f(p'_1)$ para que $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$ y así aplicar el resultado anterior.

Comentaremos la idea de cómo obtener el primer resultado. Los valores de f pueden pensarse como distancia recorrida: todos los puntos salen desde V_0 y se mueven siguiendo las trayectorias de las curvas integrales de ξ . Algunos tenderán a p , otros a p' y otros a algún punto de V_1 (de estos hay de 3 tipos: los que salen de V , los que salen de p y los que salen de p'). No se mezclan gracias a que $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$, tal y como se muestra en la Figura 2.3.

Lo que se hace es modificar la función f para que recorra más rápido los carriles de K_p y más lento los de $K_{p'}$. Al estar separados, los carriles vecinos sirven de transición, es decir, se ajusta la velocidad para que varíe continuamente. Eso se logra usando una función μ constante en las trayectorias, que vale 0 en las de K_p y 1 en las de $K_{p'}$, y definiendo una función $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que, según el carril dado por $\mu(q)$, dirá a qué velocidad se recorre el intervalo $[0, 1]$. Luego, se define la función $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, $g(q) = G(f(q), \mu(q))$ y se verifica que esta función satisface todas las propiedades listadas en 1. □

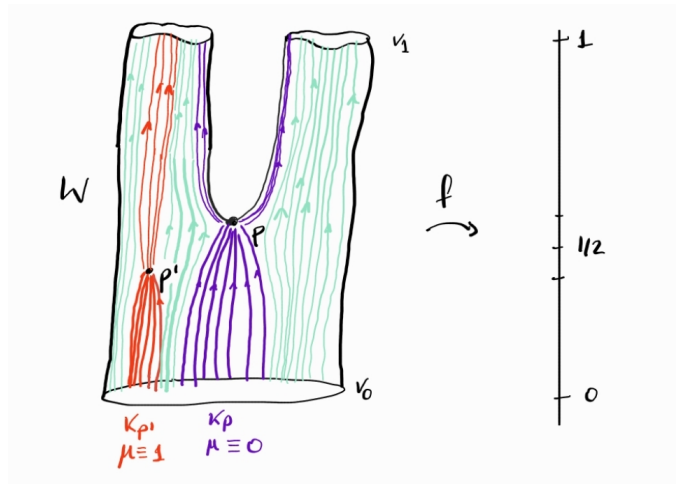


Figura 2.3: Representación de las trayectorias de las curvas integrales de ξ .

2.2. Teoría de Manijas

En esta sección, presentaremos la teoría de Manijas y su conexión con la teoría de Morse. Nos basaremos en los trabajos de Smale y Milnor, comentados en la introducción, así como también en las notas de Ranicki sobre cirugía [Ran02]. Al final de la sección demostraremos el Teorema 1.6.6, enunciado en el capítulo anterior.

Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n , Q una componente conexa del borde de M y $0 \leq k \leq n$. Dada $f : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow Q$ embedding, definimos la adjunción de una k -manija por medio del mapa de adjunción f como la variedad diferenciable $\chi(M, Q, f, k) = M \cup_f (D^k \times D^{n-k})$. Esta variedad $M' = \chi(M, Q, f, k)$ es, como espacio topológico, el cociente

$$M' = \frac{M \cup (D^k \times D^{n-k})}{\{f(x, y) \sim (x, y)\}_{(x, y) \in \partial D^k \times D^{n-k}}}$$

Notar que solo estamos identificando puntos de Q con puntos de $\partial D^k \times D^{n-k}$, y tanto M como $D^k \times D^{n-k}$ son subespacios de M' . La estructura diferenciable que le damos a M' es la siguiente: en los puntos de $M - \text{Im}(f) \subseteq M'$ consideramos las cartas de M y en los puntos de $D^k \times D^{n-k}$ las cartas de esta variedad diferenciable. Pensamos a $D^k \times D^{n-k}$ como una variedad diferenciable con borde

$$\partial(D^k \times D^{n-k}) = \partial D^k \times D^{n-k} \cup D^k \times \partial D^{n-k},$$

suavizando las esquinas. Para terminar de darle estructura diferenciable a M' , definimos las cartas alrededor de los puntos $p = f(x, y)$, con $(x, y) \in \partial D^k \times D^{n-k}$, a partir de cuellos, tal y como lo hicimos en 1.4.1.

La variedad $M' = \chi(M, Q, f, k)$ es, entonces, una variedad diferenciable compacta de dimensión n , con borde

$$\partial M' = (\partial M - \text{Im}(f)) \cup D^k \times \partial D^{n-k}.$$

Además, tanto M como $D^s \times D^{n-s}$ son subvariedades embebidas de M' . Decimos que la subvariedad $D^k \times D^{n-k}$ es una **manija** de índice k .

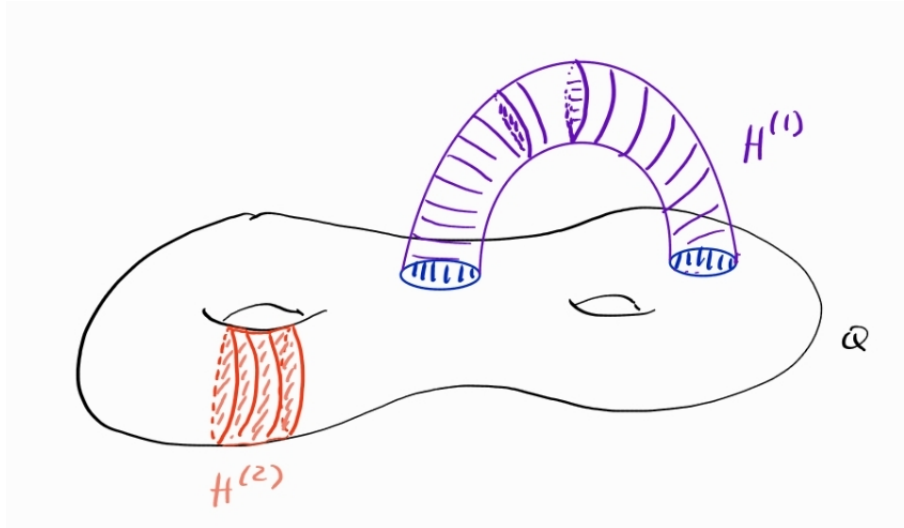


Figura 2.4: Adjunción de una 1-manija y una 2-manija a la componente de borde Q de una variedad diferenciable M de dimensión 3. Optamos por no representar a M en este dibujo.

Notar que el borde de M' se obtiene a partir de ∂M haciendo cirugía de tipo $(k-1, n-1)$: si restringimos f a $\partial D^k \times \partial D^{n-k}$ se tiene entonces que

$$\partial M' = \partial M \cup_f (D^k \times \partial D^{n-k}).$$

Definición 2.2.1. La traza de una cirugía $\chi(M, Q, f, k)$ es el cobordismo $(W, \partial_0 W, \partial_1 W)$ con $W = \chi(M, Q, f, k)$, $\partial_0 W = \partial M - Q$ y $\partial_1 W = \partial W - \partial_0 W = Q \cup_f (D^k \times \partial D^{n-k})$.

Más en general, es posible adjuntar varias manijas del mismo índice de una sola vez. Sea M^n compacta, Q una componente conexa del borde, $0 \leq k \leq n$. Para cada $i = 1, \dots, r$ notemos por D_i^k a una copia del disco cerrado de dimensión k y sea $f_i : \partial D_i^k \times D_i^{n-k} \rightarrow Q$ un embedding. Supongamos además que las imágenes de los embeddings f_i son disjuntas. Definimos la variedad diferenciable $\chi(M, Q; f_1, \dots, f_r; k) = M \cup_f \coprod_{i=1}^r D_i^k \times D_i^{n-k}$, la cual hereda la estructura diferenciable de M y de $D_i^k \times D_i^{n-k}$ tal y como lo hicimos para el caso de una sola función de adjunción. Cada copia $D_i^k \times D_i^{n-k}$ es una manija de índice k . La variedad $M' = \chi(M, Q; f_1, \dots, f_r; k)$ obtenida es una variedad diferenciable compacta, de dimensión n , con borde

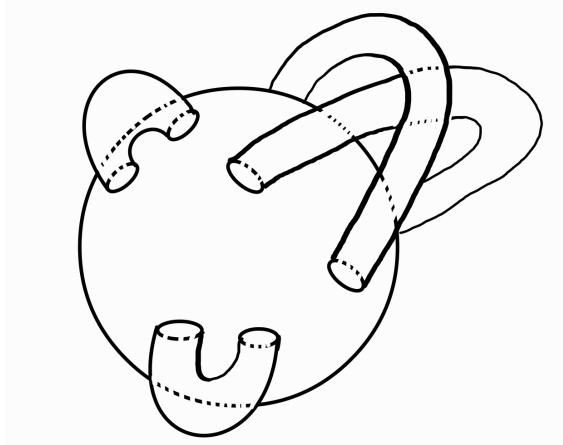
$$\partial M' = \left(\partial M - \left(\bigcup_{i=1}^r f_i(\partial D_i^k \times D_i^{n-k}) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^r D_i^k \times \partial D_i^{n-k} \right).$$

Si una variedad N es difeomorfa a $\chi(M, Q; f_1, \dots, f_r; k)$, decimos que $\sigma = (M, Q; f_1, \dots, f_r; k)$ es una presentación de V . Si $\partial M = Q$, podemos omitir Q en la notación.

En el capítulo anterior observamos que dos funciones de pegado isotópicas inducen variedades diferenciables difeomorfas. Aplicando este resultado a la componente conexa Q se deduce que

Proposición 2.2.2. Sea M variedad diferenciable de dimensión n , Q componente conexa del borde de M y $f, g : \partial D_i^k \times D_i^{n-k} \rightarrow Q$ dos embeddings isotópicos en Q , entonces las variedades $\chi(M, Q; f; k)$ y $\chi(M, Q; g; k)$ son difeomorfas.

Un **cuerpo de asas** (handlebody) es una variedad diferenciable con una presentación de la forma $(D^n; f_1, \dots, f_r; k)$. Fijados n, r y k , notaremos por $\mathcal{H}(n, r, k)$ al conjunto de estas variedades diferenciables. Un ejemplo puede verse en la Figura 2.5. Cuando $n = 3$ y

Figura 2.5: Ejemplo de cuerpo de asas en $\mathcal{H}(3,4,1)$

$k = 1$ recuperamos la teoría clásica de manijas, que es uno de los enfoques que se utilizó originalmente para estudiar las variedades de dimensión 3.

Utilizaremos una definición más amplia de manija, descrita a continuación.

Definición 2.2.3. Sean M y H variedades diferenciables de dimensión n . Decimos que H es un k -manija en M si existe un difeomorfismo $h : D^k \times D^{n-k} \rightarrow H$ tal que si $f = h|_{\partial D^k \times D^{n-k}}$ entonces $Im f = H \cap M \subseteq \partial M$.

En tal caso, la variedad $M' = M \cup H$ es difeomorfa a $\chi(M; f; k)$. Diremos que H es una k -manija o una manija de índice k indistintamente. Le damos nombre a las siguientes subvariedades de H .

- El núcleo de H es $h(D^k \times 0)$,
- El conúcleo de H es $h(0 \times D^{n-k})$,
- La a- esfera (o esfera de adjunción) es $h(\partial D^k \times 0)$,
- La b- esfera (o esfera cinturón) es $h(0 \times \partial D^{n-k})$,
- El a-tubo es $h(\partial D^k \times D^{n-k})$, que es exactamente la parte de H que se identifica con M ,
- El b-tubo es $h(D^k \times \partial D^{n-k})$.

En la Figura 2.6 pueden apreciarse las distintas subvariedades de una manija H .

En el caso de cobordismos, consideraremos manijas que se peguen a la componente del borde de "arriba", es decir, dado $(W; V_0, V_1)$ cobordismo, una H manija en W deberá satisfacer que $H \cap W \subseteq V_1$. En tal caso, tenemos un nuevo cobordismo $(W'; V_0, V'_1)$ que se obtiene del cobordismo original adjuntando una manija, con

$$V'_1 = \partial W' - V_0 = (V_1 - f(\partial D^k \times D^k)) \cup D^k \times \partial D^{n-k}.$$

Dado un cobordismo $(W; V_0, V_1)$ y una función de Morse f para la tríada con exactamente un punto crítico de índice k , entonces W se obtiene de $V_0 \times I$ adjuntando una manija de índice k por la componente de borde $V_0 \times \{1\}$. Es decir, existe $g : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow V_0 \times \{1\}$ embedding, y un difeomorfismo $W \equiv \chi(V_0 \times I, V_0 \times \{1\}, f, k)$ de forma tal que las clases de cobordismo de $(W; V_0, V_1)$ y $(W', V_0 \times \{0\}, V'_1)$ son iguales, siendo

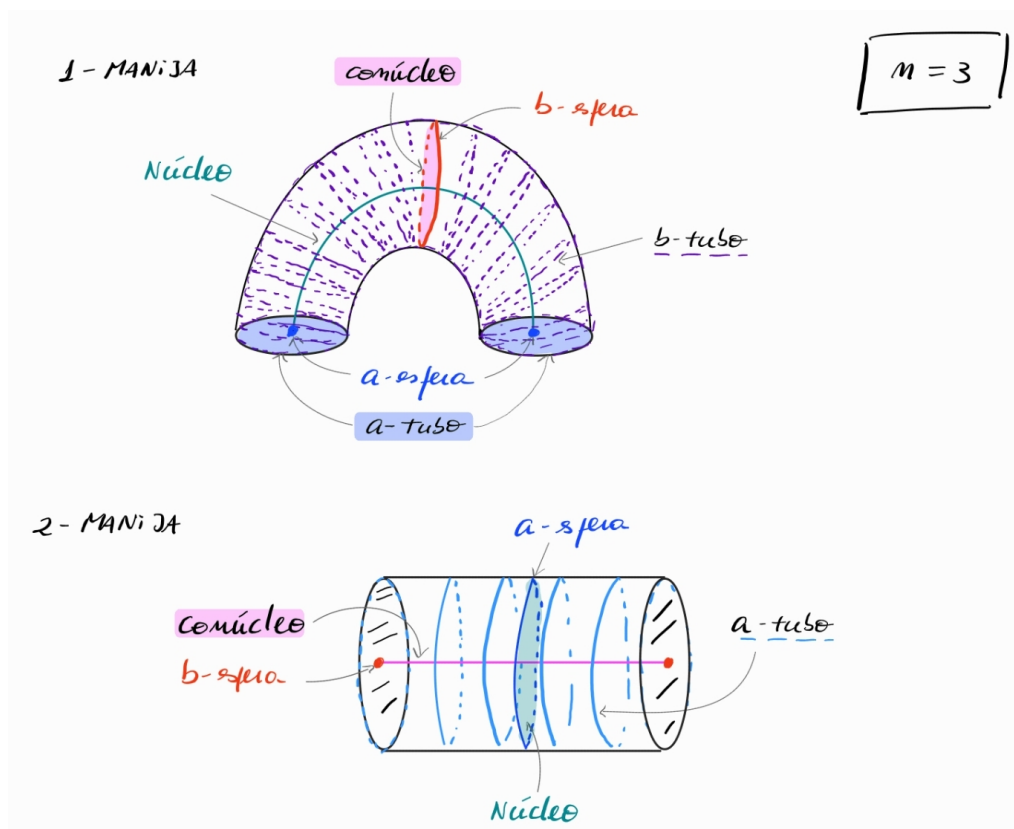


Figura 2.6: Partes de una 1-manija y una 2-manija en dimensión 3.

$W' = \chi(V_0 \times I, V_0 \times \{1\}, f, k)$ y $V_1' = \partial W' - (V_0 \times \{0\})$. Este resultado se deduce de la demostración del teorema 1.1.14. Más en general, se obtiene un resultado similar para r puntos críticos de índice k , todos situados a un mismo nivel. Estos resultados, junto con los que enunciaremos a continuación, fueron demostrados en los trabajos de Smale [Sma61b] y [Sma61a].

La teoría de Morse permite demostrar la existencia de descomposiciones en manijas de las variedades.

Definición 2.2.4 (Descomposición en manijas). Sea M una variedad diferenciable cerrada. Una descomposición de M en manijas es un difeomorfismo

$$M \cong H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m,$$

con H_0 una 0-manija, es decir H_0 es un n -disco, y H_i es una manija que se adjunta a $W_{i-1} = \bigcup_{j=0, \dots, i-1} H_j$, para $i \geq 1$.

En el caso en que W sea un cobordismo de V_0 a V_1 , consideraremos descomposiciones de la forma $W \cong C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$, con C_0 un collar (cerrado) de V_0 en W y cada H_i es una manija en el cobordismo $W_{i-1} = C_0 \cup \bigcup_{j=1, \dots, i-1} H_j$. En el caso en que $V_0 = \emptyset = V_1$ recuperamos la definición anterior.

Observación 2.2.5. Si $(W; V_0, V_1)$ es un cobordismo elemental, y $f : W \rightarrow [0, 1]$ es una función de Morse con un único punto crítico de índice k , W se obtiene de V_0 adjuntando una k -manija. Así, toda función de Morse cuyos puntos críticos esten todos a distintos niveles nos da una descomposición en manijas. Si uno toma una función de Morse

autoindexante, se obtiene una descomposición buena, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.2.6. Una descomposición en manijas $W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$ se dice buena si el índice de H_{k+1} es mayor o igual que el índice de H_k , y las manijas del mismo índice no se intersecan.

Corolario 2.2.7. Toda función de Morse autoindexante induce una descomposición en manijas buena.

Teniendo en cuenta el trabajo hecho por Milnor en [MSS65] obtenemos resultados en la otra dirección:

Proposición 2.2.8. Sea V_0 una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$ y supongamos que V_1 se obtiene de V_0 haciendo cirugía de tipo $(k - 1, n - 1)$, entonces existe un cobordismo elemental $(W; V_0, V_1)$ y una función de Morse $f : W \rightarrow [c_0, c_1]$ con exactamente un punto crítico de índice k . Más aún $(W; V_0, V_1)$ es difeomorfo a $(W'; V_0, V'_1)$ con W' y V'_1 como antes.

Este resultado se extiende a las descomposiciones en manijas.

Teorema 2.2.9. Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo y $W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$ una descomposición buena en manijas, entonces existe $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse autoindexante, tal que la descomposición en manijas que induce f es la misma que la dada.

Demostración. Se demuestra por inducción en la cantidad de manijas, aplicando la proposición anterior y el hecho de que se pueden pegar funciones de Morse al pegar variedades por su borde (ver 1.4.4). \square

A continuación, describimos la descomposición dual de una descomposición en manijas.

Sea (W, V_0, V_1) una n -triada, y

$$W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$$

una descomposición en manijas de W sobre V_0 . Tomando un cuello cerrado de V_1 en W , podemos expandir la descomposición en manijas a una de la forma

$$C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m \cup C_1, \quad (2.1)$$

con $C_1 \equiv V_1 \times [0, 1]$. Sea k el índice de H_m y $h : D^k \times D^{n-k} \rightarrow W_m$, con $h|_{\partial D^k \times D^{n-k}}$ el mapa de adjunción de esta manija. Notar que $h(D^k \times \partial D^{n-k})$, el b-tubo de H_m , está contenido en $\partial_1 W_m \equiv V_1$. Si intercambiamos los roles de k y $n - k$, podemos pensar a H_m como una manija de índice $n - k$ adjuntada a V_1 . Sea $\rho_k : D^{n-k} \times D^k \rightarrow D^k \times D^{n-k}$ la función $\rho_k(x, y) = (y, x)$ y $h^* = h \circ \rho_k$, notamos por H_m^* a la manija que se adjunta a C_1 por la componente $V_1 \times \{0\}$, utilizando la función de adjunción h^* . En general, si h_i es el mapa correspondiente a la manija H_i , y k es el índice de H_i , se tiene una manija H_i^* de índice $n - k$, que se adjunta a $W_{i+1}^c = C_1 \cup \bigcup_{j=i+1}^m H_j$ a través del mapa $h_i^* = h_i \circ \rho_k$. De este modo, se obtiene una descomposición en manijas de W sobre V_1 , dada por

$$W = C_1 \cup H_m^* \cup \dots \cup H_1^* \cup C_0.$$

Esta descomposición es la **descomposición dual** de (2.1).

Finalizamos la sección con una demostración del Teorema 1.6.6.

Primero demostraremos que existe una variedad M , con grupo fundamental presentado por $\langle a, b | [a, b]^2 \rangle$, que admite funciones de Morse perfectas (comparar con el Ejemplo 1.6.5).

Proposición 2.2.10. *Sea G el grupo presentado por $\langle a, b | [a, b]^2 \rangle$. Existe una variedad diferenciable M cerrada, orientada y conexa, cuyo grupo fundamental es isomorfo a G y tal que M admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Consideremos el cobordismo (W_1, \emptyset, V_1) que se obtiene a partir de D^6 adjuntado dos 1-manijas con embeddings disjuntos $f_i : \partial D^1 \times D^5 \rightarrow \partial D^6$, $i = 1, 2$. Es decir,

$$W_1 = D^6 \cup_{f_1} (D^1 \times D^5) \cup_{f_2} (D^1 \times D^5), \text{ y}$$

$$V_1 = \partial W_1 = \partial D^6 - \left(f_1(\partial D^1 \times \mathring{D}^5) \cup f_2(\partial D^1 \times \mathring{D}^5) \right) \cup_{f_1} (D^1 \times \partial D^5) \cup_{f_2} (D^1 \times \partial D^5).$$

Recordar que V_1 se obtiene a partir de S^5 haciendo cirugía de tipo $(0, n-1)$ dos veces (ver sección 2.2).

Pediremos que los embeddings f_i preserven la orientación, y consideraremos a W_1 como variedad orientada. Notar que W_1 es homeomorfo a $(S^1 \times D^5) \# (S^1 \times D^5)$, y en consecuencia V_1 es homeomorfo a $(S^1 \times S^4) \# (S^1 \times S^4)$ (ver Figura 2.7). En particular, ambas variedades tienen grupo fundamental libre con 2 generadores, que notamos a, b .

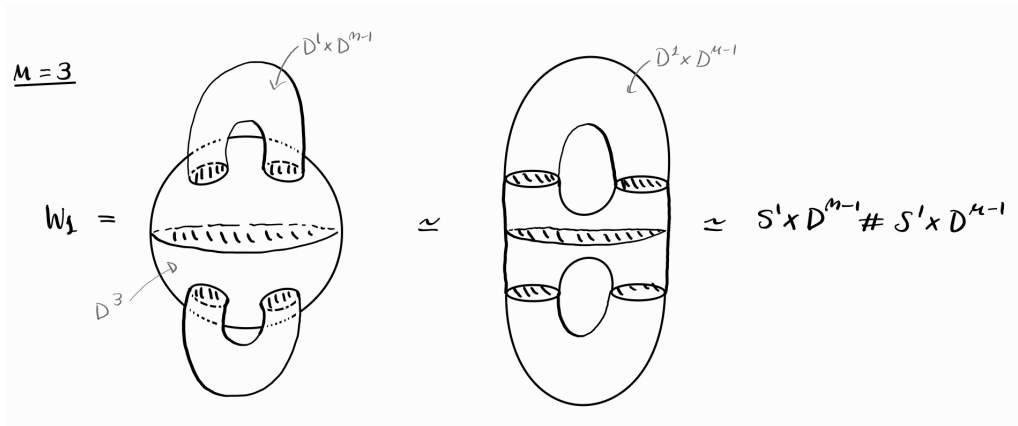


Figura 2.7: Representación de W_1 tomado dimensión $n = 3$ en vez de 6.

Consideremos un embedding $\varphi : S^1 \times 0 \rightarrow V_1$ tal que $[\varphi] = [a, b]^2 \in \pi_1(V_1)$, y lo extendemos a un embedding $\varphi : S^1 \times D^4 \rightarrow V_1$ que preserva la orientación. Adjuntando una 2-manija a W_1 con mapa de adjunción φ se tiene el cobordismo (W_2, \emptyset, V_2) , siendo

$$W_2 = D^6 \cup_{f_1} (D^1 \times D^5) \cup_{f_2} (D^1 \times D^5) \cup_{\varphi} (D^2 \times D^4)$$

una variedad compacta, conexa y orientada, con borde V_2 dado por

$$V_2 = \left(V_1 - \varphi(S^1 \times \mathring{D}^4) \right) \cup_{S^1 \times S^4} (D^2 \times \partial D^4).$$

Observar que V_2 es homeomorfo a la variedad M construida en 1.6.4 para el grupo G y de dimensión $n-1$. En particular, $\pi_1(V_2)$ es isomorfo a G . Es sencillo ver que W_2 también tiene grupo fundamental isomorfo a G , por ejemplo viendo que es homotópicamente equivalente al CW-complejo que se obtiene de la unión en un punto $S^1 \vee S^1$ adjuntando una 2-celda con mapa φ .

En vista del teorema 2.2.9, sabemos que existe una función de Morse autoindexante $f : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ para la tríada (W_2, \emptyset, V_2) con exactamente un punto crítico de índice 0, dos de índice 1 y uno de índice 2. Además, podemos calcular la homología de W_2 a partir

del CW-complejo K asociado a la descomposición, y deducir que es libre de torsión, con $b_0(W_2) = 1, b_1(W_2) = 2, b_2(W_2) = 1$ y $b_j = 0$ para todo $j \geq 3$ (no hay manijas de estos índices).

Sea $[0, b]$ la imagen de f , de modo que $f^{-1}(b) = V_2$. Consideremos la variedad diferenciable M que se obtiene pegando dos copias de W_2 por su borde, es decir, $M = W_2 \cup_{V_2} W_2$. Notar que esta variedad puede obtenerse componiendo los cobordismos (W_2, \emptyset, V_2) y $(\overline{W}_2, \overline{V}_2, \emptyset)$, donde \overline{V}_2 y \overline{W}_2 denotan las variedades V_2 y W_2 con la orientación opuesta, y así M resulta una variedad orientada. Además, dado que la inclusión $V_2 \rightarrow W_2$ induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales, se puede demostrar que $\pi_1(M) \simeq \pi_1(W_2) \equiv G$ aplicando el teorema de van Kampen con los abiertos $\{U, V\}$, siendo U la unión de W_2 y un entrono cuello de \overline{V}_2 en \overline{W}_2 , y V la unión de un entorno cuello de V_2 en W_2 y \overline{W}_2 . Sea $\bar{f} : \overline{W}_2 \rightarrow [b, 2b]$ la función dada por $\bar{f} = 2b - f$ y consideremos la función $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ que se obtiene de pegar las funciones f y \bar{f} (ver Lema 1.4.4). Así definida, F es una función de Morse con exactamente 8 puntos críticos, cuyos índices se indican en la tabla 2.1.

Índice k	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
Cantidad de puntos críticos	1	2	1	0	1	2	1	0

Cuadro 2.1: Cantidad de puntos críticos de F para cada índice k .

Podemos calcular la homología de M a partir del CW-complejo inducido por la descomposición en manijas. Notar que, al no haber manijas de índice 3, los primeros grupos de homología de M coinciden con los de W_2 , y $H_3(M) = 0$. Por ser M compacta y orientada, el resultado 1.3.2 nos permite calcular todos los números de Betti de M de forma rápida. Estos son: $b_6 = b_0 = 1, b_5 = b_1 = 2, b_4 = b_2 = 1$ y $b_3 = 0$. Comparando el k -ésimo número de Betti b_k , con la cantidad de puntos críticos de F de índice k , concluimos que F es perfecta. \square

Notar que la variedad construida en la demostración anterior tiene dimensión 6, y es claro que podría haberse elegido cualquier otra dimensión $n \geq 6$.

Podemos generalizar la construcción de M y así demostrar el Teorema 1.6.6.

Demostración del Teorema 1.6.6. Sea G un grupo finitamente presentado de rango m y $\langle a_1, \dots, a_m | r_1, \dots, r_s \rangle$ una presentación de G . Consideremos un *handlebody* $W_1 \in \mathcal{H}(n, m, 1)$ en donde cada embedding $f_i : \partial D^1 \times D^{n-1} \rightarrow \partial D^n$ preserva la orientación ($i = 1, \dots, m$). La variedad W_1 es compacta, conexa y orientada, con borde $\partial W_1 = V_1$

$$V_1 = \left(\partial D^n - \bigcup_{i=1}^m f_i(\partial D^1 \times \mathring{D}^{n-1}) \right) \cup \bigcup_{i=1}^m (D^1 \times \partial D^{n-1}).$$

Al igual que antes, W_1 tiene grupo fundamental libre en m generadores y la inclusión $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(W)$ induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales. Por cada relación r_i adjuntamos una 2-manija con mapa de adjunción $\varphi_i : S^1 \times D^{n-2} \rightarrow V_1$ preservando la orientación, y tal que la clase de $\varphi_i|_{S^1 \times 0}$ coincida con r_i en $\pi_1(V_1)$. Obtenemos así un cobordismo (W_2, \emptyset, V_2) con

$$W_2 = W_1 \cup \bigcup_{i=1}^s (D^2 \times D^{n-2}), \text{ y}$$

$$V_2 = \partial W_2 = \left(V_1 - \bigcup_{i=1}^s \varphi_i(S^1 \times \mathring{D}^{n-2}) \right) \cup \bigcup_{i=1}^s (D^2 \times \partial D^{n-2}).$$

Se calcula la homología de W_1 a partir de esta descomposición en manijas, al igual que antes, y se deduce que $H_*(M)$ es libre de torsión, con $b_0 = 1, b_1 = m, b_2 = s$ y $b_j = 0$ para todo $j \geq 3$. La hipótesis de que $rk(G) = rg(G^{ab})$ se utiliza en este paso, para calcular b_1 .

Por el teorema 2.2.9, existe una función de Morse autoindexante $f : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente un punto crítico de índice 0, m puntos críticos de índice 1 y s de índice 2. Si M es la variedad que se obtiene componiendo los cobordismos $(W_2 \emptyset, V_2)$ y $(\overline{W}_2, \overline{V}_2, \emptyset)$, entonces M es una variedad diferenciable cerrada, conexa y orientada, con $\pi_1(M) = G$ y los números de betti de M son: $b_0 = b_n = 1, b_1 = b_{n-1} = m, b_2 = b_{n-2} = s$ y $b_j = 0$ para $3 \leq j \leq n-3$ y $j > n$. Tomando $\bar{f} : \overline{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Morse definida por $\bar{f} = 2 \text{máx } f - f$ y definiendo $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ pegando las funciones f y \bar{f} según el Lema 1.4.4, concluimos que M admite funciones de Morse perfectas. \square

2.3. Teoría de intersección y cancelación de manijas

En esta sección comentaremos algunos resultados de la teoría de intersección y daremos teoremas que, bajo ciertas condiciones, permiten reducir la cantidad de manijas de una descomposición dada. Tomaremos como referencia principal el libro de Rourke y Sanderson [RS12]. Si bien los autores desarrollaron esta teoría en el contexto simplicial, es posible llevar a cabo los mismos argumentos en la categoría suave usando las nociones de transversalidad y entornos tubulares.

Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave, $A \subseteq N$ una subvariedad embebida, decimos que f es **transversal** a A si para todo $x \in f^{-1}(A)$ se tiene que $Im(d_x f) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N$, y notamos $f \pitchfork A$. En el caso en que tengamos dos subvariedades $P, Q \subseteq N$ diremos que son transversales ($P \pitchfork Q$) si la inclusión $i_P : P \rightarrow N$ es transversal a Q .

La noción de transversalidad es la que nos permite asegurar que $f^{-1}(A)$ es una subvariedad embebida de M .

Teorema 2.3.1. *Sea $f : M \rightarrow N$ suave, $A \subseteq N$ subvariedad embebida y $f \pitchfork A$. Si $f^{-1}(A)$ es no vacía, entonces $f^{-1}(A)$ es una subvariedad embebida de M cuya codimensión es la codimensión de A en N .*

Si $m = \dim M$ y $n = \dim N$, se tiene que $m - \dim f^{-1}(A) = n - \dim A$, o equivalentemente que

$$\dim f^{-1}(A) = m - n + \dim A.$$

Sea V una variedad diferenciable de dimensión $r + s$, y $P, Q \subseteq V$ subvariedades embebidas de dimensiones r y s respectivamente, tales que $P \pitchfork Q$. Supongamos que P y $\mathcal{N}(Q) = \frac{TV|_Q}{TQ}$, el espacio normal de Q , están orientadas. Notar que dado $p \in P \cap Q$ y v_1, \dots, v_r base de $T_p P$, si notamos por \bar{v}_i a la clase de v_i en $\mathcal{N}_p(Q)$, como $T_p P \oplus T_p Q = T_p V$ se tiene que $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ es una base de $\mathcal{N}_p(Q)$.

Definición 2.3.2. *Sea $p \in P \cap Q$, y v_1, \dots, v_r una base orientada de $T_p P$, se define el número de intersección de P y Q en p como $\epsilon(p) = 1$ o -1 según $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r$ sea una base de $\mathcal{N}_p(Q)$ orientada positivamente o negativamente.*

Al ser $P \pitchfork Q$ y $\dim P + \dim Q = \dim V$, la intersección $P \cap Q$ es una subvariedad embebida de V de dimensión $\dim P - \dim V + \dim Q = 0$. En el caso en que $P \cap Q$ sea

compacta, constará de finitos puntos. Esto ocurre cuando V es compacta y tanto P como Q son cerrados de V , o cuando P es compacta y Q es cerrada en V (o viceversa). Cuando estemos en alguno de estos escenarios, queda bien definido el número de intersección entre P y Q .

Definición 2.3.3. El número de intersección de P y Q es $Q \cdot P = \sum_{p \in P \cap Q} \epsilon(p)$.

Sea (W, V_0, V_1) una n -triada y $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$. Notemos por $h_1 : \partial D^r \times D^{n-r} \rightarrow V_1$ al mapa de adjunción de $H^{(r)}$, $V'_1 = \partial(W \cup H^{(r)}) - V_0$ y por $h_2 : \partial D^{r+1} \times D^{n-r-1} \rightarrow V'_1$ al mapa de adjunción de $H^{(r+1)}$. Sea $S_1 = h_1(0 \times \partial D^{n-r})$ la b -esfera de $H^{(r)}$ y $S_2 = h_2(\partial D^{r+1} \times 0)$ la a -esfera de $H^{(r+1)}$. Notar que S_1 es una $(n-r-1)$ -esfera, mientras que S_2 es una r -esfera, y $\dim V'_1 = n-1 = (n-r-1) + r$. Como S_1 y S_2 son compactas, si se interseca transversalmente tendremos que $S_1 \cap S_2$ consiste de finitos puntos. Decimos que las manijas $H^{(r)}$ y $H^{(r+1)}$ son **complementarias** si $S_1 \pitchfork S_2$ y $S_1 \cap S_2$ consta de un único punto. En este escenario, vamos a poder cancelar el par de manijas complementarias, tal y como lo dice el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4 (Primer Teorema de Cancelación). *Sea (W, V_0, V_1) una n -triada y sea $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$, con $H^{(r)}$ y $H^{(r+1)}$ manijas complementarias, entonces existe un difeomorfismo entre W' y W , que es la identidad fuera de un entorno de $H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$.*

La demostración puede encontrarse en [RS12, Capítulo 6], con homeomorfismos en vez de difeomorfismos. Los detalles necesarios para obtener el difeomorfismo se hallan, por ejemplo, en [Wal16]. Otra demostración, usando campos gradiente, es la dada por Milnor en [MSS65]. Optamos por desarrollar la primera. En la demostración utilizaremos el siguiente lema:

Lema 2.3.5. *Sea V una variedad diferenciable de dimensión n , y $P, Q \subseteq V$ subvariedades embebidas, de dimensión complementaria, tales que $P \pitchfork Q$. Sea $k = \dim Q$ y $n-k$ la dimensión de P , y sea $p \in P \cap Q$. Entonces, existe una carta (U, φ) de V alrededor de q , tal que*

$$P \cap U = \{x_1 = 0, \dots, x_k = 0\}, y$$

$$Q \cap U = \{x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}.$$

Demostración. Por ser Q una subvariedad embebida de V , existe una carta tajada (U, φ) de M alrededor de p , satisfaciendo

$$Q \cap U = \{x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}.$$

En particular, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\}$ es una base de $T_p Q$. Como $P \subseteq V$ es una subvariedad embebida de codimensión k y $T_p P$ es complementario a $T_p Q$ generado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right\}$, el resultado se sigue del Teorema 9.46 de [Lee03]. \square

Demostración del primer teorema de cancelación. Sean h_1 y h_2 los mapas de adjunción de $H^{(r)}$ y $H^{(r+1)}$. Dado que mapas de adjunción isotópicos producen variedades diferenciables difeomorfas, la idea será modificar las funciones h_1 y h_2 mediante isotopías hasta obtener un escenario en el que podamos cancelar estas manijas de forma más sencilla. Para ello consideremos las esferas S_1 y S_2 . Por hipótesis, $S_1 \cap S_2 = \{p\}$, con intersección transversal. Sea $V'_1 = \partial(W \cup H^{(r)}) - V_0$, de modo que $S_1, S_2 \subseteq V'_1$ son subvariedades embebidas. Por el lema anterior, existe una carta (U, φ) de V'_1 alrededor de p tal que $\varphi(\bar{U}) = D^r \times D^{n-r-1}$, $\varphi(p) = (0, 0)$, $\bar{U} \cap S_1 = 0 \times D^{n-r-1}$ es un entorno cerrado de p en S_1 , y $\bar{U} \cap S_2 = D^r \times 0$ es un entorno cerrado de p en S_2 . En la Figura 2.8 puede verse una representación en dimensión 3.

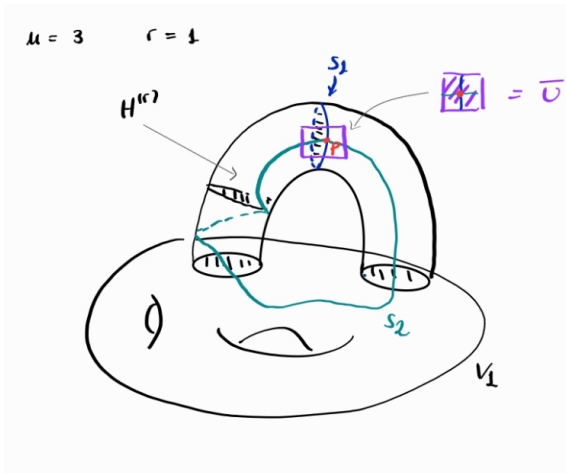


Figura 2.8: Adjunción de una r manija sobre $V_1 \subseteq \partial W$, $n = 3$, $\dim V_1 = 2$, $r = 1$. La b -esfera S_1 está representada en azul. La a -esfera $S_2 = h_2(\partial D^{r+1} \times 0)$ es una copia de S^1 embebida en V'_1 , y esta representada en turquesa. La manija $H^{(r+1)}$ se adjuntará por medio del mapa de pegado $h_2 : S^1 \times D^1 \rightarrow V'_1$. La imagen de h_2 no está representada en la figura, sólo está representada la a -esfera.

Tomemos un entorno tubular τ_1 de S_1 en el b -tubo de $H^{(r)}$. Como los entornos tubulares son isotópicos, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\tau_1 = D^r \times S^{n-r-1}$, satisfaciendo que $\tau_1 \cap \bar{U} = \bar{U} = D^r \times D^{n-r-1}$. Expandiendo τ_1 hasta que cubra el b -tubo, podemos suponer que τ_1 es todo el b -tubo y entonces $(b\text{-tubo}) \cap \bar{U} = \bar{U} = D^r \times D^{n-r-1}$ (ver Figura 2.9).

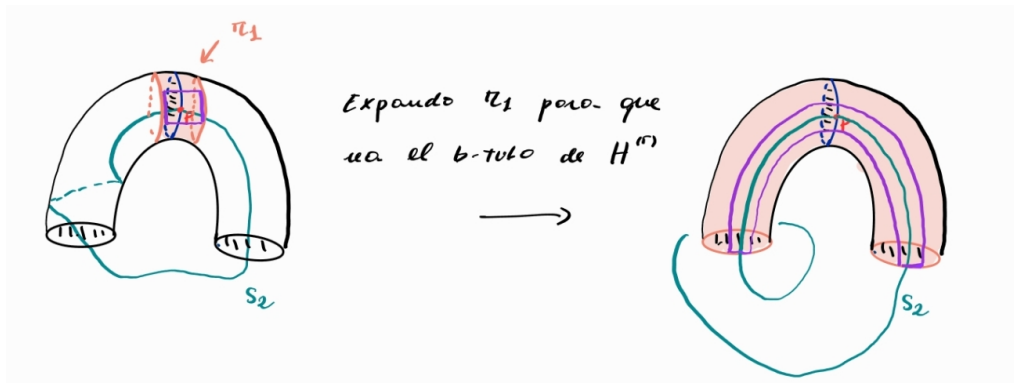


Figura 2.9: Expansión del entorno tubular τ_1 pintado en naranja.

Análogamente, se tiene un entorno tubular τ_2 de S_2 en el a -tubo de $H^{(r+1)}$, $\tau_2 = S^r \times D^{n-r-1}$ y $\tau_2 \cap \bar{U} = D^r \times D^{n-r-1}$. Expandiendo este entorno tubular para que sea el a -tubo de $H^{(r+1)}$, podemos suponer que el a -tubo de $H^{(r+1)}$ contiene a \bar{U} (ver Figura 2.10).

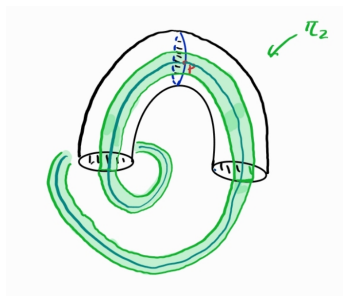


Figura 2.10: El entorno tubular τ_2 en verde, que podemos suponer que es el a -tubo de la manija $H^{(r+1)}$.

Al ser S_1 una $(n - r - 1)$ -esfera, podemos identificar el disco $0 \times D^{n-r-1}$ que surge de intersectar S_1 y \bar{U} , con un hemisferio de la esfera S_1 . Si consideramos a $p \in S_1$ como el polo norte, podemos identificar el hemisferio norte S_+^{n-r-1} de S_1 con el disco $0 \times D^{n-r-1}$. Análogamente, si vemos a p como el polo norte de la r -esfera S_2 , podemos identificar el

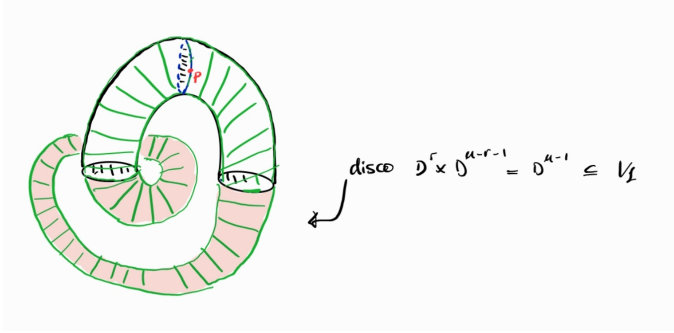


Figura 2.11: En verde se muestra el a-tubo de $H^{(r+1)}$. La parte pintada de naranja representa al disco contenido en V_1 .

disco $D^r \times 0 = S_2 \cap \bar{U}$ con el hemisferio norte de S_2 , que notamos S_+^r . Mediante estas identificaciones, el a-tubo de $H^{(r+1)}$ se pegará a V_1' con el mapa de adjunción h_2 , siendo

$$h_2(\partial D^{r+1} \times D^{n-r-1}) = \underbrace{h_1(D^r \times S_+^{n-r-1})}_{\subseteq b\text{-tubo de } H^{(r)}} \cup \underbrace{h_2(S_-^r \times D^{n-r-1})}_{\subseteq V_1},$$

donde S_-^r denota el hemisferio sur de ∂D^{r+1} . Notar que la parte del a-tubo contenida en V_1 es un disco $D^r \times D^{n-r-1} = D^{n-1}$, luego de redondear las esquinas (ver Figura 2.11).

El siguiente paso será modificar el mapa de adjunción h_1 para que el pegado de la manija $H^{(r)}$ se realice en este disco $D^{n-1} \subseteq V_1$.

Mediante una isotopía ambiente de V_1 , llevamos a cabo las siguientes identificaciones:

$$\partial D^r \times D^{n-r} = S^{r-1} \times D^{n-r-1} \times [-1, 1] = S^{r-1} \times [-1, 1] \times D^{n-r-1} = A \times D^{n-r-1} \subseteq D^{n-1} \subseteq V_1,$$

siendo $A = D^r - \frac{1}{2}\mathring{D}^r$. De este modo, $W \equiv W \cup_{\iota \times -1} D^{n-1} \times [-1, 1]$ con $\iota : D^{n-1} \rightarrow V_1$ la inclusión, y

$$W \cup H^{(r)} \equiv W \cup_{\iota \times -1} (D^{n-1} \times [-1, 1] \cup_{h_1} H^{(r)}).$$

Ahora bien, por como tomamos h_1 , $(D^{n-1} \times [-1, 1] \cup_{h_1} H^{(r)})$ es difeomorfo a $S^r \times D^{n-r-1} \times [-1, 1]$ y, al adjuntar la manija $H^{(r+1)}$ via el mapa h_2 , nos queda la adjunción del siguiente lema, que nos permitirá concluir que W' es difeomorfo a W . □

Lema 2.3.6. Sea $\varphi : D^{n-r-1} \rightarrow D^{n-r}$ el embedding, el cual consiste en embeber el disco D^{n-r-1} en el hemisferio norte de la esfera $S^{n-r-1} = \partial D^{n-r} \subseteq D^{n-r}$, entonces $(S^r \times D^{n-r}) \cup_{id \times \varphi} H^{(r+1)}$ es difeomorfo a D^n .

Demostración. Conseguir un homeomorfismo entre estos espacios es sencillo. Identificamos $S^r \times D^{n-r}$ con $S^r \times D^{n-r-1} \times I$ y sea $1 \times \varphi : S^r \times D^{n-r-1} \rightarrow S^r \times D^{n-r-1} \times 1$. Al adjuntar $H^{(r+1)}$, estamos pegando $D^{r+1} \times D^{n-r-1}$ al techo de $S^r \times D^{n-r-1} \times I$ y el resultado es un espacio homeomorfo a $D^r \times D^{n-r-1}$. Para obtener un difeomorfismo, hay que introducir esquinas y luego suavizarlas, detalles que pueden hallarse por ejemplo en [Wal16, Capítulo 4]. □

Si a W le adjuntamos una n -bola, la variedad que se obtiene es difeomorfa a W . Podemos entonces adjuntar una n -bola vía adjuntar un par de manijas complementarias, como en el lema anterior, y la variedad que se obtiene sigue siendo difeomorfa a W .

Lema 2.3.7 (Agregado de manijas). Sea $W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$ una descomposición en manijas de una variedad diferenciable de dimensión n . Para todo $i = 1, \dots, m$ y $0 \leq r \leq n$ es posible introducir un par de manijas complementarias $\{H^{(r)}, H^{(r+1)}\}$ en la descomposición, luego de la manija H_i (o antes de esta manija).

A continuación, veremos dos instancias en las que el teorema 2.3.4 permite simplificar una descomposición en manijas dada, y qué significado tiene desde el punto de vista de la teoría de Morse.

Lema 2.3.8 (Eliminación de 0-manijas). *Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo y*

$$W = C_0 \cup H_1^{(0)} \cup \dots \cup H_{\mu_0}^{(0)} \cup \dots \cup H_1^{(n)} \cup \dots \cup H_{\mu_n}^{(n)}$$

una descomposición en manijas, con μ_k manijas de índice k para cada $k = 0, \dots, n$. Si $H_0(W, V_0) = 0$ entonces W admite una descomposición en manijas sobre V_0 sin manijas de índice 0, con $(\mu_1 - \mu_0)$ manijas de índice 1 y μ_k manijas de índice k para $2 \leq k \leq n$.

Demostración. La homología relativa del par (W, V_0) en grado 0 coincide con la de

$$W_1 = C_0 \cup H_1^{(0)} \cup \dots \cup H_{\mu_0}^{(0)} \cup H_1^{(1)} \cup \dots \cup H_{\mu_1}^{(1)}$$

relativa a V_0 . Es decir, $H_0(W, V_0) = H_0(W_1, V_0)$.

Ahora bien, $H_0(W_1, V_0) = 0$ si y solo si toda componente conexa de W_1 interseca a V_0 , o equivalentemente, a C_0 . Así, toda 0 manija $D^0 \times D^n$ ha de estar conectada a C_0 o a otra 0-manija. Luego, por cada 0-manija $H_i^{(0)}$, se tiene una 1-manija $H_j^{(1)}$ que conecta esta manija a C_0 o a otra manija. En particular, la a -esfera de $H_j^{(1)}$, que es $S^0 \times 0$, interseca a la b -esfera, $D^0 \times S^{n-1}$, de $H_i^{(0)}$ en exactamente 1 punto, permitiendo cancelar este par de manijas. Así, se van cancelando las 0-manijas con las 1-manijas, hasta obtener una descomposición sin 0-manijas. \square

En el contexto de funciones de Morse para tríadas, el lema nos dice que, dada una función de Morse en $(W; V_0, V_1)$ autoindexante, podemos cambiarla por otra función de Morse, que coincida con la original en un entorno de $\partial(W_1)$, y que tenga la misma cantidad de puntos críticos, de igual índice, salvo por los puntos críticos de índices 0 y 1. La nueva no tendrá puntos críticos de índice 0, y tendrá $(c_1 - c_0)$ puntos críticos de índice 1, siendo c_k la cantidad de puntos críticos de índice k de la original. Considerando la descomposición dual, mencionada en la sección anterior, o bien tomando $-f$ con f una función de Morse autoindexante, es posible eliminar las n -manijas/los puntos críticos de índice n . Se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3.9. *Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo, W conexo, entonces W admite una descomposición en manijas sobre V_0 satisfaciendo:*

1. *no hay manijas de índice 0 si $V_0 \neq \emptyset$,*
2. *no hay manijas de índice n si $V_1 \neq \emptyset$,*
3. *hay exactamente una manija de índice 0 si $V_0 = \emptyset$,*
4. *hay exactamente una manija de índice n si $V_1 = \emptyset$.*

Demostración. Los ítems 1 y 2 se deducen del lema anterior. Para el ítem 3, se define $W' = W - \mathring{D}^n$, $V'_0 = \partial D^n$ y $V'_1 = V_1$ y se aplica el ítem 1 al cobordismo $(W'; V'_0, V'_1)$, obteniendo así una descomposición de W' sin 0-manijas. A partir de esta descomposición, es posible recuperar W adjuntando un n -disco. Así se obtiene una descomposición de W con exactamente una 0-manija. El ítem 4 se deduce de forma análoga, pero usando el ítem 2. \square

Notar que este resultado no pide ninguna hipótesis sobre la dimensión.

El segundo resultado que se deduce del primer teorema de cancelación es el siguiente.

Lema 2.3.10 (Cancelación de 1-manijas). *Sea W conexa de dimensión n y sea*

$$W = C_0 \cup H_1^{(1)} \cup \dots \cup H_{\mu_1}^{(1)} \cup \dots \cup H_1^{(n)} \cup \dots \cup H_{\mu_n}^{(n)}$$

una descomposición en manijas buena, sin manijas de índice 0. Si $\pi_1(W, V_0) = 0$ y $n \geq 6$, entonces existe una descomposición en manijas de W sobre V_0 sin 1-manijas, con μ_k manijas de índice k para $2 \leq k \leq n, k \neq 3$ y con $(\mu_1 + \mu_3)$ -manijas de índice 3.

Demostración. La demostración consiste en reemplazar cada 1-manija por una 3-manija. Para ello, se introducen dos manijas complementarias, de índices 2 y 3 (la variedad que se obtiene es difeomorfa a W justamente porque podemos cancelar estas manijas) de forma tal que la 2-manija sea complementaria a una 1-manija. Luego, se cancela la 1-manija con la 2-manija, y así se intercambia una 1-manija por una 3-manija. Los detalles pueden leerse de [RS12, Capítulo 6]. \square

Sea $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$, S_1 la b -esfera de $H^{(r)}$ y S_2 la a -esfera de $H^{(r+1)}$, ambas orientadas según la orientación usual de las esferas. Consideremos la orientación en el b -tubo de $H^{(r)}$ inducida por la orientación usual de $D^r \times \partial D^{n-r}$. A menos de una isotopía que modifique el mapa de adjunción h_2 , podemos suponer que $S_1 \pitchfork S_2$ y que $S_1 \cap S_2 \subseteq (b\text{-tubo de } H^{(r)})$. Consideramos en $N(S_2)$ la orientación inducida por la del b -tubo y la de S_2 . Teniendo en cuenta estas orientaciones, se define el número de incidencia de $H^{(r+1)}$ en $H^{(r)}$.

Definición 2.3.11. Se define el número de incidencia $\epsilon(H^{(r+1)}, H^{(r)})$ como el número de intersección $S_2 \cdot S_1$.

El número de incidencia es invariante por homotopías del mapa de adjunción de $H^{(r+1)}$, lo que permite extender la definición de número de incidencia al caso en que S_1 y S_2 no se intersecan transversalmente. Más aún, sea S^r una r -esfera con punto base $*$ y $D^r = h_1(D^r \times 0) \subseteq H^{(r)}$. Consideremos el mapa $\rho : D^r \rightarrow S^r$ el mapa que colapsa el borde del disco en el punto $*$ y sea $c : H^{(r)} \rightarrow D^r$ el mapa que colapsa la manija a su r -disco, $c(h_1(x, y)) = h_1(x, 0)$. La función $q : W \cup H^{(r)} \rightarrow S^r$, $q|_W = *$, $q|_{H^{(r)}} = \rho \circ c$ resulta bien definida y continua.

Lema 2.3.12. *Si $g = q|_{S_2} : S_2 \rightarrow S^r$, entonces $\epsilon(H^{(r+1)}, H^{(r)}) = \deg g$. En particular, el número de incidencia es invariante por homotopías del mapa de adjunción de $H^{(r+1)}$.*

La demostración de dicho lema puede hallarse en [RS12, Capítulo 6].

2.4. CW-complejo asociado a una descomposición

En esta breve sección presentaremos el CW-complejo asociado a una descomposición en manijas de una variedad. Asumiremos como conocidos los resultados básicos de la teoría de CW-complejos y remitimos al lector a [Hat02] para más detalles.

Utilizando la teoría de Morse, demostramos que todo cobordismo admite una descomposición en manijas (buena), donde estas manijas se adjuntan sucesivamente a la unión de V_0 con las manijas de menor índice. Además, cada manija H admite una retracción a su núcleo $r : H \rightarrow h(D^k \times 0)$, y $h(D^k \times 0)$ es una k -celda pegada por su borde a $V_0 \cup \{\text{manijas de menor índice}\}$. Es natural, entonces, considerar espacios topológicos formados a partir de adjuntar celdas a un espacio topológico dado.

Definición 2.4.1. Un CW-relativo a A es un par (X, A) , donde A es un espacio topológico y X se obtiene a partir de A adjuntando celdas de distintas dimensiones (en orden creciente).

El i -esqueleto de un CW-relativo (X, A) es A unión las celdas de dimensión menor o igual a i , y lo notaremos $X^{(i)}$.

Notar que X no es en sí un CW-complejo. Sin embargo, si colapsamos A a un punto, entonces lo sería. Aún en el caso en que A sea un CW-complejo, X no tiene por qué serlo, ya que las funciones de adjunción cuyas imágenes intersecan a A no necesariamente caen en el esqueleto de A correspondiente.

Definición 2.4.2 (Número de incidencia de celdas). Sea (X, A) un CW-relativo, e^i, e^{i+1} celdas en X y $\varphi : D^{i+1} \rightarrow X^{(i)}$ el mapa característico de e^{i+1} . Sea $f : S^i \rightarrow S^i$ la función $f = c \circ \varphi|_{\partial D^{i+1}=S^i}$, con $c : X^{(i)} \rightarrow X^{(i)}/X^{(i-1)} \cup \bigcup_{\tilde{e}^i \neq e^i} \tilde{e}^i \simeq S^i$ la función que colapsa el i -esqueleto sin e^i a un punto. Se define el número de incidencia de e^{i+1} sobre e^i como $\epsilon(e^{i+1}, e^i) = \deg f$.

Para cada $n \geq 0$ sea $C_n(X, A)$ el \mathbb{Z} -módulo libre generado por las n -celdas de X y $\partial_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ el morfismo de borde determinado por

$$\partial_n(e^n) = \sum_{e^{n-1} \in X} \epsilon(e^n, e^{n-1})e^{n-1}.$$

Se verifica que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ y que la homología de este complejo coincide con la homología relativa $H_*(X, A)$.

Teorema 2.4.3. Sea $W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$ una descomposición en manijas buena. Entonces existe un CW-relativo (K, V_0) que satisface

- K es homotópicamente equivalente a W rel V_0 ,
- K tiene tantas r -celdas como r -manijas tenga la descomposición, siendo $e^r = D^r = h(D^r \times 0)$ la r -celda correspondiente a la manija $H^{(r)}$; y
- $\epsilon(e^{r+1}, e^r) = \epsilon(H^{(r+1)}, H^{(r)})$.

Este teorema nos dice que $H_*(W, V_0) = H_*(K, V_0)$ y que esta última la podemos calcular a partir de los números de incidencia de las manijas de la descomposición. Si $\mu_k =$ cantidad de puntos críticos de índice k , o equivalentemente la cantidad de manijas de índice k , podemos representar el morfismo de \mathbb{Z} -módulos libres $\partial_k : \mathbb{Z}^{\mu_k} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mu_{k-1}}$ por la matriz de incidencia $[\partial_k] = [\epsilon(e_i^k, e_j^{k-1})]_{1 \leq i \leq \mu_k, 1 \leq j \leq \mu_{k-1}}$, $\partial_k(e_i^k) = [\partial_k]e_i$ (la i -ésima columna de la matriz de incidencia).

2.5. h-cobordismo

En esta sección enunciaremos un segundo teorema de cancelación, así como también un resultado que nos permitirá verificar más fácilmente si se cumplen o no las hipótesis de dicho teorema. Estas herramientas fueron desarrolladas por Smale para demostrar el teorema de h -cobordismo, el cual comentaremos brevemente al final de esta sección.

Teorema 2.5.1 (Segundo teorema de cancelación). Sea $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$ y supongamos que V_1 es simplemente conexa, $n \geq 6$ y $2 \leq r \leq n - 4$. Si $\epsilon(H^{(r+1)}, H^{(r)})$ es 1 o -1 , entonces existe un difeomorfismo $W' \rightarrow W$ tal que es la identidad fuera de un entorno de $H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$.

La demostración de este teorema consiste en reducir el número de puntos de intersección entre el par de manijas $\{H^{(r)}, H^{(r+1)}\}$ hasta obtener un único punto de intersección, permitiendo así la aplicación del primer teorema de cancelación. Para reducir la cantidad de puntos de $H^{(r)} \cap H^{(r+1)}$, se utiliza un teorema de Whitney -enunciado a continuación- que establece condiciones en las cuales dadas dos subvariedades complementarias $P, Q \subseteq M$ (es decir, que se intersecan transversalmente y $\dim P + \dim Q = \dim M$), es posible modificar P para eliminar un par de puntos de la intersección $P \cap Q$.

Teorema 2.5.2 (Lema de Whitney). *Sean $P, Q \subseteq M$ subvariedades complementarias, y sean $p, q \in P \cap Q$ tales que $\epsilon(p) = -\epsilon(q)$. Supongamos además que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. $\dim P \geq 3, \dim Q \geq 3$ y $\pi_1(M) = 0$.
2. $\dim P = 2, \dim Q \geq 3$ y $\pi_1(M - Q) = 0$.

Entonces existe una isotopía ambiente $F : M \times I \rightarrow M$ tal que $F_1(P) = P'$ interseca transversalmente a Q y $P' \cap Q = P \cap Q - \{p, q\}$. Además, esta isotopía puede elegirse con soporte compacto que no contenga a los puntos de $P \cap Q - \{p, q\}$.

La parte del enunciado referente al soporte compacto indica que los puntos de $P \cap Q - \{p, q\}$ permanecen fijos durante toda la isotopía, es decir, la isotopía no afecta a estos puntos en ningún instante t . Tanto la demostración del Lema de Whitney como el segundo teorema de cancelación se hallan en [RS12].

Corolario 2.5.3. *Sea (W, V_0, V_1) una n -triada, con W, V_0 y V_1 simplemente conexos y supongamos que*

$$W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$$

es una descomposición en manijas buena, sin manijas de tamaños $0, 1, n-1, n$. Entonces, todo par de manijas $\{H^{(k)}, H^{(k+1)}\}$, con $2 \leq k \leq n-3$, cuyo número de intersección es 1 o -1 puede ser cancelado.

Demostración. El hecho de que tanto V_0 como W sean simplemente conexos, nos garantiza que $\partial_+ W_j = \partial W_j - V_0$ sea simplemente conexo para $1 \leq j \leq n-3$. Podemos aplicar el teorema de cancelación para $2 \leq k \leq n-4$. El caso $k = n-3$ se deduce aplicando el teorema anterior a la descomposición dual (o en el caso de funciones de Morse, a $-f$) teniendo en cuenta que V_1 es simplemente conexa por hipótesis. \square

Dada una descomposición en manijas buena de W , para poder cancelar un par de manijas debemos ser capaces de reconocer un par de manijas $\{H^{(k)}, H^{(k-1)}\}$ tal que $\epsilon(H^{(k)}, H^{(k-1)}) = 1$ o -1 . En términos de la matriz de indicencia $[\partial_k]$, debemos ser capaces de garantizar que hay al menos una entrada de la matriz que tenga un 1 o un -1 . El siguiente lema, cuya demostración puede leerse de [RS12], nos dice que podemos realizar cambios de base a través de isotopías de los mapas de adjunción. Si $f : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow V_1$ es el mapa de adjunción de una k -manija, notamos por $[f] \in \pi_{k-1}(V_1)$ a la clase de homotopía del mapa $f|_{\partial D^k \times 0}$.

Lema 2.5.4 (Lema de modificación). *Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo con V_1 conexo. Sea W' una variedad diferenciable que se obtiene a partir de W adjuntando dos manijas de índice k , es decir $W' = W \cup_{f_1} H_1 \cup_{f_2} H_2$ con H_1, H_2 manijas de índice k y $\text{Im}(f_1) \cap \text{Im}(f_2) = \emptyset$. Supongamos además que $2 \leq k \leq n-2$ y $\epsilon \in \{-1, 1\}$, entonces existe $f_3 : \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow V_1$ isotópica a f_2 tal que $[f_3] = [f_2] + \epsilon[f_1]$, y la imagen de f_3 es disjunta a la de f_1 .*

Corolario 2.5.5. Sea W y W' como en el lema anterior, y supongamos que $W = W_1 \cup H^{(k-1)}$. Si notamos por H_3 a la k -manija cuyo mapa de adjunción es la función f_3 obtenida en el lema anterior, entonces

$$\epsilon(H_3, H^{(r-1)}) = \epsilon(H_2, H^{(r-1)}) + \epsilon \cdot \epsilon(H_1, H^{(r-1)}).$$

Corolario 2.5.6. Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo con W , V_0 y V_1 simplemente conexos y con una descomposición en manijas de índices $2 \leq k \leq n-2$. Sea K el espacio que se obtiene de adjuntar un CW-complejo a V_0 a partir de la descomposición en manijas. Dado $2 \leq k \leq n-2$ es posible modificar los mapas de adjunción de las manijas de índice $k-1$ y k para que la matriz $[\partial_k]$ sea de la forma

$$[\partial_k] = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & d_r & & \\ & & & & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

para ciertos $d_i \in \mathbb{Z} : d_1 | d_2 | \dots | d_r$ y $r = \text{rg}(\partial_k)$.

Demostración. Para $k=2$, como no hay manijas de índice ≤ 2 , se tiene que $[\partial_2] = 0$, así que no hay nada que hacer.

Si $k \geq 3$, por el lema anterior, es posible realizar cualquier cambio de base mediante isotopías sin modificar la clase de cobordismo de $(W; V_0, V_1)$. El resultado se sigue de la forma normal de Smith para matrices con coeficientes en un dominio euclideo R [Alu09, 5.2.11]. \square

Un cobordismo (W, V, V') es un **h -cobordismo** si las inclusiones $\iota : V \rightarrow W$ y $\iota' : V' \rightarrow W$ son equivalencias homotópicas. Si (W, V, V') es un h -cobordismo, ι y ι' inducen isomorfismos en los grupos de homotopía y en los de homología. En particular,

1. $\pi_1(W, V) = 0 = \pi_1(W, V')$,
2. $H_*(W, V) = 0$,
3. $H_*(W, V') = 0$.

Por la versión relativa de dualidad de Poincare (ver por ejemplo [MSS65]), (2) y (3) son equivalentes.

Decimos que un cobordismo es simplemente conexo si W lo es. El teorema de h -cobordismo da una forma de determinar si dos variedades simplemente conexas V_0 y V_1 , de dimensión $n \geq 5$, son difeomorfas.

Teorema 2.5.7. Sea (W, V_0, V_1) un h -cobordismo simplemente conexo de dimensión $n \geq 6$. Entonces, (W, V, V') es el cobordismo trivial $(V \times I, V \times 0, V \times 1)$. En particular, V y V' son difeomorfas.

Supongamos que (W, V, V') es un cobordismo simplemente conexo, satisfaciendo $\pi_1(W, V) = 0 = \pi_1(W, V')$ y $H_*(W, V) = 0$. Por el teorema de Hurewicz en homología relativa [Hat02, Teorema 4.32], se tiene que $\pi_k(W, V) = 0$ para todo k , así que la inclusión $\iota : V \rightarrow W$ induce isomorfismos en los grupos de homotopía. Luego, el teorema de Whitehead [Hat02, Teorema 4.5] nos dice que $\iota : V \rightarrow W$ es una equivalencia homotópica. Análogamente, $\iota' : V' \rightarrow W$ resulta una equivalencia homotópica.

Se puede probar el teorema de h -cobordismo utilizando estas hipótesis, que en principio son más débiles, pero que resultan equivalentes. La demostración del teorema consiste en tomar una descomposición en manijas buena de W sobre V_0 e ir reduciendo pares de manijas utilizando los resultados 2.5.6 y 2.5.1. Los detalles pueden hallarse en [RS12]. No presentaremos la demostración por dos razones. En primer lugar, en la sección siguiente probaremos un teorema de existencia de funciones de Morse perfectas, cuya demostración emplea las mismas técnicas que la del teorema de h -cobordismo. En segundo lugar, en el próximo capítulo demostraremos un teorema más general, conocido como el teorema de s -cobordismo, que implica el resultado anterior.

2.6. Teorema de existencia de funciones de Morse perfectas

Dada una variedad diferenciable cerrada M , en el capítulo anterior vimos que, para que M admita funciones de Morse perfectas, es necesario que su homología sea libre de torsión. En esta sección demostraremos el resultado principal de esta tesis, el cual establece que, en el caso de que M sea simplemente conexa y tenga dimensión mayor o igual a 6, la condición de tener homología libre de torsión es suficiente para garantizar la existencia de funciones de Morse perfectas.

Teorema 2.6.1. *Sea M una variedad diferenciable cerrada de dimensión $n \geq 6$ simplemente conexa, con $H_*(W)$ libre de torsión, entonces M admite funciones de Morse perfectas.*

Este teorema está enunciado en [And04], aunque su demostración no se encuentra en la literatura. Para probar este resultado, trabajaremos con un cobordismo $(W; V_0, V_1)$, que surge de sacarle a M dos n -discos cerrados disjuntos. Partiremos de una descomposición en manijas buena minimal (que se corresponde con una función de Morse con mínima cantidad de puntos críticos) y probaremos que tiene tantas manijas de índice k como $rg(H_k(W, V_0))$. Veremos que $rg(H_k(M)) = rg(H_k(W, V_0))$ para $2 \leq k \leq n - 2$, lo que nos permitirá concluir que hay b_k manijas de índice k y, agregando los dos discos que removimos, recuperamos a M y obtenemos una descomposición en manijas con b_k manijas de índice k para todo k , o equivalentemente, una función de Morse perfecta en M .

Comencemos calculando la homología relativa $H_*(W, V_0)$ en términos de $H_*(M)$.

Lema 2.6.2. *Sea M una variedad cerrada de dimensión $n \geq 4$, $D \subseteq M$ un disco de dimensión n , $V_0 = \partial D$ y $X = M - \overset{\circ}{D}$, entonces $H_k(M) = H_k(X) = H_k(X, V_0)$ para $2 \leq k \leq n - 2$.*

Demostración. Aplicando Mayer Vietoris para $A = M - p, B = D$, con $p \in D$, se tiene la sucesión exacta larga

$$\rightarrow H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(M) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow .$$

Además, $A \cap B = D - p \simeq S^{n-1}$, así que si $2 \leq k \leq n - 2$ obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H_k(A) \oplus \underbrace{H_k(D)}_{=0} \rightarrow H_k(M) \rightarrow 0.$$

Luego, $H_k(A) \equiv H_k(M)$. Además, $X \subset A$ es un retracts por deformación, de lo que se sigue que $H_k(X) \equiv H_k(A) \equiv H_k(M)$.

Para ver que $H_k(X) \equiv H_k(X, V_0)$ basta con considerar la sucesión exacta larga

$$H_n(V_0) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, V_0) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(V_0) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X, V_0) \rightarrow 0.$$

Como $V_0 = S^{n-1}$ y $k < n - 1, k - 1 \geq 1$, mirando la parte de la sucesión anterior en grado k se tiene

$$\underbrace{H_k(V_0)}_{=0} \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, V_0) \xrightarrow{\partial} \underbrace{H_{k-1}(V_0)}_{=0}.$$

Concluimos el resultado deseado. \square

Lema 2.6.3. *Sea M variedad diferenciable cerrada de dimensión $n \geq 4$, $D_0, D_1 \subseteq M$ dos discos disjuntos, $V_i = \partial D_i^n$ y $W = M - (\overset{\circ}{D}_0^n \cup \overset{\circ}{D}_1^n)$, entonces $H_k(M) = H_k(W, V_0)$ para $2 \leq k \leq n - 2$.*

Demostración. Sea $X = M - \overset{\circ}{D}_0$, por el lema 2.6.2 sabemos que $H_k(M) = H_k(X, V_0)$ para $2 \leq k \leq n - 2$. Basta entonces ver que $H_k(W, V_0) = H_k(X, V_0)$ para $2 \leq k \leq n - 2$. Como $W = X - \overset{\circ}{D}_1$, consideramos la sucesión exacta larga en homología relativa inducida por $V_0 \subseteq W \subseteq X$:

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X, W) \xrightarrow{\partial} H_k(W, V_0) \rightarrow H_k(X, V_0) \rightarrow H_k(X, W) \rightarrow \dots$$

Sea $A = W$ y $B = \overset{\circ}{D}_1$, con $\overset{\circ}{D}_1 \subseteq X$ un n -disco conteniendo a D_1 , de modo que $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Por escisión, $H_j(X, W) = H_j(D^n, \partial D^n)$, y por lo tanto tenemos un 0 en los lugares $H_{k+1}(X, W)$ y $H_k(X, W)$ de la sucesión anterior, para $2 \leq k \leq n - 2$. Concluimos que $H_k(W, V_0) \cong H_k(X, V_0)$. \square

A continuación se demuestra el Teorema 2.6.1.

Demostración. Sean $D_0^n, D_1^n \subseteq M$ dos n -discos embebidos disjuntos, $V_i = \partial D_i^n$ y consideremos el cobordismo $(W; V_0, V_1)$, siendo $W = M - (\overset{\circ}{D}_0^n \cup \overset{\circ}{D}_1^n)$. Por van Kampen, $\pi_1(W) = \pi_1(M) = 0$ así que W es simplemente conexa. Sea f una función de Morse en W con mínima cantidad de puntos críticos. Al ser W conexo, podemos cancelar puntos críticos de índice 0 y n , así que f no posee puntos críticos de estos índices. Además, se tiene la sucesión exacta

$$\underbrace{\pi_1(W, x_0)}_0 \xrightarrow{j} \pi_1(W, V_i, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(V_i, x_0) \xrightarrow{\iota} \pi_0(W, x_0).$$

con ι isomorfismo, de modo que $\text{Im}(\partial) = \ker \iota = 0$. Luego $\pi_1(W, V_i) = \ker \partial = \text{Im}(j) = 0$, y aplica el lema de cancelación de puntos críticos de índices 1 y $n - 1$. En consecuencia, f induce una descomposición en manijas de W en V_0 dada por

$$W = C_0 \cup H_1^{(2)} \cup \dots \cup H_{\mu_2}^{(2)} \cup \dots \cup H_1^{(n-2)} \cup \dots \cup H_{\mu_{n-2}}^{(n-2)}.$$

Sea (K, V_0) el CW-relativo inducido por esta descomposición, de manera que $H_*(W, V_0) = H_*(K, V_0)$. Sabemos que $H_k(K, V_0) = 0$ para $k = 0, 1, n - 1, n$ y que $H_k(M) = H_k(W, V_0)$ para $2 \leq k \leq n - 2$ por el lema 2.6.3. Como $H_*(M)$ es libre de torsión, se tiene que $H_*(W; V_0)$ también es libre de torsión. Sea $b_j = \text{rg}(H_j(W, V_0))$. Al no haber manijas de índices 0, 1, $n - 1, n$, se tiene que $b_j = \mu_j = 0$ para $j = 0, 1, n - 1, n$. Supongamos que f no es perfecta, tomemos k el mínimo natural tal que $\mu_k > b_k$, en particular $2 \leq k \leq n - 2$. Más aún, $k < n - 2$ ya que si $k = n - 2$ tendríamos que $\mu_j = b_j$ para todo $0 \leq j \leq n - 3$ y para $j = n - 1, n$, pero como $\sum_{j=0}^n (-1)^j \mu_j = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j$, ha de ser $\mu_k = b_k$, lo cual es absurdo.

Afirmo que, si $2 \leq k \leq n - 3$, entonces $\partial_j = 0$ para todo $\leq k$. Tomando esto por hecho, como $H_k(W, V_0)$ es libre de torsión y de rango b_k , se tiene que $H_k(W, V_0) = \mathbb{Z}^{b_k}$.

Por definición, $H_k(W, V_0) = \frac{\ker \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}$ y como $\partial_k = 0$, se tiene que $\ker \partial_k = C_k(K, V_0)$, luego $b_k = \mu_k - \text{rg}(\partial_{k+1})$ y como $b_k < \mu_k$, ha de ser $r = \text{rg}(\partial_{k+1}) > 0$. Aplicando el corolario 2.5.6, podemos llevar la matriz de incidencia $[\partial_{k+1}]$ a una de la forma

$$[\partial_{k+1}] = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & d_r & & \\ & & & & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

para ciertos $d_i \in \mathbb{Z} : d_1 | d_2 | \dots | d_r$. En particular, $H_k(W, V_0) = \mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$. Pero $H_*(W, V_0)$ no tiene torsión así que ha de ser $d_1, \dots, d_r \in \{1, -1\}$, lo que nos dice que hay al menos un par de manijas complementarias $\{H^{(k)}, H^{(k+1)}\}$, cuyo número de intersección es 1 o -1 .

Como W, V_0 y V_1 son simplemente conexas, y $2 \leq k \leq n-3$, aplica 2.5.3 y podemos cancelar este par de manijas. Esto nos dice que podemos conseguir una función de Morse con menos puntos críticos que f , lo cual es absurdo.

Queda probar que $\partial_j = 0$ para $1 \leq j \leq k$. Lo hacemos por inducción. Que $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ es el morfismo 0 es claro ya que $C_1 = 0$. Supongamos que $\partial_j = 0$ para $1 \leq j \leq k-1$, para ver que $\partial_{j+1} : C_{j+1} \rightarrow C_j$ es 0, notar que $H_j(W, V_0) = \frac{\ker \partial_j}{\text{Im } \partial_{j+1}}$ y como $\partial_j = 0$, $\ker \partial_j = C_j = \mathbb{Z}^{\mu_j}$. Además, $\mu_j = b_j = \text{rg}(H_j(W, V_0))$ y si r es el rango de la matriz de incidencia $[\partial_{j+1}]$, a menos de un cambio de base se tiene que $[\partial_{j+1}]$ es como en 2.2 para ciertos d_i 's. Gracias a la ausencia de torsión, estos d_i 's son 1 o -1 , pero como $H_j(W, V_0)$ es libre de rango μ_j , ha de ser $r = 0$ y entonces $\partial_{j+1} = 0$ como queríamos. \square

Corolario 2.6.4. *Toda esfera exótica admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Si M es una esfera exótica, al ser M homeomorfa a S^n , se tiene que M es cerrada, simplemente conexa y su homología es libre de torsión. Más aún, como toda esfera exótica tiene dimensión mayor o igual que 7, estamos en las hipótesis del teorema 2.6.1, luego M admite funciones de Morse perfectas. \square

Capítulo 3

Funciones perfectas y s-cobordismo

El teorema de h -cobordismo se extiende al caso no simplemente conexo, agregando una hipótesis que involucra un invariante conocido como la torsión de Whitehead. El resultado que se obtiene es el teorema de s -cobordismo, probado por Barden [Bar64], Mazur [Maz63] y Stallings [Sta65]. En este capítulo, discutiremos cómo se extienden los resultados del capítulo anterior al caso no simplemente conexo y demostraremos el teorema de s -cobordismo. Finalmente, exploraremos qué condiciones debe tener una variedad cerrada conexa de dimensión ≥ 6 para que admita funciones de Morse perfectas.

3.1. El caso no simplemente conexo

3.1.1. Generalización del segundo teorema de cancelación

La demostración del teorema 2.6.1 se basa fuertemente en el segundo lema de cancelación (2.5.1), el cual requiere que la componente de borde -en la que se lleva a cabo la adjunción de manijas- sea simplemente conexa. Generalizaremos este lema al caso no simplemente conexo, mediante una generalización del Lema de Whitney y de la noción de número de incidencia.

Sea M una variedad diferenciable cerrada, $P, Q \subseteq M$ subvariedades simplemente conexas y complementarias. Por ser P, Q simplemente conexas, son orientables, así que las consideramos orientadas. Sean $*, *P, *Q$ puntos base de M, P y Q respectivamente y sean $\alpha_P : [0, 1] \rightarrow M, \alpha_Q : [0, 1] \rightarrow M$ curvas suaves que arrancan en $*$ y terminan en $*P$ y $*Q$ respectivamente. Sea o_* una orientación local de M alrededor de $*$. Dado $x \in P \cap Q$ consideremos un camino suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$ que arranca en $*P$ y termina en x , y un camino suave $\eta : [0, 1] \rightarrow Q$ que arranca en x y termina en $*Q$ (ver Figura 3.1).

Sí notamos por $\bar{\alpha}_Q$ al camino α_Q recorrido en el sentido inverso, entonces $\alpha_P \gamma \eta \bar{\alpha}_Q$ es un camino en M basado en $*$. Sea $g \in \pi_1(M, *)$ la clase de $\alpha_P \gamma \eta \bar{\alpha}_Q$. Como $T_x P \oplus T_x Q = T_x M$, las orientaciones de P y Q inducen una orientación local de M en x . Si esta orientación coincide con la orientación $(\alpha_P \gamma)_*(o_*)$, entonces definimos $\epsilon(x) = g$. Caso contrario, definimos $\epsilon(x) = -g$.

Definición 3.1.1. Sean P, Q, M como antes, se define la clase de intersección de P y Q en M como

$$\epsilon(P, Q) = \sum_{x \in P \cap Q} \epsilon(x) \in \mathbb{Z}[\pi_1(M)].$$

Observación 3.1.2. Esta noción de clase de intersección generaliza la noción de número de intersección y no depende de las curvas en P y Q elegidas:

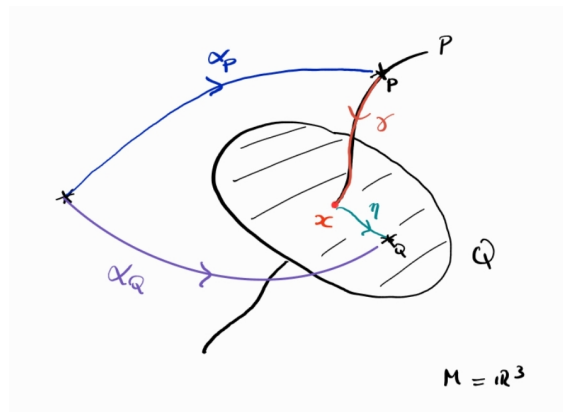


Figura 3.1: Clase de intersección en x .

1. Si M es simplemente conexa, entonces $g = 0$ y M es orientada, así que recuperamos la definición anterior de número de intersección.
2. $\epsilon(x)$ está bien definido: no depende de γ ni de η por ser P y Q simplemente conexas.

Existe una versión más general del Lema de Whitney que, bajo ciertas condiciones, permite eliminar de la intersección de dos subvariedades complementarias un par de puntos cuyas clases de intersección tienen signos opuestos.

Lema 3.1.3 (Whitney no simplemente conexo). Sean P, Q, M como arriba, y sean $p, q \in P \cap Q$ tales que $\epsilon(p) = -\epsilon(q) \in \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones

- $\dim P \geq 3, \dim Q \geq 3$, o
- $\dim P = 2, \dim Q \geq 3$ y $\pi_1(M) \cong \pi_1(M - Q)$,

entonces existe una isotopía ambiente de M que manda P a P' con $P' \pitchfork Q$ y $P' \cap Q = P \cap Q - \{p, q\}$. Además, esta isotopía se puede elegir con soporte compacto que no contenga a los otros puntos de $P \cap Q$.

En el resto del capítulo consideraremos espacios punteados. Dado un cobordismo conexo (W, V_0, V_1) , consideraremos $*$ en V_0 punto base de V_0 y de W . Además, cada manija $H^{(k)}$ tendrá su punto base $*_a$ en la a -esfera. Consideraremos la b -esfera punteada, con un punto base $*_b$, y un camino estándar conectando los puntos $*_a$ y $*_b$. Además, fijamos caminos específicos que van desde $*$ a los puntos base de cada manija.

Con una demostración similar a la del segundo teorema de cancelación 2.5.1, pero utilizando esta última versión del lema de Whitney, se generaliza dicho resultado.

Teorema 3.1.4 (2do teorema de cancelación generalizado). Sea $(W; V_0, V_1)$ una n -triada, $W' = W \cup H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$ y $V_2 = \partial(W \cup H^{(r)}) - V_0$. Supongamos que $\pi_1(V_1) \cong \pi_1(V_2) \cong \pi_1(W)$ y $2 \leq r \leq n - 4$. Si $\epsilon(H^{(r+1)}, H^{(r)}) = g$ o $-g$, con $g \in \pi_1(W)$ entonces podemos cancelar estas manijas y obtener un difeomorfismo entre W' y W , que sea la identidad fuera de un entorno de $H^{(r)} \cup H^{(r+1)}$.

El teorema anterior nos permite reducir la cantidad de manijas de una descomposición buena.

Corolario 3.1.5. Si $(W; V_0, V_1)$ es una n -triada con $n \geq 6$ y $\pi_1(V_0) \equiv \pi_1(W) \equiv \pi_1(V_1)$, y

$$W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$$

es una descomposición en manijas buena, con manijas de índices $2 \leq k \leq n-2$, entonces todo par de manijas $\{H^{(k)}, H^{(k+1)}\}$, con $2 \leq k \leq n-3$ puede ser cancelado si $\epsilon \left(H^{(k+1)}, H^{(k)} \right) = \epsilon \cdot g$, con $\epsilon \in \{-1, 1\}$ y $g \in \pi_1(W)$.

Demostración. Para $2 \leq k \leq n-4$ es el teorema anterior, notando que si $\pi_1(V_0) \equiv \pi_1(W)$ entonces $\partial_1 W_j = \partial W_j - V_0$ satisface que $\pi_1(\partial_1 W_j) \equiv \pi_1(W)$ para todo $j = 1, \dots, n-3$, como en la demostración del corolario 3.1.5.

Para el caso $k = n-3$ usamos que $\pi_1(V_1) \simeq \pi_1(W)$ y la descomposición en manijas dual. \square

3.1.2. Revestimiento universal del complejo asociado a una descomposición

En el caso simplemente conexo, se calcula la homología de W relativa a V_0 a partir de los números de incidencia. En el caso no simplemente conexo, se utiliza el revestimiento universal $\rho : \tilde{W} \rightarrow W$, que es homotópicamente equivalente rel $\tilde{V}_0 = \rho^{-1}(V_0)$ a un CW-relativo (\tilde{K}, \tilde{V}_0) , el cual se obtiene a partir de (K, V_0) . Describiremos a continuación cómo obtener dicho CW-relativo.

Sea (W, V_0, V_1) una n -triada y $\rho : \tilde{W} \rightarrow W$ el revestimiento universal, con punto base $\tilde{*} \in \rho^{-1}(*) \subseteq \tilde{V}_0$. Dada una descomposición en manijas buena

$$W = C_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m,$$

consideremos (K, V_0) , el CW-relativo a V_0 , y sea $\lambda : W \rightarrow K$ una equivalencia homotópica relativa a V_0 . Si notamos por $\tilde{V}_0 = \rho^{-1}(V_0)$ y $q : \tilde{K} \rightarrow K$ al revestimiento universal de K , se tiene un levantado $\tilde{\lambda}$ de la función $\lambda \circ \rho$ que fija $\tilde{*}$ y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \tilde{K} \\ \rho \downarrow & & q \downarrow \\ W & \xrightarrow{\lambda} & K. \end{array}$$

Más aún, como q y λ fijan V_0 , se tiene que $\tilde{\lambda}$ restringida a \tilde{V}_0 es la identidad. De este modo, $\tilde{\lambda}$ resulta una equivalencia homotópica rel \tilde{V}_0 entre \tilde{W} y \tilde{K} . Levantando la estructura de K como CW-complejo relativo a V_0 , podemos darle a \tilde{K} una estructura de CW-complejo relativo a \tilde{V}_0 . Concretamente, para cada j sea e^j una j -celda de K y $\varphi : S^{j-1} \rightarrow K^{(j-1)}$ su mapa de adjunción.

$$\begin{array}{ccc} S^{j-1} & \xrightarrow{\varphi} & K^{(j-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^j & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K \end{array}$$

Si $x_j = \bar{\varphi}(0)$, por cada $y_j \in q^{-1}(x_j) \in \tilde{K}$ existe un único levantado $\tilde{\varphi} : D^j \rightarrow \tilde{K}$ con $\tilde{\varphi}(0) = y_j$. Le damos a \tilde{K} la estructura de CW-complejo relativo a \tilde{V}_0 , cuyas j -celdas son las componentes conexas de $q^{-1}(e^j)$ con e^j celda en K , y los mapas de adjunción son los levantados de los mapas de adjunción de e^j .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{K} \\
 & \nearrow \tilde{\varphi}_{y_j} & \downarrow q \\
 D^j & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K
 \end{array}$$

Notemos por π al grupo fundamental de K , $\pi = \pi_1(K)$ es isomorfo al grupo de transformaciones de Deck del revestimiento $q : \tilde{K} \rightarrow K$, el cual actúa en \tilde{K} por evaluación. De hecho, actúa en cada fibra del revestimiento q induciendo, para cada $j \in \mathbb{N}$, una acción de π sobre el conjunto de $\{j\text{-celdas de } \tilde{K}\}$ por permutaciones. En efecto, si \tilde{e}^j es una j -celda de \tilde{K} con mapa de adjunción $\tilde{\varphi}_{y_j}$, $y_j \in q^{-1}(x_j)$ y $\bar{\varphi} = q\tilde{\varphi}_{y_j}$, entonces dado $g \in \pi$, $g \cdot \tilde{e}^j$ es la j -celda en \tilde{K} cuyo mapa de adjunción es el levantado de $\bar{\varphi}$ que manda 0 a $g \cdot y_j \in q^{-1}(x_j)$. Esta acción es libre de puntos fijos y permite ver al complejo de cadenas $C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ como un complejo de $\mathbb{Z}\pi$ -módulos, ya que

$$C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0) = \mathbb{Z}[j\text{-celdas de } \tilde{K}] = \mathbb{Z}\left[\coprod_{e^j \subseteq K} \pi \cdot e^j\right] = \bigoplus_{e^j \subseteq K} \mathbb{Z}\pi.$$

Así, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ resulta un $\mathbb{Z}\pi$ -módulo libre. Fijemos una base de $C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$, que notaremos por B_j , eligiendo por cada j -celda en K una j -celda $\tilde{e}^j \subseteq q^{-1}(e^j)$. Esta base está bien definida a menos de multiplicación por elementos de π . El morfismo de borde del complejo $(C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0), d)$ puede calcularse a partir de la clase de intersección de las manijas de la descomposición, siendo

$$d_j(\tilde{e}^j) = \sum_{\tilde{e}^{j-1} \in B_{j-1}} \epsilon(H^{(j)}, H^{(j-1)}) \cdot \tilde{e}^{j-1}.$$

Aquí, $H^{(j)}$ y $H^{(j-1)}$ son las manijas de $e^j = q(\tilde{e}^j)$ y $e^{j-1} = q(\tilde{e}^{j-1})$. La primer manija es siempre la misma, mientras que la segunda va cambiando a medida que se recorren los elementos de la base B_{j-1} .

Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, notemos por $C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0)_\pi$ al \mathbb{Z} -módulo que se obtiene de cocientar por la acción de π . Es decir,

$$C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0)_\pi = \frac{C_j(\tilde{K}, \tilde{V}_0)}{\langle g\tilde{x} - g : g \in \pi \rangle}.$$

Se puede recuperar el complejo de cadenas $C_*(K, V_0)$ cocientando por la acción de π , tal y como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 3.1.6. *La proyección al cociente $q : (\tilde{K}, \tilde{V}_0) \rightarrow (K, V_0)$ induce un isomorfismo de complejos de cadenas*

$$q_* : (C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0))_\pi \rightarrow C_*(K, V_0).$$

En particular, las homologías de estos complejos son isomorfas.

Demostración. El morfismo $q_* : C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0) \rightarrow C_*(K, V_0)$,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_n(\tilde{K}, \tilde{V}_0) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(\tilde{K}, \tilde{V}_0) & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & C_0(\tilde{K}, \tilde{V}_0) & \xrightarrow{d_0} & 0 \\
 & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & & & \downarrow q_* & & \\
 0 & \longrightarrow & C_n(K, V_0) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K, V_0) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K, V_0) & \xrightarrow{\partial_0} & 0
 \end{array}$$

pasa al cociente y manda base en base, por lo que resulta un isomorfismo. \square

Si $r \geq 2$, ρ induce un isomorfismo entre $\pi_r(\tilde{W}, \tilde{V}_0)$ y $\pi_r(W, V_0)$. Además, por Hu-rewics, $\pi_r(\tilde{W}, \tilde{V}_0) = H_r(\tilde{W}_r, \tilde{W}_{r-1})$ y este último grupo de homología coincide con $C_r(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$. De este modo, se tiene la identificación

$$\pi_r(W, V_0) \simeq C_r(\tilde{K}, \tilde{V}_0).$$

Bajo esta identificación, toda manija de índice $r \geq 2$, con mapa de adjunción f , determina un elemento $[f] \in C_r(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$. Damos a continuación una generalización del lema de modificación 2.5.4.

Lema 3.1.7 (Lema de modificación general). *Sea $(W; V_0, V_1)$ un cobordismo conexo. Sea W' una variedad diferenciable que se obtiene a partir de W adjuntando dos manijas de índice r , es decir, $W' = W \cup_{f_1} H_1 \cup_{f_2} H_2$ con H_1, H_2 manijas de índice r y $\text{Im}(f_1) \cap \text{Im}(f_2) = \emptyset$. Supongamos además que $2 \leq r \leq n - 2$, entonces existe $f_3 : \partial D^r \times D^{n-r} \rightarrow V_1$ isotópica a f_2 tal que*

$$[f_3] = [f_2] + \varepsilon g \cdot [f_1]$$

en $C_r(\tilde{W}, \tilde{V}_0)$.

La demostración puede leerse de [LMC24, 2.36].

3.1.3. Descomposición en manijas de un h-cobordismo

Sea (W, V_0, V_1) un h -cobordismo conexo (con W no necesariamente simplemente conexo) y

$$W = C_0 \cup H_1^{(r)} \cup \dots \cup H_{\mu_r}^{(r)} \cup \dots \cup H_1^{(n-2)} \cup \dots \cup H_{\mu_{n-2}}^{(n-2)}$$

una descomposición en manijas buena, siendo $2 \leq r \leq n - 4$ el menor índice de las manijas que aparecen en la descomposición. Consideremos el revestimiento universal $\rho : \tilde{W} \rightarrow W$ y el CW-complejo $C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ descrito anteriormente. La equivalencia homotópica $\iota : V \rightarrow W$ se levanta a una equivalencia homotópica $\tilde{\iota} : \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{W}$ y, por lo tanto, $H_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0) = 0$. En particular, $H_r(\tilde{K}, \tilde{V}_0) = 0$ así que $\ker d_r = \text{Im} d_{r+1}$. Además, al no haber manijas de índice $r - 1$, $d_r : \tilde{C}_r \rightarrow \tilde{C}_{r-1}$ es el morfismo nulo y, entonces, $d_{r+1} : \tilde{C}_{r+1} \rightarrow \tilde{C}_r$ es un epimorfismo. Sea $\phi_1^{(r)} : D^r \times D^{n-1} \rightarrow W$ el mapa característico de $H_1^{(r)}$, $e_1^{(r)} \in C_r(K, V_0)$ y $\tilde{e}_1^{(r)} \in \tilde{C}_r$ su levantado. Existen $x_1, \dots, x_{\mu_r} \in \mathbb{Z}\pi$ tales que $\sum_{j=1}^{\mu_r} x_j \cdot d_{r+1}(e_j^{(r+1)}) = \tilde{e}_1^{(r)}$. Es posible introducir un par de manijas complementarias $\{H^{(r+1)}, H^{(r+2)}\}$ de manera que $\varepsilon(H^{(r+1)}, H_1^{(r)}) = 1$ y $H^{(r+1)}$ no interseque a $H_i^{(r)}$ para $i > 1$. Hecho esto, se puede cancelar $H^{(r+1)}$ con $H^{(r)}$, obteniendo como resultado una descomposición en manijas con una manija de índice r menos, pero con una de índice $r + 2$ más. A continuación, describimos el procedimiento.

Dado el cobordismo $(W_r, V_0, \partial_1 W_r)$, se adjunta una n -bola mediante la adjunción de un par de manijas complementarias $\{H^{(r+1)}, H^{(r+2)}\}$ como en el lema 2.3.7. Aplicando el lema 3.1.7, se puede modificar el mapa de adjunción ψ y obtener un mapa $\eta : \partial D^{r+1} \times D^{n-r-1} \rightarrow \partial_1 W_r$ isotópico a ψ tal que

$$[\eta] = [\psi] + \sum_{j=1}^{\mu_r} x_j e_j^{(r+1)} \in \tilde{C}_{r+1}$$

y, como ψ es nulhomotópica, se tiene que $[\psi] = 0$. Notemos por \tilde{e}^{r+1} al levantado de e^{r+1} correspondiente a η . Se tiene entonces que

$$d_{r+1}(\tilde{e}^{(r+1)}) = \sum_{j=i1}^{\mu_r} x_j \cdot d_{r+1}(e_j^{(r+1)}) = \tilde{e}_1^{(r)}.$$

En particular, $\epsilon(H^{(r+1)}, H_1^{(r)}) = 1$ y $H^{(r+1)}$ no interseca a las demás manijas de índice r . Luego, cancelamos el par de manijas $\{H^{(r)}, H^{(r+1)}\}$.

Aplicando este procedimiento con todas las manijas de índice r , es posible intercambiar todas las manijas de índice r por la misma cantidad de manijas de índice $r + 2$. Haciendo inducción en r , se obtiene una descomposición en manijas de W sobre V_0 cuyas manijas son solamente de índices $n - 3$ y $n - 2$.

Se ha probado la siguiente proposición:

Proposición 3.1.8. *Sea (W, V_0, V_1) un h -cobordismo conexo, entonces W admite una descomposición en manijas buena sobre V_0*

$$W = C_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\mu_{n-3}} H_i^{(n-3)} \cup \bigcup_{i=1}^{\mu_{n-2}} H_i^{(n-2)},$$

con manijas de índices $n - 3$ y $n - 2$.

Teniendo en cuenta que $H_*(\tilde{W}, \tilde{V}) = 0$, se sigue que $d_{n-2} : C_{n-2} \rightarrow C_{n-3}$ es un isomorfismo. Para poder cancelar todas las manijas de índices $n - 3$ y $n - 2$ y así concluir que el cobordismo (W, V_0, V_1) es trivial, deberíamos poder modificar los mapas de adjunción de las manijas de índices $n - 2$, con el lema 3.1.7, para que la matriz $[d_{n-2}]$ en la nueva base de C_{n-2} sea la matriz identidad.

Observación 3.1.9. $C_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ es un $\mathbb{Z}\pi$ -módulo libre a izquierda, de modo que para cada r consideraremos la matriz de $d_r : \tilde{C}_r \rightarrow C_{r-1}$ como una matriz $[d_r] \in M_{\mu_r, \mu_{r-1}}(\mathbb{Z}\pi)$ y las coordenadas de $d_r(e_i^{(r)})$ vienen dadas por $e_i^T \cdot [d_r]$, donde e_i^T denota el vector transpuesto canónico en $(\mathbb{Z}\pi)^r$. Se tiene la siguiente correspondencia entre operaciones sobre la descomposición en manijas de W y operaciones de fila de matrices:

1. Cambiar el representante de $\tilde{e}_i^r \subseteq \tilde{K}$ de e^r por uno en la misma órbita equivale a multiplicar por un elemento de π la i -ésima fila de $[d_r]$, mientras que cambiar su orientación corresponde con multiplicar dicha fila por -1 .
2. Introducir un par de manijas complementarias de índices $r - 1, r$, se corresponde con cambiar la matriz $[d_r]$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} [d_r] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{(\mu_r+1, \mu_{r-1}+1)}(\mathbb{Z}\pi).$$

3. Modificar el mapa de adjunción ϕ_i de una manija $H_i^{(r)}$ por uno isotópico ψ_i tal que $[\psi] = [\phi_i] + g \cdot [\phi_j]$, según el lema 3.1.7, se corresponde con sumarle a la i -ésima fila de $[d_r]$ g -veces la j -ésima fila, o equivalentemente, multiplicar a izquierda de $[d_r]$ por la matriz $(I + g \cdot E_{i,j})$, donde $E_{i,j}$ denota la matriz elemental que tiene todas sus coordenadas nulas salvo la (i, j) , en la cual tiene un 1.

Esta correspondencia nos permite estudiar de forma algebraica el problema de reducir la descomposición en manijas de W . En la siguiente sección, definiremos el grupo de Whitehead del grupo π , que notaremos $Wh(\pi)$, y el elemento de torsión $\tau(W, V_0) \in Wh(\pi)$, que es el invariante que nos permitirá decidir si (W, V, V') es o no un cobordismo trivial.

3.2. El grupo de Whitehead y el Teorema de s-cobordismo

En esta sección, examinaremos las propiedades fundamentales del grupo de Whitehead y la torsión de Whitehead, conceptos introducidos por J.H.C. Whitehead en la década de 1940 como parte de su estudio sobre la teoría de homotopía. Inicialmente, el grupo de Whitehead de un CW-complejo L se definió como un conjunto de clases de equivalencia de pares de CW-complejos (K, L) , donde $L \subseteq K$ es un subcomplejo y un retracto por deformación fuerte (celular). Equipado con una operación, este conjunto forma un grupo abeliano. La equivalencia considerada es la de homotopía simple, descrita en términos de colapsos y expansiones de CW-complejos. Una exposición detallada de este enfoque geométrico se encuentra en [Coh73, Capítulo 2]. Sin embargo, el grupo de Whitehead también puede definirse desde un punto de vista algebraico, considerando una relación de equivalencia específica en un espacio de matrices. Adoptaremos este último enfoque, basándonos en los trabajos de Milnor [Mil66] y de Cohen [Coh73], para luego finalizar la sección con la demostración del teorema de s-cobordismo.

Sea R un anillo asociativo con unidad y $GL(n, R)$ el grupo de matrices inversibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en R . Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene la inclusión

$$A \in GL(n, R) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, R).$$

Se define el grupo $GL(R)$ como la unión de estos grupos de matrices.

$$GL(R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} GL(n, R).$$

Una matriz en $GL(R)$ se dice elemental si coincide con la matriz identidad, salvo por una entrada fuera de la diagonal. Al subgrupo de matrices generado por las matrices elementales lo notamos $E(R)$. La demostración del siguiente resultado de Whitehead puede hallarse en [Mil66] y [Coh73].

Proposición 3.2.1. *El subgrupo $E(R)$ coincide con el conmutador de $GL(R)$.*

Así, $E(R)$ es un subgrupo normal en $GL(R)$ y su cociente es un grupo abeliano.

Definición 3.2.2. El grupo de Whitehead de un anillo R es el grupo abeliano

$$K_1(R) = \frac{GL(R)}{E(R)}.$$

Más aún, cualquier subgrupo que contenga a $E(R)$ será un subgrupo normal de $GL(R)$ y su cociente será abeliano. Notemos por $U(R)$ al grupo de unidades del anillo R , el cual es un subgrupo de $GL(R)$ vía la identificación $U(R) = GL(1, R) \subseteq GL(R)$. Dado $G \subseteq U(R)$ un subgrupo, se define $E_G(R)$ como el subgrupo generado por $E(R)$ y las matrices diagonales con todos 1 en la diagonal, salvo por una entrada en la que hay un elemento de G . Así definido, $E_G(R)$ es un subgrupo normal de $GL(R)$, y el cociente $K_G(R) = \frac{GL(R)}{E_G(R)}$ es un grupo abeliano. El caso más sencillo de esta construcción se obtiene de considerar $G = \{1, -1\}$.

Se define el grupo reducido de Whitehead de R como

$$\bar{K}_1(R) = K_G(R)$$

con $G = \{1, -1\}$. La ventaja de trabajar con el grupo reducido de Whitehead es que dos matrices inversibles cualesquiera que difieran por una permutación de sus filas serán equivalentes en $\overline{K}_1(R)$.

De ahora en más supondremos que el anillo R tiene noción de rango (es decir: si $R^m \simeq R^n$, entonces $n = m$). Notar que $R = \mathbb{Z}\pi$ tiene noción de rango.

Sea N un R -módulo libre finitamente generado, y $e = (e_1, \dots, e_n)$, $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dos bases de N . Consideremos la matriz $(a_{ij}) \in GL(n, R)$ de cambio de base de e a e' y notemos por $[e, e']$ a su clase en $\overline{K}_1(R)$. Decimos que e y e' son equivalentes si $[e, e'] = 0$.

Notar que si $\overline{K}_1(R) = 0$ entonces dos bases cualesquiera de N son equivalentes. En el contexto de s -cobordismo, esto nos está diciendo que podemos modificar los mapas de adjunción de las manijas de índice $2 \leq r \leq n - 2$ para obtener cualquier base de \tilde{C}_r que se quiera.

En lo que sigue, consideraremos un complejo de cadenas (C, d) de R -módulos libres finitamente generados

$$C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \rightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

tal que $Im(d_i)$ es un submódulo libre de C_i y $H_i = \frac{\ker d_i}{Im d_{i+1}}$ es libre para cada $i = 0, \dots, n$. Notamos por $B_i = Im d_{i+1}$ y $Z_i = \ker d_i$, y vemos que al ser $H_i = \frac{Z_i}{B_i}$ y B_i libres, Z_i también lo es. Sean c_i y h_i bases de C_i y H_i respectivamente. Si $h_i = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)$ y $b_i = (y_1, \dots, y_r)$ es una base de B_i , entonces tenemos una base $b_i h_i$ de Z_i definida por $(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)$. Como $C_i/Z_i \simeq B_{i-1}$, dada una base $b_{i-1} = (y'_1, \dots, y'_t)$ de B_i obtenemos una base $b_i h_i b_{i-1}$ de C_i , dada por

$$b_i h_i b_{i-1} = (y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s, y'_1, \dots, y'_t).$$

Se define la **torsión del complejo C** como

$$\tau(C) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [b_i h_i b_{i-1}, c_i] \in \overline{K}_1(R).$$

Es posible ver que $\tau(C)$ no depende de las bases b_i elegidas, pero sí de las bases c_i y h_i .

Teniendo en cuenta las correspondencias establecidas en la observación 3.1.9, nos interesa el grupo reducido de Whitehead del anillo $R = \mathbb{Z}\pi$, pero con más identificaciones, que surgen de la posibilidad de cambiar representantes del levantado de cada k -celda e_k . Sea $T = \pi \cup (-\pi) \subseteq U(\mathbb{Z}\pi)$ el grupo de unidades triviales de $\mathbb{Z}\pi$.

Definición 3.2.3. Dado π un grupo, se define el grupo de Whitehead de π como

$$Wh(\pi) = K_T(\mathbb{Z}\pi).$$

Proposición 3.2.4. El grupo de Whitehead de un grupo satisface las siguientes propiedades:

1. $Wh(\mathbb{Z}) = 0$,
2. $Wh(G * H) = Wh(G) \oplus Wh(H)$,
3. Si G es un grupo abeliano libre, entonces $Wh(G) = 0$.

Las propiedades 1 y 2 están demostradas en [Coh73], mientras que el tercer resultado fue demostrado por Bass, Heller y Swan en [BHS64].

Volviendo al contexto del teorema de s-cobordismo, dado (W, V, V') un h-cobordismo conexo, contamos con el complejo de cadenas de $\mathbb{Z}\pi$ -módulos $\tilde{C} = C(\tilde{K}, \tilde{V})$, en donde cada \tilde{C}_r tiene una base prefijada $\{\tilde{e}_1^{(r)}, \dots, \tilde{e}_{\mu_r}^{(r)}\}$. Además, la equivalencia homotópica $\iota : V \rightarrow W$ induce una equivalencia homotópica $\tilde{\iota} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$ en el revestimiento, por lo que $H_*(\tilde{W}, \tilde{V}) = 0$ (en particular es libre con base nula).

Definición 3.2.5 (Torsión de Whitehead). Se define la torsión de Whitehead $\tau(W, V)$ como la torsión del complejo \tilde{C} , pero vista en $Wh(\pi)$. Es decir,

$$\tau(W, V) = \bar{\tau}(\tilde{C}) \in Wh(\pi).$$

Así definida, $\tau(W, V)$ depende de la descomposición en manijas buena de W sobre V (o de una función de Morse f para la triada (W, V, V')). Sin embargo, se prueba que resulta independiente de esta elección. Una demostración de este hecho se encuentra en [Mil66]. Más aún, $\tau(W, V)$ sólo depende del par topológico (W, V) y esta demostración se le atribuye a T.A. Chaptman [Cha74].

Para definir $\tau(W, V)$ no hace falta que $\iota : V \rightarrow W$ sea un retracto. Más en general, si ι induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, $H_*(\tilde{K}, \tilde{V})$ es libre sobre $\mathbb{Z}\pi$ y fijamos una base para cada H_i , se define $\tau(W, V) = \bar{\tau}(\tilde{C}) \in Wh(\pi)$. Esta definición dependerá de las bases de H_i elegidas. Este caso será de nuestro interés a la hora de extender el resultado de existencia de funciones de Morse perfectas, obtenido en el capítulo anterior. Enunciamos a continuación el teorema de s-cobordismo.

Teorema 3.2.6 (Teorema de s-cobordismo). Sea (W, V, V') un h-cobordismo conexo y $\pi = \pi_1(M)$. Entonces (W, V, V') es el cobordismo trivial si y solo si $\tau(W, V) = 0$.

Demostración. Si (W, V, V') es un cobordismo trivial, entonces $W \equiv V \times [0, 1]$, y el CW-relativo (K, V) no es más que el par (V, V) , ya que no W admite una descomposición sin manijas. Luego, $C_*(\tilde{K}, \tilde{V})$ es el complejo nulo, y entonces $\tau(W, V) = 0$. Para ver la implicación recíproca notar que, por la proposición 3.1.8, tenemos una descomposición en manijas buena de W sobre V de la forma

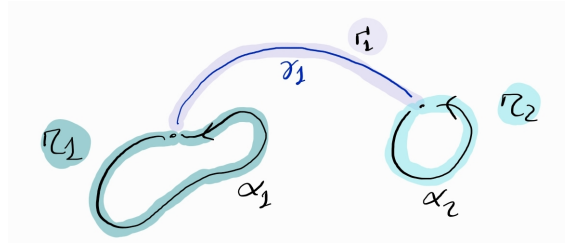
$$W = C_0 \cup H_1^{(n-3)} \cup \dots \cup H_s^{(n-3)} \cup H_1^{(n-2)} \cup \dots \cup H_t^{(n-2)},$$

y $d_{n-2} : C_{n-2} \rightarrow C_{n-3}$ es un isomorfismo. Como la clase de la matriz $[d_{n-2}]$ en $Wh(\pi)$ coincide con $\tau(W, V)$ (o en su defecto con $-\tau(W, V)$), se tiene que si $\tau(W, V) = 0$, entonces $[d_{n-2}]$ es equivalente a la matriz identidad. Luego, podemos modificar los mapas de adjunción de las $(n-2)$ -manijas para que todas ellas se cancelen con las $(n-3)$ -manijas y así obtener que (W, V, V') es el cobordismo trivial. \square

3.3. Existencia de funciones de Morse perfectas en variedades no simplemente conexas

En esta sección veremos cómo generalizar el teorema de existencia de funciones de Morse perfectas del capítulo anterior utilizando el grupo de Whitehead.

Sea M una variedad diferenciable cerrada, conexa, de dimensión $n \geq 6$ y $H_*(M)$ libre de torsión. ¿Existen funciones de Morse perfectas sobre M ?


 Figura 3.2: Ilustración de entornos tubulares de las curvas α y γ .

Comencemos estudiando el caso en que $\pi = \pi_1(M)$ es un grupo libre, ya que en este caso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ es el producto libre de m copias de \mathbb{Z} y, por ítems 2 y 3 de la proposición 3.2.4, se tiene que $Wh(\pi) = 0$. Trataremos de probar que, en este caso, M admite funciones de Morse perfectas de forma similar al caso simplemente conexo. Notar que, para aplicar las técnicas de s-cobordismo, debemos trabajar con un cobordismo conexo $(W; V_0, V_1)$ tal que $\pi_1(V_0) = \pi_1(W) = \pi_1(V_1)$. Ya no removeremos discos de M para armarnos W , sino que removeremos entornos tubulares de generadores del $\pi_1(M)$. Por ser M compacta con grupo fundamental libre, tomemos una base de $\pi_1(M)$ dada por las clases de los caminos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Podemos suponer que estos caminos están basados en distintos puntos y que no se intersecan. Para cada $j = 1, \dots, m$ sea $\tau_j : S^1 \times D^{n-1} \rightarrow M$ un entorno tubular de α_j en M . Para cada $i = 1, \dots, m-1$ tomo γ_i curva en M que va del punto base de α_i al punto base de α_{i+1} de forma tal que no interseque a las curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (salvo en los puntos base de α_i, α_{i+1}) y tampoco interseque a las curvas γ_j con $j < i$, y sea $\Gamma_i : D^1 \times D^{n-1} \rightarrow M$ un entorno tubular de γ_i . Haciendo la suma conexas de estos entornos tubulares obtenemos un entorno tubular $T_0 \subseteq M$ de la curva $\alpha_1 \gamma_1 \alpha_2 \dots \gamma_{m-1} \alpha_m$. Así, T_0 es difeomorfo a la suma conexas de m copias de $S^1 \times D^{n-1}$ (ver Figura 3.2).

Su borde $V_0 = \partial T_0$ es homeomorfo a la suma conexas de m copias de $S^1 \times S^{n-2}$, y entonces $\pi_1(V_0) \cong \pi_1(M)$. Sea $X = M - \overset{\circ}{T}_0$, veremos en el siguiente lema que su grupo fundamental es isomorfo al de M .

Lema 3.3.1. *Sea M variedad diferenciable conexa, de dimensión $n \geq 4$, con $\pi_1(M)$ libre y $T_0 \subseteq \text{Int}(M)$ el entorno tubular descrito anteriormente. Si $X = M - \overset{\circ}{T}_0$, entonces $\pi_1(M) = \pi_1(X)$.*

Demostración. Aplicamos van Kampen con los abiertos $U = \text{Int}(X)$ y $V = \overset{\circ}{T}_0$ un entorno idéntico a T_0 , pero más grande y abierto tal que $T_0 \subseteq \overset{\circ}{T}_0$ es retracto por deformación. Así, $M = U \cup V$, $U \cap V \cong \partial T_0$ y

$$\pi_1(M) = \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\pi_1(\partial T_0)} = \pi_1(U) = \pi_1(X),$$

en donde la última igualdad se obtiene de que $\text{Int}(X) \subseteq X$ es un retracto por deformación. \square

En consecuencia, el grupo fundamental de X es libre de rango m . Podemos entonces repetir el proceso anterior, tomando generadores de $\pi_1(X)$ y entornos tubulares en X , y así obtener un entorno tubular $T_1 \subseteq \text{Int}(X)$, con la diferencia de que a T_1 lo obtendremos a partir de entornos tubulares $\bar{\tau} : D^{n-1} \times S^1 \rightarrow \text{Int}(X)$. Notemos por $V_1 = \partial T_1$. Al igual que V_0 , V_1 satisface $\pi_1(V_1) \cong \pi_1(M)$. Sea $W = X - \overset{\circ}{T}_1 = M - (\overset{\circ}{T}_0 \cup \overset{\circ}{T}_1)$, de modo que (W, V_0, V_1) es un cobordismo conexo. Por la misma demostración que la del lema 3.3.1, se tiene que $\pi_1(W) \cong \pi_1(X)$ y, entonces $\pi_1(W) \cong \pi_1(M)$. En particular, $\pi_1(W, V_i) = 0$ para $i = 0, 1$.

Sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse para la triada $(W; V_0, V_1)$ con mínima cantidad de puntos críticos. Como $H_0(W, V_i) = 0$ por ser W conexo, y $\pi_1(W, V_i) = 0$, aplican los lemas de cancelación de manijas de índices $0, 1, n-1$ y n , así que f no posee puntos críticos de estos índices. Luego, f induce una descomposición en manijas buena de la forma

$$W = C_0 \cup H_1^{(2)} \cup \dots \cup H_{\mu_2}^{(2)} \cup \dots \cup H_1^{(n-2)} \cup \dots \cup H_{\mu_{n-2}}^{(n-2)}. \quad (3.1)$$

Notemos por $\pi = \pi_1(M)$. Sea (K, V_0) el CW-relativo inducido por la descomposición (3.1) y $q : \tilde{K} \rightarrow K$ el revestimiento universal, con (\tilde{K}, \tilde{V}_0) el CW-relativo descrito anteriormente. Se tiene entonces

1. $H_*(W, V_0) \equiv H_*(K, V_0) \equiv H_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)_\pi$,
2. $H_k(K, V_0) = 0$ para $k = 0, 1, n-1, n$ al no haber manijas de estos índices en la descomposición (3.1), y
3. $H_k(M) = H_k(W, V_0)$ para $2 \leq k \leq n-2$. En particular, $H_k(W, V_0)$ es libre de torsión.

Los ítems 1. y 2. ya han sido probados, resta probar el tercer resultado.

Proposición 3.3.2. *Sea M variedad diferenciable conexa de dimensión ≥ 6 , T_0, X y $T_1 \subseteq \text{Int}(X)$ como antes. Si $W = M - (\mathring{T}_0 \cup \mathring{T}_1)$ entonces $H_k(W, V_0) = H_k(M)$ para $2 \leq k \leq n-2$.*

Demostración. Bastará probar que si $X = M - \mathring{T}_0$ y $V_0 = \partial T_0$, entonces

$$H_k(M) = H_k(X, V_0) \quad \text{para } 2 \leq k \leq n-2. \quad (3.2)$$

Una vez hecho esto, podremos aplicar el mismo argumento a $M' = M - \mathring{T}_1$ y T_0 , y deducir que

$$H_k(W, V_0) = H_k(M') \quad \text{para } 2 \leq k \leq n-2. \quad (3.3)$$

Al demostrar (3.2), veremos también que $H_k(X) = H_k(M)$ para $2 \leq k \leq n-2$, de modo que podremos deducir que $H_k(M') = H_k(M)$ para $2 \leq k \leq n-2$ y, junto con (3.3), concluir el resultado de la proposición.

Demostremos la igualdad (3.2). Sea $U = \text{Int}(X)$ y $V = \tilde{T}_0$ un entorno idéntico a T_0 , pero más grande y abierto tal que $T_0 \subseteq \tilde{T}_0$ es retracts por deformación. Luego, $U \cup V = M$ y $U \cap V \simeq \partial T_0 = V_0 \simeq \#_{i=1}^m S^1 \times S^{n-2}$. Se tiene la sucesión de Mayer-Vietoris para el par $\{U, V\}$ dada por

$$\rightarrow H_k(U \cap V) \rightarrow H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(M) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(U \cap V) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(M) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Como $2 \leq k$, sabemos que $H_k(V) = 0$.

Si $3 \leq k \leq n-3$, como $U \cap V \simeq V_0 \simeq \#_{i=1}^m S^1 \times S^{n-2}$ se tiene que $H_k(U \cap V) = 0$ y $H_{k-1}(U \cap V) = 0$. Además sabemos que $H_k(V) = 0$. Reemplazando en 3.4 se tiene

$$0 \rightarrow H_k(U) \rightarrow H_k(M) \rightarrow 0$$

y por lo tanto $H_k(U)$ y $H_k(M)$ son isomorfas. Como $U = \text{Int}(X) \subseteq X$ es un retracts por deformación, concluimos que $H_k(X) \equiv H_k(M)$ para $3 \leq k \leq n-3$. Además, considerando la sucesión exacta en homología relativa para $V_0 \subseteq X$ dada por

$$\rightarrow \underbrace{H_k(V_0)}_0 \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, V_0) \xrightarrow{\partial} \underbrace{H_{k-1}(V_0)}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, V_0) \rightarrow 0$$

se tiene un isomorfismo entre $H_k(X)$ y $H_k(X, V_0)$, probando el resultado para $3 \leq k \leq n-3$.

Probemos el caso $k=2$, el caso $k=n-2$ es análogo. La sucesión 3.4 a partir de $k=2$ nos da una sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(U) \oplus \underbrace{H_2(V)}_0 \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{\partial} H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(M) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(M) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sabiendo que $H_1(U) = H_1(X) = \text{Ab}(\pi_1(X)) = \mathbb{Z}^m$, en donde el último isomorfismo se deduce del Lema 3.3.1, y que $H_2(U)$ es libre (por ser submódulo de $H_2(M)$), podemos calcular su rango a partir de los rangos de los demás elementos de la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(U) \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{\partial} \underbrace{H_1(U \cap V)}_{\mathbb{Z}^m} \rightarrow \underbrace{H_1(U)}_{\mathbb{Z}^m} \oplus \underbrace{H_1(V)}_{\mathbb{Z}^m} \rightarrow \underbrace{H_1(M)}_{\mathbb{Z}^m} \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \underbrace{H_0(U \cap V)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_0(U)}_{\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H_0(V)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_0(M)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Luego, $\text{rg}(H_2(U)) = \text{rg}(H_2(M))$ y entonces $H_2(X) = H_2(U) \cong H_2(M)$. Para terminar, consideremos la sucesión exacta

$$\underbrace{H_2(V_0)}_0 \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(X, V_0) \xrightarrow{\partial} H_1(V_0) \xrightarrow{\iota} H_1(X) \rightarrow \underbrace{H_1(X, V_0)}_0$$

Como ι es un isomorfismo, se deduce que $H_2(X) \cong H_2(X, V_0)$ y queda probado el lema. \square

Para cada $i \in \mathbb{N}_0$ notemos por $C_i = C_i(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$, $Z_i = \ker d_i$, $B_i = \text{Im}(d_{i+1})$ y $H_i = \frac{Z_i}{B_i}$. Supongamos que cada B_i es un submódulo libre de C_i , de modo que Z_i es también libre sobre $\mathbb{Z}\pi$. Supongamos además que $H_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ es libre sobre $\mathbb{Z}\pi$. Sea k el mínimo entero tal que $\beta_k > \mu_k$, con $\beta_k = H_k(W, V_0)$. De forma análoga al caso simplemente conexo, tomemos por hecho que $d_j = 0$ ($\forall j \leq k$) (esto se puede demostrar inductivamente, como lo hicimos en 2.6.1, empleando el argumento para cancelar manijas que viene a continuación), y entonces $H_k = \frac{Z_k}{B_k} = \frac{C_k}{B_k}$. Sea $r = \text{rg}(B_k)$, el cual coincide con el rango del morfismo de borde ∂_{k+1} , entonces se tienen bases (y_1, \dots, y_r) de B_k y $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{\mu_k-r})$ de H_k tales que $(y_1, \dots, y_r, w_1, \dots, w_{\mu_k-r})$ es base de C_k . Consideremos además una base $(x_1, \dots, x_{\mu_k-r}, w_1, \dots, w_s)$ de C_{k+1} tal que $d_{k+1}(x_j) = y_j$ para cada j y (w_1, \dots, w_s) es base de Z_{k+1} . En estas bases, la matriz de d_{k+1} es de la forma

$$[d_{k+1}] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

con $A \in GL(r, \mathbb{Z}\pi)$. Si β_k es el rango de $H_k(K, V_0)$, entonces $H_k(K, V_0) = \mathbb{Z}^{\beta_k}$ y $b_k = \mu_k - r$. Luego, $r = \mu_k - \beta_k > 0$. Como $\text{Wh}(\pi) = 0$, no solo podemos modificar los mapas de adjunción para que las bases de C_{k+1} y de C_k , dadas por la descomposición en manijas, sean las que llevan la matriz de d_{k+1} a la forma (3.5), sino que podemos modificar estos mapas (y agregando eventualmente pares de manijas complementarias)

para que el bloque A sea la matriz identidad. Así, es posible cancelar al menos un par de manijas y obtener una descomposición con menos manijas que de la cual partimos, contradiciendo la minimalidad de f .

Con una demostración similar a la de la proposición 3.3.2, pero usando homología con coeficientes locales [Hat02, Capítulo 3], se puede probar que si $H_k(\tilde{M})$ es libre sobre $\mathbb{Z}\pi$ para $2 \leq k \leq n-2$, entonces $H_*(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ es libre sobre $\mathbb{Z}\pi$. Estamos en condiciones de enunciar y demostrar un teorema de existencia de funciones de Morse perfectas.

Teorema 3.3.3. *Sea M una variedad diferenciable cerrada, conexa, de dimensión $n \geq 6$ con $\pi_1(M)$ libre, $H_*(M)$ libre de torsión, $H_*(\tilde{M})$ libre y tal que $\text{Im}(d_{i+1})$ es un submódulo libre de C_i , entonces M admite funciones de Morse perfectas.*

Demostración. Sea (W, V_0, V_1) como antes y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse para la triada (W, V_0, V_1) con mínima cantidad de puntos críticos. Por lo discutido anteriormente, f posee exactamente β_k puntos críticos de índice k . Por el lema 3.3.2, $b_k = \beta_k$ si $2 \leq k \leq n-2$, así que f posee exactamente b_k puntos críticos de índice k para $2 \leq k \leq n-2$ y 0 puntos críticos de los índices restantes. Queremos extender f a todo M y que la extensión resulte una función de Morse perfecta. Basta entonces definir una función g de Morse en (T_0, \emptyset, V_0) con 1 mínimo y $m = \text{rk}(\pi_1(M))$ puntos críticos de índice 1. Luego, utilizaremos $-g$ para definir una función de Morse en (T_1, V_1, \emptyset) con 1 máximo y m puntos críticos de índice $n-1$. Pegando estas funciones con el lema 1.4.4 se obtiene una función de Morse perfecta para M . Construyamos la función g . En cada entorno tubular τ_j de α_j se define una función $g_j : S^1 \times D^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ que es constante en $S^1 \times S^{n-2} = V_0$ y que tiene solo 2 puntos críticos: 1 de índice 1 y 1 mínimo, ambos en el interior de $S^1 \times D^{n-1}$. Esta función viene dada por $g_j((z, x)) = (1 - \|x\|^2)h(z) + c\|x\|^2$, con $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura. Notar que g_j es constantemente 2 en $S^1 \times S^{n-2}$ y

$$d_{(z,x)}g_j = (d_z g_j(-, x), d_x g_j(z, -)) = ((1 - \|x\|^2)h'(z), 2(c - h(z))x_1, \dots, 2(c - h(z))x_n).$$

Así, si $c > 1$ se tiene que $d_{(z,x)}g_j = 0$ si y solo si $x = 0$ y z es punto crítico de h . Podemos tomar $c = 2$. Luego, g_j posee exactamente 2 puntos críticos: uno de índice 0 y otro de índice 1. Pegando todas las funciones g_j (ver 1.5.19) se obtiene una función $g : T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ con las características deseadas. □

3.3.1. Comentarios finales

Finalizamos la tesis discutiendo las hipótesis del teorema 3.3.3, y proponiendo distintos caminos a seguir para continuar con el estudio de las funciones de Morse perfectas.

En primer lugar, la hipótesis sobre las imágenes de los morfismos de borde d_i del teorema 3.3.3 puede ser eliminada, trabajando con módulos establemente libres (*stably free*). Un módulo N es establemente libre si existe un módulo libre F tal que $N \oplus F$ es libre. Se puede probar que si

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R -módulos, con Y y Z establemente libres, entonces X es establemente libre. En [Mil66, Sección 4] se desarrolla la teoría de la torsión de Whitehead para módulos establemente libres. Notar que cada $C_i = C_i(\tilde{K}, \tilde{V}_0)$ es libre (y por lo tanto establemente libre), y se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow B_0 \rightarrow C_0 \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

con H_0 y C_0 libres, luego B_0 es establemente libre (y $Z_0 = C_0$ también es lo es). Inductivamente, se prueba que B_i y Z_i son establemente libres, a partir de las sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_i \rightarrow Z_i \rightarrow H_i \rightarrow 0, \end{aligned}$$

de modo que no es necesario pedir hipótesis sobre los morfismos de borde d_i . Más aún, no sería necesario que $H_*(\tilde{W}, \tilde{V}_0)$ sea libre, sino que alcanzaría con que sea establemente libre.

La siguiente pregunta que nos planteamos es si es posible relajar la hipótesis de que $H_*(\tilde{M})$ sea libre (o establemente libre). En la demostración del teorema 3.3.3 utilizamos que $H_*(\tilde{W}, \tilde{V}_0)$ es libre. ¿Podemos deducirlo a partir de que la homología de M es libre? Por hipótesis, la homología de M es libre (condición necesaria para que M admita funciones de Morse perfectas), y entonces $H_*(W, V_0)$ también es libre. ¿Qué se puede decir de la homología de su revestimiento universal como $\mathbb{Z}\pi$ -módulo? En general, dado un CW-complejo finito X , con grupo fundamental π y revestimiento universal \tilde{X} , tal que la homología de X es libre (o establemente libre), ¿bajo qué condiciones se verifica que la homología de \tilde{X} es libre (o establemente libre) sobre $\mathbb{Z}\pi$?

Otra pregunta que surge es la siguiente: ¿Es cierto que toda variedad cerrada y conexa M de dimensión $n \geq 6$, con $H_*(M)$ libre de torsión, $H_*(\tilde{M})$ libre sobre $\mathbb{Z}\pi$, con $\pi = \pi_1(M)$, y $Wh(\pi) = 0$, admite funciones de Morse perfectas? Si uno quisiera llevar a cabo una demostración similar a la del teorema 3.3.3, tendría que poder hallar subvariedades $T_0, T_1 \subseteq M$ disjuntas, de dimensión n , tales que si $V_i = \partial T_i$, entonces se verifique que (W, V_0, V_1) es un cobordismo conexo, $\pi_1(V_i) = \pi_1(M)$, $H_k(W, V_0) = H_k(M)$ y tal que existan funciones de Morse perfectas para (T_i, \emptyset, V_i) .

Un primer caso a estudiar es M satisfaciendo las hipótesis mencionadas, con grupo fundamental π abeliano libre, ya que en tal caso sabemos que $Wh(\pi) = 0$.

Se conjetura que si π es un grupo libre de torsión, entonces $Wh(\pi) = 0$. Esta conjetura ha sido demostrada para ciertas clases de grupos, incluyendo los grupos libres, los grupos abelianos libres, los grupos de trenzas (braid groups) [FR00] y los grupos hiperbólicos sin torsión [LR10]. Además, se deduce de una conjetura más general conocida como la conjetura de Farrell-Jones en K-teoría (ver [BLR07]).

Notar que, la ausencia de torsión en $\pi = \pi_1(M)$ junto con la ausencia de torsión en la homología de M podría implicar que $H_*(\tilde{M})$ sea libre de torsión sobre $\mathbb{Z}\pi$. En caso afirmativo, tiene sentido preguntarse si toda variedad cerrada y conexa M , de dimensión mayor o igual a 6, con $H_*(M)$ libre de torsión, $\pi_1(M)$ libre de torsión y tal que $rk(\pi_1(M)) = rg(\pi_1(M)^{ab})$, admite funciones de Morse perfectas.

Cabe destacar que la presencia de torsión en el grupo fundamental no constituye necesariamente una obstrucción para la existencia de funciones de Morse perfectas, como se demuestra en la proposición 2.2.10.

Bibliografía

- [Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra: Chapter 0*, volume 104 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [And04] Aldea Mihaela Andrica, Dorin. Perfect morse functions and some applications. *Acta Universitatis Apulensis. Mathematics - Informatics*, 8:16–25, 2004.
- [Bar64] Dennis Barden. *On the structure and classification of differential manifolds*. PhD thesis, Apollo - University of Cambridge Repository, 1964.
- [BHS64] Hyman Bass, Alex Heller, and Richard G. Swan. The whitehead group of a polynomial extension. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 22:61–79, 1964.
- [BLR07] Arthur Bartels, Wolfgang Lück, and Holger Reich. On the Farrell–Jones Conjecture and its applications. *Journal of Topology*, 1(1):57–86, 10 2007.
- [Bro06] Ronald Brown. *Topology and Groupoids*. Booksurge Publishing, 3rd edition, 2006.
- [BT13] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Cha74] T. A. Chapman. Topological invariance of whitehead torsion. *American Journal of Mathematics*, 96(3):488–497, 1974.
- [Coh73] M.M. Cohen. *A Course in Simple-homotopy Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1973.
- [FR00] F. T. Farrell and Sayed K. Roushon. The Whitehead groups of braid groups vanish. *International Mathematics Research Notices*, 2000(10):515–526, 01 2000.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [Hir12] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [KS79] R. C. Kirby and M. G. Scharlemann. Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere. In James C. Cantrell, editor, *Geometric topology*, pages 113–146. Academic Press, New York, 1979. (Athens, GA, 1977). MR 80k:57042. Zbl 0469.57006.
- [Lee03] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [LMC24] W. Lück, T. Macko, and D. Crowley. *Surgery Theory: Foundations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer International Publishing, 2024.

- [LR10] Wolfgang Lueck and David Rosenthal. On the K- and L-theory of hyperbolic and virtually finitely generated abelian groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1007.0845, July 2010.
- [Maz63] Barry Mazur. Relative neighborhoods and the theorems of Smale. *Annals of Mathematics*, 77(2):232–249, 1963.
- [Mil56] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2):399–405, 1956.
- [Mil63] John Milnor. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1963.
- [Mil64] John Milnor. Differentiable topology. *Lectures in Modern Mathematics*, 1964.
- [Mil66] John Milnor. Whitehead torsion. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(3):358–426, 1966.
- [Mor34] Marston Morse. *The Calculus of Variations in the Large*, volume 18 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1934. Revised edition.
- [MSS65] John Milnor, L. Siebenmann, and J. Sondow. *Lectures on the H-Cobordism Theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [Mun67] J.R. Munkres. *Elementary Differential Topology*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1967.
- [Ran02] A. Ranicki. *Algebraic and Geometric Surgery*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 2002.
- [RS12] C.P. Rourke and B.J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer Study Edition. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [Sma61a] Stephen Smale. Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four. *Annals of Mathematics*, 74:391–406, 1961.
- [Sma61b] Stephen Smale. On gradient dynamical systems. *Annals of Mathematics*, 74(1):199–206, 1961.
- [Sma62] Stephen Smale. On the structure of manifolds. *American Journal of Mathematics*, 84(3):387–399, 1962.
- [Sta65] John Stallings. *Lectures on Polyhedral Collapses and the s-Cobordism Theorem*. Princeton University, 1965. Notes by John Morgan and Daniel Shih.
- [Sti12] John Stillwell. Poincaré and the early history of 3-manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:555–576, 2012.
- [Wal16] C.T.C. Wall. *Differential Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.