



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Aprendizaje de juegos y equilibrios de Nash vía Machine  
Learning

Lucas Galli Casado Sastre

**Director:** Dr. Juan Pablo Pinasco

Fecha de Presentación: 12/12/2025

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2 Introducción a los juegos en forma Normal</b>	<b>7</b>
2.1. Estrategias mixtas . . . . .	9
2.2. Juegos con más de dos jugadores . . . . .	11
2.3. Estabilidad evolutiva . . . . .	12
2.4. Existencia de equilibrios de Nash . . . . .	17
2.5. Algunos juegos clásicos . . . . .	20
<b>3 Preliminares de E.D.O.</b>	<b>22</b>
3.1. Definiciones y resultados generales . . . . .	22
<b>4 Dinámica poblacional y la ecuación del replicador</b>	<b>27</b>
4.1. Ecuación del Replicador y Equilibrios de Nash . . . . .	27
4.2. Promedios Temporales . . . . .	35
4.3. Juegos con pagos no lineales . . . . .	37
4.4. Dinámicas de Imitación . . . . .	39
<b>5 Ejemplos y Caracterizaciones de Juegos Normales</b>	<b>41</b>
5.1. Dinámica de replicador clásico unidimensional . . . . .	41
5.2. Dinámicas de replicador generalizadas . . . . .	43

---

<b>6</b>	<b>SINDy: Identificación Esparsa de Sistemas Dinámicos no Lineales</b>	<b>47</b>
6.1.	Introducción a SINDy . . . . .	47
6.2.	Algoritmo SINDy . . . . .	50
6.3.	Convergencia de SINDy a mínimos locales . . . . .	52
6.4.	Relación entre la respuesta de SINDy y la verdadera solución . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Dinámicas de Replicador a través de SINDy</b>	<b>61</b>
7.1.	Aproximando la ecuación del replicador con SINDy . . . . .	61
7.2.	Ejemplo: SINDy en el replicador clásico . . . . .	65
	Análisis del error: Ejemplo 1 . . . . .	66
	Análisis del error: Replicador clásico con datos ruidosos . . . . .	70
7.3.	Ejemplo: SINDy en dinámicas de imitación . . . . .	71
7.4.	Propiedades del replicador clásico en SINDy . . . . .	78
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>84</b>

# Resumen

El objetivo de este trabajo es aplicar el método de *Sparse Identification of Non-Linear Dynamics* (SINDy) a la ecuación del replicador para identificar equilibrios de Nash a partir de las trayectorias. En el capítulo 1 hacemos una introducción a los juegos en forma estratégica, presentando la noción de Equilibrio de Nash y recordando la demostración de su existencia.

En el capítulo 3 definimos la ecuación del replicador y mostramos demostraciones detalladas de algunos resultados clásicos de la Teoría de Juegos Evolutiva; luego, en el cuarto capítulo caracterizamos algunos juegos en dos dimensiones y vemos algunos ejemplos. En el quinto capítulo introducimos el método SINDy y, finalmente, en el sexto capítulo detallamos su aplicación en el contexto de Teoría de Juegos Evolutiva.

Todos los ejemplos, modelos y gráficos presentes en el trabajo pueden encontrarse en el repositorio [GitHub](#). Los algoritmos y métodos están descritos de forma tal que el trabajo se pueda entender sin tener que acudir al repositorio a lo largo de la lectura, de todas formas está disponible para la recreación de los experimentos.

# Capítulo 1

## Introducción

El método Sparse Identification of Non-linear Dynamics (SINDy) es una técnica de machine learning utilizada para reconstruir ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.) a partir de datos temporales discretos provenientes de un número finito de trayectorias del sistema. La primera aparición de SINDy es en el año 2015 en un paper de PNAS ([6]), donde, además de introducir el método, se aplica a varios ejemplos, entre ellos el sistema de Lorentz.

Posteriormente, en 2019 se publica el trabajo “On the Convergence of the SINDy Algorithm” ([8]), que presenta un análisis teórico más profundo tanto del método como del algoritmo utilizado para implementarlo. En particular, el trabajo establece condiciones suficientes y equivalentes bajo las cuales el algoritmo recupera la dinámica original en un único paso.

Tras estos dos papers, en 2020 llegaría un librería de python diseñada específicamente para la implementación de SINDy, PySINDy (ver [7]). Esta misma es la pieza final del marco teórico y práctico en el cual aplicaremos SINDy, ya que será la herramienta que utilizaremos para su implementación a lo largo del trabajo.

Lo que buscamos analizar en este trabajo es la habilidad de SINDy para obtener dinámicas asociadas a ecuaciones del replicador, un tipo de dinámica que surge de estudiar juegos de forma normal bimatriciales, en particular, juegos simétricos, en un contexto poblacional. Este estilo de problema pertenece a la “Teoría de Juegos

Evolutiva”, donde el problema que se busca resolver es el de modelar la evolución de frecuencias de finitas estrategias en una población, y de ser posible encontrar un punto de equilibrio para estas mismas.

La formulación moderna de los juegos normales fue introducida por von Neumann y Morgenstern en “Theory of Games and Economic Behavior”, en donde se amplia y se generaliza el trabajo de von Neumann sobre juegos de suma cero entre dos personas. El comienzo de Teoría de Juegos Evolutiva surge en el año 1973 en el paper de John Maynard Smith, “The Logic of Animal Conflict”, en donde se busca modelar la evolución de la frecuencias de estrategias en una población de animales de la especie (luego llamado “Juego de Halcones y Palomas”). Con el paso de los años el campo fue formalizándose partir de lo cual comenzaron a surgir varios libros consolidando los hallazgos del mismo, el que utilizaremos a lo largo este trabajo es de Hofbauer y Sigmund (ver [3]), del año 1998.

En este trabajo nos proponemos, principalmente, estudiar cómo evoluciona en el tiempo la diferencia entre la dinámica original y la aproximada mediante el método SINDy. Además, en el caso particular del replicador clásico, realizaremos un análisis teórico más profundo empleando herramientas que serán desarrolladas a lo largo del texto.

## Capítulo 2

# Introducción a los juegos en forma Normal

En este primer capítulo daremos una breve introducción a la teoría de juegos, en particular a juegos de forma estratégica (también llamados juegos en forma normal).

En su expresión más simple, un juego de forma normal es una competencia entre dos agentes, Jugador I y Jugador II; consiste en un enfrentamiento entre ambos competidores en el cual ninguno conocerá de antemano la estrategia de su oponente. El Jugador I tiene  $n \in \mathbb{N}$  estrategias para elegir, mientras que el Jugador II tiene  $m \in \mathbb{N}$  estrategias posibles. Cuando un jugador selecciona una de estas estrategias, diremos que utiliza una estrategia pura.

La forma estratégica o forma normal de un juego entre dos personas esta dada por una tripla  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, (u_1, u_2))$ , donde el conjunto no vacío  $\mathcal{X}$  contiene a las estrategias puras que puede elegir el Jugador I y el conjunto no vacío  $\mathcal{Y}$  contiene a las estrategias puras que puede elegir el Jugador II. Tenemos también las funciones  $u_1, u_2 : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  que nos dirán el **payoff** o pago de cada jugador para cualquier par de estrategias puras. Llamamos  $|\mathcal{X}| = n$  y  $|\mathcal{Y}| = m$ , a su vez identificamos las estrategias con los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{X} = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\mathcal{Y} = \{f_1, \dots, f_m\}$ .

Una ronda de un juego entre ambos jugadores transcurre de la siguiente forma; el Jugador I elige  $e_i \in \mathcal{X}$  mientras que el Jugador II elige  $f_j \in \mathcal{Y}$ , ninguno está al

tanto de la elección del otro. Luego, se hacen conocer sus estrategias, el Jugador I recibe el monto  $u_1(e_i, f_j)$  y el Jugador II recibe el monto  $u_2(e_i, f_j)$  (o lo paga en caso de que sea negativo). Un juego normal entre dos jugadores se dice de **suma cero** si la ganancia del Jugador I es la pérdida del Jugador II y viceversa, más formalmente,

$$u_1(e_i, f_j) = -u_2(e_i, f_j) \quad \forall e_i \in \mathcal{X}, f_j \in \mathcal{Y}.$$

Una forma natural de condensar esta información es en dos matrices  $A, B^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Las llamaremos **matrices de pagos** y definimos sus entradas de la siguiente forma:

$$(A)_{ij} = u_1(e_i, f_j) \text{ y } (B)_{ji} = u_2(e_i, f_j), \quad \forall (i, j) \in [n] \times [m].$$

En el caso en el que  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  y  $A = B^T$ , diremos que el juego es **simétrico**.

Un ejemplo clásico de la teoría de juegos es el dilema del prisionero; en este juego los jugadores han cometido juntos un delito, supongamos que se han vestido de payasos para realizar un acto de fuego en la calle (actividad ilícita en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires). Cada jugador se encuentra en una celda y al ser interrogado debe decidir si traicionará a o no a su cómplice. En este caso,  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{e_1, e_2\}$  donde  $e_1$  representa cooperar y  $e_2$  representa traicionar. Los payoffs son los siguientes: si ninguno de los dos traiciona al otro, cada uno pasará 1 mes en la cárcel, si uno traiciona y el otro no, el traidor saldrá libre, mientras que el traicionado pasará 10 meses en la cárcel. Si ambos traicionan al otro, ambos pasarán 6 meses en la cárcel. La matriz del Jugador I es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Como podemos observar, este juego es simétrico, pero no es de suma cero. Un juego que sí nos proporciona un ejemplo de suma cero es el juego clásico de Piedra, papel, o tijera; tenemos tres estrategias y asumimos que cada ronda le otorga o le quita un punto al jugador según gane o pierda. En este caso,  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{e_1, e_2, e_3\}$  donde diremos que  $e_1$  es piedra,  $e_2$  es tijera y  $e_3$  es papel. La matrices de payoff de los Jugadores I y II nos quedan



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.0.1)$$

## 2.1. Estrategias mixtas

En el comienzo del capítulo aclaramos que cuando un jugador elige una única estrategia, se dice que utiliza una estrategia pura, naturalmente, la aclaración nos incita a pensar que pueden utilizarse estrategias “impuras”, las cuales deben involucrar más de una estrategia pura. Involucramos múltiples estrategias puras definiendo una distribución de probabilidades sobre el conjunto de las mismas, donde el valor que le asignamos a cada estrategia pura será la probabilidad de utilizarla al jugar una ronda.

De esta forma, un juego de estrategia mixta entre dos personas se caracteriza con la tripla  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, (u_1, u_2))$  al igual que antes, sin embargo los jugadores no necesariamente elegirán estrategias puras, sino que el Jugador I (resp. II) elegirá una distribución de probabilidad sobre  $\mathcal{X}$  (resp.  $\mathcal{Y}$ ).

Nuevamente llamamos  $|\mathcal{X}| = n$  y  $|\mathcal{Y}| = m$ . En este caso el Jugador I, en lugar de elegir una estrategia  $e_i \in \mathcal{X}$ , elegirá una distribución

$$\mathbf{x} \in S_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

donde  $(\mathbf{x})_i = x_i$  representa la probabilidad de elegir la  $i$ -ésima estrategia del conjunto  $\mathcal{X}$ . De forma análoga, el Jugador II elegirá una distribución  $\mathbf{y} \in S_m$ .

Si el Jugador I (resp. Jugador II) utiliza con probabilidad 1 una estrategia  $e_i \in \mathcal{X}$  (resp.  $f_j \in \mathcal{Y}$ ) diremos que utiliza una estrategia pura, en este contexto usaremos  $e_i$  como el vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ , el cual representa la distribución donde se elige la  $i$ -ésima estrategia de  $\mathcal{X}$  con probabilidad 1.

Bajo estas convenciones, si el primer jugador utiliza la estrategia  $\mathbf{x} \in S_n$  y el segundo la estrategia  $\mathbf{y} \in S_m$ , definimos el payoff esperado del Jugador  $i$  como

$$\mathbf{x}A\mathbf{y} = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j,$$

y el payoff esperado para el Jugador II como

$$\mathbf{x}B^T\mathbf{y} = \sum_{i,j} b_{ij}x_iy_j.$$

Para un  $\mathbf{y} \in S_m$  fijo nos interesa saber cuáles son las mejores estrategias que puede usar el Jugador I al enfrentarse a un oponente que juega con esta estrategia, para ello definimos el conjunto de las mejores respuestas (best replies) como

$$BR(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in S_n : \mathbf{z}^T A\mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T A\mathbf{y}, \forall \mathbf{z} \in S_n\}.$$

Definimos  $BR(\mathbf{x})$  de forma análoga. Dado que la función  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}^T A\mathbf{y}$  es continua y  $S_n$  es compacto, sabemos que el conjunto  $BR(\mathbf{y})$  nunca será vacío. Definimos el **soporte de  $\mathbf{x}$**  como las coordenadas no nulas del mismo, es decir

$$sop(\mathbf{x}) = \{1 \leq i \leq n : x_i \neq 0\}.$$

**Proposición 2.1.1.** El conjunto  $BR(\mathbf{y})$  es convexo y si  $\mathbf{x} \in BR(\mathbf{y})$ , entonces  $i \in sop(\mathbf{x})$  implica que  $e_i \in BR(\mathbf{y})$ .

*Demostración.* Es claro que si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in BR(\mathbf{y})$ , entonces

$$\mathbf{x}_1^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}_2^T A\mathbf{y}.$$

Luego,  $\alpha \cdot \mathbf{x}_1^T A\mathbf{y} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{x}_2^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}_1^T A\mathbf{y} \in BR(\mathbf{y})$ , por lo que el conjunto resulta convexo. Para lo segundo, tomamos  $\mathbf{x} \in BR(\mathbf{y})$  y lo expresamos como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Sea  $1 \leq k \leq n$  tal que  $x_k > 0$ . Supongamos que

$$\mathbf{e}_k^T A\mathbf{y} < \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

Entonces

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i (A\mathbf{y})_i < \sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{x}^T A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y},$$

lo cual es absurdo. Luego,

$$\mathbf{e}_k^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}.$$

□

Diremos que dos estrategias  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  forman un **Equilibrio de Nash (N.E.)** si cada una es mejor respuesta de la otra, es decir, si  $\mathbf{x} \in BR(\mathbf{y})$  y  $\mathbf{y} \in BR(\mathbf{x})$ . Un par de estrategias N.E. es un escenario en donde ningún jugador está incentivado a desviarse de su estrategia actual, es equivalente a cumplir

$$\mathbf{x}^T B \tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{x} B \mathbf{y}, \forall \tilde{\mathbf{y}} \in S_m$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^T A \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{y}, \forall \tilde{\mathbf{x}} \in S_n.$$

En un juego simétrico existen siempre equilibrios de Nash simétricos, que son pares de estrategias NE de la forma  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  (hay al lo menos uno, esto lo veremos en breve) los cuales serán de nuestro interés cuando pasemos al contexto de la Teoría de Juegos Evolutiva. Ser NE simétrico es equivalente a cumplir

$$\mathbf{z}^T A \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{z} \in S_n.$$

## 2.2. Juegos con más de dos jugadores

Hasta ahora nos hemos restringido al caso de juegos entre dos jugadores, principalmente porque es el contexto y la notación que mantendremos lo largo del trabajo, sin embargo, estas definiciones pueden extenderse a juegos de  $k \in \mathbb{N}$  jugadores. Cada jugador  $1 \leq j \leq k$  tendrá un conjunto de  $n_j > 0$  estrategias puras, por lo que el simplex  $S_{n_j}$  será su conjunto de distribuciones sobre las estrategias puras.

Un elemento  $x \in S_{n_j}$  representa una estrategia mixta del  $j$ -ésimo jugadores y podemos escribirlo como  $x = \sum_{\alpha=1}^{n_j} x_{\alpha} e_{\alpha}^j$  donde  $e_{\alpha}^j \in S_{n_j}$  es el  $\alpha$ -ésimo vector canónico del simplex  $S_{n_j}$  y representa la estrategia en la que el jugador  $j$  utiliza la  $\alpha$ -ésima estrategia con probabilidad uno. Definimos  $\Sigma = S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_k}$  como el espacio de estados de estrategias mixtas, y notamos a un elemento del espacio de estado como la tira de vectores  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \Sigma$  (en el contexto general  $\mathbf{x}$  será una tira de vectores, mientras que en el caso de dos jugadores será un vector escalar).

Cada jugador tiene una función de pago  $u_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  de forma tal que si las estrategias utilizadas son  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \Sigma$ , entonces el pago recibido (o pagado,

en caso de ser negativo) por el  $j$ -ésimo jugador es  $u_j(\mathbf{x})$ . Escribimos la estrategia mixta del  $i$ -ésimo jugador,  $x_i \in S_{n_i}$ , como

$$x_i = \sum_{\alpha_i=1}^{n_i} (x_i)_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}^i, \quad \forall 1 \leq i \leq k,$$

donde  $e_1^i, \dots, e_{n_i}^i \in S_{n_i}$  representan los vectores canónicos del  $i$ -ésimo simplex. Luego, dado una tira de vectores  $(x_1, \dots, x_k) \in \Sigma$ , las funciones de pago de todo jugador  $1 \leq j \leq k$  deben cumplir

$$u_j(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{\alpha_k=1}^{n_k} \left( \prod_{i=1}^k (x_i)_{\alpha_i} \right) u_j(e_{\alpha_1}^1, e_{\alpha_2}^2, \dots, e_{\alpha_k}^k). \quad (2.2.1)$$

Dado un vector  $(x_1, \dots, x_k) \in \Sigma$  introducimos la notación

$$(x, x_{-j}) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_{n_k}) \in \Sigma,$$

así,  $(x_j, x_{-j}) = (x_1, \dots, x_k)$  para todo  $1 \leq j \leq k$ . Usando esta notación, podemos generalizar el equilibrio de Nash como un punto  $(x_1, \dots, x_k) \in S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$  tal que:

$$u_j(x_j, x_{-j}) \geq u_j(x'_j, x_{-j}) \quad \forall x'_j \in S_{n_j}, \forall 1 \leq j \leq k. \quad (2.2.2)$$

Además, generalizamos la noción de juego simétrico (y NE simétrico) en el contexto de juego de  $k \in \mathbb{N}$  jugadores. Un juego simétrico de  $k$  jugadores es un juego en el que debe valer que  $S = S_1 = \dots = S_k$  y además para cualquier jugador  $1 \leq j \leq k$  y cualquier permutación  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  necesariamente vale que

$$u_j(x_1, \dots, x_k) = u_{\pi(j)}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) \quad (2.2.3)$$

En el caso inicial de dos jugadores, aplicando  $\sigma(1) = 2$  nos queda  $A_{ij} = u_1(e_i, e_j) = u_2(e_j, e_i) = B_{ji} = (B)_{ij}^T$ . Decimos que una estrategia  $\mathbf{x} \in \Sigma$  es un equilibrio de Nash simétrico si  $\mathbf{x}$  cumple las condiciones de 2.2.2 y además  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in S^n : x_i = x_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n\}$ .

## 2.3. Estabilidad evolutiva

En lo que resta del capítulo, en las definiciones que daremos y los teoremas que veamos, **trabajaremos en el caso de un juego simétrico entre dos jugadores** sin hacer uso de la definición general del juego de forma normal. Mencionamos la

generalización con el fin de dar una introducción mas completa, y para que cuando enunciemos el teorema de existencia de un equilibrio de Nash mas adelante, podamos dar un enunciado y una demostración mas fiel al trabajo original de Nash. Salvo que se aclare explícitamente, *no estaremos trabajando en el contexto de un juego de forma normal general de  $k$  jugadores.*

Como podemos ver a partir de las definiciones anteriores, un equilibrio de Nash representa una situación donde ningún jugador tiene un incentivo para variar su estrategia; sin embargo, en un mismo juego puede haber múltiples equilibrios de Nash. Naturalmente, esto nos lleva a preguntarnos qué condiciones nos podrán garantizar la existencia de un solo equilibrio de Nash, o bien, en caso de que haya varios, qué criterio puede usarse para introducir una jerarquía entre ellos. Para responder estas preguntas, en el caso del juego simétrico, podemos introducir el concepto de **Estabilidad Evolutiva**. Una estrategia  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  se dice **estrategia evolutivamente estable** (ESS) si para todo  $\mathbf{x} \in S_n$  con  $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$  existe un  $\epsilon(\mathbf{x}) > 0$  tal que:

$$\mathbf{x}^T A[\epsilon.\mathbf{x} + (1 - \epsilon).\hat{\mathbf{x}}] < \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon.\mathbf{x} + (1 - \epsilon).\hat{\mathbf{x}}], \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon(\mathbf{x}). \quad (2.3.1)$$

La condición puede re-escribirse de la forma:

$$(1 - \epsilon)(\hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}}) + \epsilon(\hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}) > 0, \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon(\mathbf{x}), \quad (2.3.2)$$

y usando 2.3.2 podemos ver que  $\mathbf{x}$  sea un estrategia evolutivamente estable (ESS) es equivalente a que cumpla las condiciones:

i.) Condición de equilibrio:

$$\mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} \text{ para todo } \mathbf{x} \in S_n.$$

ii.) Condición de estabilidad:

$$\text{Si } \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}} \text{ y } \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}}, \text{ entonces } \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}.$$

La primera condición es simplemente ser N.E., la segunda condición nos asegura que si existiese una alternativa  $\mathbf{x}$  a  $\hat{\mathbf{x}}$  con igualdad de pagos, entonces  $\hat{\mathbf{x}}$  sería mejor

respuesta contra ella  $\mathbf{x}$  que sí misma. Estas condiciones, considerablemente más fuertes que solo N.E., sugieren una unicidad que el equilibrio de Nash por sí solo no nos puede garantizar. Efectivamente, este será el caso siempre que la estrategia ESS se encuentre en el interior del simplex.

Ahora veremos algunos resultados que nos permiten enunciar una definición equivalente para una estrategia ESS que usaremos más adelante en el capítulo 3 cuando introduzcamos juegos en un contexto poblacional. La siguiente propiedad es un resultado necesario solamente para la demostración de la caracterización de ESS que presentaremos en el 2.3.2.

**Proposición 2.3.1.** [4] Sea  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  un punto ESS. Dado  $\mathbf{x} \in S_n \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$  definimos  $\epsilon(\mathbf{x})$  como el mínimo entre 1 y menor real positivo para el cual vale 2.3.1. Entonces se puede elegir  $\epsilon(\mathbf{x})$  de forma tal que sea continua en  $S_n - \{\hat{\mathbf{x}}\}$ , en particular:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\hat{\mathbf{x}}}{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})} & , \text{ si } \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} \\ 1 & , \text{ si } \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

*Demostración.* Por 2.3.1 podemos ver que para cualquier  $0 < \epsilon < \epsilon(\mathbf{x})$  debe valer

$$\mathbf{x}^T A[\epsilon.\mathbf{x} + (1 - \epsilon).\hat{\mathbf{x}}] < \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon.\mathbf{x} + (1 - \epsilon).\hat{\mathbf{x}}].$$

Reorganizando podemos ver que

$$[\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}}]\epsilon < \hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}},$$

$$[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})]\epsilon < (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\hat{\mathbf{x}}.$$

Si suponemos que  $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} > 0$ , usando que  $\hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}} \geq 0$  por la condición de equilibrio, podemos ver que en el coeficiente de  $\epsilon$  es positivo, por lo que en este caso nos queda que

$$\epsilon < \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\hat{\mathbf{x}}}{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})} = \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\hat{\mathbf{x}}}{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\hat{\mathbf{x}} - (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})A\mathbf{x}} < 1.$$

Si miramos el caso  $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$ , la condición de estabilidad evolutiva nos queda

$$(\hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}})\epsilon < (\hat{\mathbf{x}}^T A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}}),$$

por lo que es inmediato que  $\epsilon < 1$ .

Analizamos el último caso,  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x}$ , vemos que en este caso 2.3.1 se cumple para  $\epsilon = 1$ , además, si  $0 < \epsilon < 1$  vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A[\epsilon \cdot \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}] &= \epsilon \cdot \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \mathbf{x}^T A \hat{\mathbf{x}} \leq \\ &\epsilon \cdot \hat{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}^T A \hat{\mathbf{x}} = \epsilon \cdot \hat{\mathbf{x}}^T A[\mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}], \end{aligned}$$

por lo que la condición ESS vale para cualquier  $0 < \epsilon \leq 1$ , ergo en este caso  $\epsilon(\mathbf{x}) = 1$  nos proporciona una barrera apropiada para 2.3.1.

Con esto, hemos demostrado que para cualquier  $\hat{\mathbf{x}}$  que sea ESS y para cualquier  $\mathbf{x} \in S_n \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$ , tomando  $\epsilon(\mathbf{x}) = \min\{1, \frac{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T A \hat{\mathbf{x}}}{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T A (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})}\}$  tenemos que

$$\mathbf{x}^T A[\epsilon \cdot \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}] < \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon \cdot \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}], \quad \forall 0 < \epsilon \leq \epsilon(\hat{\mathbf{x}}).$$

La continuidad sobre  $S_n \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$  es inmediata.

□

**Teorema 2.3.2.** [4] Una estrategia  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es ESS si y solo si

$$\hat{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} > \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

para cualquier  $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$  en un entorno de  $\hat{\mathbf{x}}$  en  $S_n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es ESS. Veamos que cualquier  $\mathbf{x} \in S_n$  cercana a  $\hat{\mathbf{x}}$  puede expresarse de la forma

$$\epsilon \cdot \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \cdot \hat{\mathbf{x}}.$$

Definimos

$$C_i = \{x \in S_n : x_i = 0\},$$

$$C = \bigcup_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} C_i,$$

donde

$$\text{sop}(\hat{\mathbf{x}}) = \{1 \leq i \leq n : x_i > 0\}.$$

Coloquialmente,  $C$  es el conjunto de todas las caras del simplex que no contienen a  $\hat{\mathbf{x}}$ . Cada uno de los conjuntos  $C_i$  es un compacto y cerrado, pues son caras de un poliedro acotado (el simplex). Luego, usando la continuidad de  $\epsilon(\mathbf{x})$  que probamos en 2.3.1 podemos definir

$$\tilde{\epsilon} = \min_{\mathbf{x} \in C} \epsilon(\mathbf{x}) > 0.$$

En particular, nos interesa ver que

$$S_n = \{(1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}} + \epsilon\mathbf{x} : 0 \leq \epsilon < 1, \mathbf{x} \in C\}. \quad (2.3.4)$$

Si logramos demostrar esto, la condición que buscamos demostrar se cumplirá para cualquier  $\mathbf{y} \in B(\hat{\mathbf{x}}, \epsilon) \cap S_n$ , pues (suponiendo que vale 2.3.4) existe  $\mathbf{x} \in C$  tal que

$$\mathbf{y} = (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}} + \epsilon\mathbf{x} \quad \text{con } \epsilon < \tilde{\epsilon}.$$

Luego, por como hemos definido  $\tilde{\epsilon}$  vale que

$$\mathbf{x}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}] < \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}].$$

Multiplicamos ambos lados por  $\epsilon$ :

$$\epsilon \mathbf{x}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}] < \epsilon \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}].$$

Sumamos  $(1 - \epsilon) \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}]$  a ambos lados:

$$[\epsilon\mathbf{x}^T + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}^T] A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}] < \hat{\mathbf{x}}^T A[\epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}].$$

Como tenemos que  $\mathbf{y} = \epsilon\mathbf{x} + (1 - \epsilon)\hat{\mathbf{x}}$ , se concluye que:

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} < \hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{y}.$$

Veamos que vale 2.3.4. Miramos  $L(t) = \hat{\mathbf{x}}(1 - t) + \mathbf{y}t$ . Como  $S_n$  es cerrado, compacto y convexo podemos tomar el máximo valor de  $t_M > 0$  tal que  $L(t_M) \in S_n$  (lo que hacemos es ir desde  $\hat{\mathbf{x}}$  hacia  $\mathbf{y}$  hasta toparnos con una cara o vértice del polígono  $S_n$ ). En particular, debe existir un  $i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})$  tal que  $L(t_M)_i = 0$ , de lo contrario se contradice la maximalidad de  $t_M$ . Luego  $L(t_M) \in C_i \subset C$ , tomando  $\mathbf{x} = L(t_M)$ , por como está definido  $L(t)$  tenemos que  $\mathbf{y} \in \{\hat{\mathbf{x}}(1 - \epsilon) + \epsilon\mathbf{x}, 0 < \epsilon < 1\}$ .

□



**Corolario 2.3.3.** Si  $\hat{\mathbf{x}} \in \text{int}(S_n)$  es ESS, entonces no hay otra estrategia ESS, en particular tampoco hay otra estrategia que sea equilibrio de Nash.

*Demostración.* Como ser ESS implica NE por la condición de equilibrio, basta con ver que si  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es ESS entonces no puede haber un NE. Supongamos que  $\hat{\mathbf{x}} \in \text{int}(S_n)$  es ESS y que  $\mathbf{x} \in S_n$  es NE. Por definición de NE debe valer que  $\hat{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , ya que  $\hat{\mathbf{x}}$  está en el interior del simplex. Sea  $0 < \epsilon \leq 1$ , entonces

$$[\hat{\mathbf{x}}^T \epsilon + (1 - \epsilon) \mathbf{x}^T] A \mathbf{x} = \epsilon \hat{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \epsilon \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + (1 - \epsilon) \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

lo cual está en contradicción directa con 2.3.2.

□

## 2.4. Existencia de equilibrios de Nash

A continuación, haremos un breve retorno al juego de forma normal de  $k \in \mathbb{N}$  jugadores para escribir el teorema de John Nash que nos demuestra la existencia de un equilibrio de Nash para cualquier juego normal de finitos jugadores.

**Teorema 2.4.1. Teorema del punto fijo de Brouwer** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo, compacto y no vacío. Si  $f : D \rightarrow D$  es una función continua, entonces existe al menos un punto  $x \in D$  tal que

$$f(x) = x.$$

**Teorema 2.4.2.** [2] Sea un juego de finitas estrategias puras y 2 o más jugadores. Entonces existe al menos un equilibrio de Nash.

*Demostración.* Haremos la demostración para el caso de dos jugadores, cada uno con matrices de pago  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Sea  $K = S_m \times S_n$ . Buscamos definir una aplicación  $T : K \rightarrow K$  que a un par de estrategias mixtas  $(x, y)$  le asigne un nuevo par  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  tal que  $\tilde{x}$  sea una mejor respuesta a  $y$  que  $x$ , y que  $\tilde{y}$  sea mejor respuesta a  $x$  que  $y$ .

Si mostramos que  $T$  es continua, al ser  $K$  un compacto convexo podremos usar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer y nos garantizamos la existencia de estrategias mixtas  $(x, y) \in K$  tal que,

$$T(x, y) = (x, y).$$

Vamos a construir el operador  $T$ , dadas  $(x, y)$  definimos

$$c_i = \max\{e_i^T Ay - x^T Ay, 0\} \text{ y } d_j = \max\{x^T B^T e_j - x^T B^T y, 0\},$$

y los puntos  $\tilde{x} \in S_n$ ,  $\tilde{y} \in S_m$  como

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k}, \forall 1 \leq i \leq m \quad \text{y} \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^n d_k}, 1 \leq j \leq m,$$

En ambos casos la pertenencia al simplex se obtiene fácilmente sumando sobre sus coordenadas

$$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k} = 1.$$

Definimos  $T(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Respecto a la continuidad de  $T$ :  $c_i$  y  $d_j$  resultan continuas por ser el máximo entre cero y una suma de productos lineales de  $x$  e  $y$ . Luego cada coordenada de  $T$  es un cociente de funciones continuas en el que la función del denominador es siempre mayor o igual a uno. Entonces, por Brouwer, debe existir  $(x^*, y^*) \in K$  tal que  $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$ . Veamos que este punto fijo debe ser un equilibrio de Nash.

Al ser  $(x^*, y^*)$  un punto fijo, tenemos que  $\tilde{x}^* = x^*$  y  $\tilde{y}^* = y^*$ . Usando la definición de  $\tilde{x}^*$ :

$$x_i^* = \frac{x_i^* + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k} \implies c_i = x_i^* \sum_{k=1}^m c_k \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

Definimos  $C := \sum_{k=1}^m c_k$ . Luego la condición de punto fijo para el Jugador 1 es  $c_i = x_i^* C$  para todo  $1 \leq i \leq m$ . Veamos que  $x^* \in BR(y^*)$

Supongamos que existe  $k \in [m]$  tal que  $e_k^T Ay^* > x^* Ay^*$ . Se sigue que  $c_k > 0$ , como además  $c_k = x_k^* C$  tenemos que  $x_k > 0$  y  $C > 0$ . Entonces  $k \in \text{sop}(x^*)$ .

Como nuestra suposición nos garantiza que  $C > 0$ ,  $x_k^* > 0$ , esto implica que  $c_i > 0$ , con lo cual  $e_i^T Ay^* > (x^*)^T Ay^*$ . Entonces:

$$(x^*)^T Ay^* = \sum_{i=1}^m x_i^* (e_i^T Ay^*) = \sum_{i \in \text{sop}(x^*)} x_i^* (e_i^T Ay^*) > (x^*)^T Ay^*,$$

lo cual es absurdo. Luego  $e_k^T A y^* \leq x^* A y^*$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , por lo que  $x^* \in BR(y^*)$ . Análogamente,  $y^* \in BR(x^*)$ , entonces nuestro punto fijo es NE.

□

Adicionalmente, el trabajo de Nash nos dice que en el caso de un juego simétrico siempre podremos encontrar al menos un equilibrio simétrico en el juego.

**Corolario 2.4.3.** Sea un juego simétrico de finitas estrategias puras y 2 o más jugadores. Entonces, existe al menos un equilibrio de Nash simétrico.

*Demostración.* Definimos el conjunto de las estrategias simétricas

$$\Sigma = \{(x, y) \in S_n \times S_n : x = y\}. \quad (2.4.1)$$

Tomamos  $T$  como en 2.4.2. El conjunto  $\Sigma$  es compacto, convexo y no vacío, por lo que si demostramos que  $T(x, y) \in \Sigma$  tendremos que  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  es una función continua sobre un conjunto que cumple las condiciones de 2.4.1. Luego, tendremos un  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in S_n$  punto fijo de  $T$ , el cual, por lo que probamos en 2.4.2, debe ser un equilibrio de Nash.

Veamos que  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Al estar en un juego simétrico, tenemos que  $B^T = A$ , por lo que si  $(x, y) = (x, x) \in S_n$  valen

$$\begin{aligned} c_i &= \max\{e_i^T A y - x^T A y, 0\} = \max\{e_i^T A x - x^T A x, 0\}, \\ d_j &= \max\{x^T B^T e_j - x^T B^T y, 0\} = \max\{e_j^T A x - x^T A x, 0\}. \end{aligned}$$

Se sigue que  $c_j = d_j$ , para todo  $1 \leq j \leq n$ . Luego, si llamamos  $T(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ , por como hemos definido  $T$  tenemos que

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k} = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{k=1}^n d_k} = \tilde{y}_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Hemos visto que  $\tilde{x} = \tilde{y}$ , por lo que  $T(x, y) \in \Sigma$ , entonces, debe existir un equilibrio simétrico.

□

## 2.5. Algunos juegos clásicos

### Halcones y Palomas

Un ejemplo clásico de la teoría de juegos evolutiva es el juego de Halcones y Palomas (Hawk-Dove Game), fue propuesto por los biólogos John Maynard Smith y George Price en un intento de explicar las peleas de ritual en competencias entre animales de una misma especie. En su modelo asumen una población con dos fenotipos (es decir, con dos posibles estrategias). La primera estrategia  $\mathbf{e}_1$  es escalar el conflicto hasta que la muerte o lesión termine el conflicto, la segunda estrategia,  $\mathbf{e}_2$ , consiste en huir si el oponente resulta difícil.

Llamaremos Halcón (resp. Paloma) al jugador que usa la estrategia pura  $\mathbf{e}_1$  (resp.  $\mathbf{e}_2$ ). Ganar el conflicto otorga un payoff esperado  $G$ , y perder resulta en una penalidad  $C > G$ . Si asumimos que al encontrarse dos halcones ambos tienen igual probabilidad de ganar el conflicto, entonces la esperanza de su payoff es  $\frac{G}{2} - \frac{C}{2}$ . De la misma forma, suponemos que si se encuentran dos palomas, la victoria de una u otra es igual de probable. Para el jugador 1 tenemos la siguiente matriz de payoff:

$$\begin{bmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.5.1)$$

La matriz del Jugador II es simplemente la transpuesta de la matriz del Jugador I.

### Piedra, Papel o Tijera

Para ver un ejemplo en tres dimensiones, podemos remitirnos al juego de piedra, papel o tijera con matriz de payoff como en (1.1). Podemos observar que en este ejemplo la ganancia de un jugador es exactamente la pérdida del otro, estamos en el caso de un juego de suma cero. Una cualidad interesante del juego de piedra, papel o tijera es que exhibe un comportamiento cíclico, es decir, la primera estrategia es dominada por la segunda, la segunda es dominada por la tercera y la tercera es dominada por la primera. Naturalmente surge la duda: ¿podríamos tener un juego

cíclico que no sea de suma cero? La respuesta es que sí, y a esta clase de juego se los denomina juego de piedra, papel o tijera (PPT). La matriz de payoff para el caso genérico es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & 0 & -a_3 \\ -a_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5.2)$$

con  $a_i, b_i > 0$ . Acá  $a_i$  es el costo de jugar contra la estrategia pura  $e_i$  cuando el jugador I usa la estrategia que esta domina, similarmente,  $b_i$  es la ganancia de jugar contra la estrategia pura  $e_i$  cuando el Jugador I usa la estrategia que domina a  $e_i$ .

# Capítulo 3

## Preliminares de E.D.O.

### 3.1. Definiciones y resultados generales

Sea  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  una E.D.O. autónoma en una región de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{x}(t)$  una solución definida para todo  $t \geq 0$  con condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ . Llamamos **órbita de  $\mathbf{x}$**  al recorrido de una trayectoria de  $\mathbf{x}(t)$  a lo largo del tiempo tras comenzar en  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ . Usaremos  $\mathbf{x}(t)$  para referirnos de la ecuación diferencial que cumple  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ .

Decimos que  $\mathbf{x}$  es un **punto de equilibrio** si  $\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \forall t \geq 0\}$ , se caracteriza por cumplir  $f(\mathbf{x}) = 0$ . Si uno comienza en un punto de equilibrio, permanecerá allí por siempre. Si  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}$  para algún  $T > 0$ , pero  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}$  para  $t \in (0, T)$  entonces decimos que  $\mathbf{x}$  es un punto periódico con periodo  $T$ .

Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}$  de una E.D.O. se dice **estable** si para cualquier entorno  $U$  de  $\mathbf{x}$  existe un entorno  $V$  de  $\mathbf{x}$  tal que si la órbita comienza en  $V$  permanece en  $U$  a lo largo de toda la trayectoria. Si las órbitas que comienzan en  $V$ , además de permanecer en  $U$ , convergen a  $\mathbf{x}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  decimos que el punto de equilibrio es **asintóticamente estable**. Si el conjunto para el cual las órbitas convergen al punto de equilibrio es toda la región sobre la cual está definido el problema, diremos que el punto es **globalmente estable**.

El  $\omega$ -límite de  $\mathbf{x}$  es el conjunto de los puntos de acumulación de  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \geq 0}$ , lo

notamos:

$$\omega(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{y} \text{ con } t_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty\}.$$

Observamos que siempre que  $\mathbf{x}(t)$  permanezca dentro de un conjunto compacto a partir de un instante de tiempo dado, existirá al menos un punto de acumulación. A partir de la definición se sigue que podemos representarlo como la siguiente intersección de conjuntos cerrados:

$$\omega(\mathbf{x}) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\mathbf{x}(s) : s \geq t\}}. \quad (3.1.1)$$

A partir de 3.1.1 obtenemos que  $\omega(\mathbf{x})$  es conexo y cerrado, donde la conexidad se obtiene por estar intersecando conjuntos conexos decrecientes. Adicionalmente, podemos ver que cualquier punto  $\mathbf{z}$  sobre la órbita de  $\mathbf{x}$  tiene el mismo  $\omega$ -límite. Para ver esto miramos la trayectoria que comienza en  $\mathbf{z} = \mathbf{x}(T)$  para algún tiempo  $T$ , luego la trayectoria de  $\mathbf{z}$  en un tiempo  $t$  es  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(T+t)$ . Si  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$  entonces

$$\exists \{t_k\} \subset \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{x}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mathbf{y} \text{ y } t_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty,$$

por lo que  $\mathbf{z}(t_k - T) = \mathbf{x}(t_k)$  también converge a  $\mathbf{y}$ . Entonces, necesariamente  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{z})$ . El conjunto  $\omega(\mathbf{x})$  es **invariante**, es decir si  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$  entonces  $\mathbf{y}(t) \in \omega(\mathbf{x})$  para todo  $t \geq 0$ . Esto vale ya que si  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{y}$  entonces  $\mathbf{x}(t_k + t') \rightarrow \mathbf{y}(t')$  para cualquier  $t' \geq 0$ .

**Teorema 3.1.1.** (Teorema de Lyapunov - débil)

[3] Sea  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  una E.D.O. definida en un subconjunto  $G \subset \mathbb{R}^n$  sobre el cual es invariante. Sea  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable. Si para alguna solución  $\mathbf{x}(t)$  la derivada temporal  $\dot{V}$  de la función  $t \rightarrow V(\mathbf{x}(t))$  satisface la inequación  $\dot{V} \geq 0$ , entonces  $\omega(\mathbf{x}) \cap G \subset \{\mathbf{x} \in G : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}) \cap G$ , entonces  $\exists \{t_k\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que  $t_k \rightarrow +\infty$  y  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{y}$ . Como  $\dot{V} \geq 0$  sobre la órbita de  $\mathbf{x}$  entonces  $\dot{V}(\mathbf{y}) \geq 0$  por continuidad. Supongamos que  $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$

Como el valor de  $V$  nunca decrece sobre una órbita, tenemos que

$$V(\mathbf{y}(t)) > V(\mathbf{y})$$

por lo que existen  $\epsilon, \delta > 0$  tal que

$$V(\mathbf{y}(t)) > V(\mathbf{y}) + \epsilon > V(\mathbf{y}), \text{ para } t > \delta \quad (3.1.2)$$

La función  $V(\mathbf{x}(t))$  es creciente y  $V(\mathbf{x}(t_k))$  converge a  $V(\mathbf{y})$  por la continuidad de  $V$ , por lo que

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{y}) \quad (3.1.3)$$

para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{y}$  se sigue que  $\mathbf{x}(t_k + t) \rightarrow \mathbf{y}(t)$  para todo  $t > 0$  lo cual implica que

$$V(\mathbf{x}(t_k + t)) \rightarrow V(\mathbf{y}(t)) \quad (3.1.4)$$

entonces por 3.1.2, para un  $k$  suficientemente grande, vale que  $V(\mathbf{x}(t_k + t)) > V(\mathbf{y}) + \epsilon$ , lo cual contradice 3.1.3.

□

A continuación demostramos un teorema clásico de E.D.O. autónomas que usaremos más adelante.

**Teorema 3.1.2** (Teorema de Lyapunov para estabilidad asintótica). Sea  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  un sistema dinámico autónomo y sea  $\hat{\mathbf{x}}$  un punto de equilibrio (i.e.,  $f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ). Sea  $G$  un entorno abierto de  $\hat{\mathbf{x}}$  y supongamos que existe una función  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y derivable en  $\text{int}(G)$ , que cumple:

1.  $V(\mathbf{x}) = 0$ , y  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G \setminus \hat{\mathbf{x}}$ .
2. La derivada de  $V$  a lo largo de las soluciones satisface  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G$ .

Entonces  $\hat{\mathbf{x}}$  es estable. Además, si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G \setminus \hat{\mathbf{x}}$ , entonces  $\hat{\mathbf{x}}$  es asintóticamente estable.

*Demostración.* Sea  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  un sistema autónomo y  $\hat{\mathbf{x}}$  un punto de equilibrio. Sea  $G$  un entorno abierto de  $\hat{\mathbf{x}}$  y supongamos que existe

$$V : G \rightarrow \mathbb{R},$$



continua en  $G$  y derivable en  $\text{int}(G)$ , tal que

$$V(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in G \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\},$$

y además  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G$ .

Veamos primero la estabilidad. Tomemos  $\varepsilon > 0$  tal que la bola cerrada  $\overline{B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)}$  esté contenida en  $G$ . Como la función  $V$  es estrictamente positiva sobre  $\partial B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)$  tenemos

$$m := \min_{\mathbf{x} \in \partial B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)} V(\mathbf{x}) > 0.$$

Luego, definimos el subconjunto de nivel

$$L_c := \{\mathbf{x} \in G : V(\mathbf{x}) \leq c\}.$$

Si  $\mathbf{x} \in L_c$  entonces, como  $V$  es no creciente, necesariamente  $V(\mathbf{x}(t))$  para todo  $t \geq 0$ , por lo que el conjunto  $L_c$  resulta invariante. Veamos que además cualquier trayectoria que comienza en  $L_c$  permanece en  $B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ .

Sea  $\mathbf{x} \in L_c$ , supongamos que existe un  $t > 0$  tal que  $\mathbf{x}(t) \in \partial B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ , entonces  $V(\mathbf{x}(t)) \geq c$ , lo cual contradice la invariancia de  $L_c$ . Luego, toda trayectoria que comienza en  $L_c$  permanece en  $B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ . Por la continuidad de  $V$  en  $\text{int}(G)$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \delta \implies |V(\mathbf{x}) - V(\hat{\mathbf{x}})| \leq m \implies V(\mathbf{x}) \leq m,$$

por lo que  $B(\hat{\mathbf{x}}, \delta) \subset L_c$ . Hemos visto que dado un entorno  $U = B(\hat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \subset G$ , existe un entorno  $V = B(\hat{\mathbf{x}}, \delta)$  tal que toda trayectoria que comienza en  $V$  permanece en  $U$ , por lo que  $\hat{\mathbf{x}}$  resulta estable.

Veamos que si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$  entonces tenemos estabilidad asintótica. Tomemos  $\mathbf{x}_0$  suficientemente cercano a  $\hat{\mathbf{x}}$  de modo que la solución  $\mathbf{x}(t)$  permanezca en un subconjunto compacto de  $G$  para  $t \geq 0$  (esto puede garantizarse eligiendo  $\mathbf{x}_0$  dentro de una bola suficientemente pequeña contenida en  $G$ , y usando la estabilidad ya probada). Como  $t \mapsto V(\mathbf{x}(t))$  es decreciente y acotada inferiormente por 0, existe

$$\ell := \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) \geq 0.$$

Sea  $\omega(\mathbf{x}_0)$  el conjunto  $\omega$ -límite de la solución  $\mathbf{x}(t)$ . Sabemos que  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es compacto, no vacío (pues  $\mathbf{x}(t)$  se mantiene en un compacto de  $G$ ) e invariante por la dinámica, además, por la continuidad de  $V$  y por la monotonía de  $V(\mathbf{x}(t))$ ,  $V$  es constante y igual a  $\ell$  sobre  $\omega(\mathbf{x}_0)$ . Sea  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ . Como  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es invariante, si  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$  tenemos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t + \tilde{t}) = \mathbf{y}(\tilde{t}) \in \omega(\mathbf{x}_0)$ , junto con la continuidad de  $V$  tenemos que

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t + \tilde{t})) = V(\mathbf{y}(\tilde{t})).$$

Esto nos dice que la trayectoria que pasa por  $\mathbf{y}$  permanece en  $\omega(\mathbf{x}_0)$  y por tanto  $t \mapsto V(\mathbf{y}(t))$  es constante (igual a  $\ell$ ). Pero entonces su derivada en cualquier punto de  $\omega(\mathbf{x}_0)$  debe ser cero:

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}_0).$$

Por la hipótesis de negatividad estricta de  $\dot{V}$  en  $G \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$ , la única posibilidad es que

$$\omega(\mathbf{x}_0) \subset \{\hat{\mathbf{x}}\}.$$

Dado que  $\omega(\mathbf{x}_0)$  no es vacío, se sigue  $\omega(\mathbf{x}_0) = \{\hat{\mathbf{x}}\}$ . En particular,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esto prueba la estabilidad asintótica de  $\hat{\mathbf{x}}$ .  $\square$

Decimos que una función  $V$  que satisface el teorema es una función de Lyapunov y definimos que un punto  $\mathbf{x}$  es **Lyapunov estable** si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\| < \delta$  entonces  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}\| < \epsilon$ .

Decimos que una función  $V : G \rightarrow \mathbb{R}$  es una **constante de movimiento** si es constante a lo largo de cualquier trayectoria, es decir, dada una trayectoria  $\mathbf{x}(t)$ , existirá una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que la órbita está contenida en  $\{(x, y) \in G : V(x, y) = c\}$ . Una vez hallada una constante de movimiento, el siguiente teorema nos provee información acerca de su comportamiento.

**Teorema 3.1.3. Teorema de Poincaré-Bendixson** Sea  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  una E.D.O. definida sobre un abierto  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $\omega(\mathbf{x})$  un conjunto no vacío y compacto de  $\omega$ -límites. Si  $\omega(\mathbf{x})$  no contiene un punto de equilibrio, entonces es una órbita periódica.

## Capítulo 4

# Dinámica poblacional y la ecuación del replicador

### 4.1. Ecuación del Replicador y Equilibrios de Nash

Hasta el momento todos los juegos que miramos transcurren entre una cantidad finita de jugadores, en situaciones donde cada uno elige una distribución sobre sus estrategias puras y juega una ronda con ello. En este capítulo, veremos cómo se utilizan los juegos normales para modelar frecuencias de estrategias en una población, y luego, como usar ecuaciones diferenciales ordinarias para modelar la evolución de las estas frecuencias a lo largo del tiempo.

Consideremos el caso de un juego simétrico  $(\mathcal{X}, u)$ , el escenario que nos planteamos es el siguiente: los miembros de una población eligen una estrategia pura y comienzan a jugar el juego simétrico definido por  $\mathcal{X}$  y  $u$  entre ellos. Para describir las elecciones de cada miembro de la población usaremos una distribución de estrategias (frecuencias) y supondremos que los miembros interactúan (juegan una ronda) al azar.

Nuevamente llamamos  $|\mathcal{X}| = n$ , por lo que la información relevante acerca de los pagos puede condensarse en la matriz de payoff  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Diremos que una fracción

$x_i$  de una población utiliza la estrategia pura  $e_i \in \mathcal{X}$ . Para cada estrategia, tendremos una fracción de la población que la utiliza, caracterizamos esta distribución de estrategias con un vector  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S_n$ , donde la  $i$ -ésima coordenada representa la proporción de nuestra población que utiliza la estrategia  $e_i \in \mathcal{X}$ . Luego, el payoff esperado para el sector de la población que utilice la estrategia  $e_i$  es

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_j a_{ij}x_j, \forall 1 \leq i \leq n,$$

donde  $a_{ij} := u(e_i, e_j)$  es el payoff que espera recibir un jugador que utiliza la estrategia  $e_i$  cuando se enfrenta a otro que juega con la estrategia  $e_j$ . Para ver el payoff esperado de una interacción al azar entre miembros cualesquiera de la población, nos basta con sumar los payoffs de cada estrategia  $e_i \in \mathcal{X}$  pesada por su frecuencia en la población (ver 2.2.1):

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_i x_i (A\mathbf{x})_i,$$

Está de más aclarar que la notación  $\mathbf{x} \in S_n$  para las frecuencias de cada estrategia es la misma que usamos para las estrategias mixtas en el capítulo uno. Sin embargo, lo que representa será fácilmente discernible según el contexto.

Asumimos que las poblaciones pueden evolucionar a lo largo del tiempo, pues, en base al rendimiento de cada estrategia, su frecuencia aumentará o disminuirá. En base a esto, introducimos la dependencia temporal  $\mathbf{x}(t)$ , y notamos  $\dot{x}_i(t)$  a la velocidad con la que cambia la frecuencia de la  $i$ -ésima estrategia,  $x_i$ . El modelo más simple para modelar el cambio de la  $i$ -ésima frecuencia es la **ecuación del replicador clásica**:

$$\dot{x}_i = x_i[(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A \mathbf{x}], \forall 1 \leq i \leq n. \quad (4.1.1)$$

Como se observa, esta ecuación relaciona la variación de la  $i$ -ésima estrategia con la diferencia entre su payoff y el payoff promedio de toda la población, responde a la intuición de que las estrategias más exitosas aumentarán su frecuencia y las menos exitosas la disminuirán.

Podemos ver que

$$\sum_i \dot{x}_i = \sum_i x_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}A\mathbf{x}] = \sum_i [x_i(A\mathbf{x})_i] - \mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$$

para cualquier  $\mathbf{x} \in S_n$ , por lo que la ecuación 4.1.1 resulta invariante sobre el simplex estándar  $S_n$ , es decir, si nuestro punto inicial se encuentra en  $S_n$ , todo el recorrido también estará en el conjunto. Además, como  $x_i(t_0) = 0$  implica que  $x_i(t) = 0, \forall t \geq t_0$ , la ecuación también resulta invariante sobre  $S_n(J) = \{x \in S_n : x_i = 0 \forall j \in J\}$  para cualquier  $J \subset \{1, \dots, n\}$ .

Para cualquier  $\mathbf{x} \in S_n$  sujeto a la ecuación del replicador tenemos la siguiente **regla del cociente** para cualquier  $j \in [n]$  tal que  $x_j > 0$ :

$$\frac{d}{dt} \ln(x_i) = \left( \frac{\dot{x}_i}{x_j} \right) = \left( \frac{x_i}{x_j} \right) ((A\mathbf{x})_i - (A\mathbf{x})_j). \quad (4.1.2)$$

Además observamos que los puntos de equilibrio de 4.1.1 en  $\text{int}(S_n)$  deberán cumplir

$$(Ax)_1 = \dots = (Ax)_n = xAx.$$

### Proposición 4.1.1.

1. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz de payoff de un juego simétrico: sumar una constante  $c \in \mathbb{R}$  todas las entradas de cualquier columna de  $A$  no afecta la ecuación del replicador asociada a la matriz en  $S_n$ .
2. Si  $P = \prod_i x_i^{\alpha_i}$  entonces

$$\dot{P} = P \sum_i \alpha_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A \mathbf{x}].$$

*Demostración.* Demostramos (i). Sea  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz tal que  $\text{Col}_j(C)$  es un vector de tamaño  $n$  cuyas coordenadas son todas de valor  $c_j \in \mathbb{R}$ . Definimos  $A' := A + C$  y demostramos que su ecuación del replicador asociada es igual a la de  $A$ .

El payoff promedio al usar la estrategia  $\mathbf{x}$  resulta

$$\mathbf{x}^T A' \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A + C) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T C \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \sum_i c_i x_i.$$

El payoff esperado para la  $i$ -ésima estrategia nos da

$$(A'\mathbf{x})_i = [(A + C)\mathbf{x}]_i = (A\mathbf{x})_i + \sum_j c_j x_j.$$

Luego tenemos que

$$x_i[(A'\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A'\mathbf{x}] = x_i[(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}].$$

□

En los siguientes capítulos nos referiremos al soporte de un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , en estos casos estaremos haciendo referencia al conjunto  $\text{sop}(\mathbf{x}) = \{i \in [n] : x_i \neq 0\}$ . Los **puntos de equilibrio** (rest points) de la ecuación del replicador son aquellos  $\mathbf{x} \in S_n$  para los cuales todos los valores de payoff  $(A\mathbf{x})_i$  son iguales para todo  $1 \leq i \leq n$  que cumpla  $x_i > 0$ . En particular, para un  $\mathbf{x} \in S_n$  que es punto de equilibrio, podemos ver fácilmente que si  $i \in \text{sop}(\mathbf{x})$  debe valer  $(A\mathbf{x})_i = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ,

$$x_i[(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}] = 0 \wedge x_i > 0 \implies (A\mathbf{x})_i = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.$$

Además mirando 4.1.1, resulta inmediato ver que todos los vértices  $e_i \in S_n$  son puntos de equilibrio.

De aquí en adelante usaremos las nociones de estabilidad y asintóticamente estable en referencia a la ecuación del replicador 4.1.1. Diremos que  $\hat{\mathbf{x}}$  es **globalmente estable** si es estable y  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  para cualquier  $\mathbf{x} \in S_n$  que tenga el mismo soporte que  $\hat{\mathbf{x}}$ .

En el contexto de la dinámica poblacional, decimos que  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es **equilibrio de Nash** (N.E.) si:

$$\mathbf{x}^T A\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} A\hat{\mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in S_n, \quad (4.1.3)$$

para cualquier  $\mathbf{y} \in S_n$  y diremos que  $\mathbf{x} \in S_n$  es un **estrategia evolutivamente estable** (ESS) si cumple

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} A\mathbf{x}, \quad (4.1.4)$$

para cualquier  $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$  en un entorno de  $\hat{\mathbf{x}}$ .

**Teorema 4.1.2 (Teorema folk de la teoría de juegos evolutiva).** [4] Para la dinámica de replicador clásica 4.1.1 valen los siguientes resultados (llamamos  $A$  a la matriz de pagos):

1. Si un punto  $\mathbf{x} \in S_n$  es N.E., entonces es un punto de equilibrio.
2. Si  $\hat{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio y el límite de una órbita  $\mathbf{x}(t)$  en  $\text{int } S_n$ , entonces es N.E.
3. Si  $\mathbf{x}$  es un punto de equilibrio estable, entonces es N.E.

*Demostración.* 1.) Al ser  $\mathbf{x}$  N.E., tomando  $\mathbf{y} = e_i$  en 4.1.3 tenemos que

$$(A\mathbf{x})_i \leq \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Para ver que  $\mathbf{x}$  es punto de equilibrio, nos basta con ver la desigualdad inversa para  $i \in \text{sop}(\mathbf{x})$ , pues tomando

$$J := \{i \in [n] : x_i = 0\} = [n] \setminus \text{sop}(\mathbf{x}),$$

está claro que, para todo  $i \in J$ , la ecuación del replicador

$$\dot{x}_i = x_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}],$$

es nula. Para los  $i \in \text{sop}(\mathbf{x})$ , por 2.1.1 tenemos que  $e_i \in BR(\mathbf{x})$ , por lo que

$$(A\mathbf{x})_k \leq (A\mathbf{x})_i, \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

entonces tenemos que

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k (A\mathbf{x})_k = \sum_{k \in \text{sop}(\mathbf{x})} x_k (A\mathbf{x})_k \leq \sum_{k \in \text{sop}(\mathbf{x})} x_k (A\mathbf{x})_i = (A\mathbf{x})_i.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq (A\mathbf{x})_i \quad \forall i \in \text{sop}(\mathbf{x}),$$

y finalmente obtenemos

$$\dot{x}_i = x_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}] = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

2.) Sea  $\mathbf{x}(t)$  una trayectoria en el interior de  $S_n$  tal que  $\hat{\mathbf{x}} \in \omega(\mathbf{x})$ . Sabemos que existe una sucesión  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_k \rightarrow +\infty$  y  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ . Supongamos que  $\hat{\mathbf{x}}$  no es N.E., entonces existe  $\mathbf{y} \in S_n$  tal que

$$\hat{\mathbf{x}}^T A \hat{\mathbf{x}} < \mathbf{y}^T A \hat{\mathbf{x}},$$

entonces debe existir al menos una estrategia pura  $1 \leq i \leq n$  tal que

$$\hat{\mathbf{x}}^T A \hat{\mathbf{x}} < (A \hat{\mathbf{x}})_i.$$

Veamos esto rápidamente: supongamos que no existe tal  $i$ , entonces

$$\mathbf{y}^T A \hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^n y_k (A \hat{\mathbf{x}})_k \leq \sum_{k=1}^n y_k (\hat{\mathbf{x}} A \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}} A \hat{\mathbf{x}},$$

lo cual contradice nuestra suposición inicial. Luego tenemos que

$$(A \hat{\mathbf{x}})_i - \hat{\mathbf{x}}^T A \hat{\mathbf{x}} > (A \hat{\mathbf{x}})_i - \mathbf{y}^T A \hat{\mathbf{x}} > 0.$$

Como  $\mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{x}}$  podemos tomar un  $\epsilon > 0$  y un  $t_0 > 0$  tal que

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = (A \mathbf{x}(t))_i - \mathbf{x}(t)^T A \mathbf{x}(t) > \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

en donde el cociente está bien definido pues  $\mathbf{x}(t) \in \text{int}(S_n)$ . Luego, tenemos

$$\ln(x_i(t)) > \epsilon, \quad \forall k \geq K.$$

Entonces

$$x_i(t) > e^t \cdot c \quad \forall k \geq K, \quad \text{con } c > 0,$$

lo cual es absurdo pues  $0 < x_i(t) < 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

3) Supongamos que  $\mathbf{x}$  no es N.E., entonces existe  $\mathbf{y} \in S_n$  tal que

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < \mathbf{y}^T A \mathbf{x}.$$

Por lo visto en 2.), existe  $1 \leq i \leq n$  tal que

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < \mathbf{e}_i^T A \mathbf{x},$$



se sigue que

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } (A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > \epsilon.$$

También sabemos que  $i \notin \text{sop}(\mathbf{x})$ , pues de lo contrario habría una contradicción inmediata al ser  $\mathbf{x}$  punto de equilibrio.

Por la continuidad de la función

$$f(\mathbf{z}) := (A\mathbf{z})_i - \mathbf{z}^T A\mathbf{z},$$

existe un entorno  $U$  de  $\mathbf{x}$  tal que, si  $\mathbf{z} \in U$ , entonces  $f(\mathbf{z}) > \epsilon$ . A su vez, por la estabilidad de  $\mathbf{x}$ , existe un entorno  $V$  de  $\mathbf{x}$  tal que, si  $\mathbf{x}(0) \in V$ , entonces

$$\mathbf{x}(t) \in U, \quad \forall t \geq 0.$$

Luego, tomando  $\mathbf{z} \in V$  tal que  $i \in \text{sop}(\mathbf{z})$  tenemos que

$$\frac{\dot{z}_i}{z_i} = (A\mathbf{z})_i - \mathbf{z}^T A\mathbf{z} = f(\mathbf{z}) > \epsilon.$$

Usando que

$$\frac{d}{dt} \ln(x_i) = \frac{\dot{x}_i}{x_i},$$

podemos ver de forma análoga al ítem anterior que esto implica

$$z_i(t) > e^{\epsilon t} \cdot c, \text{ con } c > 0,$$

lo cual contradice la estabilidad.

□

**Teorema 4.1.3.** [4] Sea  $A$  la matriz de pagos de un juego simétrico y sea  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  un estado evolutivamente estable (ESS). Entonces  $\hat{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de la dinámica replicadora 4.1.1 restringida a la cara minimal del simplex que contiene a  $\hat{\mathbf{x}}$ , es decir,

$$C_{\hat{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{x} \in S_n : \text{sop}(\mathbf{x}) \subset \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})\}.$$

En particular, si  $\hat{\mathbf{x}} \in \text{int}(S_n)$ , entonces  $\hat{\mathbf{x}}$  es asintóticamente estable en todo  $\text{int}(S_n)$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>En algunas fuentes, este teorema se encuentra entre los resultados del Teorema Folk

*Demostración.* Tomando las convenciones  $0 \cdot \ln(0) = 0 \cdot \ln(\infty) = 0$  definimos

$$V(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \ln \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \quad \mathbf{x} \in S_n,$$

Veamos que  $V$  cumple las condiciones de 3.1.2 en la cara sobre la que se encuentra  $\hat{\mathbf{x}}$ . Es inmediato que  $V(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ . Si  $\mathbf{x} \in \text{int}(C_{\hat{\mathbf{x}}})$ , entonces necesariamente  $\text{sop}(\mathbf{x}) = \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})$ , adicionalmente, al estar en el caso del replicador clásico 4.1.1, usando la regla del cociente tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i \in \text{sop}(\mathbf{x})} \hat{x}_i [\ln(\hat{x}_i) - \ln(x_i)] \right) \\ &= - \sum_{i \in \text{sop}(\mathbf{x})} \hat{x}_i \frac{d}{dt} [\ln(x_i)] \\ &= - \sum_{i \in \text{sop}(\mathbf{x})} \hat{x}_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}] \\ &= - \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}] \\ &= - \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i (A\mathbf{x})_i + \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i (\mathbf{x}^T A\mathbf{x}) \\ &= -\hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Al ser  $\hat{\mathbf{x}}$  evolutivamente estable, por 2.3.2 tenemos que existe un entorno de  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $G \subset S_n$ , tal que

$$\hat{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} > \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in G \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}, \quad (4.1.5)$$

por lo que  $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) < 0$  para cualquier  $\mathbf{x} \in G \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$  que esté en el interior de la cara  $C_{\hat{\mathbf{x}}}$ . Definimos  $G' := G \cap \text{int}(S_n)$ , hasta ahora hemos visto que  $V(\hat{\mathbf{x}}) = 0$  y que  $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in G' \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$ . Veamos que  $V(\mathbf{x}) > 0$  para cualquier  $\mathbf{x} \in G'$ .

Reescribimos  $V(\mathbf{x}) = - \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \ln \left( \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right)$ . Aplicando la desigualdad de Jensen a la función cóncava  $\ln(z)$ , tenemos que

$$\sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \ln \left( \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) \leq \ln \left( \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right).$$

Desarrollando el término dentro del logaritmo del lado derecho:

$$\sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \frac{x_i}{\hat{x}_i} = \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} x_i.$$

Dado que estamos restringidos a la cara minimal  $C_{\hat{\mathbf{x}}}$ , sabemos que  $\text{sop}(\mathbf{x}) \subset \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})$ , y como  $\mathbf{x} \in S_n$ , se cumple que  $\sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} x_i = 1$ . Por lo tanto:

$$\sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \ln \left( \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) \leq \ln(1) = 0.$$

Multiplicando por  $-1$  obtenemos

$$V(\mathbf{x}) = - \sum_{i \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})} \hat{x}_i \ln \left( \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) \geq 0.$$

Debido a la concavidad estricta del logaritmo, la igualdad a cero se alcanza si y solo si la razón  $\frac{x_i}{\hat{x}_i} = \frac{x_j}{\hat{x}_j}$  para cualquier  $i, j \in \text{sop}(\hat{\mathbf{x}})$ , es decir, en el caso  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ . Por lo tanto, tenemos que  $V(\hat{\mathbf{x}}) = 0$  y, para todo  $\mathbf{x} \in G' \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$ , se cumple que

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) < 0.$$

Finalmente, se concluye por 3.1.2 □

## 4.2. Promedios Temporales

Dada una órbita  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación del replicador, definimos el promedio temporal de la siguiente manera:

$$z_i(T) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt. \quad (4.2.1)$$

A continuación veremos algunos resultados importantes que lo relacionan con los puntos de equilibrio de 4.1.1.

**Teorema 4.2.1.** [4] Si existe una órbita  $\mathbf{x}(t)$  que permanece separada una cierta distancia de la frontera a lo largo de todo su recorrido, entonces existe un punto de equilibrio en  $\text{int}(S_n)$ .

*Demostración.* Como  $\mathbf{x}(t)$  permanece separada de la frontera, existe  $a > 0$  tal que  $x_i(t) > a$  para todo  $t \geq 0$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$ . Entonces tenemos que

$$\ln(\dot{x}_i) = \frac{\dot{x}_i}{x_i} = (A\mathbf{x}(t))_i - \mathbf{x}(t)A\mathbf{x}(t), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall t \geq 0,$$

por lo que integrando entre 0 y  $T$  de ambos lados y dividiendo por  $T$  obtenemos

$$\frac{\ln(x_i(T)) - \ln(x_i(0))}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T [(A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}].dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j(T) - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.dt.$$

Como  $a \leq x_i(T) < 1$ , el lado izquierdo converge a cero a medida que  $T \rightarrow +\infty$ , por lo que nos queda

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j(T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T A\mathbf{x}.dt.$$

Adicionalmente, tenemos que

$$z_i(T) = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t)dt \geq a > 0, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Como  $S_n$  es compacto, existe un punto de acumulación de  $\{(z_1(T), \dots, z_n(T))\}_{T \geq 0}$  en el simplex. De esta forma, existen  $\{T_k\}_{k \geq 1} \subset [0, +\infty)$  y  $z \in S_n$  tal que  $T_k \rightarrow +\infty$  y

$$z_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} x_i(t)dt,$$

$$(Az)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \mathbf{x}(t_k)^T A\mathbf{x}(t_k).dt,$$

$$z_i \geq a, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Entonces,  $z \in \text{int}(S_n)$  y cumple que

$$(Az)_1 = \dots = (Az)_n \tag{4.2.2}$$

por lo que  $z$  debe ser punto de equilibrio interior de la ecuación del replicador. □

**Teorema 4.2.2.** [4] Si la ecuación 4.1.1 admite un único punto de equilibrio  $\mathbf{z} \in S_n$  y la trayectoria de  $\mathbf{x}(t)$  es tal que su  $\omega$ -límite está en  $\text{int}(S_n)$ , entonces su promedio temporal converge al punto de equilibrio, es decir

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t)dt = z_i, \forall 1 \leq i \leq n. \tag{4.2.3}$$

*Demostración.* Sea  $\{\mathbf{z}(T_n)\}_{n \geq 1}$  una subsucesión de 4.2.1 definida coordinada a coordinada para el recorrido de  $\mathbf{x}(t)$ , es decir

$$z_i(T_n) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} x_i(t) dt, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Como  $\{\mathbf{z}(T_n)\}_{n \geq 0} \subset S_n$ , existe una subsucesión  $\{\mathbf{z}(T_{n_k})\}_{k \geq 0} \subset S_n$  que converge a un  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$ . Como vimos en 4.2.1, al ser  $\hat{\mathbf{x}}$  límite de promedios temporales tenemos

$$\hat{\mathbf{x}} A \hat{\mathbf{x}} = (A \hat{\mathbf{x}})_i, \forall i \in \text{sup}(\hat{\mathbf{x}}),$$

por lo que  $\hat{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio de la ecuación del replicador. Luego,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{z}$ . Hemos demostrado que para cualquier subsucesión de  $\{\mathbf{z}(t)\}_{t \geq 0}$  existe una subsubsucesión que converge a  $\mathbf{z}$ , lo cual demuestra el resultado. □

**Teorema 4.2.3.** [4] Si no hay ningún punto de equilibrio en  $\text{int}(S_n)$  entonces toda órbita debe converger al borde de  $S_n$ .

*Demostración.* Supongamos que hay una órbita  $\mathbf{x}(t)$  que no converge al borde del simplex. Entonces, existe una sucesión  $\{t_k\}_{k \geq 1}$  y un  $\epsilon > 0$  tal que

$$d(\mathbf{x}(t_k), \partial S_n) \geq \epsilon \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, existe una trayectoria que permanece separada al menos  $\epsilon$  de la frontera del simplex a lo largo de todo su recorrido. Entonces por 4.2.1 debe existir una N.E. en el interior del simplex, absurdo. □

### 4.3. Juegos con pagos no lineales

Hasta ahora hemos trabajado con juegos en donde el payoff de la  $i$ -ésima estrategia está dado por la función  $(A\mathbf{x})_i$ , sin embargo existen muchos casos en donde el pago (también llamado fitness en algunos casos) de la  $i$ -ésima estrategia está dado por una función no lineal  $a_i(\mathbf{x}) : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Aquí, una población que tiene una

distribución de frecuencias  $\mathbf{x} \in S_n$  tendrá un payoff esperado de

$$\bar{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}),$$

donde tomamos

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})).$$

Esto nos permite escribir una ecuación del replicador generalizada de la forma:

$$\dot{x}_i = x_i(a_i(\mathbf{x}) - \bar{a}(\mathbf{x})), \forall 1 \leq i \leq n, \quad (4.3.1)$$

la cual, en el caso en que  $a_i(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})_i$  para  $i = 1, \dots, n$  se reduce a 4.1.1.

Al igual que antes, suponemos estar trabajando en el simplex estandar  $S_n$ . Si nuestro punto inicial se encuentra en este conjunto, la trayectoria resultante de 4.3.1 permanece en el mismo. Tomando  $S = \sum_{i=1}^n x_i$  se satisface:

$$\dot{S} = \sum x_i [a_i(\mathbf{x}) - \bar{a}(\mathbf{x})] = \bar{a}(\mathbf{x}) \left[ \sum x_i \frac{a_i(\mathbf{x})}{\bar{a}(\mathbf{x})} - S \right] = \bar{a}(\mathbf{x})(1 - S),$$

por lo que  $S = 1$  resulta invariante. En el caso del replicador clásico 4.1.1 vimos que sumarle constantes a cada columna de nuestra matriz  $A$  no afecta la ecuación del replicador, en el caso no lineal, tenemos una propiedad análoga.

**Proposición 4.3.1.** La suma de una función  $\psi(\mathbf{x})$  a todas las  $a_i(\mathbf{x})$  no afecta la dinámica del replicador 4.3.1.

*Demostración.* Definimos  $g_i(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})$ . Luego  $\bar{g}(\mathbf{x}) = \sum x_i g_i(\mathbf{x}) = \bar{a}(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})$ , luego tenemos que  $g_i(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}) - \bar{a}(\mathbf{x})$   $\square$

La teoría de la estabilidad evolutiva también puede extenderse al caso genérico. Decimos que  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es localmente evolutivamente estable si  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) > \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})$  para cualquier  $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$  en un entorno de  $\hat{\mathbf{x}}$ . Adicionalmente, tenemos un análogo a las condiciones de equilibrio y estabilidad vistas en el primer capítulo.

**Proposición 4.3.2.** Un estado  $\hat{\mathbf{x}} \in S_n$  es *localmente evolutivamente estable* si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\hat{\mathbf{x}} \cdot f(\hat{\mathbf{x}}) \geq \mathbf{x} \cdot f(\hat{\mathbf{x}})$ .
2. Si en (1) se cumple la igualdad y  $\mathbf{x}$  está lo suficientemente cerca de  $\hat{\mathbf{x}}$ , entonces

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot f(\hat{\mathbf{x}}) > \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{x}).$$

## 4.4. Dinámicas de Imitación

Las dinámicas de imitación plantean una dinámica en la que, de forma ocasional y al azar, los jugadores “observan” la estrategia de otro jugador, y en base a un criterio establecido, adoptan o no la estrategia de su rival con cierta probabilidad. La probabilidad con la que un jugador adoptará o no la estrategia de su rival dependerá de la diferencia entre los pagos de cada estrategia y su frecuencia actual. Definido de forma más rigurosa, la dinámica de imitación es una trayectoria que evoluciona según el siguiente sistema

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n [f_{ij}(x) - f_{ji}(x)] x_j, \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (4.4.1)$$

en donde  $f_{ij}$  es la frecuencia con la que el jugador que utiliza la estrategia  $j$  adopta la estrategia  $i$ . Asumimos que la función  $f_{ij}$  depende de los pagos de  $i$  y  $j$ , y que además existe  $f(u, v)$  tal que:

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = f(a_i(\mathbf{x}), a_j(\mathbf{x})).$$

Llamamos a  $f(u, v)$  la “regla de imitación” (que será la misma para todos los jugadores). Un ejemplo simple de una regla de imitación es imitar la mejor estrategia, en cual caso tenemos

$$f(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < v, \\ 1 & \text{si } u > v. \end{cases}$$

En general se suele agregar la suposición de que la regla de imitación es de la forma  $f(u, v) = \phi(u - v)$  donde  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una función creciente (en este trabajo también lo supondremos), esto nos permite escribir las probabilidades de transición de la forma

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \phi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})). \quad (4.4.2)$$

En el que caso de una regla de imitación genérica como en (4.4.2) podemos definir

$$\psi(u) := \phi(u) - \phi(-u),$$

y podemos reescribir 4.4.1 como

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j \psi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) x_j. \quad (4.4.3)$$



# Capítulo 5

## Ejemplos y Caracterizaciones de Juegos Normales

### 5.1. Dinámica de replicador clásico unidimensional

En el primer capítulo, nombramos el juego de halcones y palomas como un ejemplo clásico en  $n = 2$ , y miramos su matriz de payoff en 2.5.1. En esta sección nos interesa analizar qué sucede cuando miramos la ecuación del replicador asociada a este juego: usando 4.1.1, podemos restarle  $\frac{G-C}{2}$  a los elementos de la primera columna y  $\frac{G}{2}$  a los elementos de la segunda columna, obteniendo una matriz con una ecuación del replicador idéntica (sobre  $S_n$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{G}{2} \\ \frac{C-G}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Más allá de nuestro análisis del juego de halcones y palomas, es fácil ver que este razonamiento puede extenderse a cualquier juego unidimensional. Tomando la matriz de payoff  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , basta con restarle  $a_{11}$  a los elementos de la primera

columna y  $a_{22}$  a los elementos de la segunda columna para obtener una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1.2)$$

la cual, por 4.1.1, comparte la misma ecuación del replicador con la matriz de payoff original  $A$ . Además, como la evolución de la ecuación transcurre en  $S_2$ , nos basta con conocer  $x_1$  para caracterizar el estado del juego, pues necesariamente  $x_2 = 1 - x_1$ . Para facilitar la notación, en el contexto del juegos de dos dimensiones llamamos  $x$  a  $x_1$  y  $1 - x$  a  $x_2$ . A de esto, podemos dar la siguiente escritura genérica para la ecuación del replicador de un juego de dimensión dos,

$$\dot{x} = x [(Ax)_1 - x \cdot Ax] = x [(Ax)_1 - (x(Ax)_1 + (1-x)(Ax)_2)],$$

simplificando nos queda,

$$\dot{x} = x(1-x) [(Ax)_1 - (Ax)_2] = x(1-x) [a - (a+b)x]. \quad (5.1.3)$$

El lado derecho de nuestra ecuación diferencial es un producto de tres factores: el primero se anula en 0, el segundo en 1; el tercer factor tiene una raíz  $\hat{x} = \frac{a}{a+b}$  en  $(0, 1)$  si y solo si  $ab > 0$ . Así, obtenemos tres casos posibles:

1. No hay punto de reposo en el interior del espacio de estados. Esto ocurre si y sólo si  $ab \leq 0$ . En este caso,  $\dot{x}$  tiene siempre el mismo signo en  $(0, 1)$ . Esto puede verse fácilmente reescribiendo 5.1.3 como  $\dot{x} = x(1-x)[a(1-x) - bx]$ . Si  $a \geq 0$  y  $b \leq 0$  con al menos una desigualdad estricta, entonces  $\dot{x} > 0$ . Esto significa que  $x(t) \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  para cualquier valor inicial,  $\mathbf{x}$  ya que la trayectoria resultante es una secuencia estrictamente creciente en un compacto con máximo 1.

Por el contrario, si  $a \leq 0$  y  $b \geq 0$  con al menos una desigualdad estricta, el signo de  $\dot{x}$  será negativo, por lo que  $x(t) \rightarrow 0$  y  $e_2$  domina. En cada caso, la estrategia dominante converge hacia la fijación.

2. Existe un punto de equilibrio, es decir,  $ab > 0$ , y tanto  $a$  como  $b$  son negativos. Sabemos que  $\dot{x} = x(1-x)[a(1-x) - bx]$  tiene una única raíz en  $(0, 1)$  que se ubica en  $\hat{x} = \frac{a}{a+b}$ , si tomamos un número  $\hat{x} < x < 1$  entonces  $0 = a(1-\hat{x}) - b\hat{x} < a(1-x) - bx$ ,

y por ende  $\dot{x} > 0$ . Esto nos dice que la trayectoria para cualquier dato inicial  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  con  $\hat{x} < x < 1$  necesariamente cumple que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 1$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ , es decir, se aleja del punto de equilibrio.

Análogamente, se puede comprobar que para cualquier  $0 < x < \hat{x}$  la trayectoria con dato inicial  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  cumple  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ .

**3.** Existe un punto de equilibrio, es decir,  $ab > 0$ , y tanto  $a$  como  $b$  son positivos. Similarmente al caso anterior, sabemos que  $\hat{x} = \frac{a}{a+b}$  es la única raíz en el intervalo  $(0, 1)$  para  $\dot{x} = x(1 - x)[a(1 - x) - bx]$ . En este caso, para cualquier  $\hat{x} < x < 1$  tendremos que  $\dot{x} < 0$ , es decir,  $x(t) \rightarrow \hat{x}$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ , análogamente para cualquier  $0 < x < \hat{x}$  tendremos que  $\dot{x} > 0$ , por lo que la trayectoria también deberá converger a  $\hat{x}$ .

Habiendo visto la clasificación de juegos de dos dimensiones, es fácil ver que pasa en el juego 2.5.1. Como mencionamos en el primer capítulo, siempre asumimos que  $C$  (el costo de pelearse) es mayor a  $G$  (la recompensa de ganar la pelea) y que ambos son mayores a cero, por lo que es un juego donde existe un punto de equilibrio  $\frac{G}{C}$ . Además, para cualquier punto inicial  $\mathbf{x}$  en el interior de  $S_2$  tenemos que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow (\frac{G}{C}, \frac{C-G}{C})$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ .

## 5.2. Dinámicas de replicador generalizadas

En el caso no lineal no hay una clasificación tan simple, sin embargo sigue siendo posible reducir el problema a la resolución de una E.D.O en  $\mathbb{R}$ . Tenemos dos funciones de payoff,  $a_1$  y  $a_2$ , por lo que  $\bar{a}(\mathbf{x}) = x_1 a_1(\mathbf{x}) + x_2 a_2(\mathbf{x})$  y tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 [f_1(\mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{x})], \\ \dot{x}_2 = x_2 [f_2(\mathbf{x}) - \bar{f}(\mathbf{x})]. \end{cases}$$

Nuevamente tomamos  $x_1 = x$  y  $x_2 = 1 - x$ , reemplazando estos valores en la primera ecuación del sistema obtenemos:

$$\dot{x} = x(1 - x)[a_1(x, 1 - x) - a_2(x, 1 - x)]. \quad (5.2.1)$$

**Ejemplo: Regla de imitación de Fermi** La regla de imitación de Fermi se refiere a una dinámica de imitación en la que tenemos una regla de imitación sigmoideal de intensidad  $\beta > 0$ , es decir

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}}.$$

Si llamamos  $a_i(\mathbf{x})$  al payoff esperado para la  $i$ -ésima estrategia en una población con frecuencias  $\mathbf{x} \in S_n$  nuestra regla de imitación (como en 4.4.2) será

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \phi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x}))}}. \quad (5.2.2)$$

donde  $\beta$  actúa como un coeficiente de intensidad de cambio. Miramos en mayor detalle el caso en el que  $a_i(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})_i$  para alguna matriz de payoff  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , en particular, observaremos el caso  $n = 2$  con  $\beta = 1$  y deducimos su equilibrio de Nash. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \cdot x_2 \left[ \frac{1}{1 + e^{-((Ax)_1 - (Ax)_2)}} - \frac{1}{1 + e^{(Ax)_1 - (Ax)_2}} \right], \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cdot x_2 \left[ \frac{1}{1 + e^{-((Ax)_2 - (Ax)_1)}} - \frac{1}{1 + e^{(Ax)_2 - (Ax)_1}} \right]. \end{aligned}$$

Tomaremos  $A$  como en 5.1.2, con  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Realizamos el remplazo  $x_2 = x$ ,  $x_1 = 1 - x$

De esta forma  $(Ax)_1 = a \cdot (1 - x)$  y  $(Ax)_2 = bx$ . Al igual que en el replicador clásico tomamos  $x = x_1$  y  $x_2 = 1 - x$  para obtener una sola ecuación

$$\dot{x} = x(1 - x) \left[ \frac{1}{1 + e^{-ax - b(1-x)}} - \frac{1}{1 + e^{ax - b(1-x)}} \right]. \quad (5.2.3)$$

Luego, para encontrar el equilibrio de Nash interior(en caso de que exista) nos basta con resolver

$$\frac{1}{1 + e^{-ax + b(1-x)}} - \frac{1}{1 + e^{ax - b(1-x)}} = 0,$$

despejando podemos ver que si existe un equilibrio de Nash interior es de la forma  $x = \frac{b}{a+b}$  (decimos esto coloquialmente, el verdadero es  $(\frac{a}{b+b}, \frac{b}{a+b})$ ). La condición de existencia es que  $\frac{b}{a+b} \in (0, 1)$ , equivalentemente debe valer que, o bien  $a, b > 0$ , o bien  $a, b < 0$ .

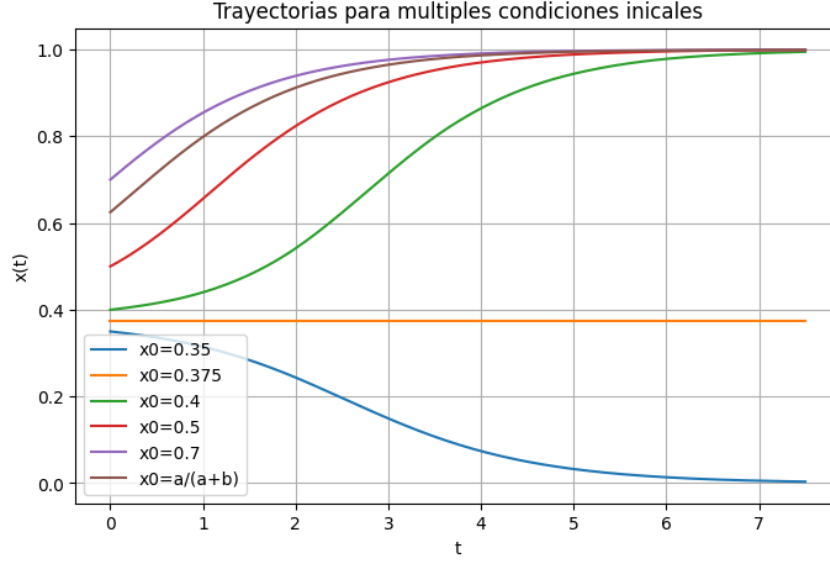


Figura 5.1: Evolución de una dinámica de imitación de Fermi en  $n = 2$  con  $a = 5$  y  $b = 3$

**Ejemplo: Imitar al mejor** En este caso nos mantenemos en el mismo tipo de dinámica que en el ejemplo anterior;  $a_i(\mathbf{x}) = (Ax)_i \forall 1 \leq i \leq n$  para alguna matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sin embargo, cambiamos nuestra regla de imitación, en este caso tomamos  $\phi(x) = 1_{(0,+\infty)}(x)$  por lo que obtenemos

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \phi(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) \begin{cases} 0 & \text{si } a_i(\mathbf{x}) \leq a_j(\mathbf{x}), \\ 1 & \text{si } a_i(\mathbf{x}) > a_j(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (5.2.4)$$

en la dinámica de imitación en cuestión cuando un jugador compara su estrategia actual con la de otro sector de la población, si esta es mejor que la suya, la adopta con probabilidad uno. Siempre se imita al mejor. En este caso, sustituyendo en 4.4.1, la expresión general de cada derivada nos queda

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n x_j \left[ \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(a_i(\mathbf{x}) - a_j(\mathbf{x})) - \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(a_j(\mathbf{x}) - a_i(\mathbf{x})) \right], \quad (5.2.5)$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Cuando incorporamos, miramos la dinámica en el caso de los payoffs del replicador clásico, es decir,  $a_i(\mathbf{x}) = (Ax)_i$ , obtenemos

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n x_j \left[ \mathbf{1}_{(0,+\infty)}((Ax)_i - (Ax)_j) - \mathbf{1}_{(0,+\infty)}((Ax)_j - (Ax)_i) \right], \quad (5.2.6)$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ .

En ambas instancias podemos, observar que si  $\mathbf{x} \in S_n$  es equilibrio de Nash de la ecuación del replicador clásica, entonces también es equilibrio de Nash de esta dinámica de imitación. Para finalizar el ejemplo miramos las trayectorias de un ejemplo puntual en  $n = 3$ , tomamos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (5.2.7)$$

de forma tal que  $a_i(\mathbf{x}) = (Ax)_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . A continuación mostramos algunas trayectorias en el hiperplano que contiene a  $S_3$ .

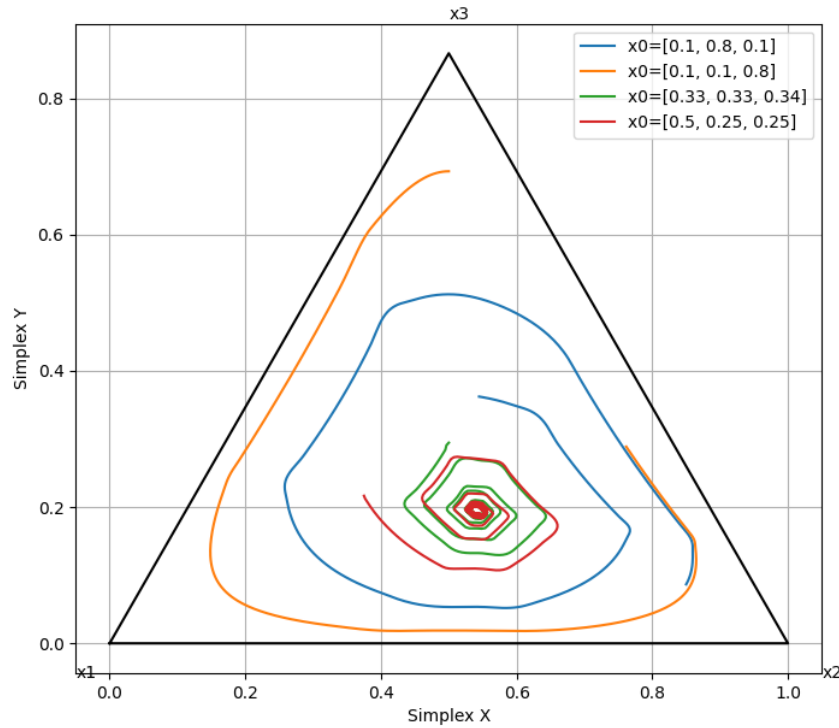


Figura 5.2: Evolución de una dinámica de imitación con matriz de pagos 5.2.7 y dinámica 5.2.6

## Capítulo 6

# SINDy: Identificación Esparsa de Sistemas Dinámicos no Lineales

### 6.1. Introducción a SINDy

La Identificación Dispersa de Sistemas Dinámicos No Lineales es un método de machine learning basado en la regresión que se usa para descubrir ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas (que no dependen explícitamente de  $t$ ) a partir de datos empíricos de su evolución a lo largo del tiempo (ver [6]). Supongamos que tenemos un conjunto de mediciones  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  de algún sistema dinámico en distintos momentos. SINDy busca una  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de forma tal que la evolución de  $\mathbf{x}(t)$  pueda ser representada a través de una ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)),$$

El vector  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  representa el estado del sistema físico en el tiempo  $t$  y la función  $f(\mathbf{x})$  restringe cómo evoluciona el sistema en el tiempo. La suposición principal detrás de SINDy es que dado un conjunto de funciones apropiadas  $\Theta(\mathbf{x}) = \{\theta_1(\mathbf{x}), \dots, \theta_l(\mathbf{x})\}$ , podremos obtener una aproximación de  $f(\mathbf{x})$  que sea una combinación lineal de  $\Theta(\mathbf{x})$  con relativamente pocos términos no nulos. En estos casos, decimos que la función  $f(\mathbf{x})$  es esparsa en el espacio de funciones apropiado.

Para aplicar SINDy en la práctica, se necesita un conjunto de datos de mediciones recogidos en los instantes  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , y las derivadas temporales de estas mediciones (ya sean dato o aproximaciones numéricas). Estos datos se agrupan en las matrices  $X$  y  $\dot{X}$ , respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \cdots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \cdots & x_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \cdots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \cdots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dot{x}_2(t_m) & \cdots & \dot{x}_n(t_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

A continuación, se forma una matriz  $\Theta(X)$ , cuyas columnas consisten de las funciones que elegimos como  $\Theta(\mathbf{x})$  aplicadas sobre los datos de las trayectorias:

$$\Theta(X) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \theta_1(X) & \theta_2(X) & \dots & \theta_\ell(X) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}. \quad (6.1.1)$$

Por ejemplo, si  $\Theta(x) = \{\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_\ell(x)\}$  son monomios de grado 2 en  $\mathbb{R}^n$  tendríamos

$$\Theta(X) = \begin{bmatrix} x_1(t_1)^2 & x_1(t_1)x_2(t_1) & \dots & x_n(t_1)^2 \\ | & | & & | \\ x_1(t_m)^2 & x_1(t_m)x_2(t_m) & \dots & x_n(t_m)^2 \end{bmatrix}.$$

Nuestra incógnita en este caso es un conjunto de vectores de coeficientes dispersos (agrupados en una matriz)

$$\Xi = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

El vector  $\xi_i$  proporciona los coeficientes para una combinación lineal de funciones base  $\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_\ell(x)$  que representan la  $i$ -ésima función componente de  $f$ ,  $f_i(x)$ . De forma tal que

$$f_i(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_\ell(x)) \xi_i.$$



Con cada uno de los objetos  $X$ ,  $\dot{X}$ ,  $\Theta(X)$  y  $\Xi$  definidos, podemos escribir el problema de aproximación subyacente de SINDy:

$$\dot{X} = \Theta(X)\Xi. \quad (6.1.2)$$

Típicamente en la práctica no contamos con los datos de la matriz  $\dot{X}$ , por lo que debemos utilizar una aproximación numérica. Adicionalmente, los datos que contiene  $X$  pueden estar contaminados con ruido, por lo que la ecuación que buscamos resolver en la práctica es de la forma:

$$\dot{X} = \Theta(X)\Xi + \eta Z, \quad (6.1.3)$$

donde  $Z$  es una matriz con entradas gaussianas independientes e idénticamente distribuidas con media cero, y  $\eta$  es la magnitud del ruido. Así, buscamos una solución dispersa para un sistema sobre determinado con ruido. El método LASSO clásico funciona bien con este tipo de datos, proporcionando una regresión dispersa, sin embargo, puede resultar computacionalmente costoso para conjuntos de datos muy grandes.

Una alternativa es implementar el algoritmo de mínimos cuadrados secuenciales con umbral. Lo introducimos coloquialmente y lo formalizamos mas adelante en el Algoritmo 1. En este algoritmo, se comienza con una solución de mínimos cuadrados para 6.1.2 y luego se eliminan (mediante un umbral) todos los coeficientes que sean menores que un cierto valor de corte  $\lambda$ . Una vez que se identifican los índices de los coeficientes distintos de cero que quedan, se obtiene otra solución de mínimos cuadrados para  $\Xi$  restringida a esos índices.

Estos nuevos coeficientes se vuelven a umbralar utilizando  $\lambda$ , y el procedimiento se repite hasta que los coeficientes distintos de cero convergen. Este algoritmo es computacionalmente eficiente y converge rápidamente a una solución dispersa en pocas iteraciones. El algoritmo también se beneficia de su simplicidad, ya que solo requiere un único parámetro  $\lambda$  para determinar el grado de dispersión en  $\Xi$ .

## 6.2. Algoritmo SINDy

En esta sección definiremos formalmente el algoritmo de SINDy y exponemos algunos resultados de [8], particularmente los que se refieren a la convergencia del problema original de SINDy planteado en [6]. Desarrollamos en mas detalle el algoritmo STLSQ (Sequentially Thresholded Least Squares) que usa PySINDy en su implementación y además mostramos la relación entre el resultado producido por el algoritmo y la solución(es) de 6.1.2. Para comenzar, definimos el valor que tomaremos como la norma cero de un vector a

$$\|x\|_0 := \text{card}(\text{supp}(x)) = \sum_j |x_j|^0 \text{ donde } |x_j|^0 = \begin{cases} 0 & \text{if } x_j = 0, \\ 1 & \text{if } x_j \neq 0, \end{cases}$$

la cual nos será útil a la hora de definir la función minimizar. Dado un conjunto  $S \subset [n]$  definimos  $x_S \in \mathbb{R}^n$  de forma tal que

$$(x_S)_j = \begin{cases} x_j & \text{if } j \in S, \\ 0 & \text{if } j \notin S, \end{cases}$$

y notamos a la pseudoinversa Moore-Penrose de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m \geq n$  como  $A^\dagger$ . El problema propuesto en [6] para el caso de una dimensión se reduce al sistema matricial

$$Ax = b,$$

con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ . Buscamos resolver este problema de forma tal que la solución tenga la menor cantidad posible de coordenadas no nulas, es decir, buscamos promover esparcidad. Para lograr esto, se introduce un umbral fijo  $\lambda > 0$  como hiperparámetro del método. Al utilizarlo como un término de penalidad  $l_0$  el problema final que buscamos resolver nos queda:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_0, \quad (6.2.1)$$

en el cual podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\|A\|_2 = 1$  ya que  $\|c.x\|_0 = \|x\|_0$  para cualquier  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Para resolver este problema, SINDy utiliza el siguiente algoritmo iterativo:

$$x^0 = A^\dagger b, \quad (6.2.2)$$

$$S_k = \{j \in [n] : |x_j^k| \geq \lambda\}, \quad k \geq 0, \quad (6.2.3)$$

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq S_k} \|Ax - b\|_2, \quad k \geq 0. \quad (6.2.4)$$

en lo que resta del capítulo, mostraremos algunos de los resultados de [8] que nos garantizan la convergencia en finitos pasos de la iteración 6.2.2 y la relación entre los resultados que produce la iteración y los mínimos locales y globales de la función no convexa:

$$F(x) := \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \|A\|_2 = 1. \quad (6.2.5)$$

A partir de 6.2.2, utilizamos el siguiente algoritmo:

---

**Algorithm 1** Algoritmo SINDy (STLSQ) para  $Ax = b$

---

**Entrada:**  $m \geq n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\text{rango}(A) = n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , umbral  $\lambda > 0$

**Salida:** Solución dispersa aproximada  $x$

---

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: Inicializar  $x^0 \leftarrow A^\dagger b$  y  $S_{-1} \leftarrow \emptyset$ 
3:  $S_0 \leftarrow \{j \in [n] : |(x^0)_j| \geq \lambda\}$  ▷ elegir  $\lambda > 0$  tal que  $S_0 \neq \emptyset$ 
4: while  $S_k \neq S_{k-1}$  do
5:    $x^{k+1} \leftarrow \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq S_k} \|Ax - b\|_2$ 
6:    $S_{k+1} \leftarrow \{j \in [n] : |(x^{k+1})_j| \geq \lambda\}$ 
7:    $k \leftarrow k + 1$ 
8: end while
9: return  $x^k$ 

```

---

En principio el algoritmo anterior sólo puede utilizarse en problemas de la forma  $Ax = b$ , y la gran mayoría de los resultados teóricos que veremos también trabajan en este contexto, sin embargo, definiendo un algoritmo SINDy apropiado para E.D.O.s de mayores dimensiones la extensión de los resultados es inmediata. Extendemos el Algoritmo 1 en problemas de las forma

$$A.X = B, \quad (6.2.6)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Para aprovecharnos de los resultados en una dimensión resolveremos  $p$  problemas lineales de la forma

$$A.Col_j(X) = Col_j(B), \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad (6.2.7)$$

de forma tal que la ejecución del algoritmo SINDy en  $n > 1$  sea simplemente un ejecución de  $p$  instancias paralelas del Algoritmo 1. De esta forma generalizamos el algoritmo (y mas adelante resultados teóricos) al caso de SINDy aplicado a una E.D.O. en  $\mathbb{R}^n$ .

### 6.3. Convergencia de SINDy a mínimos locales

**Teorema 6.3.1.** El algoritmo iterativo 6.2.2 converge en a lo sumo  $n$  pasos.

**Demostración:** Sea  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  la sucesión generada al iterar 6.2.2. Por definición,  $\text{sop}(x^{k+1}) \subset S_k$ , entonces:

$$S_{k+1} \subset \text{sop}(x_{k+1}) \subset S_k.$$

Si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $S_k = S_{k+1}$  entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x^{k+2} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq S_{k+1}} \|Ax - b\|_2, \\ &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq S_k} \|Ax - b\|_2 \\ &= x^{k+1}, \end{aligned}$$

por lo que  $x^m = x^{k+1} \forall m \geq k$ . Como  $\text{card}(S_0) \leq n$  necesariamente  $k \leq n$ , por lo que el algoritmo converge en  $n$  pasos. Si no existe tal  $k \in \mathbb{N}$  entonces  $S_{k+1} \subsetneq S_k$  para cualquier  $S_k \neq \emptyset$ . Entonces  $S_n = \emptyset$ , por lo que el método debe converger a la solución trivial en  $n$  pasos  $\square$

**Proposición 6.3.2.** Definiendo  $x^{k+1}$  como en 6.2.2 vale que :

$$(A^T(Ax^{k+1} - b))_{S_k} = 0.$$

**Demostración:** Por definición del algoritmo,

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n, \text{supp}(x) \subseteq S_k} \|Ax - b\|_2^2.$$

Sea el residual

$$r := Ax^{k+1} - b.$$

Tomemos cualquier vector de perturbación  $h \in \mathbb{R}^n$  cuyo soporte esté contenido en  $S_k$  (es decir,  $h_j = 0$  para  $j \notin S_k$ ). Consideremos la función en una variable

$$\phi(t) := \|A(x^{k+1} + th) - b\|_2^2 = \|r + tAh\|_2^2.$$

Como  $x^{k+1}$  es un minimizante entre los vectores con soporte en  $S_k$ ,  $t = 0$  es un minimizante de  $\phi$ . Por lo tanto,  $\phi'(0) = 0$ . Calculamos la derivada en  $t = 0$ :

$$\phi'(t) = 2\langle Ah, r + tAh \rangle \quad \Rightarrow \quad 0 = \phi'(0) = 2\langle Ah, r \rangle. \quad (6.3.1)$$

Así,  $\langle Ah, r \rangle = 0$  para todo  $h$  soportado en  $S_k$ . Reescribimos  $\langle Ah, r \rangle$  como  $\langle h, A^T r \rangle$ . Como lo anterior vale para todo  $h$  con  $\text{sop}(h) \subseteq S_k$ , obtenemos

$$\langle h, (A^T r)_{S_k} \rangle = 0 \quad \text{para todo tal } h.$$

El único vector en  $\mathbb{R}^{|S_k|}$  ortogonal a todos los vectores es el vector nulo, por lo que

$$(A^T r)_{S_k} = 0,$$

lo cual es precisamente lo que buscábamos probar. □

**Teorema 6.3.3.** La sucesión generada al iterar 6.2.2 es estrictamente decreciente o estacionaria para la función  $F(x)$  (como en 6.2.5).

**Demostración:** Definimos la variable auxiliar  $y^k := x_{S_k}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de esta forma cumple la siguiente relación:

$$\text{supp}(x^{k+1}) \subset S_k = \text{supp}(y^k) \subset \text{supp}(x^k).$$

Luego, por 6.2.2 tenemos que

$$\|Ax^{k+1} - b\|_2 \leq \|Ay^k - b\|_2 \text{ y } \|x^{k+1}\|_0 \leq \|y^k\|_0$$

Adicionalmente, por 6.3.2, al ser  $x^{k+1}$  la solución de cuadrados mínimos sobre  $S_k$  tenemos que  $(A^T(Ax^{k+1} - b))_{S_k} = 0$ , por lo que tenemos que

$$(x^{k+1})_{S_k} = ((A^T A)^{-1} A b)_{S_k} = A_{S_k}^\dagger b.$$

Para ver el decrecimiento de la función  $F(x)$  definimos la siguiente función auxiliar

$$G(x, y) := \|Ax - b\|_2^2 - \|A(x - y)\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6.3.2)$$

como nos encontramos en el caso en el que  $\|A\|_2^2 = 1$  tenemos que

$$-\|A(x - y)\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 \geq -\|A\|_2^2 \|x - y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 0,$$

de lo que se sigue que  $G(x, y) \geq F(x)$  para cualquier par  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Definimos la matriz  $B := I - A^t A$ , como la matriz  $A^t A$  es de rango  $n$ , los autovalores de  $B$  son de la forma  $1 - \gamma_i$  con  $0 < \gamma_i \leq 1$  autovalor de  $A^t A$ , luego los autovalores de  $B$  necesariamente están en el intervalo  $[0, 1]$ . Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x^{k+1}) &= \|Ax^{k+1} - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x^{k+1}\|_0 \\ &\leq \|Ax^{k+1} - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x^{k+1}\|_0 + \|x^k - y^k\|_B^2 \\ &\leq \|Ay^k - b\|_2^2 + \lambda^2 \|y^k\|_0 + \|x^k - y^k\|_B^2 \\ &\leq \|Ay^k - b\|_2^2 + \lambda^2 \|y^k\|_0 + (x^k - y^k)^T (\mathbb{I} - A^T A) (x^k - y^k) \\ &= \|Ay^k - b\|_2^2 + \lambda^2 \|y^k\|_0 + \|x^k - y^k\|_2^2 + \|A(x^k - y^k)\|_2^2 \\ &= G(y^k, x^k). \end{aligned}$$

Es decir,  $F(x^{k+1}) \leq G(y^k, x^k)$ .

Ahora demostraremos que  $G(y^k, x^k) \leq G(x^k, x^k)$ . Usando la definición de nuestra variable auxiliar tenemos que:

$$x^k - y^k = x^k - x_{S_k}^k =: x_{\bar{S}^k}^k,$$

donde  $\bar{S}^k = \{1, \dots, n\} \setminus S_k$ . Restando las evaluaciones de nuestra función auxiliar vemos que:

$$\begin{aligned} &G(y^k, x^k) - G(x^k, x^k) \\ &= \|Ay^k - b\|_2^2 - \|A(y^k - x^k)\|_2^2 + \|y^k - x^k\|_2^2 + \lambda^2 \|y^k\|_0 - \|Ax^k - b\|_2^2 - \lambda^2 \|x^k\|_0 \\ &= -2\langle b, Ay^k \rangle + 2\langle Ay^k, Ax^k \rangle - 2\|Ax^k\|_2^2 + 2\langle b, Ax^k \rangle + \|x^k - y^k\|_2^2 + \lambda^2 (\|y^k\|_0 - \|x^k\|_0) \\ &= -2\langle y^k - x^k, A^T(b - Ax^k) \rangle + \|x^k - y^k\|_2^2 + \lambda^2 (\|y^k\|_0 - \|x^k\|_0) \\ &= -2\langle x_{S_k}^k, A^T(Ax^k - b) \rangle + \|x_{\bar{S}^k}^k\|_2^2 + \lambda^2 (\|y^k\|_0 - \|x^k\|_0). \end{aligned}$$

Por definición de nuestras variables auxiliares tenemos que

$$\text{supp}(x_{\bar{S}^k}^k) = \text{supp}(x_{\bar{S}^k \cap \text{supp}(x^k)}^k) \subset \text{supp}(x^k) \subset S^{k-1},$$

y por la Proposición 6.3.2 tenemos que  $(A^t(Ax^k - b))_{S^{k-1}} = 0$ . Juntando ambas propiedades queda claro que  $\langle x_{\bar{S}^k}^k, A^T(Ax^k - b) \rangle = 0$ . Adicionalmente,  $\|x_{\bar{S}^k}^k\|_2^2 \leq \lambda^2 \text{card}(\text{supp}(x^k) \cap \bar{S}^k)$ , luego aplicando la definición de  $\|\cdot\|_0$  nos queda la cota:

$$\begin{aligned} G(y^k, x^k) - G(x^k, x^k) &\leq \lambda^2 \text{card}(\text{supp}(x^k) \cap \bar{S}^k) \\ &\quad + \lambda^2 (\text{card}(S_k) - \text{card}(\text{supp}(x^k))). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Analizamos primero el caso  $\text{supp}(x^k) \cap \bar{S}^k = \emptyset$ . Esto nos dice que  $x^k = y^k = x_{S^k}^k$ , por lo que  $S^k = \text{supp}(x^k)$ . En conjunto con (6.4) tenemos que

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq \text{supp}(x^k)} \|Ax - b\|_2.$$

Supongamos que  $x^{k+1} \neq x^k$ , entonces tenemos que

$$\|Ax^{k+1} - b\|_2 < \|Ax^k - b\|_2.$$

pero  $\text{supp}(x^{k+1}) \subset \text{supp}(x^k) = S^k \subset S^{k-1}$ , por lo que usando (6.4) llegamos a una contradicción. Entonces  $x^{k+1} = x^k$ . Si estamos en el caso  $\text{supp}(x^k) \cap \bar{S}^k \neq \emptyset$ , observamos que

$$\text{card}(\text{supp}(x^k)) - \text{card}(S^k) = \text{card}(\text{supp}(x^k) \cap \bar{S}^k),$$

por lo que obtenemos a partir de 6.3.3, obtenemos que  $G(y^k, x^k) - G(x^k, x^k) < 0$ . Se sigue que  $x^{k+1} < x^k$ .  $\square$

Finalmente, demostramos que el resultado del algoritmo de SINDy para un problema de una dimension converge a un mínimo local. Previo a esto recordamos la definición

$$\|x\|_0 = \sum_j |x_j|^0 \text{ donde } |x_j|^0 = \begin{cases} 0 & \text{if } x_j = 0, \\ 1 & \text{if } x_j \neq 0. \end{cases}$$

**Teorema 6.3.4.** Sea  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  la sucesión generada por el esquema iterativo definido en 6.2.2. Entonces  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  converge a un punto fijo del esquema. Además, dicho punto fijo es un minimizante local de la función objetivo (ver 6.2.5):

$$F(x) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_0.$$

*Demostración.* Por 6.3.1 sabemos que el esquema termina en un número finito de pasos. Es decir, existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$x^{M+1} = x^M, \quad S^{M+1} = S^M.$$

En particular, esto implica de manera inmediata que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{k+1} - x^k\|_2^2 < \infty,$$

pues sólo hay a lo sumo  $M$  términos no nulos en la suma. Sea  $x^* = x^M$  el estado estacionario. Por definición del esquema 6.2.2,  $x^*$  satisface

$$x^* = \arg \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \text{supp}(x) \subseteq S^*}} \|Ax - b\|_2, \tag{6.3.4}$$

$$S^* = \{j : |x_j^*| \geq \lambda\}.$$

pues  $x^*$  es un punto fijo de la iteración.

Veamos que el punto  $x^*$  es efectivamente un mínimo local de  $F(x)$ . Usando la Propiedad 6.3.2 tenemos que

$$(A^t(Ax^* - b))_{S^*} = 0, \tag{6.3.5}$$

además,  $x_j^* \neq 0$  si y sólo si  $|x_j^*| \geq \lambda$  por 6.3.4, pues de lo contrario variaría  $S^*$ , lo cual contradice que  $x^*$  sea punto fijo.

Para ver que  $x^*$  efectivamente es un mínimo local de  $F(x)$  nos basta con probar la existencia de un  $\epsilon > 0$  tal que

$$F(x^* + z) \geq F(x^*) \text{ para cualquier } z \in \mathbb{R}^n \text{ con } \|z\|_{\infty} < \epsilon.$$

Sean

$$U := \{j \in [n] : x_j^* = 0\}, \quad \text{y} \quad \bar{U} = \text{supp}(x^*) = \{j \in [n] : |x_j^*| \geq \lambda\} = S^*.$$



Fijando  $z \in \mathbb{R}^n$  y tomando  $G(\cdot, \cdot)$  como en 6.3.2, tenemos que

$$G(x^* + z, x^*) - G(x^*, x^*) = 2\langle Az, Ax^* - b \rangle + \lambda^2(\|x^* + z\|_0 - \|x^*\|_0) + \|z\|_2^2.$$

Si notamos  $a_j$  como la  $j$ -ésima columna de  $A$  obtenemos la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} & 2\langle Az, Ax^* - b \rangle + \lambda^2(\|x^* + z\|_0 - \|x^*\|_0) \\ &= \sum_{j \in U} (2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0) \\ & \quad + \sum_{j \in \bar{U}} (2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2(|x_j^* + z_j|^0 - |x_j^*|^0)) \\ &= \sum_{j \in U} (2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0) + \sum_{j \in \bar{U}} \lambda^2(|x_j^* + z_j|^0 - |x_j^*|^0). \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Supongamos que existe  $\epsilon > 0$  tal que 6.3.6 es mayor a 0 para cualquier  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|x^* - z\|_\infty < \epsilon$ : Entonces  $G(x^* + z, x^*) - G(x^*, x^*) \geq \|z\|_2^2$  y tenemos que

$$\begin{aligned} F(x^* + z) &= G(x^* + z, x^*) + \|Az\|_2^2 - \|z\|_2^2 \\ &\geq G(x^* + z, x^*) - \|z\|_2^2 \\ &\geq G(x^*, x^*) \\ &= F(x^*). \end{aligned}$$

Luego para finalizar nos basta con encontrar tal  $\epsilon > 0$  tal que si  $\|x^* - z\|_\infty < \epsilon$ , entonces

$$\sum_{j \in U} (2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0) + \sum_{j \in \bar{U}} \lambda^2(|x_j^* + z_j|^0 - |x_j^*|^0) > 0.$$

Si  $j \in \bar{U}$  entonces  $|x_j^*| \geq \lambda$ . Si  $|z_j| < \lambda$  para todo  $1 \leq j \leq n$ , y  $|x_j^* + z_j|^0 - |x_j^*|^0 = 0$ , luego, si  $|z_j| < \lambda$  para todo  $j \in \bar{U}$  usando 6.3.6 tenemos que

$$2\langle Az, Ax^* - b \rangle + \lambda^2(\|x^* + z\|_0 - \|x^*\|_0) = 2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0.$$

Miremos el caso  $j \in U$ . Si para cualquier  $j \in U$  vale que  $z_j = 0$  entonces

$$2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0 = 0.$$

Si  $|z_j| > 0$  y  $\lambda^2 > 2|a_j^T(Ax^* - b)z_j|$ , entonces

$$2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2|z_j|^0 = 2a_j^T(Ax^* - b)z_j + \lambda^2 \geq 0.$$

Luego, para  $j \in [n]$  nos basta con pedir  $|z_j| \leq \min \left\{ \lambda, \frac{\lambda^2}{2|a_j^T(Ax^* - b)|} \right\}$ . Finalmente pedimos

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \min_{j \in [n]} \frac{\lambda^2}{2|a_j^T(Ax^* - b)|}, \lambda \right\}.$$

y se cumple que si  $\|z\|_\infty < \epsilon$ , por 6.3.6 vale que

$$G(x^* + z, x^*) - G(x^*, x^*) \geq \|z\|_2^2.$$

□

Para finalizar, mostramos dos teoremas mas, uno de ellos un resultado adicional presente en [8] que no demostraremos, y un segundo que es un resultado final que resume todo lo que hemos visto en el capítulo.

**Teorema 6.3.5.** Un mínimo global de la función 6.2.5 es un punto fijo del esquema iterativo generado por 6.2.2

**Teorema 6.3.6.** Supongamos que  $m \geq n$ . Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\|A\|_2 = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , y  $\lambda > 0$ . Sea  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  la sucesión generada por 6.2.2. Definimos la función objetivo  $F$  por 6.2.5. Entonces se cumple que:

- 1.) la sucesión converge a un punto fijo del esquema iterativo definido por 6.2.2 en a lo sumo  $n$  pasos.
- 2.) Un punto fijo del esquema es un minimizante local de  $F$  (6.2.5);
- 3.) un minimizante global de  $F$  es un punto fijo del esquema iterativo SINDy.
- 4.) La función objetivo  $F$  disminuye estrictamente en la sucesión  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  a menos que las iteraciones sean estacionarias.

## 6.4. Relación entre la respuesta de SINDy y la verdadera solución

En la sección anterior exploramos la relación entre el algoritmo SINDy y los mínimos de la función (6.2.5). Para finalizar este capítulo daremos algunos resultados que relacionan la solución que da la iteración de SINDy con las soluciones verdaderas del sistema lineal  $Ax = b$ .

**Teorema 6.4.1.** Sea  $x^* \in \mathbb{R}^n$  un vector tal que  $Ax^* = b$ , con  $A$  de rango completo. Definimos  $S := \text{sop}(x^*)$ . Una condición suficiente y necesaria para lograr recuperar a  $x^*$  es un solo paso utilizando el esquema iterativo 6.2.2 es

$$\min_{j \in S} |(A^\dagger b)_j| \geq \lambda > \max_{j \in \bar{S}} |(A^\dagger b)_j|. \quad (6.4.1)$$

*Demostración.* Como vimos en 6.2.2,  $x^0 = A^\dagger b$  y  $S_0 = \{j \in [n] : |x_j^0| \geq \lambda\}$ . Como  $x_j^0 = (A^\dagger b)_j \forall 1 \leq j \leq n$  entonces, si vale 6.4.1, tenemos que  $S = S^0$ . Por como hemos definido  $S$  y  $S^0$  se sigue que

$$S = S^0 \iff S = \{j \in [n] : (A^\dagger b)_j \geq \lambda\} \iff \min_{j \in S} |(A^\dagger b)_j| \geq \lambda > \max_{j \in \bar{S}} |(A^\dagger b)_j|$$

Supongamos que  $x^*$  puede recuperarse mediante el esquema iterativo 6.2.2 en un solo paso, es decir, que  $x^1 = x^*$ . De acuerdo con el criterio de parada del Algoritmo 1, se tiene que  $S^0 = S^1$ . Luego tenemos que

$$S^1 = \{j \in [n] : |(x^1)_j| \geq \lambda\} = \{j \in [n] : (x^*)_j \geq \lambda\} = S$$

Por tanto,  $S^0 = S$ , por lo cual vale 6.4.1. Recíprocamente, supongamos que 6.4.1 es válida, lo cual hemos que equivale a  $S_0 = S$ . La hipótesis  $Ax^* = b$  implica que

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp}(x) \subseteq S} \|Ax - b\|_2,$$

ya que  $\text{supp}(x^*) \subseteq S$  y la norma es cero. Como  $A$  es inyectiva (por ser de rango completa), la solución es única, y por tanto, usando la definición de  $x^1$  tenemos que

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n: \text{supp}(x) \subseteq S} \|Ax - b\|_2 = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n: \text{supp}(x) \subseteq S_0} \|Ax - b\|_2 = x_1.$$

Es decir,  $x^*$  puede recuperarse mediante el esquema iterativo en un solo paso.

□

El resultado que hemos demostrado se extiende fácilmente a  $\mathbb{R}^n$  utilizando el planteo que vimos en 6.2.7. Dejamos a continuación el resultado generalizado al problema matricial. Vale aclarar, que en el algoritmo SINDy generalizado para mayor dimensión consideramos a un paso como la iteración individual de SINDy en cada uno de los problemas de 6.2.7.

**Teorema 6.4.2.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) de rango completo ( $rg(A) = n$ ), sea  $X^* \in \mathbb{R}^{n \times p}$  una matriz tal que  $AX^* = B$  con  $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ , definimos el conjunto soporte de la  $i$ -ésima columna de  $X^*$  por

$$S_i := \text{sop}(Col_i(X^*)) = \{j \in [n] : X_{j,i}^* \neq 0\}. \quad (6.4.2)$$

Sea  $\lambda > 0$  el umbral usado en el Algoritmo 1 (generalizado columna a columna). Entonces, una condición necesaria y suficiente para que  $X^*$  se recupere en un único paso por el esquema iterativo (generalizado a sistemas matriciales) es

$$\min_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in S_i} |(A^\dagger B)_{j,i}| \geq \lambda > \max_{1 \leq i \leq p} \max_{j \in \overline{S_i}} |(A^\dagger B)_{j,i}|, \quad (6.4.3)$$

donde  $\overline{S_i} = [n] \setminus S_i$  y  $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$  es la pseudo-inversa (bien definida por la hipótesis de rango completo).

# Capítulo 7

## Dinámicas de Replicador a través de SINDy

En este capítulo nos centramos en la aplicación de SINDy a la ecuación 4.1.1, para esto utilizaremos la librería de Python PySINDY (ver [6]), la cuál ejecuta el algoritmo tal como lo hemos descrito en el capítulo anterior en el Algoritmo 1. Nuestro objetivo es obtener la ecuación del replicador, o una aproximación de ella, a partir de datos empíricos de trayectorias de nuestro sistema usando SINDy en combinación con una familia apropiada de funciones  $\Theta$ . A lo largo del capítulo tendremos que armar bases de datos de trayectorias de distintas dinámicas de replicadores, para este fin utilizamos un método Runge-Kutta RK-45, el paso y el intervalo utilizado se aclararán en cada instancia.

### 7.1. Aproximando la ecuación del replicador con SINDy

Partimos de la suposición de que los datos discretos con los que estaremos trabajando provienen de una dinámica de replicador genérica. A raíz de esto, supondremos que la ecuación que buscamos aproximar es de la forma 4.3.1, es decir,

$$\dot{x}_i = x_i(a_i(\mathbf{x}) - \bar{a}(\mathbf{x})), \quad 1 \leq i \leq n,$$

motivo por el cual trabajamos bajo la suposición de que, para cualquier  $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x})$  con  $1 \leq i \leq n$ , si  $\mathbf{x}_i = 0$  entonces  $f_i(\mathbf{x}) = 0$ . Esta suposición nos ayuda a reducir el conjunto de funciones  $\Theta$  que elegimos para aproximar las  $f_i$ . Para las familias polinomiales nos permite utilizar como  $\Theta$  a la base de  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$  formada por polinomios mónicos de un término, es decir,

$$\Theta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}^\alpha : 0 < |\alpha| \leq p\}. \quad (7.1.1)$$

Dado un grado  $p \in \mathbb{N}$ , definimos la matriz de Vandermonde multivariada para un conjunto de puntos  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$  como

$$V[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{\alpha(1)} & \dots & \mathbf{x}_1^{\alpha(N_p)} \\ | & \dots & | \\ \mathbf{x}_m^{\alpha(1)} & \dots & \mathbf{x}_m^{\alpha(N_p)} \end{bmatrix}, \quad (7.1.2)$$

donde  $\alpha(1), \dots, \alpha(N_p)$  es una numeración del conjunto de los multi-índices de grado menor igual a  $p$  para puntos de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$I_p = \{\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n : \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq p\}, \text{ de cardinal } N_p := \#(I_p) = \binom{n+p}{p}.$$

En particular, suponiendo que  $\alpha(1) = \bar{0}$ , dado un conjunto de puntos  $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{R}^n$ , tenemos que

$$\Theta(X) = (V[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m])_{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{\alpha(2)} & \dots & \mathbf{x}_1^{\alpha(N_p)} \\ | & \dots & | \\ \mathbf{x}_m^{\alpha(2)} & \dots & \mathbf{x}_m^{\alpha(N_p)} \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

al plantear el sistema de ecuaciones de SINDy utilizando la familia de funciones [7.1.1](#).

A lo largo del capítulo, siempre que implementemos SINDy en una ecuación del replicador en  $\mathbb{R}^n$ , no será sobre el sistema de  $n$  ecuaciones que evolucionan en  $S_n$  (como en [4.1.1](#)), sino que previo a buscar una aproximación con SINDy reemplazamos

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad (7.1.4)$$

de forma explícita en las ecuaciones. Es decir, aplicamos SINDy en el sistema de  $n-1$  ecuaciones resultantes que evolucionan en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Esto se debe al hecho de que el remplazo explícito 7.1.4 nos da un sistema de ecuaciones único en  $\mathbb{R}^{n-1}$  para la evolución del sistema (aún que el recorrido que nos interesa es en  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ), mientras que en el caso del sistema en  $\mathbb{R}^n$  restringido a  $S_n$  tenemos múltiples formas de escribir una misma evolución sobre el simplex. Para dar un ejemplo de esto usamos el juegos de Halcones y Palomas que introdujimos en 2.5.1. Dadas dos matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{G}{2} \\ \frac{C-G}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

al remplazarlas en el replicador clásico 4.1.1, nos brindan dinámicas idénticas sobre  $S_2$ . Esto se debe a la Propiedad 4.1.1, ya que restando una constante en cada columna podemos obtener una matriz partiendo de la otra. Sin embargo, si remplazamos la primera matriz en el replicador clásico obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left[ \frac{G-C}{2} x_1 + G x_2 - \left( x_1 \left( \frac{G-C}{2} x_1 + G x_2 \right) + x_2 \left( \frac{G}{2} x_2 \right) \right) \right], \\ \dot{x}_2 = x_2 \left[ \frac{G}{2} x_2 - \left( x_1 \left( \frac{G-C}{2} x_1 + G x_2 \right) + x_2 \left( \frac{G}{2} x_2 \right) \right) \right], \end{cases}$$

mientras que para la segunda matriz obtenemos la dinámica

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left[ \frac{G}{2} x_2 - \left( x_1 \left( \frac{G}{2} x_2 \right) + x_2 \left( \frac{C-G}{2} x_1 \right) \right) \right], \\ \dot{x}_2 = x_2 \left[ \frac{C-G}{2} x_1 - \left( x_1 \left( \frac{G}{2} x_2 \right) + x_2 \left( \frac{C-G}{2} x_1 \right) \right) \right]. \end{cases}$$

Siempre que comenzamos en un punto  $\mathbf{x} \in S_2$  la evolución de ambas dinámicas es la misma, sin embargo, a la hora de aplicar SINDy, el problema que genera está claro, no tenemos una única expresión algebraica para describir la dinámica. Para este caso del replicador clásico, si  $\Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{Np}$  es un vector con evaluaciones de todos los monomios de grado menor o igual a  $p$  (con  $p \geq 3$ ) de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , no existe un único vector  $\xi_i$  tal que

$$\dot{x}_i = \xi_i^T \cdot \Phi(\mathbf{x})$$

para ningún  $1 \leq i \leq n$ . La solución que proponemos a lo largo del capítulo es implementar SINDy en el sistema

$$\dot{x}_i = x_i \left[ a_i \left( 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k, \mathbf{x}_{-n} \right) - \bar{a} \left( 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k, \mathbf{x}_{-n} \right) \right], \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (7.1.5)$$

el cual tiene una única expresión en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Una vez hecha la aproximación, si llamamos  $x_i(t)$  con  $1 \leq i \leq n-1$  a las trayectorias de la dinámica aproximadora, para ver la evolución de nuestra aproximación en  $S_n$  nos basta con mirar

$$\mathbf{x} = \left( x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i(t) \right).$$

En nuestro caso utilizamos  $x_n$  para escribir la restricción del simplex de forma explícita, esta elección es arbitraria ya que nos es indistinto en que variable  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , usamos para el remplazo explícita de la condición 7.1.4.

A continuación, definimos las matrices necesarias para escribir el problema de aproximación de una dinámica de replicador con SINDy. Tal como dijimos al inicio, planteamos SINDy con la familia de monomios de grado menor o igual a  $p \in \mathbb{N}$ , 7.1.1. Notamos

$$\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

a la proyección canónica sobre las primer  $n-1$  coordenadas de un vector. Si  $\{x(t_j)\}_{1 \leq j \leq m} \subset S_n$  es una base de datos a partir de trayectorias de una ecuación del replicador, entonces para aproximar una ecuación de la forma 7.1.5 tomamos la base de datos  $\{\pi_n(x(t_j))\}_{1 \leq j \leq m} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Hacemos el mismo proceso con las derivadas y tomamos,  $\{\pi_n(\dot{x}(t_j))\}_{1 \leq j \leq m}$ . De esta forma, para aplicar SINDy con la familia 7.1.1 tenemos

$$\Theta(X) = (V[\pi_n(x(t_1)), \dots, \pi_n(x(t_m))])_{-1} \in \mathbb{R}^{m \times (N_p-1)} \quad (V \text{ como en 7.1.3}), \quad (7.1.6)$$

y una matriz de derivadas

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \cdots & \dot{x}_{n-1}(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \cdots & \dot{x}_{n-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dot{x}_2(t_m) & \cdots & \dot{x}_{n-1}(t_m) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}.$$



Ya definidos los elementos necesarios, nuestra incógnita será una matriz  $\Xi \in \mathbb{R}^{(N_p-1) \times (n-1)}$  tal que

$$\Theta(X)\Xi \approx \dot{X}. \quad (7.1.7)$$

## 7.2. Ejemplo: SINDy en el replicador clásico

### Ejemplo 1

Para comenzar, miramos el caso de un juego matricial simétrico de dos jugadores, cada uno con dos estrategias posibles. Utilizamos la siguiente matriz de payoff

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 10 & 0 \end{bmatrix},$$

cuya ecuación del replicador, tal como vimos en 5.1.3, puede reducirse a

$$\dot{x} = x(1-x)(7-17x). \quad (7.2.1)$$

Para aproximar esta ecuación del replicador utilizando SINDy, creamos un base de datos con  $m \in \mathbb{N}$  trayectorias distintas, cada una con un punto inicial elegido de forma aleatoria. A continuación mostramos dos aproximaciones.

Para la primera aproximación, hemos elegido  $m = 3$  puntos iniciales aleatorios con distribución uniforme sobre el simplex, para cada uno de ellos hemos aproximado su trayectoria hasta un tiempo final  $t_f = 0,01$  con un paso  $d_t = 0,001$  (usando el método RK-45 tal como aclaramos al inicio del capítulo). Esta será la base de datos de trayectorias que utilizaremos para ajustar el método SINDy.<sup>1</sup> Utilizamos la familia de funciones  $\Theta(x) = \{x, x^2, \dots, x^6\}$  y definimos el hiperparámetro de umbralado como  $\lambda = 0,3$ .

Una vez creada la base de datos y elegidos el hiperparámetro  $\lambda > 0$  y la familia de funciones  $\Theta$ , podremos escribir nuestro problema de aproximación de una dinámica

<sup>1</sup>Para observar la base de datos utilizada y el ajuste via SINDy véase el archivo `ej1_replicador_clasico.ipynb`.

como en 7.1.7. Resolvemos este sistema usando el Algoritmo 1, implementado a través de PySINDy (ver [7]), a partir de lo cual obtenemos siguiente dinámica:

$$\dot{\hat{x}} = 7,0000\hat{x} - 24,0008\hat{x}^2 + 17,0072\hat{x}^3 = \hat{x}(0,9994 - \hat{x})(7,0045 - 17,007\hat{x}). \quad (7.2.2)$$

Como puede observarse tras una primera inspección, es muy similar a la dinámica del replicador original, 7.2.1. Previo a un análisis del error, en la Figura 7.1, comparamos algunas trayectorias de la dinámica del replicador original, 7.2.1, con trayectorias de nuestra aproximación, 7.2.2 (aproximadas con un método RK-45 con paso  $d_t = 0,001$ ). Las trayectorias graficadas parten de puntos iniciales que están por fuera de la base de datos con la que hemos entrenado la dinámica de SINDy, como se puede observar, en estos casos SINDy logra una trayectoria casi idéntica a la original.

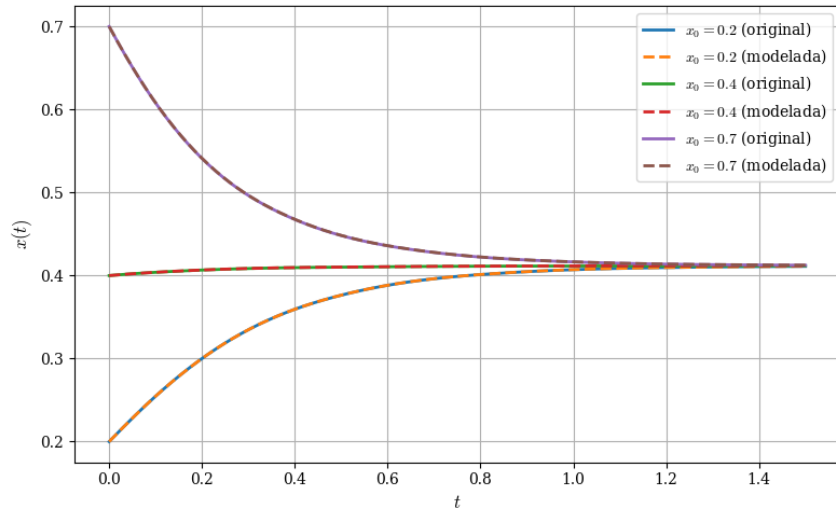


Figura 7.1: Trayectrias originales del replicador clásico 7.2.1 y las aproximadas por su aproximación con SINDy, 7.2.2

## Análisis del error: Ejemplo 1

Dado un punto inicial  $\mathbf{x}_0 \in S_n$  y una dinámica del replicador

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

junto con una segunda dinámica en  $S_n$  que la aproxima,

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}), \\ \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \end{cases}$$

definimos el error de  $\hat{\mathbf{x}}$  con respecto a  $\mathbf{x}$  para la trayectoria que comienza en  $\mathbf{x}_0 \in S_n$  a tiempo  $t \geq 0$  como

$$e(t; \mathbf{x}_0) = \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\|_{\infty}. \quad (7.2.3)$$

Definimos el error en el punto  $\mathbf{x}_0 \in S_n$  como

$$e(\mathbf{x}_0; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \sup_{t \geq 0} e(t; \mathbf{x}_0). \quad (7.2.4)$$

De esta forma, el error de la dinámica  $\hat{\mathbf{x}}$  con respecto a la dinámica del replicador  $\mathbf{x}$  es

$$e(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}_0 \in S_n} e(\mathbf{x}_0; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \quad (7.2.5)$$

Esta última es la forma de cuantificar el error que mas información nos ofrece acerca de la diferencia entre ambas dinámicas, su principal problema es que en principio, no podemos calcular 7.2.5. Un criterio alternativo para cuantificar el error mas sencillo, aunque menos informativo, es calcular o aproximar el valor

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty} \text{ sobre } S_n. \quad (7.2.6)$$

Con el fin de obtener una aproximación del error 7.2.5 utilizaremos el siguiente algoritmo

---

**Algorithm 2** Aproximación numérica del error en norma infinito entre soluciones de dos E.D.O.

---

**Entrada:** Dos funciones  $f(\mathbf{x})$  y  $\hat{f}(\mathbf{x})$  que definen las E.D.O.

**Entrada:** Intervalo temporal  $[0, t_f]$

**Entrada:** Número de puntos temporales  $k \in \mathbb{N}$

**Entrada:** Conjunto de condiciones iniciales  $\{x_0^{(k)}\} \subset S_n$

```

1:  $t_{\text{eval}} \leftarrow \text{linspace}(0, t_f, k)$ 
2:  $e_{\text{aprox}} \leftarrow 0$ 
3: Para cada  $x_0^{(k)}$  do
4:    $\mathbf{x}(t) \leftarrow \text{SolveIVP}(f, x_0^{(k)}, t_{\text{eval}})$ 
5:    $\hat{\mathbf{x}}(t) \leftarrow \text{SolveIVP}(\hat{f}, x_0^{(k)}, t_{\text{eval}})$ 
6:   Calcular la norma  $\infty$  discreta:

```

$$e \leftarrow \max_{t \in t_{\text{eval}}} \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|_{\infty}$$

```

7:   Si  $e > e_{\text{aprox}}$  then
8:      $e_{\text{aprox}} \leftarrow e$ 
9:   end Si
10: end Para
11: return  $e_{\text{aprox}}$ 

```

---

Para aproximar el error global (7.2.5) de la dinámica 7.2.2, llamada  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , con respecto a 7.2.1, llamada  $\mathbf{x}(t)$ , hemos usando al Algoritmo 7.2, tomando como  $\{x_0^{(k)}\} \subset S_1$  el conjunto de  $k = 100$  puntos equiespaciados en el intervalo  $(0, 1)$ .<sup>2</sup> Obtuvimos la aproximación

$$e(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \approx 0,0038.$$

Como en este caso ambas dinámicas son polinomios de grado 3, calcular el error de las expresiones de las derivadas (7.2.6) puede hacerse analíticamente. Llamamos

$$f(x) = x(1 - x)(7 - 17x),$$

$$\hat{f}(x) = x(0,9994 - x)(7,0045 - 17,007x),$$

el error entre las derivadas nos queda

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty, [0, 1]} = 0,0064.$$

En los ejemplos que siguen, nos centraremos en la aproximación y el análisis de 7.2.5, si bien debemos aproximarla numéricamente y en un intervalo temporal finito, nos

---

<sup>2</sup>La implementación del Algoritmo 7.2 puede verse en el archivo auxiliar `utils_1D.py`

da un criterio de cuanto difieren realmente las dinámicas a lo largo de un periodo considerablemente superior al tiempo de la base de datos.

### Ejemplo 2: Datos ruidosos

En este ejemplo continuaremos usando 7.2.1 como dinámica a ser aproximada vía SINDy. Para nuestra segunda aproximación vamos a trabajar con una base de datos con condiciones menos favorables. Para lograr esto, tomaremos una base de datos de trayectorias aproximadas con un paso mas grande en el método RK-45, disminuyendo su precisión, y agregando un ruido de distribución  $\mathcal{N}(0, \epsilon)$ . El problema que resolveremos con SINDy en este caso es de la forma 6.1.3. Puntualmente, la base de datos que usamos en este caso está formada por 10 trayectorias cuyos puntos iniciales se han elegido aleatoriamente de forma uniforme sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Las trayectorias con aproximadas con un paso  $d_t = 0,005$  (en comparación a 0,001 en el caso anterior) y tiempo final  $t_f = 0,25$ , luego intervenimos en cada punto de cada trayectoria agregando ruido de distribución  $\mathcal{N}(0, \epsilon)$ , con  $\epsilon = 0,00025$ . El umbral  $\lambda$  lo mantenemos en 0,3.

Tras plantear el sistema de la forma 7.1.7 con esta nueva base de datos y resolverlo utilizando el Algoritmo 1 implementado a través de PySINDy obtenemos la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & 35,950 \hat{x} - 356,462 \hat{x}^2 + 1410,049 \hat{x}^3 \\ & -2704,127 \hat{x}^4 + 2453,778 \hat{x}^5 - 836,052 \hat{x}^6. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

En primer lugar podemos ver que la derivada de 7.2.7 no es un polinomio de grado 3, es decir, no hemos logrado recrear la verdadera forma de la dinámica. En la Figura 7.2 podemos observar una comparación entre las trayectorias de la ecuación del replicador 7.2.1 y la segunda aproximación de 7.2.1 que hemos hecho con SINDy, 7.2.7. Comparando estas trayectorias con las de la Figura 7.1 podemos apreciar que nuestra aproximación de las trayectorias ha empeorado considerablemente al insertar un ruido normal en las trayectorias y aumentar el paso con el que aproximamos las trayectorias.

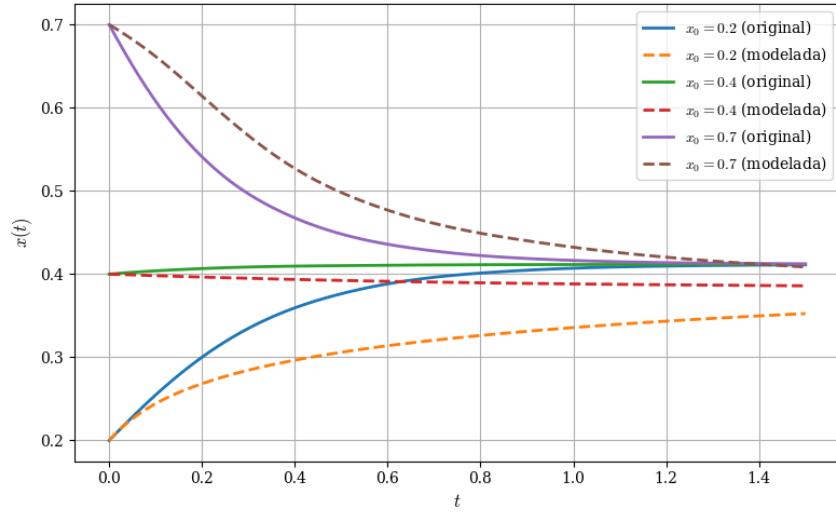


Figura 7.2: Trayectorias originales del replicador clásico 7.2.1 y las aproximadas por su aproximación con SINDy con datos ruidosos, 7.2.7

### Análisis del error: Replicador clásico con datos ruidosos

Para analizar el error entre la dinámica obtenida por SINDy con datos ruidosos, 7.2.7, y la dinámica original, 7.2.1, usamos el Algoritmo 7.2. Nuevamente, tomamos  $\{x_0^{(k)}\} \subset S_1$  como el conjunto de  $k = 100$  puntos equiespaciados en el intervalo  $(0, 1)$ . Al igual que en el ejemplo anterior, llamamos  $\hat{\mathbf{x}}$  a la dinámica correspondiente a 7.2.7 y notamos  $\hat{f}(\mathbf{x})$  a la expresión de su derivada, análogamente,  $\mathbf{x}$  y  $f(\mathbf{x})$  son la dinámica y derivada de la aproximación 7.2.1 respectivamente. Así, obtenemos la aproximación<sup>3</sup>

$$e(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \approx 0,182, \quad (7.2.8)$$

un error considerablemente mayor a la aproximación hecha en 7.2.2. Es razonable preguntarse si el principal culpable del deterioro del modelo obtenido vía SINDy es el ruido gaussiano o el aumento del paso de la base de datos. En la misma sección en la que hemos programado esta aproximación puede verse que si uno utiliza la misma base de datos, pero sin ruido gaussiano, logra una aproximación con  $e(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \approx 0,042$ , la cual, aun que considerablemente peor que nuestra primera aproximación 7.2.2, nos indica una alta sensibilidad al ruido por parte de SINDy.

<sup>3</sup>vease archivo ej1\_replicador\_clasico.ipynb en el repositorio de Github

### 7.3. Ejemplo: SINDy en dinámicas de imitación

En el replicador clásico sabemos que todas las derivadas que estamos observando son polinomiales, por lo que es esperable que si a SINDy le damos una base de datos bien confeccionada, logre aproximar la dinámica con relativamente poco error. Ahora, estamos interesados en ver que pasa en el caso en el que la dinámica de la cual provienen los datos no es de la forma de un replicador clásico, ya que hay numerosas dinámicas de modelado mas complejas (véase [5] para ejemplos varios) que se utilizar para modelar la evolución de estrategias en poblaciones.

Para nuestro análisis, usaremos la dinámica de imitación que introducimos en 4.4.3, ya que la regla de imitación nos permite incorporar funciones de distintos tipos fácilmente. De todas formas, aclaramos que el modelo no está pensado solamente para esta generalización del replicador, sino que simplemente utilizamos la dinámica de imitación por la variedad de trayectorias que nos provee dentro de un mismo marco teórico. Miraremos dos casos particulares, el primero será el caso de la regla de imitación de Fermi, el cuál desarrollamos en el capítulo 5 (ver 5.2.3), y el segundo será el caso de una regla de imitación Heaviside, que es la dinámica de "imitar al mejor"(ver 5.2.5).

#### Regla de imitación de Fermi con SINDy

En esta instancia aplicaremos SINDy a la ecuación 5.2.3, la cual surge de aplicar una dinámica de imitación a un juego de replicador clásico en  $n = 2$  con una matriz de la forma 5.1.2 y una función de imitación sigmoide con  $\beta = 1$ . Para este ejemplo, usaremos  $a = 5$  y  $b = 3$ , de forma tal que la ecuación que aproximaremos con SINDy es

$$\dot{x} = x(1-x) \left[ \frac{1}{1 + e^{-5x+3(1-x)}} - \frac{1}{1 + e^{-3(1-x)+5x}} \right]. \quad (7.3.1)$$

Para el entrenamiento con SINDy, utilizamos una base de datos que consta de 7 trayectorias distintas aproximadas con un método de un paso RK-45 con paso  $d_t = 0,005$  con tiempo final  $t_f = 0,15$ . Tomamos  $\lambda = 0,2$  como hiperparámetro de SINDy, y como hicimos en el ejemplo anterior, tomamos  $\Theta(x) = \{x, x^2, \dots, x^6\}$ . Tras

utilizar la implementación del Algoritmo 1 de PySINDy ([7]) para resolver 7.1.7, obtenemos la siguiente dinámica para aproximar nuestra dinámica de imitación<sup>4</sup>

$$\dot{\hat{x}} = -0,264\hat{x}^1 - 7,007\hat{x}^2 + 44,159\hat{x}^3 - 86,586\hat{x}^4 + 71,290\hat{x}^5 - 21,586\hat{x}^6. \quad (7.3.2)$$

Como probamos en 5.2.3, la dinámica original tiene un equilibrio de Nash en el interior del simplex en el punto 0,375 en conjunto con los equilibrios del borde. Las raíces reales de 7.3.2 son 0, 0.374258 y 1.004291, por lo que logramos obtener una aproximación muy cercana (inclusive menor al error de truncado del método con el que aproximamos los datos) del equilibrio de Nash interior de la dinámica de imitación que estamos modelando. Debajo, en la Figura 7.3 comparamos las evoluciones de la dinámica 7.3.2 de SINDy con trayectorias de 7.3.1 que no están en la base de datos con la que hemos ajustado el modelo. Como podemos ver en la Figura 7.3, el polinomio de grado 6 no solamente tiene raíces reales similares a la ecuación original, sino que además, con relativamente pocos datos, logra aproximar muy bien las trayectorias del juego de imitación de Fermi. Las trayectorias con etiqueta GT (ground truth) son las pertenecen a la dinámica original (tanto en esta figura como en las siguientes).

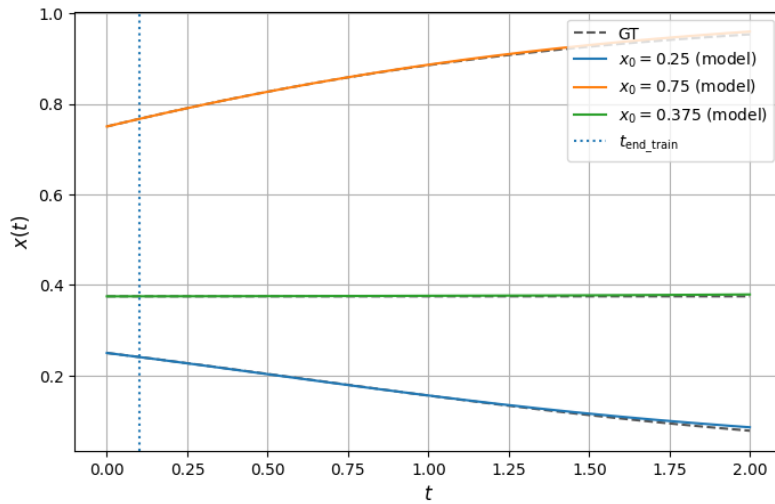


Figura 7.3: Comparación entre trayectorias de la dinámica de Fermi original 7.3.1 y la aproximación de SINDy, 7.3.2

<sup>4</sup>vease ej2 \_dinamica\_imitacion.ipynb en el repositorio del proyecto



### Análisis del error: SINDy aplicado a dinámica de Fermi

Para obtener una aproximación del error de 7.3.2 con respecto a 7.3.1, hemos aproximado 7.2.5 a través del Algoritmo 7.2. Nuevamente, llamamos  $\hat{\mathbf{x}}$  a la dinámica asociada a nuestra aproximación 7.3.2 y  $\mathbf{x}$  a la dinámica original de la partimos, 7.3.1. Así, ejecutando el Algoritmo 7.2 con los mismos parametros que en 7.2.8, obtenemos la aproximación<sup>5</sup>

$$e(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \approx 0,0078.$$

### Regla de imitación con función Heaviside

Para este ejemplo nos mantendremos en el caso de una dinámica de imitación en  $n = 2$ , y nuevamente miraremos el caso en el que  $a_i(\mathbf{x}) = (Ax)_i$  con  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , sin embargo, ahora tomamos la regla de imitación de “imitar al mejor” que desarrollamos en 4.4.3. La ecuación nos queda de la forma 5.2.6. En el caso de dimensión dos, con una matriz de la forma 5.1.2, tenemos la ecuación

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 [\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(ax_2 - bx_1) - \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(b.x_1 - ax_2)].$$

Tras remplazar  $x = x_2$  y  $x_1 = 1 - x$  obtenemos la dinámica

$$\dot{x} = x(1 - x) [\mathbf{1}_{(0,\infty)}(ax - b(1 - x)) - \mathbf{1}_{(0,\infty)}(b(1 - x) - ax)]. \quad (7.3.3)$$

Simplificando, vemos que en 7.3.3, que  $x \in (0, 1)$  sea un equilibrio de Nash interior es equivalente a cumplir

$$\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(-b + x(a + b)) - \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(a - x(a + b)) = 0,$$

lo cual equivale a que se cumpla

$$\begin{cases} -b + x(a + b) > 0 \\ b - x(a + b) > 0, \end{cases} \quad (7.3.4)$$

ó

$$\begin{cases} -b + x(a + b) \leq 0 \\ b - x(a + b) \leq 0. \end{cases} \quad (7.3.5)$$

---

<sup>5</sup>vease archivo ej2\_imitacion\_clasico.ipynb en el repositorio de Github

La condición 7.3.4 es claramente descartable, por lo que no nos interesa ver cuando se cumple 7.3.5. Esta condición equivale a

$$b - x(a + b) = 0,$$

por lo que para que un equilibrio de Nash interior en 7.3.3, en caso de existir, será  $\hat{x} = \frac{b}{a+b}$  al igual que en el caso del replicador clásico (pues en este caso hemos calculado el valor de  $x_2$ ).

Nos interesa ver como SINDy responde a esta dinámica de imitación que surge de la misma matriz que antes, en la que  $a = 5$  y  $b = 3$ , y que clase de aproximación podemos obtener del equilibrio de Nash interior, en este caso  $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$  (para nuestro caso  $\frac{3}{8}$ ).

Para esto, hemos creado una base de datos con trayectorias a partir de los mismos puntos iniciales y con el mismo paso en el método de un paso (con el mismo  $t_f$ ) que utilizamos en el ejemplo anterior, y con el mismo valor de hiperparámetro  $\lambda = 0,2$ <sup>6</sup>. Mantenemos también la misma familia de funciones  $\Theta(x) = \{x, x^2, \dots, x^6\}$ . Al igual que antes, una vez definida la base de datos, el hiperparámetro y la familia de funciones  $\Theta$  resolvemos el sistema 7.1.7 con el Algoritmo 1 implementado a través de PySINDy ([7]). En este caso, la dinámica resultante del ajuste de SINDy es

$$\dot{\hat{x}} = 15,94\hat{x}^1 - 219,71\hat{x}^2 + 1034,13\hat{x}^3 - 2188,08\hat{x}^4 + 2155,02\hat{x}^5 - 806,17\hat{x}^6. \quad (7.3.6)$$

En la Figura 7.4 podemos observar comparaciones entre trayectorias reales de 7.3.3 y las trayectorias de la dinámica proveniente de SINDy generada por 7.3.6. Las trayectorias de ambas dinámicas han sido aproximadas con el método RK-45 con paso  $d_t = 0,001$ . Mirando la figura podemos apreciar una clara diferencia entre las trayectorias de la dinámica original y las ajustada vía SINDy, sin embargo ninguna de las trayectorias se sale del simplex.

<sup>6</sup>El cambio de lambda surge a partir de una búsqueda sobre una grilla en el (0,1) para un  $\lambda$  mas óptimo, el costo computacional ese leve gracias a la rápida convergencia del algoritmo STLSQ

### Análisis del error: Imitación con Heaviside y aproximación polinomial

A continuación analizamos el error de 7.3.6 con respecto a 7.3.3 usando el Algoritmo 7.2 con los mismos parámetros que en 7.2.8. En este caso, obtenemos

$$e(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \approx 0,108.$$

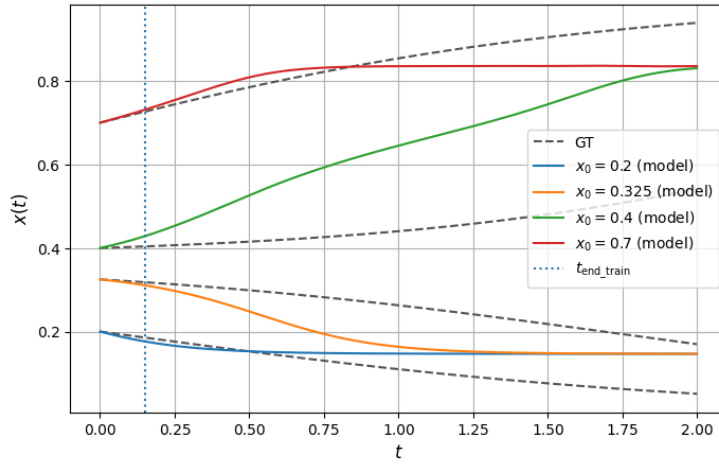


Figura 7.4: Comparación entre trayectorias de la dinámica de imitación verdadera, 7.3.3, y su aproximación por SINDy con funciones polinomiales, 7.3.6

Como aclaramos la comienzo del capítulo, trabajamos bajo la suposición de que la ecuación que buscamos aproximar es de la forma 4.3.1, por lo que en el caso de 7.3.3, al tomar  $\Theta(x) = \{x, \dots, x^6\}$ , la aproximación que estamos haciendo es

$$\dot{x} = x(1-x) \left[ \mathbf{1}_{(0,\infty)}(ax - b(1-x)) - \mathbf{1}_{(0,\infty)}(b(1-x) - ax) \right] \approx x \left[ \sum_{i=0}^5 \alpha_i x^i \right]. \quad (7.3.7)$$

Por ende, lo que estamos intentando es aproximar la función

$$(1-x) \left[ \mathbf{1}_{(0,\infty)}(ax - b(1-x)) - \mathbf{1}_{(0,\infty)}(b(1-x) - ax) \right],$$

con un polinomio de grado 5. Buscamos aplicar SINDy a 7.3.3 con una función de familias  $\Theta(x)$  apropiada. Como sabemos, la familia de funciones  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal del espacio  $L^2((-1, 1))$  con su clásico producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot dx.$$

Si buscamos aproximar una dinámica de la forma 4.3.1 en  $n = 2$ , lo que obtenemos es una dinámica de la forma 5.2.1, donde  $a_1(x_1, x_2)$  y  $a_2(x_1, x_2)$  son las funciones de pagos de cada estrategia pura. Luego, bajo suposición de

$$(1-x).a_1(x, 1-x) \in L^2((-1, 1)) \text{ y } (1-x).a_2(x, 1-x) \in L^2((-1, 1)), \quad (7.3.8)$$

tenemos que

$$(1-x)[a_1(x, 1-x) - a_2(x, 1-x)] = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1} \alpha_n \cdot \cos(n\pi x) + \beta_n \cdot \sin(n\pi x), \quad (7.3.9)$$

para sucesiones  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}, \{\beta_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  apropiadas. A partir de esto, para aproximar una dinámica del replicador 4.3.1 en  $n = 2$ , cuya dinámica se reduce a

$$\dot{x} = x(1-x)[a_1(x, 1-x) - a_2(x, 1-x)],$$

bajo la suposición 7.3.8, la familia de funciones

$$\Theta(x) = \{x \cos(n\pi x), x \sin(n\pi x), x\}_{1 \leq n \leq N} \text{ para algún } N \in \mathbb{N}, \quad (7.3.10)$$

emerge como una alternativa a la familia polinomial que estuvimos usando en los ejemplos anteriores. En particular, mirando nuevamente la dinámica de imitación 7.3.3, vemos que

$$(1-x) \left[ \mathbf{1}_{(0,\infty)}(ax - b(1-x)) - \mathbf{1}_{(0,\infty)}(b(1-x) - ax) \right] \in L^2((-1, 1)),$$

por lo que utilizar SINDy con  $\Theta(x)$  como en 7.3.10 parece ser una posible alternativa para obtener una dinámica similar a 5.2.4.

Veamos que esta idea funciona. Para esto, hemos usado la misma base de datos que en el ajuste de 7.3.6, pero hemos remplazado la familia polinomial por 7.3.10 con  $N = 6$ , además hemos mantenido el umbral  $\lambda = 0.2$ . En este caso tenemos la matriz

$$\Theta(X) = \begin{bmatrix} x(t_1) & x(t_1) \sin(x(t_1)) & \cdots & x(t_1) \cos(6\pi x(t_1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(t_m) & x(t_m) \sin(x(t_m)) & \cdots & x(t_m) \cos(6\pi x(t_m)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad \Xi \in \mathbb{R}^p,$$

a la hora de plantear 7.1.7. Al igual que antes, resolvemos usando el Algoritmo 1 implementado a través de PySINDy <sup>7</sup>. La dinámica resultante nos queda

$$\dot{x} = -0,433 x \cos(\pi x) - 0,417 x \cos(2\pi x) \quad (7.3.11)$$

En la Figura ?? vemos algunas trayectorias de la dinámica original, 7.3.3 (con la etiqueta GT la igual que en gráficos anteriores) en conjunto con trayectorias de 7.3.11.

c

### Análisis del error: Imitación Heaviside con aproximación trigonométrica

Al igual que en los casos anteriores, aproximamos el error 7.2.5 a través del Algoritmo 7.2. Usamos los mismos parámetros y la misma notación que en 7.2.8. En este caso, obtenemos

$$e(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = 0,958,$$

un error muy pronunciado, ampliamente superior a todos los casos anteriores. Este error elevado se lo atribuimos al efecto Gibbs: este nos dice que para cualquier función de  $L^2([-1, 1])$ , cerca sus discontinuidades, la serie de Fourier presenta fuertes oscilaciones. En el caso de la dinámica 7.3.3, la discontinuidad de ambas funciones Heaviside de la expresión sucede en el equilibrio de Nash. Si nuestro razonamiento es correcto, para trayectorias con  $\mathbf{x}_0$  en un entorno de 0,375 debemos ver trayectoria con errores mas altas (donde el error dado un punto inicial lo definimos como 7.2.4)

En la Figura 7.5 comparamos trayectorias de 7.3.3 (etiquetadas GT por ground truth) con trayectorias de la dinámica 7.3.11, en particular, miramos trayectorias con puntos iniciales cerca del equilibrio de Nash.

---

<sup>7</sup>véase archivo ej2\_dinamica\_imitacion

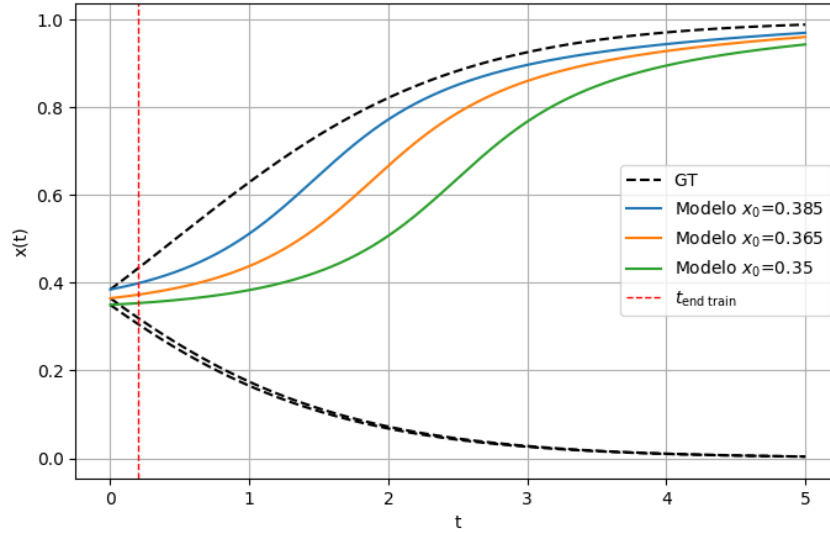


Figura 7.5: Manifestación del efecto Gibbs en la aproximación 7.3.11 de la dinámica de imitación 7.3.3 cerca de su equilibrio de Nash

En efecto, una inspección inicial de las trayectorias de la Figura 7.5 nos muestra que su error 7.2.4 es muy elevado. Para puntos cerca del equilibrio de Nash, la aparición del efecto Gibbs en el término de la derivada de la dinámica deviene en un error muy pronunciado en el error de la trayectoria.

## 7.4. Propiedades del replicador clásico en SINDy

Ya hemos visto cómo plantear un problema de aproximación para una ecuación del replicador genérica mediante el método SINDy con una familia polinomial(7.1.7) y en el caso de unidimensional, hemos implementado un caso con una familia trigonométrica (7.3.11). En esta sección, nos interesa analizar el modelo propuesto desde un punto de vista más teórico, enfocándonos principalmente en el problema de aproximar el replicador clásico (4.1.1) con SINDy a través de la familia polinomial 7.1.1. Haremos este análisis a partir de los resultados de Zhang explicados en la última sección del sexto capítulo.

**Teorema 7.4.1.** Sea  $\{\mathbf{x}(t_j)\}_{1 \leq j \leq m} \subset S_n$  un conjunto de datos una trayectoria proveniente de un sistema del replicador clásico (4.1.1). Suponemos  $p \geq 3$ . Definimos las matrices

$$\Theta(X) \in \mathbb{R}^{m \times (N_p - 1)}, \dot{X} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}, \Xi \in \mathbb{R}^{(N_p - 1) \times (n-1)}$$

como en 7.1.6 y 7.1.7. Aplicamos la iteración de STLSQ 6.2.2 en el sistema de SINDy

$$\Theta(X)\Xi = \dot{X}.$$

Si  $rg(\Theta(X)) = N(p) - 1 = \binom{n-1+p}{p} - 1$  y para  $\lambda > 0$  vale que

$$\min_{1 \leq i \leq p} \min_{j \in S_i} |(\Theta(X)^\dagger \dot{X})_{ji}| \geq \lambda > \max_{1 \leq i \leq p} \max_{j \in \bar{S}_i} |(\Theta(X)^\dagger \dot{X})_{ji}|, \quad (7.4.1)$$

donde  $S_i$  esta definida como en 6.4.2, es decir,

$$S_i := \text{sop}\left(\text{Col}_i((\Theta(X)^\dagger \dot{X}))\right) = \{j \in [n] : [(\Theta(X)^\dagger \dot{X})]_{j,i} \neq 0\},$$

entonces existe una única solución  $\Xi \in \mathbb{R}^{(N_p - 1) \times (n-1)}$  y cumple que

$$\Theta(x)\Xi = \dot{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (7.4.2)$$

Adicionalmente, 6.2.2 la recupera la solución tras una sola iteración.

*Demostración.* Al estar aproximando una sistema de la forma 7.1.5, el cual además es un replicador clásico (cuya matriz llamaremos  $A$ ), llamando

$$a_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k,$$

podemos escribir la dinámica sobre la que estamos aplicando SINDy de la forma

$$\dot{x}_i = p_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_i \left[ (A(a_n, \mathbf{x}_{-n}) - (a_n, \mathbf{x}_{-n})A(a_n, \mathbf{x}_{-n})) \right], \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (7.4.3)$$

En este caso,  $p_i \in \mathcal{P}_3[x_1, \dots, x_{n-1}] \setminus \mathcal{P}_0[x_1, \dots, x_{n-1}]$ . Al igual que en 7.1.2 y 7.1.3, llamamos  $\alpha(1), \dots, \alpha(N_p)$  a la numeración del conjunto de los multi-indices de grado

menor igual a  $p$  para puntos de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , respetando el orden de las columnas de  $\Theta(X)$ . Nuevamente, tomamos  $\alpha(1) = \bar{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Llamamos  $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N_p-1}$  a la función

$$[\Phi(x_1, \dots, x_{n-1})]_j = (x_1, \dots, x_{n-1})^{\alpha(j)}, \quad \forall 2 \leq j \leq N_p.$$

En particular, por como hemos definido  $\Phi$  vale que

$$\Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T = \text{Fil}a_j(\Theta(X)), \quad \forall 1 \leq j \leq m.$$

Como estamos en el caso del replicador clásico reducido a  $n - 1$  dimensiones (7.4.3) y tomamos  $p \geq 3$ , sabemos que existen únicos  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}^{N_p-1}$  tal que

$$\dot{x}_i = p_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Phi(x_1, \dots, x_{n-1})^T \xi_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, \forall x \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (7.4.4)$$

En particular, tenemos que

$$\dot{x}_i(t_j) = p_i(\pi_n(\mathbf{x}(t_j))) = \Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T \xi_i \quad \forall 1 \leq j \leq m, \forall 1 \leq i \leq m. \quad (7.4.5)$$

Como  $\text{rg}(\Theta(X)) = N_p - 1$ , el problema  $\Theta(X)\Xi = \dot{X}$  tiene una única solución

$$\Xi = [\Theta(X)^T \Theta(X)]^{-1} \Theta(X) \cdot \dot{X} = (\Theta(X))^\dagger \dot{X},$$

además, la condición que le exigimos a  $\lambda > 0$  nos garantiza que se recupera en un paso por 6.4.2, para finalizar nos basta probar que  $\Xi$  cumple 7.4.2.

Supongamos que existe  $1 \leq i \leq n-1$  tal que  $\text{Col}_i(\Xi) \neq \xi_i$ . Luego, como la matriz  $\Theta(X)$  es de rango completo, y por ende  $\{\Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))\}_{1 \leq j \leq m}$  es base de  $\mathbb{R}^{N_p-1}$ , debe existir  $1 \leq j \leq m$  tal que

$$\Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T \cdot \xi_i \neq \Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T \cdot \text{Col}_i(\Xi),$$

pero

$$\Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T \cdot \text{Col}_j(\Xi) = \text{Fil}a_j(\Theta(X)) \cdot \text{Col}_i(\Xi) = \dot{X}_{ji} = \dot{x}_i(t_j),$$

por lo que concluimos que  $\Phi(\pi_n(\mathbf{x}(t_j)))^T \cdot \xi_i \neq \dot{x}_i(t_j)$ , lo cual contradice 7.4.5. Luego,

$$\Xi = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

por lo que, por 7.4.5, debe cumplir 7.4.2. □



# Capítulo 8

## Conclusiones

A lo largo del trabajo estudiamos la aplicación del método Sparse Identification of Non-Linear Dynamics (SINDy) a dinámicas de Teoría de Juegos Evolutiva con el objetivo principal de analizar en qué medida es posible reconstruir ecuaciones del replicador y, a partir de ellas, identificar equilibrios de Nash, utilizando únicamente datos discretos de trayectorias del sistema. A lo largo de la tesis se desarrolló tanto el marco teórico necesario de Teoría de Juegos Evolutiva (capítulos [2](#), [3](#), [4](#), [5](#)) como de las herramientas teoricas y prácticas necesarias para la comprensión e implementación de SINDy (capítulo [6](#)). Finalmente, se realizaron aproximaciones numéricas del rendimiento de SINDy en este contexto junto con visualizaciones de las dinámicas originales con sus aproximaciones (capítulo [7](#)).

En el capítulo [7](#) hemos implementado de forma detallada el método SINDy sobre distintas variantes de la ecuación del replicador. En primer lugar, se analizó el replicador clásico unidimensional, donde la dinámica es polinómica y su estructura algebraica encaja de manera natural la familia polinomial utilizada por SINDy. En este caso ([7.2.2](#)) se observó que, siempre que la base de datos tenga un alto grado de precisión, puede obtenerse una aproximación con un error muy bajo y una alta capacidad de aproximación de la trayectoria inclusive por fuera de la base de datos. Adicionalmente, se logró una aproximación cerca del equilibrio de Nash interior de la dinámica. Por otro lado, en [7.2.7](#) pudimos ver que ante un pequeño ruido gaussiano

y datos con un paso temporal aumentado, el incremento del error fue muy notable y aún más, se perdió la forma de polinomio de grado 3 que había logrado preservar el primer modelo.

Los experimentos muestran que la presencia de ruido puede introducir oscilaciones espurias en las derivadas estimadas, lo que a su vez conduce a un modelo mucho menos estable y de peor ajuste. Esta sensibilidad al ruido es consistente con lo reportado en la literatura (propia de SINDy) y constituye una limitación conocida del método, especialmente en sistemas donde la dinámica depende de derivadas que deben estimarse numéricamente. El análisis del error realizado en el capítulo 7 muestra cómo dichas perturbaciones se traducen en errores globales significativamente mayores. Esto sugiere que la calidad de la reconstrucción depende fuertemente de la precisión con la que se obtengan las trayectorias y de la capacidad de filtrar o suavizar el ruido antes de aplicar SINDy.

Otra parte importante del trabajo fue la aplicación del método a dinámicas de imitación, que extienden y generalizan al replicador clásico incorporando funciones de respuesta más complejas (como la regla sigmoide de Fermi o reglas tipo Heaviside). Utilizamos estos casos para evaluar el rendimiento de SINDy en dinámicas cuyas derivadas no son parte de la familia de funciones que elegimos como  $\Theta(x)$ , poniendo así una prueba más exigente a su capacidad de generalización. A pesar de ello, los resultados muestran que SINDy puede capturar de manera sorprendentemente precisa la dinámica efectiva. En particular, en el ejemplo basado en la regla de imitación de Fermi, SINDy recupera un polinomio de grado seis cuyas raíces reales coinciden, hasta errores de truncamiento numérico, con los equilibrios del modelo original. Esto indica que, aunque la representación polinómica es una aproximación, puede ser suficiente para capturar la geometría esencial de las trayectorias del sistema. El análisis del error confirma este comportamiento favorable, mostrando diferencias pequeñas aún para puntos iniciales fuera del conjunto de entrenamiento. En el caso de la dinámica de imitación con una regla de imitación proveniente de la función Heaviside la aproximación lograda con SINDy fue considerablemente peor que la obtenida para el replicador clásico y la dinámica de Fermi. A partir de esto, podemos conjeturar

que las dinámicas con derivadas no continuas le traen problemas considerables a SINDy.

En conjunto a la aplicación de SINDy a varias dinámicas de replicador al final del capítulo 7 se presentó un análisis teórico del caso de SINDy aplicado al replicador clásico utilizando herramientas teóricas vistas en el capítulo 6, provenientes de [8]. Utilizando el resultado de Zhang (6.4.2), logramos probar que si nuestra matriz de datos evaluados es de rango completo, tomando el hiperparámetro de SINDy en un cierto rango podemos recuperar la dinámica de replicador clásica. Esto nos provee una base teórica sólida para la aplicación de SINDy a dinámica del replicador clásico en dimensiones mas grandes sin necesidad de programar varios ejemplos puntuales.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que SINDy constituye una herramienta valiosa para la identificación de modelos dentro de la Teoría de Juegos Evolutiva, especialmente cuando la dinámica subyacente pertenece (o es cercana) a la familia del replicador clásico. Su capacidad para encontrar representaciones dispersas permite no solo reconstruir ecuaciones diferenciales, sino también obtener información cualitativa relevante, como la posición de equilibrios internos o la estructura de estabilidad de la dinámica. Aunque existen limitaciones entre ellas, la sensibilidad al ruido, la elección del umbral  $\lambda$  y la dependencia fuerte de la biblioteca de funciones, el método se muestra robusto en escenarios controlados y flexible para modelar dinámicas complejas.

Respecto a las líneas de investigación que el trabajo deja abiertas, resultaría interesante obtener una generalización de las condiciones suficientes del replicador clásico hacia dinámicas de replicador más generales, lo que permitiría justificar con mayor solidez la aplicación de SINDy en modelos de mayor dimensión. Asimismo, sería valioso estudiar la evolución del error de SINDy en dinámicas de imitación y en otras dinámicas relacionadas, en dimensiones superiores. En síntesis, el presente trabajo demuestra que SINDy puede utilizarse de manera efectiva para aproximar dinámicas de replicador y sus generalizaciones, y constituye un aporte tanto computacional como teórico a la intersección entre el ML y la teoría de juegos.

# Bibliografía

- [1] Karl Sigmund, **Introduction to Evolutionary Game Theory**. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol. 69, 2001.
- [2] John Nash, **Non-Cooperative Games**. *Annals of Mathematics*, Vol. 54, No. 2, 1951.
- [3] Hofbauer, J., Sigmund, K., **Lotka–Volterra equations for predator–prey systems**. En: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 1998, pp. 11–21.
- [4] Hofbauer, J., Sigmund, K., **Replicator dynamics**. En: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 1998, pp. 67–85.
- [5] Hofbauer, J., Sigmund, K., **Evolutionary Game Dynamics**. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 40, pp. 479–519, 2003.
- [6] Brunton, S. L., Proctor, J. L., Kutz, J. N., **Discovering governing equations from data**. arXiv preprint *arXiv:1509.03580*, 2015. <https://arxiv.org/abs/1509.03580>
- [7] De Silva, B. M., Champion, K., Quade, M., Loiseau, J.-C., Kutz, J. N., Brunton, S. L., **PySINDy: A Python package for the sparse identification of nonlinear dynamical systems from data**. *Journal of Open Source Software*, Vol. 5, No. 49, 2104 (2020). <https://doi.org/10.21105/joss.02104>

- 
- [8] Zhang, L., Schaeffer, H., **On the convergence of the SINDy algorithm.**  
*SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 17, No. 3, pp. 948–972, 2019.  
<https://doi.org/10.1137/18M1189828>