



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Regiones de estabilización en el problema de
Huijberts-Michiels-Nijmeijer utilizando un control de Pyragas

Erica Elisabeth Rohdenburg

Directora: Dra. Verónica Estela Pastor

Fecha de Presentación: 13 de noviembre de 2025

Agradecimientos

A Verónica, la mejor directora de tesis, por guiarme, enseñarme, acompañarme y contenerme en todo el proceso. Gracias por ayudarme a completar esta etapa y por iniciarme en la siguiente.

A Graciela González, la experta en el tema, por su incontable tiempo dedicado a escucharme y orientarme. Gracias por tu mirada crítica y constructiva.

A Sebastián Grynberg, por conectarme con Verónica y por ayudarme a entrar en el mundo de la investigación profesionalmente. Gracias por confiar en mí.

A mi mamá, mi papá y mi hermano, quienes nunca dudaron de mi potencial y siempre me alentaron a seguir adelante. Gracias por quererme tal como soy.

A mis amigas de la facu: Ine, Magui y Ceci, por entenderme, por apoyarme, por estar ahí. ¡Gracias chicas, por estar a mi lado!

A Sergio, por creer en mí, por acompañarme y escucharme, por tu infinita paciencia. Gracias por todo el amor que me das.

Índice general

Introducción	5
1. Nociones preliminares sobre sistemas dinámicos y control	7
1.1. Generalidades	7
1.1.1. Sistemas dinámicos	7
1.1.2. Clasificación de los sistemas dinámicos a tiempo continuo	8
1.1.3. Punto de equilibrio de un sistema dinámico	9
1.2. Sistemas dinámicos bidimensionales linealizados y sus equilibrios	9
1.2.1. Clasificación del punto de equilibrio	11
1.3. Antecedentes e introducción al Problema de HMN	14
1.3.1. Línea de Tiempo	18
1.4. Ecuación característica para ecuaciones diferenciales lineales con retardo	19
2. Análisis del problema de HMN utilizando el TDFC	21
2.1. Clasificación de los puntos de equilibrio	21
2.2. Planteo del problema de control	24
2.3. Dos resultados teóricos necesarios	26
2.3.1. D-Descomposición	26
2.3.2. Teorema de Rouché	28
3. Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$	29
3.1. Enunciado del Teorema 1	29
3.2. Demostración del teorema	30
3.2.1. Sobre la elección de k y τ	37
3.3. Corolarios y simulaciones	41
4. Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$	49
4.1. Enunciado del Teorema 3	49
4.2. Demostración del teorema	50
4.2.1. Sobre la elección de τ y k	54
4.3. Corolarios y simulaciones	57

5. Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$	63
5.1. Enunciado del Teorema 5	63
5.2. Demostración del teorema	65
5.2.1. Sobre la elección de τ y k	69
5.3. Corolarios y simulaciones	85
6. Consideraciones finales y trabajo a futuro	97
A. Trabajo presentado en el X Congreso de Matemática Aplicada a la Computación y la Industria (MACI)	99
A.1. Introducción	100
A.2. Planteo del Problema	100
A.3. Síntesis de resultados	101
A.3.1. Sobre la imposibilidad de estabilizar puntos sillas	101
A.3.2. Alcances en la estabilización de nodos y focos inestables	101
A.4. Diseño de una propuesta superadora para el caso del punto silla	103
A.5. Trabajo a Futuro	105

Introducción

El estudio de sistemas dinámicos resulta tanto de interés desde el punto de vista matemático, en relación con ecuaciones diferenciales, como de diversas disciplinas: física (mecánica clásica), química (cinética de reacciones), biología (estudio de poblaciones), etc. Cuando se analiza la evolución de estos sistemas puede resultar que se estabilicen en un equilibrio, continúen repitiendo un ciclo o hagan algo más complicado.

La estabilización en el modelo matemático se puede llevar a cabo mediante la implementación de pequeñas perturbaciones. Estas conducen a la modificación de la ecuación diferencial mediante el agregado de un término llamado “control”. Entre los primeros métodos de control, diseñados en relación al control de caos, se encuentra el de Pyragas [27], quien propuso un control por retroalimentación llamado Time-Delayed Feedback Control (TDFC). Posteriormente, se han desarrollado muchos trabajos intentando mejorar los resultados de Pyragas y varias modificaciones para salvar sus limitaciones. Entre las limitaciones del TDFC una de las más recurrentes es la conocida como Odd Number Limitation (ONL) la cual establece que no es posible la estabilización, si el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial del problema, sin control, tiene una cantidad impar de raíces con parte real positiva.

En esta tesis abordamos los resultados que prueban Leonov, Shumafov y Kuznetsov en su trabajo *Delayed Feedback Stabilization and the Huijberts–Michiels–Nijmeijer Problem* ([19]). Los autores obtienen descripciones analíticas de las regiones, donde la estabilización es posible, para el problema que ellos denominan como “Problema de Huijberts-Michiels-Nijmeijer (HMN)” utilizando el TDFC, basados en la descripción del problema desarrollado en *Stabilizability via time-delayed feedback: An eigenvalue optimization approach* ([16]).

El objetivo de esta tesis es estudiar la metodología y estrategias utilizadas en [19] para obtener las descripciones analíticas de las regiones de estabilización al aplicar TDFC, en sistemas bidimensionales, lineales en el estado, controlables, y con entrada y salida escalar. La profundización en los alcances del método utilizado abre camino para proponer mejoras e indagar nuevas propuestas.

Para el abordaje de los temas que involucra esta tesis realizamos una revisión de conceptos y resultados sobre Sistemas Dinámicos y sobre Control relacionados con el problema. Posteriormente, hicimos una lectura profunda y detallada del trabajo [19], complementando con otros textos mencionados en la bibliografía. Dado que la metodología propuesta en [19] para el análisis de las regiones es similar en los doce teoremas que allí se presentan, decidimos abordar solamente los teoremas referentes al control de Pyragas para el caso bidimensional,

y dejar afuera los teoremas del control llamado “clásico”. Luego, al ir completando las demostraciones de los teoremas elegidos, propusimos algunas modificaciones a fin de explicitar la estructura de las mismas. Finalmente realizamos una serie de simulaciones que ejemplifican la implementación de los resultados.

La tesis quedó entonces estructurada en seis capítulos: el Capítulo 1, abarca estudios preliminares sobre sistemas dinámicos y un recorrido del estado del arte sobre los métodos de control orientado al TDFC, introduciendo el problema de HMN y la ecuación característica del problema al aplicar el TDFC. En el Capítulo 2 se realiza un análisis del problema anterior y se enuncian las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de las demostraciones de los teoremas sobre las regiones de estabilización. Los Capítulos 3, 4 y 5 abordan la demostración de los teoremas que describen las regiones de estabilización según diferentes valores de los parámetros del problema de HMN y el control TDFC. Todos ellos tienen la misma estructura: enunciado del teorema, su demostración, desarrollo de las condiciones de suficiencia para los parámetros de estabilización y finalmente simulaciones y análisis de los resultados en cada caso. Por último, el Capítulo 6 resume las consideraciones generales y presenta varias propuestas de trabajo a futuro. De entre propuestas surge una que ya estamos abordando y por la cual agregamos un Anexo con el trabajo presentado en el X Congreso de Matemática Aplicada a la Computación y la Industria (MACI), en la ciudad de Córdoba, en Mayo de 2025.

Capítulo 1

Nociones preliminares sobre sistemas dinámicos y control

En esta sección presentamos la teoría básica necesaria para la lectura de esta tesis, comenzando con las definiciones de sistemas dinámicos y su clasificación, analizando los puntos de equilibrio de un sistema dinámico lineal e introduciendo el concepto de *control*.

1.1. Generalidades

1.1.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un modelo matemático que describe la evolución de las variables de un sistema físico a lo largo del tiempo. Existen esencialmente dos tipos de sistemas dinámicos, que se diferencian respecto de la naturaleza de la variable *tiempo*: los que consideran el tiempo como una variable discreta y los que consideran el tiempo como una variable continua.

- En el primer caso, los sistemas dinámicos se modelan utilizando ecuaciones en diferencias finitas de la forma $x_{t+1} = f(x_t, t)$ donde $t \in \mathbb{N}_0$ es el tiempo, $x_t \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado del sistema en el instante t y $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial que representa la dinámica del sistema.
- En el segundo caso, es decir los sistemas dinámicos a tiempo continuo, se modelan con ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, donde $t \in \mathbb{R}_0^+$ es el tiempo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado en el instante t y $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial. Este caso es el más común en el análisis del comportamiento de los sistemas físicos, como un péndulo, un fluido en movimiento, un sistema planetario, etc.

En general, sistemas dinámicos de los dos tipos se asocian a disciplinas como la mecánica clásica, la teoría del control y la teoría del caos, donde el énfasis está en el análisis de cómo cambian los estados de un sistema en función del tiempo.

1.1.2. Clasificación de los sistemas dinámicos a tiempo continuo

Los sistemas dinámicos pueden clasificarse según distintas características. A continuación enumeramos y describimos algunas de ellas, que resultan de importancia para esta tesis.

■ **Según la dependencia explícita respecto del tiempo:**

- **Sistemas autónomos:** La evolución no depende explícitamente del tiempo, sino solo del estado actual del sistema.

Ejemplo: Un péndulo sin fricción.

- **Sistemas no autónomos:** La evolución está determinada tanto por el estado del sistema como por el instante de tiempo actual.

Ejemplo: Un péndulo impulsado periódicamente por una fuerza externa que varía con el tiempo.

Observación: Un sistema no autónomo puede pensarse como un sistema autónomo haciendo el siguiente cambio de variables.

Supongamos que tenemos el sistema no autónomo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos una nueva variable $x_{n+1}(t) = t$ y para ella vale que $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$. Entonces, el sistema puede reescribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, x_{n+1}) \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases}$$

que si llamamos $y = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $g = (f, 1)$ el sistema nos queda

$$\dot{y} = g(y),$$

que resulta un sistema autónomo.

■ **Según la linealidad:**

- **Sistemas lineales:** La relación entre las variables del sistema es lineal, por lo que resultan más fáciles de analizar matemáticamente en forma matricial.

Se modelan como: $\dot{x} = Ax$ donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- **Sistemas no lineales:** La relación entre las variables es no lineal, lo que puede conducir a fenómenos complejos como caos y bifurcaciones.

Ejemplo: $\dot{x} = x^2$.

■ **Según el determinismo:**

- Sistemas deterministas: Su evolución está completamente determinada por las condiciones iniciales y las ecuaciones del sistema.

Ejemplo: El movimiento planetario bajo la ley de gravitación.

- Sistemas estocásticos: Incluyen elementos de aleatoriedad, y su evolución no está completamente determinada.

Ejemplo: Movimiento browniano.

■ **Según el número de grados de libertad:**

- Sistemas de un grado de libertad: Solo tienen una variable independiente que describe su estado.

Ejemplo: Un péndulo simple.

- Sistemas de múltiples grados de libertad: Tienen varias variables independientes. Pueden ser bidimensionales, tridimensionales, etc.

Ejemplo: Un sistema de partículas conectadas por resortes.

■ **Según el comportamiento a largo plazo:**

- Sistemas estables: Vuelven a su estado inicial o a un estado de equilibrio después de una perturbación.

Ejemplo: Un péndulo amortiguado.

- Sistemas inestables: Se alejan del estado de equilibrio tras una perturbación.

Ejemplo: Una bola en la cima de una colina.

- Sistemas caóticos: Son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales, lo que produce comportamientos impredecibles a largo plazo.

Ejemplo: El atractor de Lorenz.

1.1.3. Punto de equilibrio de un sistema dinámico

Consideremos un sistema dinámico a tiempo continuo, autónomo, representado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable del sistema, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial.

Decimos que x^* es un punto de equilibrio del sistema (1.1.1) si $f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$, es decir, si todas las componentes de f se anulan en ese punto.

1.2. Sistemas dinámicos bidimensionales linealizados y sus equilibrios

Consideremos el sistema (1.1.1) en el caso bidimensional, es decir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x^* = (0, 0)$ puesto que si no, basta hacer un cambio de variables de la forma $y = x - x^*$ para obtener

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*) = \tilde{f}(y)$$

donde \tilde{f} tiene las mismas propiedades que f y su punto de equilibrio es $y^* = (0, 0)$.

Nos interesa, entonces, estudiar el comportamiento de las variables del sistema x_1, x_2 , cerca del punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$. Este comportamiento se observa en el retrato de fase, que es la representación de la dinámica del sistema como un campo vectorial en el espacio de estados, y que para el caso bidimensional es el plano x_1, x_2 .

Esta representación puede ser tan complicada como complejo sea el campo f . A fin de simplificar el análisis, existe un teorema que relaciona el comportamiento de un sistema con el comportamiento del sistema resultante de su linealización. Comencemos por realizar la linealización y luego enunciemos el teorema.

Linealización

Dado el sistema (1.1.1), con $x^* = (0, 0)$ y f un campo C^1 en x^* , entonces la linealización del campo es:

$$f(x) = f(x^*) + Df(x^*) \cdot x + O^2(x)$$

de forma que si $O^2(x)$ es despreciable y como $f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$, el **sistema linealizado** nos queda:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = Df(x^*) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (1.2.1)$$

Teorema de Hartman-Grobman

El retrato de fase de un sistema no lineal, cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, es topológicamente equivalente al retrato de fase de la linealización alrededor de ese punto de equilibrio. Esto es, en el caso de que no exista un subespacio central podemos deformar el retrato de fase de la linealización continuamente para parecerse al retrato de fase del sistema original y viceversa.

Queda por definirse qué es un punto de equilibrio hiperbólico. Esto lo hacemos en la sección 1.2.1.

Analicemos primero las soluciones del sistema linealizado de la forma $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$, donde $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$, o sea

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Observemos que $x^* = (0, 0)$ es siempre una solución del sistema (1.2.1), y que si $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son dos soluciones de este sistema lineal, entonces vale que $\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)$ también es solución de dicho sistema.

De las infinitas soluciones nos interesan las que tienen la forma $x(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{C}^2$, $v \neq (0, 0)$, puesto que si reemplazamos en (1.2.1) nos queda:

$$\lambda e^{\lambda t} \cdot v = A \cdot e^{\lambda t} \cdot v$$

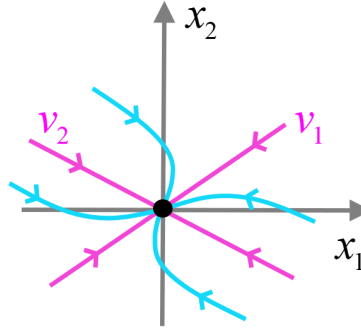
y cancelando las exponenciales nos queda

$$\lambda \cdot v = A \cdot v,$$

que se puede interpretar como un problema de autovalores y autovectores para la matriz A .

Vemos un ejemplo de esta interpretación en el diagrama de fase de la Figura 1.1.

Figura 1.1: Ejemplo de diagrama de fase.



Para el problema lineal, realizamos su diagrama de fase, y representamos en rosa, los autoespacios asociados a λ_1 y λ_2 . Cualquier trayectoria que comienza en ese subespacio, se queda en ese subespacio. Representamos en celeste, las trayectorias correspondientes a soluciones con condiciones iniciales fuera de los autoespacios.

1.2.1. Clasificación del punto de equilibrio

Clasificamos el punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ según los autovalores de A , siguiendo el capítulo 5 de [32]:

1. Si $Re(\lambda_i) \neq 0$ decimos que el equilibrio es HIPERBÓLICO.
 - a) Cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ decimos que es ROBUSTO.
 - 1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y además $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ decimos que es un NODO.
 - 2) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y además $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ decimos que es un PUNTO SILLA.
 - 3) Si $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ decimos que es un ESPIRAL o FOCO.
 - b) Cuando $\lambda_1 = \lambda_2$ decimos que es FRÁGIL.
 - 1) Si $\dim(Nul(A - \lambda I)) = 2$ decimos que es un NODO ESTRELLA.
 - 2) Si $\dim(Nul(A - \lambda I)) = 1$ decimos que es un NODO DEGENERADO.
2. Si existe un λ_i tal que $Re(\lambda_i) = 0$ decimos que el equilibrio es NO HIPERBÓLICO.
 - a) Si existe un $\lambda = 0$ (incluso ambos) decimos que es un EQUILIBRIO NO AISLADO.
 - b) Si $\lambda = iw$, $w \in \mathbb{R}$ decimos que es un CENTRO.

A su vez, dentro de la categoría HIPERBÓLICO existe una clasificación transversal según la parte real de los autovalores:

- Si $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, se dice que es un equilibrio ESTABLE.
- Si $\exists i \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, se dice que es un equilibrio INESTABLE.

En la figura [1.2](#) se puede observar esta clasificación en conjunto con un gráfico representativo del equilibrio en cada caso.

Figura 1.2: Clasificación del punto de equilibrio según los autovalores.

HIPERBÓLICOS ($\forall i = 1, 2 : \text{Re}(\lambda_i) \neq 0$)		NO HIPERBÓLICOS ($\exists i : \text{Re}(\lambda_i) = 0$)		
ESTABLES		INESTABLES		
ROBUSTOS ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)	NODO v_1 : vel. lenta / v_2 : vel. rápida		NO AISLADOS	
	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ 	$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ 	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_2 < 0$) 	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
	PUNTO SILLA $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ 		CENTRO $\lambda_{1,2} = \pm bi$ 	
	ESPIRAL $\lambda_{1,2} = a \pm bi \rightarrow \text{solución} : e^{\lambda t} = e^{at} e^{ibt}$			
	$a < 0$ 	$a > 0$ 		
FRÁGILES ($\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$)	NODO ESTRELLA $\dim(S_\lambda) = 2$			
	$\lambda < 0$ 	$\lambda > 0$ 		
	NODO DEGENERADO $\dim(S_\lambda) = 1$			
	$\lambda < 0$ 	$\lambda > 0$ 		

Referencias:
● Equilibrio estable
○ Equilibrio inestable

1.3. Antecedentes e introducción al Problema de HMN

Un sistema dinámico no lineal puede presentar, además de **puntos de equilibrio, órbitas periódicas**. Las órbitas periódicas son curvas cerradas en el diagrama de fase que atraen o repelen algunas o todas las trayectorias, lo que da lugar a su clasificación en estables e inestables. A las órbitas periódicas inestables se las conoce como UPOs, por su sigla en inglés *Unstable Periodic Orbit*.

Históricamente, se han desarrollado diversas técnicas con el objetivo de estabilizar puntos de equilibrio y órbitas periódicas. Estas técnicas suelen identificarse como métodos de “control del caos” y consisten en aplicar pequeñas perturbaciones al sistema dinámico en momentos precisos, con el propósito de remover el comportamiento caótico presente en ciertos sistemas dinámicos no lineales.

Cuando el control aplicado depende del estado $x(t)$ o de la salida del sistema, generalmente llamada $y(t)$, el sistema resultante se dice *sistema de control en lazo cerrado*. La salida de un sistema es alguna característica observable o medible del sistema, por esto consideramos $y(t) = g(x)$. En cambio, si el control no depende de la salida, entonces el sistema se dice *sistema de control en lazo abierto*. Para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto, mientras que los sistemas de control en lazo cerrado se utilizan cuando se presentan perturbaciones impredecibles y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema, que es justamente el caso que queremos estudiar.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un sistema inestable o caótico modelado por la ecuación $\dot{x} = f(x)$, un control posible (y el más comúnmente usado) es una función $u(t)$ que modifica la ecuación diferencial de la siguiente forma $\dot{x} = f(x) + u(t)$.

“Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema.” (extraído de Ogatta [24]).

El control de caos ha sido ampliamente desarrollado desde los años 90 y una importante línea de investigación se aboca a la estabilización de UPOs mediante perturbaciones no invasivas (esto es, casi se anulan a medida que se acercan al objetivo). A continuación, presentamos un breve recorrido de esta parte de la historia del control siguiendo el trabajo de Kuznetsov y otros ([17]):

- La técnica pionera que sentó las bases para el control de caos fue desarrollada en 1990 por Ott, Grebogy y Yorke [25] hoy conocida como método OGY. Ellos reformularon el problema al control de un sistema caótico a tiempo discreto y propusieron un método para estabilizar sus órbitas mediante pequeñas perturbaciones de un parámetro accesible del sistema, dependientes del tiempo en forma de *feedback*. Las desventajas de este método es que presupone conocida la órbita, es sensible al ruido y puede tomar mucho tiempo en conseguir la estabilización.
- En 1992, Pyragas ([27]) desarrolla dos métodos para estabilizar UPOs con particular interés en las de los sistemas caóticos. Estos métodos son a tiempo continuo y consisten en aplicar perturbaciones que no son invasivas.

Primer método de Pyragas: Control de Fuerza Externa

Este método fue desarrollado para un sistema con órbitas periódicas inestables. Suponiendo conocida la órbita que se quiere estabilizar, es decir si se conoce la función $\tilde{y}(t)$, con $\tilde{y}(t + T) = \tilde{y}(t)$ donde T es el período de la órbita, el control propuesto fue:

$$u(t) = K[\tilde{y}(t) - y(t)],$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema, $\tilde{y}(t)$ es la salida del sistema para la UPO y K es la constante que representa la ganancia de la perturbación, que debe ser ajustado experimentalmente. Este método tiene como desventaja que es necesario conocer de antemano la órbita (o al menos alguna información sobre ella).

Para superar esta dificultad, propuso un segundo método.

Segundo método de Pyragas: Time Delay Feedback Control (TDFC)

En este caso el control se define como

$$u(t) = K[y(t - \tau) - y(t)],$$

donde τ representa el delay. Si $\tau = T$ es el período de la órbita a estabilizar y el sistema alcanza la UPO, $u(t) = 0$. Una ventaja de esta propuesta es su sencilla realización experimental.

Este último método será de gran importancia para esta tesis, razón por la cual, la línea de tiempo se enfoca en las modificaciones que se han planteado sobre el mismo, y las limitaciones con las cuales se han encontrado.

- En 1993, Bielawski y otros introducen en su trabajo ([4]) un método para controlar equilibrios, pero usando la derivada de la señal:

$$u(t) = K\dot{x}(t).$$

Este método no resultó robusto, como sí lo es el TDFC.

- En 1994, Socolar, Sukow y Gauthier ([31]) proponen una modificación al TDFC, cambiando la señal del feedback por la serie de términos con delay:

$$u(t) = K \left[y(t) - (1 - R) \sum_{k=1}^{\infty} R^{k-1} y(t - kT) \right]$$

Esta técnica se llamó *TDFC extendido* y representó una mejora en la versión anterior, en la medida que permite estabilizar órbitas con mayor inestabilidad.

- En 1996, Ushio observó que el método TDFC tiene una gran desventaja conocida como: *La limitación del número impar* también llamada ONL, por su sigla del inglés *Odd Number Limitation* ([33]). Esto significa que el método no puede estabilizar equilibrios de sistemas cuya linealización tenga una matriz con cantidad impar de autovalores con parte real positiva. Esta observación se hizo en equilibrios de sistemas a tiempo discreto usando $u(k) = K[x(k) - x(k - 1)]$ como control. A partir de aquí, muchos otros se dedicaron a estudiar la ONL en distintos sistemas, y a buscar formas de superarla.

- En 1997, Nakajima prueba en su trabajo ([20]) la ONL para el TDFC aplicado sistemas a tiempo continuo no autónomos. Y en 1998, Nakajima y Ueda extienden la ONL para otros esquemas de feedback con delay, como el TDFC extendido, siempre en sistemas no autónomos ([21]).
- En 2002, Hino, Yamamoto y Ushio ([12]) observaron la ONL para sistemas a tiempo discreto usando otra versión de control.
- Hasta aquí, siempre se había observado la ONL en sistemas no autónomos. Pero en 2007, Field y otros encontraron un ejemplo de sistema autónomo donde la ONL no se sostiene ([7]).

Volvamos entonces a las distintas modificaciones que se fueron aplicando al método TDFC.

- En 2004, Ahlborn y Parlitz introdujeron en sus trabajos ([1, 2]) un control con tiempos de retardo múltiples, que usa dos o más señales con distintos tiempos de retardos no necesariamente enteros, diferenciándolo así del TDFC extendido. El análisis de este método fue llevado a cabo en sistemas como el circuito de Chua, los sistemas de Rössler, Lorenz, y otros; donde pudieron observar que resulta más eficiente para estabilizar equilibrios y funciona bien para tiempos de retardo grandes. La desventaja es que implica la introducción de muchos parámetros auxiliares.
- Volviendo al TDFC de Pyragas, en 2005 Hövel y Schöll ([14]) probaron computacionalmente que el TDFC sirve también para estabilizar puntos de equilibrios, además de UPOs. En su trabajo hallaron la región de estabilización de un foco en función de los parámetros de la ganancia del feedback (K) y del tiempo de retardo (τ).
- En 2006, Yanchuk y otros ([34]) realizaron un análisis asintótico de los equilibrios para tiempos de retardo grandes, que devolvía el rango de los parámetros para obtener la estabilización del sistema.
- En 2007, Damhms y otros mostraron que un equilibrio de tipo foco puede estabilizarse con el TDFC extendido y además, con la ventaja de que es bueno para controlar sistemas con un mayor número de equilibrios inestables, en comparación con el TDFC original ([6]).
- En 2008 dos estudios se presentaron sobre modificaciones al TDFC, respecto de sus respectivos parámetros: [9] donde Gjurchinovski y Urumov proponen que el tiempo de retardo no sea constante, obteniendo como resultado mayores regiones de estabilización para los sistemas de Rössler y Lorenz; y [11] donde Guzenko y otros estudiaron la posibilidad de modificar el valor de la ganancia K adaptativamente.
- Hacia 2009 el método TDFC estaba bien asentado en la comunidad y Huijberts, Michiels y Nijmeijer en [15] llevaron a cabo un estudio analítico-numérico de los sistemas bidimensionales, lineales con salidas escalares usando dos controles de Pyragas:

- time-delay state feedback $u(t) = K[x(t - \tau) - x(t)]$,
- time-delay output feedback $u(t) = K[y(t - \tau) - y(t)]$.

Su estudio conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo y formulan el problema que más adelante retomarán Leonov, Shumafov y Kuznetsov en el paper que revisamos en esta tesis. El sistema es planteado de acuerdo a las siguientes nociones de la teoría de control:

Dados $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$. Decimos que $\dot{x} = Ax + Bu$ es un **sistema controlable** si y sólo si los vectores B y AB son linealmente independientes, o equivalentemente la matriz $[B \ AB]$ tiene rango 2.

Esta definición es una equivalencia algebraica, para el caso bidimensional, de la Condición de Kalman, que establece que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ es completamente controlable si se puede pasar de un punto en el diagrama de fase a otro punto del diagrama de fase en tiempo finito (Chen, [5]).

Además, cualquier sistema bidimensional controlable puede llevarse a la siguiente forma, mediante un cambio de variables ([5]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - u \end{cases} \quad (1.3.1)$$

de donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

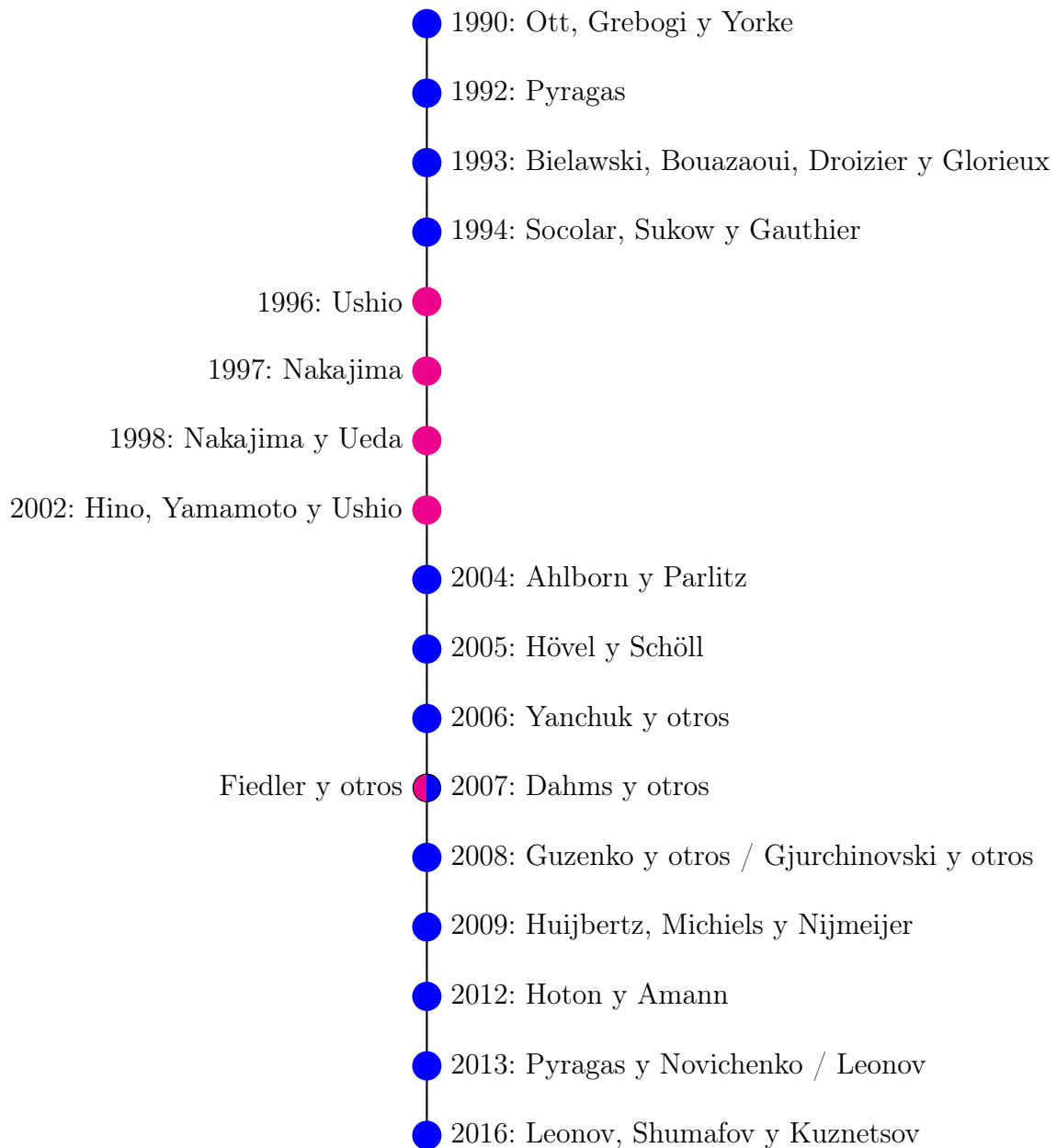
Se llama *El problema de HMN* a la estabilización de los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones (1.3.1) con los controles introducidos y será de especial interés en todo lo que resta de la tesis. Sigamos con la línea del tiempo.

- En 2012, Hooton y Amann en [13] dieron una condición necesaria para que el TDFC estabilice órbitas periódicas inestables en sistemas autónomos. Dada esta condición, en varios papers del 2013/14 se desarrollaron algoritmos para estabilizar órbitas periódicas inestables en sistemas autónomos: Pyragas y Novichenko en [23, 29] y Leonov en [18].
- Finalmente en 2016, Leonov, Shumafov y Kuznetsov en [19] retomaron el problema de Huijberts–Michiels–Nijmeijer para el caso bidimensional y también el caso tridimensional, considerando dos tipos de controles distintos: el TDFC y el clásico, o sea $u(t) = Ky(t - \tau)$, consiguiendo expresiones algebraicas para las regiones de estabilización de los puntos de equilibrio, en función de los parámetros del sistema (1.3.1), y mostrando que, en general, los controles con tiempos de retardo generan regiones de estabilización mayores que las correspondientes a la de los controles sin retardo.

Aquí se posiciona esta tesis cuyo objetivo es hacer una revisión de algunos resultados obtenidos en el paper, presentando además varias simulaciones que ejemplifican dichos resultados.

En la sección 1.3.1 representamos este resumen en una línea de tiempo.

1.3.1. Línea de Tiempo



Referencias:

- Indican estudios respecto de los métodos de control.
- Indican estudios sobre la ONL.

1.4. Ecuación característica para ecuaciones diferenciales lineales con retardo

El problema HMN conduce a una ecuación diferencial lineal con retardo, esto es, de la forma,

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + Nx(t - \tau), \quad (1.4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable del sistema, $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ es el retardo. Igual que para el caso lineal de la sección 1.2 buscaremos soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Así reemplazando en (1.4.1) nos queda:

$$\lambda e^{\lambda t} \cdot v = M \cdot e^{\lambda t} \cdot v + N \cdot e^{\lambda(t-\tau)} \cdot v.$$

Con la finalidad de obtener un problema de autovalores y autovectores, operamos en el segundo término del miembro derecho y nos queda:

$$\lambda e^{\lambda t} \cdot v = M \cdot e^{\lambda t} \cdot v + N \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot v,$$

luego cancelamos la exponencial obteniendo

$$\lambda v = M \cdot v + N \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot v$$

y finalmente sacamos factor común

$$(\lambda I - M - Ne^{-\lambda \tau}) \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Por lo tanto, al plantear su ecuación característica nos queda:

$$\det(\lambda I - M - Ne^{-\lambda \tau}) = 0,$$

que no es polinomial, sino cuasipolinomial, debido a los términos con factores exponenciales.

Nota: El desarrollo de esta sección puede ampliarse con en el fascículo de Pablo Amster ([3]), donde se encuentra una demostración más detallada, basada en la linealidad del siguiente funcional:

$L : C([- \tau, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $L(\phi) = M\phi(0) + N\phi(-\tau)$ con $\phi \in C([- \tau, 0], \mathbb{C}^n)$.

Capítulo 2

Análisis del problema de HMN utilizando el TDFC

2.1. Clasificación de los puntos de equilibrio

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales presentado en la sección 1.3, sin el control:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

El único punto de equilibrio es $x^* = (0, 0)$ y su clasificación depende de los autovalores asociados a la matriz del sistema, que a su vez dependen de los parámetros a_1 y a_2 .

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes del sistema, sus autovalores son las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_1 & \lambda + a_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + a_2\lambda + a_1.$$

Analicemos sus raíces en cada cuadrante del plano de parámetros, según el discriminante:

- Si $a_2^2 - 4a_1 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$. Consideramos $\lambda_{1,2} = \frac{-a_2 \pm i\sqrt{4a_1 - a_2^2}}{2}$.
- Si $a_2^2 - 4a_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Consideramos $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_1$.

Primer cuadrante: $a_1 > 0, a_2 > 0$

- Si $a_2^2 - 4a_1 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R} \wedge \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-a_2}{2} < 0 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un foco estable.
- Si $a_2^2 - 4a_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 < 0$ y además $\dim(S) = 1$ donde S es el autoespacio asociado, y por lo tanto $x^* = (0, 0)$ es un nodo degenerado estable.
- Si $a_2^2 - 4a_1 > 0 \Rightarrow$ Se puede ver en (*) que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un nodo estable.

(*) Ya sabemos que $\lambda_2 < \lambda_1$, por lo que basta ver que $\lambda_1 < 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} < 0 \Leftrightarrow \\ &-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1} < 0 \Leftrightarrow \\ &\sqrt{a_2^2 - 4a_1} < a_2 \Leftrightarrow \\ &a_2^2 - 4a_1 < a_2^2 \Leftrightarrow \\ &-4a_1 < 0 \quad \text{pues } a_1 > 0. \end{aligned}$$

Segundo cuadrante: $a_1 < 0, a_2 > 0$

- No se pueden dar los casos $a_2^2 - 4a_1 < 0$ o $a_2^2 - 4a_1 = 0$ en este cuadrante.
- Si $a_2^2 - 4a_1 > 0 \Rightarrow$ Se puede ver en (**) que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un punto silla.

(**) Es trivial que $\lambda_2 < 0$, por lo que basta ver que $\lambda_1 > 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} > 0 \Leftrightarrow \\ &-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1} > 0 \Leftrightarrow \\ &\sqrt{a_2^2 - 4a_1} > a_2 \Leftrightarrow \\ &a_2^2 - 4a_1 > a_2^2 \Leftrightarrow \\ &-4a_1 > 0 \quad \text{pues } a_1 < 0. \end{aligned}$$

Tercer cuadrante: $a_1 < 0, a_2 < 0$

- No se pueden dar los casos $a_2^2 - 4a_1 < 0$ o $a_2^2 - 4a_1 = 0$ en este cuadrante.

- Si $a_2^2 - 4a_1 > 0 \Rightarrow$ Se puede ver en (***) que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un punto silla.

(***) Es trivial que $\lambda_1 > 0$, por lo que basta ver que $\lambda_2 < 0$:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} < 0 && \Leftrightarrow \\
 &-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1} < 0 && \Leftrightarrow \\
 &-a_2 < \sqrt{a_2^2 - 4a_1} && \Leftrightarrow \\
 &a_2^2 < a_2^2 - 4a_1 && \Leftrightarrow \\
 &0 < -4a_1 && \text{pues } a_1 < 0.
 \end{aligned}$$

Cuarto cuadrante: $a_1 > 0, a_2 < 0$

- Si $a_2^2 - 4a_1 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R} \wedge \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-a_2}{2} > 0 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un foco inestable.
- Si $a_2^2 - 4a_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 > 0$ y además $\dim(S) = 1$ donde S es el autoespacio asociado, y por lo tanto $x^* = (0, 0)$ es un nodo degenerado inestable.
- Si $a_2^2 - 4a_1 > 0 \Rightarrow$ Se puede ver en (****) que $0 < \lambda_2 < \lambda_1 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un nodo inestable.

(****) Es trivial que $\lambda_1 > 0$, por lo que basta ver que $\lambda_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1}}{2} > 0 && \Leftrightarrow \\
 &-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1} > 0 && \Leftrightarrow \\
 &-a_2 > \sqrt{a_2^2 - 4a_1} && \Leftrightarrow \\
 &a_2^2 > a_2^2 - 4a_1 && \Leftrightarrow \\
 &0 > -4a_1 && \text{pues } a_1 > 0.
 \end{aligned}$$

Análisis sobre los ejes:

- Si $a_1 > 0, a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_1}i \in \mathbb{C} \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un centro.
- Si $a_1 < 0, a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a_1} \in \mathbb{R} \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un punto silla.
- Si $a_1 = 0, a_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -a_2 \Rightarrow x^* = (0, 0)$ es un equilibrio no aislado.

Se representan estos resultados en la figura 2.1:

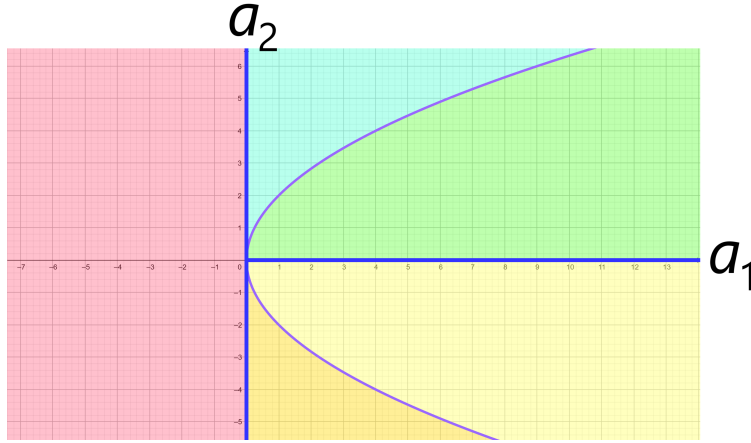


Figura 2.1:

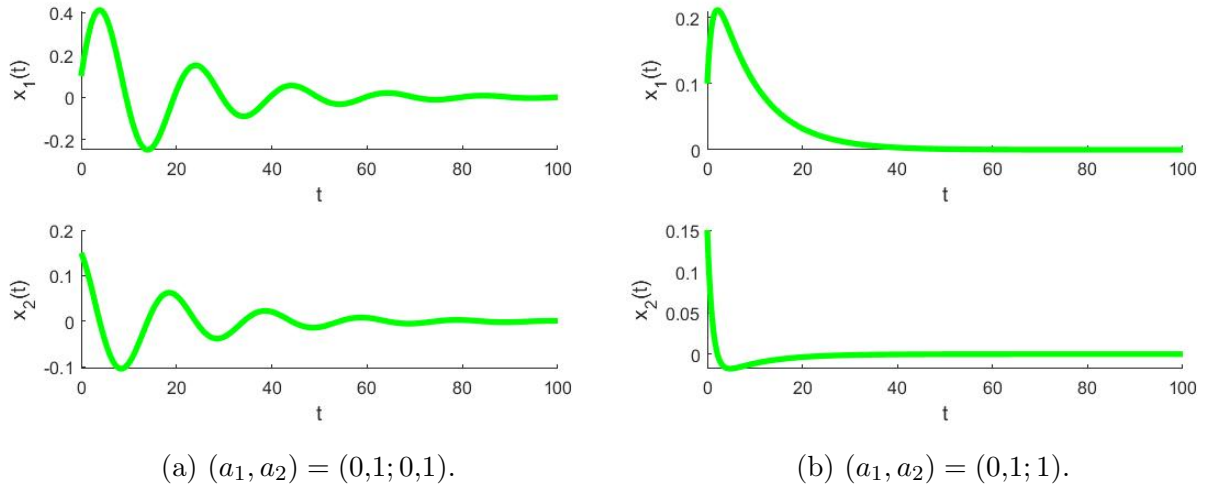
Clasificación del punto de equilibrio:

- Focos estables
- Nodos estables
- Puntos silla
- Nodos inestables
- Focos inestables
- Equilibrios no hiperbólicos
- Nodos degenerados

Enfatizamos que el punto de equilibrio del sistema sólo es estable si se toman valores para los parámetros a_1, a_2 del primer cuadrante, como se puede ver en los ejemplos que tomamos para la figura 2.2. Por esta razón, centraremos nuestro estudio en ver si se pueden estabilizar equilibrios de sistemas con parámetros que sean puntos en los otros tres cuadrantes.

Figura 2.2:

Ejemplos de la evolución del sistema para valores de (a_1, a_2) en el primer cuadrante, tomando en ambos casos condiciones iniciales $x_1(0) = 0,1$ y $x_2(0) = 0,15$.



2.2. Planteo del problema de control

Buscamos ampliar la región de estabilización del punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$ del sistema (2.1.1) para lo cual se aplica al problema el método de control de Pyragas (TDFC):

$$u(t) = k[y(t - \tau) - y(t)] \quad (2.2.1)$$

donde $y = c_1x_1 + c_2x_2$ obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 - u \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

De aquí, el sistema controlado puede reescribirse como:

$$\dot{x} = Ax(t) + kBC[x(t - \tau) - x(t)]$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (los mismos que antes) y $C = (c_1 \ c_2)$.

Planteemos para este problema lineal su ecuación característica, siguiendo el desarrollo propuesto en la sección 1.4 y tomando como $M = A - kBC$ y $N = kBC$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (A - kBC) - kBCe^{-\tau\lambda}) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_1 - kc_1 + kc_1e^{-\tau\lambda} & \lambda + a_2 - kc_2 + kc_2e^{-\tau\lambda} \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + (a_2 - kc_2 + kc_2e^{-\tau\lambda})\lambda + a_1 - kc_1 + kc_1e^{-\tau\lambda} &= 0 \\ \lambda^2 + (a_2 + kc_2)\lambda + (a_1 - kc_1) + k(\lambda c_2 + c_1)e^{-\tau\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Podemos ahora definir la función:

$$F(\lambda, a, k, c, \tau) = \lambda^2 + (a_2 + kc_2)\lambda + (a_1 - kc_1) + k(\lambda c_2 + c_1)e^{-\tau\lambda} \quad (2.2.3)$$

(el miembro izquierdo de la igualdad anterior) de la que nos interesará conocer sus raíces. Observemos que sus variables son $\lambda \in \mathbb{C}$ y los parámetros del sistema $a = (a_1, a_2)$, $c = (c_1, c_2)$, y además tenemos que F es un cuasipolinomio, de forma que hallar sus raíces no es trivial.

Con todo esto, el problema puede plantearse como:

Dado $c = (c_1, c_2)$, ¿para qué puntos $a = (a_1, a_2)$ es posible encontrar valores de $k \neq 0$ y $\tau > 0$ tales que $Re(\lambda) < 0$ para todo λ raíz de F ?

Para contestar esta pregunta, consideraremos tres casos:

1. $c_1 \neq 0, c_2 = 0$,
2. $c_1 = 0, c_2 \neq 0$,
3. $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

En [19] estudian las regiones de estabilización en el plano de parámetros no sólo para el control de Pyragas, sino también para el control clásico $u(t) = ky(t - \tau)$, y lo hacen para sistemas en dos y tres dimensiones. Pero como nuestro trabajo se restringe a estudiar los sistemas bidimensionales y sólo con el TDFC, revisaremos las demostraciones de los teoremas cuya numeración en dicho paper es 1, 3 y 5 que consideran los tres casos descritos arriba, respectivamente.

2.3. Dos resultados teóricos necesarios

Una de las contribuciones de [19] es simplificar las demostraciones de los teoremas que describen las regiones de estabilización aplicando el TDFC; esto lo consiguen utilizando dos resultados que, al combinarse, proporcionan la estructura de todas las demostraciones de los teoremas. Enunciamos estos resultados en esta sección.

2.3.1. D-Descomposición

El método de D-Descomposición es una herramienta que permite particionar el espacio de parámetros de una función de acuerdo a la cantidad de raíces con parte real positiva. Esta herramienta fue desarrollada por Neimark en [22]. En [10] Gryazina y otros hacen una reseña del estado del arte de la misma, y allí observan que si bien esta técnica se puede aplicar a funciones con múltiples parámetros, lo usual es hacerlo para el caso de uno, dos o tres parámetros, dado que allí es posible graficar las particiones obtenidas (en la recta, el plano o el espacio tridimensional respectivamente); más aún, el caso más estudiado es el caso de dos parámetros que es el que nos interesa en esta tesis. Por esta razón, daremos sólo esa definición.

Enunciado: Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con coeficientes reales y dos parámetros $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, es decir, $f = f(z, a_1, a_2)$. Consideremos las raíces de f de la forma $z = yi$, $y \in \mathbb{R}$:

- Si $y = 0$ entonces $z = 0$, y por lo tanto vale que $f(0, a_1, a_2) = 0$. De esta ecuación a coeficientes reales obtenemos una relación entre a_1 y a_2 que describe una curva en el plano a_1, a_2 (la llamaremos K).
- Si $y \neq 0$ entonces $z = iy$ es una raíz imaginaria pura, y por lo tanto, también vale que $f(iy, a_1, a_2) = 0$. Esta ecuación a coeficientes complejos se puede desdoblar en dos ecuaciones reales (separando parte real y parte imaginaria) donde y resultará la variable en la parametrización de otra curva en el plano de parámetros (la llamaremos L).

Como consecuencia, tenemos una partición del plano de parámetros en regiones cuya frontera llamamos $\Gamma = K \cup L$, y para las cuales si tomamos un punto allí, la función correspondiente a esos parámetros tiene raíces con parte real no nula.

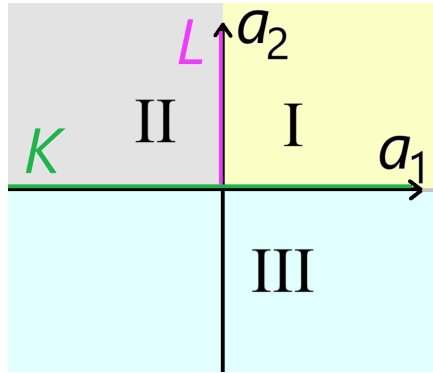
Más aún, vale que todos los puntos de una misma región corresponden a funciones f con la misma cantidad de raíces con parte real positiva. A estas regiones la llamamos D^p , donde p es la cantidad de raíces con parte real positiva que tienen las funciones con parámetros elegidos en esa región.

Ejemplo

Dada la función $f(z, a_1, a_2) = z^2 + a_1z + a_2$, plantemos la D-Descomposición de su plano de parámetros:

- Si $z = 0$ entonces, al evaluar la función, nos queda $a_2 = 0$ que es la curva (recta) K .
- Si $z = iy$ entonces, al evaluar la función nos queda $(iy)^2 + a_1(iy) + a_2 = 0$, y de aquí, separando la ecuación, obtenemos:
$$\begin{cases} (Re = 0) & -y^2 + a_2 = 0 \\ (Im = 0) & a_1y = 0 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
 Por lo tanto, $a_1 = 0$ y que $a_2 > 0$, es decir, la curva L es el semieje positivo de a_2 .

Grafiquemos entonces las regiones:



Observemos que obtuvimos tres regiones: en amarillo (región I), gris (región II) y celeste (región III). Para decidir en qué partición D^p están incluidas tomamos un punto de prueba en cada región:

- $(a_1, a_2) = (1, 1)$ corresponde a $f(z) = z^2 + z + 1$, cuyas raíces son $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, y por lo tanto, como la parte real de las dos raíces es negativa, entonces corresponde a $p = 0$, es decir $I \subseteq D^0$.
- $(a_1, a_2) = (-1, 1)$ corresponde a $f(z) = z^2 - z + 1$, cuyas raíces son $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, y por lo tanto, como la parte real de las dos raíces es positiva, entonces corresponde a $p = 2$, es decir $II \subseteq D^2$.
- $(a_1, a_2) = (-1, -1)$ corresponde a $f(z) = z^2 - z - 1$, cuyas raíces son $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, y por lo tanto, como sólo una raíz tiene parte real positiva, entonces corresponde a $p = 1$, es decir $III \subseteq D^1$.

2.3.2. Teorema de Rouché

El teorema de Rouché es un resultado teórico que permite equiparar la cantidad de raíces de dos funciones dentro de un contorno, bajo ciertas hipótesis.

Teorema: Sean $g(s)$ y $h(s)$ dos funciones analíticas dentro y sobre un contorno cerrado simple C en el plano complejo.

Si $|g(s)| < |h(s)| \quad \forall s \in C$ entonces $h(s)$ y $h(s) + g(s)$ tienen el mismo número de raíces (contando multiplicidades) dentro de C .

Capítulo 3

Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$

En este capítulo hacemos una revisión completa del enunciado y la demostración del así llamado *Teorema 1* en [19] y agregamos al final una sección con simulaciones para ilustrar los resultados.

3.1. Enunciado del Teorema 1

Supongamos que $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ en el sistema (2.2.2).

En este caso, podemos afirmar que:

El punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$ del sistema (2.2.2) se puede estabilizar usando el control de Pyragas si y sólo si $a_1 > 0$.

Además, los valores de k y τ que permiten la estabilización son todos los que cumplen las siguientes condiciones:

$$\beta < \min\{0, a_2\}, \quad -\beta\tau < 2, \quad \frac{-\beta\tau^2}{3(2 + \beta\tau)} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}, \quad kc_1\tau = \beta,$$

donde β es un parámetro auxiliar.

Observemos que en este enunciado cambiamos el orden de las condiciones para k y τ respecto de [19], a fin de presentarlas en el orden en que conviene elegir los parámetros para lograr la estabilización del punto de equilibrio del sistema.

Sobre la clasificación descripta en la figura 2.1 podemos observar que la novedad del Teorema 1 es que el equilibrio del sistema (2.2.2) puede estabilizarse con parámetros en el 4to cuadrante. En la figura 3.1 podemos ver para qué puntos $a = (a_1, a_2)$ se puede estabilizar el punto de equilibrio si $c_1 \neq 0, c_2 = 0$.

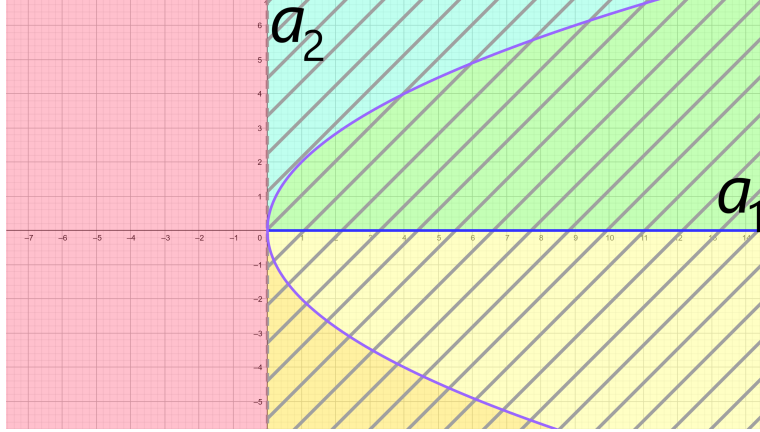


Figura 3.1:
La región rayada es la región de estabilización si $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$ utilizando el control de Pyragas.

3.2. Demostración del teorema

Queremos demostrar que si tomamos $a_1 > 0$, todas las raíces de la función característica del sistema (2.2.2), con las condiciones sobre $c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$, tienen parte real negativa, es decir, x^* se vuelve estable.

Reemplazando $c_2 = 0$ en la ecuación (2.2.3) nos queda que:

$$F(z) = z^2 + a_2 z + a_1 - kc_1 + kc_1 e^{-\tau z}. \quad (3.2.1)$$

Aplicamos el método de la D-descomposición a la función F para obtener una partición del plano de parámetros $\mathbb{R}_a^2 = \{(a_1, a_2)\}$ a cuya frontera llamaremos $\Gamma_{k,\tau}$.

- Sea $z = iy$, $y \neq 0$ una raíz de F entonces vale que:

$$F(iy) = (iy)^2 + a_2(iy) + a_1 - kc_1 + kc_1 e^{-\tau(iy)} = 0$$

Aplicamos la fórmula de Euler y separamos en parte real e imaginaria:

$$-y^2 + a_2 yi + a_1 - kc_1 + kc_1 [\cos(\tau y) - i \sin(\tau y)] = 0$$

$$\begin{cases} -y^2 + a_1 - kc_1 + kc_1 \cos(\tau y) = 0 \\ a_2 y - kc_1 \sin(\tau y) = 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Despejando a_1 y a_2 , queda la ecuación paramétrica de una curva, que llamamos $L_{k,\tau}$:

$$\begin{cases} a_1 = y^2 - kc_1 \cos(\tau y) + kc_1 \\ a_2 = \frac{kc_1 \sin(\tau y)}{y} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

- Sea $z = 0$ una raíz de F entonces vale que:

$$F(0) = a_1 = 0.$$

Y esta es la ecuación de una recta vertical que llamamos K , que en este caso coincide con el eje a_2 .

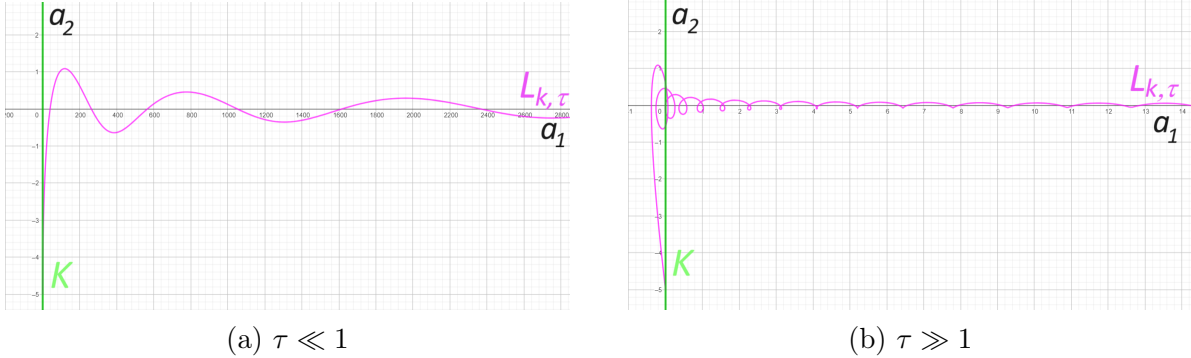
Por lo tanto: $\Gamma_{k,\tau} = L_{k,\tau} \cup K$.

Analicemos la frontera obtenida: para graficar $L_{k,\tau}$ basta tomar $y > 0$ puesto que $a_1(y)$ y $a_2(y)$ son funciones pares. Entonces, el punto inicial de la curva es $(0, kc_1\tau)$ que resulta de tomar el límite cuando y tiende a 0 en el sistema (3.2.3). En adelante, llamaremos $\beta = kc_1\tau$, y veremos que k y τ pueden ajustarse para que β resulte constante.

En la figura 3.2 se presentan dos gráficos de la curva $L_{k,\tau}$.

Figura 3.2:

Curvas $L_{k,\tau}$, obtenidas para distintos valores de τ , con k autoajustándose para que resulte constante el parámetro $\beta = -5$, con $c_1 = 1$.



Podemos ver en la figura 3.2 que:

- Si $\tau \ll 1$ entonces $L_{k,\tau}$ oscila alrededor del eje de la abscisa. En la figura 3.2 (a) se observa la gráfica de la curva para $\tau = 0,39$ y $k = -12,8205$.
- Si en cambio, $\tau \gg 1$ entonces $L_{k,\tau}$ se curva sobre sí misma, llegando a formar bucles, como se observa en 3.2 (b) para $\tau = 25$ y $k = -0,2$.

Además, los valores de τ que nos interesan son los del caso (a) por dos razones: por un lado, a efectos de realizar una implementación del método, valores para $\tau \gg 1$ implican disponer de información del sistema en un pasado lejano, información que podría no estar disponible; por otro lado, la curva resultante es simple, en sentido matemático, es decir, no tiene auto-intersecciones y por lo tanto es más fácil de analizar.

En consecuencia, al aplicar el método de la D-descomposición, para ciertos valores de k, τ dados ($\tau \ll 1$) el plano \mathbb{R}_a^2 queda dividido en regiones $D_{k,\tau}^p$, donde el cuasipolinomio

correspondiente a un punto arbitrario en $D_{k,\tau}^p$ tiene exactamente $p \geq 0$ raíces con parte real positiva.

Llamamos a esas regiones I, II y III, como se muestra en la figura 3.3. De esta forma la región I queda delimitada por la curva $L_{k,\tau}$ por debajo y la recta K a la izquierda, la región II queda comprendida por el segundo y tercer cuadrante, y la restante es la región III.

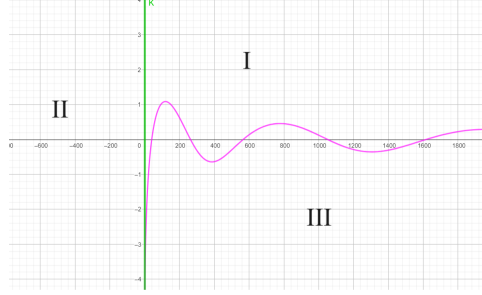


Figura 3.3: Regiones determinadas por la D-descomposición.

Nos interesa saber entonces, si alguna de estas tres regiones corresponde a $D_{k,\tau}^0$, es decir, una región donde todos los cuasipolinomios tengan cero raíces con parte real positiva (pues $p = 0$). Veremos que esto sucede para la región I, es decir $I \subseteq D_{k,\tau}^0$, para lo cual basta con que encontremos uno de estos cuasipolinomios con cero raíces con parte real positiva en I lo que nos permitirá afirmar que todos los demás de esa región también tendrán cero raíces con parte real positiva.

Con este fin, utilizaremos la siguiente estrategia:

- I. Veremos que el cuasipolinomio F (3.2.1) tiene la misma cantidad de raíces en el semiplano derecho del plano complejo que su parte polinomial (a quien llamaremos f), es decir, que ambas tienen la misma cantidad de raíces con parte real positiva, bajo ciertas condiciones.
- II. Analizaremos bajo qué condiciones de los parámetros podemos asegurar que todas las raíces del polinomio f tienen parte real negativa.

Comencemos con la estrategia:

- I. Probemos entonces que F y f tienen la misma cantidad de raíces con parte real positiva.

Utilicemos el teorema de Rouché, tomando el contorno $C_R = Im \cup C_R^+$ en el plano complejo, donde Im es el segmento $[-iR, iR]$ y C_R^+ es la semicircunferencia de centro $(0, 0)$ y radio R del semiplano derecho, como muestra la figura 3.4.

Queremos probar que se satisface la hipótesis del teorema de Rouché en el contorno C_R para las funciones:

$$f(z) = z^2 + a_2z + a_1 - kc_1 \quad g(z) = kc_1e^{-\tau z}.$$

Nótese que estas funciones son la parte polinomial y exponencial de la función F , respectivamente. Veremos entonces que la cota vale en cada una de las dos curvas que componen C_R :

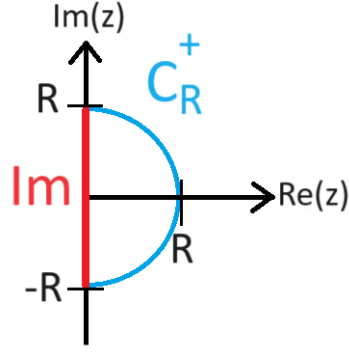


Figura 3.4: Contorno para el teorema de Rouché.

- Sobre la curva C_R^+ : $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow |g(z)| = |kc_1 e^{-\tau Re^{i\theta}}| = |kc_1 e^{-\tau R(\cos(\theta) + i \sin(\theta))}| =$$

$$= |kc_1| \cdot \underbrace{|e^{-\tau R \cos(\theta)}|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|e^{i\tau R \sin(\theta)}|}_{=1} \leq |kc_1|$$

$$\wedge |f(z)| = |R^2 e^{i2\theta} + a_2 R e^{i\theta} + a_1 - kc_1| \text{ esta expresión es del orden de } R^2.$$

Por lo tanto, si $R \gg 1$ se cumple la desigualdad:

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in C_R^+.$$

- Sobre la curva Im : $z = iy$ con $y \in [-R, R]$

$$\Rightarrow |g(z)|^2 = |kc_1 e^{-\tau iy}|^2 = |kc_1|^2$$

$$\wedge |f(z)|^2 = |-y^2 + a_2 iy + a_1 - kc_1|^2 = (-y^2 + a_1 - kc_1)^2 + (a_2 y)^2$$

$$= y^4 - 2(a_1 - kc_1)y^2 + (a_1 - kc_1)^2 + a_2^2 y^2$$

$$= y^4 + (a_2^2 - 2a_1 + 2kc_1)y^2 + (a_1 - kc_1)^2.$$

Pedimos que el coeficiente cuadrático de $|f|^2$ sea nulo, y en consecuencia, la función F se corresponderá con los puntos del plano \mathbb{R}_a^2 pertenecientes a la curva definida por la ecuación $a_2^2 - 2a_1 + 2kc_1 = 0$, graficada en naranja en la figura 3.5, y entonces se tiene que:

$$|f(z)|^2 = y^4 + a_1^2 - 2kc_1 a_1 + \underbrace{(kc_1)^2}_{|g(z)|^2}$$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = y^4 + a_1^2 - 2kc_1 a_1 + |g(z)|^2.$$

Y como $y^4 + a_1^2 - 2kc_1a_1 > 0$ si $a_1 \gg 1$ entonces vale que:

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &< |f(z)|^2 \quad \forall z \in Im. \text{ Luego, aplicamos raíz cuadrada} \\ \Rightarrow |g(z)| &< |f(z)| \quad \forall z \in Im \text{ bajo las condiciones } a_2^2 - 2a_1 + 2kc_1 = 0 \text{ y } a_1 \gg 1. \end{aligned}$$

En conclusión, hemos probado en estos dos puntos que el módulo de g se puede acotar con el módulo de f sobre las dos curvas que forman el contorno C_R , es decir:

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in C_R$$

y ésta, es la hipótesis necesaria para el Teorema de Rouché.

Entonces podemos asegurar que f y $f + g = F$ tienen la misma cantidad de raíces en el interior del contorno C_R si $R \gg 1$. Es decir, f y F tienen la misma cantidad de raíces en el semiplano derecho del plano complejo, o sea, la misma cantidad de raíces con parte real positiva.

¿Pero cuántas raíces tienen f y F ?

Sobre F es difícil contestar, puesto que es un cuasipolinomio. Pero sobre f es más fácil, puesto que es un polinomio de grado 2 a coeficientes reales. Analizaremos entonces esto mismo en el ítem II.

II. Busquemos condiciones para que f tenga todas sus raíces con parte real negativa.

Sea f la parte polinomial de la función característica (3.2.1) del sistema

$$f(z) = z^2 + a_2z + a_1 - kc_1.$$

Entonces sus raíces son:

$$\begin{aligned} z_1, z_2 &= \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4(a_1 - kc_1)}}{2} \\ &= \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 2(a_1 - kc_1) - 2(a_1 - kc_1)}}{2}. \end{aligned}$$

Y como habíamos pedido que $a_2^2 - 2(a_1 - kc_1) = 0$ al reemplazar en la fórmula resolvente nos queda:

$$= \frac{-a_2 \pm \sqrt{-2(a_1 - kc_1)}}{2}.$$

Por lo tanto, si $(a_1 - kc_1) > 0$ entonces las raíces de f son complejas (y esto pasa para $a_1 \gg 1$, o sea a_1 suficientemente grande) y, si además $a_2 > 0$ entonces la parte real de las raíces de f es negativa. Es decir, f tiene sus dos raíces en el semiplano izquierdo del plano complejo, y por lo tanto f no tiene raíces en C_R .

Por todo esto, podemos asegurar que f tiene cero raíces con parte real positiva y entonces F tiene cero raíces con parte real positiva, si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a_2^2 - 2(a_1 - kc_1) = 0 \\ a_2 > 0 \\ a_1 \gg 1, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

reflejemos esto en la figura 3.5.

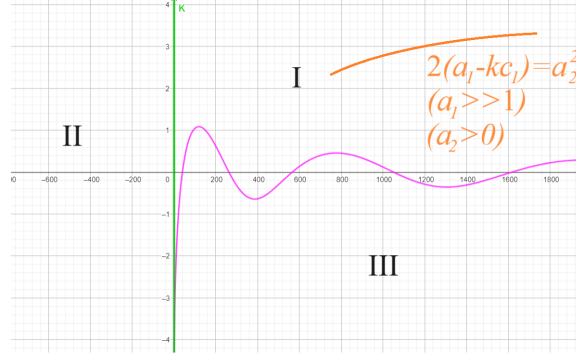


Figura 3.5:

En NARANJA se puede ver la curva que cumple las condiciones (3.2.4).

Con todo esto hemos probado que, si la curva $L_{k,\tau}$ no tiene auto-intersecciones, entonces la región $I \subseteq D_{k,\tau}^0$. Faltaría ver que en realidad $I = D_{k,\tau}^0$. Esto lo demostraremos viendo que los cuasipolinomios formados con parámetros en las regiones II y III tienen al menos una raíz con parte real positiva.

Consideremos entonces las distintas posibilidades de curvas $L_{k,\tau}$ (con o sin bucles) que quedan determinadas por la parametrización dada por el sistema (3.2.3). Que la curva no tenga bucles depende de si $a_1(y)$ es una función creciente para $y > 0$, para lo cual, nos interesa estudiar el signo de su derivada:

$$a_1'(y) = 2y + kc_1\tau \sin(\tau y). \quad (3.2.5)$$

Para pedir que sea positiva, analizamos el signo de la derivada segunda:

$$a_1''(y) = 2 + kc_1\tau^2 \cos(\tau y),$$

que resulta positiva bajo la condición $|kc_1\tau^2| < 2$. Por lo tanto, $a_1'(y)$ es estrictamente creciente para $y > 0$ bajo la misma condición, y como además $a_1'(0) = 0$ entonces podemos afirmar que $a_1'(y) > 0$ para $y > 0$. Concluimos entonces que $a_1(y)$ es creciente.

Sean k, τ tales que $kc_1 < 0$ y $\beta = kc_1\tau$ tal que β es constante, según la condición anterior tenemos dos casos posibles de partición del plano de parámetros \mathbb{R}_a^2 (sin bucles/con bucles):

1. $0 < |kc_1|\tau^2 \leq 2$.

En este caso, la función $a_1(y)$ es no decreciente para $y > 0$ y por lo tanto la D-descomposición devuelve $\Gamma_{k,\tau}$ que no se interseca a sí misma (sin bucles).

2. $|kc_1|\tau^2 > 2$

En este caso, $\Gamma_{k,\tau}$ tiene “auto intersecciones” (y por lo tanto, bucles) para $kc_1 < 0$ (y también para $kc_1 > 0$ con τ suficientemente grande).

Veamos como cambia el valor de p en las distintas regiones definidas por $\Gamma_{k,\tau}$. Es decir, que los cuasipolinomios en las regiones *II* y *III* tienen más de cero raíces con parte real positiva.

Sabemos que el valor de $p = 0$ en la región *I*, analicemos entonces el crecimiento de la función $Re(z)$ respecto de a_1 al atravesar la recta vertical K , a través del signo de su derivada.

Llamamos $z' = \frac{\partial z}{\partial a_1}$ y la calculamos partiendo de la relación:

$$\begin{aligned} F(z) &= 0 \\ z^2 + a_2 z + a_1 - kc_1 + kc_1 e^{-\tau z} &= 0, \quad \text{derivando en función de } a_1, \\ 2z \cdot z' + a_2 z' + 1 - kc_1 \tau z' e^{-\tau z} &= 0 \\ z' \cdot (2z + a_2 - kc_1 \tau e^{-\tau z}) &= -1 \\ z' &= \frac{-1}{2z + a_2 - kc_1 \tau e^{-\tau z}}. \end{aligned}$$

Para todos los puntos sobre la recta K , vale que $z = 0$ y $a_1 = 0$, entonces nos queda que:

$$z' = \frac{-1}{a_2 - kc_1 \tau}.$$

Observemos que $z' \in \mathbb{R} \Rightarrow Re(z') = \frac{-1}{a_2 - kc_1 \tau}$, y su signo depende de $a_2 - kc_1 \tau$.

- Si $a_2 - kc_1 \tau > 0 \Rightarrow Re(z') < 0$ y esto significa que $Re(z)$ está decreciendo al atravesar la recta vertical K por encima de $kc_1 \tau = \beta$.

Entonces, de la región *II* a la región *I* decrece en al menos 1 la cantidad de raíces con parte real positiva. Y como la región *I* corresponde a $p = 0$ entonces la región *II* debe corresponder a $p \geq 1$.

- Si $a_2 - kc_1 \tau < 0 \Rightarrow Re(z') > 0$ y esto significa que $Re(z)$ está creciendo al atravesar la recta singular K por debajo de $kc_1 \tau = \beta$.

Entonces de la región *II* a la región *III* crece en al menos 1 la cantidad de raíces con parte real positiva. Y por lo visto en el ítem anterior, como $I \in D_{k,\tau}^p$ con $p \geq 1$ entonces la región *III* debe pertenecer a $D_{k,\tau}^p$ con $p \geq 2$.

Por lo tanto, $I = D_{k,\tau}^0$.

Y en conclusión, la región de estabilización es $S = \bigcup_{k,\tau} D_{k,\tau}^0$ con $-\infty < kc_1 \tau < 0$, es decir, son los puntos que quedan por encima de la curva $L_{k,\tau}$ para cada par k, τ posible.

Observemos que esta unión infinita es igual al conjunto de puntos del semiplano derecho de parámetros, es decir $S = \bigcup_{k,\tau} D_{k\tau}^0 = \{a_1 > 0\}$ pues la curva $L_{k,\tau}$ va dejando una mayor región del semiplano por encima, a medida que β se mueve hacia abajo en el eje a_2 . De aquí que si $a_1 < 0$ entonces $(a_1, a_2) \notin S$ para ningún valor de k, τ .

3.2.1. Sobre la elección de k y τ

A continuación estudiaremos cómo elegir k y τ dado un cierto punto en el plano de parámetros.

Sea $a = (a_1, a_2)$ un punto tal que $a_1 > 0$ y $a_2 \in \mathbb{R}$.

Elegimos un valor $\beta < a_2$ y valores para k, τ de forma que $kc_1 < 0$ y $kc_1\tau = \beta$.

Veamos que con esta elección de k, τ el punto $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$, es decir, resulta un punto de equilibrio donde el sistema se puede estabilizar.

Tomemos una línea recta ℓ de pendiente positiva que pase por el punto $(0, \beta)$ y de forma que (a_1, a_2) quede en el sector entre ℓ y el eje a_2 (es decir, por encima de la recta ℓ). Ilustramos esta situación en la figura 3.6.

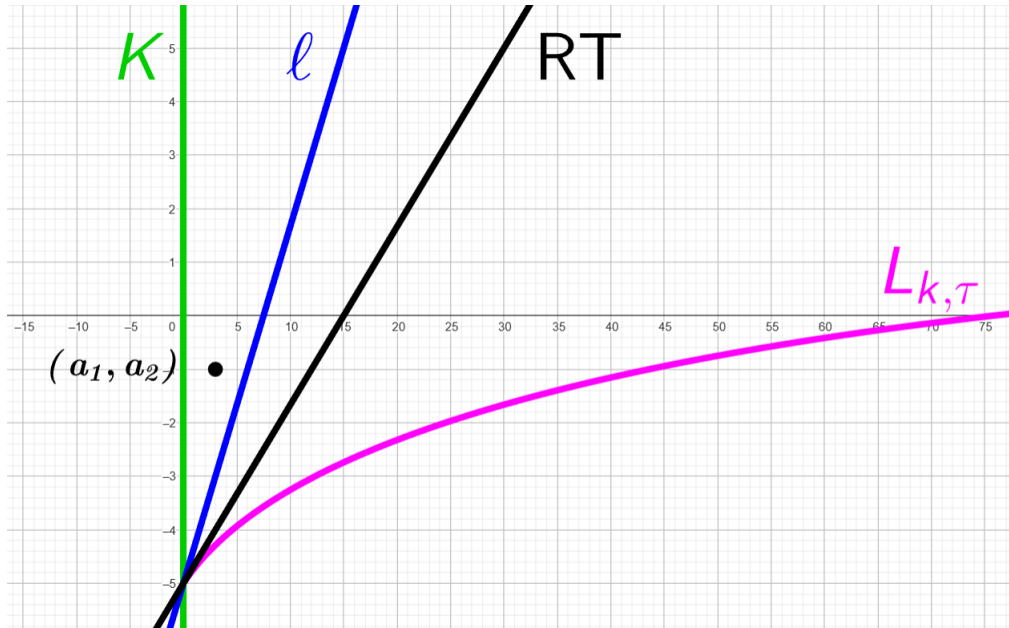


Figura 3.6:

La recta ℓ y la elección de un punto (a_1, a_2) por encima de ℓ , con $\beta = -5$.

Veamos que es posible construir esta recta ℓ pues la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ en $(a_1, a_2) = (0, \beta)$ tiene pendiente cercana a cero, es decir $\frac{da_2}{da_1}(0) \approx 0$.

Analicemos $a_1(y)$ y $a_2(y)$ en la ecuación (3.2.3):

Ya calculamos la derivada de $a_1(y)$ en (3.2.5).

Por otro lado, podemos ver que la derivada de $a_2(y)$ es

$$a_2'(y) = \frac{kc_1\tau\cos(\tau y)y - kc_1\sin(\tau y)}{y^2}.$$

Por lo tanto, nos queda que:

$$\frac{da_2}{da_1}(y) = \frac{kc_1 \left[\frac{\tau y \cos(\tau y) - \sin(\tau y)}{y^2} \right]}{2y + kc_1\tau \sin(\tau y)} = \frac{kc_1 \left[\frac{\tau y \cos(\tau y) - \sin(\tau y)}{y^2} \right]}{y \left[2 + kc_1\tau \frac{\sin(\tau y)}{y} \right]}.$$

Llamando $\sigma = \tau y$:

$$\frac{da_2}{da_1}(\sigma) = \frac{\tau^2 kc_1 \left[\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^2} \right]}{\frac{\sigma}{\tau} \left[2 + kc_1\tau^2 \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \right]} = \frac{kc_1\tau^3 \left[\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3} \right]}{2 + kc_1\tau^2 \frac{\sin(\sigma)}{\sigma}}, \quad (3.2.6)$$

y dado que las expresiones $\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3}$ y $\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}$ están acotadas para $\sigma > 0$ entonces en la expresión (3.2.6) el denominador se aproxima a 2 y el numerador se aproxima a 0, cuando $\tau \ll 1$ (según el resultado comúnmente conocido como “cero por acotado”).

Entonces $\frac{da_2}{da_1}(\sigma) \approx 0$ si $\tau \ll 1$ con $kc_1\tau = \beta$.

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ es casi nula si τ es lo suficientemente pequeño y entonces ℓ está por encima de $L_{k,\tau}$ y aún más, el punto (a_1, a_2) pertenece a $D_{k,\tau}^0$, como habíamos ilustrado en la figura 3.6.

El valor de τ debe elegirse de forma que satisfaga que $a_1(y)$ sea creciente y de la comparación entre las pendientes de las rectas ℓ y la tangente a $L_{k,\tau}$ en $a_1 = 0$:

$$m_{RT} < m_\ell,$$

donde m_{RT} es la pendiente de la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ y m_ℓ es la pendiente de la recta ℓ .

Como la condición para que $a_1(y)$ sea creciente es que $|kc_1\tau^2| < 2$, y además $\beta = kc_1\tau$ entonces nos queda que $-\beta\tau < 2$.

Para comparar las pendientes, calculemos primero la pendiente de la recta tangente a $L_{k,\tau}$ usando que:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3} \right) = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \right) = 1,$$

$$\text{entonces } m_{RT} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\frac{da_2}{da_1}(\sigma) \right] = \frac{kc_1\tau^3 \left(-\frac{1}{3} \right)}{2 + kc_1\tau^2} = \frac{-\beta\tau^2}{3(2 + \beta\tau)}.$$

Visto que m_ℓ es menor que la pendiente de la recta que pasa por $(0, \beta)$ y (a_1, a_2) , es decir $m_\ell < \frac{a_2 - \beta}{a_1}$, concluimos que la segunda condición para elegir τ es:

$$\frac{-\beta\tau^2}{3(2 + \beta\tau)} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}. \quad (3.2.7)$$

Si bien en [19] no se profundiza mucho respecto de esta condición, analicemos nosotros qué tipo de restricción es para τ . Hasta aquí teníamos que:

- i. $\beta < \min\{0, a_2\} \Rightarrow \beta < 0 \wedge \beta < a_2$
- ii. $-\beta\tau < 2 \Rightarrow 0 < 2 + \beta\tau$
- iii. $kc_1\tau = \beta \Rightarrow k = \frac{\beta}{c_1\tau}$
- iv. $\frac{-\beta\tau^2}{3(2 + \beta\tau)} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}$.

Se puede observar fácilmente que la cuarta condición es una desigualdad entre miembros positivos, ya que el miembro izquierdo es el cociente entre dos factores mayores a cero, lo que se deduce de las condiciones i. y ii. Por lo tanto la condición iv. se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} -\beta\tau^2 &< 3(2 + \beta\tau) \cdot \frac{a_2 - \beta}{a_1}, \\ \text{distribuyendo} \quad -\beta\tau^2 &< 6 \cdot \frac{a_2 - \beta}{a_1} + 3\beta\tau \cdot \frac{a_2 - \beta}{a_1}, \\ -\beta\tau^2 - 6 \cdot \frac{a_2 - \beta}{a_1} - 3\beta\tau \cdot \frac{a_2 - \beta}{a_1} &< 0. \end{aligned}$$

Y esta expresión es cuadrática de variable τ y coeficiente principal positivo, de forma que su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba. Analicemos sus raíces, para ver si es completamente positiva, y por lo tanto la restricción iv. no aporta nada nuevo, o si bien tiene raíces reales, y por lo tanto hay un intervalo para τ donde se satisface la desigualdad.

Hagamos un cambio de variables para que la expresión sea más simple. Si llamamos $\alpha = \frac{a_2 - \beta}{a_1}$ entonces $\alpha > 0$ y nos queda:

$$-\beta\tau^2 - 3\beta\alpha\tau - 6\alpha < 0. \quad (3.2.8)$$

Y calculemos las raíces:

$$\tau_1, \tau_2 = \frac{3\beta\alpha \pm \sqrt{9\beta^2\alpha^2 - 24\beta\alpha}}{-2\beta}. \quad (3.2.9)$$

De ellas diremos que:

- son reales, puesto que el discriminante de (3.2.9) es positivo ya que se puede reescribir como $\Delta = \underbrace{3\beta\alpha}_{<0} \underbrace{(3\beta\alpha - 8)}_{<0} > 0$,
- una es positiva y la otra negativa.

Esto último se puede ver analizando la cuenta para τ_1 y τ_2 respectivamente:

$$\tau_1 = \frac{3\beta\alpha + \sqrt{9\beta^2\alpha^2 - 24\beta\alpha}}{-2\beta}, \quad (3.2.10)$$

$$\tau_2 = \frac{\underbrace{3\beta\alpha}_{<0} - \sqrt{9\beta^2\alpha^2 - 24\beta\alpha}}{\underbrace{-2\beta}_{>0}}. \quad (3.2.11)$$

Por lo tanto, $\tau_2 < 0$. Resta ver que $\tau_1 > 0$, y esto vale si y sólo si su numerador es positivo, que resulta cierto pues

$$3\beta\alpha + \sqrt{\Delta} > 0 \iff \underbrace{\sqrt{\Delta}}_{>0} > \underbrace{-3\beta\alpha}_{>0} > 0 \iff \Delta > 9\beta^2\alpha^2.$$

Reemplazando Δ por la expresión obtenida en (3.2.9) queda:

$$\begin{aligned} 9\beta^2\alpha^2 - 24\beta\alpha &> 9\beta^2\alpha^2 \\ -24\beta\alpha &> 0 \text{ que es cierto!} \end{aligned}$$

En conclusión, $\tau_1 > 0$.

Por lo tanto, para que (3.2.8) se verifique debe suceder que $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, que junto con las condiciones i. y ii. determinan que $\tau < \min \left\{ \tau_1, \frac{2}{-\beta} \right\}$.

Con todo esto, hemos probado que la segunda y la tercera condición del teorema pueden resumirse en la siguiente: $\tau < \min \left\{ \tau_1, \frac{2}{-\beta} \right\}$.

Recapitulemos lo obtenido aquí: hemos demostrado que si se eligen valores de los parámetros del sistema tales que $a_1 > 0$, entonces es posible encontrar valores de k, τ para los cuales el punto de equilibrio del sistema $x^* = (0, 0)$ resulta estabilizable con el método de Pyragas.

En otras palabras $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$ para ciertos valores de k, τ , es decir (a_1, a_2) es un punto de la región de estabilización $S = \bigcup D_{k,\tau}^0$.

Con esto, terminamos la demostración del primer teorema.

3.3. Corolarios y simulaciones

Volviendo a la figura 3.3, como las regiones $\{0 < a_1 < \frac{a_2^2}{4}, a_2 < 0\}$ (en naranja) y $\{a_1 > \frac{a_2^2}{4}, a_2 < 0\}$ (en amarillo) corresponden respectivamente a nodos y focos inestables del sistema abierto ($u = 0$), el Teorema 1 implica los siguientes corolarios:

Corolario 1

Si $x^* = (0, 0)$ es un nodo o un foco inestable (o sea, el 4to cuadrante), entonces existen parámetros k, τ tales que x^* se puede estabilizar con el control de Pyragas.

Corolario 2

Si $x^* = (0, 0)$ es un punto silla o bien $z = 0$ es una raíz del polinomio característico (o sea, el semiplano izquierdo y el eje vertical), entonces no existen parámetros k, τ tales que x^* se puede estabilizar con el control de Pyragas.

Elegimos valores para los parámetros del sistema en el cuarto cuadrante, siguiendo el **Corolario 1**. Con el fin de abarcar los tres tipos distintos de equilibrios a estabilizar tomamos:

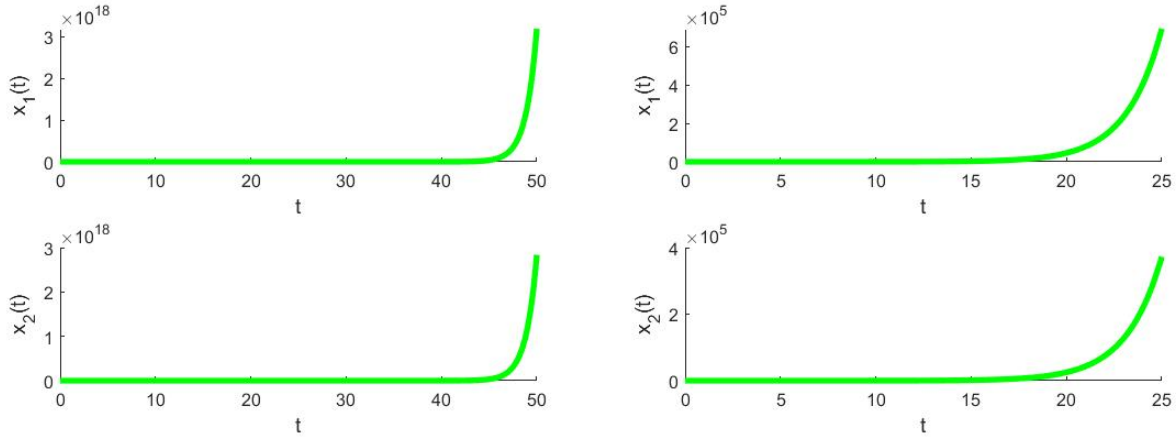
- $(a_1, a_2) = (0, 1; -1)$, que genera un nodo inestable,
- $(a_1, a_2) = (0, 25; -1)$, que genera un nodo degenerado,
- $(a_1, a_2) = (7; -1)$, que genera un foco inestable.

Además, elegimos el punto $(a_1, a_2) = (4, 0)$, que genera un equilibrio del tipo “centro”, y que si bien no se corresponde con los resultados del corolario 1, el teorema afirma que puede estabilizarse pues cumple que $a_1 > 0$. Modelamos este caso en el ejemplo 3.13.

Para todos los casos, elegimos condiciones iniciales $x_1(0) = 0,1$ y $x_2(0) = 0,15$.

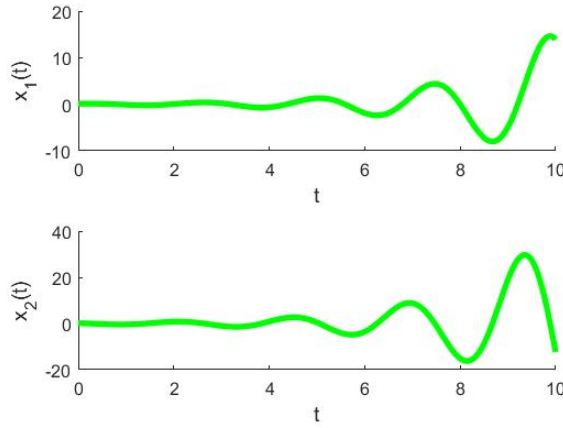
En la figura 3.7 podemos observar el comportamiento de las variables del sistema x_1 y x_2 que crecen exponencialmente en el caso (a) y oscilan hacia los infinitos en el caso (c), es decir, divergen en ambos casos dado que estamos eligiendo sistemas con equilibrios inestables.

Figura 3.7:



(a) $(a_1, a_2) = (0, 1; -1)$ siendo sus autovalores $\lambda_1 = 0,1127$ y $\lambda_2 = 0,8873$.

(b) $(a_1, a_2) = (0, 25, -1)$ siendo su único autovalor $\lambda = 0,5$.



(c) $(a_1, a_2) = (7, -1)$ siendo sus autovalores $\lambda_1 = 0,5 + 2,5981i$ y $\lambda_2 = 0,5 - 2,5981i$.

En cuanto a la elección de los parámetros de salida, sabemos que $c_2 = 0$, por lo que consideraremos dos casos para c_1 :

- $c_1 = 13$ (en los **Ejemplos 3.8, 3.9 y 3.10**),
- $c_1 = -0,1$ (en los **Ejemplos 3.11 y 3.12**).

Analicemos entonces cómo elegimos los parámetros β , k y τ para estabilizar en cada caso, el punto de equilibrio del sistema obtenido.

- I. Elegimos $\beta < \min\{0, a_2\}$. Por esta razón, tomamos en los tres casos $\beta = -2$.

II. Elegimos τ que satisfaga las siguientes dos condiciones del teorema:

$$-\beta\tau < 2, \quad \frac{-\beta\tau^2}{3(2 + \beta\tau)} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}.$$

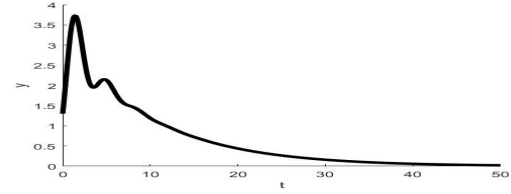
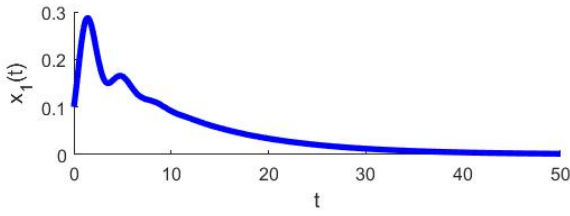
III. Elegimos k tal que $kc_1\tau = \beta$.

En los cinco ejemplos siguientes presentaremos la evolución de los sistemas con el control de Pyragas, para distintos valores de τ y k elegidos según lo anterior.

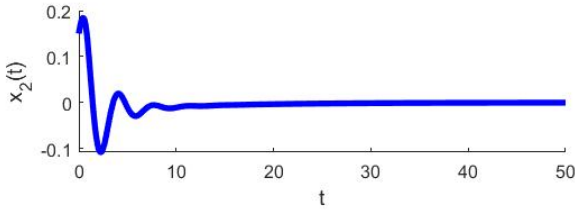
Figura 3.8:

Ejemplo 1:

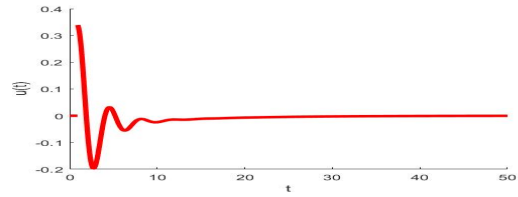
$$\begin{cases} a_1 = 0, 1 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0,9; \text{resultando } k = -0,1709.$$



(b) Salida.



(a) Sistema controlado.

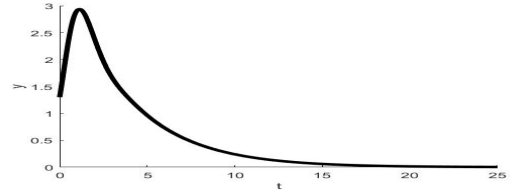
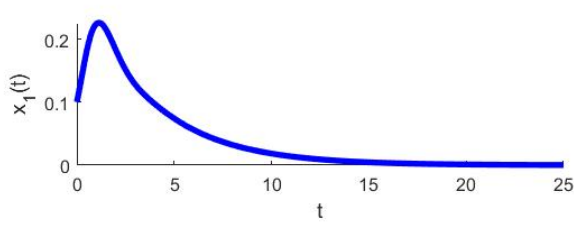


(c) Control.

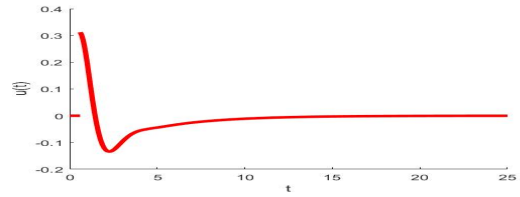
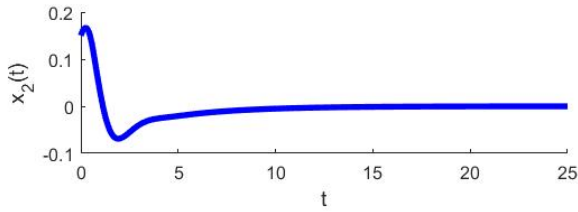
Figura 3.9:

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} a_1 = 0,25 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0,6; \text{ resultando } k = -0,2564.$$



(b) Salida.



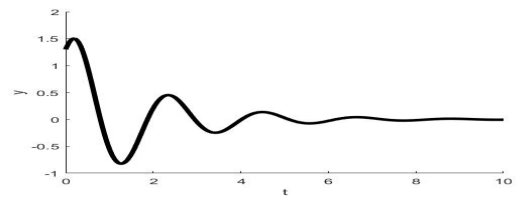
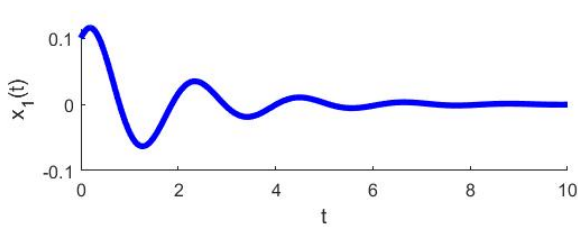
(c) Control.

(a) Sistema controlado.

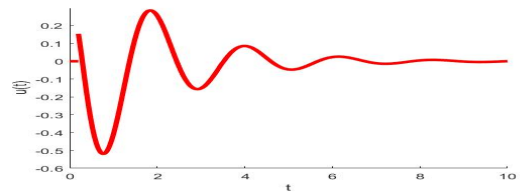
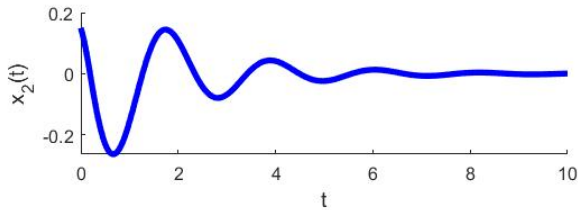
Figura 3.10:

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0,2; \text{ resultando } k = -0,2564.$$



(b) Salida.



(c) Control.

(a) Sistema controlado.

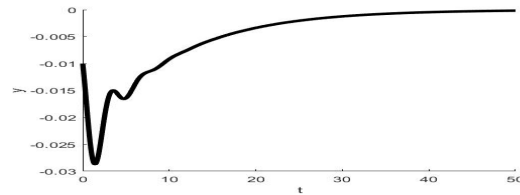
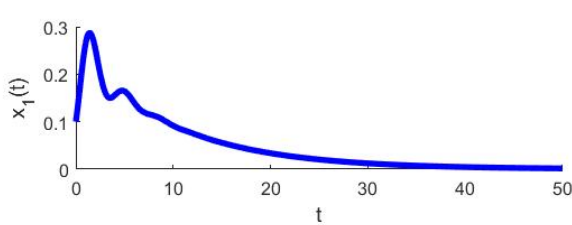
De estos tres ejemplos podemos observar que al modificar el valor de a_1 debemos reducir el valor de τ y mientras que el valor k crece en módulo, incluso el control tarda más tiempo en estabilizar el sistema.

Estudiemos ahora la dependencia del signo y valor absoluto de c_1 , para ello repetimos los parámetros de los ejemplos anteriores en el caso (a) y (c).

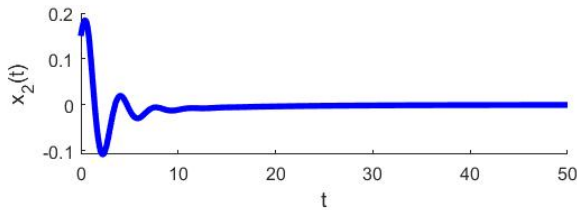
Figura 3.11:

Ejemplo 4:

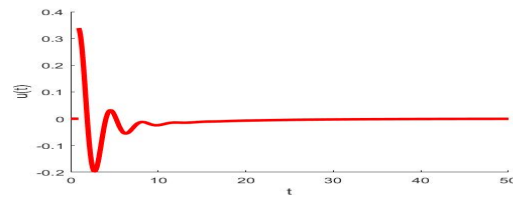
$$\begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -0,1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0; \text{ resultando } k = 0,98619.$$



(b) Salida.



(a) Sistema controlado.

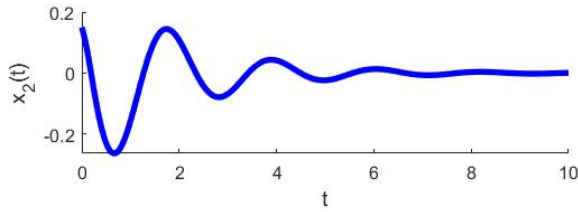
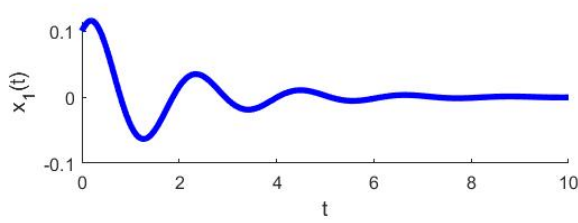


(c) Control.

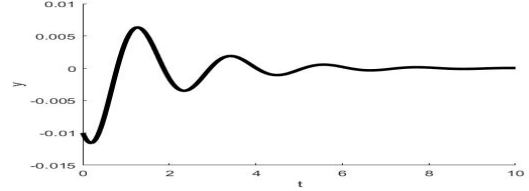
Figura 3.12:

Ejemplo 5:

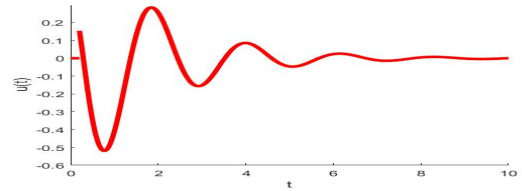
$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -0,1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0,2; \text{ afectando el signo de } k = 100.$$



(a) Sistema controlado.



(b) Salida.



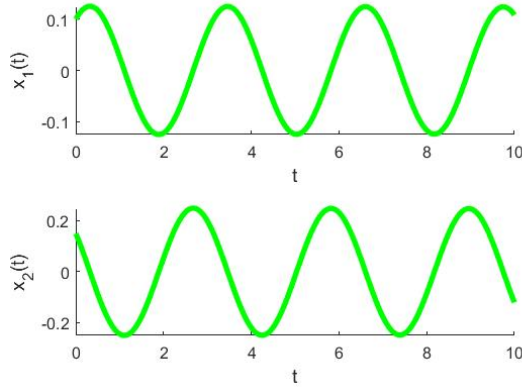
(c) Control.

En estos dos últimos ejemplos podemos observar que la dependencia del parámetro c_1 se da únicamente en el parámetro k .

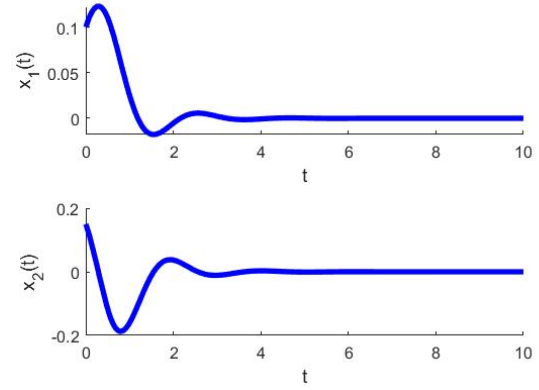
Figura 3.13:

Ejemplo 6:

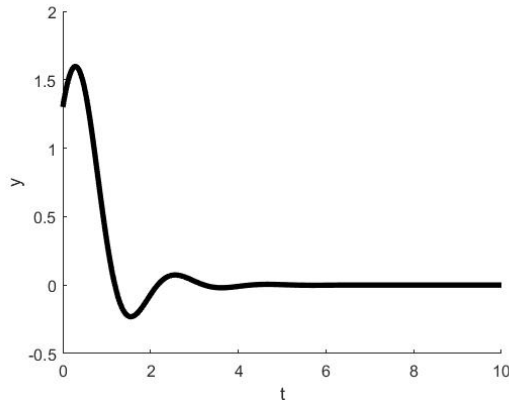
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 13 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \beta = -2; \tau = 0,5; \text{ resultando } k = -0,3077.$$



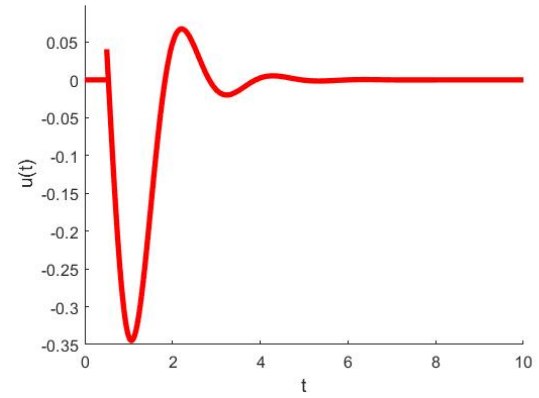
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



(d) Salida del sistema.

Podemos ver en 3.13 (a) que el comportamiento de las variables del sistema antes del control es oscilante, lo que se debe a que el equilibrio era un CENTRO y que luego de aplicar el control con valores adecuados para los parámetros k y τ las variables del sistema se estabilizan, sin diferenciarse la elección de dichos parámetros de los puntos del 4to cuadrante.

Capítulo 4

Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$

En este capítulo hacemos una revisión completa del llamado *Teorema 3* en [19]. Igual que en el capítulo anterior, agregamos al final algunas simulaciones para ilustrar el resultado del teorema.

4.1. Enunciado del Teorema 3

Supongamos que $c_1 = 0, c_2 \neq 0$, en el sistema (2.2.2).

En este caso podemos afirmar que:

El punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$ del sistema (2.1.1) se puede estabilizar con el control de Pyragas si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

a. $a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$

b. $a_1 > \frac{(m\pi a_2)^2}{16}, \quad a_2 \leq 0;$

$$\text{donde } m = \min_{\alpha \in (0, 2\pi)} \left(\cos(\alpha) + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right) \approx -1,0419. \quad (4.1.1)$$

En el caso (a), como la región corresponde a parámetros que devuelven un foco o nodo estable, entonces $k = 0$ y τ es irrelevante.

Y en el caso (b), todo los valores para los parámetros k, τ que cumplan las siguientes condiciones estabilizan el sistema:

$$kc_2 = \frac{2\sqrt{a_1}}{m\pi}, \quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{a_1}}.$$

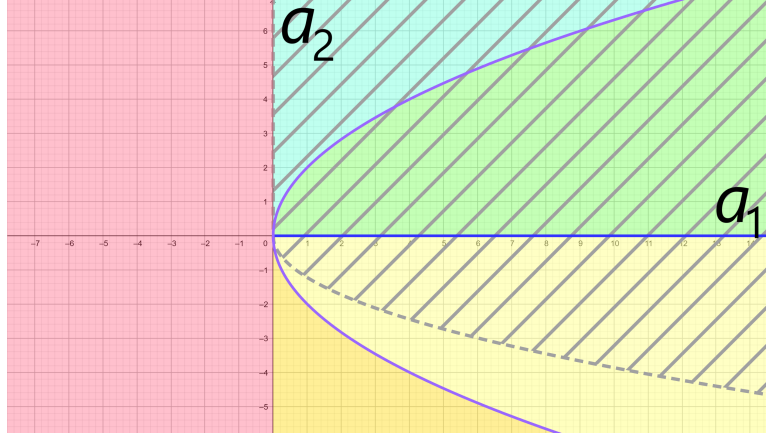


Figura 4.1:

La región rayada es la región de estabilización del sistema utilizando el método de Pyragas si $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$.

4.2. Demostración del teorema

Halleemos la partición dada por $\Gamma_{k,\tau}$ del plano \mathbb{R}_a^2 obtenida de la D-descomposición para la función característica de este caso, que es un cuasipolinomio distinto al del Teorema 1:

$$F(z) = z^2 + (a_2 - kc_2)z + a_1 + kc_2ze^{-\tau z}.$$

- Sea $z = iy$ una raíz de F , separando en parte real e imaginaria, entonces:

$$\begin{aligned} (iy)^2 + (a_2 - kc_2)iy + a_1 + kc_2iye^{-\tau iy} &= 0 \\ -y^2 + (a_2 - kc_2)iy + a_1 + kc_2iy(\cos(\tau y) - i\sin(\tau y)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y^2 + a_1 + kc_2y\sin(\tau y) = 0 \\ (a_2 - kc_2)y + kc_2y\cos(\tau y) = 0 \end{cases} \quad y \neq 0.$$

Resultando, la parametrización de la curva $L_{k,\tau}$:

$$\begin{cases} a_1 = y^2 - kc_2y\sin(\tau y) \\ a_2 = kc_2 - kc_2\cos(\tau y) \end{cases} \quad y \neq 0. \quad (4.2.1)$$

- Sea $z = 0$ una raíz de F entonces $F(0) = a_1$, entonces $a_1 = 0$ es la ecuación de la recta vertical K .

Analizando las condiciones necesarias para que $\Gamma_{k,\tau}$ no tenga auto-intersecciones, debemos pedir que la función $a_1(y)$ sea no decreciente.

Observemos que $a_1(y) = y \cdot [y - kc_2\sin(\tau y)]$, es decir, $a_1(y)$ es el producto de dos funciones que cumplen que:

- $g(y) = y$ es creciente $\forall y$,
- $h(y) = y - kc_2 \sin(\tau y)$ es creciente $\forall y$ si $|kc_2|\tau \leq 1$, ya que $h'(y) = 1 - kc_2\tau \cos(\tau y) \geq 0$ si $|kc_2|\tau \leq 1$.

Entonces podemos asegurar que $a_1(y)$ es creciente $\forall y$ si $|kc_2|\tau \leq 1$. Y por lo tanto, una condición suficiente para que $\Gamma_{k,\tau}$ no tenga auto-intersecciones es que $|kc_2|\tau \leq 1$.

Nota: Esta es una condición suficiente, pero no necesaria. Más adelante, en la subsección 4.2.1 daremos la condición necesaria.

En cuanto a la posición respecto del eje vertical de los puntos de la curva $L_{k,\tau}$, digamos “la altura”, que viene dada por $a_2(y)$ podemos observar que:

- la ordenada al origen es $a_2 = 0$ (basta reemplazar $y = 0$ en (4.2.1)),
- los puntos de la curva tienen ordenada $a_2 \in [2kc_2, 0]$, alcanzando su mínimo para $\tau y = \pi + 2j\pi$ con $j \in \mathbb{Z}$.

Con esta información, podemos esbozar el gráfico de la frontera $\Gamma_{k,\tau}$ que particiona el plano de parámetros en regiones que llamaremos I, II y III como muestra cualitativamente la figura 4.2.

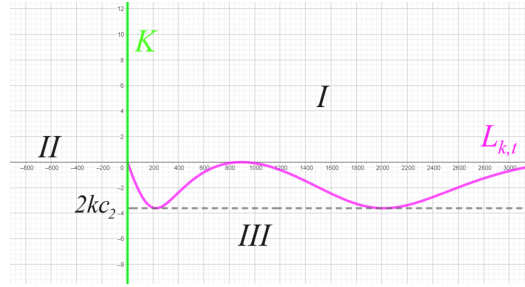


Figura 4.2: Regiones determinadas por la D-descomposición.

Veamos que al igual que en el Teorema 1, la región $I \subseteq D_{k\tau}^0$. La demostración es análoga. Es decir, queremos ver que para cualquier par $(a_1, a_2) \in I$ la función característica resultante no tiene raíces con parte real positiva. Para esto, basta hallar un cuasipolinomio en I que cumpla lo anterior, y esto se demostrará utilizando el teorema de Rouché, es decir, viendo que F tiene tantas raíces en el semiplano derecho complejo como su parte polinomial.

Definimos dos funciones a partir de la función característica:

$$F(z) = \underbrace{z^2 + (a_2 - kc_2)z + a_1}_{f(z)} + \underbrace{kc_2 z e^{-\tau z}}_{g(z)},$$

para estas funciones veamos que:

- $Re(z) < 0$, $\forall z$ raíz de f bajo ciertas condiciones de los parámetros;
- $|g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in C_R$.

Verifiquemos entonces, que f y g satisfacen la hipótesis del teorema de Rouché en el mismo contorno que para el Teorema 1.

I. Calculemos las raíces de f : $z_1, z_2 = \frac{-(a_2 - kc_2) \pm \sqrt{(a_2 - kc_2)^2 - 4a_1}}{2}$.

Si queremos que sean complejas y con parte real negativa podemos pedir que:

$$\begin{cases} (a_2 - kc_2)^2 - 4a_1 < 0 \\ Re(z_i) = \frac{-a_2 + kc_2}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_2 - kc_2)^2 < 4a_1 \\ kc_2 < a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_2 - kc_2)^2 < 4a_1 \\ a_2 \gg 1. \end{cases}$$

Y aquí tenemos entonces ciertas condiciones bajo las cuales trabajaremos en el ítem II.

II. Tomemos, igual que para el Teorema 1, el contorno $C_R = C_R^+ \cup Im$ como muestra la figura 3.4.

■ Sea $z \in C_R^+ \Rightarrow z = Re^{i\theta}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(z)| &= |R^2 e^{i2\theta} + (a_2 - kc_2)Re^{i\theta} + a_1| \quad \text{es del orden de } R^2 \\ \wedge |g(z)| &= |kc_2 Re^{i\theta} e^{-\tau Re^{i\theta}}| = |kc_2| \cdot R \cdot 1 \cdot |e^{-\tau R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}| \\ &= |kc_2| \cdot R \cdot e^{-\tau R \cos(\theta)} \cdot 1 \quad \text{y como } \cos(\theta) \geq 0 \text{ si } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Rightarrow |g(z)| &\leq |kc_2|R \quad \text{que es a lo sumo del orden de } R \end{aligned}$$

Por lo tanto, vale que $|g(z)| < |f(z)|$ en C_R^+ si $R \gg 1$.

■ Sea $z \in Im \Rightarrow z = iy, y \in [-R, R]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(z)|^2 &= |-y^2 + (a_2 - kc_2)iy + a_1|^2 = (a_1 - y^2)^2 + (a_2 - kc_2)^2 y^2 \\ &= (a_1 - y^2)^2 + (a_2^2 - 2a_2 kc_2) y^2 + (kc_2)^2 y^2 \\ \wedge |g(z)|^2 &= |kc_2 i y e^{-\tau i y}|^2 = (kc_2)^2 y^2 \\ \Rightarrow |f(z)|^2 &= (a_1 - y^2)^2 + (a_2^2 - 2a_2 kc_2) y^2 + |g(z)|^2 \\ |f(z)|^2 &\geq |g(z)|^2 \text{ si } z \in Im \\ &\quad \text{siempre que } a_2^2 - 2a_2 kc_2 \geq 0 \text{ lo que sucede si } a_2 \gg 1 \\ \therefore |f(z)| &> |g(z)| \text{ si } z \in Im \text{ y } a_2 \gg 1. \end{aligned}$$

En conclusión, podemos afirmar que f y g satisfacen la hipótesis del teorema de Rouché:

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C_R \text{ con } R \gg 1.$$

Y entonces, vale que f y $f + g = F$ tienen la misma cantidad de raíces en el interior de C_R con $R \gg 1$ (o sea, ambas tienen cero raíces en el semiplano derecho del plano complejo) bajo las condiciones

$$\begin{cases} (a_2 - kc_2)^2 < 4a_1 \\ a_2 \gg 1, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

que se verifican en el primer cuadrante del plano de parámetros. Y por lo tanto, podemos afirmar que cualquier punto $(a_1, a_2) \in I$ (que incluye el primer cuadrante) da lugar a una función característica F que tiene cero raíces con parte real positiva.

En conclusión, $I \subseteq D_{k,\tau}^0$.

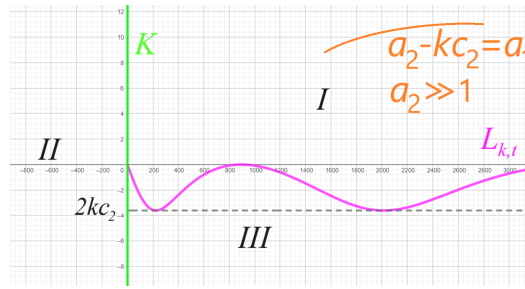


Figura 4.3: Curva (en naranja) de las condiciones (4.2.2).

Para ver que las otras regiones no son parte de $D_{k,\tau}^0$ estudiamos el valor de p en cada una de ellas, analizando su variación por la relación: $z' = \frac{\partial z}{\partial a_1}$.

Derivamos en forma implícita la relación $F(z) = 0$ respecto de a_1 :

$$\begin{aligned} z^2 + (a_2 - kc_2)z + a_1 + kc_2ze^{-\tau z} &= 0 \\ 2z \cdot z' + (a_2 - kc_2)z' + 1 + kc_2(z'e^{-\tau z} + z \cdot z' \cdot (-\tau)e^{-\tau z}) &= 0 \\ z' \cdot (2z + (a_2 - kc_2) + kc_2(1 - \tau z)e^{-\tau z}) &= -1. \end{aligned}$$

Sobre los puntos de la recta vertical K , es decir donde $z = 0$ y $a_1 = 0$ nos queda que :

$$z' = \frac{-1}{a_2} \Rightarrow \operatorname{Re}(z') = \frac{-1}{a_2}.$$

- Si $a_2 > 0$ (es decir, pasamos de la región II a la región I) entonces la derivada de $\operatorname{Re}(z)$ es negativa, por lo que $\operatorname{Re}(z)$ es decreciente, y por lo tanto $II \subseteq D_{k,\tau}^p$, $p \geq 1$, pues $I \subseteq D_{k,\tau}^0$.
- Si $a_2 < 0$ (es decir, pasamos de la región II a la región III) entonces la derivada de $\operatorname{Re}(z)$ es positiva, por lo que $\operatorname{Re}(z)$ es creciente, y por lo tanto $III \subseteq D_{k,\tau}^p$, $p \geq 2$, pues $I \subseteq D_{k,\tau}^0$.

Por todo lo anterior, podemos afirmar que $I = D_{k,\tau}^0$. Y por lo tanto la región de estabilización del sistema es $S = \bigcup_{k,\tau} D_{k,\tau}^0$. Sin embargo, no estamos en condiciones aún de dar una ecuación para describir dicha región. Esto se hará en la subsección 4.2.1.

4.2.1. Sobre la elección de τ y k

La selección de valores para k y τ está fuertemente ligada al punto (a_1, a_2) , por esto, es necesario que sigamos estudiando la frontera $\Gamma_{k,\tau}$. Comenzaremos buscando la condición necesaria para que la curva $L_{k,\tau}$ no tenga auto-intersecciones ni corte a la recta vertical K .

Como el signo de kc_2 afecta la posición de la curva $L_{k,\tau}$ de forma que:

- Si $kc_2 > 0$ entonces la curva yace en el semiplano superior $a_2 \geq 0$.
- Si $kc_2 < 0$ entonces la curva yace en el semiplano inferior $a_2 \leq 0$.

Entonces la región $D_{k,\tau}^0$ es mayor para $kc_2 < 0$, como se muestra en la figura 4.4.

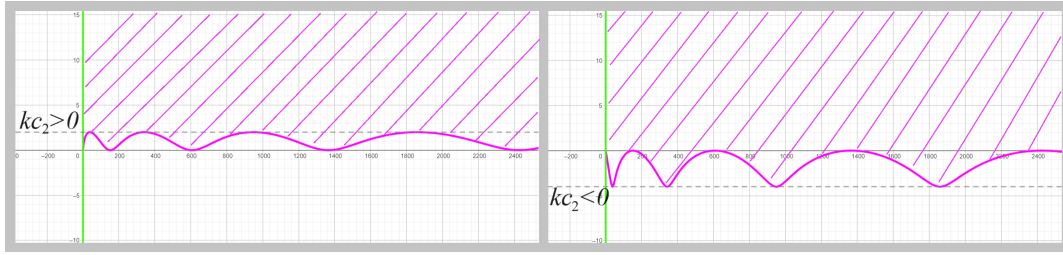


Figura 4.4: Posiciones de la curva $L_{k,\tau}$.

Supongamos entonces que $kc_2 < 0$, como además de la ecuación (4.2.1):

$$\begin{aligned} a_1(y) &= y^2 - kc_2 y \sin(\tau y) \\ \Rightarrow a'_1(y) &= 2y - kc_2 [\sin(\tau y) + \tau y \cos(\tau y)] \\ &= (-kc_2) \tau y \left[\frac{2}{-kc_2 \tau} + \frac{\sin(\tau y)}{\tau y} + \cos(\tau y) \right]. \end{aligned}$$

Y, si llamamos m al mínimo de $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)$, resulta que:

$$a'_1(y) = \underbrace{(-kc_2) \tau y}_{\geq 0} \left[\frac{2}{-kc_2 \tau} + g(\tau y) \right],$$

y el signo de esta expresión varía según el signo del corchete.

Si queremos que $a_1(y)$ sea no decreciente, entonces pedimos que:

$$\begin{aligned} \frac{2}{-kc_2 \tau} + g(\tau y) &\geq 0 \quad \forall y \\ \Rightarrow g(\tau y) &\geq \frac{2}{kc_2 \tau} \quad \forall y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos que: $m \geq \frac{2}{kc_2\tau} \Rightarrow kc_2\tau \geq \frac{2}{m} \approx -1,9195$.

O equivalentemente,

$$\tau \leq \frac{2}{mkc_2}. \quad (4.2.3)$$

De aquí podemos concluir dos cosas:

- que para cada valor de k tenemos un intervalo de valores para τ : $\left(0, \frac{2}{mkc_2}\right]$,
- que podemos asociar por pares k y τ tomando para k fijo un $\tau = \frac{2}{mkc_2}$, ya que elegir un valor menor para τ equivaldría a elegir un valor mayor para k .

Finalmente, veamos que dado un punto $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_a^2$ tal que $a_1 > 0$ y $a_2 < 0$ podemos hallar k y $\tau > 0$ para el cual $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$.

Elegimos un valor para k suficientemente grande en módulo, de forma que $2kc_2 < a_2$ y tomamos su τ asociado: $\tau = \frac{2}{mkc_2}$. Con esta elección la región $D_{k,\tau}^0$ es maximal (para el k elegido) pues para $\tau \geq \frac{2}{mkc_2}$ la curva $L_{k,\tau}$ tiene bucles cuyos interiores están incluidos en regiones $D_{k,\tau}^p$ con $p \geq 1$. Además, el valor absoluto de las ordenadas de los puntos de la frontera de la región $D_{k,\tau}^0$ es menor (pues depende de k), es decir la correspondiente parte de la frontera $D_{k,\tau}^0$ que es la curva $L_{k,\tau}$ se eleva y la región entonces se vuelve más chica a medida que $2kc_2$ crece.

Observemos que para esos valores de k y τ elegidos, $y = \frac{\pi}{\tau}$ es el primer mínimo de la curva y por lo tanto $\left(a_1 \left(\frac{\pi}{\tau}\right), a_2 \left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right)$ es el punto de $L_{k,\tau}$ que está más abajo.

Luego, si τ es tal que $a_1 = a_1 \left(\frac{\pi}{\tau}\right) = \frac{\pi^2}{\tau^2}$, valor que obtuvimos reemplazando en la ecuación (4.2.1) entonces el punto $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$, como muestra la figura 4.5:

Por lo tanto, los valores de k y τ se pueden elegir de:

$$2kc_2 = a_2 - \delta, \quad \delta > 0 \quad \wedge \quad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{a_1}}.$$

Volveremos a estas dos condiciones al final de esta sección, para analizar cómo interactúan a la hora de elegir k y τ para cierto punto dado. Por ahora cerremos la definición de la región de estabilización. Teníamos que una vez seleccionados k y τ la región de $D_{k,\tau}^0$ es maximal, entonces nos queda que la región de estabilización $S = \bigcup_k D_{k,\tau}^0$, con $\tau = \frac{2}{mkc_2}$ fijo, que viene de la ecuación (4.2.3).

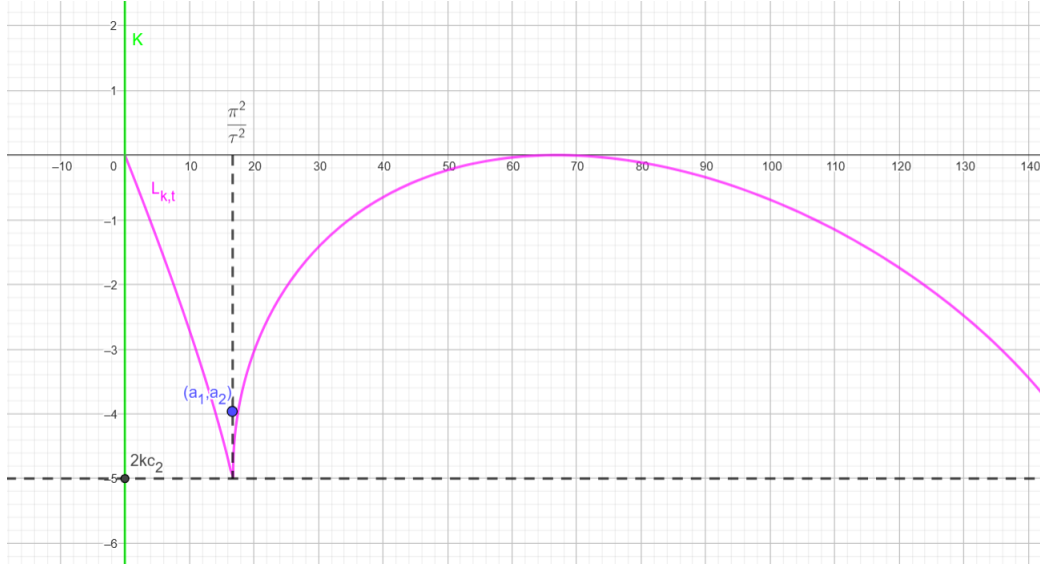


Figura 4.5: El punto (a_1, a_2) se ubica por encima del punto mínimo de $L_{k,\tau}$.

De aquí, que las ecuaciones paramétricas de la frontera, donde k es el parámetro, son las siguientes:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2}{\left(\frac{2}{mkc_2}\right)^2} = \frac{(\pi mkc_2)^2}{4}, \\ a_2 = 2kc_2, \end{cases}$$

sustituyendo a_2 en a_1 queda: $a_1 = \frac{\pi^2}{16} m^2 a_2^2$, con $a_2 \leq 0$.

Finalmente, estudiemos las condiciones (4.2.1).

Dado $a_1 > 0$ siempre es posible elegir un valor de τ que satisfaga $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{a_1}}$, este será entonces el primer parámetro que elegimos. Pero, como además debe cumplirse $\tau = \frac{2}{mkc_2}$, entonces el valor de k queda determinado: $k = \frac{2}{mc_2\tau}$. Con este valor el teorema nos asegura que si $a_2 > 2kc_2$ entonces el sistema se puede estabilizar con el control de Pyragas. Pero agreguemos además que la relación entre τ y k originalmente es la desigualdad (4.2.3), por lo que es posible elegir otros valores para k manteniendo esa desigualdad $|k| \leq \frac{2}{|mc_2|\tau}$ y siempre que $a_2 > 2kc_2$ este teorema nos asegura que es posible estabilizar el punto de equilibrio del sistema.

¿Pero qué sucede si en cambio, $a_2 \leq 2kc_2$? Gráficamente, eso significa que el punto (a_1, a_2) está “por debajo” de la curva $L_{k,\tau}$ y por lo tanto fuera de esa región de estabilización. Pero uno podría preguntarse si, dado que la restricción original para τ era la desigualdad quizá podría existir otro valor de k que permita estabilizar el sistema. Pues bien, esto no es posible

dado que como $kc_2 < 0$ despejando en la desigualdad nos queda que $0 > kc_2 \geq \frac{2}{m\tau}$, es decir, los valores que puede tomar kc_2 sólo moverían la curva $L_{k,\tau}$ hacia arriba, y por lo tanto, el punto (a_1, a_2) seguiría quedando por debajo, lo que haría que el punto de equilibrio del sistema no pueda estabilizarse con el control de Pyragas.

4.3. Corolarios y simulaciones

Corolario 1

Supongamos que el punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$ del sistema abierto (2.2.2), con $u = 0$, siendo $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, es un foco o nodo inestable, entonces x^* puede estabilizarse con el TDFC de Pyragas si y sólo si:

$$a_1 > \frac{(m\pi a_2)^2}{16}, \quad a_2 < 0.$$

Corolario 2

Supongamos que $x^* = (0, 0)$ es un punto silla del sistema (2.2.2), con $u = 0$ siendo $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$, o bien que $z = 0$ es una raíz de la función característica, entonces la estabilización de x^* no es posible para ningún valor de $k, \tau > 0$.

De igual forma que en la sección análoga del Teorema 1, simulamos el comportamiento de las variables del sistema x_1 y x_2 . Elegimos algunos puntos de la región de parámetros (a_1, a_2) dentro de la región de estabilización obtenida en el Corolario 1 del Teorema 3, que hacen que el equilibrio $x^* = (0, 0)$ sea un foco inestable. Además variamos el parámetro de salida c_2 .

Como se analizó al final de la sección anterior, además de utilizar los valores de τ y k determinados por el Teorema 3, modificamos el valor de k en la medida que se sigan cumpliendo las desigualdades (4.2.3) y $2kc_2 < a_2$.

Para ilustrar los casos del teorema consideramos el punto $(a_1, a_2) = (4, -1)$ que se encuentra dentro de la región de estabilización puesto que cumple la desigualdad del Corolario 1. Para el control de Pyragas elegimos los valores $c_1 = 0$ y $c_2 = 13$, y entonces con los parámetros elegidos, el valor de τ resulta $\tau = \frac{\pi}{2}$, mientras que el valor de k puede elegirse satisfaciendo la desigualdad (4.2.3), que al despejar k nos queda $k \geq \frac{2}{13m\frac{\pi}{2}}$ y también con-

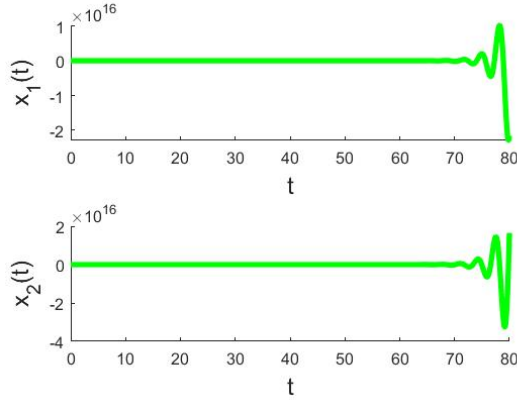
siderando que debe cumplirse que $2kc_2 < a_2$. Estas dos condiciones determinan un intervalo: $k \in [-0,0940; -0,0384)$.

En todos los casos, realizamos las simulaciones utilizando condiciones iniciales $x_1(0) = 0,1$ y $x_2(0) = 0,15$.

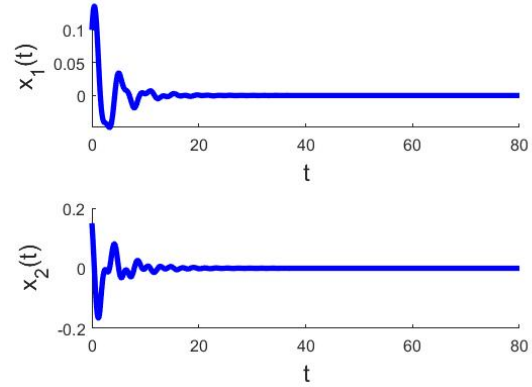
Figura 4.6:

Ejemplo 1:

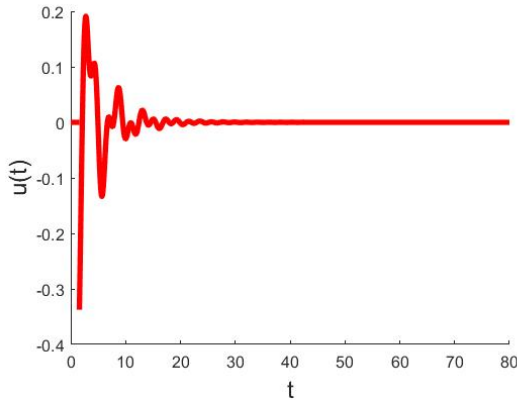
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \tau = \frac{\pi}{2}; \text{ resultando } k = -0,0940.$$



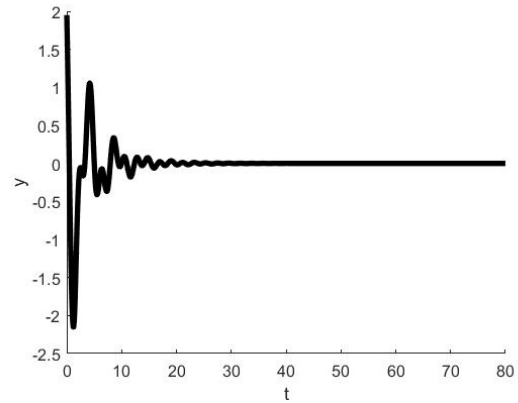
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



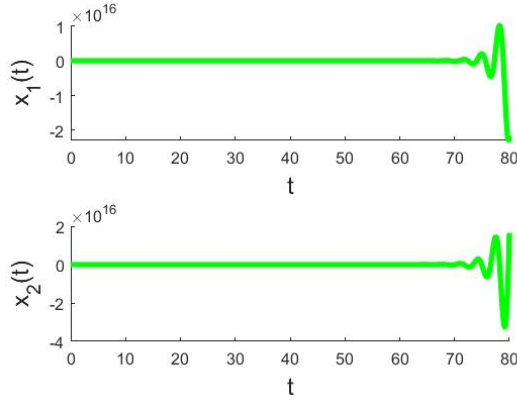
(d) Salida del sistema.

Podemos observar, comparando los ejemplos 1 y 2, que el equilibrio del sistema abierto (es decir, con control $u = 0$) es un foco inestable ya que los autovalores de la matriz del sistema son $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$. Gráficamente, esto implica que las curvas de las variables del sistema (en verde) divergen oscilando hacia los infinitos. Por otro lado, variar el parámetro k dentro del intervalo de estabilización no modifica demasiado el comportamiento del control, es decir, se logra la estabilización en tiempos equiparables.

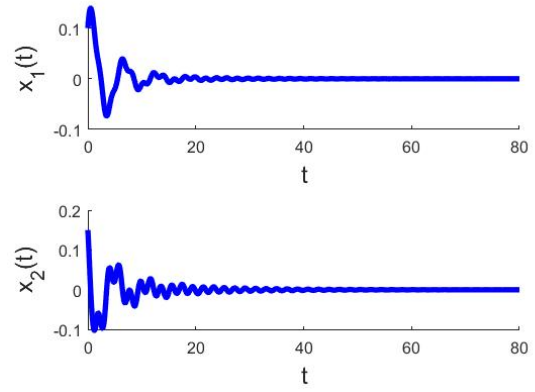
Figura 4.7:

Ejemplo 2:

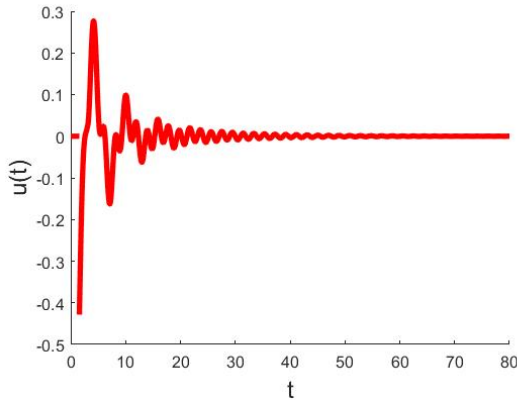
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \tau = \frac{\pi}{2}; \text{ tomando } k = -0,05.$$



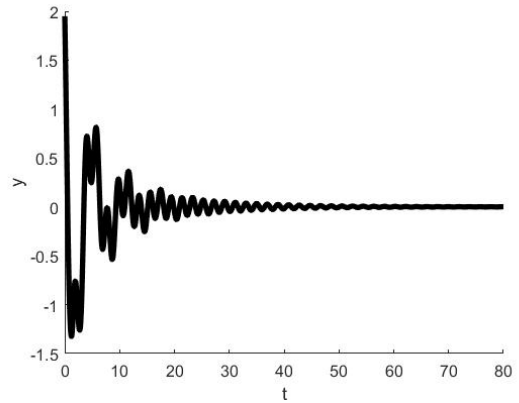
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



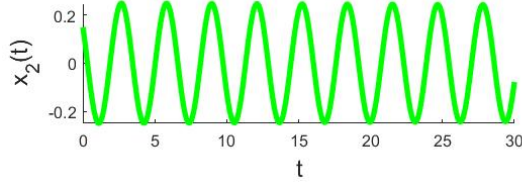
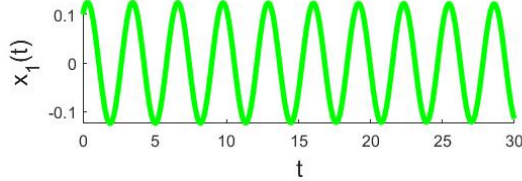
(d) Salida del sistema.

En la figura 4.8, estudiaremos un punto en la región de estabilización, que no se encuentra en el Corolario 1, es decir, un punto donde $a_2 = 0$, lo que devuelve un centro. Elegimos tomar $a_1 = 4$ y mantener los valores para $c_1 = 0$ y $c_2 = 13$.

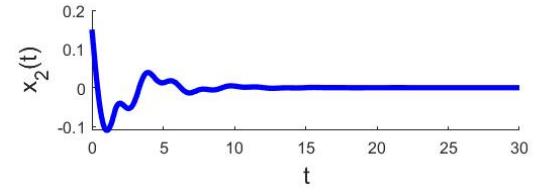
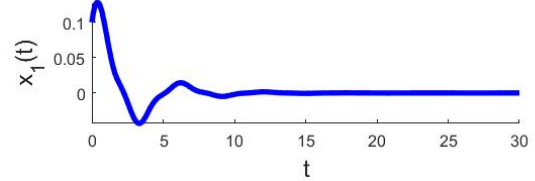
Figura 4.8:

Ejemplo 3:

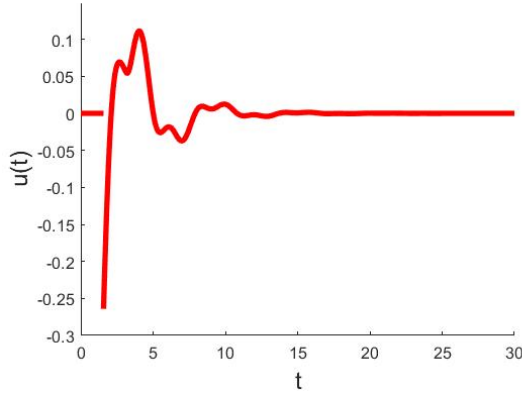
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \tau = \frac{\pi}{2}; \text{ tomando } k = -0,0940.$$



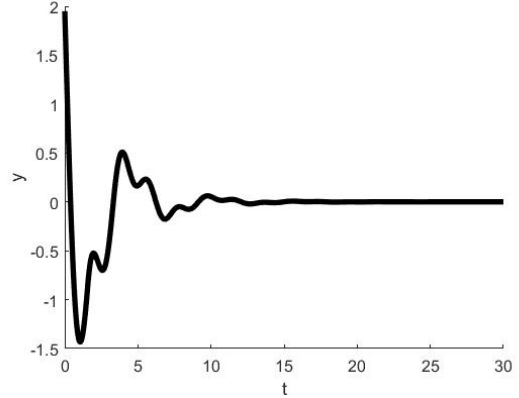
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



(d) Salida del sistema.

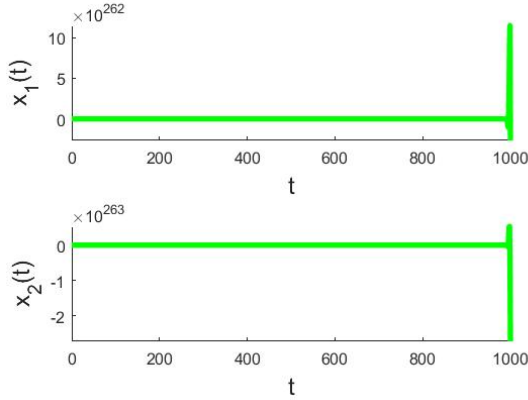
Por último, presentamos dos simulaciones sobre la observación que hacen Leonov, Shumafov y Kuznetsov en [19] comparando sus resultados con los obtenidos previamente por Pyragas en [28]. Ellos observan que sus resultados analíticos se condicen con los resultados numéricos de Pyragas para el ejemplo propuesto por este último tomando los siguientes valores para los parámetros: $a_1 = 0$, $a_2 = -d$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.

Mientras que Pyragas obtuvo computacionalmente el intervalo de estabilidad para d : $0 < d < 1,216$, al utilizar las expresiones analíticas de [19], y allí reemplazar los valores de los parámetros elegidos, se obtiene este otro intervalo $0 < d < 4/|m|\pi \approx 1,222$.

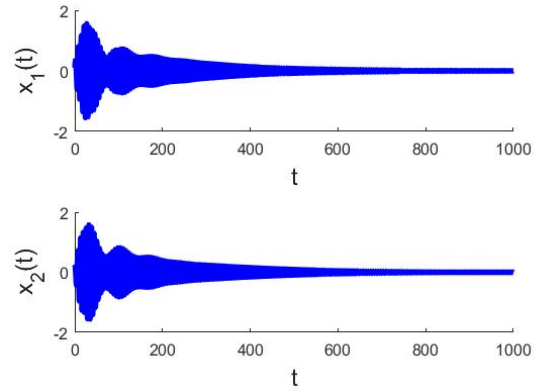
Figura 4.9:

Ejemplo 4: El máximo d obtenido por Pyragas.

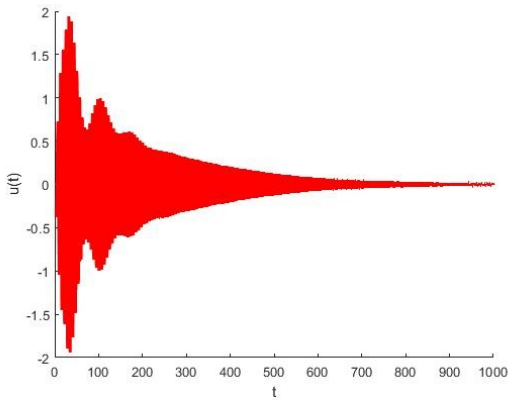
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1,216 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad \tau = \pi; \text{ resultando } k = -0,6110.$$



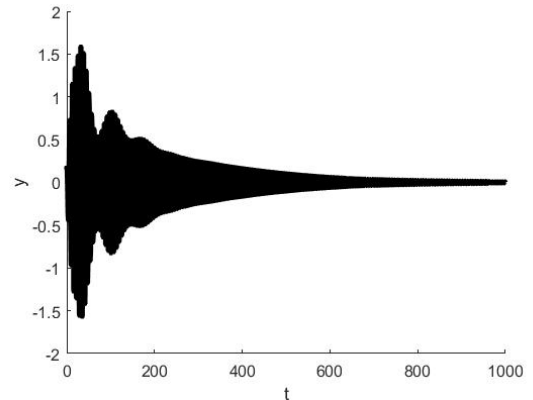
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



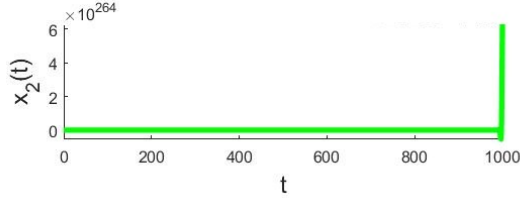
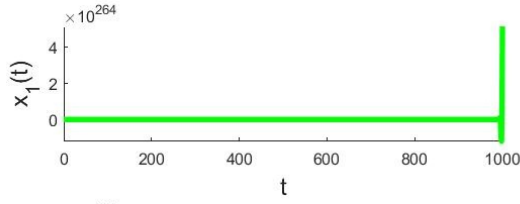
(d) Salida del sistema.

Estos dos ejemplos 4.9, 4.10 además de ser interesantes por la cuestión anecdótica, traen consigo la siguiente observación: los gráficos son muy distintos respecto de los obtenidos en los primeros tres ejemplos debiéndose a la cantidad de tiempo necesaria para estabilizar el punto de equilibrio de los sistemas con estos parámetros. Esto se debe a que los puntos (a_1, a_2) están “muy cerca” de la frontera de la región de estabilización.

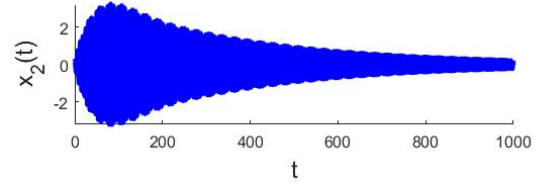
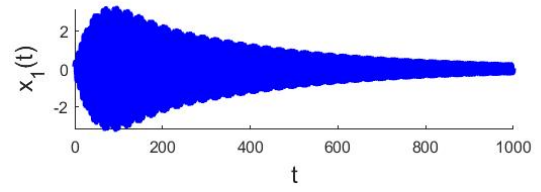
Figura 4.10:

Ejemplo 5: El máximo d obtenido por Leonov y otros.

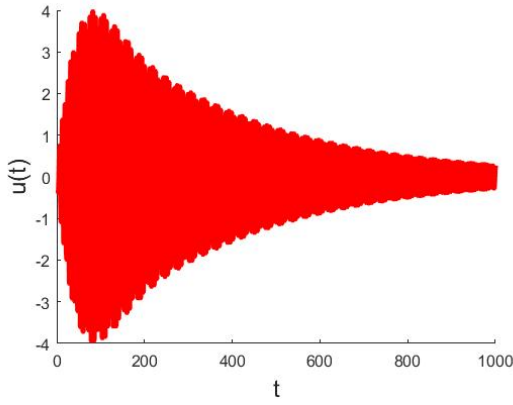
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1,222 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad \tau = \pi; \text{ resultando } k = -0,6110.$$



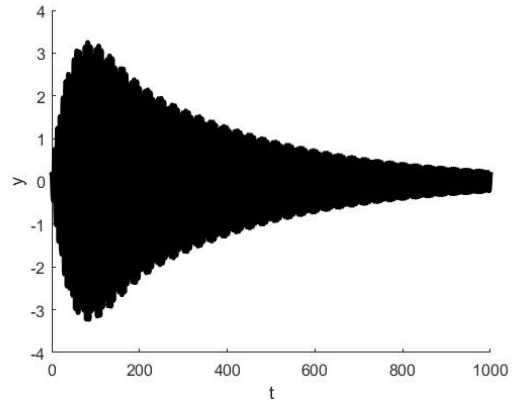
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



(d) Salida del sistema.

Capítulo 5

Análisis de las regiones de estabilización para el caso $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$

En este capítulo hacemos una revisión completa del enunciado y la demostración del así llamado *Teorema 5* en [19] y agregamos al final una sección con simulaciones para ilustrar los resultados.

5.1. Enunciado del Teorema 5

Supongamos que $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ en el sistema (2.2.2).

En este caso, podemos afirmar que: El punto de equilibrio $x^* = (0, 0)$ puede estabilizarse con el control de Pyragas si y sólo si se satisface al menos una de las siguientes condiciones:

a. $c_1 \cdot c_2 > 0, \quad a_1 > 0;$

b. $c_1 \cdot c_2 < 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > \frac{c_1}{c_2};$

c. $c_1 \cdot c_2 < 0, \quad a_1 > \frac{c_1}{c_2} \cdot a_2 + \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \cdot a_2^2, \quad a_2 < \frac{2m_1\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}} = T_\beta$

$$\text{donde } \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2}\right) \quad \text{y } m_1 = \min_{(0, 2\pi)} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \approx -0,2173. \quad (5.1.1)$$

Los valores de k , τ son todos los que cumplen las siguientes condiciones:

- Para el caso a. tomamos

$$0 < \tau < \min \left\{ \frac{2c_2}{c_1}, \frac{\pi^2}{-2\beta} \right\}, \quad k = \frac{\beta}{c_1\tau}, \quad \text{donde } \beta < \min\{0, a_2\}.$$

- Para el caso b. tomamos

$$0 < \tau < 2 \left(\frac{1}{-\beta} + \frac{c_2}{c_1} \right), \quad \frac{\tau \left(1 + \frac{c_1\tau\tilde{m}}{c_2} \right)}{2 \left(\frac{c_1}{c_2\beta} - 1 \right) + \frac{c_1\tau}{c_2}} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}, \quad k = \frac{\beta}{c_1\tau}$$

$$\text{con } \frac{c_1}{c_2} < \beta < \min\{0, a_2\} \quad \text{y} \quad \tilde{m} = \min_{(0,+\infty)} \frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3}. \quad (5.1.2)$$

- Para el caso c. tomamos

$$0 < \tau < \frac{mc_2\beta - 2c_1}{m_1c_1\beta}, \quad k = \frac{\beta}{c_1\tau}, \quad \text{con } \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2} \right).$$

Observación 1: Si $c_1 \cdot c_2 < 0$ entonces $a_1 > 0$ es también necesaria tanto en el caso b. como en el caso c.

Observación 2: El lector podrá notar dos diferencias con respecto a las cotas utilizadas en b. y c. entre el paper [19] y esta tesis:

- cambiamos el parámetro que en el paper se señala como $M = \max_{(0,+\infty)} \frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3}$

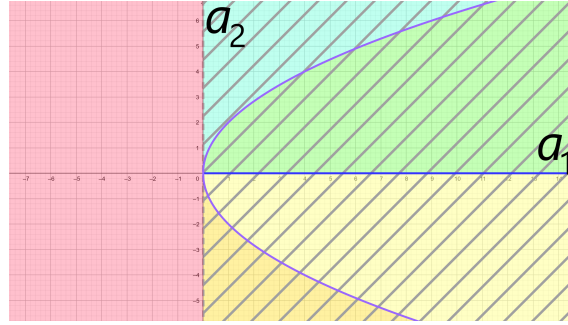
por $\tilde{m} = \min_{(0,+\infty)} \frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3}$ que aparece en la elección de k y τ para el caso b., obteniendo la segunda de las condiciones enunciadas,

- cambiamos la cota para a_2 en el ítem c. que en el paper aparece como $a_2 < \frac{2m_1c_2\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}}$

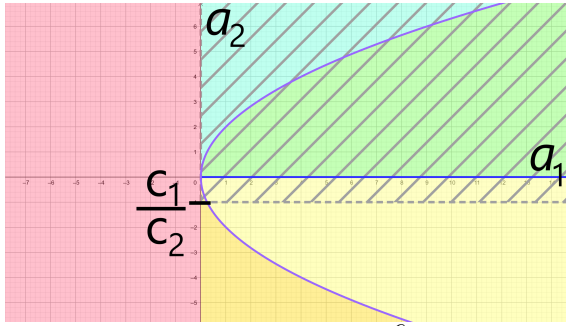
eliminando c_2 del numerador y llamándola T_β , a fin de indicar su dependencia.

Justificamos ambos cambios a lo largo de las correspondientes demostraciones.

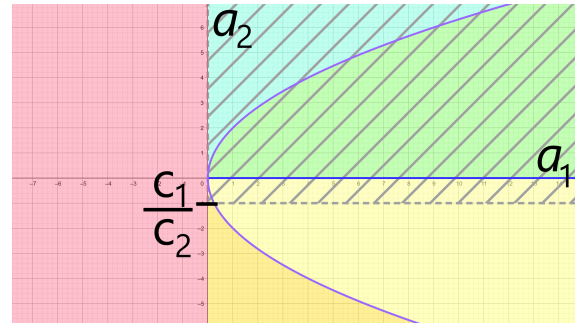
Figura 5.1: Regiones de estabilización según las condiciones sobre los parámetros.



(a) $c_1 \cdot c_2 > 0$, $a_1 > 0$.



(b) $c_1 \cdot c_2 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > \frac{c_1}{c_2}$
(se tomó $\frac{c_1}{c_2} = -1$).



(c) $c_1 \cdot c_2 < 0$, $a_1 > h(a_2)$, $a_2 < T_\beta$
 $h(a_2) = \frac{c_1}{c_2} \cdot a_2 + \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \cdot a_2^2$,
 $T_\beta = \frac{2m_1\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}}$
(se tomó $\frac{c_1}{c_2} = -1$, $\beta = 1,5$).

5.2. Demostración del teorema

Como en los casos anteriores, empezamos realizando la D-descomposición del plano de coeficientes para el cuasipolinomio:

$$F(z) = z^2 + (a_2 - kc_2)z + (a_1 - kc_1) + ke^{-\tau z}(c_2z + c_1).$$

■ Si $z = iy$ entonces:

$$(iy)^2 + (a_2 - kc_2)(iy) + (a_1 - kc_1) + ke^{-\tau(iy)}(c_2(iy) + c_1) = 0$$

$$(iy)^2 + (a_2 - kc_2)(iy) + (a_1 - kc_1) + k(\cos(\tau y) - i\sin(\tau y))(c_2(iy) + c_1) = 0.$$

Separando la ecuación en $Re(F(z)) = 0$ y $Im(F(z)) = 0$, nos queda:

$$\begin{aligned} -y^2 + (a_1 - kc_1) + kc_1 \cos(\tau y) + kc_2 y \sin(\tau y) &= 0 \\ (a_2 - kc_2)y + kc_2 y \cos(\tau y) - kc_1 \sin(\tau y) &= 0. \end{aligned}$$

Y si $y \neq 0$, despejando, tenemos las ecuaciones paramétricas de la curva $L_{k,\tau}$:

$$\begin{cases} a_1 = y^2 - kc_1 \cos(\tau y) - kc_2 y \sin(\tau y) + kc_1 \\ a_2 = kc_1 \frac{\sin(\tau y)}{y} - kc_2 \cos(\tau y) + kc_2, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

siendo ambas expresiones, funciones pares.

- Si $z = 0 \Rightarrow a_1 - kc_1 + kc_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ define la recta vertical K .

Analicemos la curva $L_{k,\tau}$:

- El punto inicial es $(0, kc_1\tau)$ puesto que $a_1(y) \rightarrow 0 \wedge a_2(y) \rightarrow kc_1\tau$ cuando $y \rightarrow 0$, resultados que pueden obtenerse calculando el límite en (5.2.1).
- La condición para que no tenga bucles como antes, depende del signo de $a'_1(y)$. Veamos entonces cuándo es positiva:

$$\begin{aligned} a'_1(y) &= 2y + kc_1\tau \sin(\tau y) - kc_2 \sin(\tau y) - kc_2 y \tau \cos(\tau y) \\ &= \tau y \left[\frac{2}{\tau} + kc_1\tau \frac{\sin(\tau y)}{\tau y} - kc_2 \frac{\sin(\tau y)}{\tau y} - kc_2 \cos(\tau y) \right] \\ (\text{llamando } \sigma = \tau y) \quad &= \sigma \left[\frac{2}{\tau} + kc_1\tau \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} - kc_2 \underbrace{\left(\frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right)}_{g(\sigma)} \right] \\ &= \sigma \left[\underbrace{\frac{2}{\tau}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{kc_1\tau \frac{\sin(\sigma)}{\sigma}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{kc_2 g(\sigma)}_{\text{acotado}} \right] \quad (\text{para } \tau \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a'_1(y) \geq 0$ para $\tau \ll 1$, es decir $a'_1(y)$ es no decreciente y $L_{k,\tau}$ queda posicionada en el semiplano derecho.

Veamos ahora que la única región $D_{k,\tau}^0$ está por encima de $L_{k,\tau}$.

Reescribimos $F(z)$ como suma de dos funciones $f(z)$ y $g(z)$:

$$F(z) = \underbrace{z^2 + (a_2 - kc_2)z + (a_1 - kc_1)}_{f(z)} + \underbrace{ke^{-\tau z}(c_2 z + c_1)}_{g(z)}$$

Aplicaremos el teorema de Rouché a f y g en C_R en los siguientes dos ítems.

I. Analizamos los ceros de f en el interior de C_R :

$$z_1, z_2 = \frac{-(a_2 - kc_2) \pm \sqrt{(a_2 - kc_2)^2 - 4(a_1 - kc_1)}}{2}.$$

Como queremos condiciones para los parámetros que nos aseguren que las raíces de f tienen parte real negativa, pedimos primero que sean complejas, y para eso necesitamos que el discriminante sea negativo, es decir que $(a_2 - kc_2)^2 - 4(a_1 - kc_1) < 0$; luego para asegurarnos que $Re(z_i) < 0$ pedimos que $a_2 - kc_2 > 0$.

Observemos que estas dos condiciones se dan en el primer cuadrante del plano de parámetros \mathbb{R}_a^2 .

Por lo tanto, f no tiene raíces con parte real positiva en C_R bajo las condiciones anteriores.

II. Acotamos el módulo de g con el módulo de f en el contorno C_R .

Si $z \in C_R^+ \Rightarrow z = Re^{i\theta}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, vemos que:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(Re^{i\theta})| \quad \text{es del orden de } R^2, \\ |g(z)| &= |g(Re^{i\theta})| \quad \text{es del orden de } R, \\ \therefore |g(z)| &< |f(z)| \text{ para } R \gg 1. \end{aligned}$$

Si $z \in Im \Rightarrow z = iy$, $y \in [-R, R]$. Reemplazando nos queda,

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &= |ke^{\tau(iy)}(c_2(iy) + c_1)|^2 \\ &= k^2 \cdot 1 \cdot |c_2(iy) + c_1|^2 \\ &= k^2 [c_1^2 + (c_2 y)^2], \\ |f(z)|^2 &= |(iy)^2 + (a_2 - kc_2)(iy) + (a_1 - kc_1)|^2 \\ &= (-y^2 + a_1 - kc_1)^2 + (a_2 - kc_2)^2 y^2 \\ &= (-y^2 + a_1 - kc_1)^2 + (a_2^2 - 2a_2kc_2)y^2 + k^2c_2^2y^2 \\ &= y^4 - 2(a_1 - kc_1)y^2 + (a_1 - kc_1)^2 + (a_2^2 - 2a_2kc_2)y^2 + k^2c_2^2y^2 \\ &= y^4 - 2(a_1 - kc_1)y^2 + a_1^2 - 2kc_1a_1 + \underbrace{k^2c_1^2}_{(1)} + (a_2^2 - 2a_2kc_2)y^2 + \underbrace{k^2c_2^2y^2}_{(2)}. \end{aligned}$$

Observemos que los términos seleccionados forman $|g(z)|^2$

$$\Rightarrow |f(z)|^2 = y^4 + y^2 \underbrace{(a_2^2 - 2a_2kc_2 - 2a_1 + 2kc_1)}_{(1)} + \underbrace{(a_1^2 - 2kc_1a_1)}_{(2)} + |g(z)|^2$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) \text{ resulta positiva si } a_1 \gg 1 \\ (1) \text{ resulta positiva, con } a_1 \gg 1 \text{ si } a_2 \gg 1 \end{array} \right\} (*).$$

Y las condiciones (*) se dan si (a_1, a_2) pertenece a la región I ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow |g(z)| &< |f(z)| \quad \text{si } z \in Im \\ \therefore |g(z)| &< |f(z)| \quad \text{si } z \in C_R \quad \forall R \gg 1. \end{aligned}$$

En conclusión, por el teorema de Rouché, f y $f + g = F$ tienen igual cantidad de raíces en C_R (ninguna raíz), es decir F tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo bajo las condiciones (*). Y por propiedad de la D-descomposición, todos los demás cuasipolinomios en la región I también tienen cero raíces con parte real positiva.

Veamos que el número p (cantidad de raíces con parte real positiva) vale cero sólo en la región I de la figura 5.2.

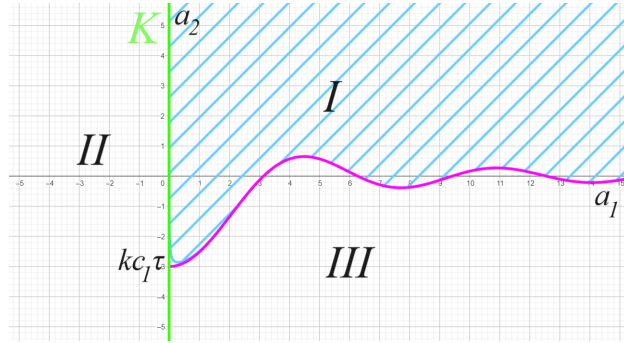


Figura 5.2: Regiones resultantes de la D-descomposición.

Analicemos cómo varía el valor de p respecto a a_1 , calculando $z' = \frac{\partial z}{\partial a_1}$ a partir de la relación $F(z) = 0$:

$$\begin{aligned} z^2 + (a_2 - kc_2)z + (a_1 - kc_1) + ke^{-\tau z}(c_2z + c_1) &= 0 \\ 2z \cdot z' + (a_2 - kc_2)z' + 1 + (-\tau z')ke^{-\tau z}(c_2z + c_1) + ke^{-\tau z}c_2z' &= 0 \\ z' [2z + (a_2 - kc_2) + (-\tau)ke^{-\tau z}(c_2z + c_1) + ke^{-\tau z}c_2] &= -1 \\ \Rightarrow z' &= \frac{-1}{2z + (a_2 - kc_2) + (-\tau)ke^{-\tau z}(c_2z + c_1) + ke^{-\tau z}c_2}. \end{aligned}$$

Para analizar cómo cambia el valor de p de una región a otra, nos ubicamos sobre la recta vertical K pues es frontera de las tres regiones, es decir, consideramos $z = 0$, con lo que nos queda:

$$z' = \frac{-1}{a_2 - kc_2 + (-\tau)kc_1 + kc_2},$$

que es una expresión real.

Por lo tanto, $Re(z') = \frac{-1}{a_2 - \tau kc_1}$ y su signo depende del denominador.

- Si $a_2 - \tau k c_1 > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z') < 0 \Rightarrow$ pasar de II a I hace que $\operatorname{Re}(z)$ decrezca, y por lo tanto, la región $II \subset D_{k,\tau}^p$ con $p \geq 1$.
- Si $a_2 - \tau k c_1 < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z') > 0 \Rightarrow$ pasar de II a III hace que $\operatorname{Re}(z)$ crezca, y por lo tanto, la región $III \subset D_{k,\tau}^p$ con $p \geq 2$.

En conclusión, $I = D_{k,\tau}^0$. Y como la región de estabilización se define como $S = \bigcup_{k,\tau} D_{k,\tau}^0$

resta encontrar las ecuaciones de S que dependerán de k y τ , que a su vez dependen del signo de $c_1 \cdot c_2$. Realizaremos este análisis en la siguiente subsección.

5.2.1. Sobre la elección de τ y k

a. Análisis de los valores de k, τ para el caso $c_1 \cdot c_2 > 0$.

Consideraremos las dos posibilidades de signos para cada parámetro:

- I. $c_1 > 0, c_2 > 0$,
 - II. $c_1 < 0, c_2 < 0$.
- I. Consideremos entonces $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Sea (a_1, a_2) tal que $a_1 > 0$, tomamos $k < 0$ e igual que en el Teorema 1 se pueden elegir k y τ de forma que $k\tau c_1 = \beta$, con $\beta < a_2$.

Para esta selección de parámetros k y τ probaremos que la derivada de $a_1(y)$ es no negativa y que la derivada de $a_2(y)$ es negativa si $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$. Calculamos las derivadas en la ecuación (5.2.1), tomando como antes $\sigma = \tau y$:

$$\begin{aligned}
 a_1'(y) &= \sigma \left[\frac{2}{\tau} + \underbrace{k c_1 \tau}_{\beta} \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} - k c_2 \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} - k c_2 \cos(\sigma) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{\tau c_1} \left[2c_1 + \beta \tau c_1 \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} - \underbrace{\tau k c_2 c_1}_{\beta c_2} \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} + \underbrace{\tau k c_2 c_1}_{\beta c_2} \cos(\sigma) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{\tau c_1} \left[2c_1 + (-\beta c_2) \left(-\frac{\tau c_1}{c_2} \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} + \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma}{\tau c_1} \left[2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) \right]. \tag{5.2.2}
 \end{aligned}$$

Como estamos en el caso c_1 y c_2 positivos, entonces:

$$a_1'(y) = \underbrace{\frac{\sigma}{\tau c_1}}_{\geq 0} \left[\underbrace{2c_1}_{\geq 0} + \underbrace{(-\beta c_2)}_{\geq 0} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma}}_{\geq 0 \text{ si } \tau \ll 1} + \underbrace{\cos(\sigma)}_{\geq 0 \text{ si } (*)} \right) \right] \geq 0, \tag{5.2.3}$$

donde (*) significa que $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, o sea $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$.

Por lo tanto, podemos decir que $a_1(y)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$.

Analicemos ahora el signo de la derivada de $a_2(y)$ a partir de (5.2.1):

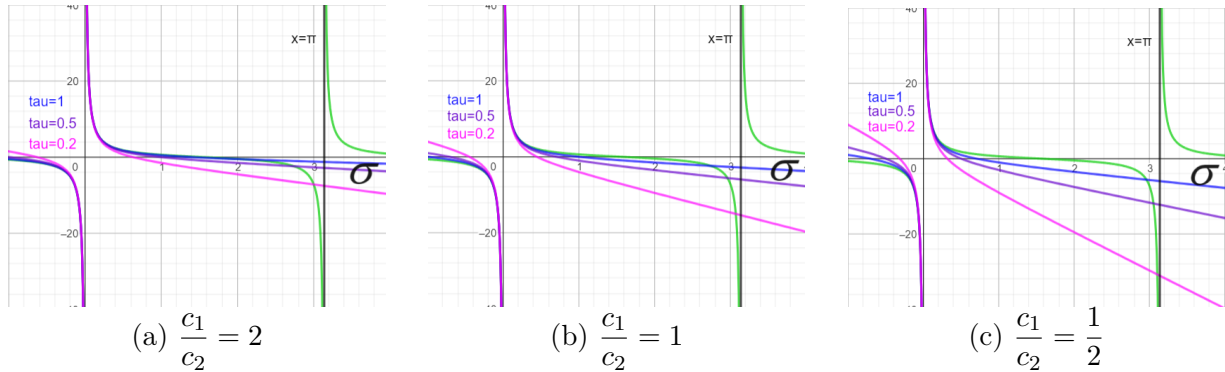
$$\begin{aligned} a_2'(y) &= kc_1\tau^2 \left(\frac{\cos(\tau y)\tau y - \text{sen}(\tau y)}{\tau^2 y^2} \right) + k\tau c_2 \text{sen}(\tau y) \\ &= \frac{\beta\tau}{\sigma^2} \left[(\cos(\sigma)\sigma - \text{sen}(\sigma)) + \frac{c_2\sigma^2}{c_1\tau} \text{sen}(\sigma) \right] \\ &= \frac{\beta\tau}{\sigma^2} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \text{sen}(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Busquemos las raíces de la expresión del corchete de (5.2.4) para $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \text{sen}(\sigma) &= 0 \\ \frac{\sigma \cos(\sigma)}{\text{sen}(\sigma)} &= 1 - \frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} \\ \cot g(\sigma) &= \frac{\tau c_1 - c_2\sigma^2}{\tau c_1 \sigma}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Interpretemos las soluciones de esta ecuación como las abscisas de los puntos de intersección entre los gráficos de dos funciones, como se observa en la figura 5.3.

Figura 5.3: Intersección entre las funciones.



En la figura 5.3 se presentan distintos gráficos de la intersección entre estas dos funciones, para diferentes valores de c_1 y c_2 . Allí podemos observar lo siguiente:

- en verde, la función $f(\sigma) = \cot g(\sigma)$;
- en azul, violeta y magenta los gráficos de $g(\sigma) = \frac{\tau c_1 - c_2 \sigma^2}{\tau c_1 \sigma}$, que no depende de c_1 o c_2 directamente, sino de su cociente, y por lo tanto basta analizarla para algunos valores del mismo, obteniendo en cada caso una variación que no es cualitativa;
- en negro, la recta $\sigma = \pi$;
- los puntos de intersección se dan todos entre las rectas verticales $\sigma = 0$ y $\sigma = \pi$, por lo que las soluciones de la ecuación son todos valores positivos menores a π .

Sea $\sigma_0(\tau)$ la menor de las raíces positivas de la ecuación anterior, como la expresión del corchete en (5.2.4) es positiva para $\tau \ll 1$, entonces $a'_2(y) < 0$ si $\sigma \in (0, \sigma_0(\tau))$ o sea, $a'_2(y) < 0$ para todo $y \in \left(0, \frac{\sigma_0(\tau)}{\tau}\right)$.

Y además, se tiene que:

- $\sigma_0(\tau) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ si $\tau \ll 1$,
- y más aún $\sigma_0(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \pi^-$.

Entonces, podemos analizar el cambio entre a_2 y a_1 para $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{da_2}{da_1}(y) &= \frac{\frac{\beta\tau}{\sigma^2} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2 \sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \sin(\sigma) \right]}{\frac{\sigma}{\tau c_1} \left[2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2} \right) \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) \right]} \\
&= \frac{\beta \tau^2 c_1 \left[\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3} + \frac{c_2}{\tau c_1} \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} \right]}{2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2} \right) \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right)} \leq 0 ; \tag{5.2.6}
\end{aligned}$$

y tomando límite $\sigma \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{da_2}{da_1}(0) &= \frac{\beta\tau^2c_1 \left[-\frac{1}{3} + \frac{c_2}{\tau c_1} \right]}{2c_1 + (-\beta c_2) \left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2} + 1 \right)} \\
&= \frac{\beta\tau^2c_1 \left(\frac{3c_2 - \tau c_1}{3\tau c_1} \right)}{2c_1 - 2\beta c_2 + \beta\tau c_1} \\
&= \frac{\overbrace{\beta\tau}^{\rightarrow 0^-} \overbrace{(3c_2 - \tau c_1)}^{\rightarrow 3c_2 > 0}}{\underbrace{3(2c_1 - 2\beta c_2 + \beta\tau c_1)}_{\rightarrow 2c_1 - 2\beta c_2 > 0}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0^-.
\end{aligned}$$

Esto significa, geométicamente, que la pendiente de la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ en el punto $(0, \beta)$ es negativa, y tiende a cero si $\tau \rightarrow 0$.

Como además, ya estudiamos los signos de $a'_1(y)$ y $a'_2(y)$ para $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$ en (5.2.3) y en (5.2.6) respectivamente, podemos entonces decir que:

$$\frac{da_2}{da_1}(y) < 0 \quad \text{si} \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$$

es decir, que la curva $L_{k,\tau}$ es decreciente al menos hasta el punto $\left(a_1\left(\frac{\pi}{2\tau}\right), a_2\left(\frac{\pi}{2\tau}\right)\right)$.

Ahora consideremos en la figura 5.4 la línea recta ℓ que pasa por el punto $(0, \beta)$ del eje a_2 y el punto $\left(a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right), a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right)$ de la curva $L_{k,\tau}$ de ecuaciones (5.2.1), para el cual vale:

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + 2kc_1 = \frac{\pi^2 + 2\beta\tau}{\tau^2} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} +\infty \\ a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right) = 2kc_2 = \frac{2\beta c_2}{\tau c_1} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} -\infty. \end{cases}$$

Calculemos la pendiente de la recta ℓ (m_ℓ):

$$m_\ell = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{\frac{2\beta c_2}{\tau c_1} - \beta}{\frac{\pi^2 + 2\beta\tau}{\tau^2} - 0} = \frac{\frac{2\beta c_2 - \beta\tau c_1}{\tau c_1} \tau^2}{\pi^2 + 2\beta\tau} = \frac{\beta\tau \left(\frac{2c_2}{c_1} - \tau \right)}{\pi^2 + 2\beta\tau}.$$

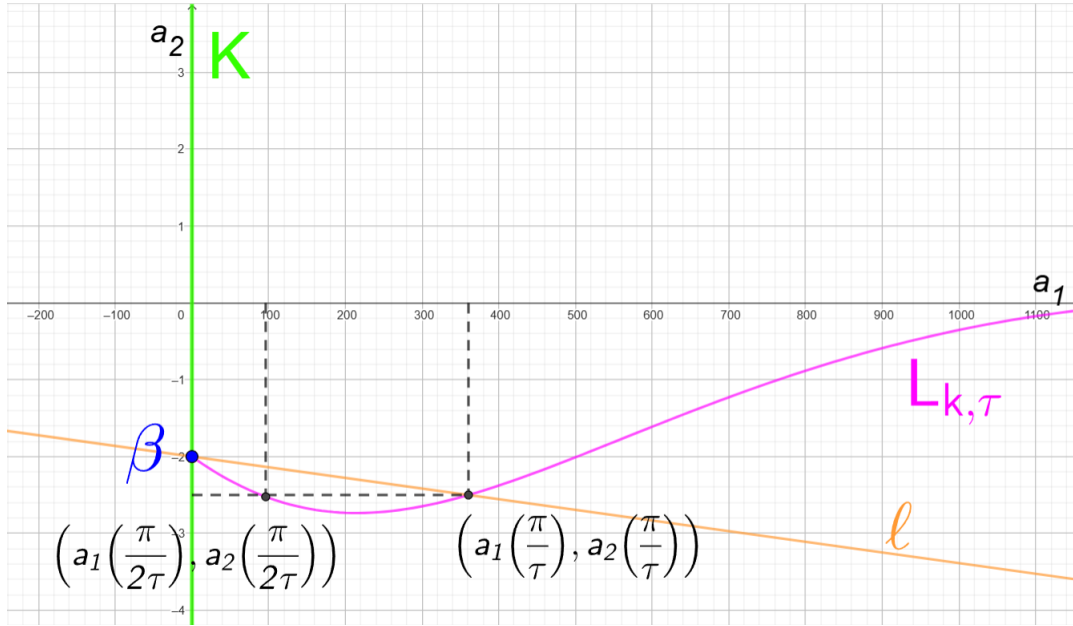


Figura 5.4: Recta ℓ .

Queremos que m_ℓ sea negativa, entonces pedimos:

$$\begin{cases} \frac{2c_2}{c_1} - \tau > 0 \text{ (pues } \beta\tau < 0) \\ \pi^2 + 2\beta\tau > 0. \end{cases}$$

Despejando aquí, nos queda que la condición para elegir τ es:

$$\begin{cases} \frac{2c_2}{c_1} > \tau \\ \tau < \frac{-\pi^2}{2\beta}. \end{cases}$$

Por lo tanto, debe cumplirse que

$$\tau < \min \left\{ \frac{2c_2}{c_1}, \frac{-\pi^2}{2\beta} \right\}. \quad (5.2.7)$$

Y entonces resulta que $m_\ell = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0^-$.

De todo esto se sigue que para $\tau \ll 1$, el punto (a_1, a_2) con $a_1 > 0$ y $a_2 > \beta$ queda por encima de la recta ℓ y por lo tanto, queda también por encima de la curva $L_{k, \tau}$; es decir, $(a_1, a_2) \in D_{k, \tau}^0$ para $\tau \ll 1$ correspondiente a $k = \frac{\beta}{\tau c_1}$. Y entonces podemos afirmar que la estabilización es posible para $a_1 > 0$ y $a_2 \in \mathbb{R}$.

Pero, ¿qué significa $\tau \ll 1$ a efectos de encontrar un valor de τ que sirva para estabilizar el punto de equilibrio del sistema? Significa que la cota obtenida para τ hasta el momento (5.2.7) todavía no es suficiente. Gráficamente, esto puede verse en la figura 5.4 donde hay puntos (a_1, a_2) que cumplen que $a_1 > 0$, $a_2 > \beta$ y están por encima de la recta ℓ pero por debajo de la curva $L_{k,\tau}$ (quedando todos a la izquierda del punto intersección entre la recta ℓ y la curva $L_{k,\tau}$).

Proponemos entonces en nuestra tesis, una nueva cota, que no se encuentra en el trabajo [19] pero que sumada a las anteriores, resultará suficiente para que cualquier valor de τ que la cumpla sirva para estabilizar el punto de equilibrio del sistema. La idea consiste en asegurar que el τ elegido deje el punto (a_1, a_2) a la izquierda del punto $\left(a_1 \left(\frac{\pi}{\tau}\right), a_2 \left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right)$; para lo cual pediremos que $a_1 < a_1 \left(\frac{\pi}{\tau}\right)$:

$$\begin{aligned} a_1 &< \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + 2kc_1 \\ 0 &< a_1 - 2kc_1 < \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \quad \text{pues } k < 0, c_1 > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a_1 - 2kc_1}} &> \frac{\tau}{\pi} \\ \frac{\pi}{\sqrt{a_1 - 2kc_1}} &> \tau. \end{aligned}$$

- II. El caso $c_1, c_2 < 0$ es similar al caso $c_1, c_2 > 0$. Para este otro caso asumimos $k > 0$. Reproduciremos el argumento anterior para obtener la misma región de estabilización $a_1 > 0$.

Supongamos que (a_1, a_2) es un punto tal que $a_1 > 0$. Sea $k > 0$, y tomemos $\beta = k\tau c_1 < 0$ con $\beta < a_2$. Entonces, los signos de a_1 y a_2 se pueden estudiar a partir de (5.2.2) para $a_1(y)$:

$$a'_1(y) = \underbrace{\frac{\sigma}{\tau c_1}}_{\leq 0} \left[\underbrace{2c_1}_{\leq 0} + \underbrace{(-\beta c_2)}_{\leq 0} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right)}_{\geq 0 \text{ si } \tau \ll 1} \underbrace{\frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma}}_{\geq 0 \text{ si } (*)} + \underbrace{\cos(\sigma)}_{\geq 0 \text{ si } (*)} \right) \right] \geq 0, \quad \text{con } y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right).$$

y sobre $a_2(y)$ en (5.2.4):

$$a'_2(y) = \underbrace{\frac{\beta\tau}{\sigma^2}}_{< 0} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \text{sen}(\sigma) \right] < 0, \quad \text{con } y \in \left(0, \frac{\sigma_0(\tau)}{\tau}\right)$$

para $\tau \ll 1$ (esta es la condición $(*)$) donde $\sigma_0(\tau)$ es la menor de las raíces positivas de la ecuación:

$$\cot g(\sigma) = \frac{\tau c_1 - c_2 \sigma^2}{\tau c_1 \sigma}.$$

Y además se cumple, igual que en el caso $c_1, c_2 > 0$, que: $\sigma_0(\tau) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\sigma_0(\tau) \rightarrow \pi^-$ con $\tau \rightarrow 0$, lo que se puede observar en los gráficos de la figura 5.3 ya que no depende del signo de c_1 y c_2 , sino de su cociente. Entonces:

$$\frac{da_2}{da_1}(0) = \frac{\overbrace{\beta\tau}^{\rightarrow 0^-} \overbrace{(3c_2 - \tau c_1)}^{\rightarrow 3c_2 < 0}}{\underbrace{3(2c_1 - 2\beta c_2 + \beta\tau c_1)}_{\rightarrow 2c_1 - 2\beta c_2 < 0}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0^- \quad \wedge \quad \frac{da_2}{da_1}(0) < 0 \quad \text{con } y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right).$$

Por lo que la curva $L_{k,\tau}$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$.

E igual que en el caso $c_1, c_2 > 0$ consideramos la recta ℓ que pasa por los puntos $(0, \beta)$ y $\left(a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right), a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right)$.

Como antes:

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} +\infty \\ a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} -\infty \end{cases}.$$

Y la pendiente de la recta ℓ : $m_\ell = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{\beta\tau \left(\frac{2c_2}{c_1} - \tau\right)}{\pi^2 + 2\beta\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0^-$.

Por lo que para $\tau \ll 1$ el punto (a_1, a_2) , $a_1 > 0$ y $a_2 > \beta$ queda por encima de la línea ℓ y por ende, por encima de la curva $L_{k,\tau}$; es decir $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$ si $\tau \ll 1$ y $k = \frac{\beta}{\tau c_1}$. O sea, $\{a_1 > 0\}$ es la región de estabilización.

Pero igual que en el caso I, la cota de τ es necesaria, pero no suficiente. Así que proponemos la misma cota que antes: $a_1 < a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right)$, que se sostiene puesto que el despeje para τ es el mismo:

$$\begin{aligned} a_1 &< \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + 2kc_1 \\ 0 &< a_1 - 2kc_1 < \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \quad \text{pues } k > 0, c_1 < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a_1 - 2kc_1}} &> \frac{\tau}{\pi} \\ \frac{\pi}{\sqrt{a_1 - 2kc_1}} &> \tau. \end{aligned}$$

b. Análisis de los valores de k, τ para el caso $c_1 \cdot c_2 < 0$ y las correspondientes cotas para a_1 y a_2 .

Otra vez, consideraremos las dos posibilidades de signos para cada parámetro:

I. $c_1 < 0, c_2 > 0$

II. $c_1 > 0, c_2 < 0$

I. Consideremos entonces $c_1 < 0, c_2 > 0$.

Sea $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_a^2$ tal que $a_1 > 0$ y $a_2 > \frac{c_1}{c_2}$.

Tomamos $\beta < 0$ tal que $\frac{c_1}{c_2} < \beta < a_2$ y tomamos $k > 0, \tau > 0$ tal que $\beta = kc_1\tau$.

Como las expresiones de $a'_1(y)$ y $a'_2(y)$ son las mismas que para el caso a) sigue valiendo que:

$$a'_1(y) = \frac{\sigma}{\underbrace{\tau c_1}_{\leq 0}} \left[\underbrace{2c_1}_{\leq 0} + \underbrace{(-\beta c_2)}_{\geq 0} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right)}_{\geq 0} \underbrace{\frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma}}_{\geq 0 \text{ si } (*)} + \underbrace{\cos(\sigma)}_{\geq 0 \text{ si } (*)} \right) \right], \quad (5.2.8)$$

donde $(*)$ significa que $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (o sea, con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$). Pero no podemos asegurar que la expresión del corchete sea negativa tan fácilmente como en el caso a) por lo que hemos de analizar para qué valores de τ esto es cierto.

Ya hemos pedido que $\frac{c_1}{c_2} < \beta < 0$, por lo tanto multiplicando por $2c_2$ (que es positivo) tenemos que $2c_1 < 2\beta c_2 < 0$. Y entonces, podemos asegurar que existe un $\epsilon > 0$ tal que $2c_1 < (2 + \epsilon)\beta c_2 < 0$. De aquí, nos queda $2c_1 - (2 + \epsilon)\beta c_2 < 0$. Analicemos quién es ese ϵ en (5.2.8) a partir de la construcción de la expresión del corchete.

- $0 < \cos(\sigma) < 1$ para $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
- $\frac{2}{\pi} < \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} < 1$ para $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, multiplicando por $1 - \tau \frac{c_1}{c_2}$ nos queda:

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) < \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} < 1 - \tau \frac{c_1}{c_2}$$
- sumando lo obtenido en las expresiones anteriores:

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) < \cos(\sigma) + \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} < 2 - \tau \frac{c_1}{c_2}$$
y llamando $\epsilon = -\tau \frac{c_1}{c_2}$ tenemos:

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) < \cos(\sigma) + \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} < 2 + \epsilon$$

Es decir, obtuvimos una cota para la expresión del corchete y por lo tanto, podemos asegurar que:

$$2c_1 - \beta c_2 \left(\cos(\sigma) + \left(1 - \tau \frac{c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} \right) < 2c_1 - \beta c_2(2 + \epsilon),$$

y para que esta última expresión sea negativa debemos pedir que:

$$\begin{aligned}
2c_1 - \beta c_2 \left(2 - \tau \frac{c_1}{c_2} \right) &< 0 \text{ y despejando } \tau \\
2c_1 &< \beta c_2 \left(2 - \tau \frac{c_1}{c_2} \right) \\
\frac{2c_1}{\beta c_2} &> 2 - \tau \frac{c_1}{c_2} \\
\frac{2c_1 - 2\beta c_2}{\beta c_2} &> -\tau \frac{c_1}{c_2} \\
-\frac{2}{\beta} + \frac{2c_2}{c_1} &> \tau,
\end{aligned}$$

y esta es justamente la primera cota para τ que asegura que $a'_1(y) \geq 0$ para $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau}\right)$.

Estudiamos ahora la derivada de $a_2(y)$ para obtener la segunda cota de τ :

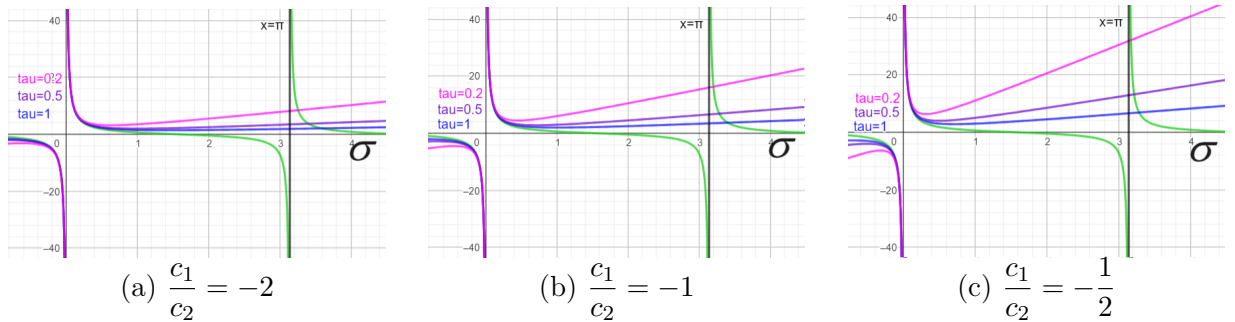
$$\begin{aligned}
a'_2(y) &= \underbrace{\frac{\beta\tau}{\sigma^2}}_{<0} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \sin(\sigma) \right] > 0 \quad \text{con } y \in \left(0, \frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right) \\
\wedge \quad a'_2(y) &< 0 \quad \text{con } y \in \left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}\right),
\end{aligned}$$

si $\tau \ll 1$ y donde $\sigma^0(\tau)$ es la menor de las raíces positivas de la ecuación:

$$\cot g(\sigma) = \frac{\tau c_1 - c_2 \sigma^2}{\tau c_1 \sigma}.$$

Otra vez, interpretamos las soluciones de esta ecuación como las abscisas de los puntos de intersección entre los gráficos de dos funciones.

Figura 5.5: Intersección entre las funciones.



Podemos ver en la figura (5.5) que los gráficos de estas funciones están invertidos respecto del caso $c_1 \cdot c_2 > 0$ lo que nos permite observar lo siguiente:

$$\sigma^0(\tau) \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ si } \tau \ll 1, \text{ y } \sigma^0(\tau) \rightarrow \pi^+ \text{ si } \tau \rightarrow 0.$$

Además, para $\tau \ll 1$ el valor absoluto del cociente entre las derivadas es:

$$\frac{da_2}{da_1}(y) = \frac{\tau \left[\frac{c_1 \tau}{c_2} \overbrace{\left(\frac{\sigma \cos(\sigma) - \operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma^3} \right)}^{\text{acotada}} + \overbrace{\frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma}}^{\text{acotada}} \right]}{\frac{2c_1}{\beta c_2} - \left[\cos(\sigma) + \left(1 - \frac{c_1 \tau}{c_2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\sigma} \right]} \approx 0 \quad \text{si } \sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

o equivalentemente: $\frac{da_2}{da_1}(y) \approx 0 \quad \text{si } y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau} \right).$

Esto significa que la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ es casi una recta horizontal para $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau} \right)$ y por lo tanto, la curva $L_{k,\tau}$ es casi una recta horizontal para los puntos correspondientes a $y \in \left(0, \frac{\pi}{2\tau} \right)$ con $\tau \ll 1$. Observemos que en el límite con $\tau \rightarrow 0$ el intervalo tiende a $(0, +\infty)$.

Consideramos una nueva recta ℓ que pase por los puntos (a_1, a_2) y $(0, \beta)$, como muestra la figura 5.6.

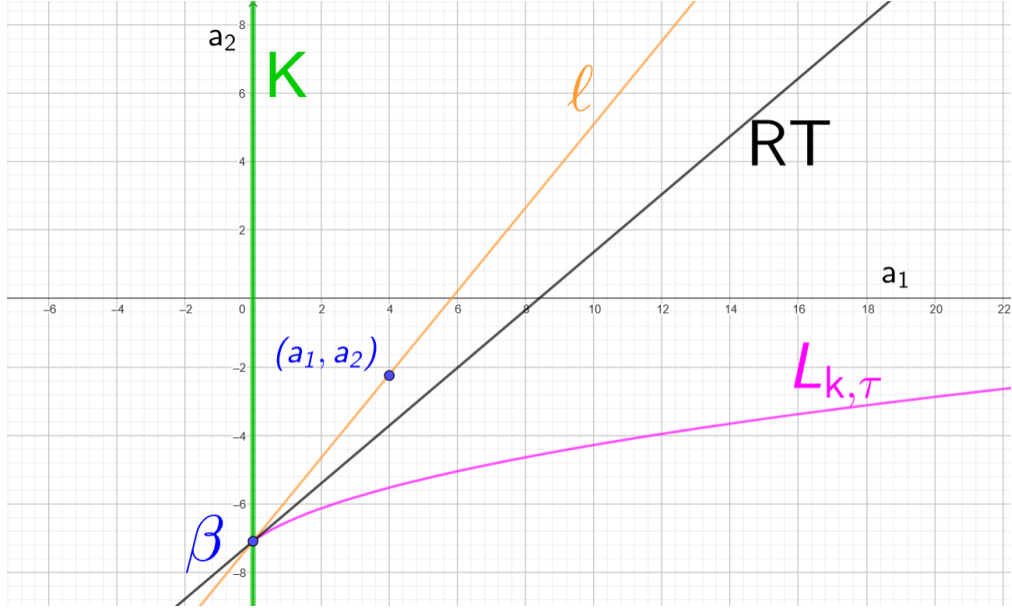


Figura 5.6: Recta ℓ .

Pedimos entonces que la pendiente de la recta tangente a la curva $L_{k,\tau}$ (recta negra en la figura) sea menor que la pendiente de la recta ℓ para cualquier valor de $\sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, esto es:

$$m_{L_{k,\tau}} < m_{\ell} = \frac{a_2 - \beta}{a_1}.$$

Considerando \tilde{m} definido en (5.1.2) podemos acotar $m_{L_{k,\tau}}$ para luego comparar con m_{ℓ} ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{L_{k,\tau}} = \frac{da_2}{da_1}(\sigma) &= \frac{\tau \left[\overbrace{\frac{c_1\tau}{c_2}}^{<0} \overbrace{\left(\frac{\sigma \cos(\sigma) - \sin(\sigma)}{\sigma^3} \right)}^{\geq \tilde{m}} + \overbrace{\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}}^{\leq 1} \right]}{\frac{2c_1}{\beta c_2} - \left[\underbrace{\cos(\sigma)}_{\leq 1} + \left(1 - \frac{c_1\tau}{c_2} \right) \underbrace{\frac{\sin(\sigma)}{\sigma}}_{\leq 1} \right]} \\ &\leq \frac{\tau \left[\left(\frac{c_1\tau}{c_2} \right) \tilde{m} + 1 \right]}{\frac{2c_1}{\beta c_2} - \left[1 + \left(1 - \frac{c_1\tau}{c_2} \right) 1 \right]} \\ &= \frac{\tau \left[\left(\frac{c_1\tau}{c_2} \right) \tilde{m} + 1 \right]}{2 \left(\frac{c_1}{c_2\beta} - 1 \right) + \frac{c_1\tau}{c_2}} < m_{\ell}. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos asegurar que la curva $L_{k,\tau}$ queda por debajo del punto (a_1, a_2) y en consecuencia $(a_1, a_2) \in D_{k,\tau}^0$ si τ satisface las condiciones anteriores y $k = \frac{\beta}{\tau c_1}$, lo que significa que la estabilización es posible para $a_1 > 0$ con $a_1 > \frac{c_1}{c_2}$.

Hasta aquí, hemos estudiado el caso b) para $c_1 < 0, c_2 > 0$. Veamos que sucede lo mismo para el caso $c_1 > 0, c_2 < 0$.

II. Consideramos $c_1 > 0, c_2 < 0$. Tomamos ahora

$$k < 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > \frac{c_1}{c_2}, \quad \beta < 0 \text{ tal que } \frac{c_1}{c_2} < \beta < a_2, \quad \tau \text{ tal que } kc_1\tau = \beta$$

$$\Rightarrow a'_1(y) = \underbrace{\frac{\sigma}{\tau c_1}}_{\geq 0} \left[\underbrace{2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right)}_{>0 \text{ por } (**)} \right] > 0.$$

(**) Veamos que

$$2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) > 0 \quad \text{si } \tau \ll 1. \quad (5.2.9)$$

Sabemos que $\beta > \frac{c_1}{c_2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \beta c_2 < c_1 \text{ (puesto que } c_2 < 0) \\ &\Rightarrow 2c_1 > 2\beta c_2 \\ &\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \quad / \quad 2c_1 > (2 + \epsilon)\beta c_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\tau \ll 1$, $-\frac{c_1\tau}{c_2} \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} = \epsilon$ y vale lo pedido en (5.2.9),

$$\begin{aligned} \wedge \quad a'_2(y) &= \frac{\beta\tau}{\sigma^2} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \text{sen}(\sigma) \right] > 0 \quad \text{con } y \in \left(0, \frac{\sigma^0(\tau)}{\tau} \right) \\ \Rightarrow \quad a'_2(y) &< 0 \quad \text{con } y \in \left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau} \right) \quad (\text{igual que antes}) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{da_2}{da_1}(\sigma) = \frac{\tau \left[\frac{c_1\tau}{c_2} \left(\frac{\sigma \cos(\sigma) - \text{sen}(\sigma)}{\sigma^3} \right) + \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} \right]}{\frac{2c_1}{\beta c_2} - \left[\cos(\sigma) + \left(1 - \frac{c_1\tau}{c_1} \right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} \right]} \approx 0 \quad \text{si } \sigma \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \tau \ll 1,$$

pues los signos de c_1, c_2 se compensan y por lo tanto vale lo mismo, inclusive la cota para τ .

c. Análisis de los valores de k, τ para el caso $c_1 \cdot c_2 < 0$ y las correspondientes cotas para a_1 y a_2 .

Nuevamente, consideraremos las dos posibilidades de signos para cada parámetro:

I. $c_1 < 0, c_2 > 0$

II. $c_1 > 0, c_2 < 0$

I. Sean $c_1 < 0, c_2 > 0$, tomamos $k < 0$. Sea $\beta = k\tau c_1 > 0$.

Bajo la condición $a'_1(y) \geq 0$, para que no haya bucles en $L_{k,\tau}$, se tiene en la expresión (5.2.2) que:

$$\left(\frac{\sigma}{\tau c_1}\right) \left[2c_1 + (-\beta c_2) \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) \right] \geq 0.$$

Y como $\frac{\sigma}{\tau c_1} < 0$ entonces nos queda que:

$$\begin{aligned} 2c_1 &\leq \beta c_2 \left(\left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma) \right) \\ \frac{2c_1}{\beta c_2} &\leq \left(1 - \frac{\tau c_1}{c_2}\right) \frac{\text{sen}(\sigma)}{\sigma} + \cos(\sigma). \end{aligned}$$

Y esta condición se satisface si:

$$m - m_1 \frac{c_1 \tau}{c_2} \geq \frac{2c_1}{\beta c_2}, \quad (5.2.10)$$

donde m viene de (4.1.1) y m_1 viene de (5.1.1). Despejemos de aquí τ para obtener la primera cota:

$$\begin{aligned} -m_1 \frac{c_1 \tau}{c_2} &\geq \frac{2c_1}{\beta c_2} - m \\ \tau &\leq \frac{2c_1 - m\beta c_2}{\beta c_2} \cdot \frac{c_2}{-m_1 c_1} \\ \tau &\leq \frac{-2c_1 + m\beta c_2}{\beta m_1 c_1}. \end{aligned}$$

Para que el miembro derecho sea positivo, como su denominador es positivo debemos pedir que $m\beta c_2 - 2c_1 > 0$. Al despejar β nos queda el intervalo de valores que puede tomar: $\beta \in \left(0, \frac{2c_1}{m c_2}\right)$.

En conclusión, para que $a_1(y)$ resulte no decreciente en $(0, +\infty)$ debemos pedir que:

$$0 < \tau < \tau^*(\beta), \quad \tau^*(\beta) = \frac{m\beta c_2 - 2c_1}{m_1 c_1 \beta}, \quad \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2}\right). \quad (5.2.11)$$

Por otro lado, igual que en el ítem b. de este teorema, la derivada

$a'_2(y) = \frac{\beta\tau}{\sigma^2} \left[\sigma \cos(\sigma) + \left(\frac{c_2\sigma^2}{\tau c_1} - 1 \right) \sin(\sigma) \right]$ es negativa en $\left(0, \frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right)$ y positiva en $\left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}\right)$ y vale que $a'_2\left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right) = 0$, donde $\sigma^0(\tau)$ es la menor de las raíces positivas de la ecuación:

$$\cot g(\sigma) = \frac{\tau c_1 - c_2 \sigma^2}{\tau c_1 \sigma},$$

con $\sigma^0(\tau) \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\sigma^0(\tau) \rightarrow \pi^+$ con $\tau \rightarrow 0$. Se puede observar que los gráficos de estas soluciones son los mismos que los del caso $c_1 \cdot c_2 < 0$ del ítem b) en la figura 5.5.

Combinando el análisis de $a'_1(y)$ y $a'_2(y)$ resulta que $\frac{da_2}{da_1}(y)$ tiene los mismos signos que $a'_2(y)$, lo que interpretamos como el comportamiento de la curva $L_{k,\tau}$, es decir, la curva es decreciente para los $y \in \left(0, \frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right)$ y creciente para los puntos correspondientes al intervalo $y \in \left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}\right)$, como se muestra en la figura 5.7. Por lo tanto, el punto $Q = \left(a_1\left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right), a_2\left(\frac{\sigma^0(\tau)}{\tau}\right)\right)$ es el punto de la curva correspondiente a valores $y \in \left(0, \frac{2\pi}{\tau}\right)$ con menor coordenada en a_2 . Y como τ varía en el intervalo $(0, \tau^*(\beta))$ el punto Q se mueve describiendo la frontera de la región de estabilización.

Para obtener ecuaciones algebraicas explícitas de la frontera Γ_β de una subregión G_β correspondiente a la región de estabilización S , se toma el punto $P = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ sobre la curva $L_{k,\tau}$, correspondiente a $y = \frac{\pi}{\tau}$ que está “cerca” de Q (si $\tau \ll 1$), resultando:

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 + 2kc_1 & \text{donde } k = \frac{\beta}{\tau c_1} \quad \tau \in (0, \tau^*(\beta)] \\ \tilde{a}_2 = a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right) = 2kc_2. \end{cases} \quad (5.2.12)$$

Representamos la curva $L_{k,\tau}$ y los puntos Q y P en la figura 5.7, donde además podemos ver que si un punto (a_1, a_2) se encuentra por encima del punto P entonces pertenece a la región $D_{k,\tau}^0$, es decir los valores de los parámetros k y τ sirven para estabilizar el sistema determinado por (a_1, a_2) . Esta observación es propuesta en esta tesis para sobreponer el hecho de que en el paper [19] se da una descripción correcta de la región de

estabilización pero las condiciones sobre los parámetros no son suficientes para asegurar la estabilización. En este sentido, es otro aporte al estudio realizado allí.

Sigamos entonces describiendo la región de estabilización en el plano de parámetros (a_1, a_2) .

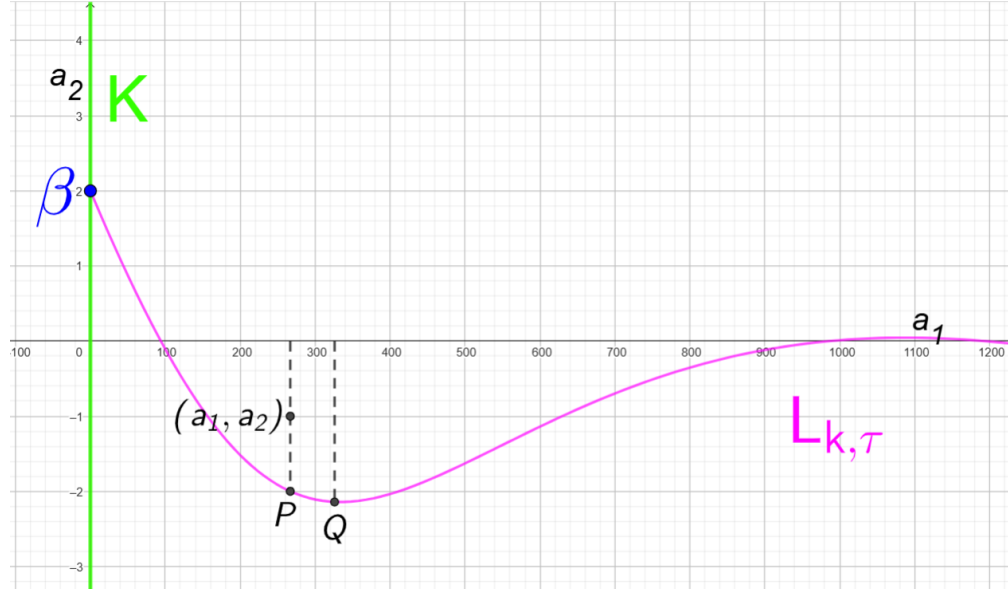


Figura 5.7: Puntos P y Q sobre la curva $L_{k,\tau}$.

Queremos deshacernos de k y τ para obtener una ecuación que relacione únicamente las coordenadas $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ del punto P :

- despejamos τ en la expresión dada para $k = \frac{\beta}{\tau c_1}$, obteniendo $\tau = \frac{\beta}{k c_1}$,
- despejamos k de la segunda ecuación del sistema (5.2.12) obteniendo $k = \frac{\tilde{a}_2}{2c_2}$,
- luego reemplazamos el valor de k en la expresión obtenida para τ de forma que nos queden ambos valores en función de β , c_1 y c_2 : $\tau = \frac{\beta}{\left(\frac{\tilde{a}_2}{2c_2}\right) c_1} = \frac{2\beta c_2}{\tilde{a}_2 c_1}$,
- finalmente, reemplazamos las expresiones de k y de τ en la primera ecuación del sistema (5.2.12) y nos queda:

$$\tilde{a}_1 = \left(\frac{\pi}{\frac{2\beta c_2}{\tilde{a}_2 c_1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tilde{a}_2}{2c_2} \right) c_1,$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_1 = \frac{\pi^2 c_1^2 \tilde{a}_2^2}{4c_2^2 \beta^2} + \frac{\tilde{a}_2 c_1}{c_2}.$$

Esta última relación corresponde a los puntos de la curva frontera inferior en la figura 5.1. Para la recta que representa la curva frontera superior en dicha figura, debemos analizar la cota dada para τ . A continuación desarrollamos cuidadosamente el despeje, puesto que hemos arribado a una expresión diferente respecto de la propuesta en el paper [19].

Como $k = \frac{\tilde{a}_2}{2c_2}$ si reemplazamos en $\frac{\beta}{kc_1} = \tau < \frac{m\beta c_2 - 2c_1}{m_1 c_1 \beta}$ nos queda

$$\frac{2c_2 \beta}{\tilde{a}_2 c_1} < \frac{m\beta c_2 - 2c_1}{m_1 c_1 \beta},$$

simplificamos c_1 que como es negativo, invierte la desigualdad

$$\frac{2c_2 \beta}{\tilde{a}_2} > \frac{m\beta c_2 - 2c_1}{m_1 \beta},$$

invertimos la desigualdad, para poder despejar \tilde{a}_2

$$\frac{\tilde{a}_2}{2c_2 \beta} < \frac{m_1 \beta}{m\beta c_2 - 2c_1},$$

multiplicamos ambos miembros por $2c_2 \beta$ que es positivo

$$\tilde{a}_2 < \frac{2m_1 c_2 \beta^2}{m\beta c_2 - 2c_1},$$

por último, en el miembro derecho, sacamos factor común c_2 del denominador, y simplificamos

$$\tilde{a}_2 < \frac{2m_1 \beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}}.$$

Es decir, hemos encontrado una curva frontera superior (constante) para los puntos correspondientes a una región de estabilización G_β ; y como la región de estabilización $S = \bigcup_{\beta} G_\beta$ con $\beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2}\right)$, entonces queda definida la región de estabilización.

En la siguiente sección explicitamos cómo elegir τ y k dado un punto en la región de estabilización, volviendo a la idea antes mencionada de que las cotas propuestas en el paper no son suficientes por lo que proponemos una cota más.

Resta ver, para completar la prueba del ítem c. cómo afecta intercambiar los signos de c_1 y c_2 .

II. Consideremos $c_1 > 0$, $c_2 < 0$. Tomamos $k > 0$ y entonces $\beta = kc_1\tau > 0$.

La condición de que $a'_1(y) > 0$ si $m - m_1 \frac{c_1\tau}{c_2} \geq \frac{2c_1}{\beta c_2}$ sigue valiendo y se puede llegar a las mismas conclusiones:

$$0 < \tau < \tau^*(\beta), \quad \tau^*(\beta) = \frac{m\beta c_2 - 2c_1}{m_1 c_1}, \quad \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2}\right).$$

Para $a'_2(y)$ vale todo igual, entonces $Q = \left(a_1\left(\frac{\pi}{\tau}\right), a_2\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\right)$ sigue siendo el punto más abajo de $L_{k,\tau}$ para $y \in \left(0, \frac{2\pi}{\tau}\right)$.

Al buscar las ecuaciones de la frontera se repiten las cuentas que involucran el punto $P = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ y se obtiene el mismo resultado (el hecho de que c_1 y c_2 tengan los signos intercambiados no afecta las desigualdades).

Por lo tanto, la subregión G_β viene dada por las inecuaciones:

$$a_1 > \frac{c_1 a_2}{c_2} + \left(\frac{\pi c_1 a_2}{c_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4\beta^2}, \quad -\infty < a_2 < \frac{2m_1\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}}.$$

La unión de las regiones G_β es la región S de estabilización del sistema.

5.3. Corolarios y simulaciones

Corolario 1

Supongamos que $x^* = (0, 0)$ es un nodo o foco inestable del sistema abierto (2.2.2) (o sea $u = 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$).

Si $c_1 \cdot c_2 > 0$ entonces existen valores de k, τ tales que x^* puede estabilizarse con el control de Pyragas.

Si $c_1 \cdot c_2 < 0$ entonces x^* puede estabilizarse si al menos una de las condiciones b. o c. se satisfacen.

Corolario 2

Supongamos que $x^* = (0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (2.2.2) (donde $u = 0$, $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$) que es un punto silla o bien tal que el polinomio característico del sistema (2.2.2) tiene $z = 0$ como raíz.

Entonces x^* no puede estabilizarse con el control de Pyragas para ninguna elección de k y $\tau > 0$.

Para ilustrar el resultado del Corolario 1 del Teorema 5 seleccionamos ejemplos de cada uno de los tres ítems. En cada ejemplo se grafica el comportamiento de las variables del sistema, de la variable de salida y del control.

Consideremos entonces los siguientes pares de parámetros:

1. $(a_1, a_2) = (0, 1; -1)$ que devuelve un nodo inestable,
2. $(a_1, a_2) = (0, 25; -1)$ que devuelve un nodo degenerado,
3. $(a_1, a_2) = (5; -1)$ que devuelve un foco inestable.

Elegimos estos puntos pues pueden usarse para ejemplificar los dos primeros ítems del Teorema 5, mientras que sólo el tercer punto cae en la región de estabilización del ítem c., esto nos permitirá realizar comparaciones entre ellos. Para el caso a. tomaremos $(c_1, c_2) = (26; 13)$ y para los otros dos casos, tomaremos $(c_1, c_2) = (26; -13)$.

En todos los casos, realizamos las simulaciones utilizando como condiciones iniciales $x_1(0) = 0,1$ y $x_2(0) = 0,15$.

Selección de parámetros para el ítem a.

La condición para que el punto de equilibrio del sistema sea estabilizable es que $a_1 > 0$, que se cumple para los tres puntos elegidos, pero que no influye en la elección de los valores de β , τ y k , que se debe hacer en el siguiente orden y sólo dependen de a_2 :

- I. seleccionamos $\beta < a_2 = -1$, por lo que decidimos tomar $\beta = -2$;
- II. luego elegimos $\tau < \min \left\{ \frac{2c_2}{c_1}, \frac{\pi^2}{-2\beta} \right\}$ o sea $\tau < \min\{1; 2,4674\}$, por lo que elegimos $\tau = 0,9$;
- III. finalmente, como $k = \frac{\beta}{c_1\tau}$ tomamos $k = -0,0855$.

Los gráficos de estas simulaciones son las figuras 5.8, 5.9 y 5.10.

Selección de parámetros para el ítem b.

Como los puntos elegidos satisfacen $a_1 > 0$ y $a_2 > \frac{c_1}{c_2} = -2$ entonces debemos elegir los valores para β , τ y k en el siguiente orden:

- I. elegimos β según la condición $\frac{c_1}{c_2} < \beta < \min\{0, a_2\}$ es decir $-2 < \beta < \min\{0, -1\}$, por lo que elegimos $\beta = -1,5$;
 - II. elegimos τ que satisfaga la condición $0 < \tau < 2 \left(\frac{1}{-\beta} + \frac{c_2}{c_1} \right)$, por lo que nos queda $0 < \tau < \frac{1}{3}$;
 - III. el valor τ elegido debe satisfacer la desigualdad $\frac{\tau \left(1 + \frac{c_1 \tau \tilde{m}}{c_2} \right)}{2 \left(\frac{c_1}{c_2 \beta} - 1 \right) + \frac{c_1 \tau}{c_2}} < \frac{a_2 - \beta}{a_1}$, y si no lo hiciera, deberíamos tomar un valor menor para τ .
- Esta tercera condición afecta el valor elegido para τ en la segunda condición. En nuestro caso, elegimos para los dos primeros puntos el valor de $\tau = 0,2$, que luego no resulta válido para el tercer punto, donde tuvimos que tomar un valor menor $\tau = 0,05$.
- IV. Finalmente, el valor resultante de $k = \frac{\beta}{c_1 \tau}$ para los dos primeros puntos es $k = -0,2884$ mientras que para el tercer punto es $k = -1,1538$.

Los gráficos de estas simulaciones son las figuras 5.11, 5.12 y 5.13. De los ejemplos 4 a 6 (estas figuras) podemos observar que a medida que a_1 crece el valor de τ decrece.

Selección de parámetros para el ítem c.

Ya hemos dicho que el tercer punto satisface las condiciones del ítem c.:

$$a_1 > \frac{c_1}{c_2} \cdot a_2 + \left(\frac{\pi}{2\beta} \right)^2 \cdot \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cdot a_2^2, \quad a_2 < \frac{2m_1\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}} = T_\beta \quad \text{donde } \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2} \right),$$

pero para ser esto cierto debemos especificar para qué valor de β es verdadero. Entonces, el orden para elegir los valores para la estabilización es el siguiente:

- I. elegimos β de forma que la región resultante a partir de las dos desigualdades anteriores contenga al punto elegido $(5; -1)$, en nuestro caso, tomamos $\beta = 2$;
- II. elegimos el valor de τ considerando que el punto (a_1, a_2) está arriba de algún punto P , es decir $a_1 = a_1 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)$ para cierto τ , por lo que tomamos $\tau = 1,8607$ y además se cumple que $0 < \tau < \frac{mc_2\beta - 2c_1}{m_1c_1\beta} \approx 2,68$,
- III. calculamos el valor de $k = \frac{\beta}{c_1 \tau}$, que resulta $k = 0,0413$.

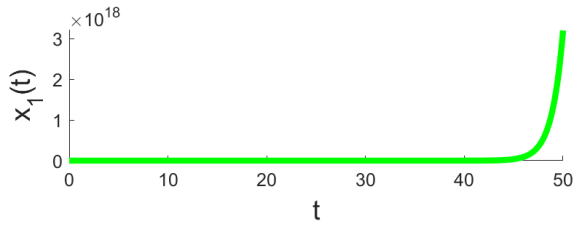
Enfatizamos que la elección del valor de τ se realizó con nuestra propuesta, es decir, pensando que el punto (a_1, a_2) está arriba de algún punto P de forma que podemos asegurar que el τ elegido y el valor de k asociado consiguen estabilizar el punto de equilibrio del sistema.

En la figura 5.14 se puede observar el comportamiento del sistema que resulta de tomar el punto $(a_1, a_2) = (5; -1)$ con los parámetros de estabilización elegidos en esta subsección.

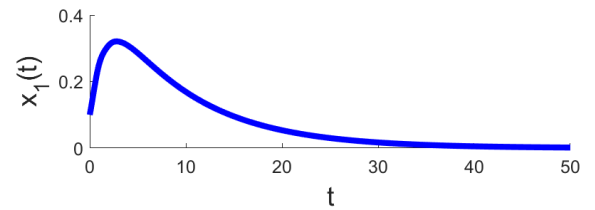
Figura 5.8:

Ejemplo 1:

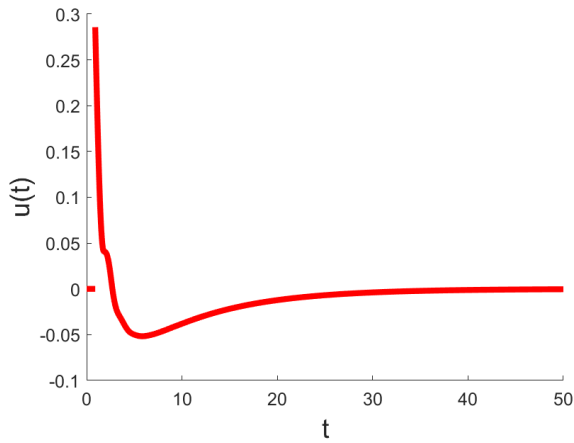
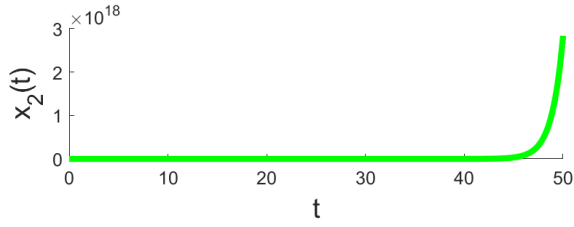
$$\begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -2, \text{ elegimos } \tau = 0,9; k = -0,0855.$$



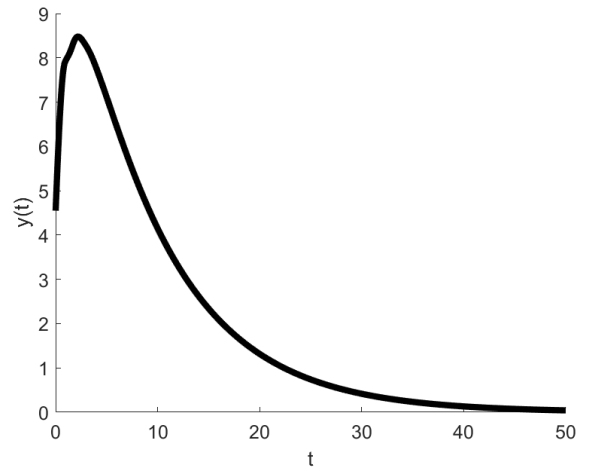
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

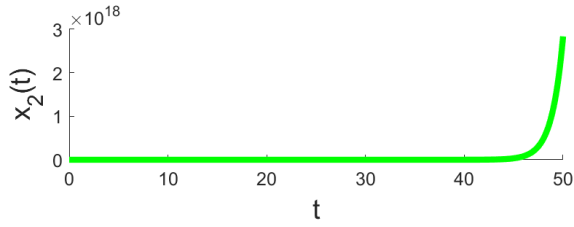
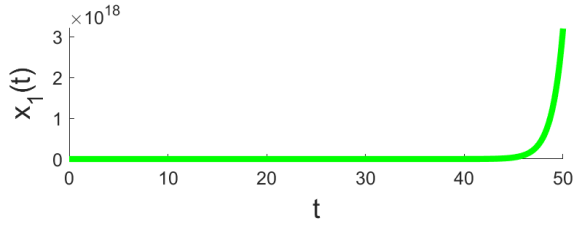


(d) Salida del sistema.

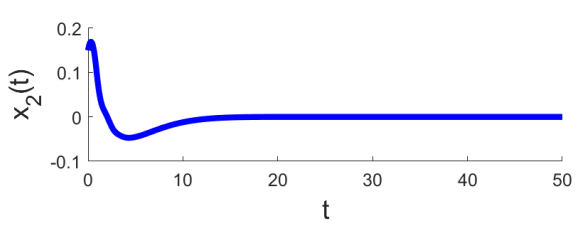
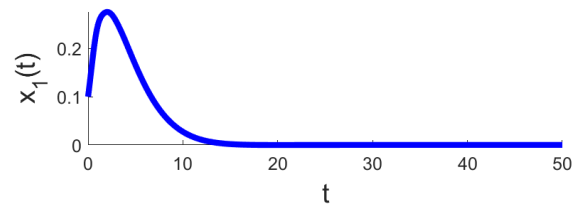
Figura 5.9:

Ejemplo 2:

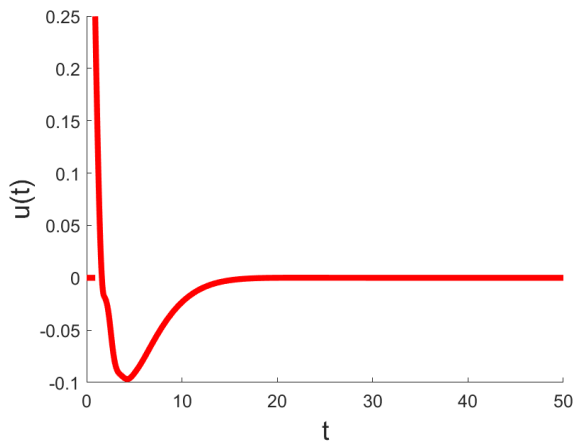
$$\begin{cases} a_1 = 0,25 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -2, \text{ elegimos } \tau = 0,9; k = -0,0855.$$



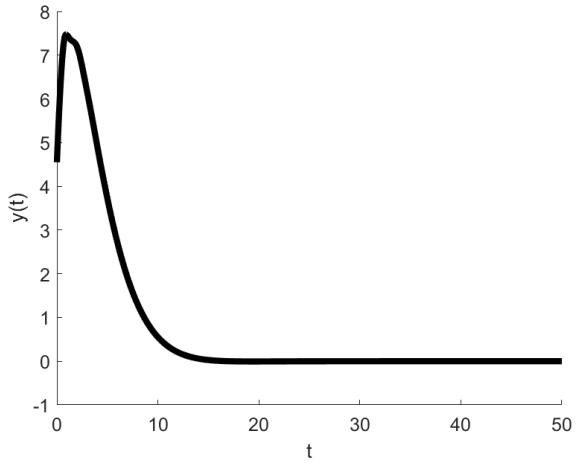
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

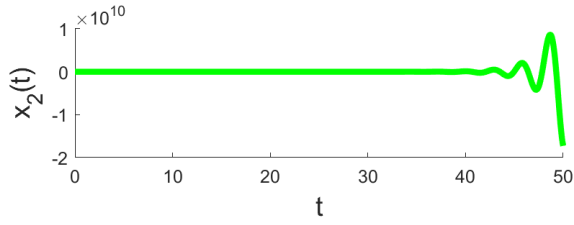
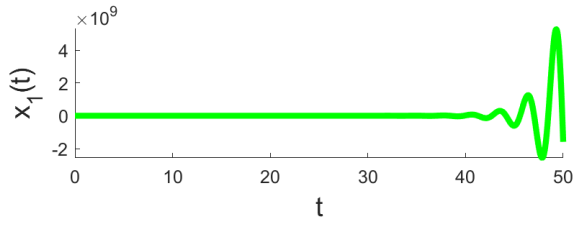


(d) Salida del sistema.

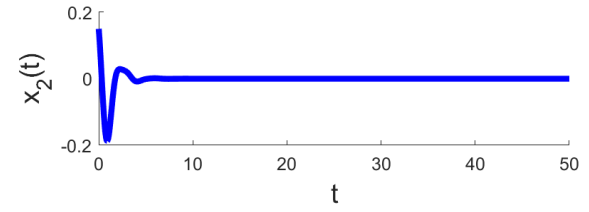
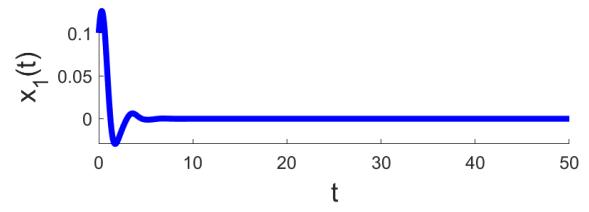
Figura 5.10:

Ejemplo 3:

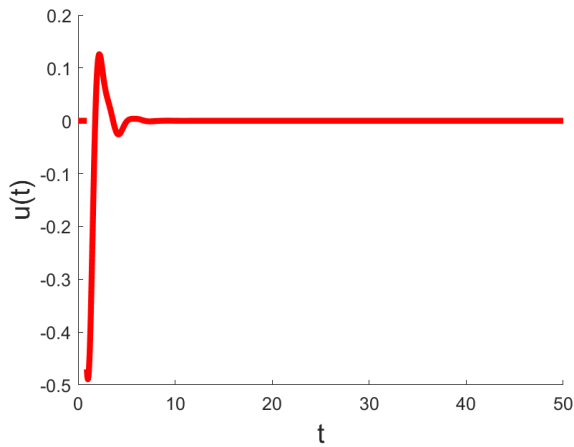
$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = 13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -2, \text{ elegimos } \tau = 0,9; k = -0,0855.$$



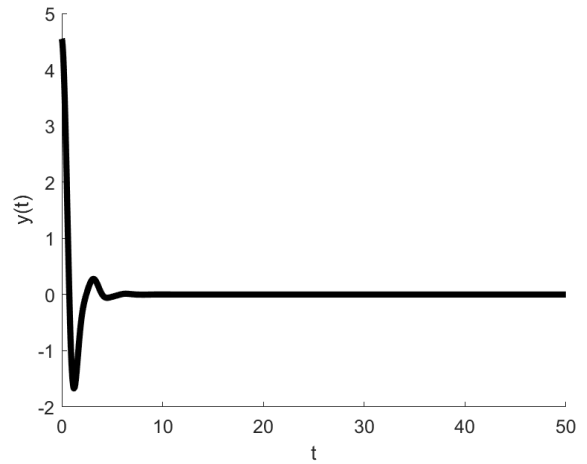
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

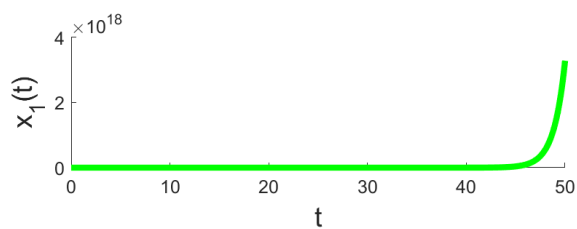


(d) Salida del sistema.

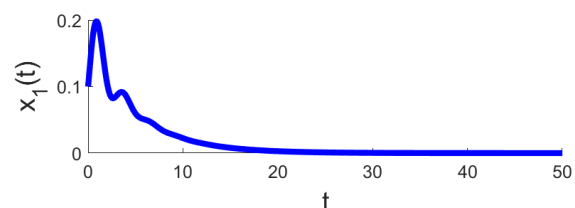
Figura 5.11:

Ejemplo 4:

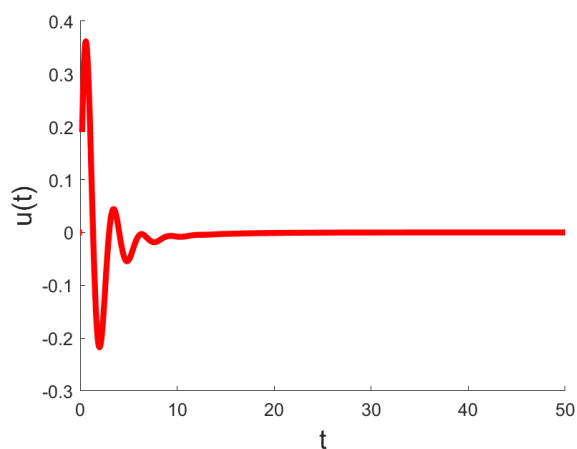
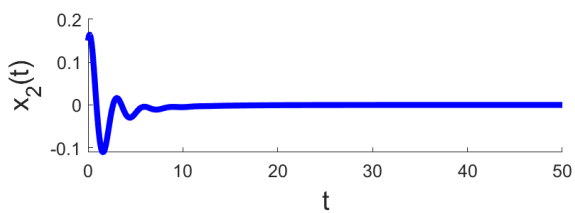
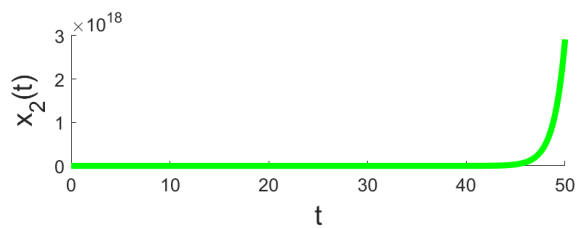
$$\begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = -13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -1,5, \text{ elegimos } \tau = 0,2; k = -0,2885.$$



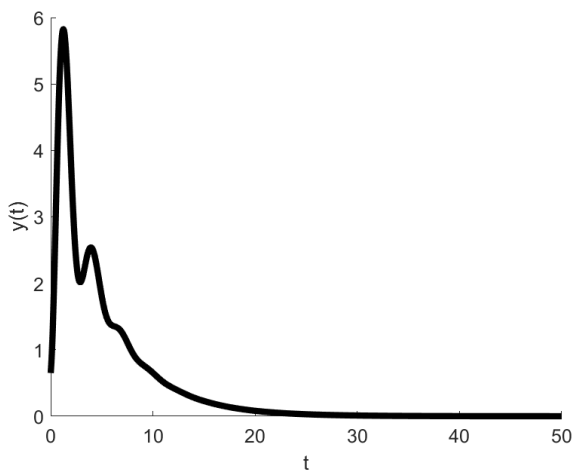
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

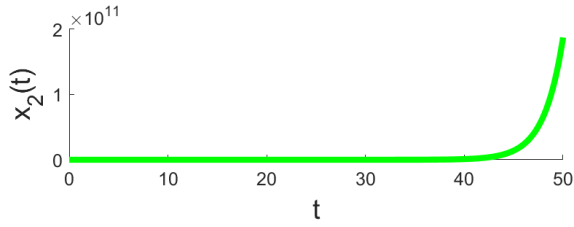
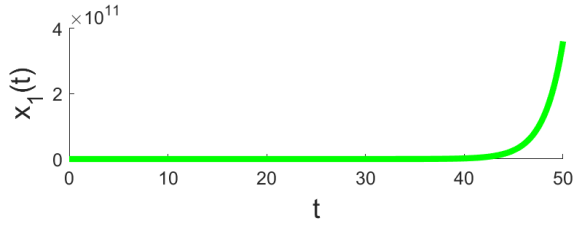


(d) Salida del sistema.

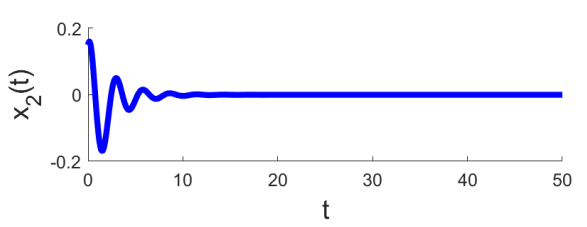
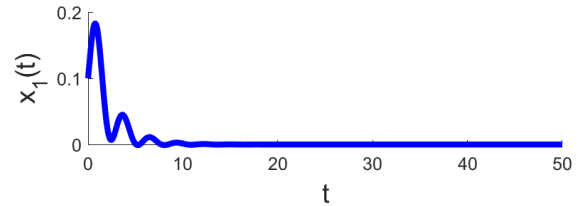
Figura 5.12:

Ejemplo 5:

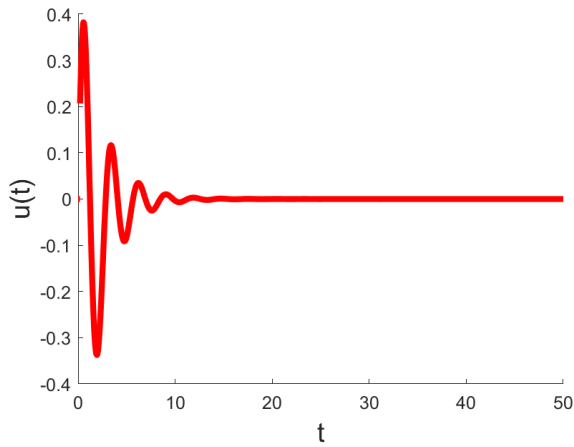
$$\begin{cases} a_1 = 0,25 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = -13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -1,5, \text{ elegimos } \tau = 0,2; k = -0,2885.$$



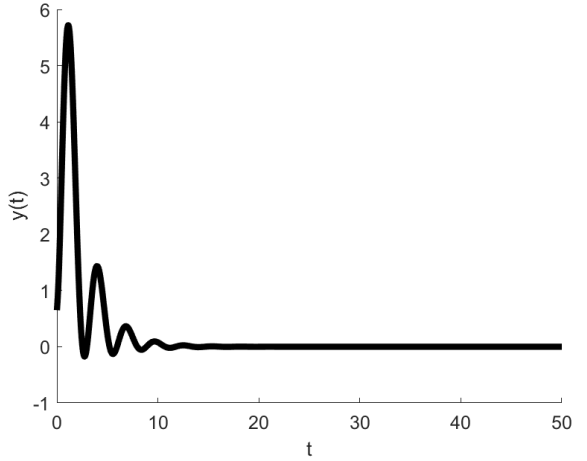
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

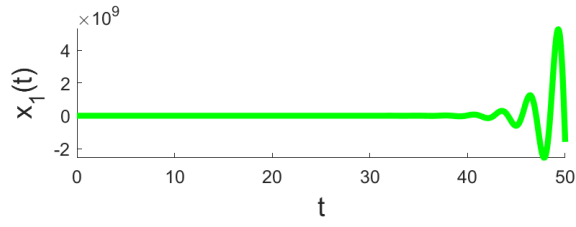


(d) Salida del sistema.

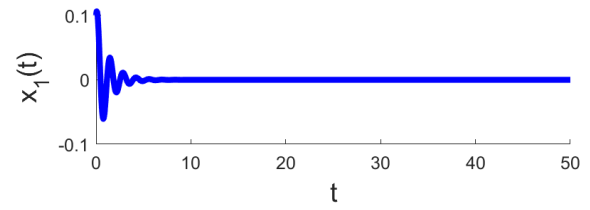
Figura 5.13:

Ejemplo 6:

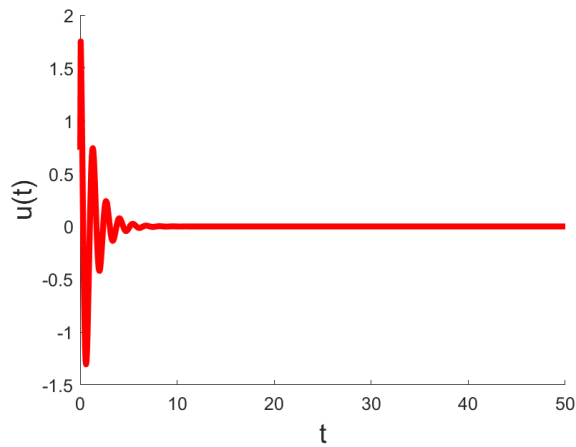
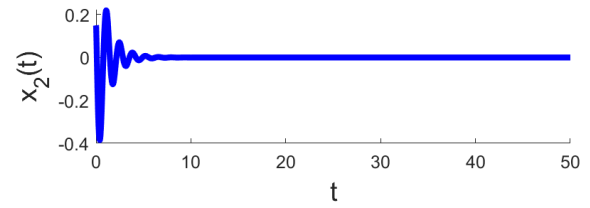
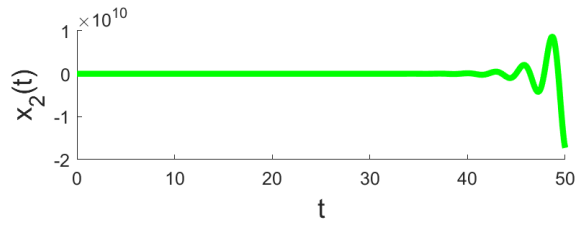
$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = -13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = -1,5, \text{ elegimos } \tau = 0,01; k = -5,7692.$$



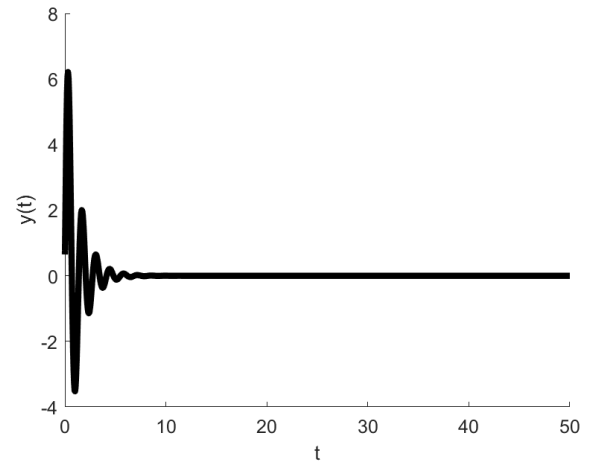
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.

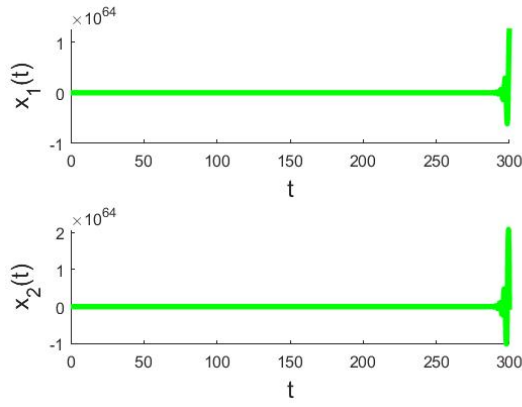


(d) Salida del sistema.

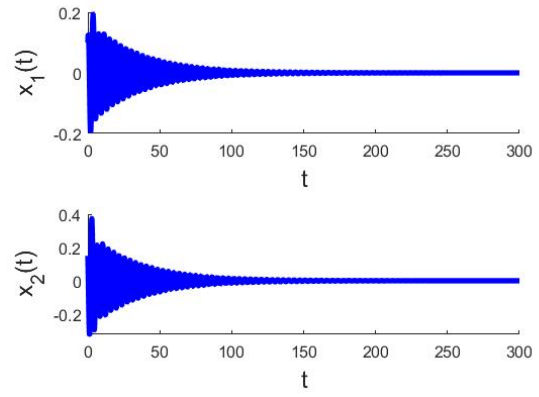
Figura 5.14:

Ejemplo 7:

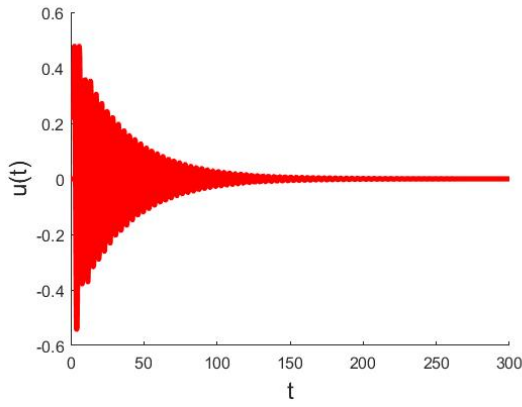
$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 26 \\ c_2 = -13 \end{cases} \quad \text{tomando } \beta = 2, \text{ elegimos } \tau = 1,8607; k = 0,0413.$$



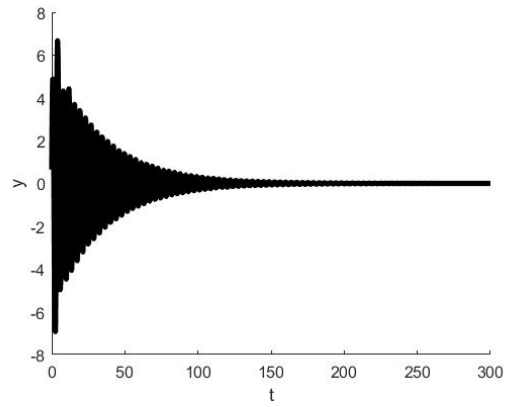
(a) Sistema sin control aplicado.



(b) Sistema controlado.



(c) Control.



(d) Salida del sistema.

Capítulo 6

Consideraciones finales y trabajo a futuro

En esta tesis nos propusimos profundizar sobre las técnicas utilizadas en el paper [19], reproduciendo las demostraciones de los teoremas que establecen descripciones analíticas para las regiones de estabilización del punto de equilibrio de un sistema dinámico, modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional al que se aplica el control de Pyragas (TDFC). En nuestro recorrido, observamos que dichas técnicas son esencialmente dos: la D-descomposición principalmente y el Teorema de Rouché en segundo lugar. Del análisis de la frontera obtenida por la D-descomposición en cada caso es que se pueden obtener las inecuaciones que describen las regiones de estabilización. Este análisis varía según los parámetros de la salida del sistema (c_1, c_2) . Además, en dos de los tres casos analizados, utilizan una recta auxiliar llamada ℓ que se construye comparándola con la recta tangente a la curva frontera y que deja al punto (a_1, a_2) en la región de estabilización bajo ciertas condiciones, que resultan ser las cotas para obtener los parámetros de estabilización. En este sentido, al completar la demostración del *Teorema 5*, en los casos *a.* y *c.* propusimos dos cotas para la elección de dichos parámetros k y τ , que en un principio no surgían de las ideas planteadas en [19]. Este aporte se deriva del análisis de las simulaciones que realizamos, observando que las cotas obtenidas en el paper no eran suficientes.

Como trabajo a futuro, consideramos varias líneas de investigación para desarrollar:

- Analizar la posibilidad de mejorar las cotas propuestas para este problema utilizando el mismo control.
- Inspirado en el control propuesto por Pastor y González en [26], proponer un control del tipo $u(t) = K[y(t - \tau) - y(t - 2\tau)]$ pero con K constante, y analizar la posibilidad de aplicar las mismas técnicas que en el paper de Leonov lo que conduce a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + [a_2 - Kc_2(e^{-\lambda\tau} - e^{-2\lambda\tau})]\lambda + a_1 - Kc_1(e^{-\lambda\tau} - e^{-2\lambda\tau}) = 0.$$

- Reformular el problema HMN con TDFC en términos de una ecuación diferencial lineal

de segundo orden, con retardo; y aplicar las metodologías de [8], que no involucran la D-descomposición, para comparar con los resultados de [19].

- Otro camino es proponer una alternativa que no sólo modifique en el control TDFC la diferencia entre las salidas, sino que también introduzca una ganancia de tipo periódica a la manera de [26] donde el control se define como:

$$u(t) = \epsilon_1(t)(y(t - 2\tau) - y(t - \tau)) + \epsilon_2(t)(y(t - 3\tau) - y(t - 2\tau))$$

con ganancias ϵ_1 y ϵ_2 tales que

$$\epsilon_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leq (3k + 3)\tau \\ \epsilon_i & \text{si } (3k + 3)\tau < t \leq (3k + 4)\tau \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Este trabajo se encuentra actualmente en proceso, y ya hemos observado, computacionalmente, que es posible estabilizar un punto de equilibrio del tipo silla, superando así la ONL. Los resultados obtenidos se presentaron en el X Congreso de Matemática Aplicada a la Computación y la Industria (MACI), ciudad de Córdoba, en Mayo de 2025 ([30]).

Apéndice A

Trabajo presentado en el X Congreso de
Matemática Aplicada a la Computación
y la Industria (MACI)

HACIA UNA NUEVA PROPUESTA PARA EL PROBLEMA DE HUIJBERTS-MICHIELS-NIJMEIJER

[†]Erica E. Rohdenburg [††]Graciela A. González [†]Verónica E. Pastor

[†]Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemática,
Av. Paseo Colón 850, 1063, Buenos Aires, Argentina

[††]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
erohdenburg@fi.uba.ar, ggonzal@fi.uba.ar, vpastor@fi.uba.ar

Resumen: El problema de Huijberts-Michiels-Nijmeijer (HMN) trata sobre la estabilización de sistemas lineales con entrada y salida escalares (SISO) en su punto de equilibrio. Si el control es de tipo “delayed feedback control” (DFC) se obtiene una descripción analítica de las regiones de estabilización que evidencia los alcances y limitaciones del DFC clásico aplicado al HMN. En este trabajo, se presenta un DFC modificado que supera las restricciones del primero si se trata de un punto silla.

Palabras clave: estabilización, sistema controlable, “delayed feedback control”.

2000 AMS Subject Classification: 93C43 - 93D15

A.1. Introducción

Los métodos DFC tuvieron un amplio desarrollo tras su inicio en [27]. Hacia 2009 Huijberts y otros presentaron en [15] un estudio analítico-numérico de los sistemas bidimensionales afectados por DFC en base a la salida del sistema. En 2016, Leonov y otros dieron en [19] expresiones algebraicas para las regiones de estabilización en función de los parámetros de estos sistemas, mediante el método de D-descomposición. Aquí se posiciona este trabajo, que intenta hacer una revisión de algunos resultados obtenidos en ese artículo y aportar alguna alternativa superadora. Se considera el sistema bidimensional de control dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 - u \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

ya que cualquier sistema controlable puede reducirse a esta forma ([5]).

El sistema (A.1.1) con $u \equiv 0$, tiene a $x^* = (0, 0)$ como único punto de equilibrio. La clasificación de éste según su estabilidad depende de los autovalores asociados a la matriz del sistema, que a su vez dependen de los parámetros a_1 y a_2 . Dicha clasificación se resume gráficamente en la Figura A.1, donde la parábola en el primer y cuarto cuadrante corresponde a $a_2^2 - 4a_1 = 0$.

A.2. Planteo del Problema

Consideramos el sistema bidimensional SISO dado por (A.1.1) con salida:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2. \quad (\text{A.2.1})$$

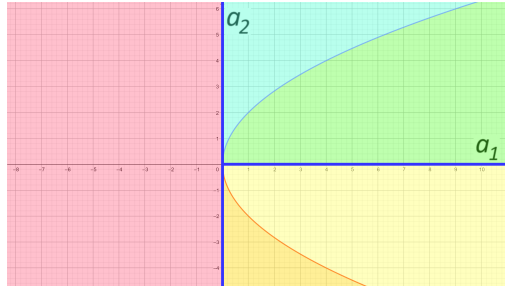


Figura A.1: Clasificación del punto de equilibrio

- Focos estables
- Nodos estables
- Puntos silla
- Nodos inestables
- Focos inestables
- Equilibrios no hiperbólicos

Introduciendo el control de Pyragas:

$$u(t) = k(y(t - \tau) - y(t)), \quad (\text{A.2.2})$$

donde k es la ganancia del control y τ el tiempo de retardo, se trata de hallar valores k y τ tal que $x^* = (0, 0)$ resulte punto de equilibrio estable de (A.1.1)-(A.2.1)-(A.2.2).

A.3. Síntesis de resultados

Por tratarse de un problema con retardo se reformula en términos del cuasipolinomio:

$$F(\lambda, a, k, c, \tau) = \lambda^2 + (a_2 + kc_2)\lambda + (a_1 - kc_1) + k(\lambda c_2 + c_1)e^{-\tau\lambda} \quad (\text{A.3.1})$$

y queda planteado como: “Dado $c = (c_1, c_2)$, ¿para qué puntos $a = (a_1, a_2)$ es posible encontrar valores de $k \neq 0$ y $\tau > 0$ tales que $Re(\lambda) < 0$ para todo λ raíz de F ?” Para responder esta pregunta, en [19] se aplica el método de D-descomposición, cuyos resultados sintetizamos a continuación:

A.3.1. Sobre la imposibilidad de estabilizar puntos sillas

Si x^* es un punto de equilibrio del sistema (A.1.1) (con $u = 0$) y es un punto silla o tiene $z = 0$ como raíz de su polinomio característico, entonces el control de Pyragas (A.2.2) no puede estabilizar x^* para ninguna elección de k y $\tau > 0$, independientemente de c_1 y c_2 .

A.3.2. Alcances en la estabilización de nodos y focos inestables

Caso 1. $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$

Si x^* es nodo o foco inestable del sistema (A.1.1) (con $u = 0$), x^* puede estabilizarse mediante el control (A.2.2).

La representación gráfica de este resultado con el de la Sección A.3.1, se encuentra en la Figura A.2.

Caso 2. $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$

Si x^* es foco inestable del sistema (A.1.1) (con $u = 0$), x^* puede estabilizarse mediante el control (A.2.2) si y sólo si:

$$a_1 > \frac{(m\pi a_1)^2}{16}, \quad a_2 < 0, \quad \text{donde } m = \min_{\alpha \in (0, 2\pi)} \left(\cos(\alpha) + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right) \approx -1,0419.$$

y si es nodo inestable, x^* no puede estabilizarse con el control (A.2.2) para ninguna elección de (k, τ) .

Este resultado combinado con el de la Sección A.3.1, se representa gráficamente en la Figura A.3.



Figura A.2: Las regiones rayadas son las de estabilización del Caso 1.



Figura A.3: Las regiones rayadas son las de estabilización del Caso 2.

Caso 3. $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

Si x^* es nodo o foco inestable del sistema (A.1.1) (con $u = 0$), x^* puede estabilizarse mediante el control (A.2.2) si y sólo si se satisfacen algunas de las siguientes condiciones:

- a. $c_1 \cdot c_2 > 0, \quad a_1 > 0;$
- b. $c_1 \cdot c_2 < 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > \frac{c_1}{c_2};$
- c. $c_1 \cdot c_2 < 0, \quad a_1 > \frac{c_1}{c_2} \cdot a_2 + \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \cdot a_2^2,$
 $a_2 < \frac{2m_1\beta^2}{m\beta - \frac{2c_1}{c_2}} \text{ donde } \beta \in \left(0, \frac{2c_1}{mc_2}\right) \text{ y } m_1 = \min_{(0,2\pi)} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$

La combinación de estos resultados con lo de la Sección A.3.1, se plasma en los gráficos de la Figura A.4.

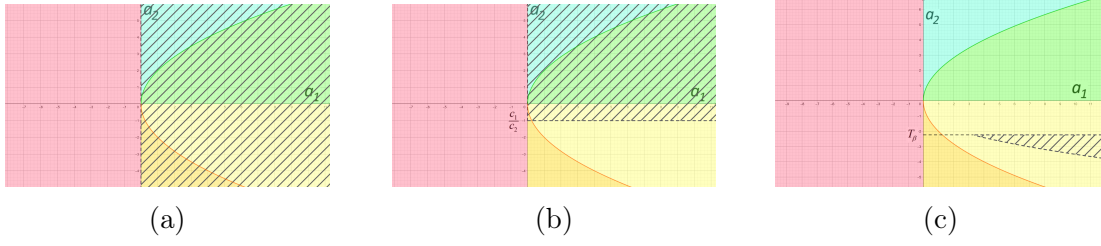


Figura A.4: En rayado, las regiones de estabilización para el Caso 3 según las condiciones sobre los parámetros.

Nota: En los tres casos, si los parámetros del sistema pertenecen a alguna de las regiones de estabilización, se conoce cómo elegir k y τ adecuados (ver [19]).

A.4. Diseño de una propuesta superadora para el caso del punto silla

De la Sección A.3 se desprende que son muchos los casos en que el sistema no puede ser estabilizado por el método de Pyragas.

En este trabajo nos abocamos al caso del punto silla, proponemos un método de control que depende de ganancias periódicas y que involucra modificaciones en las diferencias de las salidas con retardo. La idea se inspira en la propuesta para el caso escalar desarrollado en [26]. Además requiere considerar el sistema de control en su forma diagonal, esto es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_2 u \\ y = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \end{cases} \quad (\text{A.4.1})$$

siendo b_1, b_2 ambos no nulos.

El control se define como:

$$u(t) = \epsilon_1(t)(y(t-2\tau) - y(t-\tau)) + \epsilon_2(t)(y(t-3\tau) - y(t-2\tau)) \quad (\text{A.4.2})$$

con

$$\epsilon_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leq (3k+3)\tau \\ \epsilon_i & \text{si } (3k+3)\tau < t \leq (3k+4)\tau \end{cases} \quad i = 1, 2$$

y se trata de hallar τ, ϵ_1 y ϵ_2 tal que el sistema (A.4.1)-(A.4.2) sea estabilizable en x^* .

La periodicidad del sistema (A.4.1)-(A.4.2) permite obtener una expresión explícita de su solución y deducir una formulación sistemática para calcular ϵ_1 y ϵ_2 en función de τ . Debido a las limitaciones de espacio no podemos volcar estas relaciones aquí. En su defecto, ilustramos el resultado de su implementación en el siguiente ejemplo.

Consideramos el caso $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, b_1 = 0,2, b_2 = 0,15, \gamma_1 = 0,3, \gamma_2 = 1$, con condición inicial en $(0,1; 0,15)$. Las Figuras A.5, A.6 y A.7 muestran la evolución de los estados y el control al variar los parámetros de control. Los colores rojo y azul en las distintas señales se corresponden con los períodos de control inactivo ($u = 0$) y activo respectivamente. Fijamos $\tau = 0,2$ y $0,4$ e indicamos los valores de ϵ_1 y ϵ_2 , seleccionados entre todas las posibilidades, en las respectivas figuras.

Confrontando las Figuras A.5 y A.6, se observa que la disminución en el valor de τ mejora la velocidad de convergencia pero afecta significativamente la magnitud del control. Sin embargo, fijado un valor para τ , el desempeño del control puede mejorarse eligiendo otro par de valores ϵ_i como se ve al comparar las Figuras A.6 y A.7.

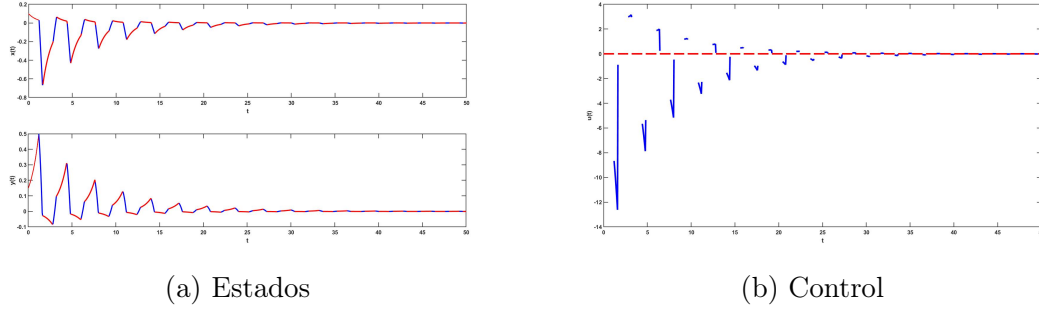


Figura A.5: Parámetros de control: $\tau = 0,4$, $\epsilon_1 = 166,61$ y $\epsilon_2 = -134,16$.

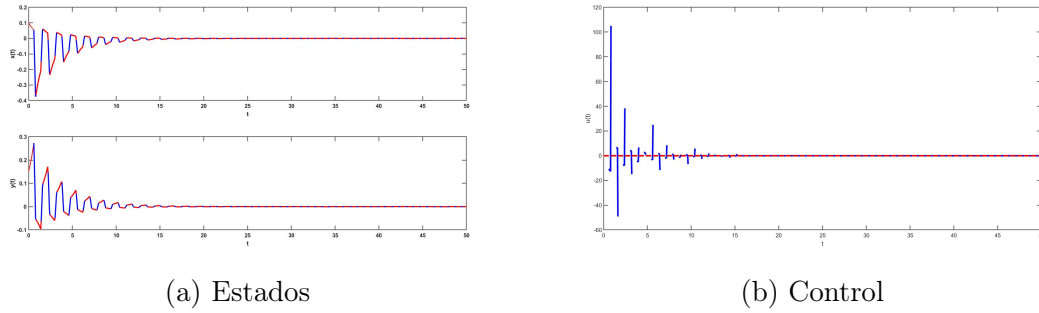


Figura A.6: Parámetros de control: $\tau = 0,2$, $\epsilon_1 = 10824$ y $\epsilon_2 = -1022$.

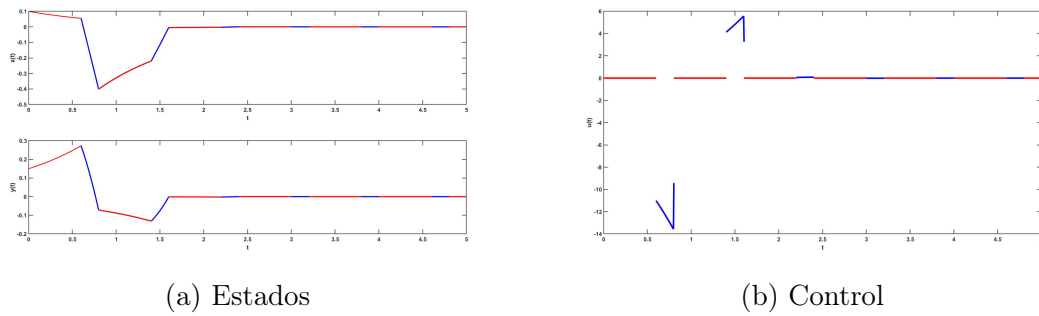


Figura A.7: Parámetros de control: $\tau = 0,2$, $\epsilon_1 = 697,64$ y $\epsilon_2 = -510,24$.

A.5. Trabajo a Futuro

Con nuestra propuesta se logra estabilizar puntos sillas, sirviendo como alternativa al control de Pyragas en estos casos. Se planea trasladar esta metodología para resolver el problema de estabilización de nodos y focos inestables, especialmente en aquellos casos no abarcados mediante el control de Pyragas.

Agradecimientos

Este trabajo se encuentra enmarcado en la Programación UBACyT 2023 (20020220200045BA).

Bibliografía

- [1] A. Ahlborn y U. Parlitz. «Stabilizing unstable steady states using multiple delay feedback control». En: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), págs. 101-264.
- [2] A. Ahlborn y U. Parlitz. «Controlling dynamical systems using multiple delay feedback control». En: *Phys. Rev. E* 72 (2005), págs. 16-206.
- [3] P. Amster. *Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B, Fascículo 11: Ecuaciones diferenciales con retardo*. 2017.
- [4] S. Bielawski et al. «Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos». En: *Phys. Rev. A* 47 (1993), págs. 2492-2495.
- [5] T. Chen. *Linear System Theory and Design*. 3ª. EEUU, New York: Oxford University Press, 1999.
- [6] T. Dahms, P. Hovel y E. Scholl. «Stabilization of fixed points by extended time-delayed feedback control». En: *Phys. Rev. E* 76 (2007), págs. 56-213.
- [7] B. Fiedler et al. «Refuting the odd-number limitation of time-delayed feedback control». En: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), págs. 101-114.
- [8] H.I. Freedman y Yang Kuang. «Stability switches in linear scalar neutral delay equations». En: *Funkcialaj Ekvacioj. Serio Internacia* 34 (ene. de 1991).
- [9] A. Gjurchinovski y V. Urumov. «Stabilization of unstable states by variable delay feedback control». En: *EPL* 84 (2008), págs. 13-400.
- [10] E.N. Gryazina, B.T. Polyak y A.A. Tremba. «D-decomposition Technique State-of-the-art». En: *Avt. Telemekh.* 12 (2008), págs. 3-40. DOI: [10.1134/S0005117908120011](https://doi.org/10.1134/S0005117908120011).
- [11] P. Guzenko et al. «Adaptive tuning of feedback gain in time-delayed feedback control». En: *ENOC* (2008).
- [12] T. Hino, S. Yamamoto y T. Ushio. «Stabilization of unstable periodic orbits of chaotic discrete-time systems using prediction-based feedback control». En: *Internat. J. Bifur. Chaos* 12.2 (2002), págs. 439-446.
- [13] E. Hooton y A. Amann. «An analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems». En: *arXiv: 2 [nlin. CD]:1109–1138* ().
- [14] P. Hovel y E. Scholl. «Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods». En: *Phys. Rev. E* 72 (2005), págs. 46-203.

- [15] H. Huijberts, W. Michiels y H Nijmeijer. «Stabilizability via time-delayed feedback: An eigenvalue optimization approach». En: *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 8.1 (2009), págs. 1-20.
- [16] Henri Huijberts, Wim Michiels y Henk Nijmeijer. «Stabilizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach». En: *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 8 (ene. de 2009), págs. 1-20. DOI: [10.1137/070708767](https://doi.org/10.1137/070708767).
- [17] Nikolay V. Kuznetsov, Gennady A. Leonov y Mikhail M. Shumafov. «A short survey on Pyragas time-delay feedback stabilization and odd number limitation». En: *IFAC-PapersOnLine* 48.11 (2015), págs. 706-709. DOI: [10.1016/j.ifacol.2015.09.271](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.271).
- [18] G. Leonov. «Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain». En: *Systems Control Lett.* 69 (2014), págs. 34-37.
- [19] G. A. Leonov, M. M. Shumafov y N. V. Kuznetsov. «Delayed feedback stabilization and the Huijberts–Michiels–Nijmeijer problem». En: *Differential Equations* (2016).
- [20] H. Nakajima. «On analytical properties of delayed feedback control of chaos». En: *Phys. Lett. A* 232 (1997), págs. 207-210.
- [21] H. Nakajima e Y. Ueda. «Limitation of generalized delayed feedback control». En: *Physica D.* 111 (1998), págs. 143-150.
- [22] Yu Neimark. «Search for the Parameter Values That Make Automatic Control System Stable». En: *Autom. Telemekh.* 9.3 (1948), págs. 190-203.
- [23] V. Novichenko y K. Pyragas. «Time-delayed feedback control of periodic orbits with an odd-number of positive unstable Floquet multipliers». En: *ENOC* (2014).
- [24] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. 3ª. México, D.F.: Pearson Educación, 1997.
- [25] Edward Ott, Celso Grebogi y James A. Yorke. «Controlling chaos». En: *Phys. Rev. Lett.* 64 (11 mar. de 1990), págs. 1196-1199. DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.1196](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1196>.
- [26] V.E. Pastor y G.A. González. «Oscillating delayed feedback control schemes for stabilizing equilibrium points». En: *Heliyon* 5.6 (2019).
- [27] K. Pyragas. «Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback». En: *Phys. Lett. A* 170 (1992), págs. 421-428.
- [28] K. Pyragas. «Control of chaos via extended delay feedback». En: *Phys. Lett. A* 206 (1995), págs. 323-330.
- [29] K. Pyragas y V. Novicheko. «Time-delayed feedback control design beyond the odd-number limitation». En: *Phys. Rev. E* 88 (2013), pág. 012903.
- [30] E.E. Rohdenburg, G.A. González y V.E. Pastor. «Hacia ua nueva propuesta para el problema de Huijberts-Michiels-Nejmeijer». En: *MACI* 10 (2025), págs. 720-723. URL: https://drive.google.com/file/d/1h_ZoH3l_Xi-8XBHfPOwQ7ZQ3m3hv6xFX/view?pli=1,.

- [31] J. Socolar, D. Sukow y D. Gauthier. «Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems». En: *Phys. Rev. E* 50 (1994), págs. 3245-3248.
- [32] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2.^a ed. Westview Press, 2015. ISBN: 978-0813349107.
- [33] T. Ushio. «IEEE Trans. Circuits Systems I». En: *Phys. Rev. E* 43.1 (1996), págs. 815-816.
- [34] S. Yanchuk et al. «Control of unstable steady states by long delay feedback». En: *Phys. Rev. E* 74 (2006), pág. 026201.