

NUDOS EN POSETS

DANTE CICCHETTI



TESIS DE LICENCIATURA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Marzo 2025

Director Gabriel Minian

Agradecimientos

Quiero evitar, en lo posible, caer en estos agradecimientos en el uso de las aes. Escribir, por ejemplo,

A Gabriel, por aceptar dirigir esta tesis. A Jonathan y a Hipolito, por tomarse el trabajo de ser los jurados. A la educación pública, por abrirme sus puertas; porque están abiertas para toda persona que desee habitarla.

sería cierto pero pobre. Estoy agradecido, sí, porque “alguien” me dirija la tesis, pero Gabriel hizo más que eso; se sentó conmigo a pensar, como me sentaba con Cami a hacer ejercicios de las guías. Así y todo, consiguió el equilibrio para no pensar por mí, sino hacerme pensar. Quizás eso es dirigir una tesis. Quizás no decirlo, de todas formas, es pobre.

Sería pobre también no mencionar su rol como docente (gracias por la pasión, es verdaderamente contagiosa) o el rol como docente que tuvo Jonathan. Además de ser jurado, me enseñó casi todo lo que sé de topología. Gracias por responder siempre a todas las preguntas, muchas veces molestas, muchas veces innecesarias, y gracias por llegar a la clase siguiente con nuevas respuestas cuando las primeras eran “no sé”.

Más en general, agradezco a todas las personas que dedicaron tiempo en intentar enseñarme. De algunas, además, tuve la suerte de aprender algo. Por nombrar solo unas pocas, Pablo Amster¹, Leo Paganini, Lucia Mayo, Leonardo Vinci, Elvira Latrónico, Marcela Dematteis, Silvia Blaustein y Daniel Cicchetti. Los dos últimos también tienen la fortuna de ser mis viejos. Gracias por dejarme elegir, por dejarme jugar, por dejarme imaginar en el patio de Esmeralda. Gracias por darme una infancia hermosa y una adolescencia plena. Gracias por quererme y gracias por cuidarme. Yo también los quiero; yo también los cuido.

Personas que me cuidaron y que me quisieron también hay muchas. Muy a mi pesar, recibirán una escritura más tradicional para este tipo de agradecimientos, con un párrafo cada una que estará desconectado del anterior y del siguiente, más al estilo de la aes. Supongo que la necesidad de gratitud es mayor a la necesidad estética.

Gracias Cata por lograr que vaya a terapia (y gracias Diego por lograr que rinda finales). No sé por qué ni cómo, pero me hacías hacer.

Gracias Mona por evitar que me consuma este proceso, por escuchar (de la tesis y de la vida), por preguntar (de la tesis y de la vida) y por estar (en la tesis y en la vida). Gracias

¹Todavía tengo los papers que me mandaste en francés, que milagrosamente entendí aunque siga sin saber francés.

por existir, gracias por ser como sos.

Gracias Lourdes por bancar, por presionarme desde el cariño y sanamente, por los meets estudiando. Gracias por ser mi amiga, te quiero (mucho).

Hablando de meets estudiando, gracias Cami por ser la mejor compañera de lo que sea del mundo. Si no fuera por vos, no terminaba la carrera, ni me metía de nuevo en el mundo de las plumas, ni empezaba a escalar. Perdón por discutir como un matrimonio de viejos, gracias por soportarnos a Teo y mí. Gracias Teo por ser insoportable conmigo, por los estudios intensivos durmiendo en tu casa, por la manija por fuera de la currícula. Los quiero a los dos.

Lola, el día que te mueras me pego un tiro. Gracias por no morirme todavía. Respecto a la tesis, gracias por el fanzine, quedó hermoso.

Queda así terminada la lista de personas a las cuales les estoy agradecido y que tuvieron importancia directa o bien en la realización de este trabajo o bien en la finalización de mis estudios. No así terminada la lista de personas a las cuales les estoy agradecido y que tuvieron importancia indirecta o bien en la realización de este trabajo o bien en la finalización de mis estudios.

Pedro, hicimos juntos medio ejercicio en mil años de cursada compartida. Igual fuiste un gran compañero. Gracias por eso, pero más por ser un gran amigo.

Juja, Juli y Gabi, gracias por compartir conmigo el principio de la carrera. Gracias Juja por las infinitas horas resolviendo guías y por cursar conmigo mientras fue presencial; gracias Juli por ser mi compañero preferido de tps (me juntaría con vos a hacerlos solo por gusto); gracias Gabi por hacer que “pan” se vuelva una palabra graciosa. Gracias también por las horas en llamada en ITE; no existen compañeros de trabajo mejores.

Por último, e inevitablemente entrando en terreno de aes explícitas, gracias a mis amigos de la vida (a Zequi, a Curly, a Sebi, a Manu², a Pilar, a Nati), a mi familia de sangre y a la familia no tipo.

Gracias también a Leia y a Mina (y a Lucky y a Venus).

Las amo a todas.

²A veces me olvido que te conocí en la facu. Igual te dejo acá.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Nudos clásicos	6
1.2. Relación entre posets y complejos simpliciales	9
1.3. Colapsos, colapsos fuertes y 1-colapsos.	13
1.4. Variedades combinatorias	17
2. Nudos en posets	21
2.1. ¿Qué es un nudo en un poset?	21
2.2. ¿Cómo se comportan los nudos triviales en un poset?	25
2.3. ¿Cómo pensar en ejemplos?	32
2.4. ¿Cómo se relacionan posets con el mismo order complex?	40
3. Ejemplos e implementaciones en SAGE	53
3.1. Nudo trivial	54
3.2. Nudo trébol	57

Introducción

El primer objetivo de esta tesis es desarrollar la teoría de nudos en el contexto (combinatorio) de posets e investigar su relación con la teoría clásica de nudos. Recordemos que un nudo en \mathbb{R}^3 o \mathbb{S}^3 es un subespacio K homeomorfo a \mathbb{S}^1 . En la teoría clásica es usual trabajar con nudos mansos, es decir, pensamos al nudo K como una curva lineal a trozos embebida en una triangulación de \mathbb{R}^3 o \mathbb{S}^3 . Es decir, se le da a \mathbb{R}^3 o \mathbb{S}^3 una estructura simplicial de forma tal que K sea un subcomplejo (homeomorfo a \mathbb{S}^1). La ventaja de trabajar en la esfera \mathbb{S}^3 es que, al ser compacta, las triangulaciones son complejos simpliciales finitos.

Para trasladar la noción de nudo al contexto de posets, utilizamos las asignaciones de Alexandroff que relacionan posets con complejos simpliciales ([1, 33, 2]). Dado un poset X , se define su order complex $\mathcal{K}(X)$ como el complejo simplicial que tiene como vértices a los elementos de X y como símlices a las cadenas de X . Recíprocamente, a un complejo simplicial L se le asocia su poset de celdas $\mathcal{X}(L)$, que es el poset que tiene como elementos a los símlices de L y como orden el dado por la inclusión. Así, dado un poset X tal que $\mathcal{K}(X)$ es una 3-esfera, definimos un nudo en X como un subposet N tal que $\mathcal{K}(N)$ es un nudo en $\mathcal{K}(X)$.

Es importante remarcar que, en el contexto clásico, la estructura simplicial no está fija. Dos nudos en (alguna triangulación de) \mathbb{S}^3 son equivalentes si existe una subdivisión T de \mathbb{S}^3 y un isomorfismo simplicial $\varphi : T \rightarrow T$ que manda un nudo en el otro. En 1952 Moise demostró, entre otras cosas, que dadas dos triangulaciones de una 3-variedad, siempre podemos encontrar una tercera que sea una subdivisión común a las dos anteriores ([34]). En particular, para el caso de \mathbb{S}^3 , no importa qué triangulación consideramos inicialmente, siempre podemos refinarla, subdividiendo de forma adecuada, para compararla con cualquier otra. En cambio, cuando trabajamos con posets no contamos con una noción general de subdivisión, por lo que no podemos entender de forma intrínseca (es decir, sin considerar sus order complexes) cómo se relacionan los nudos de dos posets distintos (que modelen a la esfera).

Un problema, incluso previo al anterior, es que no es evidente cuándo el order complex de un poset es homeomorfo a \mathbb{S}^3 . Si bien las asignaciones de Alexandroff son conocidas desde hace mucho tiempo y fueron ampliamente estudiadas, generalmente son utilizadas para entender o investigar problemas de homotopía (u homología) de espacios topológicos ([1, 33, 2, 4, 3]). En ese caso, un *modelo finito* de un poliedro T es un poset finito X tal que $\mathcal{K}(X)$ es homotópicamente equivalente a T . En nuestro contexto necesitamos trabajar con *modelos*

estrictos: un modelo estricto de T es un poset finito X tal que $\mathcal{K}(X)$ es homeomorfo a T .

El hecho de tener que trabajar con modelos estrictos y no contar con subdivisiones ocasionó que la tesis tomara un rumbo distinto al planteado originalmente. Utilizando siempre a los nudos como generadores de preguntas, este trabajo explora algunos problemas que surgen al considerar a los posets como triangulaciones de espacios (es decir, cuando trabajamos con modelos estrictos). La idea básica de fondo es relacionar la combinatoria de los posets con la geometría (en dimensiones bajas) de los poliedros. Por ejemplo, un resultado básico de la teoría clásica de nudos afirma que un nudo en \mathbb{S}^3 es trivial si y sólo si es el borde de un subcomplejo homeomorfo al disco \mathbb{D}^2 (subdividiendo la estructura simplicial de \mathbb{S}^3 de ser necesario). Al trabajar con nudos en posets, es inevitable preguntarnos si efectivamente existen ejemplos en donde es necesario subdividir. Para responder esta pregunta trasladada al marco de posets, fue necesario dar primero una noción de “borde” en el contexto de posets y entender cómo identificar modelos estrictos de discos de forma eficiente desde un punto de vista computacional. Esto nos llevó a repasar la noción de colapso para posets introducida en [4] para demostrar que, de manera similar a lo que sucede con \mathbb{D}^2 en el contexto simplicial, los modelos estrictos de discos colapsan a un punto sin importar el orden en el que se realizan los colapsos.

Para investigar cómo podemos comprobar que un poset es un modelo estricto de \mathbb{S}^3 , o cómo determinar que dos nudos en un poset son isotópicos sin recurrir a las asignaciones de Alexandroff, utilizamos herramientas y resultados de la teoría de CW-complejos regulares y de la teoría de variedades combinatorias, y analizamos distintas nociones de conexión en el contexto de posets.

Presentamos a lo largo de la tesis varios ejemplos, entre los que podemos destacar un modelo estricto de \mathbb{S}^3 con un nudo no trivial conformado por el mínimo número de puntos que puede tener un modelo estricto de \mathbb{S}^1 . El mismo está inspirado en un trabajo de Hachimori [23] (ejemplo fuertemente basado en las ideas de Furch expuestas en [20]) y uno de Lutz [31], en donde presentan triangulaciones de \mathbb{S}^3 que contienen nudos no triviales formados únicamente por tres aristas.

En el capítulo 1 revisamos los conceptos fundamentales necesarios para el resto de la tesis. En las primeras secciones, recordamos la relación entre posets y complejos simpliciales y las definiciones y resultados básicos sobre nudos. En particular, recordamos las distintas formas equivalentes de determinar cuándo un nudo es trivial, y qué es el grupo de un nudo. Además, repasamos distintas nociones de colapsos en el contexto simplicial y de posets. En la última sección de este capítulo repasamos el concepto de variedad combinatoria (o lineal a trozos), y damos una caracterización de cómo determinar si un complejo simplicial es una triangulación de una esfera o de una bola en dimensiones bajas.

En el capítulo 2 desarrollamos la teoría de nudos en el contexto de posets, analizamos las nociones de equivalencia, de isotopía y el grupo del nudo, e investigamos la relación entre la combinatoria de los posets y la geometría de las variedades lineales a trozos en dimensiones

bajas. La mayoría de los resultados expuestos en este capítulo son originales y cada una de sus secciones responde a una pregunta básica (que le da el título a la sección). Destacamos especialmente los resultados de la última sección, en donde se analiza la relación que tienen entre sí los posets con el mismo order complex. Particularmente estudiamos el caso en que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y)$ sea una variedad lineal a trozos. En el caso de los modelos estrictos de \mathbb{S}^3 se obtiene una curiosa relación con la existencia de nudos no triviales.

En el capítulo 3 mostramos algunos ejemplos apoyándonos fuertemente en implementaciones realizadas en SAGE.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene dos objetivos principales. En la primera sección, describiremos qué marco de la teoría clásica de nudos utilizaremos a lo largo de este trabajo. En las otras secciones, introduciremos algunas ideas combinatorias básicas sobre posets y complejos simpliciales que serán necesarias en los capítulos siguientes.

Notaremos \mathbb{D}^n al subespacio de \mathbb{R}^n de elementos de norma menor o igual a 1 y \mathbb{S}^n al subespacio de \mathbb{R}^{n+1} de elementos de norma igual a 1. Llamaremos *n-bola* o *n-disco* a cualquier espacio homeomorfo a \mathbb{D}^n y *n-esfera* a cualquier espacio homeomorfo a \mathbb{S}^n .

Δ^n denotará al *n-simplex*, visto como complejo simplicial. Si K es un complejo simplicial y φ es un morfismo simplicial, notaremos $|K|$ y $|\varphi|$ a sus realizaciones geométricas. Cuando el contexto sea claro, no vamos a distinguir entre un complejo simplicial y su realización geométrica. Además, a los símplices los identificaremos, como es estándar, con el conjunto de sus vértices (ya que un simplex determina y queda determinado por sus vértices).

Recordar que el join de dos símplices disjuntos σ y τ , denotado $\sigma * \tau$, es el simplex cuyo conjunto de vértices es la unión de los vértices de σ y los vértices de τ , y el join de dos complejos simpliciales K y L , denotado $K * L$, es el complejo simplicial que tiene como vértices a la unión de los vértices de K con los vértices de L y que tiene como símplices a los símplices de K , a los símplices de L y a los símplices de la forma $\sigma * \tau$, con σ en K y τ en L .

Al complejo $\{v\} * K$ lo notaremos vK y diremos que es un *cono simplicial con ápice en v*. A un complejo de la forma $\mathbb{S}^0 * K$, donde \mathbb{S}^0 es visto como un complejo simplicial discreto de 2 vértices, lo notaremos ΣK y diremos que es la *suspensión simplicial* de K o simplemente la *suspensión* de K a secas.

Si X es un espacio topológico, notaremos también ΣX a su suspensión (topológica). Vale además (ver por ejemplo [2]) que la realización geométrica $|K * L|$ es homeomorfa al join topológico de las realizaciones $|K| * |L|$, por lo que en particular $\Sigma|K|$ y $|\Sigma K|$ son dos espacios homeomorfos.

Dado un poset X y dos elementos $x, y \in X$, notaremos $x \prec y$ si x es cubierto por y , es decir, si $x < y$ y no existe $z \in X$ tal que $x < z < y$. Todos los poset serán representados gráficamente mediante su diagrama de Hasse. Recordemos que el diagrama de Hasse de un

poset X es un grafo dirigido que tiene como vértices a los puntos de X y cuyas aristas son los pares (x, y) tales que $x \prec y$. Cuando grafiquemos los diagramas de Hasse, para representar a la arista (x, y) simplemente pondremos a y por arriba de x (en lugar de representarlo con una flecha).

1.1. Nudos clásicos

En esta sección vamos a recordar las nociones y resultados más básicos de la teoría de nudos. Para más detalles, el lector puede consultar [29] o [10] para nudos mansos de \mathbb{R}^3 o \mathbb{S}^3 , o [42] para un acercamiento más amplio.

En un contexto general, la definición de nudo es la siguiente:

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico y K un subespacio de X . Decimos que K es un **nudo** en X si es homeomorfo a una n -esfera para algún $n \in \mathbb{N}$. Decimos que K es un **enlace** si es homeomorfo a una unión disjunta de esferas.*

Esta definición viene acompañada con una noción de equivalencia:

Definición 1.1.2. *Decimos que dos nudos (o enlaces) K y \tilde{K} en X son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow X$ tal que $\varphi(K) = \tilde{K}$. Decimos que K y \tilde{K} son **isotópicos** si existe una isotopía de ambiente (es decir, una función continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que H_t es un homeomorfismo para todo $t \in I$) de forma que $H_0 = Id_X$ y $H_1(K) = \tilde{K}$.*

Existen muchas nociones de equivalencia distintas para nudos. A veces se consideran solo nudos isotópicos, o se pide que X sea una variedad diferenciable y que φ sea suave, o que X sea una variedad diferenciable y orientada y que φ sea suave y preserve orientación. En esta tesis vamos a trabajar con nudos y enlaces que puedan representarse en el contexto lineal a trozos (o PL por sus siglas en inglés) **sin considerar orientaciones**. Más específicamente, asumiremos que X admite una estructura simplicial y que K es un subcomplejo. Además, como es habitual en el contexto lineal a trozos, debemos considerar todas las triangulaciones posibles. Recordar que dos complejos simpliciales X e Y se dicen **PL homeomorfos** si existen subdivisiones \tilde{X} e \tilde{Y} y una función $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ tales que φ es un isomorfismo simplicial.

Definición 1.1.3. *Sea X un complejo simplicial y K un subcomplejo de X . Decimos que K es un nudo (o enlace) en X si $|K|$ lo es en $|X|$. Dados K_1 y K_2 dos enlaces en X , decimos que son **equivalentes (en sentido lineal a trozos)** si existe una subdivisión de X , \tilde{X} , y un automorfismo simplicial de \tilde{X} , φ , de forma que $\varphi(K_1) = K_2$.*

Definición 1.1.4. *Sean K y \tilde{K} dos nudos de un complejo simplicial X . Decimos que \tilde{K} se obtiene de K mediante un **Δ -movimiento**, o **movimiento de triángulo**, si existe un 2-simplex σ que interseca a K en exactamente una arista y a \tilde{K} en las otras dos. Es decir, si existe un 2-simplex $\sigma = \{a, b, c\}$ tal que $K \cap \sigma = \{a, b\}$ y $\tilde{K} = (K \setminus \{a, b\}) \cup \{b, c\} \cup \{c, a\}$.*

Al movimiento inverso lo llamaremos Δ^{-1} -movimiento. Decimos que K y \tilde{K} son **isotópicos por movimientos** si existe una secuencia finita de Δ -movimientos y Δ^{-1} -movimientos que transforman a K en \tilde{K} .



Figura 1.1: Imagen local de un Δ -movimiento.

Proposición 1.1.5. [10, Proposición 1.10] Sean K y \tilde{K} dos nudos de un complejo simplicial X . Entonces K y \tilde{K} son isotópicos si y solo si existe una subdivisión de X de forma tal que son isotópicos por movimientos.

Como dos nudos en un complejo simplicial son isotópicos (topológicamente) si y solo si son pl-isotópicos [10, Corolario 3.16], la proposición anterior implica que si dos nudos son isotópicos por movimientos, entonces son equivalentes en sentido lineal a trozos. A los nudos que entran dentro de la teoría lineal a trozos se los llama **nudos mansos**, en contraposición a los **nudos salvajes** que son los que no pueden ser representados de esta forma. Más información de estos últimos puede hallarse en [42].

Como vamos a trabajar en el contexto simplicial (o lineal a trozos), en lo que resta del trabajo llamaremos equivalentes a los nudos que son equivalentes en sentido lineal a trozos.



Figura 1.2: Ejemplo de un nudo manso y de un nudo salvaje.

Observación 1.1.6. La intuición nos diría que el lugar más natural para estudiar enlaces es \mathbb{R}^n . Sin embargo, como \mathbb{R}^n está contenido en \mathbb{S}^n , todo enlace en \mathbb{R}^n lo podemos ver metido en \mathbb{S}^n . Recíprocamente, si tenemos un enlace en \mathbb{S}^n homeomorfo a una unión de esferas de dimensión menor a n , podemos remover un punto del espacio que no pertenezca al enlace y pensarlo dentro de \mathbb{R}^n . Esta correspondencia es buena en el sentido de que preserva nuestra noción de equivalencia para nudos [42], lo que es especialmente útil en el contexto PL ya que, al ser \mathbb{S}^3 compacto, cuenta con una estructura simplicial finita.

De todas formas, hay que tener un poco de cuidado. Por ejemplo en dimensión 2, los enlaces de la figura 1.3 no son equivalentes en \mathbb{R}^2 pero sí lo son en \mathbb{S}^2 [42].



Figura 1.3: Dos enlaces no equivalentes en \mathbb{R}^2 , pero sí en \mathbb{S}^2 .

En lo que resta del capítulo, todos los nudos y enlaces van a ser mansos, conformados por 1-esferas y contenidos dentro de \mathbb{R}^3 o \mathbb{S}^3 . Siempre que se hable de equivalencias van a ser PL equivalencias.

Observación 1.1.7. Como consecuencia del teorema de Sard, dado un enlace manso de \mathbb{R}^3 siempre vamos a poder modificarlo un poco para obtener un enlace equivalente, de forma que su proyección en un plano cumpla que para cada punto de \mathbb{R}^2 , su preimagen por la proyección contenga exactamente 0,1 o 2 puntos. Se puede pedir también que si un punto tiene dos preimágenes, las mismas no sean vértices [29]. A una proyección que cumpla con estas características la llamaremos *regular* y a los puntos de una proyección regular que tengan dos preimágenes los llamaremos *cruces*. Un *diagrama* de un enlace es una proyección regular junto con la información de qué arco pasa por arriba y por abajo en los cruces, típicamente indicada cortando el arco que pasa por abajo. Estudiar diagramas de nudos tiene interés en sí mismo y el lector que quiera indagar más puede profundizar, por ejemplo, leyendo [27].

Vía la correspondencia de la observación anterior, podemos extender nuestra noción de diagrama para nudos mansos de \mathbb{S}^3 .



Figura 1.4: Ejemplo de diagrama de un nudo

Ahora que ya tenemos una noción de lo que es un nudo, podemos entender cuándo un nudo en realidad no está anudado.

Definición 1.1.8. Sea K un nudo de \mathbb{S}^3 . Decimos que K es un **nudo trivial** si K es equivalente a la inclusión canónica de \mathbb{S}^1 en \mathbb{S}^3 (como ecuador de su ecuador). Si X es una

triangulación de \mathbb{S}^3 y K es un nudo de X , es equivalente que K sea trivial a que exista una subdivisión de X para la cual $|K|$ es el borde de un 2-disco PL (es decir, un subcomplejo homeomorfo a \mathbb{D}^2). [42, Capítulo 2 sección F]

Nos gustaría ahora dar una mejor caracterización de cuándo un nudo es trivial. Comencemos observando que si K y \tilde{K} son dos nudos equivalentes en \mathbb{S}^3 , entonces sus complementos $\mathbb{S}^3 \setminus K$ y $\mathbb{S}^3 \setminus \tilde{K}$ son homeomorfos. Mucho menos evidente es la recíproca, probada recién en 1989 por Gordon y Luecke en [22]. Tanto “menos evidente” es que deja de ser cierta si nos movemos al mundo de los enlaces, en donde hay ejemplos de enlaces de \mathbb{S}^3 no equivalentes, pero con complementos homeomorfos [42, p.49.]. Lamentablemente, caracterizar complementos de nudos sigue siendo difícil, por lo que sería de utilidad conseguir invariantes más controlables.

Definición 1.1.9. Sea K un nudo de \mathbb{S}^3 , definimos el **grupo de K** como el grupo fundamental del complemento de K .

El grupo de un nudo es uno de los invariantes más conocidos y existen distintos métodos para calcular una presentación del mismo a partir de un diagrama del nudo. Las personas interesadas pueden buscar sobre la “presentación de Wirtinger”, por ejemplo en [42]. En esta tesis no nos ocuparemos del cálculo específico del grupo de un nudo y referimos al lector a los libros [29, 42] para más detalles. Uno de los resultados más importantes en esta dirección (y que sí utilizaremos a lo largo de la tesis) es el siguiente resultado de Papakyriakopoulos [37].

Teorema 1.1.10. Sea K un nudo de \mathbb{S}^3 . Entonces K es trivial si y solo si el grupo de K es \mathbb{Z} .

En realidad, el resultado que demostró Papakyriakopoulos es más general y se conoce como el “loop theorem”, que generaliza y proporciona una demostración correcta del Lema de Dehn, enunciado por primera vez en [14].

1.2. Relación entre posets y complejos simpliciales

En esta sección recordaremos la correspondencia que existe entre complejos simpliciales y posets fijaremos notaciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Todo lo expuesto en esta sección puede encontrarse (con más detalles) en [2]. En lo que sigue, todos los poset, complejos simpliciales y CW-complejos que consideremos serán finitos.

Definición 1.2.1. Dado un poset (finito) X , definimos el **order complex** de X , $\mathcal{K}(X)$, como el complejo simplicial que tiene como vértices a los elementos de X y como símlices a las cadenas no vacías de X . Recíprocamente, dado K un complejo simplicial (finito), o más generalmente, un CW-complejo regular (ver definición 1.2.5), definimos el **poset de celdas** de K , $\mathcal{X}(K)$, como el poset que tiene como puntos a los símlices de K (o a las celdas en el caso más general) y como orden el dado por la inclusión.

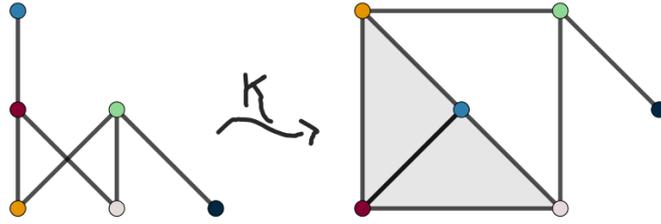


Figura 1.5: Un poset y su complejo asociado.

Notemos que si X_1 y X_2 son dos posets y $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ es un morfismo de orden, podemos definir una función

$$\mathcal{K}(\varphi) : \mathcal{K}(X_1) \rightarrow \mathcal{K}(X_2), \mathcal{K}(\varphi)(x) = \varphi(x)$$

que es un morfismo simplicial.

Recíprocamente, si K_1, K_2 son dos complejos simpliciales y $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ es un morfismo simplicial, definimos un morfismo de orden

$$\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K_1) \rightarrow \mathcal{X}(K_2), \mathcal{X}(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma)$$

Es claro además que

$$\mathcal{K}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{K}(\varphi) \circ \mathcal{K}(\psi), \mathcal{X}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{X}(\varphi) \circ \mathcal{X}(\psi),$$

$$\mathcal{K}(Id_X) = Id_{\mathcal{K}(X)}, \mathcal{X}(Id_K) = Id_{\mathcal{X}(K)}$$

por lo que, al ser aplicaciones funtoriales, \mathcal{K} y \mathcal{X} preservan isomorfismos.

Notar también que si K es un complejo simplicial, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ coincide con la subdivisión baricéntrica de K , por lo que si bien K y $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ no son iguales como complejos simpliciales, tienen realizaciones geométricas homeomorfas.

Nuestro siguiente objetivo es dar condiciones para determinar cuándo un poset es un poset de celdas. Antes de ahondar en este problema, recordemos algunas definiciones y notaciones importantes:

Definición 1.2.2. Sea K un complejo simplicial, σ un simplex de K . Definimos:

- el **star cerrado** de σ (notamos $st_K(\sigma)$ o $st(\sigma, K)$) como el subcomplejo de K formado por los simplices τ que cumplen que $\tau \cup \sigma$ es un simplex de K .
- el **link** de σ (notamos $lk_K(\sigma)$ o $lk(\sigma, K)$) como el subcomplejo de $st_K(\sigma)$ formado por los simplices disjuntos con σ .

Cuando $\sigma = \{v\}$ es un 0-simplex (vértice), notaremos $st_K(v)$ y $lk_K(v)$, y no escribiremos el subíndice si el contexto es claro.

Notación 1.2.3. Sea X un poset, x un elemento de X . Notaremos:

- U_x al conjunto de elementos **menores** o iguales a x y \hat{U}_x a $U_x \setminus \{x\}$
- F_x al conjunto de elementos **mayores** o iguales a x y \hat{F}_x a $F_x \setminus \{x\}$.
- C_x al conjunto de elementos comparables con x y \hat{C}_x a $C_x \setminus \{x\}$.

Al conjunto \hat{C}_x lo llamaremos el **link** de x .

Definición 1.2.4. Definimos la **altura** $h(X)$ de un poset X como el máximo de las longitudes de las cadenas de X , donde la longitud de una cadena $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ es n , y definimos la altura $h(x)$ de un elemento $x \in X$ como la altura de U_x . Si $0 \leq i \leq h(X)$, definimos el **i -ésimo nivel de X** , X_i , como el conjunto conformado por todos los elementos de X de altura i , y notaremos \hat{X}_i al subposet $X \setminus X_i$. $X_{\leq i}$ y $X_{\geq i}$ denotarán a los conjuntos $\bigcup_{k=0}^i X_k$ y

$\bigcup_{k=i}^{h(X)} X_k$ respectivamente. Decimos que X es **homogéneo** de dimensión n si todas las cadenas maximales de X tienen longitud n .

Notar que $C_x = U_x \cup F_x$ y que $\hat{C}_x = \hat{U}_x \cup \hat{F}_x$. Además, es claro que si X es un poset, $\mathcal{K}(\hat{C}_x) = lk_{\mathcal{K}(X)}(x)$ y que si K es un complejo simplicial y σ es un simplex de K , entonces $\mathcal{X}(\sigma) = U_\sigma$.

Debido a esto, si tratamos de entender el caso particular en el que un poset X es el poset de celdas de un complejo simplicial, una condición necesaria para que esto ocurra es que para todo $x \in X$, U_x sea isomorfo al poset de celdas de Δ^n , con n la altura de x . Luego, si tomamos por ejemplo al poset $X = \{1, 2, 3\}$, donde 1 es menor que 2 y 2 es menor que 3, sabemos que X no es el poset de celdas de un complejo simplicial ya que U_2 no cumple con esta condición (ver figura 1.6).



Figura 1.6: A la izquierda el diagrama de Hasse de U_2 , a la derecha el del complejo de celdas de un 1-simplex.

Sin embargo, esta condición no es suficiente para determinar cuándo un poset es el poset de celdas de un complejo simplicial. Si tomamos ahora a X como el poset con el diagrama de Hasse de la figura 1.7, podemos observar que para todo $x \in X$, U_x cumple con nuestra condición de isomorfismo. De ser X de la forma $\mathcal{X}(K)$, entonces el conjunto de vértices de K debería tener únicamente dos elementos (a los que llamamos a y b) y tendría que tener dos 1-símplices de la forma $\{a, b\}$, por lo que no puede ser un complejo simplicial. En todo caso, es un CW-complejo regular.

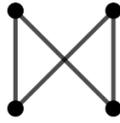


Figura 1.7

Definición 1.2.5. Un CW-complejo K se dice **regular** si para cada celda e^n , la función característica $D^n \rightarrow e^n$ es un homeomorfismo, o equivalentemente, la función de adjunción $S^{n-1} \rightarrow K$ es un homeomorfismo restringido a e^n , el borde de e^n .

Puede probarse que si K es un CW-complejo regular, entonces para cada celda e^n de K se cumple que \dot{e}^n es un subcomplejo [18].

Los CW-complejos regulares mantienen las buenas relaciones con los posets que tienen los complejos simpliciales. En particular, si K es un CW-complejo regular, $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ es la subdivisión baricéntrica de K .

Teorema 1.2.6. ([30, Teorema 1.7]) Sea K un CW-complejo regular. Entonces la realización geométrica de $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ es homeomorfa a K .

Observación 1.2.7. Se podría definir $\mathcal{X}(K)$ como el poset de celdas de un CW-complejo cualquiera (no necesariamente regular), pero en ese caso $\mathcal{X}(K)$ no tiene por qué respetar la topología de K . Por ejemplo, si tomamos la estructura de S^1 con una 0-celda y una 1-celda, $\mathcal{X}(K)$ resulta el poset de la figura 1.8 y $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ resulta un 1-disco. Nos concentraremos entonces únicamente en los posets de celdas de CW-complejos regulares.

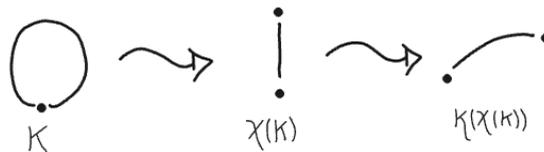


Figura 1.8

El siguiente resultado caracteriza cuándo un poset es un poset de celdas de un CW-complejo regular y puede encontrarse en [9].

Proposición 1.2.8. Sea X un poset. Entonces existe K un CW-complejo regular tal que $X = \mathcal{X}(K)$ si y solo si para cada $x \in X$, $|\mathcal{K}(\hat{U}_x)|$ es vacío u homeomorfo a una esfera.

Observación 1.2.9. Si bien ahora tenemos una caracterización, la misma depende de entender cuándo el complejo simplicial asociado a un poset es una esfera. En la última sección de este mismo capítulo daremos las herramientas necesarias para entender bien este problema, por lo menos en dimensiones bajas.

Observación 1.2.10. No vamos a estar interesados en este trabajo en entender cuándo un complejo simplicial es el order complex de un poset. Sin embargo, sí vamos a querer entender el siguiente problema: Sea X un poset y K un subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$. ¿Existe un subposet (es decir, un subconjunto de X con el orden inducido) $Y \subseteq X$ tal que $K = \mathcal{K}(Y)$? De existir, los vértices de K tienen que ser los elementos de Y , por lo que cada simplex conformado por elementos de Y (es decir, cada cadena de Y) tiene que ser un simplex de K y K resulta un subcomplejo pleno. Recordemos que un subcomplejo $K \subset L$ se dice **pleno** si todo simplex de L , cuyos vértices están en K , es un simplex de K . Recíprocamente, si K es un subcomplejo pleno, tomando Y el subposet que tiene como elementos a los vértices de K , es claro que $K = \mathcal{K}(Y)$. Luego, un subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$ es el order complex de un subposet de X si y solo si es un subcomplejo pleno.

Terminaremos esta sección recordando algunas definiciones más que utilizaremos en el capítulo 2.

Definición 1.2.11. *Dados X e Y dos posets, definimos el **join** entre X e Y , y notamos $X \otimes Y$, como el poset que tiene como elementos a los de la unión disjunta $X \amalg Y$ y cuyo orden extiende al de X e Y de forma que $x < y$ para todo $x \in X, y \in Y$.*

Observación 1.2.12. Notar que si un poset X es de la forma $X = Y \otimes Z$, entonces $X_{h(Y)+1}$ coincide con los elementos minimales de Z y $X_{h(Y)}$ está conformado por algunos (si Y no es homogéneo quizás no todos) de los elementos maximales de Y . En particular, todos los elementos de $X_{h(Y)}$ son comparables con todos los elementos de $X_{h(Y)+1}$. Recíprocamente, si para un poset **homogéneo** X existe un i tal que todos los elementos de X_i son comparables con todos los elementos de X_{i+1} , entonces X puede descomponerse como $X = X_{\leq i} \otimes X_{\geq i+1}$.

Notar también que si X e Y son dos posets, entonces $\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$.

1.3. Colapsos, colapsos fuertes y 1-colapsos.

En esta sección recordaremos las nociones de colapsos en el contexto de posets. Las principales referencias serán [5] y [2].

Recordemos primero la noción usual de colapso para complejos simpliciales.

Definición 1.3.1. *Sean K un complejo simplicial (finito) y σ un simplex de K . Decimos que σ es una **cara libre** de K si existe un único simplex $\tau \in K$ tal que $\sigma \subsetneq \tau$. En ese caso, decimos que K **colapsa elementalmente** a $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ y notamos $K \searrow^e (K \setminus \{\sigma, \tau\})$. Dado L subcomplejo de K , decimos que K **colapsa** a L , o que L es un **colapso** de K , y notamos $K \searrow L$, si se puede ir de K a L mediante finitos colapsos elementales.*

Notar que si σ es cara libre de τ , $\dim \sigma = \dim \tau - 1$. Es fácil ver que un colapso elemental de un complejo K es un retracto por deformación fuerte, por lo que si $K \searrow L$ entonces L es

un retracto por deformación fuerte de K [26]. Luego, si K colapsa a un punto tiene que ser contráctil.

Definición 1.3.2. Sea K un complejo simplicial. Decimos que K es **colapsable** si colapsa a un punto.

Observación 1.3.3. Un ejemplo sencillo pero importante dentro de los complejos simpliciales colapsables son los conos. Para probar que un cono vK colapsa a $\{v\}$, lo único que tenemos que notar es que si σ es un simplex maximal de K , entonces σ es una cara libre de $v\sigma$ en vK , por lo que

$$vK \searrow^e vK \setminus \{\sigma, v\sigma\} = v(K \setminus \{\sigma\})$$

e inductivamente se llega a $\{v\}$. En particular, notar que los símplexes (vistos como complejos simpliciales) son colapsables.

Nuestro siguiente objetivo es recordar la noción de colapso para posets, introducida en [4]. Con ese fin, vamos a recordar primero otras nociones de colapsos simpliciales que involucran a los vértices de un complejo, las cuales están relacionadas con la teoría de homotopía de espacios finitos y fueron introducidas en [5].

Definición 1.3.4. Sea K un complejo simplicial, v un vértice de K . Notamos $K \setminus v$ al subcomplejo pleno de K generado por todos los vértices de K distintos a v . Decimos que hay un **colapso elemental fuerte** de K a $K \setminus v$, y notamos $K \searrow^e (K \setminus v)$, si $lk_K(v)$ es un cono simplicial wL . En ese caso, decimos que v es **dominado** o **dominado por w** . Dado L un subcomplejo de K , decimos que K **colapsa fuertemente** a L (o que K **0-colapsa** a L), y notamos $K \searrow^e L$ o $K \searrow^0 L$, si se puede ir de K a L mediante finitos colapsos elementales fuertes. Decimos que K es **fuertemente colapsable** o **0-colapsable** si colapsa fuertemente a un punto.

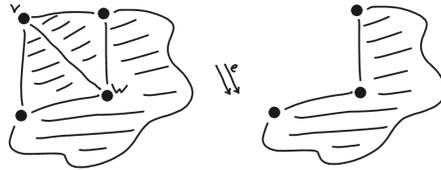


Figura 1.9: Imagen de un colapso elemental fuerte obtenida en [5]. El vértice v es dominado por w .

Siguiendo un razonamiento muy similar a cuando demostramos que todo cono es contráctil, podemos demostrar que si K es colapsable entonces el cono vK colapsa a su base K . Luego, si K es un complejo simplicial y $v \in K$ es tal que $lk_K(v)$ es colapsable, entonces $K \searrow (K \setminus v)$. En particular, se cumple que si $K \searrow^e (K \setminus v)$ entonces $K \searrow (K \setminus v)$, por lo que si K colapsa fuertemente a L , entonces K colapsa a L .

Esta noción de colapsos para complejos simpliciales cuenta con una noción equivalente en posets:

Definición 1.3.5. Sea X un poset. Decimos que $x \in X$ es un **beat point** si \hat{U}_x tiene un máximo o \hat{F}_x tiene un mínimo. En ese caso, decimos que hay un **colapso elemental fuerte** de X a $X \setminus \{x\}$. Si Y es un subespacio de X , decimos que X colapsa fuertemente a Y , y notamos $X \rightsquigarrow Y$, si se puede ir de X a Y mediante finitos colapsos elementales fuertes. Decimos que X es **contráctil** si colapsa fuertemente a un punto.

Observación 1.3.6. El nombre “contráctil” no es casual y tiene sentido en el contexto de espacios topológicos finitos. Si bien en esta tesis se presenta el concepto a partir del de colapsos fuertes, históricamente fue al revés.

Teorema 1.3.7. [5]

1. Sea K un complejo simplicial finito, L un subcomplejo de K . Entonces si $K \rightsquigarrow L$, $\mathcal{X}(K) \rightsquigarrow \mathcal{X}(L)$.
2. Sea X un poset finito, Y un subespacio de X . Entonces si $X \rightsquigarrow Y$, $\mathcal{K}(X) \rightsquigarrow \mathcal{K}(Y)$.

El teorema anterior es útil cuando trabajamos en el contexto de colapsos fuertes, pero no nos da información si estamos trabajando con colapsos usuales. Para eso vamos a necesitar nociones intermedias de colapsos en el contexto simplicial:

Definición 1.3.8. Sea K un complejo simplicial, v un vértice de K . Decimos que hay un **1-colapso elemental** de K a $K \setminus v$ si $lk_K(v)$ es fuertemente colapsable. Dado L un subcomplejo de K , decimos que K **1-colapsa** a L , y notamos $K \searrow^1 L$, si se puede ir de K a L mediante finitos 1-colapsos elementales. Decimos que K es **1-colapsable** si 1-colapsa a un punto. Más en general, decimos que hay un **(n+1)-colapso elemental** de K a $K \setminus v$ si $lk_K(v)$ es n -colapsable y que K **(n+1)-colapsa** a L si se puede ir de K a L mediante finitos $(n+1)$ -colapsos elementales. Si K n -colapsa a L , notamos $K \searrow^n L$. Decimos que un complejo es **n-colapsable** si n -colapsa a un punto.

Notar que si K es un cono con ápice en w , entonces para todo v vértice de K distinto de w , $lk_K(v)$ es también un cono con ápice en w , por lo que $K \searrow^e (K \setminus v)$ e inductivamente vemos que todo cono es fuertemente colapsable. Esto implica que si K colapsa fuertemente a L entonces K 1-colapsa a L . Más generalmente, sabiendo que los n -colapsos son también $(n+1)$ -colapsos, es claro que los $(n+1)$ -colapsos son también $(n+2)$ -colapsos, por lo que inductivamente, para todo $0 \leq n < m$ vale que si $K \searrow^n L$ entonces $K \searrow^m L$. Además, de forma análoga a lo hecho para colapsos fuertes, podemos ver que si $K \searrow^n L$ entonces $K \searrow L$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

K es n -colapsable $\implies K$ es $(n+1)$ -colapsable $\implies K$ es colapsable $\implies K$ es contráctil

Sin embargo, ninguna de las implicaciones recíprocas es cierta [5, 48]. En particular, que no todo complejo simplicial contráctil sea colapsable será importante cuando sea necesario identificar discos.

En esta tesis solo utilizaremos colapsos fuertes, 1-colapsos y colapsos simpliciales (clásicos). Para aprender más sobre n-colapsos en general y su relación con el concepto de complejos non-evasive, leer [5].

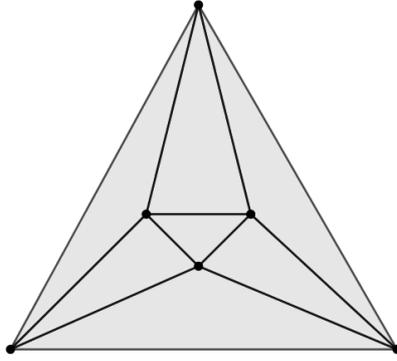


Figura 1.10: Ejemplo de un complejo 1-colapsable pero no fuertemente colapsable, obtenido en [5].

Ya estamos en condiciones de definir lo que es un colapso en un poset. Esta definición fue introducida en [4].

Definición 1.3.9. Sea X un poset. Decimos que $x \in X$ es un **weak point** si \hat{C}_x es contráctil. Dado Y un subespacio de X , decimos que hay un **colapso** de X a Y , y notamos $X \searrow Y$, si se puede ir de X a Y removiendo weak points de uno en uno. Decimos que X es **colapsable** si colapsa a un punto.

Es claro viéndolo para colapsos elementales fuertes que si X colapsa fuertemente a Y entonces X colapsa a Y . Además, esta noción de colapso está relacionada con la noción usual de colapsabilidad para complejos simpliciales y muy fuertemente relacionada con la noción de 1-colapsabilidad.

Teorema 1.3.10. [4, 5]

1. Sea K un complejo simplicial finito, L un subcomplejo de K . Entonces si $K \searrow L$, $\mathcal{K}(K) \searrow \mathcal{K}(L)$.
2. Sea X un poset finito, Y un subespacio de X . Entonces $X \searrow Y$ si y solo si vale que $\mathcal{K}(X) \searrow^1 \mathcal{K}(Y)$.

Notar que no tenemos una equivalencia como en el punto (2) del teorema para colapsos fuertes. Si X es un poset como en la figura 1.11 y x es un elemento maximal, entonces $\mathcal{K}(X)$ colapsa fuertemente a $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ pero X no colapsa fuertemente a $X \setminus \{x\}$.

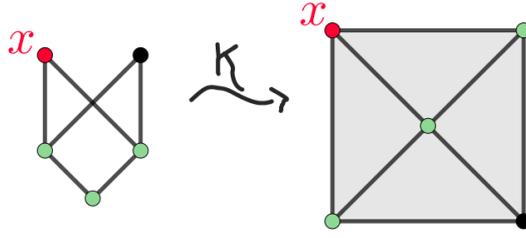


Figura 1.11: A la izquierda un poset, a la derecha su order complex. En rojo el elemento x , en verde el link de x .

1.4. Variedades combinatorias

En la primera sección vimos que es de nuestro interés trabajar con triangulaciones de esferas y discos. Sin embargo, no es fácil a priori determinar si un complejo simplicial es o no una triangulación de una n -esfera o de una n -bola. El principal objetivo de esta sección es dar las herramientas necesarias para resolver este problema, por lo menos en dimensiones bajas. Las referencias principales serán [21] y [26].

Recordemos que un complejo simplicial se dice homogéneo si todos sus símlices máximos tienen la misma dimensión.

Definición 1.4.1. Sea K un complejo simplicial finito y homogéneo de dimensión n , con n mayor o igual que 1. Definimos el **borde** de K , y notamos \dot{K} o ∂K , como el complejo simplicial generado por los $(n-1)$ -símlices de K que están contenidos en una cantidad impar de n -símlices. Si K es un complejo homogéneo de dimensión 0, decimos que $\dot{K} = \emptyset$ si K tiene una cantidad par de puntos y que $\dot{K} = K$ si K tiene una cantidad impar de puntos.

Observación 1.4.2. Notemos que, si v es un vértice de un complejo simplicial homogéneo K , entonces $lk_K(v)$ es a su vez un complejo homogéneo. Además, si σ es un $(n-1)$ -simplex que contiene a v , entonces la cantidad de n -símlices de K que contienen a σ es igual a la cantidad de $(n-1)$ -símlices de $lk_K(v)$ que contienen a $\sigma \setminus \{v\}$. Esto es así ya que si τ es un n -simplex de K que contiene a σ entonces $\tau \setminus \{v\}$ es un simplex de $lk_K(v)$ que contiene a $\sigma \setminus \{v\}$, y si $\tilde{\tau}$ es un simplex de $lk_K(v)$ que contiene a $\sigma \setminus \{v\}$ entonces $v\tilde{\tau}$ es un simplex de K que contiene a σ . Luego, σ está en el borde de K si y solo si $\sigma \setminus \{v\}$ está en el borde de $lk_K(v)$. Por lo tanto, para todo vértice $v \in K$, vale que $v \in \dot{K}$ si y solo si $\partial lk_K(v) \neq \emptyset$.

Razonando de forma análoga, se puede ver que para cualquier simplex τ de K vale que $\tau \in \dot{K}$ si y solo si $\partial lk_K(\tau) \neq \emptyset$.

Definición 1.4.3. Una **n -bola combinatoria** es un complejo simplicial PL homeomorfo a Δ^n . Una **n -esfera combinatoria** es un complejo simplicial PL homeomorfo a $\dot{\Delta}^{n+1}$.

Definición 1.4.4. Una **n -variedad combinatoria** es un complejo simplicial K homogéneo de dimensión n tal que para todo vértice $v \in K$, $lk(v, K)$ es o una $(n-1)$ -bola combinatoria

o una $(n - 1)$ -esfera combinatoria.

Un resultado de base de la teoría nos dice que si K y L son dos complejos simpliciales PL homeomorfos, entonces uno es una variedad combinatoria si y solo si el otro lo es [21, Teorema II.2.]. En particular, cualquier subdivisión de una variedad combinatoria lo será también. Usando este resultado, no es muy difícil probar que la realización geométrica de una variedad combinatoria es una variedad topológica. [26, p.26]

Otro resultado clásico afirma que para cualquier complejo simplicial homogéneo, el borde de una subdivisión es la subdivisión del borde [21, p.17], lo que sumado a que ser variedad se preserva por equivalencia PL, implica que toda n -esfera combinatoria es una variedad combinatoria sin borde y que toda n -bola combinatoria es una variedad combinatoria con borde no vacío. Luego, por la observación 1.4.2 tenemos que, si K es una n -variedad combinatoria, entonces $v \in \dot{K}$ si y solo si $lk(v, K)$ es una $(n - 1)$ -bola combinatoria. En base a este resultado, haciendo argumentos similares a los que se usan para probar que la realización geométrica de una variedad combinatoria es una variedad topológica obtenemos que el borde de $|K|$ como variedad topológica es exactamente $|\dot{K}|$ [26, Lemma 1.18].

Nos interesa ahora razonar en la dirección recíproca. Dada X una variedad topológica o diferenciable, ¿es cierto que siempre admite una triangulación por un complejo simplicial?, ¿pueden conseguirse, en ese caso, triangulaciones combinatorias (es decir, que el complejo simplicial que la triángule sea una variedad combinatoria)?, ¿todas las triangulaciones de variedades topológicas o diferenciables son combinatorias? En 1935, Cairns demostró que toda variedad diferenciable admite una triangulación [11], resultado que fue mejorado en 1940 por Whitehead, quien demostró que toda variedad diferenciable admite una triangulación combinatoria y que esta, además, es esencialmente única [47]. En cuanto a variedades topológicas, Radó demostró en 1925 que toda variedad de dimensión 2 admite una triangulación combinatoria [41]. Luego, en 1952, Moise probó que toda variedad topológica de dimensión 3 es también una variedad diferenciable, por lo que en particular admite una triangulación combinatoria [34]. Sin embargo, Kirby y Siebenmann demostraron en 1969 que para dimensiones mayores o iguales a 5 existen variedades topológicas que no admiten una triangulación combinatoria, resultado que luego Freedman extendió a dimensión 4 en 1982 [28, 17]. Mediante un invariante introducido por Casson en 1985, se probó además que el ejemplo dado por Freedman no solo no admite una triangulación combinatoria, sino que además no admite ningún tipo de triangulación [43]. Finalmente, en 2013 Manolescu demostró que existen variedades topológicas que no son triangulables para cualquier dimensión mayor a cuatro [32].

Queda todavía la siguiente pregunta. Dada X una variedad que admita una triangulación combinatoria y K una triangulación de X , ¿es verdad que K es siempre una variedad combinatoria? Cuando la dimensión de la variedad es menor o igual a 3, no solo esto es cierto sino que además, si \tilde{K} es otra triangulación de X , entonces K y \tilde{K} son PL homeomorfos [36, 34]. En particular, si $n \leq 3$ tenemos que toda triangulación de \mathbb{S}^n (respect. \mathbb{D}^n) va a ser una

n-esfera combinatoria (respect. n-bola combinatoria).

Esto es falso en el caso general, incluso cuando $|K|$ es homeomorfo a una esfera. El contraejemplo más simple consiste en tomar un complejo M que sea la triangulación de una 3-esfera homológica no trivial (i.e. todos los grupos de homología de M coinciden con los de \mathbb{S}^3 pero M no es homeomorfo a \mathbb{S}^3) y considerar al complejo $K = \Sigma^2 M$. K es una triangulación de \mathbb{S}^5 [12], pero no puede ser una variedad combinatoria ya que al menos dos de sus vértices tienen como link a ΣM , que a su vez no puede ser una variedad combinatoria ya que al menos dos de sus vértices tienen como link a M . Aplicando ahora a K la cantidad de suspensiones necesarias, podemos conseguir triangulaciones de \mathbb{S}^n que no sean variedades combinatorias para todo n mayor a 5.

De todas formas, que en dimensiones bajas sea lo mismo triangular a una variedad topológica que ser una variedad combinatoria va a ser suficiente para el estudio de nudos mansos en \mathbb{S}^3 .

Ya contamos con las herramientas necesarias para determinar si un complejo simplicial es efectivamente la triangulación de una esfera.

Caracterizar las triangulaciones de \mathbb{S}^1 va a ser sencillo una vez que recordemos que es la única 1-variedad topológica cerrada y conexa [19]. Luego, será también la única 1-variedad combinatoria finita, sin borde y conexa. El algoritmo entonces es el siguiente:

- Chequear que nuestro complejo sea finito y conexo.
- Comprobar que los links de todos sus vértices son triangulaciones de \mathbb{S}^0 (es decir, solo constan de dos puntos disjuntos).

Para \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^3 , si bien no contamos con un algoritmo tan simple como en el caso anterior, tenemos como herramienta a la Conjetura de Poincaré (ahora teorema [38, 39]). Como sabemos que las esferas de dimensión mayor o igual a 2 coinciden con las variedades topológicas cerradas simplemente conexas, cuando n es igual a 2 o a 3 podemos identificar a una triangulación de \mathbb{S}^n de la siguiente forma:

- Chequear que nuestro complejo sea finito, conexo y con grupo fundamental trivial.
- Comprobar que los links de todos sus vértices son triangulaciones de \mathbb{S}^{n-1} .

Si bien por medio de van Kampen o con técnicas simpliciales como el edge-path group (leer por ejemplo [45, p.98]) se pueden calcular presentaciones del grupo fundamental de complejos simpliciales, en general puede no ser sencillo darse cuenta si el grupo presentado es el trivial o no. Los siguientes resultados nos dan herramientas útiles para determinar cuando un complejo simplicial es una n-bola combinatoria sin depender de presentaciones.

Teorema 1.4.5. [26, Teorema 1.26.] *Si B es una n-bola combinatoria contenida en S , con S una n-esfera combinatoria, entonces el complejo simplicial que se obtiene retirando de S*

los símlices interiores de B forma una n -bola combinatoria. En particular, si a una n -esfera le quitamos un simplex maximal obtenemos una n -bola.

Corolario 1.4.6. [21, Proposición II. 12] *Un complejo simplicial es una n -esfera combinatoria si y solo si al quitarle un simplex maximal obtenemos una n -bola combinatoria.*

Luego, el problema de determinar si un complejo simplicial es triangulación de una esfera es, en cierta forma, equivalente a determinar cuándo es triangulación de una bola. Los siguientes dos teoremas nos dan una caracterización de estas últimas.

Teorema 1.4.7. [21, Teorema III.6.] *Toda n -bola combinatoria tiene una subdivisión colapsable.*

Teorema 1.4.8. [21, Corolario III.17.] *Sea M una n -variedad combinatoria. Entonces si M es colapsable, M es una n -bola combinatoria.*

Juntando estos resultados, tenemos que si n es menor a 3 entonces un complejo simplicial K es la triangulación de una n -bola si y solo si es una n -variedad combinatoria y posee una subdivisión colapsable. Tomar subdivisiones puede ser necesario para dimensión tres (se puede ver un ejemplo explícito en [6]) pero no lo es cuando n es menor o igual que 2. Más aún, se desprende de lo hecho por Billera y Provan en [40] que toda triangulación de una 2-bola no solo es colapsable, sino que también es 1-colapsable.

Paralelamente, existen ejemplos de triangulaciones de 3-bolas que son colapsables, pero que también colapsan a un complejo simplicial de dimensión 2 sin caras libres (y por lo tanto no colapsable) [7]. Luego, para comprobar que un complejo simplicial es colapsable nos importa el orden en el que realizamos los colapsos. Esto es problemático desde el punto de vista computacional ya que, para afirmar que un complejo simplicial de dimensión 3 no es colapsable, tenemos que intentar colapsar a un vértice de todas las formas posibles. Sin embargo, este tipo de ejemplos no existen en dimensión 2.

Proposición 1.4.9. [25, p.20] *Sea K un complejo simplicial colapsable de dimensión 2. Entonces no importa el orden en el que se realicen los colapsos, K siempre colapsa a un vértice.*

En particular, toda triangulación de una 2-bola colapsa a un vértice independientemente del orden en el que se realizan los colapsos.

Contamos entonces con una forma puramente algorítmica para comprobar que un complejo simplicial es una triangulación de \mathbb{S}^2 . Primero chequeamos que los links de todos sus vértices sean triangulaciones de \mathbb{S}^1 , luego quitamos un simplex maximal cualquiera a nuestro complejo y, por último, realizamos colapsos elementales sin tener ningún tipo de consideración hasta llegar a un vértice. Si en algún momento nos estancamos en un complejo sin caras libres, entonces nuestro complejo original no era una triangulación de \mathbb{S}^2 .

Capítulo 2

Nudos en posets

2.1. ¿Qué es un nudo en un poset?

Como vimos en el capítulo anterior, los complejos simpliciales (finitos) están relacionados con los posets (finitos). Para trabajar con nudos clásicos en el contexto de posets vamos a necesitar identificar cuándo el order complex de un poset es una triangulación de una esfera.

Definición 2.1.1. Sean T un espacio topológico y X un poset. Decimos que X es un **modelo estricto** de T (ME de T) si $\mathcal{K}(X)$ es homeomorfo a T .

Entender cuándo un subposet es un modelo estricto de una esfera va a ser simple en dimensiones bajas puesto que, como \mathcal{K} es una aplicación que preserva links, podemos trasladar todo lo hecho para esferas combinatorias:

- Los modelos estrictos de \mathbb{S}^0 son los posets conformados por dos puntos no comparables.
- Para chequear que X es un ME de \mathbb{S}^1 alcanza con comprobar que sea un poset conexo y que para cada $x \in X$, \hat{C}_x es un ME de \mathbb{S}^0 .
- Para chequear que X es un ME de \mathbb{S}^n con n igual a 2 o a 3, alcanza con comprobar que el grupo fundamental de $\mathcal{K}(X)$ es el grupo trivial y que para cada $x \in X$, \hat{C}_x es un ME de \mathbb{S}^{n-1} .

Es natural, entonces, estudiar a los nudos mansos vistos como ciertos subposets de un poset.

Definición 2.1.2. Sea X un poset, N un subposet de X . Decimos que N es un **nudo** en X si $\mathcal{K}(N)$ es un nudo en $\mathcal{K}(X)$. Decimos que N es un **enlace** en X si $\mathcal{K}(N)$ es un enlace en $\mathcal{K}(X)$. Dados N, \tilde{N} dos nudos o enlaces en X , decimos que son **equivalentes** si existe un isomorfismo de orden $\varphi : X \rightarrow X$ tal que $\varphi(N) = \tilde{N}$, y que son del mismo tipo si $\mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ son equivalentes.

En lo que resta del trabajo, se asumirá que todos los nudos son de tipo \mathbb{S}^1 , como en el caso clásico.

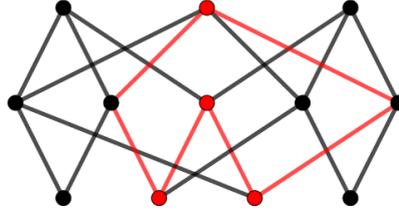


Figura 2.1: Ejemplo de un ME de \mathbb{S}^2 . Los cuatro puntos en rojo forman un nudo.

La primera observación importante a hacer es que todo nudo manso puede representarse en un poset. En efecto, si K es un nudo en un complejo simplicial L , tomando $X = \mathcal{X}(L)$ y $N = \mathcal{X}(K)$ obtenemos que $\mathcal{K}(N)$ y K son nudos equivalentes, puesto que $\mathcal{K}(N)$ no es otra cosa que ver a K en la subdivisión baricéntrica de L .

Por otro lado, como \mathcal{X} y \mathcal{K} son aplicaciones funtoriales, nuestras nociones de equivalencia también van a estar relacionadas. Si por ejemplo N y \tilde{N} son dos nudos contenidos en un poset X equivalentes vía un isomorfismo φ , entonces $\mathcal{K}(\varphi)(\mathcal{K}(N)) = \mathcal{K}(\tilde{N})$ por lo que $\mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ son equivalentes. Sin embargo, como la equivalencia en el contexto simplicial admite subdivisiones, un complejo simplicial puede tener dos nudos equivalentes que no sean equivalentes vistos en el poset de celdas. Si tomamos por ejemplo K y \tilde{K} dos nudos equivalentes de un complejo L con una cantidad distinta de vértices, los mismos vistos en L' , la subdivisión baricéntrica de L , tendrán el doble de vértices. Luego, no puede existir un automorfismo φ de L' que mande a K' en \tilde{K}' , por lo que $\mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ no pueden ser nudos equivalentes en $\mathcal{X}(L)$. En caso de que no haya que subdividir, es decir, si K y \tilde{K} son dos nudos contenidos en un complejo L tales que existe un isomorfismo simplicial $\varphi : L \rightarrow L$ tal que $\varphi(K) = \tilde{K}$, entonces vale que $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(\tilde{K})$ son dos nudos equivalentes en $\mathcal{X}(L)$ vía $\mathcal{X}(\varphi)$.

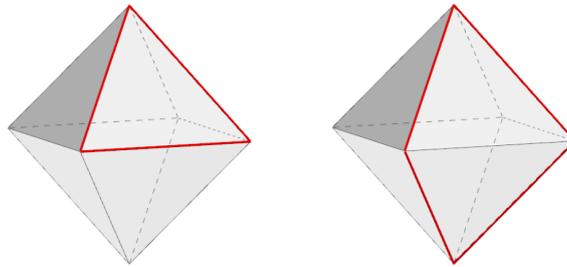


Figura 2.2: Dos nudos equivalentes en donde hay que subdividir.

Hecha esta observación, estudiar nudos en un poset va a ser muy similar a estudiar nudos en un complejo simplicial fijo (sin considerar subdivisiones). Con este enfoque, si observamos a los nudos de la figura 2.2, podemos notar que, aunque es necesario realizar una subdivisión para encontrar un isomorfismo simplicial que mande un nudo en el otro, la subdivisión no es necesaria para comprobar que son equivalentes, dado que ya son isotópicos por movimientos (ver proposición 1.1.5). Esta equivalencia se trasladó al contexto de posets de la siguiente forma:

Definición 2.1.3. Sean X un poset, N y \tilde{N} dos nudos de X de tipo \mathbb{S}^1 . Decimos que \tilde{N} se obtiene de N mediante un Δ -movimiento si existen elementos $a, b, x \in N$ para los cual existe una fence $v_0 = a, v_1, \dots, v_n = b$ de elementos de \hat{C}_x de forma que $\tilde{N} = N \cup \{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{x\}$. Al movimiento inverso lo llamaremos Δ^{-1} -movimiento. Decimos que N y \tilde{N} son **isotópicos por movimientos** si existe una secuencia finita de Δ -movimientos y Δ^{-1} -movimientos que transforman a N en \tilde{N} .

Recordemos que una **fence** es una secuencia de puntos v_0, v_1, \dots, v_n tales que cualesquiera dos consecutivos son comparables.

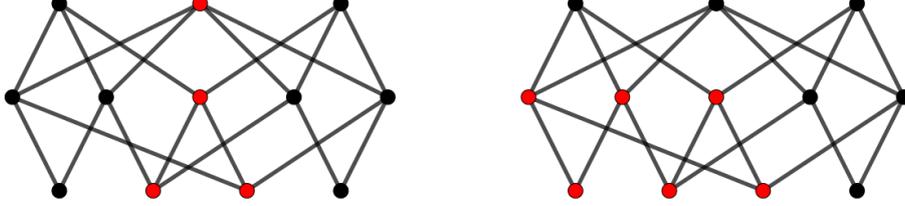


Figura 2.3: Ejemplo de un Δ -movimiento. El nudo conformado los puntos rojos en el poset de la derecha se obtiene mediante un Δ -movimiento del nudo conformado por los puntos rojos del poset de la izquierda.

Observación 2.1.4. En la definición de equivalencia combinatoria, si \tilde{N} se obtiene de N mediante un Δ -movimiento, pedimos como condición que \tilde{N} sea un nudo. En la práctica, vamos a partir de un nudo N y reemplazar un elemento x por una fence v_0, \dots, v_n en \hat{C}_x . Para que \tilde{N} , el subposet resultante, sea en efecto un nudo, tenemos que chequear que \tilde{N} es conexo y que para todo $y \in \tilde{N}$, el link de y en \tilde{N} es \mathbb{S}^0 . Es claro que independientemente de cómo tomemos la fence en \hat{C}_x , \tilde{N} resultará conexo. Sin embargo, puede suceder que no se cumpla la condición de links. Para garantizarla, cada elemento v_i , con $0 < i < n$, tiene que no ser comparable con ningún elemento de $N \setminus \{v_0, v_n, x\}$ y solo ser comparable con v_{i-1} y v_{i+1} dentro de la fence, es decir, $\{v_0, \dots, v_n\}$ tiene que ser un ME de \mathbb{D}^1 .

Proposición 2.1.5.

1. Sean K y \tilde{K} dos nudos de un complejo simplicial L isotópicos por movimientos. Entonces $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(\tilde{K})$ son dos nudos de $\mathcal{X}(L)$ isotópicos por movimientos.
2. Sean N y \tilde{N} dos nudos de un poset X isotópicos por movimientos. Entonces $\mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ son dos nudos de $\mathcal{K}(X)$ isotópicos por movimientos.

Demostración. Basta demostrar 1 y 2 para Δ -movimientos.

Sean K y \tilde{K} dos nudos de un complejo L , con $\tilde{K} = (K \setminus \{\{a, b\}\}) \cup \{\{a, c\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. Queremos ver que $\mathcal{X}(K)$ es isotópico por movimientos a $\mathcal{X}(\tilde{K})$. Como K no tiene como aristas a $\{a, c\}$ ni a $\{b, c\}$, tenemos que $\{a, b, c\}$ es un elemento de $\hat{C}_{\{a, b\}}$ que solo es comparable con los elementos $\{a\}$ y $\{b\}$ en $\mathcal{X}(K)$. Luego, $N = (\mathcal{X}(K) \setminus \{\{a, b\}\}) \cup \{\{a, b, c\}\}$ se obtiene de $\mathcal{X}(K)$ mediante un Δ -movimiento. Tomando ahora la fence $\{a\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b, c\}, \{b\}$ conformada

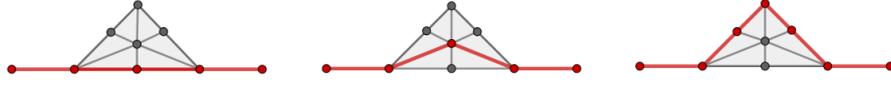


Figura 2.4: En rojo los Δ -movimientos efectuados en $\mathcal{X}(L)$, vistos en L' .

por elementos de $\hat{C}_{\{a,b,c\}}$, tenemos que $\mathcal{X}(\tilde{K})$ se obtiene de N mediante un Δ -movimiento y concluimos que $\mathcal{X}(K)$ es isotópico por movimientos a $\mathcal{X}(\tilde{K})$.

Sean ahora N y \tilde{N} son dos nudos en un poset X , tales que existen elementos $v_0, v_n, x \in N$ y una fence v_0, \dots, v_n en \hat{C}_x de forma tal que $\tilde{N} = (N \setminus \{x\}) \cup \{v_0, \dots, v_n\}$. Queremos ver que $\mathcal{K}(N)$ es isotópico por movimientos a $\mathcal{K}(\tilde{N})$. Como el link de x en N es un ME de \mathbb{S}^0 , y x es comparable con v_0 y v_n , v_1 no es un elemento de N . Luego, $\mathcal{K}(N) \cap \{v_0, v_1, x\} = \{v_0, x\}$ por lo que puedo realizar un Δ -movimiento para intercambiar a la arista $\{v_0, x\}$ por las aristas $\{v_0, v_1\}$ y $\{v_1, x\}$. Inductivamente, podemos reemplazar a la arista $\{v_i, x\}$ por las aristas $\{v_i, v_{i+1}\}$ y $\{v_{i+1}, x\}$ hasta contar con las aristas $\{v_{n-2}, v_{n-1}\}$ y $\{v_{n-1}, x\}$. En esta etapa, nuestro nudo comparte con el 2-simplex $\{v_{n-1}, v_n, x\}$ a las aristas $\{v_{n-1}, x\}$ y $\{v_n, x\}$, por lo que podemos realizar un Δ^{-1} -movimiento para obtener finalmente a $\mathcal{K}(\tilde{N})$.

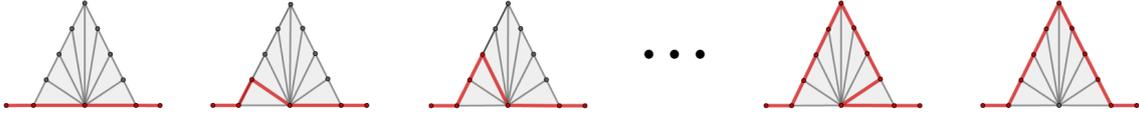


Figura 2.5: En rojo los Δ -movimientos efectuados en $\mathcal{K}(X)$.

□

En conclusión, dados N, \tilde{N} nudos de un ME de \mathbb{S}^3 y K, \tilde{K} nudos de una triangulación de \mathbb{S}^3 , vale que:

1. N y \tilde{N} equivalentes $\implies \mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ equivalentes.
2. K y \tilde{K} equivalentes **no** implica $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(\tilde{K})$ equivalentes, ya que quizás hay que subdividir.
3. N y \tilde{N} isotópicos por movimientos $\implies \mathcal{K}(N)$ y $\mathcal{K}(\tilde{N})$ isotópicos por movimientos.
4. K y \tilde{K} isotópicos por movimientos $\implies \mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(\tilde{K})$ isotópicos por movimientos.
5. K y \tilde{K} isotópicos por movimientos $\implies K$ y \tilde{K} isotópicos (por isotopía de ambiente).
6. K y \tilde{K} isotópicos (por isotopía de ambiente) no implica $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(\tilde{K})$ isotópicos por movimientos, ya que quizás hay que subdividir.

2.2. ¿Cómo se comportan los nudos triviales en un poset?

En la sección anterior, adaptamos la definición de nudo y algunas de las nociones de equivalencia al contexto de posets. Enfoquémonos ahora en los nudos triviales. Recordar que todos los nudos serán de tipo \mathbb{S}^1 .

Definición 2.2.1. *Sea X un ME de \mathbb{S}^3 . Un nudo N en X se dice trivial si $\mathcal{K}(N)$ es un nudo trivial en $\mathcal{K}(X) = \mathbb{S}^3$.*

Como vimos en el capítulo 1, una de las herramientas más importantes a la hora de identificar nudos triviales es el grupo del nudo. Es sabido (ver por ejemplo [46, Capítulo 3, Lema 10]) que si L es un complejo simplicial y K es un subcomplejo pleno, entonces el subcomplejo pleno generado por todos los vértices que no están en K es un retracto por deformación fuerte de K^c . Esto, sumado a la observación 1.2.10, nos brinda el siguiente resultado:

Proposición 2.2.2. *Sea X un poset, N un subposet de X . Entonces $\pi_1(\mathcal{K}(N^c)) = \pi_1(\mathcal{K}(N)^c)$.*

Luego, para determinar si un nudo en un poset N es el nudo trivial, basta con calcular el grupo fundamental de $\mathcal{K}(N^c)$. Veámoslo con un ejemplo sencillo.

Sea X el poset dado por el diagrama de Hasse de la figura 2.6 y N el nudo conformado por los puntos de los dos primeros niveles (marcados en rojo).

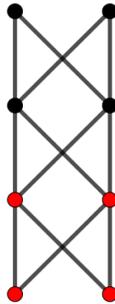


Figura 2.6

Notar que X es un ME de \mathbb{S}^3 puesto que su order complex es la triple suspensión de \mathbb{S}^0 . Además, el complemento de N es un modelo estricto de \mathbb{S}^1 , por lo que $\pi_1(\mathcal{K}(N^c)) = \mathbb{Z}$ y N es un nudo trivial.

De esta forma, el grupo de un nudo sigue siendo una buena herramienta para determinar cuando un nudo es trivial. Como repasamos en el capítulo anterior, una caracterización alternativa establece que un nudo de \mathbb{S}^3 es trivial si y solo si existe una subdivisión para la cual es el borde de un disco plano. En algunos casos, puede ser necesario subdividir y veremos un ejemplo concreto (propuesto por J. Barmak) en la sección 3.1.

Nuestro siguiente objetivo es desarrollar las herramientas necesarias para encontrar un ejemplo análogo en el contexto de posets. Para eso, primero tenemos que entender qué es ser un borde en este contexto. Recordar que un poset se dice homogéneo si todas sus cadenas maximales tienen la misma longitud. Además, es claro que si X es un poset homogéneo, entonces $\mathcal{K}(X)$ es un complejo simplicial homogéneo.

Definición 2.2.3. *Sea X un poset homogéneo. Decimos que un subposet Y está en el borde de X si $\mathcal{K}(Y) \subseteq \partial\mathcal{K}(X)$. Decimos que Y es el borde de X si $\mathcal{K}(Y) = \partial\mathcal{K}(X)$.*

Notar que si X es un ME de una n -variedad combinatoria, entonces un elemento x está en el borde si y solo si \hat{C}_x es un ME de una $(n-1)$ -bola combinatoria.

El borde de un poset homogéneo no siempre es un subposet. Si por ejemplo X es un conjunto totalmente ordenado con tres elementos, entonces X es un ME de \mathbb{D}^2 y todos sus elementos están en su borde. Sin embargo, el borde de $\mathcal{K}(X)$ es una 1-esfera y no hay en X subposets que sean modelos de \mathbb{S}^1 . Un problema distinto es determinar, dado un subposet N de X , cuándo N es el borde de otro subposet. Para que esto ocurra, una condición necesaria es que $\mathcal{K}(N)$ sea el borde de un subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$. El siguiente resultado, sumado a la observación 1.2.10, nos garantiza que, si N es un ME de una variedad combinatoria de codimensión uno, entonces también es una condición suficiente.

Lema 2.2.4. *Sea L una variedad combinatoria con o sin borde de dimensión n , M una subvariedad de dimensión n tal que \dot{M} es un subcomplejo pleno. Entonces M también es un subcomplejo pleno.*

Demostración. Sea σ un simplex de L tal que todos sus vértices pertenecen a M . Queremos ver que σ es un simplex de M . Si un vértice v de σ está en el interior de M , entonces $lk_M(v)$ es una $(n-1)$ -esfera. Notar que v también está en el interior de L (ya que M y L tienen la misma dimensión) y que $lk_M(v) \subseteq lk_L(v)$. Como una esfera no puede contener propiamente a otra de la misma dimensión, se tiene que $lk_M(v) = lk_L(v)$, por lo que $st_M(v) = st_L(v)$. Luego, $\sigma \in st_L(v) = st_M(v)$ y σ es un simplex de M . Si ninguno de los vértices de σ están en el interior de M , eso quiere decir que están todos en \dot{M} , por lo que, al ser \dot{M} un subcomplejo pleno, tenemos que σ es un simplex de \dot{M} y por lo tanto también lo es de M . \square

Corolario 2.2.5. *Sea X un ME de una n -variedad combinatoria y $N \subset X$ un ME de una $(n-1)$ -variedad combinatoria. Si $\mathcal{K}(N)$ es el borde de una subvariedad de $\mathcal{K}(X)$, M , entonces existe un subposet $Y \subseteq X$ tal que $\mathcal{K}(Y) = M$.*

Demostración. Bajo las hipótesis del enunciado, como $\mathcal{K}(N)$ es una variedad de dimensión $(n-1)$, M tiene que tener dimensión n . Como $\dot{M} = \mathcal{K}(N)$ es un subcomplejo pleno (observación 1.2.10), por el lema anterior M resulta un subcomplejo pleno. Luego, existe $Y \subseteq X$ tal que $\mathcal{K}(Y) = M$. \square

Notar que si X es un ME de \mathbb{S}^2 y N es un nudo de X , por el teorema de Schönflies $\mathcal{K}(N)$ parte a $\mathcal{K}(X)$ en dos discos que tienen como borde a $\mathcal{K}(N)$. Por el corolario anterior, los discos tienen que ser el orden complejo de un subposet de X . Luego, contamos con el siguiente resultado:

Corolario 2.2.6. *Si X es un modelo estricto de \mathbb{S}^2 y N es un nudo de X , entonces existe $D \subset X$ un ME de \mathbb{D}^2 cuyo borde es N .*

Es claro que el resultado es falso si pedimos que X sea un modelo estricto de \mathbb{S}^3 y que N sea un nudo cualquiera. Si pedimos en cambio que N sea un nudo trivial, incluso aunque hallemos un buen candidato es difícil comprobar que N no cumple la condición de borde. Para abordar este problema, en el capítulo 3 presentaremos un algoritmo que, dado X un poset y N un nudo trivial de X , encuentra todos los subposets de X que son un ME de una variedad combinatoria y que además tienen a N como borde. Si ninguno de estos subposets es un ME de un disco, habremos logrado confirmar lo que buscábamos.

Identificar modelos estrictos de \mathbb{D}^2 es fácil una vez que recordamos que, por lo hecho en el capítulo anterior, un complejo simplicial es una triangulación de \mathbb{D}^2 si y solo si es una variedad combinatoria y es 1-colapsable. Luego, un poset es un ME de \mathbb{D}^2 si y solo si es un ME de una variedad combinatoria y es colapsable. Sin embargo, como no sabemos a priori si importa el orden en el que realizamos los colapsos, para descartar que un poset sea un modelo estricto de \mathbb{D}^2 tenemos que intentar colapsarlo de todas las formas posibles, lo que resulta muy costoso computacionalmente. Por lo tanto, será importante demostrar que, en realidad, no importa el orden en el que realizamos los colapsos. Las definiciones y resultados que siguen van en esa dirección.

Definición 2.2.7. *Sea L un complejo simplicial conexo de dimensión menor o igual a 2. Decimos que L es una **q-bola** si:*

(i) *L es un punto o puede descomponerse como una unión finita de 1-bolas y 2-bolas de forma que la intersección de dos bolas cualesquiera es, a lo sumo, un vértice perteneciente al borde de ambas bolas.*

(ii) $H_1(L) = 0$

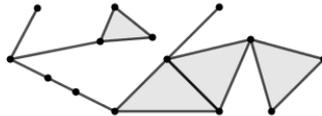


Figura 2.7: Ejemplo de una q-bola.

Observación 2.2.8. Notar que si L es una q -bola y $v \in L$ es un vértice que está en el borde de una única 2-bola o 1-bola, entonces su link es una 1-bola o una 0-bola y en particular es fuertemente colapsable. Recíprocamente, si un vértice de L tiene link fuertemente colapsable entonces el vértice está en el borde de una única bola. Esto es así ya que si estuviera en más de una bola su link no sería conexo y si estuviera en el interior de una bola, su link sería una esfera.

Lema 2.2.9. *Sea L una q -bola. Si $L \neq *$, entonces existe un $v \in L$ tal que v está en el borde de una única bola.*

Demostración. Supongamos que no existe un vértice que esté en el borde en una única bola. Nuestro objetivo va a ser construir un 1-ciclo que no sea borde de una 2-cadena.

Tomemos v_0 un vértice en el borde de una bola B_0 . Como no pertenece a una única bola, existe $B_1 \neq B_0$ que también contiene a v_0 en el borde. Si B_1 es una 2-bola, tomo v_1 un vértice en el borde de B_1 y adyacente a v_0 . Si B_1 es una 1-bola, tomo v_1 como el otro extremo de esa bola. Por hipótesis, existe $B_2 \neq B_1$ que también contiene a v_1 en el borde y podemos continuar inductivamente hasta que, por finitud, construimos un ciclo simple de aristas en L contenido en 1-bolas y bordes de 2-bolas que no esté contenido en una única bola.

Para terminar la demostración, veamos que el ciclo no es un borde de una 2-cadena, contradiciendo el hecho de que $H_1(L) = 0$. Si una de las aristas del ciclo está en una 1-bola, es claro que el ciclo no puede ser borde de una 2-cadena. Podemos suponer entonces que el ciclo está contenido solamente en bordes de 2-bolas. Supongamos que el ciclo es el borde una 2-cadena c . Si tomamos una arista del ciclo, tiene que estar en el borde de una única 2-bola B y ser arista de un 2-simplex σ de la 2-cadena c . Notar que como σ y B comparten una arista y las bolas de L se intersecan sólo en vértices, σ tiene que estar contenido en B . Además, si tomo otra de las dos aristas de σ , o bien es parte del ciclo (por lo que es borde de la 2-cadena c), o bien existe otro 2-simplex σ' de c que contiene a la arista. Notar que en ese caso σ' también está contenido en B . Como σ' es parte de la 2-cadena c , sus otras aristas o están en el ciclo o existe otro 2-simplex σ'' de c que interseca a σ' en una arista.

Siguiendo inductivamente, conseguimos una subcadena de c que está contenida en una única bola B y cuyo borde está contenido en el ciclo original. Como el borde una cadena es un ciclo, y un ciclo no contiene propiamente a otro ciclo, el borde de la subcadena debe ser todo el ciclo original. Esto es absurdo ya que entonces el ciclo original estaría enteramente contenido en B .

□

Observación 2.2.10. *Antes del siguiente lema, notemos que por la observación 1.4.2, dado un 1-simplex $\sigma = \{x_1, x_2\}$ de una 2-bola B , entonces σ está en el borde de B si y solo si x_1 está en el borde de $lk_B(x_2)$.*

Lema 2.2.11. *Sea L una q -bola tal que L colapsa a un complejo simplicial M . Entonces M es una q -bola.*

Demostración. Notar que la condición en el primer grupo de homología se cumple por ser un colapso un retracts por deformación fuerte, por lo que solo hay que chequear que se pueda descomponer como una unión de bolas pegadas en vértices. Basta probarlo para colapsos elementales.

Sea σ una cara libre y τ el único simplex que contiene a σ . Como τ tiene más de un vértice, tiene que estar contenido en una única bola B , por lo que lo mismo pasa con σ . Luego, alcanza con ver que $\tilde{B} := B \setminus \{\sigma, \tau\}$ es una q -bola, teniendo el cuidado de chequear que todos los vértices que estaban en el borde de B y no fueron eliminados en el colapso siguen estando en el borde de las bolas que componen a \tilde{B} . Además, si B es una 1-bola es claro que \tilde{B} es o bien un punto o bien una 1-bola más chica, por lo que podemos asumir que B es una 2-bola. Luego, σ es un 1-simplex de la forma $\{x_1, x_2\}$ y τ es un 2-simplex de la forma $\{x_1, x_2, v\}$. Además, σ está contenido en el borde de B por ser una cara libre. Notar también que, dado w un vértice de B que no esté en τ , tenemos que $lk_B(w) = lk_{\tilde{B}}(w)$, por lo que todos estos links serán 1-esferas o 1-bolas.

Vamos a separar en casos dependiendo de si las otras aristas de τ están o no en el borde de B .

Si todas las aristas de τ están en el borde de B , es fácil ver que $B = \tau$, por lo que \tilde{B} es una 1-bola. Como queremos que los vértices del borde de B sigan estando en bordes de bolas, vamos a pensar a \tilde{B} como dos 1-bolas pegadas en v .

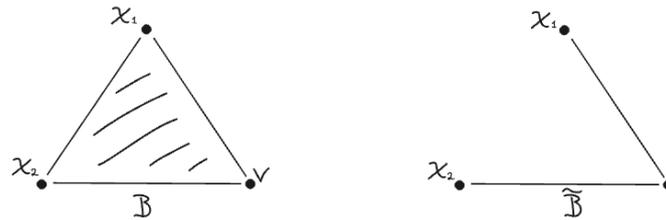


Figura 2.8

Si τ tiene una sola arista en el interior de B (supongamos por ejemplo que es la arista $\{x_2, v\}$) vamos a ver que \tilde{B} es una 2-bola pegada en v a una 1-bola (ver figura 2.9).

Como $\{x_1, v\}$ y $\{x_1, x_2\}$ están en el borde de B , usando la observación 2.2.10 podemos concluir que $lk_B(x_1) = \{\{x_2\}, \{v\}, \{x_2, v\}\}$. Luego, $lk_{\tilde{B}}(x_1) = \{v\}$, por lo que podemos hacer otro colapso elemental y llamar B' a $\tilde{B} \setminus \{\{x_1\}, \{x_1, v\}\}$. Nos falta ver que B' es una 2-bola.

Como en dimensión 2 no importan los órdenes de los colapsos, B' es un complejo colapsable. Además, usando que $\{x_2, v\}$ es una arista en el interior de B es fácil ver que los links de x_2 y v en B' son 1-bolas, por lo que todos sus links son 1-bolas o 1-esferas y por lo tanto B' es una 2-bola.

Por último, notar que x_1, x_2 y v están en los bordes de las bolas que componen a \tilde{B} , por

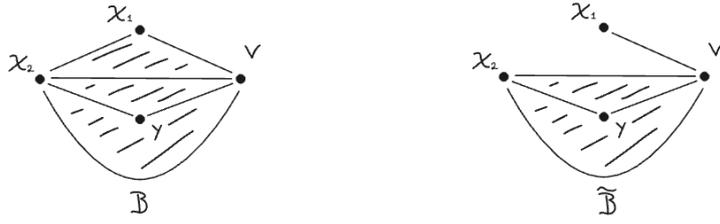


Figura 2.9

lo que todos los vértices que eran borde en B lo siguen siendo en \tilde{B} .

Nos queda el caso en el que τ tiene dos aristas en el interior de B . Nuestro objetivo va a ser probar que \tilde{B} es una 2-bola cuando v es un punto en el interior de B y dos 2-bolas pegadas en v cuando es un punto del borde.

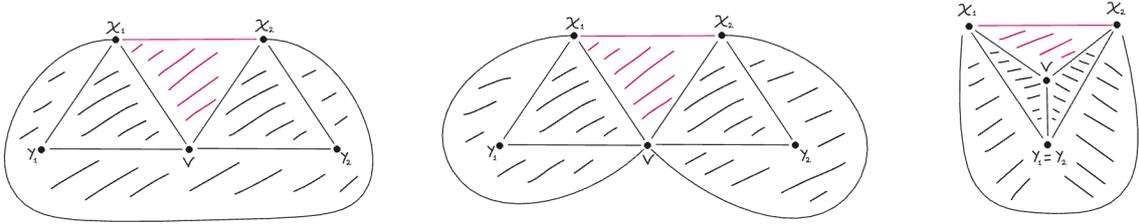


Figura 2.10: Posibles formas que puede adoptar B . En magenta, σ y el interior de τ .

Igual que antes, es fácil ver que los links de x_1 y x_2 en \tilde{B} son 1-bolas. Si v es un punto interior de B , entonces el links de v en \tilde{B} se obtiene de retirar una arista a una 1-esfera, por lo que también es una 1-bola y \tilde{B} resulta una 2-bola. Supongamos entonces que v está en el borde de B .

Como $\{x_1, v\}$ y $\{x_2, v\}$ son interiores y v esta en el borde de B , tenemos que $lk_{\tilde{B}} v$ es una unión disjunta de 1-bolas, en donde una contiene a x_1 y la otra contiene a x_2 .

Llamemos V_i al conjunto de vértices de \tilde{B} distintos de v para los cuales existe un camino de aristas de \tilde{B} que los une a x_i sin pasar por v . Es fácil ver que todos los puntos de $\tilde{B} \setminus \{v\}$ están en V_1 o en V_2 . Además, vale que $V_1 \neq V_2$. De no ser así, debería existir un camino en \tilde{B} de x_1 a x_2 sin pasar por v . Agregando al final del camino las aristas que unen a x_2 con v y a v con x_1 , obtenemos un 1-ciclo en \tilde{B} . Como $H_1(\tilde{B}) = H_1(B) = 0$, el ciclo tiene que ser el borde de una 2-cadena contenida en \tilde{B} . Pero el link de v en la 2-cadena tendría que contener a x_1 y x_2 y ser conexo, lo que es absurdo.

Llamemos B_i al subcomplejo de \tilde{B} generado por los vértices de $V_i \cup \{v\}$. Notemos que:

- Dado $\tilde{\sigma}$ un simplex cualquiera de \tilde{B} , entonces $\tilde{\sigma}$ está en B_i para algún i y si $\tilde{\sigma} \neq \{v\}$ entonces no está en B_1 y B_2 simultáneamente.

- $lk_{B_i}(v)$ es la 1-bola de $lk_{\tilde{B}}(v)$ que contiene a x_i y para todo $w \neq v$, si $w \in B_i$ entonces $lk_{B_i}(w) = lk_{\tilde{B}}(w)$.

Luego, tenemos que $\tilde{B} = B_1 \cup B_2$, con B_1 y B_2 variedades combinatorias de dimensión 2 pegadas en v . Además, usando nuevamente que B es colapsable y que en dimensión 2 no importa el orden en el que se hagan los colapsos, es fácil ver que B_1 y B_2 son dos complejos colapsables, por lo que \tilde{B} es una unión de dos 2-bolas pegadas.

Por último, como x_1 , x_2 y v están en los bordes de las bolas que componen a \tilde{B} , todos los vértices que estaban en el borde de B siguen en bordes de bolas.

□

Observación 2.2.12. Notar que, como los 1-colapsos son casos particulares de los colapsos usuales, el lema 2.2.11 sigue valiendo cuando L 1-colapsa a M .

Proposición 2.2.13. *Toda q -bola es 1-colapsable. Además, no importa el orden en el que realizamos los colapsos.*

Demostración. Si L es una q -bola, por el lema 2.2.9 sumado a la observación 2.2.8, existe un vértice cuyo link es fuertemente colapsable. Por el lema 2.2.11, luego de realizar cualquier 1-colapso vamos a obtener o bien un punto, o bien una q -bola con un vértice menos. Haciendo inducción en la cantidad de vértices de L concluimos la demostración.

□

El teorema 1.3.10, sumado a que toda 2-bola es también una q -bola, nos brinda el siguiente resultado.

Corolario 2.2.14. *Todo ME de \mathbb{D}^2 es colapsable sin importar el orden de los colapsos.*

Ya contamos con todas las herramientas teóricas necesarias para comprobar si un nudo en un poset es el borde de un ME de \mathbb{D}^2 . Estudiemos ahora como encontrar ejemplos de nudos en posets.

2.3. ¿Cómo pensar en ejemplos?

En el contexto simplicial, una forma usual para encontrar triangulaciones de \mathbb{S}^3 que contengan a un nudo en concreto como subcomplejo es partir primero de una estructura simplicial de \mathbb{D}^3 que contenga al nudo como subcomplejo y luego conificar su borde [31, 6]. Tomando ahora el poset de celdas, conseguimos ejemplos de nudos en posets. Obtener ejemplos de esta forma puede ser problemático ya que suelen contar con muchos elementos. Para encontrar ejemplos más chicos podemos imitar la construcción pero con CW-complejos regulares.

Veámoslo con un ejemplo sencillo:

Ejemplo 2.3.1. *Supongamos que queremos encontrar un poset que contenga un enlace trivial de dos componentes. Podemos partir de dos estructuras regulares de \mathbb{S}^1 disjuntas, a las que les adjuntamos dos 1-celdas, cuatro 2-celdas y una 3-celda como se ve en la figura 2.11 para formar un cilindro relleno.*

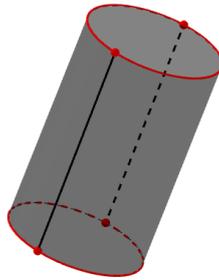


Figura 2.11: Una estructura regular de \mathbb{D}^3 que contiene un enlace trivial de dos componentes.

Adjuntando una 3-celda que tenga como borde al borde del cilindro, obtenemos una estructura celular de \mathbb{S}^3 cuyo poset de celdas tiene como diagrama de Hasse el de la figura 2.12.

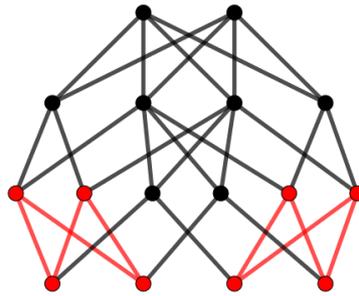


Figura 2.12: Un modelo estricto de \mathbb{S}^3 . Los elementos en rojo forman un enlace trivial de dos componentes.

Notar que, trabajando con CW-complejos regulares, en el último paso podemos adjuntar una 3-celda en lugar de conificar, lo que ahorra muchos elementos en el poset de celdas.

Una pregunta inmediata es si existen ejemplos de nudos en posets que no puedan obtenerse mediante este método. La siguiente proposición nos brinda una solución parcial.

Proposición 2.3.2. *Sea X un ME de una variedad combinatoria sin borde de dimensión n . Entonces existe un CW-complejo regular L tal que $\mathcal{X}(L) = X$.*

Demostración. Por la proposición 1.2.8, tenemos que comprobar que para cada $x \in X$ no minimal, \hat{U}_x es un modelo estricto de una esfera. Vamos a hacer inducción en n .

Si $n = 1$, entonces X es homogéneo de dimensión 1, por lo que todos sus puntos son minimales o maximales. Luego, si x no es minimal, entonces $\hat{U}_x = \hat{C}_x$ es un modelo estricto de \mathbb{S}^0 por ser X ME de una variedad combinatoria sin borde.

Si $n > 1$, sabemos que \hat{U}_x es un ME de \mathbb{S}^{n-1} para todo x maximal. Si x no es maximal, entonces existe y un elemento maximal tal que $x \in \hat{U}_y$, por lo que $\hat{U}_x \subseteq \hat{U}_y$. Como \hat{U}_y es un ME de una variedad combinatoria de dimensión $n - 1$, concluimos por hipótesis inductiva que \hat{U}_x es un modelo estricto de una esfera. \square

Notar que si X es un ME de una n -esfera combinatoria, entonces para todo $x \in X$ vale que C_x es un ME de una n -bola combinatoria con borde \hat{C}_x , por lo que $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ se obtiene de $\mathcal{K}(X)$ retirando los símlices interiores de una n -bola combinatoria y utilizando el teorema 1.4.5, concluimos que $X \setminus \{x\}$ es un ME de una n -bola combinatoria. Luego, si X es un modelo estricto de una n -esfera combinatoria y $x \in X$ es un elemento maximal, $X \setminus \{x\}$ es un modelo estricto de \mathbb{D}^n que sigue siendo el complejo de celdas de un CW-complejo regular. Por lo tanto, todo modelo estricto de una n -esfera combinatoria puede hallarse a partir de una estructura regular de \mathbb{D}^n , L , añadiendo una n -celda cuyo borde sea el borde de L y tomando su poset de celdas.

Observación 2.3.3. Las hipótesis de la proposición no se pueden relajar:

1. Si pedimos que X sea ME de una variedad sin borde, pero quitamos la condición de que sea combinatoria, de forma análoga a lo realizado en la sección 1.4 para el caso simplicial, podemos usar el teorema de la suspensión doble para encontrar un ME de \mathbb{S}^5 que no sea el poset de celdas de un CW-complejo regular. Más concretamente, podemos tomar a M como un ME de una esfera homológica no trivial de dimensión 3 y a X como $M \otimes \mathbb{S}^0 \otimes \mathbb{S}^0$ para obtener un modelo estricto de \mathbb{S}^5 que no sea el poset de celdas de ningún CW-complejo regular.
2. Si pedimos que X sea ME de una variedad combinatoria con o sin borde, podemos tomar como X a un conjunto totalmente ordenado con $n+1$ elementos para obtener un ME de una n -bola combinatoria que no sea un poset de celdas. De todas formas, imitando la demostración de la proposición 2.3.2 podemos concluir que, si X es una variedad combinatoria (con o sin borde) entonces para todo $x \in X$ vale que o bien \hat{U}_x es un ME de una esfera combinatoria, o bien \hat{U}_x es un ME de una bola combinatoria.

Sabemos entonces que todo modelo estricto de \mathbb{S}^3 puede obtenerse a partir de una estructura celular de \mathbb{D}^3 a la que se le agrega una 3-celda y se le toma el poset de celdas. Sin embargo, en el método descrito al comienzo del capítulo el nudo de interés es un subcomplejo, por lo que visto en el poset de celdas estará contenido en los dos primeros niveles. Esto no siempre es así. Puede suceder que un ME de \mathbb{S}^3 contenga un enlace que no esté contenido en los dos primeros niveles y que no exista ningún enlace del mismo tipo en los dos primeros niveles. Igual que en el ejemplo 2.3.1, veámoslo para un enlace trivial de dos componentes.

Ejemplo 2.3.4. *Vamos a construir a nuestro poset a partir de un CW-complejo regular L . Si bien queremos que el enlace no sea un subcomplejo de L , por la propia definición de nudo en un poset vamos a necesitar que sí sea un subcomplejo de su subdivisión baricéntrica. Podemos pensar entonces que en la subdivisión baricéntrica de L hay un enlace como en la figura 2.13.*

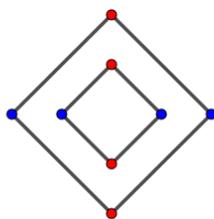


Figura 2.13

Como queremos que L no tenga enlaces de dos componentes en el 1-esqueleto, supongamos que los vértices azules en la figura 2.13 son baricentros de 1-celdas de L y que los vértices en rojo son baricentros de 2-celdas de L .

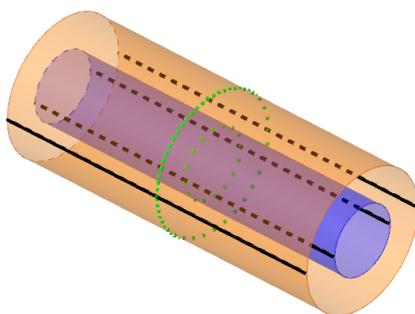


Figura 2.14: Parte de la estructura celular de L . En verde lo que será, después de subdividir baricéntricamente, el enlace de la figura 2.13.

Con esta idea en mente, comencemos a definir la estructura celular de L . Para asegurarnos de que no tenga enlaces con dos componentes como subcomplejos, podemos partir únicamente de dos 0-celdas.

Adjuntando ahora cuatro 1-celdas y cuatro 2-celdas podemos obtener el complejo que se ve en la figura 2.15. Notar que el mismo puede obtenerse “apretando” en los bordes de los

cilindros que se observan en la figura 2.14. Notar también que las 2-celdas que se ven en naranja en la figura 2.15 forman un \mathbb{S}^2 y que lo mismo sucede con las 2-celdas azules.

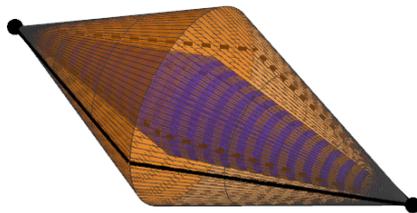


Figura 2.15

Si pensamos al complejo embebido en \mathbb{R}^3 como se ve en la figura 2.15, la región contenida entre las 2-celdas naranjas y las 2-celdas azules no es homeomorfa a \mathbb{D}^3 . Para corregir esto, terminamos de construir el 2-esqueleto de L adjuntando dos 2-celdas (en rosa en la figura 2.16), dividiendo así a esta región en dos regiones, cada una homeomorfa a \mathbb{D}^3 .

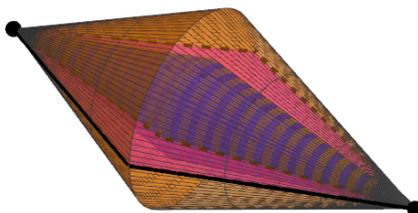


Figura 2.16

Finalmente, extendemos a una estructura celular de \mathbb{D}^3 adjuntando una 3-celda con borde dado por las 2-celdas azules, y dos 3-celdas que rellenan las regiones entre las celdas azules y naranjas, para luego extender a una estructura celular de \mathbb{S}^3 adjuntando una 3-celda con borde dado por las 2-celdas naranjas. El poset de celdas de este complejo tiene el diagrama de Hasse de la figura 2.17.

Observación 2.3.5. Si bien los ejemplos 2.3.1 y 2.3.4 fueron construidos de manera independiente, una vez construidos podemos notar que sus diagramas de Hasse son muy similares (ver figura 2.18). Más aún, si llamamos X e Y a los posets obtenidos, entonces vale que $X = X_{\leq 2} \otimes \mathbb{S}^0$ e $Y = \mathbb{S}^0 \otimes X_{\leq 2}$. En particular, X e Y tienen el mismo orden complex.

Como existe una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos de un poset y los subcomplejos plenos de su orden complex (observación 1.2.10), dos posets con el mismo orden complex tendrán los mismos modelos estrictos como subposets, los mismos tipos de nudos y los mismos tipos de enlaces. Surge entonces la pregunta: Dados dos posets con el mismo

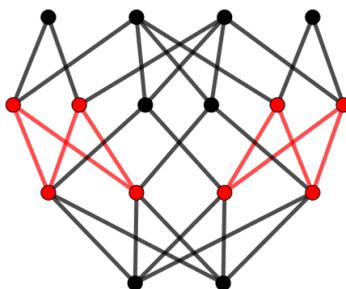


Figura 2.17: Un ME de \mathbb{S}^3 . En rojo un enlace trivial con dos componentes.

order complex, ¿será verdad que no solo tienen los mismos tipos de nudos, sino que además estos tienen las mismas clases de equivalencia? Profundizaremos en este problema en sección 2.4.

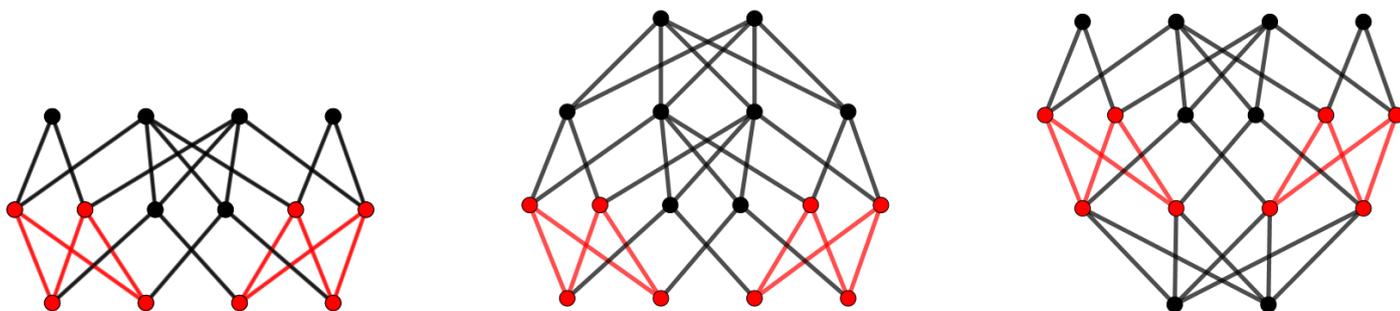


Figura 2.18: Los diagramas de Hasse de $X_{\leq 2}$, X e Y

Ya comprobamos que no todo enlace en un poset tiene a otro del mismo tipo en los primeros dos niveles. A pesar de esto, partir de pensar en la estructura celular de la cual proviene el poset sigue siendo nuestra mejor herramienta para buscar ejemplos. Sin embargo, es difícil buscar ejemplos de esta forma cuando los nudos tienen elementos en muchos niveles distintos. Para el caso especial en donde los nudos son minimales, entonces contamos con el siguiente resultado.

Proposición 2.3.6. *Sea X un modelo estricto de \mathbb{S}^3 , N un nudo de X con solo cuatro elementos. Entonces existe \tilde{N} un nudo de X con solo cuatro elementos, isotópico por movimientos a N , de forma que sus elementos tienen solo dos alturas diferentes en X . Si además N no es un nudo trivial, podemos pedir que \tilde{N} esté conformado por dos elementos minimales y dos elementos maximales de X .*

Demostración. Si $h(x) < h(y)$ para x, y elementos maximales de N , podemos tomar un elemento $z \in F_x$ con la misma altura que y , que existe por ser X un poset homogéneo. Luego, $(N \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ es un nudo que se obtiene de N mediante un Δ -movimiento y cuyos maximales

tienen la misma altura en X . Razonando de forma análoga para elementos minimales de N concluimos que, después de a lo sumo dos Δ -movimientos, podemos obtener un nudo isotópico por movimientos a N conformado por cuatro elementos y contenido únicamente en dos niveles.

Supongamos ahora que N no es un nudo trivial. Sean x e y los elementos maximales de N . Si por ejemplo x no es un elemento maximal de X , podemos tomar $z \in F_x$ un elemento maximal de X . Notar que z no puede ser comparable con y , ya de que ser así $N \cup \{z\}$ sería un ME de \mathbb{D}^2 con borde N . Luego, $(N \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ es un nudo que se obtiene de N mediante un Δ -movimiento. Razonando de forma análoga para los elementos minimales, obtenemos un nudo isotópico por movimientos a N conformado solo por elementos maximales y minimales de X . \square

La proposición anterior no sería de interés de no ser porque, dado K un nudo en un complejo simplicial, se puede encontrar un nudo en un poset, N , de forma que $\mathcal{K}(N)$ y K sean equivalentes y N tenga cuatro elementos. Si bien en el capítulo 3 mostraremos un ejemplo concreto para el nudo trébol, terminemos esta sección dando las ideas necesarias para encontrar este tipo de nudos.

Comencemos por entender el caso simplicial. En [8], R.H. Bing mostró que para cualquier nudo manso K de \mathbb{S}^3 , existe una triangulación de \mathbb{S}^3 que tiene un nudo equivalente a K conformado únicamente por 3 vértices y 3 aristas, pero su construcción no es buena para conseguir ejemplos concretos. El primer ejemplo explícito de un nudo no trivial con tres vértices lo dio M. Hachimori en [23] como complemento a lo hecho en [24]. El mismo consta de 381 vértices y 1928 símplices maximales y se basa fuertemente en lo hecho por R. Furch en [20], en donde dio una construcción para obtener triangulaciones de \mathbb{D}^3 que contengan nudos con una única arista en el interior. Dado K un nudo manso, la construcción parte de una triangulación de \mathbb{D}^3 conformada por una pila de cubos lo suficientemente grande como para contener un nudo equivalente a K , construido exclusivamente por aristas de cubos. Luego, si retiramos cubos escarbando en la bola desde el exterior, siguiendo a las aristas del nudo, hasta que no podamos continuar sin perder la propiedad de triangular a \mathbb{D}^3 , tenemos que solo una arista del nudo queda en el interior de la 3-bola (ver figura 2.19). Si realizamos una isotopía para llevar el borde a \mathbb{S}^2 , toda la complejidad del nudo queda condensada en la arista interior, por lo que si ahora conificamos el borde de la bola, obtenemos un nudo equivalente a K conformado únicamente por tres vértices y tres aristas.

Para conseguir ejemplos en posets, podemos pensar en la triangulación de la bola de Furch como si fuera un CW-complejo regular y en lugar de conificar su borde añadir una 3-celda. Luego, obtenemos un nudo N en el poset de celdas, conformado por la arista interior, sus dos vértices y la 3-celda final, de forma que $\mathcal{K}(N)$ y K son equivalentes. El principal problema de esta primera construcción es que nos brinda ejemplos con muchos elementos.

Volviendo al caso simplicial, en [31] F.H. Lutz presentó una triangulación de \mathbb{S}^3 conformada por 13 vértices y 56 símplices maximales que contiene un nudo trébol de solo tres vértices

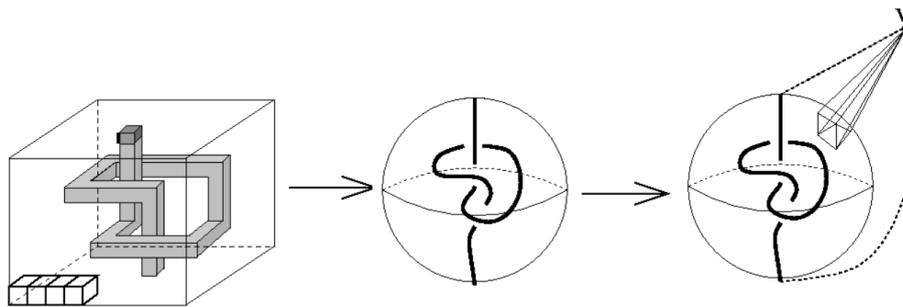


Figura 2.19: Imagen obtenida de [23]

mediante un método que luego replicó junto a B. Benedetti en [6] para otro tipo de nudos. Dado K un nudo manso, en lugar de partir de una triangulación de \mathbb{D}^3 que contenga un nudo equivalente a K , se parte de un embedding (no necesariamente lineal) de K en \mathbb{R}^3 . Colocando tres vértices dentro de la curva podemos pensar que nuestro nudo está compuesto por tres arcos. Si añadimos símlices para cubrir los arcos, obtenemos un complejo homeomorfo a un toro sólido “apretado” en tres vértices (ver figura 2.20).

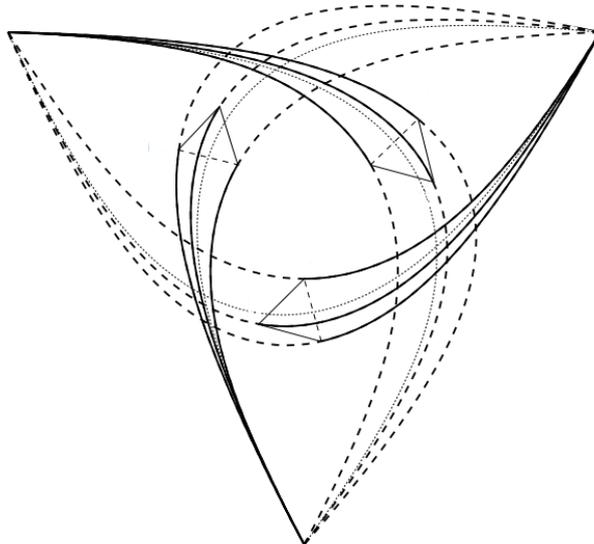


Figura 2.20: Imagen obtenida de [31]

El engrosamiento cumple una doble función. No solo protege a las aristas del nudo de identificaciones indeseadas en futuros pasos, si no que también, al poder poner en el borde del toro muchos vértices, nos permite trabajar con el nudo más fácilmente. Añadiendo 2-símlices a modo de membranas, podemos extender a nuestro complejo a uno contráctil, por lo que añadiendo conos podemos extenderlo a una 3-bola y, conificando su borde, a una

3-esfera.

Si bien este método requiere mucho esfuerzo manual, Lutz logra encontrar con él una 3-esfera compuesta por 17 vértices y 74 símlices maximales. Para achicar más al complejo, se le puede pedir a una computadora que realice bistellar flips de forma aleatoria, con la restricción de no modificar a los símlices que tienen aristas en el nudo. Una introducción a los bistellar flip puede encontrarse, por ejemplo, en [44].

Trasladar estas ideas al contexto de CW-complejos regulares (o lo que es lo mismo, al contexto de posets) no tiene complicaciones en los primeros pasos. Partimos de un embedding en \mathbb{R}^3 y añadimos dos 0-celdas para formar dos arcos. Luego engordamos a los arcos y extendemos la estructura para que sea contráctil. Si ahora imitamos a Lutz y extendemos con conos, tenemos el inconveniente de que añadimos muchos elementos al poset de celdas del complejo. Esto no sería tan problemático de no ser porque en este contexto no contamos con un programa computacional que reduzca la cantidad de elementos del complejo, preservando al nudo. Si por el contrario queremos extender al complejo a una 3-bola sin usar conos, vamos a necesitar de mucho trabajo manual.

La propuesta de esta tesis para encontrar ejemplos de nudos minimales es tomar de Furch la idea de comenzar con una triangulación que ya contenga a un nudo y de Lutz la idea de engordar arcos. Partiendo de un CW-complejo regular que contenga a un nudo K en su 1-esqueleto, podemos modificar su estructura celular para pensar a K como un complejo con solo dos 0-celdas y dos 1-celdas, añadiendo celdas para engordar los arcos que componen a K de tal forma que la cantidad de celdas que quedan por fuera del engordado coincida con la cantidad de celdas del complejo original que no formaban parte de K .

Veamos esta idea con un ejemplo simple. Supongamos que parte de nuestra estructura de complejo se ve como en la figura 2.21 y queremos fusionar las dos 1-celdas que tienen todos sus vértices azules.

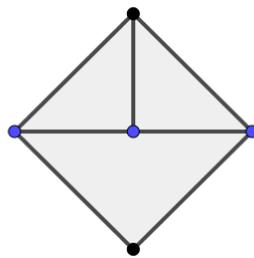


Figura 2.21

Podemos comenzar por considerar a las dos 1-celdas como si fueran una sola (la línea punteada en azul de la figura 2.22) y “engordar” la curva añadiendo una 0-celda, tres 1-celdas y dos 2-celdas, para luego añadir el resto de las celdas imitando a la estructura original.

Notar que la cantidad de celdas que quedan por fuera del engordado coincide con la cantidad de celdas que no tenían todos sus vértices de color azul.

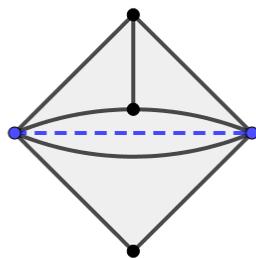


Figura 2.22

Para complejos de dimensión 2 en general, el engordado va a tener una 1-celda interior (nuestra curva de interés) y dos 2-celdas interiores, y la estructura del borde estará determinada por las celdas que tengan como caras a las aristas a fusionar.

Para complejos de dimensión 3, habrá una 1-celda, dos 2-celdas y dos 3-celdas en el interior del engordado y, al igual que en dimensión 2, la estructura del borde estará determinada por las celdas que tengan como caras a las aristas a fusionar.



Figura 2.23: Ejemplo de la forma que puede tomar un engordado en dimensión 3.

En el capítulo 3 veremos un ejemplo de un modelo estricto de \mathbb{S}^3 con un nudo no trivial con solo cuatro elementos, construido mediante este método.

2.4. ¿Cómo se relacionan posets con el mismo order complex?

Sean X e Y dos posets tales que $\mathcal{K}(X)$ es isomorfo a $\mathcal{K}(Y)$. Tomamos $\varphi : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ un isomorfismo simplicial. Como un morfismo simplicial es en particular una función entre los vértices (y los vértices de $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son los elementos de X e Y), φ induce una biyección $\tilde{\varphi}$ de conjuntos entre X e Y tal que $\mathcal{K}(\tilde{\varphi}) = \varphi$. Luego, si N es un nudo de X , es claro que $\tilde{\varphi}(N)$ es un nudo de Y y que $\mathcal{K}(N)$ es equivalente a $\mathcal{K}(\tilde{\varphi}(N))$ si identificamos $\mathcal{K}(X)$ con $\mathcal{K}(Y)$ vía φ .

Notar que si $\tilde{\varphi}$ es una función inducida por un isomorfismo simplicial, entonces $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}^{-1}$ preservan cadenas. Recíprocamente, si $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Y$ es una biyección entre posets tal que $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}^{-1}$ preservan cadenas, entonces $\mathcal{K}(\tilde{\varphi})$ es un isomorfismo simplicial. Eso motiva la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sean X e Y dos posets. Decimos que una función $\varphi : X \rightarrow Y$ es un **morfismo tipo-simplicial** si para toda cadena c de X se cumple que $\varphi(c)$ es una cadena de

Y . Decimos que un morfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$ es un **isomorfismo tipo-simplicial** si existe una inversa φ^{-1} que sea a su vez un morfismo tipo-simplicial.

Observación 2.4.2. Equivalentemente, dados dos posets X e Y podemos definir un morfismo tipo-simplicial como una función $\varphi : X \rightarrow Y$ que cumple que para cualesquiera dos elementos comparables de X , x y x' , entonces vale que $\varphi(x)$ es comparable con $\varphi(x')$. En particular, todo morfismo de posets es un morfismo tipo-simplicial. Sin embargo, no todo morfismo tipo-simplicial es un morfismo de posets. Por ejemplo, si Y es un conjunto totalmente ordenado y X es un poset cualquiera, entonces toda función de X a Y será un morfismo tipo-simplicial pero no tiene por que ser un morfismo de posets. Notar que para todo poset X , la identidad de X a X^{op} (el poset opuesto) es un isomorfismo tipo-simplicial (que induce la identidad en $\mathcal{K}(X)$) pero no es un isomorfismo de posets.

Notar que si X e Y tienen el mismo order complex, entonces X es un ME de una variedad combinatoria (respect. conexo u homogéneo de dimensión n) si y solo si Y lo es. Además, si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo tipo-simplicial preserva fences y links. Luego, si N y \tilde{N} son nudos en X tales que \tilde{N} se obtiene de N mediante un Δ -movimiento, lo mismo sucede para $\varphi(N)$ y $\varphi(\tilde{N})$, por lo que X e Y tienen las mismas clases de nudos isotópicos por movimientos. Nos preguntamos entonces si los nudos de X e Y tienen también las mismas clases de equivalencia para la equivalencia usual. Es decir, si dados N y \tilde{N} dos nudos de X tales que existe un automorfismo de X que manda a N en \tilde{N} , vale que existe un automorfismo de Y que manda a $\varphi(N)$ en $\varphi(\tilde{N})$.

Veamos un ejemplo simple. Si X es un poset finito cualquiera e Y es un poset isomorfo a X^{op} , tomando un antiisomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ (es decir, una biyección tal que $\varphi(v) < \varphi(w)$ si y solo si $w < v$), como φ y φ^{-1} preservan que elementos sean comparables vale que φ es un isomorfismo tipo-simplicial. Si además N y \tilde{N} son nudos en X y f es un automorfismo de orden de X tal que $f(N) = \tilde{N}$, entonces $f_\varphi = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es un automorfismo de Y que cumple que $f_\varphi(\varphi(N)) = \varphi(\tilde{N})$, por lo que X e Y tienen las mismas clases de nudos. En el corolario 2.4.6, probaremos que esto vale en general cuando X e Y son ME de una variedad combinatoria.

Comencemos por estudiar distintos ejemplos de posets con el mismo order complex. Como vale que $\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(Y) * \mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(Y \otimes X)$, tenemos que si X puede escribirse como $X = X^1 \otimes \dots \otimes X^n$, y σ es una permutación de n elementos, entonces $X^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes X^{\sigma(n)}$ tiene el mismo order complex que X . Además, si X y Z tienen el mismo order complex, entonces

$$\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(Z) * \mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(Z \otimes Y)$$

por lo que $X \otimes Y$ tiene el mismo order complex que $Z \otimes Y$. De forma similar, es claro que si X e Y son dos posets, entonces para todo Z con el mismo order complex que X vale que

$X \amalg Y$ tiene el mismo orden complex que $Z \amalg Y$.

Utilizando esto, podemos construir una cantidad arbitrariamente grande de posets no isomorfos dos a dos, homogéneos de dimensión 2, conexos, con el mismo orden complex. Si llamamos X^i al poset discreto de i elementos, y definimos $Y^i = X^1 \otimes X^i$, entonces para todo $i \geq 2$ vale que Y^i e $(Y^i)^{op}$ son dos posets no isomorfos con el mismo orden complex. Luego, para todo $n \geq 2$ y para todos $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 < i < j \leq n$ tenemos que $X^1 \otimes (Y^2 \amalg \dots \amalg Y^n)$, $X^1 \otimes (Y^2 \amalg \dots \amalg (Y^i)^{op} \amalg \dots \amalg Y^n)$ y $X^1 \otimes (Y^2 \amalg \dots \amalg (Y^j)^{op} \amalg \dots \amalg Y^n)$ son posets no isomorfos entre sí con el mismo orden complex, por lo que existen por lo menos n posets no isomorfos entre sí con el mismo orden complex.

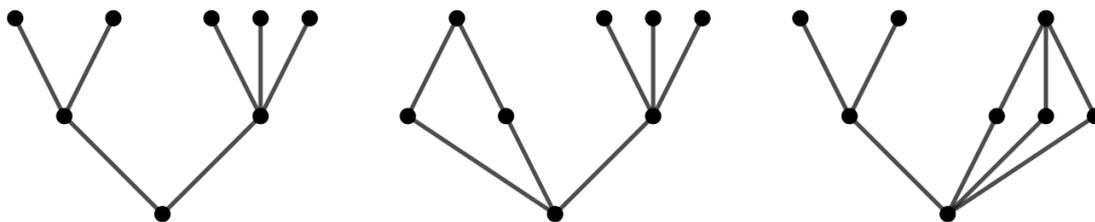


Figura 2.24: Tres posets no isomorfos con el mismo orden complex.

Modificando un poco la construcción, se pueden conseguir ejemplos en donde los posets involucrados no se puedan descomponer como un join, como se ve en la figura 2.25.

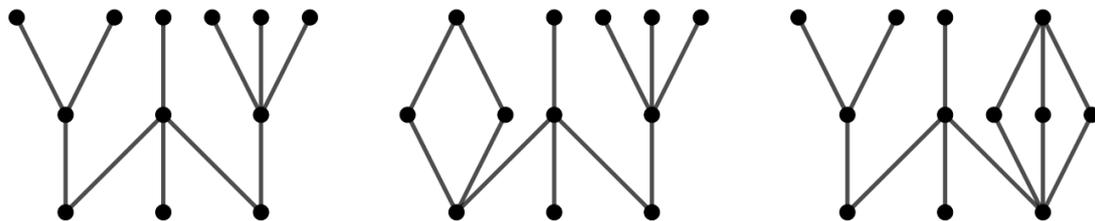


Figura 2.25: Posets no isomorfos con el mismo orden complex.

Si bien en los ejemplos que vimos todos los posets son conexos, parecen tener regiones aisladas entre sí. Pronto veremos que esto no puede suceder para modelos estrictos de variedades combinatorias. En el contexto simplicial, se dice que un complejo homogéneo de dimensión n es **fuertemente conexo** si para cualesquiera dos n -símplices, σ y σ' , existe una secuencia finita de n -símplices $\sigma = \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k = \sigma'$ de forma que σ^i y σ^{i+1} comparten una cara de dimensión $n - 1$. Esta propiedad es fácil de trasladar a posets y en ese contexto tiene interés en sí misma, independientemente de sus conexiones con la noción simplicial (ver, por ejemplo, [16]).

Definición 2.4.3. Decimos que un poset X homogéneo de dimensión n es **fuertemente conexo** si para cualesquiera dos cadenas maximales c y \tilde{c} , existe una secuencia de cadenas maximales

$$c = c^0, c^1, c^2, \dots, c^n = \tilde{c}$$

tales que $c^i \cap c^{i+1}$ tiene cardinal $n - 1$, o equivalentemente, si la diferencia simétrica entre c^i y c^{i+1} tiene cardinal 2 (notar que si la diferencia simétrica entre dos cadenas maximales es de dos puntos, estos deben de tener la misma altura).

Es bien sabido que toda variedad combinatoria es fuertemente conexa como complejo simplicial [35, sección §63]. Luego, dado un ME de una variedad combinatoria, como sus cadenas maximales coinciden con los símlices maximales de su order complex, concluimos que todo ME de una variedad combinatoria es fuertemente conexo como poset. Damos a continuación una demostración alternativa de este hecho, sin usar el resultado en su versión simplicial.

Proposición 2.4.4. *Sea X un ME de una variedad combinatoria conexa. Entonces X es fuertemente conexo.*

Demostración. Veámoslo por inducción en la altura de X .

Sea X un poset conexo de altura 1 y sean $c = \{x_1, x_2\}$, $\tilde{c} = \{y_1, y_2\}$ dos cadenas maximales. Como X es conexo, existe una fence $v_0 = x_2, v_1, \dots, v_n = y_1$. Tomando $c^0 = c$, $c^i = \{v_{i-1}, v_i\}$ si $1 \leq i \leq n$, y $c^{n+1} = \tilde{c}$, y descartando quizás alguna cadena si hay dos iguales consecutivas, tenemos la secuencia de cadenas que queremos.

Supongamos ahora que el resultado es válido para posets de altura menor o igual a n y sean X un ME de una $(n + 1)$ -variedad combinatoria, c y \tilde{c} dos cadenas maximales. Si c y \tilde{c} comparte a un elemento x , como \hat{C}_x es un ME de una n -esfera o de una n -bola, por hipótesis existe una secuencia de cadenas maximales de \hat{C}_x que conecta a $c \setminus \{x\}$ con $\tilde{c} \setminus \{x\}$, por lo que existe una secuencia de cadenas maximales de X que conecta a c con \tilde{c} .

Si c y \tilde{c} son cadenas disjuntas, llamamos x al minimal de c y \tilde{x} al minimal de \tilde{c} . Como X es conexo, existe una fence $v_0 = x < v_1 > \dots > v_n = \tilde{x}$ de elementos de X . Si $\tilde{x} = v_2$, tomando d una cadena maximal que contenga a x y a v_1 , y \tilde{d} una cadena maximal que contenga a \tilde{x} y a v_1 , como c comparte un elemento con d , d comparte un elemento con \tilde{d} y \tilde{d} comparte un elemento con \tilde{c} , existen secuencias de cadenas maximales de X que conectan a c con d , a d con \tilde{d} y a \tilde{d} con \tilde{c} , por lo que existe una secuencia que conecta a c con \tilde{c} .

Si \tilde{x} es distinto a v_2 , razonando inductivamente concluimos que existe una secuencia de cadenas maximales de X que conecta a c con \tilde{c} , por lo que X es fuertemente conexo. □

La proposición anterior nos permite demostrar el siguiente resultado.

Lema 2.4.5. *Sean X e Y ME de una variedad combinatoria conexa tales que existe un isomorfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$. Entonces, si v y w son dos elementos de X con la misma altura, se cumple que $h(\varphi(v)) = h(\varphi(w))$. En otras palabras, existe una función biyectiva $\tau_\varphi : \{0, 1, \dots, h(X)\} \rightarrow \{0, 1, \dots, h(Y)\}$ tal que $\varphi(X_i) = Y_{\tau_\varphi(i)}$.*

Demostración. Sean v y w dos elementos distintos de X con la misma altura. Queremos ver que $h(\varphi(v)) = h(\varphi(w))$. Sea c una cadena maximal que contiene a v y \tilde{c} una cadena maximal

que contiene a w . Como X es un ME de una variedad combinatoria conexa, es fuertemente conexo, por lo que existen $c = c^0, c^1, \dots, c^n = \tilde{c}$ cadenas maximales tales que la diferencia simétrica entre c^i y c^{i+1} tiene cardinal 2. Como φ es un isomorfismo tipo-simplicial, $\varphi(c^i)$ también es una cadena maximal para todo i y se cumple que la diferencia simétrica entre $\varphi(c^i)$ y $\varphi(c^{i+1})$ tiene cardinal 2. Tomando c^k la última cadena que contiene a v y z el único elemento de altura $h(v)$ en $c^{(k+1)}$, como la diferencia simétrica entre $\varphi(c^k)$ y $\varphi(c^{k+1})$ es $\{\varphi(v), \varphi(z)\}$, tenemos que $h(\varphi(v)) = h(\varphi(z))$.

Si z es distinto a w , continuamos inductivamente hasta que, por finitud en la secuencia de cadenas, el proceso termina y concluimos que $h(\varphi(v)) = h(\varphi(w))$ como queríamos ver. \square

Corolario 2.4.6. *Sean X e Y ME de una variedad combinatoria conexa tales que existe un isomorfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$ y sea f un automorfismo de orden de X . Entonces $f_\varphi := \varphi f \varphi^{-1}$ es un automorfismo de orden de Y .*

En particular, X e Y tienen los mismos nudos, con las mismas clases de equivalencia.

Demostración. Como f es un isomorfismo de orden, $h(f(x)) = h(x)$ para todo $x \in X$. Luego, dado $y \in Y$ vale que

$$h(f_\varphi(y)) = h(\varphi f \varphi^{-1}(y)) = \tau_\varphi(h(f \varphi^{-1}(y))) = \tau_\varphi(h(\varphi^{-1}(y))) = \tau_\varphi(\tau_{\varphi^{-1}}(h(y))) = h(y)$$

por lo que $h(f_\varphi(y)) = h(y)$ para todo $y \in Y$.

Además, como un isomorfismo de orden es también un isomorfismo tipo-simplicial y composición de isomorfismos tipo-simpliciales es isomorfismo tipo-simplicial, tenemos que f_φ es un isomorfismo tipo-simplicial. Por lo tanto, dados dos elementos $y, \tilde{y} \in Y$ tales que $y < \tilde{y}$, tenemos que $f_\varphi(y)$ y $f_\varphi(\tilde{y})$ son elementos comparables (por ser f_φ isomorfismo tipo-simplicial) por lo que tiene que pasar que $f_\varphi(y) < f_\varphi(\tilde{y})$ ya que f_φ preserva alturas. Como $(f_\varphi)^{-1}$ también preserva alturas y elementos comparables, concluimos que f_φ es un automorfismo de orden. \square

En la demostración anterior probamos también que si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo tipo-simplicial que preserva altura de elementos, entonces es un isomorfismo de orden. Luego, si la función τ_φ (del Lema 2.4.5) es la identidad, entonces Y es isomorfo a X . Una consecuencia de esto es que la función τ_φ determina por entero la estructura de poset de Y , puesto que si $\varphi : X \rightarrow Y$ y $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \tilde{Y}$ son dos isomorfismos simpliciales tales que τ_φ coincide con $\tau_{\tilde{\varphi}}$, entonces $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ es un isomorfismo de orden de Y a \tilde{Y} , por lo que Y tiene que ser isomorfo a \tilde{Y} .

Por lo tanto, si X es un poset homogéneo de dimensión n con hipótesis suficientes para que valga el lema 2.4.5, entonces existen a lo sumo $(n+1)!$ posets con el mismo order complex. Si bien probamos el lema bajo la hipótesis de que X es un ME de una variedad combinatoria, lo único que usamos es que X es homogéneo y fuertemente conexo. Nuestro objetivo siguiente

es extender aún más el alcance del lema y utilizarlo para entender como son los posets con el mismo order complex en el caso de modelos estrictos de \mathbb{S}^3 .

Si X es el poset de celdas de un CW-complejo regular L , entonces X es conexo si y solo L lo es, y esto pasa si y solo si L_1 , el 1-esqueleto de L , es conexo. Como $\mathcal{X}(L_1) = X_{\leq 1}$, concluimos que X es conexo si y solo si $X_0 \cup X_1$ lo es. Luego, si X es un ME de una variedad combinatoria sin borde, entonces es conexo si y solo si $X_0 \cup X_1$ lo es. Sin embargo, el hecho de que los modelos estrictos de variedades combinatorias conexas sean posets fuertemente conexos va a implicar un resultado más fuerte.

Definición 2.4.7. *Sea X un poset homogéneo de dimensión n . Decimos que X es **conexo por niveles** si para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq i < j \leq n$ vale que el subposet $X_i \cup X_j$ es conexo.*

Lema 2.4.8. *Sea X un poset fuertemente conexo. Entonces X es conexo por niveles.*

Demostración. Sea X es un poset fuertemente conexo, i y j tales que $0 \leq i < j \leq h(X)$. Dados $x, y \in X_i \cup X_j$, quiero ver que existe una fence de elementos de $X_i \cup X_j$ que une a x con y . Si tomamos c una cadena que contiene a x y \tilde{c} una cadena que contiene a y , como X es fuertemente conexo existe una secuencia de cadenas maximales $c = c^0, c^1, \dots, c^n = \tilde{c}$ de forma que la diferencia simétrica entre c^i y c^{i+1} tiene cardinal 2. Si $x \in c^n$, entonces y es comparable con x y existe una fence que une a los elementos. Si no, llamamos v_1 al único elemento de altura i o j distinto de x en la última cadena que contiene a x . Definido v_k , si $v_k \in c^n$ entonces x, v_1, \dots, v_k, y es una fence de elementos de $X_i \cup X_j$ que une a x con y ; sino llamamos v_{k+1} al único elemento de altura i o j distinto de v_k en la última cadena que contiene a v_k . Por finitud de la secuencia de cadenas, el proceso termina y existe una fence que une a x con y . \square

Observación 2.4.9. Notar que si X es un poset homogéneo de dimensión 1, entonces es lo mismo ser conexo que fuertemente conexo y que conexo por niveles. Sin embargo, a partir de dimensión 2 son tres nociones distintas (ver figura 2.26).

Notar también que si tomamos una fence en $X_i \cup X_{i+1}$ y tomamos $j > i$, entonces reemplazando todos los elementos de altura $i + 1$ de la fence por elementos comparables de altura j , obtenemos una fence en $X_i \cup X_j$. Luego, es fácil ver que un poset homogéneo es conexo por niveles si y solo si los subposets de la forma $X_i \cup X_{i+1}$ son conexos.

Antes del siguiente lema, recordar que dado un poset X notamos \hat{X}_i al subposet $X \setminus X_i$.

Lema 2.4.10. *Sea X un poset homogéneo de dimensión n conexo por niveles, y sea Y un poset tal que existe un isomorfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$. Entonces, si v y w son dos elementos de X con la misma altura, se cumple que $h(\varphi(v)) = h(\varphi(w))$. En particular, existe una función biyectiva $\tau_\varphi : \{0, 1, \dots, h(X)\} \rightarrow \{0, 1, \dots, h(Y)\}$ tal que $\varphi(X_i) = Y_{\tau_\varphi(i)}$.*

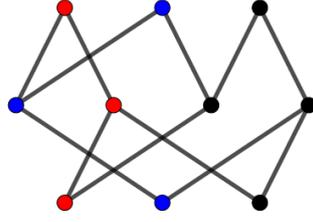


Figura 2.26: Un poset conexo por niveles pero no fuertemente conexo. La cadena en rojo no se puede conectar con la cadena en azul.

Demostración. Hagamos inducción en la dimensión de X .

Si $h(X) = 1$, entonces X es fuertemente conexo y el resultado vale por el Lema 2.4.5.

Sea X de dimensión $n + 1$ y sea $c = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+1}\}$ una cadena maximal. Como $\varphi(c)$ es una cadena maximal, tiene un elemento de cada altura de Y por lo que podemos suponer que $h(\varphi(v_i)) = i$. Queremos ver que $(\varphi(X_{h(v_i)})) = Y_i$.

Comencemos por $i = 0$. Alcanza con ver que para todo $x \in X_{h(v_0)}$ vale que si z es un elemento de X comparable con x , entonces $\varphi(x) < \varphi(z)$. Sea x en $X_{h(v_0)}$ y z en X comparable con x . Como X es conexo por niveles, el subposet $\tilde{X} = X_{h(v_0)} \cup X_{h(z)}$ es conexo. Si tomamos ahora $\tilde{Y} = \varphi(\tilde{X})$, como \tilde{X} tiene altura uno vale que $\varphi|_{\tilde{X}}$ manda niveles de \tilde{X} en niveles de \tilde{Y} . Además, como la altura de $\varphi(v_0)$ en Y es cero, su altura es cero también en \tilde{Y} por lo que debe pasar que $\varphi(\tilde{X}_0) = \tilde{Y}_0$. En particular, la altura de $\varphi(x)$ en \tilde{Y} ha de ser cero y, como $\varphi(x)$ es comparable con $\varphi(z)$, tenemos que $\varphi(x) < \varphi(z)$ como queríamos ver.

Para ver que $\varphi(X_{h(v_i)}) = Y_i$, vamos a utilizar que, como ya sabemos que $\varphi(X_{v_0}) = Y_0$, vale que $\tilde{Y} = \varphi(\tilde{X}_0) = \tilde{Y}_0$, por lo que $\tilde{Y}_i = Y_{i+1}$. Luego, como \tilde{X}_0 es conexo por niveles y la altura de $\varphi(v_i)$ en \tilde{Y} es $i - 1$, por hipótesis inductiva vale que $\varphi(X_{h(v_i)}) = \tilde{Y}_{i-1} = Y_i$. \square

Observación 2.4.11. Razonando de la misma forma que en el caso de variedades combinatorias, tenemos que si X es un poset conexo por niveles y $\varphi : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo tipo-simplicial, entonces la estructura como poset de Y queda determinada por X y por τ_φ . En particular, Y es isomorfo a X si y solo si τ_φ es la identidad e Y es isomorfo a X^{op} si y solo si $\sigma(i) = h(X) - i$. Además, si σ es la identidad entonces φ es un isomorfismo y si $\sigma(i) = h(X) - i$ entonces φ es un antiisomorfismo.

Otra consecuencia del lema anterior es que X puede descomponerse como un join de posets si y solo si Y se puede descomponer como un join de posets. En efecto, si $X = X^1 \otimes X^2$, entonces $Y_0 \subseteq \varphi(X^1)$ o $Y_0 \subseteq \varphi(X^2)$, por lo que sin pérdida de generalidad $Y_0 \subseteq \varphi(X^1)$. Tomando i tal que $Y_i \subseteq \varphi(X^1)$ pero $Y_{i+1} \subseteq \varphi(X^2)$, como φ preserva que elementos sean comparables tenemos que todos los elementos de Y_i son comparables con todos los elementos de Y_{i+1} . Luego, como Y es un poset homogéneo, concluimos que $Y = Y_{\leq i} \otimes Y_{\geq i+1}$.

Teorema 2.4.12. *Sea X un poset homogéneo y conexo por niveles. Si existe un poset Y no isomorfo a X ni a X^{op} y tal que $\mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(X)$, entonces X puede descomponerse como un join (de posets no vacíos).*

Demostración. Como X e Y tienen el mismo orden complex, existe un isomorfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$ y una biyección τ_φ como en el lema 2.4.10.

Si la dimensión de X es igual a 1, entonces τ_φ es la identidad o una transposición, por lo que Y es isomorfo a X o a X^{op} .

Sea ahora X de dimensión $n > 1$. Usando inducción, vamos a poder reducir nuestro estudio a entender únicamente algunos casos particulares de τ_φ . Comencemos entonces por demostrar que si τ_φ es un ciclo de la forma $\tau_\varphi = (k, k+1, \dots, k+s)$, entonces X se puede descomponer como join de subposets.

Si $\tau_\varphi = (k, k+1)$, como la dimensión de X es mayor a 1, o bien $k+2 \leq n$ o bien $0 \leq k-1$. Supongamos que $k+2 \leq n$ y que por lo tanto existen en X elementos de altura $k+2$ (el otro caso es análogo). Vamos a ver que todos los elementos de X_{k+2} son comparables con todos los elementos de X_{k+1} , lo que implica que $X = X_{\leq k+1} \otimes X_{\geq k+2}$.

Sea $x \in X_{k+2}$, p un elemento de altura $k+1$ comparable con x . Queremos ver que si q es otro elemento cualquiera de X_{k+1} , entonces x es comparable con q . Como $X_k \cup X_{k+1}$ es conexo, existe una fence de puntos

$$p = v_0 > v_1 < v_2 > \dots < v_m = q$$

de forma que v_i tiene altura k o $k+1$ dependiendo de la paridad de i . Luego, como φ manda elementos comparables en elementos comparables y $\tau_\varphi = (k, k+1)$, tenemos que

$$\varphi(v_0) < \varphi(v_1) > \varphi(v_2) < \dots > \varphi(v_m)$$

Por otro lado, como $x > v_0 > v_1$ tenemos que x y v_1 son comparables, por lo que o bien $\varphi(x) > \varphi(v_1)$, o bien $\varphi(x) < \varphi(v_1)$. Pero como $\tau_\varphi(k+2) = k+2$, tenemos que

$$h(\varphi(x)) = \tau_\varphi(h(x)) = k+2 > k = \tau_\varphi(h(v_1)) = h(\varphi(v_1))$$

por lo que $\varphi(x) > \varphi(v_1) > \varphi(v_2)$. Como φ^{-1} también preserva que elementos sean comparables, concluimos que x es comparable con v_2 .

Inductivamente, x es comparable con v_i para todo i y en particular $x > q$.

Si $\tau_\varphi = (k, k+1, \dots, k+s)$ con $s > 1$, de forma similar al caso anterior veremos que todos los elementos de X_{k+s} están relacionados con todos los elementos de X_{k+s-1} . Sea x un elemento de altura $k+s$, p de altura $k+s-1$ comparable con x . Queremos ver que si q es otro elemento cualquiera de X_{k+s-1} , entonces x es comparable con q . Como X es conexo por niveles, $X_k \cup X_{k+s-1}$ es conexo por lo que existe una fence

$$p = v_0 > v_1 < v_2 > \dots < v_m = q$$

de forma que v_i tiene altura k o $k+s-1$ dependiendo de la paridad de i . Notemos que si

$k \leq i < j < k + s$, entonces $\tau_\varphi(k + 2) < \tau_\varphi(i) < \tau_\varphi(j)$. Luego,

$$\varphi(v_0) > \varphi(v_1) < \varphi(v_2) > \dots < \varphi(v_m)$$

Además, como $x > v_1$ tenemos que $\varphi(x) < \varphi(v_1) < \varphi(v_2)$. Usando ahora que φ^{-1} también preserva que elementos sean comparables, concluimos que x es comparable con v_2 , e inductivamente con q .

De manera completamente análoga, se puede demostrar que si τ_φ es un ciclo de la forma $\tau_\varphi = (k + s, k + s - 1, \dots, k)$, entonces también vale que X se descompone como join de subposets.

Ahora sí, vamos a ver el caso general. Supongamos que X no se puede descomponer como un join de subposets y que Y no es isomorfo a X . Vamos a ver que Y es isomorfo a X^{op} .

Notemos que \hat{X}_n no puede descomponerse como join de subposets, ya que entonces tendría dos niveles consecutivos completamente relacionados entre sí y, como estos niveles seguirían siendo consecutivos en X , X también se debería poder descomponer mediante joins. Luego, como \hat{X}_n es conexo por niveles y $\varphi|_{\hat{X}_n}$ es un isomorfismo tipo-simplicial, por hipótesis inductiva debe pasar que $\varphi(\hat{X}_n) = \hat{Y}_{\tau_\varphi(n)}$ es isomorfo a \hat{X}_n o a \hat{X}_n^{op} .

Si $\hat{Y}_{\tau_\varphi(n)}$ es isomorfo a \hat{X}_n , entonces para todo $0 \leq i < j < n$ vale que $\tau_\varphi(i) < \tau_\varphi(j)$. Luego, si $\tau_\varphi(n) = k$ forzosamente debe pasar que $\tau_\varphi = (k, k + 1, \dots, n)$, por lo que o bien X se puede descomponer como un join de subposets (si $k \neq n$) o bien X es isomorfo a Y . Como en cualquier caso llegamos a un absurdo, concluimos que $\varphi(\hat{X}_n)$ es isomorfo a \hat{X}_n^{op} . Luego, para todo $0 \leq i < j < n$ vale que $\tau_\varphi(i) > \tau_\varphi(j)$.

Razonando de forma análoga con \hat{X}_0 pero usando ahora que si $\hat{Y}_{\tau_\varphi(0)}$ es isomorfo a \hat{X}_0 entonces τ_φ es de la forma $(k, k - 1, \dots, 0)$, concluimos que $\varphi(\hat{X}_0)$ es isomorfo a \hat{X}_0^{op} , por lo que para todo $0 < i < j \leq n$ vale que $\tau_\varphi(i) > \tau_\varphi(j)$.

Juntando los dos resultados, tenemos que, para todo $0 \leq i < j \leq n$ vale que $\tau_\varphi(i) > \tau_\varphi(j)$ por lo que la única posibilidad es que $\tau_\varphi(i) = n - i$, o equivalentemente, que Y sea isomorfo a X^{op} . \square

Corolario 2.4.13. *Sea X un poset conexo por niveles tal que $X = X^1 \otimes \dots \otimes X^n$. Sea Y con el mismo order complex que X . Si para cada i , X^i no se puede descomponer como un join, entonces existe σ una permutación de n elementos tal que Y es isomorfo a $Y^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes Y^{\sigma(n)}$, con Y^i isomorfo a X^i o a $(X^i)^{op}$.*

Demostración. Si $n = 1$, el resultado vale por el teorema 2.4.12.

Supongamos que $n > 1$. Como X e Y tiene el mismo order complex, existe un isomorfismo tipo-simplicial $\varphi : X \rightarrow Y$. Como para toda $\tilde{\sigma}$ permutación de n elementos, vale que $\tilde{X} = X^{\tilde{\sigma}(1)} \otimes \dots \otimes X^{\tilde{\sigma}(n)}$ tiene el mismo order complex que X , reordenando la descomposición como joins de X podemos suponer que $\varphi(X^1)$ tiene al menos un elemento minimal de Y .

Notar que X^1 está compuesto por los primeros $h(X^1)$ niveles de X . Luego, por el lema

2.4.10, $\varphi(X^1)$ tiene que estar compuesto por algunos de los niveles de Y . Además, como X^1 (y por lo tanto $\varphi(X^1)$) no puede descomponerse como un join y φ preserva que elementos sean comparables, los niveles que componen a $\varphi(X^1)$ tienen que ser consecutivos. Por lo tanto, como φ preserva que elementos sean comparables, vale que $Y = \varphi(X^1) \otimes \varphi(X \setminus X^1)$. Por hipótesis inductiva, vale que $\varphi(X \setminus X^1) = Y^{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes Y^{\sigma(n)}$, con $\sigma : \{2, \dots, n\} \rightarrow \{2, \dots, n\}$ una permutación e Y^i isomorfo a X^i o a $(X^i)^{op}$. Por el teorema 2.4.12, como X^1 no puede descomponerse como un join, $\varphi(X^1)$ es isomorfo a X o a X^{op} . Luego, tomando $Y^1 = \varphi(X^1)$, concluimos que $Y = Y^1 \otimes Y^{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes Y^{\sigma(n)}$ como queríamos ver. \square

Notar que si $X = X^1 \otimes X^2$, entonces $X^1 = \hat{U}_y$ y $X^2 = \hat{F}_x$ con x es un elemento maximal de X^1 e y es un elemento minimal de X^2 . Si X es un ME de una variedad combinatoria, como X^{op} también es un ME de una variedad combinatoria, el item 2 de la observación 2.3.3 garantiza que tanto \hat{U}_y como \hat{F}_x son modelos estrictos de esferas o de bolas combinatorias. Luego, X tiene que ser un ME de una esfera combinatoria (si tanto \hat{U}_y como \hat{F}_x son ME de esferas combinatorias) o de una bola combinatoria (si \hat{U}_y o \hat{F}_x es un ME de una bola combinatoria).

Se deduce por lo tanto el siguiente resultado.

Corolario 2.4.14. *Sea X un ME de una variedad combinatoria tal que X no es un modelo estricto ni de una esfera combinatoria ni de una bola combinatoria. Sea Y un poset con el mismo order complex que X . Entonces Y es isomorfo a X o a X^{op} .*

El corolario anterior es falso si admitimos que X sea un ME de una esfera o de una bola. Si X es el poset del ejemplo 2.3.1, ya vimos que X es un ME de \mathbb{S}^3 y que $X = X_{\leq 2} \otimes \mathbb{S}^0$. Además, es fácil ver que $X_{\leq 2}$ y $(X_{\leq 2})^{op}$ no son posets isomorfos. Luego, es fácil ver que $Y = (X_{\leq 2})^{op} \otimes \mathbb{S}^0$ es un poset con el mismo order complex que X , pero que no es isomorfo ni a X ni a X^{op} . El siguiente resultado prueba que esto no puede pasar en ME de \mathbb{S}^3 con nudos no triviales, y evidencia una curiosa relación entre la existencia de nudos no triviales y la posibilidad de admitir posets Y con $\mathcal{K}(Y) = \mathcal{K}(X)$, tales que $Y \neq X, X^{op}$.

Teorema 2.4.15. *Sea X un ME de \mathbb{S}^3 que contiene un nudo no trivial. Si Y es un poset con $K(Y) = K(X)$, entonces Y es isomorfo a X o a X^{op} .*

Demostración. Supongamos que Y no es isomorfo ni a X ni a X^{op} y veamos que todos sus nudos son triviales. Para eso, vamos a ver que sin importar quien sea el nudo, siempre podremos encontrar un subposet de X ME de \mathbb{D}^2 que tenga a nuestro nudo como borde.

Por el teorema 2.4.12, X se tiene que descomponer como join de subposets. Como además es un ME de una variedad combinatoria sin borde, tiene que ser de la forma $X^1 \otimes X^2$ con X^i un ME de una esfera. Cambiando a X por X^{op} de ser necesario, podemos asumir que X^1 no es \mathbb{S}^0 y, al ser un ME de una esfera de dimensión mayor, es conexo.

Dado N un nudo en X , queremos ver que N es borde de un disco. Si $N \subset X^1$, tomando p un elemento cualquiera de X^2 tenemos que $D = N \otimes \{p\}$ es un subposet de X que es un ME de \mathbb{D}^2 . Como además N es el borde de D , concluimos que N es un nudo trivial.

De forma análoga, si N está incluido en X^2 es el borde de un disco, por lo que podemos asumir que N tiene elementos tanto en X^1 como en X^2 . Esto implica que podemos descomponer a N como $N = (N \cap X^1) \otimes (N \cap X^2)$. Además, como N es un ME de \mathbb{S}^1 , la única opción posible es que $(N \cap X^i)$ sea un ME de \mathbb{S}^0 para todo i .

Llamemos $\{x, x'\}$ a los elementos de $(N \cap X^1)$ y $\{y, y'\}$ a los elementos de $(N \cap X^2)$. Como X^1 es conexo, existe una fence $x = v_0, v_2, \dots, v_n = x'$ de elementos de X^1 que une a x con x' . Como X_1 es conexo por niveles, podemos pedir además que la fence tenga elementos solo de dos alturas diferentes, lo que hace de $\{v_0, \dots, v_n\}$ un modelo estricto de \mathbb{D}^1 que tiene como borde a $\{x, x'\}$. Si tomamos a $D = \{v_0, \dots, v_n\} \otimes \{y, y'\}$, tenemos que D es un subposet de X que es un ME de \mathbb{D}^2 y que tiene como borde a N .

Luego, para todo N nudo de X existe un disco $D \subset X$ que tiene a N como borde, por lo que todos los nudos de X son triviales. □

Terminamos el capítulo con dos resultados de complejos simpliciales que se desprenden de lo hecho en esta sección.

Corolario 2.4.16. *Sea L una triangulación de \mathbb{S}^3 y sea L' su subdivisión baricéntrica. Sean N y \tilde{N} dos nudos de L . Entonces si existe un automorfismo de L' que manda a N' en \tilde{N}' , existe un automorfismo de L que manda a N en \tilde{N} . En otras palabras, la subdivisión baricéntrica no ayuda a distinguir nudos mediante automorfismos.*

Demostración. Supongamos que existe φ un automorfismo de L' tal que $\varphi(N') = \tilde{N}'$. Sea $\tilde{\varphi}$ el isomorfismo tipo-simplicial que induce φ en $\mathcal{X}(L)$.

Notar que si τ y $\tilde{\tau}$ son dos símlices maximales distintos de L , y v es un vértice de $\tilde{\tau}$ que no está en τ , entonces v y τ son elementos de $\mathcal{X}(L)$ que no son comparables. Luego, $\mathcal{X}(L)$ no se puede descomponer como un join de subposets. Por lo tanto, por el teorema 2.4.12, $\tau_{\tilde{\varphi}}$ es la identidad o $\tau_{\tilde{\varphi}}(i) = h(\mathcal{X}(L)) - i$. Sin embargo, como $\tilde{\varphi}(\mathcal{X}(N)) = \mathcal{X}(\tilde{N})$ y tanto $\mathcal{X}(N)$ como $\mathcal{X}(\tilde{N})$ son subposets incluidos en $\mathcal{X}(L)_{\leq 1}$, tiene que pasar que $\tau_{\tilde{\varphi}}$ es la identidad. Luego, $\tilde{\varphi}$ es un automorfismo de orden y, en particular, $\tilde{\varphi}(\mathcal{X}(L)_0) = \mathcal{X}(L)_0$.

Como los elementos de $\mathcal{X}(L)_0$ son los vértices de L , $\tilde{\varphi}$ induce una función biyectiva ψ entre los vértices de L . Usando que si $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo entonces $h(x) = h(\varphi(x))$, es fácil ver que ψ y ψ^{-1} son dos morfismos simpliciales. Luego, ψ es un automorfismo de L que manda a N en \tilde{N} . □

Corolario 2.4.17. *Sea L una variedad combinatoria con más de un simplex maximal y tal que $\mathcal{X}(L)$ no es isomorfo a $\mathcal{X}(L)^{op}$. Entonces L tiene los mismos automorfismos que su subdivisión baricéntrica. Es decir, si φ es un automorfismo de L' entonces $\varphi = \mathcal{K}(\mathcal{X}(\psi))$ para ψ un automorfismo de L .*

Demostración. Dado φ es un automorfismo de L' , si llamamos $\tilde{\varphi}$ al isomorfismo tipo-simplicial que induce φ en $\mathcal{X}(L)$, como $\mathcal{X}(L)$ no es isomorfo a $\mathcal{X}(L)^{op}$ y $\mathcal{X}(L)$ no se puede descomponer

como un join de subposet por tener L más de un simplex maximal, tiene que pasar que $\tilde{\varphi}$ es un automorfismo de orden. Luego, $\tilde{\varphi}$ induce un automorfismo de L , ψ , que cumple que $\mathcal{X}(\psi) = \tilde{\varphi}$, por lo que $\varphi = \mathcal{K}(\mathcal{X}(\psi))$. \square

Capítulo 3

Ejemplos e implementaciones en SAGE

El objetivo de este capítulo es exhibir distintos ejemplos de nudos en modelos estrictos de \mathbb{S}^3 . Con este fin, implementamos en SAGE distintos algoritmos que pueden encontrarse en [13].

Dado X un poset finito, utilizando los módulos *Finite posets* y *Finite Topological Spaces* [15], podemos representar a X en SAGE y operar con él de distintas formas (por ejemplo, podemos conseguir una presentación del grupo fundamental de $\mathcal{K}(X)$ o comprobar si X es colapsable). En particular, utilizando estos módulos no es difícil implementar algoritmos para determinar cuándo un poset es un modelo estricto de una n -esfera, de una n -bola o de una n -variedad combinatoria en dimensiones bajas.

Las implementaciones fueron realizadas como una traducción directa de las equivalencias teóricas, sin tener en cuenta las posibles optimizaciones que se pueden hacer. Los diagramas de Hasse de este capítulo se realizaron utilizando SAGE, por lo que son representados de la forma usual para grafos dirigidos (es decir, con flechas). Todos los ejemplos aquí mostrados pueden encontrarse en el [anexo](#).

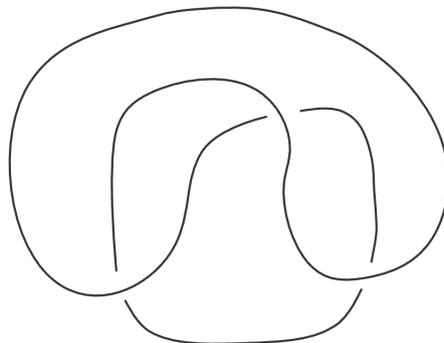


Figura 3.1

3.1. Nudo trivial

En el capítulo anterior mencionamos que, dado un complejo simplicial L y un subcomplejo K que sea un nudo, puede suceder que K sea un nudo trivial pero que sea necesario subdividir para que sea el borde de un disco plano. Veamos esto con un ejemplo concreto, el cual fue propuesto por J. Barmak.

Ejemplo 3.1.1. *Comencemos tomamos un nudo K embebido en \mathbb{R}^3 como se ve en la figura 3.1. Es claro viendo el diagrama que es un nudo trivial.*

Supongamos que contenidas en K hay dos aristas distinguidas que cumplen que sus únicos 2-símplices son como los que aparecen en la figura 3.2.

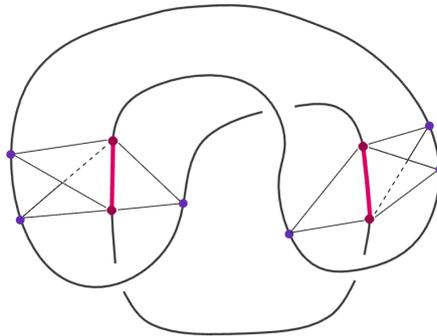


Figura 3.2: En rojo dos aristas distinguidas

Supongamos también que K es el borde de un disco D . Luego, D tiene que tener un 2-simplex por cada una de las aristas distinguidas. Además, por como fueron elegidos, cada uno de los 2-símplices tiene que cruzar de un lado al otro del borde del disco, cortando así a los otros 2-símplices (ver figura 3.3). Luego, D no puede contener a dos de estos 2-símplices en simultáneo, lo que es absurdo.

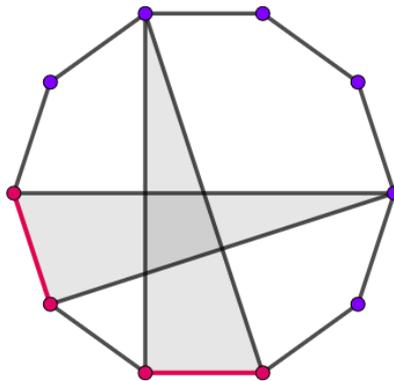


Figura 3.3

Por lo tanto, cualquier extensión a una triangulación de \mathbb{S}^3 de la estructura simplicial

de la figura 3.2, que cumpla además que no agrega 2-símplices que contengan a las aristas distinguidas, tiene que cumplir que K no es el borde de un disco plano.

Para un ejemplo de una extensión a \mathbb{D}^3 , la cual, conificando su borde, nos sirve como el ejemplo buscado, ver el [anexo](#).

Sabemos entonces que, dado un nudo K contenido en un complejo simplicial fijo, puede suceder que K sea un nudo trivial pero que no sea el borde de un disco. Nuestro siguiente objetivo es comprobar que lo mismo sucede para posets.

La estrategia que seguimos fue partir de un nudo trivial de un CW-complejo regular que no sea el borde de un disco, tomar su poset de celdas y comprobar utilizando SAGE que en efecto el nudo sigue sin ser el borde de un disco. Si bien podríamos intentar hacer esto utilizando el complejo simplicial del ejemplo anterior, para reducir el trabajo computacional optamos primero por fusionar algunos de sus símplices, obteniendo así un CW-complejo regular con menos celdas. El siguiente ejemplo es el resultado de ese proceso.

Ejemplo 3.1.2. *Vamos a construir un CW-complejo regular L . Igual que en el ejemplo anterior, partamos de un nudo K embebido en \mathbb{R}^3 como se ve en la figura 3.1. Podemos pensar que el nudo está compuesto por ocho 0-celdas y ocho 1-celdas y etiquetar a las celdas como se ve en la figura 3.4. Terminamos el 1-esqueleto de L adjuntando las 1-celdas $\{A, E\}$, $\{A, F\}$, $\{B, E\}$, $\{B, F\}$, $\{D, G\}$, $\{D, H\}$, $\{C, G\}$, $\{C, H\}$, $\{A, D\}$ y $\{E, H\}$ (ver figura 3.5).*

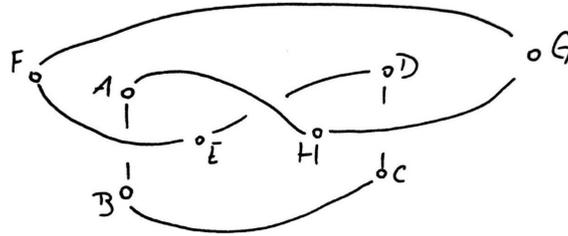


Figura 3.4: Diagrama de K con las cero celdas etiquetadas.

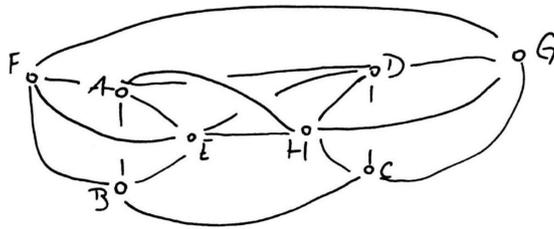


Figura 3.5: Diagrama del 1-esqueleto de L .

De forma análoga al ejemplo anterior, para que K no sea el borde de un disco contenido

en el 2-esqueleto de L , vamos a querer que las aristas $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ solo estén contenidas en 2-celdas que “cruzen” al nudo. Agregando el 3-simplex $\{A, B, E, F\}$, una 2-celda e_1^2 con borde $\{AF, FB, BE, EA\}$ y una 3-celda con borde dado por los triángulos ABE y ABF y la 2-celda e_1^2 , podemos lograr que la arista $\{A, B\}$ solo este contenida en 2-celdas como las que queremos. De forma análoga, podemos agregar un 3-simplex, una 2-celda e_2^2 y una 3-celdas para cubrir a la arista $\{C, D\}$.

Completamos la estructura celular de una 3-bola agregando el 3-simplex $\{A, D, E, H\}$, una 2-celda e_3^2 con borde $\{AD, DG, GF, FA\}$, una 2-celda e_4^2 con borde $\{FB, BC, CG, GF\}$, una 2-celda e_5^2 con borde $\{BC, CH, HE, EB\}$ y una 3-celda con borde dado por $e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2$ y e_5^2 . Agregando una 3-celda más para extender a \mathbb{S}^3 , concluimos el ejemplo.

Tomando el poset de celdas del ejemplo anterior, tenemos un candidato para un modelo estricto de \mathbb{S}^3 que contenga un nudo trivial que no sea borde de un disco. Comprobar extensivamente que todos los subposets de X que contienen a K no son discos no es viable debido a la cantidad de subposets que cumplen con esto. Sin embargo, podemos encontrar restricciones suficientes para que esencialmente la misma estrategia funcione.

Queremos implementar una función $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$, que toma como parámetros a tres posets, en donde K se supone incluido en Y e Y se supone incluido en X , y devuelve *verdadero* en el caso de que exista un subposet D de X que cumpla en simultáneo ser un ME de un disco, que Y sea un subposet de D y que K esté contenido en su borde, y *falso* en caso contrario. De tener implementada esta función, basta con comprobar el valor de verdad de $K_es_borde_de_un_disco(X, K, K)$ para saber si K es el borde de un disco en X . Supongamos por el momento que tenemos implementada una función $extender_a_S^1(X, K)$, que toma como parámetros a dos poset y que devuelve la lista de todos los subposets de X que contienen a los elementos de $X \cap K$ y que son un ME de \mathbb{S}^1 .

Si Y es un disco que tiene en el borde a K , ya sabemos que $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$ es *verdadero*. Si esto no pasa y además X es igual a Y , no hay extensión de Y posible por lo que $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$ es *falso*.

En el caso general, podemos tomar un elemento x en $X \setminus Y$. Una implementación sin restricciones podría ser considerar ahora $K_es_borde_de_un_disco(X, Y \cup \{x\}, K)$. Si su valor de verdad es afirmativo, sabemos que también lo es para $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$. Si no, x no aporta para que K sea el borde de un disco y el valor de verdad de $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$ coincide con el de $K_es_borde_de_un_disco(X \setminus \{x\}, Y, K)$. Como el cardinal de la diferencia entre el primer y el segundo parámetro disminuye paso a paso, este proceso eventualmente termina.

Una mejora se logra al notar que, si x en $X \setminus Y$ forma parte de un disco con borde K , su link en el disco tiene que ser un modelo de \mathbb{S}^1 , por lo que tiene que pertenecer a la lista $extender_a_S^1(\hat{C}_x, K)$. Por lo tanto, para cada Z en la lista podemos considerar qué pasa con el valor de verdad de $K_es_borde_de_un_disco(X \setminus (\hat{C}_x \setminus Z), Y \cup Z \cup \{x\}, K)$. Si es *verdadero*, sabemos que también lo es $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$. Si ningún elemento de la lista

funciona, o si $extender_a_S^1(\hat{C}_x, K)$ es una lista vacía, sabemos que x no aporta para que K sea el borde de un disco y el valor de verdad de $K_es_borde_de_un_disco(X, Y, K)$ coincide con el de $K_es_borde_de_un_disco(X \setminus \{x\}, Y, K)$.

Este nivel de restricciones fue suficiente para comprobar que el poset de celdas del ejemplo 3.1.2 cumple que contiene un nudo trivial que no es borde de un disco. Sin embargo, si asumimos además que K está contenido en los dos primeros niveles de X , podemos mejorar mucho los tiempos de la implementación. La observación clave es que, si x e y son dos elementos comparables de K , entonces $\mathcal{K}(\{x, y\})$ tiene que ser una arista en el borde de $\mathcal{K}(D)$, por lo que el link de $\mathcal{K}(\{x, y\})$ en $\mathcal{K}(D)$ tiene que ser una 0-bola, o lo que es lo mismo, tiene que ser un único punto. Luego, tiene que existir un único punto en D comparable con x e y simultáneamente. Con esto en mente, si suponemos que K está contenido en los dos primeros niveles de X , dado x un elemento maximal de K sabemos que si Y tiene más de un elemento mayor que x (o X no tiene elementos mayores que x) entonces Y no se puede extender a un disco que tenga como borde a K .

La implementación que se encuentra en [13] tiene más restricciones menores, pero es en esencia la que describimos en este capítulo.

Queda pendiente la implementación de la función $extender_a_S^1(X, K)$.

Supongamos por un momento que K está contenido en X . Si X o K son un modelo estricto de S^1 , entonces son el único elemento de la lista. Si ninguno de los dos es un modelo estricto de S^1 y además X es igual a K , como estamos suponiendo que K está contenido en X la lista está vacía. La lista también está vacía si el link de un elemento de K en X tiene menos de dos elementos o si el link de un elemento de K en K es mayor a dos. Para el caso general, dado x en el complemento de K tenemos que $extender_a_S^1(X, K)$ va a ser igual a la unión entre $extender_a_S^1(X, K \cup \{x\})$ y $extender_a_S^1(X \setminus \{x\}, K)$.

Para el caso general, sabemos que el valor de verdad de $extender_a_S^1(X, K)$ coincide con el de $extender_a_S^1(X, X \cap K)$.

3.2. Nudo trébol

A continuación vamos a construir un poset X , modelo estricto de S^3 , de modo que $\mathcal{K}(X)$ contenga a un nudo trébol pero que no exista en X un nudo que no sea trivial. Este ejemplo muestra que el order complex de un poset puede agregar tipos de nudos.

Ejemplo 3.2.1. *Como siempre, vamos a definir el poset a partir de un CW-complejo regular al que llamaremos L . Partamos de seis 0-celdas y nueve 1-celdas, como se ve en la figura 3.6, para formar al 1-esqueleto de L . Para rellenar los paralelogramos que se observan en figura, podemos adjuntar una 2-celada e_1^2 con borde $\{\{e_1^0, e_2^0\}, \{e_1^0, e_4^0\}, \{e_4^0, e_5^0\}, \{e_5^0, e_2^0\}\}$, una 2 celda e_2^2 con borde $\{\{e_1^0, e_3^0\}, \{e_1^0, e_4^0\}, \{e_4^0, e_6^0\}, \{e_3^0, e_6^0\}\}$ y una 2-celda e_3^2 con borde $\{\{e_2^0, e_3^0\}, \{e_3^0, e_6^0\}, \{e_5^0, e_6^0\}, \{e_5^0, e_2^0\}\}$.*

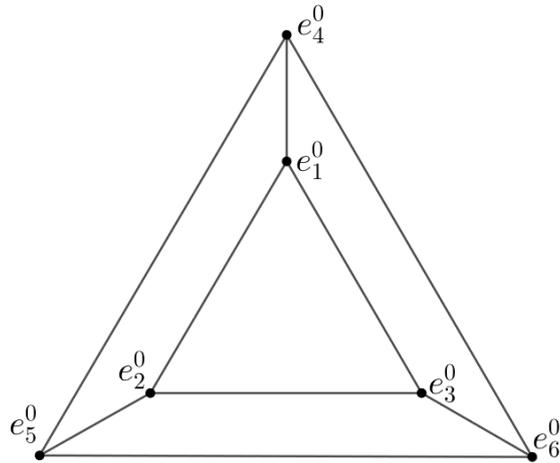


Figura 3.6

Vamos a completar la estructura celular de L para que, si pensamos por un momento en la subdivisión baricéntrica de L , las aristas que se ven en rojo en la figura 3.7 formen parte de un nudo trébol como se ve en la figura 3.9.

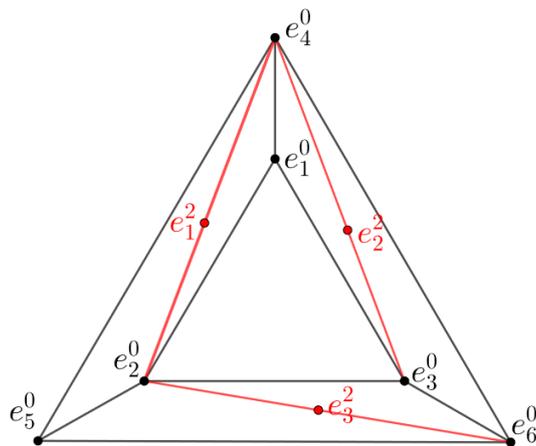


Figura 3.7

Para completar el 2-esqueleto de L , adjuntamos una 2-celda e_4^2 con el mismo borde que e_2^2 , una 2-celda e_5^2 con borde dado por el triangulo (e_1^0, e_2^0, e_3^0) y una 2-celda e_6^2 con borde dado por el triangulo (e_4^0, e_5^0, e_6^0) (ver figura 3.8). Finalmente, completamos la estructura celular de L adjuntando una 3-celda e_1^3 con borde $\{e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_5^2, e_6^2\}$, un 3-celda e_2^3 con borde $\{e_2^2, e_4^2\}$ y una 3-celda e_3^3 con borde $\{e_1^2, e_4^2, e_3^2, e_5^2, e_6^2\}$.

De esta forma, construimos un CW-complejo L tal que su subdivisión baricéntrica contiene como subcomplejo a un nudo trébol. Veamos ahora que todos los nudos de $\mathcal{X}(L)$ son triviales. Consideremos N un nudo de $\mathcal{X}(L)$ y veamos que es un nudo trivial separando en casos.

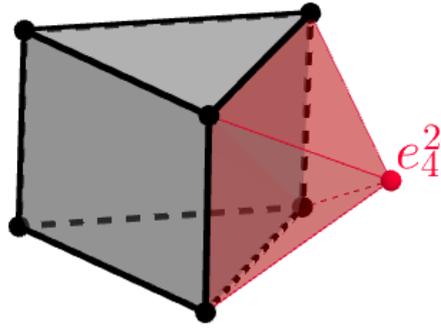


Figura 3.8: El 2-esqueleto de L embebido en \mathbb{R}^3 . En negro el 1-esqueleto de L , en rojo la 2-celda e_4^2 , que comparte borde con la celda e_2^2 .

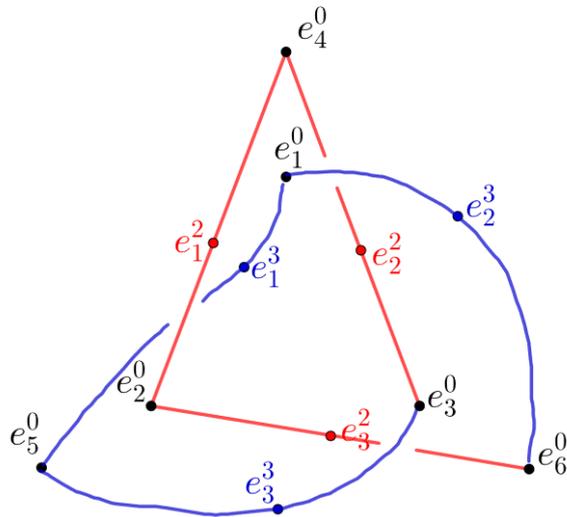


Figura 3.9: El nudo trébol contenido en L'

N contenido en $\mathcal{X}(L)_{\leq 2}$:

Notar que $Y = \mathcal{X}(L) \setminus \{e_2^2, e_1^3, e_2^3, e_3^3\}$ y $Z = \mathcal{X}(L) \setminus \{e_4^2, e_1^3, e_2^3, e_3^3\}$ son dos ME de \mathbb{S}^2 (ver figura 3.8), por lo que si N está contenido en alguno de estos subposets entonces es el borde de un disco y en particular es un nudo trivial por el corolario 2.2.6. En los casos faltantes, es fácil ver que N tiene que estar compuesto únicamente por cuatro elementos, por lo que, por la proposición 2.3.6, es isotópico por movimientos a un nudo de $\mathcal{X}(L)$ cuyos elementos son minimales y maximales.

N con solo un elemento en $\mathcal{X}(L)_3$:

Si e_1^3 o e_3^3 están en N , es fácil ver que N tiene que estar compuesto únicamente por cuatro elementos. Si $e_2^3 \in N$, podemos reemplazar a e_2^3 por e_2^2 para obtener un nudo isotópico por movimientos a N que esté contenido en Z y que por lo tanto sea el borde de un disco.

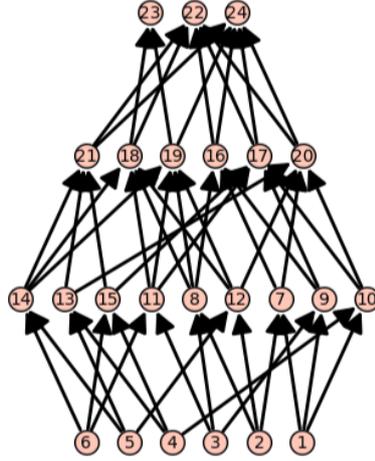


Figura 3.10: Diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(L)$. Los elementos 18 y 19 se corresponden con e_2^2 y e_4^2 . El elemento 23 se corresponde con e_2^3 .

N con tres elementos en $\mathcal{X}(L)_3$:

Notar que N tiene que tener exactamente seis elementos. Además, no puede tener elementos de $\hat{U}_{e_2^2}$, ya que estos son comparables con todos los elementos de $\mathcal{X}(L)_3$ (y en un nudo todos los elementos son comparables con exactamente dos elementos). Luego, como e_2^3 se tiene que poder comparar con dos elementos de N , tanto e_2^2 como e_4^2 tienen que ser elementos de N .

Llamemos x al sexto elemento de N y veamos que N es isotópico por movimientos a un nudo contenido en $\mathcal{X}(L)_{\geq 2}$. En efecto, como x no puede estar en $\hat{U}_{e_2^2}$ (que es igual que $\hat{U}_{e_4^2}$), si tomo un elemento de X_2 comparable con x no puede ser ni e_2^2 ni e_4^2 , por lo que reemplazando a x por este elemento, obtenemos un nudo isotópico por movimientos a N contenido en $\mathcal{X}(L)_{\geq 2}$.

Podemos suponer entonces que el sexto elemento de N es e_1^2, e_3^2, e_5^2 o e_6^2 . Utilizando SAGE, comprobamos que en los cuatro casos el grupo fundamental de N^c es \mathbb{Z} , por lo que son todos nudos triviales.

N con solo cuatro elementos:

Por la proposición 2.3.6, podemos suponer que los elementos de N son todos elementos maximales o minimales de $\mathcal{X}(L)$. Además, como la permutación obtenida al intercambiar e_1^3 con e_3^3 y e_2^2 con e_4^2 es un automorfismo de orden de $\mathcal{X}(L)$, podemos suponer que e_1^3 es un elemento de N . Luego, N se obtiene eligiendo dos elementos minimales de $\mathcal{X}(L)$ y un segundo elemento maximal que no sea e_1^3 , lo que da un total de 30 posibilidades. Nuevamente utilizando SAGE, podemos comprobar que en todos los casos el grupo fundamental de N^c es \mathbb{Z} y por lo tanto son todos nudos triviales.

El ejemplo anterior mostró que, si X es un modelo estricto de \mathbb{S}^3 , entonces el order complex puede agregar tipos de nudos. También vimos con el ejemplo 2.3.4 del capítulo 2 que tomar

el poset de celdas a un CW-complejo regular puede agregar tipos de links. Veamos ahora un ejemplo en donde el poset de celdas agrega tipos de nudos.

Ejemplo 3.2.2. *Nuestro objetivo es construir un CW-complejo regular L , homeomorfo a \mathbb{S}^3 , de tal manera que su poset de celdas contenga un nudo no trivial, mientras que todos los nudos contenidos en su 1-esqueleto sean triviales. Para eso, vamos a partir de un CW-complejo regular M que contenga a un nudo trébol y luego definir a L como el único CW-complejo regular tal que $\mathcal{X}(L)$ es isomorfo a $\mathcal{X}(M)^{op}$.*

La estructura celular de M será muy similar a la del ejemplo anterior. Igual que antes, partimos de seis 0-celdas y nueve 1-celdas, como se ve en la figura 3.6. Para formar un nudo trébol, adjuntamos seis 1-celdas como se ve en la figura 3.11.

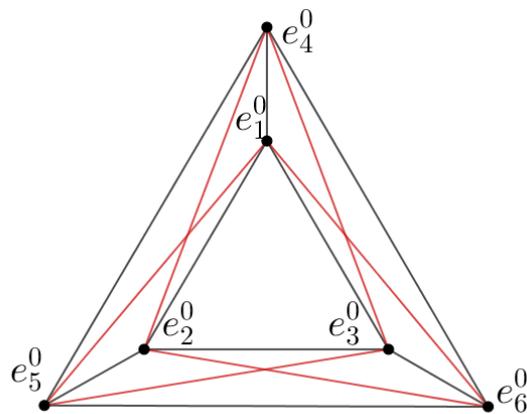


Figura 3.11: Proyección en \mathbb{R}^2 del 1-esqueleto de M . Las aristas en rojo formarán un nudo trébol.

Para el 2-esqueleto de M , partimos por adjuntar ocho 2-celdas para formar el complejo que se ve en la figura 3.12. Las caras cuadradas del prisma triangular tienen en su interior a las aristas $\{e_1^0, e_5^0\}$, $\{e_2^0, e_6^0\}$ y $\{e_3^0, e_4^0\}$.

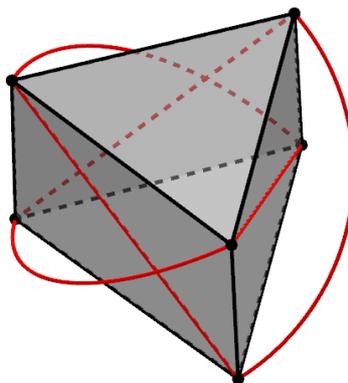


Figura 3.12

Completamos el 2-esqueleto adjuntando seis 2-celdas con bordes dados por los triángulos (e_1^0, e_2^0, e_4^0) , (e_2^0, e_4^0, e_5^0) , (e_2^0, e_3^0, e_5^0) , (e_3^0, e_5^0, e_6^0) , (e_1^0, e_3^0, e_6^0) y (e_1^0, e_4^0, e_6^0) . Podemos pensar al espacio obtenido hasta ahora como un prisma triangular al que se le adjuntó una 2-celda en cada una de sus caras cuadradas (similar a lo que se observa para una cara en la figura 3.8)

Para el 3-esqueleto, podemos adjuntar una 3-celda para “rellenar” el interior del prisma que se ve en la figura 3.12 y adjuntar tres 3-celdas para completar los huecos que se formaron entre las caras cuadradas del prisma y las últimas 2-celdas que adjuntamos, formando así un espacio homeomorfo a \mathbb{D}^3 . Adjuntando una última 3-celda para extender a \mathbb{S}^3 , completamos la estructura celular de M .

Llamemos X al poset $\mathcal{X}(M)^{op}$.

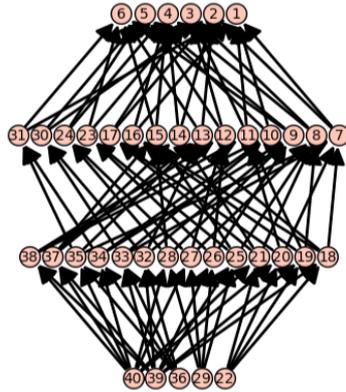


Figura 3.13: Diagrama de Hasse de X . El subposet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 16, 17, 30, 31\}$ forma un nudo no trivial.

Como X es un ME de una variedad combinatoria sin borde, es el poset de celdas de un CW-complejo regular L . Finalmente, es fácil ver que el 1-esqueleto de L se puede proyectar a \mathbb{R}^2 como un grafo planar (ver figura 3.14), por lo que todos los nudos de L contenidos en su 1-esqueleto tienen que ser triviales.

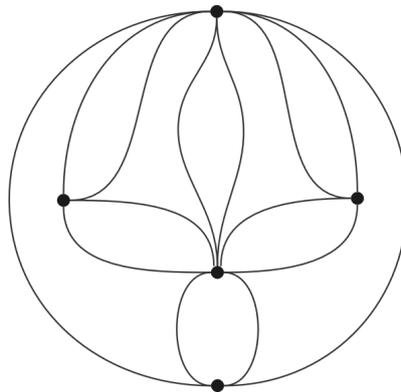


Figura 3.14: Embedding en \mathbb{R}^2 del 1-esqueleto de L .

El complejo M del ejemplo anterior nos sirve también como un ejemplo concreto de un CW-regular con un nudo no trivial, por lo que, como se adelantó en el capítulo anterior, podemos utilizar su estructura para contruir un ejemplo de un CW-complejo regular que contenga a un nudo trébol conformado únicamente por dos 0-celdas y dos 1-celdas. De esta forma, su poset de celdas tendrá un nudo no trivial con una estructura minimal de \mathbb{S}^1 .

Ejemplo 3.2.3. *Partamos de un CW-complejo regular M como en el ejemplo anterior, en donde sabemos que hay un nudo trébol. El objetivo va a ser retirar 0-celdas (y fusionar 1-celdas) en el nudo para obtener la misma curva pero formada únicamente por dos arcos.*

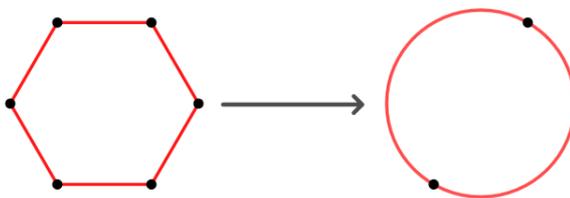


Figura 3.15

Para ello, podemos engordar los arcos cubriéndolos con dos estructuras similares a bananas (ver figuras 3.16 y 3.17).



Figura 3.16

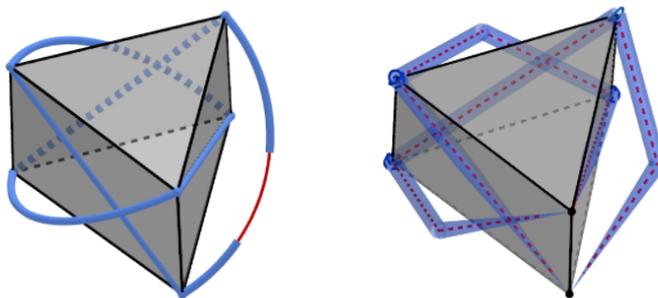


Figura 3.17

La estructura celular de cada “arista engordada” consta de seis 0-celdas, diez 1-celdas exteriores, una 1-celda interior, seis 2-celdas exteriores, dos 2-celdas interiores y dos 3-celdas.

Para el resto de la estructura celular, modificamos los bordes de las celdas de M según corresponda para dejarle lugar al engordado.

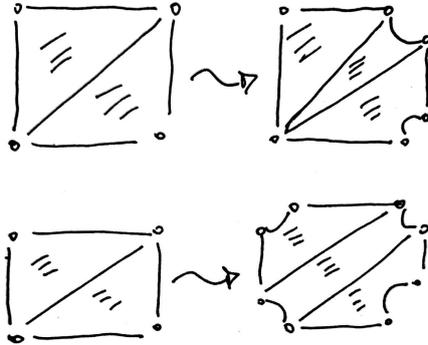


Figura 3.18: Las diagonales de las caras cuadradas de la figura 3.12 son ahora parte del engordado.

Si llamamos \tilde{L} a esta nueva estructura celular de \mathbb{S}^3 , podemos notar que la cantidad de celdas de \tilde{L} que no forman parte del engordado coincide con la cantidad de celdas de M que no forman parte del nudo trébol.

Finalmente, utilizando SAGE podemos comprobar que $\mathcal{X}(\tilde{L})$ es un modelo estricto de \mathbb{S}^3 que tiene un nudo no trivial de cuatro elementos.

Anexo

A continuación se da una lista, en un formato compatible con SAGE, de todos los posets mencionados en el capítulo 3. Por cómo representa SAGE a los posets, para los ejemplos del nudo trébol se optó por poner a los posets opuestos a los de los ejemplos, ya que en lugar de tener que enlistar a los elementos que cubren a un elemento dado, se menciona a los que son cubiertos por él (es decir, se menciona cuáles son los bordes de las celdas). De todas formas, utilizando el método *dual()* podemos pasar de un poset a su opuesto.

Se da también la estructura simplicial completa del ejemplo 3.1.1.

Poset ejemplo 3.2.1:

```
X= Poset({24:[16,17,19,20,21],23:[18,19],22:[16,17,18,20,21],
16:[7,8,9],17:[9,10,11,15],18:[8,11,12,14],19:[8,11,12,14],20:[7,10,12,13],21:[13,14,15],
7:[1,2],8:[2,3],9:[3,1],10:[1,4],11:[3,6],12:[2,5],13:[4,5],14:[5,6],15:[6,4], })
```

Poset ejemplo 3.2.2:

```
#Poset:
```

```
X= Poset({#-----1-esqueleto del prisma-----
```

```
7:[1,2],8:[3,4],9:[5,6],
```

```
10:[1,5],11:[1,3],12:[3,5],
```

```
13:[2,6],14:[2,4],15:[4,6],
```

```
#-----Cara cuadrada 1-----
```

```
16:[1,4],17:[2,3], #1-cel
```

```
18:[7,14,16],19:[16,8,11], #2-cel cara adentro
```

```
20:[11,7,17],21:[17,14,8], #2-cel cara afuera
```

```
22:[18,19,20,21], #3-cel
```

```
#-----Cara cuadrada 2-----
```

```
23:[3,6],24:[4,5], #1-cel
```

```
25:[8,15,23],26:[23,9,12], #2-cel cara adentro
```

```
27:[12,8,24],28:[24,15,9], #2-cel cara afuera
```

29:[25,26,27,28], #3-cel

Cara cuadrada 3

30:[5,2],31:[6,1], #1-cel

32:[9,13,30],33:[30,7,10], #2-cel cara adentro

34:[10,9,31],35:[31,13,7], #2-cel cara afuera

36:[32,33,34,35], #3-cel

Caras triangulares

37:[13,14,15], #Tapa de arriba

38:[10,11,12], #Tapa de abajo

Extensión a S3

39:[37,38,18,19,25,26,32,33], #Conifico las caras de adentro

40:[37,38,20,21,27,28,34,35], #Conifico las caras de afuera

})

#Nudo trébol:

K = X.subposet([1,2,3,4,5,6,23,24,16,17,30,31])

Poset ejemplo 3.2.3:

#Poset:

X= Poset(# Engordado 1

9:[1,2], #arista del nudo

10:[2,6],11:[3,6],12:[1,3],13:[1,4],14:[4,5],15:[5,2], #1-celdas del borde

16:[3,4],17:[3,4],18:[5,6],19:[5,6],

20:[12,13,16],21:[12,13,17],22:[16,11,18,14],23:[17,11,19,14], #2-celdas exteriores

24:[10,15,18],25:[10,15,19], #2-celdas exteriores

26:[9,10,11,12],27:[9,13,14,15], #2-celdas interiores

28:[26,27,20,22,24],29:[26,27,21,23,25], #3-celdas

Engordado 2

1009:[1,2], #arista del nudo

1010:[2,7],1011:[999,7],1012:[1,999], #1-celdas del borde

1013:[1,1000],1014:[1000,8],1015:[8,2],

1016:[999,1000],1017:[999,1000],1018:[8,7],1019:[8,7],

41:[1012,1013,1016],42:[1012,1013,1017],43:[1016,1011,1018,1014], #2-celdas exteriores

44:[1017,1011,1019,1014],45:[1010,1015,1018],46:[1010,1015,1019], #2-celdas exteriores
 47:[1009,1010,1011,1012],48:[1009,1013,1014,1015], #2-celdas interiores
 49:[47,48,41,43,45],52:[47,48,42,44,46], #3-celdas

#—————Cara cuadrada 1—————
 53:[1,2],54:[2,999],55:[1000,5],56:[1,6], #1-cel
 57:[53,54,1012],58:[55,56,1013,19], #2-cel cara adentro
 59:[55,1016,54,15],60:[53,56,10], #2-cel cara afuera
 61:[57,41,58,59,25,60], #3-cel

#—————Cara cuadrada 2—————
 62:[999,4],63:[3,7],64:[8,6], #1-cel
 65:[14,55,1017,62],66:[11,63,1019,64], #2-cel cara adentro
 67:[1011,63,16,62],68:[1014,55,18,64], #2-cel cara afuera
 69:[65,22,66,67,44,68], #3-cel

#—————Cara cuadrada 3—————
 70:[4,2],71:[8,1], #1-cel
 72:[1010,63,17,70],73:[1015,53,71], #2-cel cara adentro
 74:[13,53,70],75:[12,63,1018,71], #2-cel cara afuera
 76:[72,45,73,74,21,75], #3-cel

#—————Caras triangulares—————
 77:[70,54,62], #Tapa de arriba
 78:[71,56,64], #Tapa de abajo

#—————Extensión a S3—————
 79:[77,78,59,24,60,67,43,68,74,20,75], #Conifico las caras de adentro
 80:[77,78,57,42,58,65,23,66,72,46,73], #Conifico las caras de afuera
)

#Nudo trébol:
 K = X.subposet([1,2,9,1009])

Complejo simplicial del ejemplo 3.1.1, falta conificar el borde para obtener una triangulación de S^3 :

Conjunto de vértices de L :
 $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$

Conjunto de sımplices maximales de L :

$\{\{I, C, H, D\}, \{I, C, J, D\}, \{C, D, H, J\}, \{A, B, F, G\}, \{A, B, F, E\}, \{B, A, G, E\}, \{E, H, G, A\},$
 $\{E, H, D, A\}, \{J, A, D, F\}, \{A, J, F, E\}, \{J, D, E, A\}, \{J, E, H, D\}, \{F, B, E, J\}, \{E, B, C, J\},$
 $\{E, H, J, C\}\}$

1-sımplices del nudo trivial:

$\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{E, F\}, \{F, G\}, \{G, H\}, \{H, I\}, \{I, J\}, \{J, A\}\}$

Las aristas destacadas son $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$.

Poset de celdas del ejemplo 3.1.2:

#Poset:

$X = \text{Poset}(\{ 'A': ['AB', 'AH', 'AE', 'AF', 'AD'], 'B': ['AB', 'BC', 'BE', 'BF'], 'C': ['BC', 'CD', 'CH', 'CG'],$
 $'D': ['CD', 'DE', 'DH', 'DG', 'AD'], 'E': ['DE', 'EF', 'AE', 'BE', 'EH'], 'F': ['EF', 'FG', 'AF', 'BF'],$
 $'G': ['FG', 'GH', 'CG', 'DG'], 'H': ['GH', 'AH', 'CH', 'DH', 'EH'],$
 $'AB': [1, 2], 'BC': ['vi', 'ci'], 'CD': [6, 7], 'DE': ['V2', 'V4'], 'EF': [3, 4], 'FG': ['am', 'vi'], 'GH': [8, 9],$
 $'AH': ['V1', 'V3'], 'CH': [6, 8, 10, 'ci'], 'DH': [6, 9, 10, 'V1', 'V4'], 'CG': [7, 8, 10, 'vi'], 'DG': [7, 9, 10, 'am'],$
 $'AE': [1, 3, 5, 'V2', 'V3'], 'BE': [1, 4, 5, 'ci'], 'AF': [2, 3, 5, 'am'], 'BF': [2, 4, 5, 'vi'], 'AD': ['am', 'V1', 'V2'],$
 $'EH': ['ci', 'V3', 'V4'],$
 $1: [1234, 125], 2: [1234, 125], 3: [1234, 'S3'], 4: [1234, 'S3'], 5: [125, 'VI'], 6: [6789, 6710], 7: [6789, 6710], 8: [6789, 'S3'],$
 $9: [6789, 'S3'], 10: [6710, 'VI'], 'am': ['VI', 'S3'], 'vi': ['VI', 'S3'], 'ci': ['VI', 'S3'],$
 $'V1': ['VE', 'S3'], 'V2': ['VE', 'VI'], 'V3': ['VE', 'S3'], 'V4': ['VE', 'VI'] \}$

#Nudo trivial:

$K = X.\text{subposet}(['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'AB', 'BC', 'CD', 'DE', 'EF', 'FG', 'GH', 'AH'])$

Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. *Mathematicheskii Sbornik* 2, 1937, págs. 501-518.
- [2] J.A. Barmak. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. *Lectures Notes in Mathematics* Vol. 2032. Springer, 2011.
- [3] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Minimal finite models*. *J. Homotopy Relat. Struct.* 2, No. 1, 2007, págs. 127-140.
- [4] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Simple Homotopy Types and finite spaces*. *Adv. Math.* 218, 2008, págs. 87-104.
- [5] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Strong Homotopy Types, Nerves and Collapses*. *Discr. Comput. Geometry* 47, 2012, págs. 301-328.
- [6] B. Benedetti y F.H. Lutz. *Knots in collapsible and non-collapsible balls*. *Electronic Journal of Combinatorics* 20 (2013), No.3, 2013.
- [7] B. Benedetti y F.H. Lutz. *The dunce hat in a minimal non-extendably collapsible 3-ball*. *Electronic Geometry Model* No. 2013.10.001, 2013.
- [8] R. H. Bing. «Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture». En: *Lectures on modern mathematics*. Ed. por Thomas Lorie Saaty. Vol. 2. Wiley, 1964, págs. 93-128.
- [9] A. Björner. *Posets, Regular CW Complexes and Bruhat Order*. *Europ.J. Combinatorics* 5, 1984, págs. 7-16.
- [10] G. Burde y H. Zieschang. *Knots*. De Gruyter, 2002.
- [11] S.S. Cairns. *Triangulation of the manifold of class one*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 1935, págs. 549-552.
- [12] J.W. Cannon. *Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three*. *Annals of Mathematics* 110, 1979, págs. 83-112.
- [13] D. Cicchetti. *Implementaciones en SAGE de modelos estrictos*. URL: <https://github.com/cicchettiDante/Nudos-en-posets-tesis-de-licenciatura>.
- [14] M. Dehn. *Die beiden Kleeblattschlingen*. *Mathematische Annalen* 75, 1914, págs. 402-413.
- [15] X. Fernández. *SAGE Module Finite Topological Spaces*. URL: <https://ximenafernandez.github.io/code/2017-software-SAGE>.

- [16] S. Foldes y R. Woodroffe. *Antichain cutsets of strongly connected posets*. Order 30, 2013, págs. 351-361.
- [17] M.H. Freedman. *The topology of four-dimensional manifolds*. J. Differential Geom. 17, 1982, págs. 357-453.
- [18] R. Fritsch y R.A. Piccinini. *Cellular Structures in Topology*. Cambridge University Press, 1990.
- [19] Z. Frolík. *On the classification of 1-dimensional manifolds*. Acta Universitatis Carolinae Mathematica et Physica 3, 1962, págs. 1-4.
- [20] R. Furch. *Zur grundlegung der kombinatorischen topologie*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 3, 1924, págs. 69-88.
- [21] L.C. Glaser. *Geometrical Combinatorial Topology*. Vol. 1. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [22] C. Gordon y J. Luecke. *Knots are determined by their complements*. J. Amer. Math. Soc 2, 1989, págs. 371-415.
- [23] M. Hachimori. *A 3-sphere with a knotted triangle*. URL: https://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/nc_sphere_eng.html.
- [24] M. Hachimori y G. Ziegler. *Decompositions of simplicial balls and spheres with knots consisting of few edges*. Mathematische Zeitschrift 235, 2000, págs. 159-171.
- [25] C. Hog-Angeloni, W. Metzler y A. J. Sieradski. *Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*. Cambridge University Press, 1994.
- [26] J.F.P. Hudson. *Piecewise Linear Topology*. W.A: Benjamin, 1969.
- [27] L. H. Kauffman. *Knot Diagrammatics*. Handbook of Knot Theory, 2008.
- [28] R.C. Kirby y L.C. Siebenmann. *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, págs. 742-749.
- [29] W.B.R. Lickorish. *An introduction to knot theory*. Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer-Verlag, 1997.
- [30] A.T. Lundell y S. Weingram. *The topology of CW complexes*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.
- [31] F.H. Lutz. *Small examples of nonconstructible simplicial balls and spheres*. SIAM J. Discrete Math. 18, 2004, págs. 103-109.
- [32] C. Manolescu. *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*. J. Amer. Math. Soc 1, 2013, págs. 147-176.
- [33] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Mathematical Journal 33, 1966, págs. 465-474.

- [34] E.E. Moise. *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Annals of Mathematics 56, 1952, págs. 96-114.
- [35] J. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publishing Company, 1984.
- [36] C. Papakyriakopoulos. *A new proof of the invariance of the homology groups of a complex*. Bull. Soc. Math. Grèce 22, 1943, págs. 1-154.
- [37] C. Papakyriakopoulos. *On Dehn's lemma and asphericity of knots*. Annals of Mathematics 66, 1957, págs. 1-26.
- [38] G. Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. 2002. arXiv: math/0211159 [math.DG].
- [39] G. Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. 2003. arXiv: math/0303109 [math.DG].
- [40] J.S Provan y L.J. Billera. *Descompositions of simplicial complexes related to diameter of convex polyhedra*. Mathematics of Operations Research 5, 1980, págs. 576-594.
- [41] T. Radó. *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*. Aeta Univ. Szeged 2, 1925, págs. 101-121.
- [42] D. Rolfsen. *Knots and links*. Mathematics Lecture Series, No 7. Publish or Perish, 1976.
- [43] S.Akbulut y J.D. McCarthy. *Casson's Invariant for Oriented Homology Three-Spheres: An Exposition. (MN-36)*. Princeton University Press, 1990.
- [44] F. Santos. *Geometric bistellar flips. The setting, the context and a construction*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol 3, 2006, págs. 931-962.
- [45] I.M. Singer y J.A. Thorpe. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1967.
- [46] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1966.
- [47] J.H.C. Whitehead. *On C^1 -complexes*. Ann. of Math. 41, 1940, págs. 809-824.
- [48] E.C. Zeeman. *On the dunce hat*. Topology 2, 1963, págs. 341-358.