



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sobre la thinness de arista de un grafo

Manuel Robert

Directora: Flavia Bonomo-Braberman

Noviembre de 2025

Agradecimientos

Aprovecho esta sección para agradecer a algunas de las múltiples personas y circunstancias que me ayudaron a lo largo de la vida, con particular énfasis en lo relativo a la matemática.

Yendo en orden que intenta ser cronológico, primero que nada le digo gracias a mis viejos, por bancarme (y *bancarme*) a lo largo de la carrera y la vida. Gracias a Adrián, que fuiste el primero en mostrarme la matemática que existe afuera del aula. Gracias a Chechu, por fomentar mi gusto, interés, creatividad y pensamiento matemático, que empezaba a desarrollar más aceleradamente en esa época. Gracias a Santi, por el espacio de MatEnigmática; todavía me acuerdo el primer problema (y que no tuve idea de cómo plantear), así como otro muy lindo que si bien resolví en un momento de eureka, recién en la facultad efectivamente demostré que era una resolución válida. Gracias también por insistir en que vaya a la OMA, que si bien no me gustó, me sirvió para reafirmar mi gusto por la matemática recreativa, y el gusto de enfrentarse a un problema con lápiz, papel e interés, en vez de que el contexto de la matemática sea puramente un examen. Gracias Grace, por seguir fomentando mi interés en la matemática, y por dejarme escribirte chistes y comentarios graciosos en los exámenes. Posiblemente fuiste la primera en decirme que estaba la opción de estudiar matemática. Gracias a mis amigos y amigas, por todo lo que compartimos. Gracias al contexto de los juegos de rol que jugué, D&D 3.5 y Pathfinder, en el que tuve mucha diversión haciendo cosas que, con lo que sé hoy, puedo decir que tenía mucho de búsqueda de bibliografía y optimización combinatoria. Gracias a Katawa Shoujo, que considero me cambió, con las cosas que me mostró, hizo leer y pensar, en un momento en el que me sirvió mucho.

Gracias a Dano y Willy por aceptar ser jurados de esta tesis, y por todas las valiosas correcciones, comentarios y sugerencias. Gracias a Flavia, por ser mi directora, con toda la buena onda (y a Willy de nuevo por ponerme en contacto). Gracias a Eric, por todo lo que me permitiste mejorar la tesis; por las miles de veces que pegaste léidas y comentarios (en los dos idiomas), por todo lo que conversamos, y por el optimismo: yo quería patear la pathwidth a trabajo futuro pero insististe que salía, así que seguí buscando, y salió. Una pena que no pudiste ser co-director. Gracias a la cursada que tuve de Investigación Operativa; a Willy, Naza y Facu, donde no sólo me introdujeron a teoría de grafos, sino que a lo largo de la materia todo tuvo un gran énfasis en las aplicaciones reales, y la pasión que transmitieron por la optimización de esas cosas tangibles. Dado que hice la orientación Aplicada, si alguien ve una aplicación en esta tesis por favor me avisa.

También, gracias a la suerte que tuve de haber tenido y mantenido capacidades físicas que resultaran ser suficientes para llevar a cabo esta carrera, con todo lo que eso implica. Además, gracias a mi contexto socioeconómico que me permitió no sólo concentrarme en los estudios durante la carrera, sino que incluso en el período de cuarentena no me impidió continuar dedicándome plenamente a la facultad.

Finalmente, gracias a la Universidad Pública, y, más localmente, a la UBA y a Exactas, por todo lo que me enseñó y me permitió aprender. Estoy muy feliz de haber sido un alumno en esta casa de estudios.

Resumen

Definimos un nuevo parámetro de ancho de grafos, la *thinness de arista*, que corresponde a la thinness del grafo de línea del grafo de entrada. Encontramos relaciones cualitativas entre ese y otros parámetros de ancho conocidos, en particular que thinness de arista acotada implica pathwidth acotada, y conjeturamos que no solo el recíproco es verdadero, sino que ambos parámetros difieren en a lo sumo 1 en cualquier grafo. También encontramos que thinness acotada implica linear clique-width acotada cuando nos restringimos a grafos de línea.

Palabras clave: *thinness, parámetros de grafos, grafo de línea, pathwidth*

Abstract

We define a new graph width parameter, the *edge-thinness*, which corresponds to the thinness of the line graph of the input graph. We find qualitative relations between this and other known graph width parameters, namely that bounded edge-thinness implies bounded pathwidth, and we conjecture that not only the converse holds, but that both parameters differ by at most 1 on any graph. We also find that bounded thinness implies bounded linear clique-width when restricted to line graphs.

Keywords: thinness, graph width parameters, line graph, pathwidth

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Definiciones y Resultados Preliminares	9
1.1.1. Algunos parámetros de grafos	10
2. La thinness de arista de un grafo	13
2.1. Grafos línea-completos y casos particulares	18
3. Relaciones de la thinness de arista a otros parámetros de grafos	23
3.1. De thinness y vecinos no compartidos	28
3.2. La relación entre la pathwidth y la thinness de arista	36
4. Conclusiones y trabajo futuro	44

CAPÍTULO 1

Introducción

Los invariantes de grafos, también llamados parámetros de grafos, son funciones que asignan un número a un grafo —usualmente natural— que depende únicamente del grafo, y no de otras estructuras (como la representación gráfica); de ahí el nombre “invariantes”.

Este número puede ser interpretado como una medida de la complejidad del grafo en un sentido específico según el parámetro; como qué tan “difícil” es construirlo según un conjunto de operaciones (como es el caso de la *clique-width*), comprimir la información del grafo en alguna otra estructura (como son los casos del *treewidth* o el *pathwidth*) o particionar los vértices o aristas en clases con ciertas propiedades (como es el caso de coloreo de vértices o aristas), para nombrar algunos.

El valor de un parámetro de grafos en una familia de grafos dada es útil cuando un algoritmo es aplicado para resolver un problema. Dependiendo de cómo el algoritmo recorre el grafo, el valor de ese parámetro (o una función de ese parámetro) puede ser usado como cota inferior o superior para la complejidad de resolver el problema, con lo cual es posible detectar clases de grafos en los que resolver el problema tiene una facilidad (o dificultad) inherente. Alternativamente, puede ser usado en la prueba de correctitud de un algoritmo. Consideremos, por ejemplo, el algoritmo directo de colorear los vértices de un grafo cuando sabemos que no tiene ciclos: se puede demostrar que, en ese caso, alternar dos colores entre un vértice y todos sus vecinos da una solución válida y óptima.

La *thinness* es un parámetro de grafos. Fue definido por Mannino, Oriolo, Ricci y Chandran en [31], trabajo en el que probaron que el problema del conjunto indepen-

diente pesado máximo puede ser resuelto en tiempo polinomial, donde el exponente de la función polinomial depende del valor de la *thinness* del grafo de entrada, cuando una representación apropiada es dada. Más aún, el algoritmo para el cual usan la *thinness* como parámetro es una modificación de otro algoritmo que como parámetro usa la *pathwidth*. También prueban que, para todo grafo, la *thinness* no puede exceder la *pathwidth* por más que uno, pero la *pathwidth* puede ser arbitrariamente más grande que la *thinness*. Luego, usar la *thinness* en vez de la *pathwidth* es estrictamente mejor.

Sea G un grafo. Dado un orden total de sus vértices $<$ y una partición de sus vértices en clases, decimos que el orden es *consistente* con la partición si para cualquier terna de vértices $v_x < v_y < v_z$, donde v_x pertenece a la misma clase que v_y , y v_x es adyacente a v_z , entonces v_y es adyacente a v_z . Un grafo G es k -thin si existe una partición de sus vértices en k clases y un orden consistente con él, y la *thinness*(G) es el mínimo valor k tal que G es k -thin. La *thinness* está bien definida, ya que todo grafo de n vértices es n -thin. La *thinness* es una extensión de los *grafos de intervalos*¹, dado que tener valor de *thinness* 1 es equivalente a ser un grafo de intervalos [35, 37]. En lo que respecta a valores más altos de *thinness*, se sabe que los *bi interval graphs* (y el mismo concepto recibe el nombre de *interval bigraph* en otros trabajos), definidos por Harary, Kabell y McMorris en [23], son un subconjunto de los grafos 2-thin. Para los grafos k -thin en general, son equivalentes a una clase de grafo denominada *adjusted k -track chronological interval graph*[17].

Adicionalmente, como fue mencionado en el ejemplo de la *thinness* y el *pathwidth*, un estudio teórico de los parámetros de grafos proporciona relaciones entre ellos. Por ejemplo, uno podría acotar al otro, cuando se evalúan en cualquier grafo (este es el caso de la *pathwidth* contra la *treewidth*). Más en general, un parámetro puede estar acotado superiormente por alguna función de otro parámetro, cuando son evaluados en cualquier grafo (por ejemplo, la *thinness* es a lo sumo el *pathwidth* más uno). Estas relaciones pueden ser utilizadas para calcular, o acotar, un parámetro cuando otro es conocido. Ver Figura 1.1.

Por otro lado, el operador de grafo de línea es una operación unaria definida en cualquier grafo con al menos una arista. Dado un grafo G , definimos su *grafo de línea*, notado como $L(G)$, como el grafo que tiene como conjunto de vértices al conjunto de aristas de G , y dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y sólo si las dos aristas correspondientes comparten un extremo en G . Los grafos de línea fueron caracterizados por Beineke en [1] por una lista de nueve subgrafos inducidos prohibidos. Si G es $L(H)$, se dice que H es el *grafo raíz* de G . El grafo raíz es único para todo grafo de línea conexo excepto el triángulo (que tiene dos raíces, el mismo triángulo y el *claw* $K_{1,3}$) [46], y puede ser computado en tiempo polinomial [29, 42].

Para diversos parámetros, existen trabajos que estudian el comportamiento de un

¹Ver en Sección 1.1

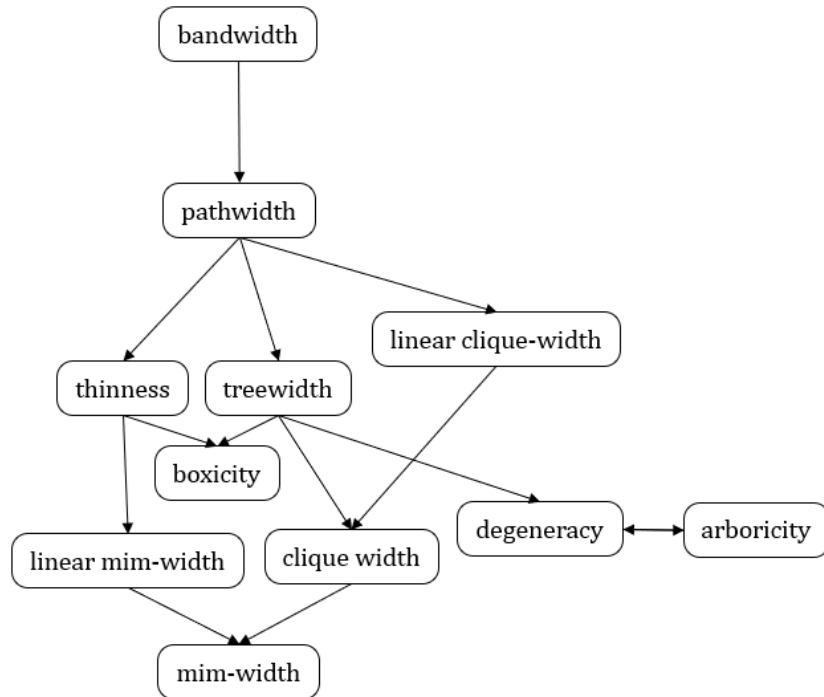


Figura 1.1: Diagrama de relaciones conocidas entre parámetros. Una flecha de A a B significa “para cualquier familia de grafos en la que A esté acotada, B también está acotada”. Si hay una flecha en un sólo sentido, la recíproca no se cumple. La ausencia de flecha indica que la propiedad no es verdadera en ninguna dirección. Este diagrama es transitivo, por lo que lo mismo se cumple para caminos que sigan los sentidos de las flechas. Referencias a estas relaciones se dan en la Sección 1.1.1.

parámetro en el grafo de línea con respecto al parámetro en el grafo. Por ejemplo, [10, 26, 28].

En este trabajo, estudiaremos el efecto del operador de grafo de línea sobre la *thinness*. De particular interés es encontrar cotas superiores o inferiores para $thinness(L(G))$ usando propiedades de G , y cómo construir grafos tal que sus grafos de línea tengan alta *thinness*. En este aspecto, encontramos que si G o algún sub-grafo de G tiene alto grado mínimo, su grafo de línea tiene alta *thinness*. También encontramos que grafos de alta *pathwidth* tienen grafos de línea con alta *thinness*, de lo cual obtenemos que los grafos de línea de grafos con alta *thinness* tienen alta *thinness*.

Este trabajo está organizado en dos secciones principales. La primera introduce el parámetro en cuestión, nombrado *thinness de arista*, y se muestran algunas defi-

niciones y resultados. En la segunda sección principal se define el marco por el cual se comparan distintos parámetros de grafos y se desarrollan varias demostraciones relacionando la *thinness* de arista con otros parámetros, incluyendo fórmulas que producen cotas inferiores para la *thinness* de arista.

1.1. Definiciones y Resultados Preliminares

Dados dos conjuntos L y R denotamos su diferencia como $L \setminus R$, es decir, el conjunto de elementos que pertenecen a L pero no a R . El cardinal de un conjunto S se denota por $|S|$. Denotamos a la familia de todos los grafos como \mathbb{G} .

Un grafo G tiene un conjunto de *vértices*, también llamados *nodos*, denotado por $V(G)$, y un conjunto de *aristas*, denotado por $E(G)$. Cada arista es un par no ordenado de vértices distintos. Todos los grafos en este trabajo son finitos, y no hay múltiples aristas entre ningún par de vértices.

Decimos que dos vértices v y w son *adyacentes*, o *vecinos*, si y sólo si hay una arista con extremos v y w . Para un dado vértice v , definimos su *vecindario*, denotado por $N(v)$, como el conjunto de sus vecinos, y su *vecindario cerrado*, denotado por $N[v]$, como $N(v) \cup \{v\}$. En el caso de las aristas, diremos que dos aristas son adyacentes si comparten un extremo. Una arista con extremos v y w será denotada por (v, w) o, equivalentemente, vw . Decimos que una arista *incide* en un vértice si es uno de sus extremos. El *grado* de un vértice v es el número de vecinos que tiene, y será denotado $d(v)$. En un grafo G , nos referiremos al *mínimo grado* como $\delta(G)$ y al *máximo grado* como $\Delta(G)$.

Diremos que dos grafos G y H son *isomorfos* si existe una biyección f entre sus conjuntos de vértices tal que, para cualquiera dos vértices u, v de G , tenemos que $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E(H)$.

Dado un grafo G , un grafo H es un *subgrafo* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Adicionalmente, será llamado un subgrafo *inducido* si todo par de no vecinos en H son no vecinos en G . Dado un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, denotaremos como $G[S]$ al subgrafo inducido que tiene como conjunto de vértices a S . Para un vértice v , denotaremos por $G - v$ al subgrafo inducido con conjunto de vértices a $V(G) \setminus \{v\}$. Para dos grafos G y H con conjuntos de vértices disjuntos, definimos la *unión de grafos* $G + H$ como el grafo donde $V(G + H) := V(G) \cup V(H)$ y $E(G + H) := E(G) \cup E(H)$.

Denotamos por K_n al grafo *completo* de n vértices, cuyos vértices son adyacentes dos a dos. Nos referiremos a K_3 como un *triángulo*, y lo usamos indistintamente. Dado un grafo G , una *clique* es un subgrafo de G que es un grafo completo, y el tamaño de clique máximo será denotado por $\omega(G)$. Un grafo con la propiedad de que sus vértices pueden ser particionados en dos clases de tamaños r y s con la propiedad de que todos los vértices de una clase son adyacentes a todos los de la otra y a ninguno de la

propia es llamado un grafo *bipartito completo* y es denotado por $K_{r,s}$. Una *n-estrella* es $K_{1,n}$. Un *grafo multipartito completo* es una generalización de los grafos bipartitos completos, donde los vértices pueden ser particionados en k clases tal que el subgrafo inducido por dos clases cualesquiera es un subgrafo bipartito completo. Un grafo se dice *regular* si todos sus vértices tienen igual grado. Un grafo grilla, notado $Gr_{p,q}$ es un grafo que tiene pq vértices $v_{i,j}$ donde $1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq q$ y dos vértices $v_{i,j}$ y $v_{r,s}$ son adyacentes si y sólo si $|i - r| + |j - s| = 1$.

Un vértice será referido como *colgante* si tiene grado 1. También puede ser referido como una *hoja*, extendiendo la nomenclatura de árboles. Una arista será referida como *colgante* si al menos uno de sus extremos es un vértice colgante. Un vértice es *aislado* si no tiene vecinos, y una arista es *aislada* si ambos extremos tienen grado 1. Un *grafo camino* de largo $n \geq 2$ es un grafo que tiene n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ donde v_1 y v_n son llamados los *extremos*, y para cualquier índice k en $\{2, \dots, n-1\}$ tenemos que v_k es adyacente solamente a v_{k-1} y a v_{k+1} , mientras que v_1 es adyacente solamente a v_2 y v_n es solamente adyacente a v_{n-1} . El grafo camino de n vértices será denotado por P_n . La *longitud* de un camino es la cantidad de aristas; es decir que el largo de un camino de n vértices es $n-1$. Una *caterpillar* (oruga) es un grafo tal que la eliminación de todos sus vértices colgantes resulta en un camino. Un *ciclo* de largo $k \geq 3$ es un camino de k vértices con la adición de una arista conectando sus extremos. Un *camino/ciclo en G* es un camino/ciclo que es un subgrafo de G .

La *distancia* entre dos vértices u y v de un grafo G es el mínimo largo de un camino en G con extremos u y v (o $+\infty$ si no existe ninguno). Un grafo es *conexo* si la distancia entre cualquiera dos vértices es finita, y el *diámetro* de un grafo conexo es la máxima distancia entre pares de vértices. Una *componente conexa* de un grafo G es un subgrafo conexo maximal (en el orden dado por la inclusión). Un grafo conexo es un *árbol* si no tiene ciclos.

Decimos que un grafo G es un *grafo de intervalos* si existe una familia de intervalos en la recta real y una correspondencia entre estos intervalos y los vértices de G de modo que dos vértices son adyacentes si y sólo si los intervalos tienen intersección no vacía (Figura 1.2).

1.1.1. Algunos parámetros de grafos

A lo largo de este trabajo nos referiremos a una multitud de parámetros. Dado que, como regla general, no usaremos las definiciones de estos parámetros, simplemente los nombraremos y referenciaremos en esta sección. Definiremos (en la sección apropiada) sólo aquellos cuya definición usemos en alguna demostración.

- Treewidth [40]
- Pathwidth [39]

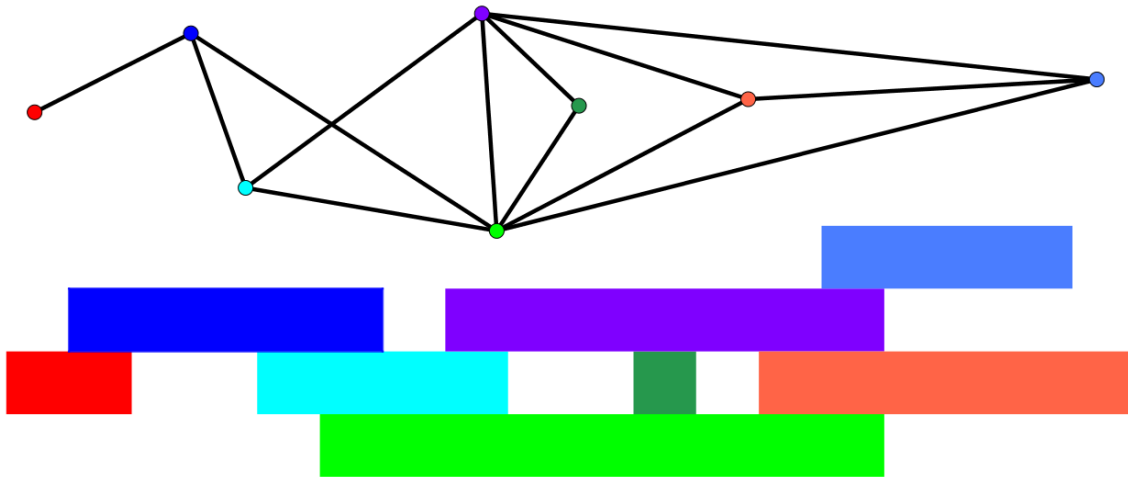


Figura 1.2: Un grafo de intervalos, donde la correspondencia está dada por los colores.

- Branchwidth [41]
- Clique-width [15]
- Linear Clique-width [21]
- Mim-width [45, 4]
- Linear Mim-width [2, 27]
- Degeneracy [30, 3]
- Arboricity [33]
- Bandwidth [24, 28]
- Cutwidth [20, 26]
- Boxicity [38]
- Número cromático (también notado χ , definido implícitamente por Francis Guthrie en 1852 en su conjetura de los cuatro colores)

Usaremos, como propiedades elementales, que las siguientes cotas son válidas para cualquier grafo G :

- $bandwidth \geq pathwidth$ [36]

- $pathwidth \geq treewidth$ (inmediato de la definición)
- $treewidth \geq degeneracy$ [3]
- $treewidth \geq arboricity$ [18]
- $pathwidth + 1 \geq thinness$ [31]
- $thinness \geq boxicity$ [31]
- $thinness \geq linear\ mim-width$ [4]
- $linear\ mim-width \geq mim-width$ (inmediato de la definición)
- $clique-width \leq 3 \cdot 2^{treewidth-1} + 1$ [14]
- $f(clique-width) \geq mim-width$ para alguna f [45]
- $f(pathwidth) \geq linear\ clique-width$ para alguna f [21]
- $arboricity \leq degeneracy \leq 2 \cdot arboricity - 1$ [47]

CAPÍTULO 2

La thinness de arista de un grafo

Dado que todo grafo tiene un valor de thinness y todo grafo tiene un grafo de línea (excepto los poco interesantes grafos sin aristas), definimos el invariante de grafo *thinness de arista* de la siguiente manera, y con notación \mathcal{L} -thinness:

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) := \begin{cases} 0 & \text{si } E(G) = \emptyset \\ \text{thinness}(L(G)) & \text{si no} \end{cases}$$

Dos propiedades básicas de la thinness son las siguientes:

Lema 1. *Sea G un grafo. Para cualquier H subgrafo inducido de G , tenemos que $\text{thinness}(G) \geq \text{thinness}(H)$.*

Demostración. Consideremos cualquier orden y partición consistentes de los vértices de G en k clases. Nos referimos al orden por $<$ y diremos que $\varphi(v) = \varphi(w)$ si y sólo si los vértices v y w pertenecen a la misma clase. Para un subgrafo inducido H , consideramos el orden inducido $<_H$ definido por $v <_H w$ si y sólo si v y w son vértices de H y $v < w$, y a la partición inducida definida por $\varphi_H(v) = \varphi_H(w)$ si y sólo si v y w son vértices de H y $\varphi(v) = \varphi(w)$. En otras palabras, suponemos que estamos simplemente eliminando vértices tanto del orden como de la partición, pero sin cambiar ninguna estructura. Supongamos que el orden no es consistente con la partición. Esto significa que existen tres vértices de H , u, v, w tal que $u <_H v <_H w$, $\varphi_H(u) = \varphi_H(v)$, w es adyacente a u pero no a v . Como H es un subgrafo inducido de G , junto con las definiciones del orden y la partición, esto muestra que, reemplazando $<_H$ con $<$ y φ_H con φ , el orden y partición dados no pueden ser consistentes, una

contradicción. Como usamos a lo sumo k clases, usando una partición óptima en G logramos llegar a que existe un orden y partición consistente de H que usa a lo sumo $\text{thinness}(G)$ clases. \square

Notemos que esta propiedad no vale si reemplazamos *subgrafo inducido* por subgrafo a secas, ya que existen familias de grafos con thinness arbitrariamente grande (por ejemplo los grafos grilla [12, 5]), pero todo grafo de n vértices es subgrafo de K_n y, como los grafos completos son grafos de intervalos, $\text{thinness}(K_n) = 1$ para todo n .

Lema 2 ([4, Teorema 14]). *Sean G, H grafos. Entonces*

$$\text{thinness}(G + H) = \max(\text{thinness}(G), \text{thinness}(H)).$$

Demostración. Demostración omitida, ver [4]. La idea básica es concatenar los órdenes y establecer una correspondencia entre las clases de ambos grafos, de manera de no definir más de $\max(\text{thinness}(G), \text{thinness}(H))$ clases. \square

Vemos que estas propiedades tienen sus respectivas contrapartes en la thinness de arista:

Lema 3 (Monotonía). *Sea G un grafo y sea H cualquier subgrafo de G . Entonces, $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \mathcal{L}\text{-thinness}(H)$.*

Demostración. Por propiedades elementales de los grafos de línea, $L(H)$ es un subgrafo inducido de $L(G)$. Concluimos usando Lema 1. Tenemos entonces que

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) = \text{thinness}(L(G)) \geq \text{thinness}(L(H)) = \mathcal{L}\text{-thinness}(H).$$

\square

Extendiendo la nomenclatura de thinness de arista, usaremos el modificador “de arista” como abreviatura para evaluar un parámetro en el grafo de línea. De esta manera, diremos P de arista para referirnos al parámetro $P(L(G))$ donde G es el grafo donde se evalúa, y en fórmulas lo notaremos $\mathcal{L}\text{-}P$. Notar que la propiedad de la thinness usada en el Lema 3 es bastante común en parámetros de grafos. Ciertamente, para cualquier parámetro P que no incremente ante tomar subgrafos inducidos, P de arista similarmente no incrementaría ante tomar cualquier subgrafo.

Adicionalmente, la thinness de arista se comporta bien en grafos desconexos:

Lema 4 (No Interferencia). *Si G es desconexo,*

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) = \max_{G_i} \{\mathcal{L}\text{-thinness}(G_i)\}$$

donde G_i son las componentes conexas de G .

Demostración. Nuevamente, esta demostración es directa usando propiedades básicas. Por un lado, $L(G + H) = L(G) + L(H)$, mientras que por otro lado tenemos que $\text{thinness}(G + H) = \max(\text{thinness}(G), \text{thinness}(H))$ usando Lema 2. Construyendo al grafo G iterativamente uniendo las componentes conexas, llegamos al resultado usando ambas igualdades en cada paso. \square

Dado que el problema de la thinness de arista involucra particionar los vértices del grafo de línea, es posible visualizar tanto el orden como la partición en el grafo original, donde la partición es en las aristas. A modo de ejemplo, referirse a Figura 2.1

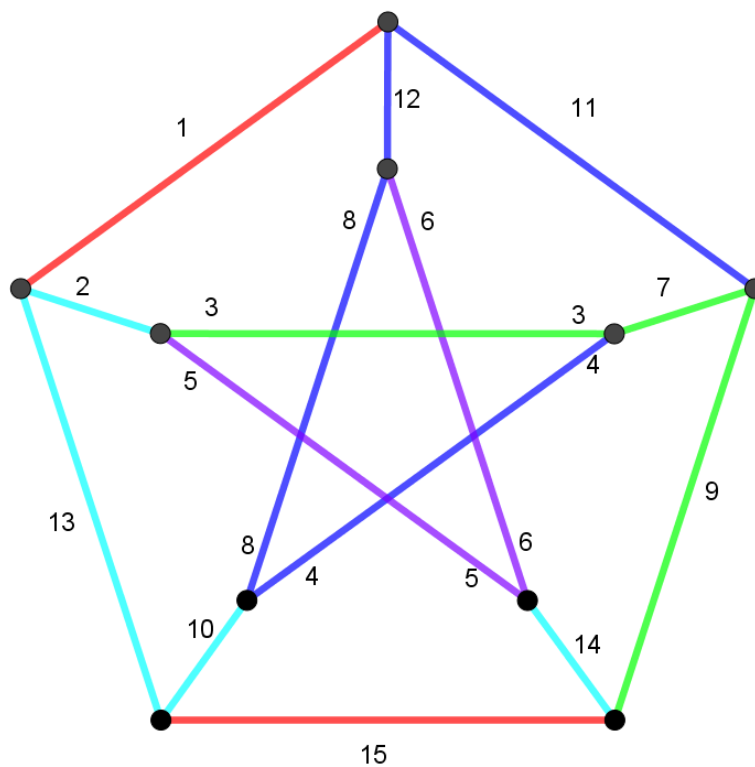


Figura 2.1: Un orden y partición consistentes de las aristas del grafo de Petersen en 5 clases, representados por sus colores. El orden de las aristas es el inducido por sus etiquetas. Para facilitar la lectura, algunas aristas fueron etiquetadas en ambos extremos.

En el contexto de la thinness, el Lema 1 nos dice que dado un grafo G y un orden y partición consistentes de sus vértices, para cualquier subgrafo H , el mismo (aunque inducido) orden y partición son consistentes en H . Pero, en particular, el

grafo inducido por una clase cualquiera en la partición consistente tiene valor de thinness 1, por lo que es un grafo de intervalos. En nuestro caso, una pregunta natural es: ¿cuáles son las posibles configuraciones para una clase de aristas? ¿Cómo son los grafos de thinness de arista 1? Esos son exactamente los grafos cuyos grafos de línea son grafos de intervalos.

Claramente, los caminos pertenecen a esa clase, al igual que el triángulo. Y si bien no es difícil de ver que todas las caterpillars también cumplen que su thinness de arista es igual a 1, no hay mucha más variedad.

Este problema fue resuelto por Skrien [43], que mostró que un grafo conexo G tal que $L(G)$ es un grafo de intervalos pertenece a una superclase de caterpillars que define como *meta-caterpillar*.

Definición 1 (Meta-caterpillar). Sea P un grafo camino de largo k . Para cada par de vértices adyacentes u y v , crear a lo sumo un vértice w que sea adyacente a u y v . Además, para cada vértice v de P , crear un conjunto de vértices L_v que son adyacentes únicamente a v . El cardinal de este conjunto no tiene restricciones. Un grafo G es una meta-caterpillar si y sólo si es el resultado de aplicar estas operaciones en un grafo camino P . Notar que una dada meta-caterpillar puede no tener única construcción.

En la Figura 2.2 mostramos un ejemplo de una meta-caterpillar y en la Figura 2.3 mostramos un esquema de la representación del grafo de línea de dichos grafos como grafo de intervalos.

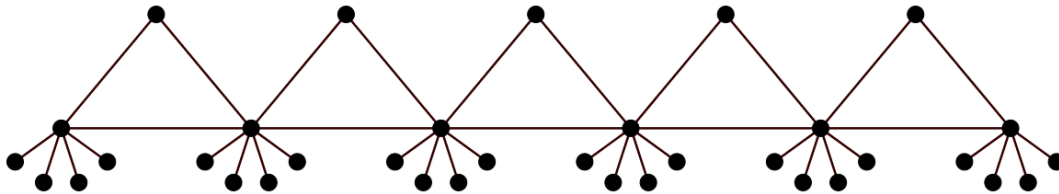


Figura 2.2: Una meta-caterpillar.

Para un grafo dado G con una partición consistente de sus aristas se concluye que para cada clase en la partición, todas las componentes conexas son meta-caterpillar.

Notar que para cualquier grafo G con n vértices, el número de aristas es a lo sumo $\frac{n(n-1)}{2}$, y este número también es una cota superior para la thinness de arista. Esto se deduce simplemente de aplicar que la thinness está acotada por el número de vértices (dado que si no hay dos vértices en una misma clase, la condición de consistencia se satisface), junto con considerar el grafo de línea. Ahora presentamos una cota superior que es asintóticamente mejor.

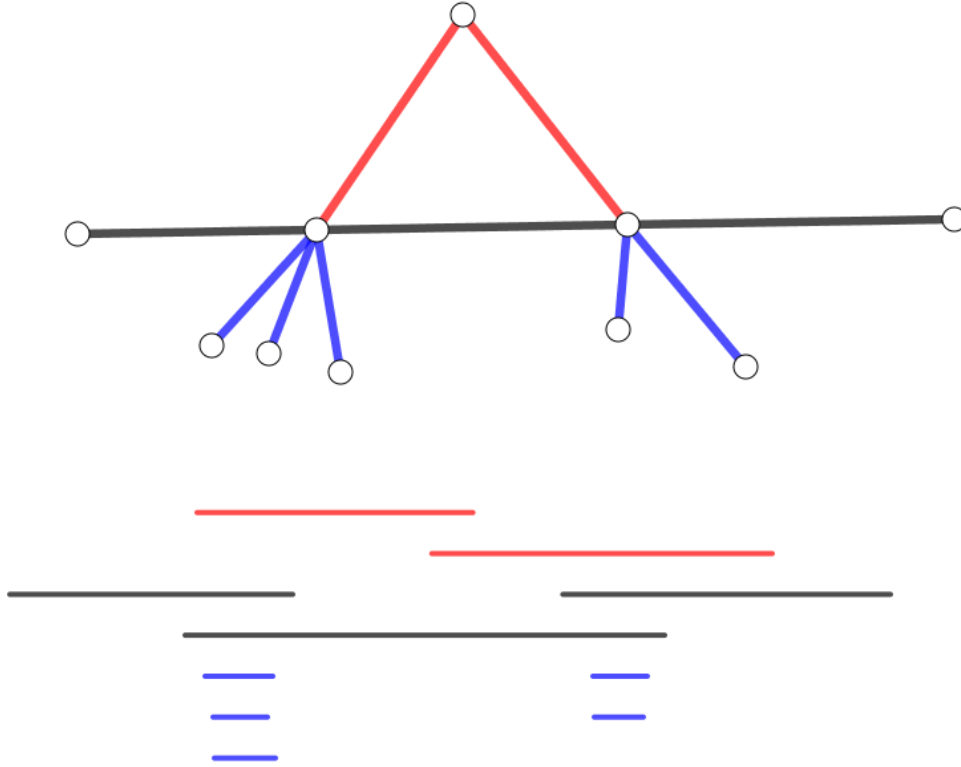


Figura 2.3: Una representación de intervalos de las aristas de una meta-caterpillar. Para facilitar la lectura, las aristas están coloreadas, y los intervalos están presentados a diferentes alturas para capturar adecuadamente los respectivos extremos.

Lema 5. Sea G un grafo y sea N el máximo número de vértices de entre todas sus componentes conexas. Entonces,

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \leq \begin{cases} \frac{(N-1)^2}{4} + N - 1 & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \frac{N(N-2)}{4} + N - 1 & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $\frac{G}{K}$ el grafo donde cada componente conexas de G es reemplazada por una clique del mismo tamaño que la componente conexas original. Como G es un subgrafo de $\frac{G}{K}$, por el Lema de Monotonía (3), sabemos que $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(\frac{G}{K})$. También, por el Lema de No Interferencia (4) sabemos que, dado que todas las componentes conexas de $\frac{G}{K}$ son subgrafos de su componente conexas más grande, $\mathcal{L}\text{-thinness}(\frac{G}{K}) = \mathcal{L}\text{-thinness}(K_N)$, donde N es el máximo número de vértices de entre todas las componentes conexas. Para todo grafo H , es sabido [31,

Teorema 3.3] que $\text{thinness}(H) \leq \text{pathwidth}(H) + 1$, y además, usamos la fórmula de Harvey y Wood [25]:

$$\text{pathwidth}(L(K_N)) = \begin{cases} \frac{(N-1)^2}{4} + N - 2 & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \frac{N(N-2)}{4} + N - 2 & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases}$$

Conectamos estos hechos y alcanzamos

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \leq \text{pathwidth}(L(K_N)) + 1 = \begin{cases} \frac{(N-1)^2}{4} + N - 1 & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \frac{N(N-2)}{4} + N - 1 & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases}$$

□

Entonces, asintóticamente, esta fórmula parte a la mitad a la cota superior trivial dada por el número de aristas.

2.1. Grafos línea-completos y casos particulares

En esta sección revisaremos algunos resultados conocidos sobre la thinness que se refieren a ciertas configuraciones de vértices. Adicionalmente, exploraremos qué configuraciones de vértices y aristas de un grafo G son necesarias para que podamos asegurar que su grafo de línea tiene cierta propiedad deseada.

Comenzamos con algunas definiciones, empezando por los módulos de clusters, y gemelos verdaderos y falsos. Entre otras propiedades, la conexión entre los módulos de clusters o los gemelos y la thinness fue explorada por Bonomo, Brandwein y Sau en [7].

Definición 2 (Gemelos). *Dado un grafo G , dos vértices u y v son llamados gemelos si, para cualquier otro vértice $w \notin \{u, v\}$, tenemos que w es adyacente a u si y sólo si es adyacente a v . Además, son llamados gemelos verdaderos si u y v son adyacentes, y falsos gemelos si no.*

Definición 3 (Cluster). *Un conjunto C de vértices en un grafo G es un cluster si $G[C]$ es una unión de grafos completos.*

Definición 4 (Módulo). *Dado un grafo G , un conjunto de vértices M es un módulo si, para todo vértice $v \notin M$, v es adyacente a o bien todos los vértices de M o a ninguno. Adicionalmente, un módulo M es trivial si, para todo par de vértices v, w con $v \in M, w \notin M$, tenemos que v no es adyacente a w .*

Dado un grafo G , diremos que un conjunto de vértices S es un *módulo de clusters* si es un módulo y un cluster. Observar que un par de gemelos verdaderos es un módulo de clusters.

Lema 6 ([7, Lema 1]). *Sea G un grafo tal que $Q \subseteq V(G)$ es un módulo de clusters. Sea S un conjunto de vértices que contiene exactamente un vértice de cada componente conexa de $G[Q]$. Entonces, $\text{thinness}(G) = \text{thinness}(G[S \cup (V(G) \setminus Q)])$.*

Este lema puede ser interpretado como que la contracción de cada componente conexa de un módulo de clusters no altera la thinness de un grafo. Ahora exploraremos los gemelos y los módulos de clusters del grafo de línea. Comenzamos con las cliques, y nombramos la siguiente propiedad para facilidad de uso:

Definición 5 (Grafos línea-completos). *Un grafo conexo G es un grafo línea-completo si $L(G)$ es un grafo completo.*

Entonces, la pregunta a considerar es: ¿Cuáles son los grafos línea completos? Es directo ver que tanto las estrellas como el triángulo son grafos línea-completos. El siguiente resultado nos dice que estos son los únicos.

Lema 7 (Caracterización de grafos línea-completos). *Si G es un grafo línea-completo, G es o bien una n -estrella o el triángulo.*

Demostración. Construiremos un grafo línea-completo que no es una estrella. Las estrellas son exactamente los grafos que cumplen que todas las aristas son incidentes en un vértice en común, así que empezamos negando este enunciado. Sea v un vértice de G en el que incide al menos una arista. Como G no es una estrella de centro v , existe una arista e_1 que no es incidente en v , es decir que $e_1 = (u, w)$ con $u \neq v \neq w$. Por hipótesis, existe una arista e_2 que es incidente en v y, por ser G línea-completo, e_2 es adyacente a e_1 ; sin pérdida de generalidad digamos que e_2 es incidente en u . Sea e_3 una arista que no es incidente en u (que, nuevamente, debe existir dado que de otra forma G es una estrella centrada en u). Dado que e_3 debe ser adyacente a tanto e_1 como e_2 porque G es línea-completo, la arista e_3 debe ser incidente en tanto v como w , ya que no hay otra posibilidad. Llegamos a que $e_3 = (v, w)$. Hemos construido un triángulo. ¿Cuáles son las implicancias de esto? Que cualquier grafo G línea-completo que no es una estrella debe tener un triángulo como subgrafo. Pero observar que es imposible que, en un grafo simple, una cuarta arista sea adyacente simultáneamente a las tres aristas de un triángulo, por lo que G no puede tener ninguna arista más. Con esto, concluimos que no hay ningún otro grafo línea-completo salvo las estrellas y K_3 . \square

Por supuesto, una demostración más directa del mismo teorema es usando el Teorema de Whitney de [46]. Procedemos con estas definiciones.

Definición 6 (Estrella colgante). *Dado un grafo G , llamamos a un subgrafo S una estrella colgante si es conexo y todos salvo uno de sus vértices tienen grado 1 en G .*

En otras palabras, una estrella colgante es una n -estrella inducida con $n \geq 2$ con el requerimiento adicional de que los vértices no centrales son colgantes en G .

Definición 7 (Triángulo colgante). *Dado un grafo G , llamaremos a un subgrafo T un triángulo colgante si es un triángulo y al menos dos de sus vértices tienen grado 2 en G .*

Si un triángulo colgante es una componente conexa, sus aristas forman un módulo de clusters en el grafo de línea. Luego, por Lema 6, la eliminación de dos de sus aristas no altera la thinness de arista. Pero este caso particular no nos brinda ninguna información nueva. Más aún, el triángulo puede ser eliminado sin alterar la thinness de arista, siempre y cuando haya al menos alguna otra arista en el grafo; esto es simplemente el uso del Lema de No Interferencia [Lema 4]. Adicionalmente, excepto que un triángulo colgante sea una componente conexa, existe un vértice con grado al menos 3. Los vértices correspondientes a las dos aristas del triángulo colgante incidente en ese vértice son gemelos verdaderos del grafo de línea.

Con esto, estamos listos para distinguir en qué casos podemos aplicar Lema 6 en los grafos de línea.

Teorema 1 (Caracterización de módulos de clusters en grafos de línea). *Los únicos módulos de clusters no triviales de los grafos de línea son los vértices correspondientes a, o bien las aristas de una estrella colgante, o a los gemelos de un triángulo colgante del grafo raíz.*

Demostración. Primero, notar que dado que los módulos de clusters son clusters, los vértices que forman módulos de clusters conexos en el grafo de línea deben estar representando a las aristas de estrellas o un triángulo en el grafo raíz, por Lema 7. Además, dado que estamos excluyendo a los triángulos aislados por ser módulos triviales, la única opción para las aristas es que formen una estrella. Entonces lo único que hace falta es averiguar cómo las otras aristas del grafo están conectadas a esta estrella. Si la estrella con vértice central v_c tiene sólo dos aristas, digamos (v_c, v_1) y (v_c, v_2) . los otros extremos pueden estar conectados por la arista (v_1, v_2) , pero ninguna arista no incidente en v_c puede ser adyacente a ambas aristas, y entonces podemos ver que la estrella es o bien una estrella colgante (de dos vértices) o es un subgrafo de un triángulo colgante.

Si la estrella tiene más que dos vértices, llamados v_i , entonces debe ser una estrella

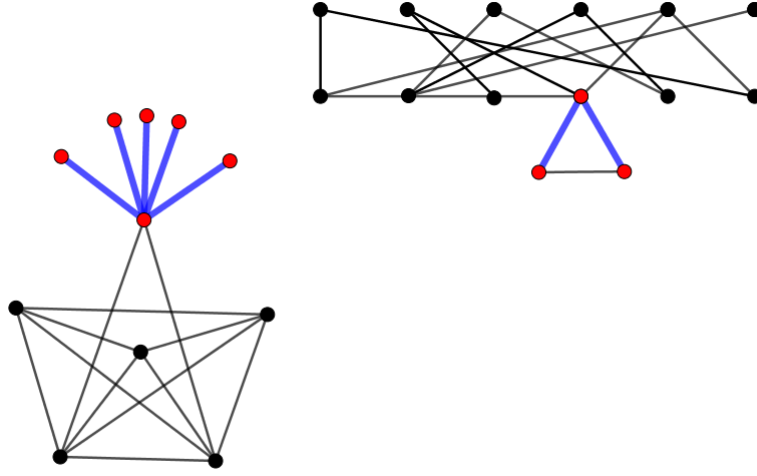


Figura 2.4: Un ejemplo de un triángulo colgante y una estrella colgante. Los vértices relevantes están coloreados en rojo. En cada grafo, todas excepto una de las aristas azules pueden ser eliminadas sin cambiar la thinness de arista.

colgante, dado que de haber alguna arista incidente en algún v_i , para que esta arista fuera adyacente a todas las aristas de la estrella debería ser incidente en todos los v_i , que son al menos 3, y por lo tanto es imposible. Observar que no puede ser incidente en v_c dado que la arista (v_c, v_i) ya está presente. \square

Luego, aplicando Lema 6 en las componentes conexas de los módulos de clusters de $L(G)$ vemos que contraer cada componente conexa se traduce en G a eliminar todas excepto una arista de una estrella colgante, o eliminar una de las dos aristas gemelas verdaderas de un triángulo colgante. Para una aplicación de este resultado, referirse a Figura 2.4.

Ahora enunciamos el segundo resultado de [7] que relaciona a los módulos de clusters.

Lema 8 (Redundancia [7, Lema 3]). *Sea G un grafo, y sean v_1, v_2, v_3 tres vértices tal que cualquiera dos son falsos gemelos. Entonces, $\text{thinness}(G - v_i) = \text{thinness}(G)$, es decir, eliminar un vértice no altera la thinness.*

Pero este resultado es en gran medida inaplicable a los grafos de línea, salvo por los falsos gemelos triviales como las aristas aisladas.

Lema 9. *Los módulos no triviales de los grafos de línea tienen a lo sumo dos componentes conexas.*

Demostración. Un grafo que tiene un módulo no trivial con al menos tres componentes conexas implica que podemos tomar un vértice de cada una de tres de ellas y un vértice adyacente a los tres, lo cual constituye una *garra* o 3-estrella $K_{1,3}$, un subgrafo prohibido de los grafos de línea (un resultado clásico de Beineke [1]). \square

Entonces este resultado esencialmente dice que no podemos usar el Lema de Redundancia (Lema 8) para simplificar cálculos de la thinness de arista.

Como las estructuras que podemos simplificar mediante estos resultados son sólo las estrellas colgantes, una clase muy simple de grafos, el lector podría pensar que las conclusiones del Teorema 1 y Lema 8 son de una utilidad muy limitada, y es correcto. Pero queremos enfatizar que esto resulta directamente de las configuraciones limitadas de aristas que resultan, luego de la aplicación del operador de grafo de línea, en estructuras de clusters, o módulos. Y si bien en este caso nos llevó a ganar muy poco entendimiento respecto a una cierta familia de grafos, y que es muy fácil de construir grafos que no pertenezcan a esta familia, volveremos a esta idea con resultados mucho mejores en futuras secciones.

CAPÍTULO 3

Relaciones de la thinness de arista a otros parámetros de grafos

En esta sección vamos a investigar la *información* que un parámetro de grafos nos da sobre otro, cuando uno de ellos es la thinness de arista. Para fijar algunas definiciones, primero vamos a especificar a qué nos referimos cuando decimos *información*.

Algunos parámetros de grafos están relacionados en el sentido que uno está acotado por otro, cuando se evalúan en cualquier grafo. Algunos pares incluyen: $treewidth \leq pathwidth$, $mim-width \leq thinness$, y $\omega \leq \chi$. Si en un dado grafo sabemos el valor de un parámetro, tenemos una cota inferior o superior para el otro. Por el contrario, cuando decimos que un parámetro de grafos no nos da ninguna información con respecto a otro, nos referimos a que no podemos usar su valor para restringir el rango que pueda tener el valor de este otro. Por ejemplo, consideremos a χ y δ , es decir, el número cromático y el grado mínimo. Como los miembros de la familia de grafos bipartitos completos $K_{N,N}$ tienen grado mínimo no acotado pero son 2-coloreables, y los completos más un vértice colgante tienen grado mínimo 1 y número cromático no acotado, χ no da información sobre δ y viceversa.

Más formalmente, diremos que un parámetro de grafos, o invariante, es una función F tal que

$$F : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{N}_0$$

con la propiedad de que si G y \tilde{G} son isomorfos, entonces $F(G) = F(\tilde{G})$. Es común que dos parámetros de grafos se digan *equivalentes* si para cualquier familia de grafos, ambos o ninguno están acotados. Vamos a relacionar esto con otra formulación. Sean P, Q parámetros. Decimos que P *domina* a Q si existe una función W tal que, para todo grafo G , $Q(G) \leq W(P(G))$. Observar que si un parámetro acota a otro, entonces

lo domina, así que esta definición es una generalización de la usual relación de orden. Si un par de parámetros es tal que cada uno domina al otro, nos gustaría decir que son equivalentes, pero primero nos aseguramos que no nos encontramos con un problema.

Teorema 2. *Sean P, Q parámetros de grafos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- P domina a Q
- Para toda familia de grafos \mathcal{F} en la que P esté acotado, el parámetro Q está acotado.

Demostración. \implies : Sea \mathcal{F} una familia de grafos tal que $P(G)$ con $G \in \mathcal{F}$ está acotada por algún número t . Como P domina a Q , existe una función W tal que para cualquier grafo $G \in \mathcal{F}$, $Q(G) \leq W(P(G))$.

Como P está acotada en \mathcal{F} , no sólo $W(P(G))$ alcanza un máximo para algún $G \in \mathcal{F}$, pero en particular está acotado por $W_{\mathcal{F}} = \max_{i \leq t} W(i)$. Se sigue que para cualquier grafo $G \in \mathcal{F}$, se cumple que $Q(G) \leq W_{\mathcal{F}}$, y entonces concluimos que Q está acotada en \mathcal{F} .

\impliedby : Dado que la propiedad se cumple para toda familia de grafos, consideramos la siguiente partición de \mathbb{G} . Si denotamos como \mathcal{P}_i con $i \in \mathbb{N}_0$ a la familias de grafos que satisfacen que $P(G) = i$ para todo $G \in \mathcal{P}_i$ para todo i , tenemos que P está acotada en todas ellas. Ahora, definimos la función $W(i) := \max_{G \in \mathcal{P}_i} \{Q(G)\}$. Observar que está bien definida, dado que Q está acotada (y entonces alcanza un máximo) sobre cualquier \mathcal{P}_i ; aunque para algún i , \mathcal{P}_i podría ser vacía. Para esos i , no tenemos restricción sobre el valor de W , dado que según la definición de dominación, W sólo necesita estar definida dentro de la imagen de P .

Afirmamos que esta función W satisface la definición. Observar que, para cualquier grafo G , tenemos que

$$Q(G) \leq \max_{P(H)=P(G)} Q(H) = \max_{H \in \mathcal{P}_{P(G)}} Q(H) = W(P(G)).$$

Luego, esta función tiene las propiedades buscadas, y podemos concluir que P domina a Q . \square

Corolario 2.1. *En particular, P domina a Q y Q domina a P si y sólo si para toda familia de grafos, ambos están acotados o ninguno lo está.*

Este teorema muestra que, efectivamente, ambas definiciones de ser equivalente son compatibles. Además, para mostrar que P domina a Q tampoco es necesario exhibir una función W que cumpla la inecuación para estos parámetros: simplemente

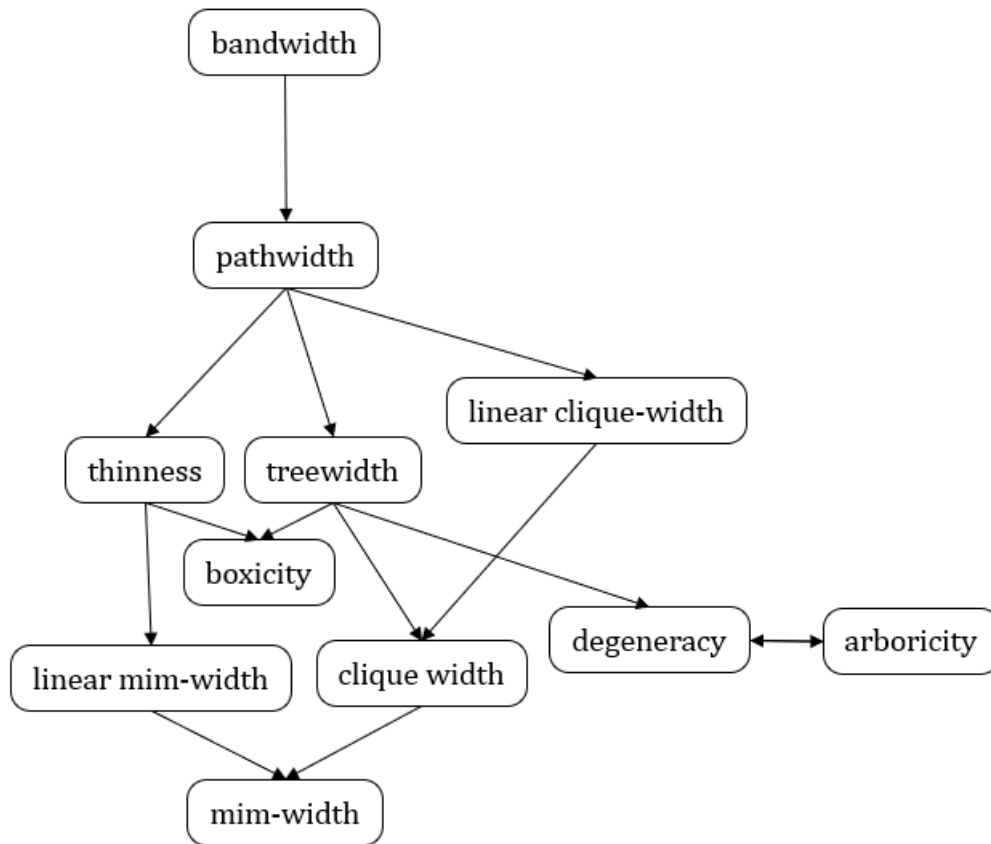


Figura 3.1: El mismo diagrama de la introducción, donde si una flecha apunta de A a B se lee como “A domina a B”. Observar que el diagrama es transitivo.

mostrando que cualquier grafo G con $Q(G)$ arbitrariamente alto debe cumplir también que $P(G)$ no puede ser acotado es suficiente, según la equivalencia dada por este teorema.

Observar que la relación dada por dominación es transitiva:

Lema 10. Si P domina a Q y Q domina a R , P domina a R .

Demostración. Para cualquier familia de grafos en la que P esté acotado, Q está acotado, lo que a su vez fuerza a que R esté acotado. \square

Recordar que usamos la abreviatura $\mathcal{L}\text{-}P$ para referirnos a $P(L(G))$, de nombre “P de arista”. Por supuesto, si P domina a Q , $\mathcal{L}\text{-}P$ domina a $\mathcal{L}\text{-}Q$.

La treewidth y la thinness no se dominan en ninguna dirección. Los grafos completos tienen treewidth no acotada, y existen árboles (grafos con treewidth 1) con thinness no acotada (para ejemplos de construcción ver [6] por Bonomo, Brandwein, Gonzalez y Sansone). A pesar de esto, podemos rápidamente concluir una relación entre la treewidth y la thinness de arista invocando al Teorema 3 de Brettell, Munaro, Paulusma y Yang [10], que enunciaremos parcialmente:

Teorema 3 ([10]). *Los siguientes parámetros son equivalentes:*

- *Treewidth*
- *\mathcal{L} -Clique-width*
- *\mathcal{L} -Mim-width*

Teorema 4. *La thinness de arista domina a la treewidth.*

Demostración. La thinness acota, y por lo tanto domina, a la linear mim-width por el Teorema 9 del trabajo de De Estrada y Bonomo en [4], y la linear mim-width acota a la mim-width. Luego, la thinness de arista domina a la mim-width de arista, la cual es equivalente a la treewidth. \square

Con este resultado, tenemos algunas claves de cómo construir grafos con alta thinness de arista: los grafos con treewidth suficientemente grande tienen thinness de arista grande.

Más aún, podemos producir nuestra primera cota inferior numérica, combinando el Teorema 4 del mismo [10] con la conocida relación escalar entre la treewidth y la branch-width, otro invariante de grafo.

Lema 11. *Sea G un grafo tal que $treewidth(G) \geq k$, entonces \mathcal{L} -thinness(G) $\geq \frac{2}{75}(k+1)$.*

Demostración. Por resultado (5.1) de [41] por Robertson y Seymour, obtenemos la relación $treewidth(G) \leq \frac{3}{2}branch-width(G) - 1$. Por Teorema 4 de [10], tenemos que $branch-width(G) \leq 25mimw(L(G))$, donde $mimw$ denota a la mim-width. Nuevamente usando que la thinness acota a la mim-width, combinamos estos resultados para producir lo siguiente:

$$k \leq treewidth(G) \leq \frac{3}{2}branch-width(G) - 1 \leq \frac{75}{2}mimw(L(G)) - 1 \leq \frac{75}{2}\mathcal{L}\text{-thinness}(G) - 1,$$

Y concentrándonos en los extremos, concluimos que

$$\frac{2}{75}(k+1) \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G).$$

\square

Volviendo a Teorema 3, observar que como la thinness domina a la mim-width, y la mim-width es equivalente a la clique-width en los grafos de línea, obtenemos que la thinness domina a la clique-width en los grafos de línea, lo que en general no sucede. Esto sugiere que las estructuras que incrementan la clique-width más allá del alcance de la thinness involucran subgrafos prohibidos de los grafos de línea.

Más aún, podemos concluir algo más:

Teorema 5. *La thinness no domina a la thinness de arista.*

Demostración. Observar que, al ser la dominación transitiva y la thinness no domina a la treewidth, a la luz del anterior teorema la thinness no puede dominar a la thinness de arista. \square

Una demostración alternativa, también usando el mismo teorema, involucra observar que los grafos completos tienen treewidth no acotada (y por lo tanto también tienen thinness de arista no acotada) pero también que son todos grafos de intervalos, por lo que su thinness es 1. Por Teorema 2, la thinness no puede dominar a la thinness de arista.

Estos dos resultados ya nos dicen que la thinness de arista se comporta bastante diferente a la thinness.

Como nota al margen, observar que $L(K_n)$ tiene diámetro a lo sumo 2, dado que para cualquier par de aristas no adyacentes incidentes en pares de vértices v_1, v_2 y w_1, w_2 tenemos la arista incidente en, por ejemplo, v_1 y w_1 , que es un vecino de ambas aristas. Que $L(K_n)$ tenga thinness no acotada pero diámetro acotado nos permite concluir que el diámetro no domina a la thinness. Otra familia de grafos con thinness no acotada y diámetro 2 fue descrita por el Teorema 1 de [4], donde prueban que cierto subgrafo de K_{2t} tiene thinness al menos t (con $t > 1$).

A continuación presentamos una serie de resultados que muestran que la bandwidth es, en un sentido cualitativo, una cota superior estricta de la thinness de arista.

Lema 12. *La bandwidth es equivalente a la bandwidth de arista.*

Demostración. Por el Teorema 7 de [28], de Jiang, Mubayi, Shastri y West, tenemos que para cualquier grafo G , $bandwidth(G) \leq bandwidth(L(G))$, mientras que el Teorema 9 del mismo trabajo muestra que, para un grafo de arboricity t , podemos acotar de la siguiente manera: $bandwidth(L(G)) \leq 2t \cdot bandwidth(G) + t - 1$. Como la bandwidth es una cota superior para la arboricity, la podemos reemplazar, y la siguiente cota es válida:

$$bandwidth(G) \leq bandwidth(L(G)) \leq 2 \cdot (bandwidth(G))^2 + bandwidth(G) - 1$$

lo que prueba que son equivalentes, por definición. \square

Teorema 6. *La bandwidth domina a la thinness de arista.*

Demostración. Como la bandwidth domina a la thinness (dado que la bandwidth domina a la pathwidth), tenemos que la bandwidth de arista domina a la thinness de arista. Por la equivalencia dada por el Lema anterior entonces, la bandwidth domina a la thinness de arista. \square

Teorema 7. *La thinness de arista no domina a la bandwidth.*

Demostración. Las estrellas son grafos con \mathcal{L} -thinness 1 pero bandwidth no acotada, por el trabajo de Chvátal [13], donde muestra que la bandwidth de una j -estrella es $\frac{j-1}{2} + 1$. \square

3.1. De thinness y vecinos no compartidos

En esta sección vamos a desarrollar una variedad de resultados que nos van a permitir no solamente descubrir cómo la thinness de arista está relacionada a otros parámetros, pero también a construir grafos con una cota inferior numérica explícita. Comenzamos introduciendo una definición:

Definición 8 (Poder de presentación). *Dado un grafo G y dos vértices u y v , nos referiremos a $|N(u) \setminus N[v]|$ como el poder de presentación¹ de u sobre v y lo notaremos como $\bullet(u, v)$, o $\bullet_G(u, v)$ si el grafo G no es claro por contexto.*

El poder de presentación de u sobre v es el número de vecinos de u que están a distancia al menos 2 de v . Puede ser 0, y notar que no es conmutativo. Definimos el *número de presentación* de G de la siguiente manera:

$$\bullet(G) := \min_{u, v \in V(G)} \bullet(u, v)$$

Con esta definición, el Teorema 9 del trabajo [8] de Bonomo, Gonzalez, Oliveira, Sampaio y Szwarcfiter, puede ser enunciado de la siguiente manera:

Teorema 8. *Dado un grafo G con número de presentación k , $\text{thinness}(G) \geq k + 1$.*

Como estamos trabajando con aristas, nos referiremos al poder de presentación de una arista sobre otra por medio del grafo de línea: si e_1, e_2 son aristas del grafo G , y

¹Si los vértices de un grafo representan personas, y el vecindario son los conocidos, el poder de presentación de una persona u sobre una persona v es cuántas personas u le puede *presentar* a v . Usamos la notación \bullet por una representación visual de cuánto de la bola que es el vecindario de u no queda cubierto por la bola del vecindario de v .

son representadas en $L(G)$ por v_1, v_2 respectivamente, identificaremos a $\bullet_G(e_1, e_2) := \bullet_{L(G)}(v_1, v_2)$. Nuevamente, si el grafo G es claro por contexto, escribiremos $\bullet(e_1, e_2)$.

Ahora probaremos una cota inferior para el número de presentación de los grafos de línea. La idea principal es que hay un límite sobre cuánto el vecindario de una arista puede solaparse con el vecindario de otra.

Primero, un lema auxiliar.

Lema 13 (Sobre vecinos compartidos y K_4). *Dos aristas no vecinas en G pueden compartir hasta 4 vecinos.*

Demostración. Sea G un grafo y sean u, v, x, y cuatro vértices. Sean uv, xy dos aristas. ¿Cuál es el máximo número de vecinos compartidos que estas dos aristas (no adyacentes) pueden tener? Las aristas que pueden ser adyacentes a tanto uv como xy son los miembros del producto Cartesiano de ambos pares de extremos: $\{ux, uy, vx, vy\}$, por lo que son 4. \square

Teorema 9. *Para un dado grafo G ,*

$$\bullet(L(G)) \geq \min(2\delta(G) - 6, \delta(G) - 2).$$

Demostración. Sea G un grafo, y sean u, v, x, y cuatro vértices distintos tales que uv, xy son dos aristas. ¿Cuál es el *poder de presentación* de uv sobre xy ? El número de vecinos de la arista uv es $N(u) + N(v) - 2$, y usando el Lema 13, sabemos que a lo sumo 4 son compartidos con la arista xy , y entonces podemos concluir que $\bullet(uv, xy)$ es al menos $N(u) + N(v) - 6$.

Ahora investiguemos el caso de dos aristas adyacentes. Sin pérdida de generalidad, sean u, v, w tres vértices tal que u es adyacente a tanto v como w . Es claro que cualquier arista incidente en u está en el vecindario de tanto uv como de uw , y entonces no contribuyen a $\bullet(uv, uw)$. Luego, las únicas aristas relevantes son las incidentes en v . Hay $d(v) - 1$ vecinos de uv que son incidentes en v , de los cuales a lo sumo 1 puede ser vecino de uw , específicamente la arista vw . Entonces $\bullet(uv, uw)$ es al menos $d(v) - 2$.

Ver Figura 3.2.

Iterando ambas cotas sobre todas las aristas, llegamos al siguiente resultado:

$$\bullet(L(G)) \geq \min(2\delta(G) - 6, \delta(G) - 2).$$

\square

Corolario 9.1. *Combinando los últimos dos Teoremas, concluimos que*

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \min(2\delta(G) - 6, \delta(G) - 2) + 1.$$

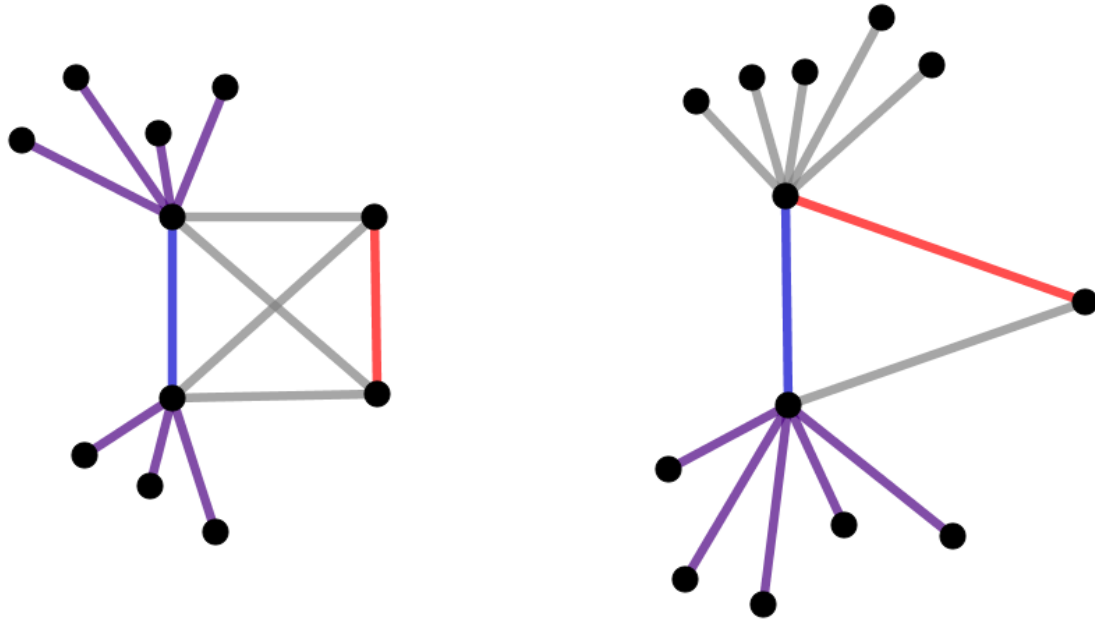


Figura 3.2: Este diagrama muestra los dos casos, donde e_1 es la arista azul, y e_2 es la roja. Coloreadas en gris son las aristas que son vecinos de ambos, y en violeta las que son sólo adyacentes a e_1 , y luego son las únicas que contribuyen al *poder de presentación* de e_1 sobre e_2 .

En particular, tenemos que la thinness de arista domina a δ .

Puede resultar tentador eliminar el término de la izquierda, dado que el factor 2 puede hacer parecer que el mínimo siempre sería el término de la derecha. Un cálculo con detenimiento muestra que no ocurre esto siempre.

$$2\delta(G) - 6 \geq \delta(G) - 2 \iff \delta(G) \geq 4 \quad (3.1)$$

Esto muestra que *generalmente*, el término de la derecha es el mínimo, pero aún así no podemos obviar el término izquierdo. Por ejemplo, en K_4 el término izquierdo es 0 y el derecho es 1.

Ya sabíamos que los grafos completos tenían thinness de arista arbitrariamente grande. Con este resultado tenemos una cota inferior que no requiere calcular la treewidth. Podemos ver fácilmente que los grafos bipartitos completos y multipartitos completos, y las familias de grafos regulares cuyo grado crece arbitrariamente al aumentar el número de vértices, también ocurre que tienen thinness de arista no acotada.

Ahora mostramos que las cotas del Lema 13 pueden ser levemente mejoradas si no

hay ciclos cortos.

Lema 14. *Sea G un grafo. Si G no tiene ciclos de longitud 3 ó G no tiene ciclos de longitud 4, dos aristas no vecinas pueden compartir a lo sumo 2 vecinos. Además, si el ciclo más corto en G es de longitud al menos 5, dos aristas no vecinas pueden compartir a lo sumo 1 vecino. Por otro lado, si no hay triángulos, todos los vecinos compartidos por dos aristas adyacentes incidentes en el vértice u son aquellos que inciden en u .*

Demostración. Sea G un grafo, sean u, v, x, y cuatro vértices distintos, y sean uv, xy dos aristas. Por Lema 13 sabemos que estas aristas no vecinas pueden compartir a lo sumo 4 vecinos, específicamente los elementos de $\{ux, uy, vx, vy\}$.

Si o bien el par ux, vy o el par uy, vx son aristas de G , entonces u, v, x, y forman parte de un ciclo de largo 4. Por lo tanto, el máximo número de vecinos compartidos por dos aristas no vecinas baja a 2 si no hay ciclos de largo 4, ya que a lo sumo una arista de cada par puede estar presente. Por otro lado, similarmente, se puede construir un ciclo de largo 3 con o bien el par $\{uy, vy\}$ o bien el par $\{vx, vy\}$. Luego, dos aristas no adyacentes pueden compartir a lo sumo dos vecinos si no hay ciclos de largo 3. Por último, observamos que teniendo dos aristas cualesquiera de $\{ux, uy, vx, vy\}$ podemos construir un ciclo de largo 3 ó 4, y por lo tanto de podemos deducir que si un grafo no tiene ni ciclos de largo 3 ni ciclos de largo 4, dos aristas no vecinas pueden compartir a lo sumo un único vecino. Para concluir, notar que cualquier camino de largo 3 tiene dos aristas no vecinas que comparten un vecino, por lo que restringir aún más sería muy impráctico.

En el caso que u, v, w sean vértices y uv, uw sean aristas, es claro que cualquier arista incidente en u es vecina de ambas aristas. Pero ninguna arista incidente en v puede ser vecina de uw , ya que la única arista posible es vw , pero eso generaría un triángulo. Así que cualquier arista adyacente a ambas aristas debe incidir en u . \square

Lema 15. *Sea G un grafo, y sean u, v, x, y cuatro vértices tales que uv, xy son aristas. Si no hay ciclos de largo 3, o no hay ciclos de largo 4,*

$$\bullet(uv, xy) \geq d(u) + d(v) - 4,$$

Y si no hay ciclos de largos ni 3 ni 4,

$$\bullet(uv, xy) \geq d(u) + d(v) - 3.$$

Además, si no hay ciclos de largo 3, y existe un vértice w tal que uw es una arista, tenemos que

$$\bullet(uv, uw) = N(v) - 1$$

Y todas las anteriores expresiones pueden ser usadas para cotas sobre la thinness de arista, según el anterior Corolario.

Demostración. El caso de dos aristas no vecinas es una aplicación simple del Lema anterior. Para ver que $\bullet(uv, uw) = N(v) - 1$, observar que solamente hay que considerar a las aristas incidentes en v , y que cualquier arista incidente en v excepto uv no es vecina de uw dado que no hay triángulos, y esta cantidad es exactamente $N(v) - 1$. \square

Y entonces en estos casos podemos usar nuestra fórmula Corolario 9.1 y garantizar una cota inferior más grande para la thinness de arista.

Pero ahora profundizaremos. Observar que si un grafo G tiene una arista colgante e , el poder de presentación de e sobre cualquiera de sus vecinos es 0, ya que tiene sólo un extremo en el cual otras aristas pueden ser incidentes.

Tomemos un grafo con alta thinness de arista, por ejemplo K_{100} . Si le agregamos un vértice que sea adyacente a un único vértice, ahora el grado mínimo baja a 1, y más aún, la nueva arista es colgante. Luego de esta modificación, la fórmula dada por Corolario 9.1 proporciona el resultado verdadero, pero inútil, de que $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq -3$, que ocurre en cualquier grafo que tenga aunque sea una arista colgante. ¿Cómo deberíamos, entonces, aplicar nuestra fórmula cuando puede “distraerse” tan fácilmente por estos detalles? Deberíamos, en algún sentido, encontrar un “núcleo”, alguna subestructura que fuerce a la thinness de arista a ser al menos suficientemente grande como para lidiar con esta complejidad.

Pero recordemos el Lema de Monotonía (3), que dice que la thinness de arista es no creciente ante tomar subgrafos. Luego, para cualquier H subgrafo de G , la siguiente expresión es válida:

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \mathcal{L}\text{-thinness}(H) \geq \min(2\delta(H) - 6, \delta(H) - 2) + 1 \quad (3.2)$$

¿Qué subgrafo H deberíamos tomar para tener una buena cota inferior? Como los grafos completos aparecieron en varias ocasiones, podríamos elegir la clique más grande, que es $K_{\omega(G)}$, y entonces llegamos a:

Lema 16. *Sea G un grafo, entonces*

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \min(2\omega(G) - 8, \omega(G) - 3) + 1,$$

y en particular si $\omega(G) \geq 5$ tenemos que $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \omega(G) - 2$. Más en general, la thinness de arista domina a ω .

Demostración. Notemos que $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \mathcal{L}\text{-thinness}(K_{\omega(G)})$, y considerando que $\delta(K_{\omega(G)}) = \omega(G) - 1$, aplicamos la Ecuación (3.2), y si $\omega(G) \geq 5$ tenemos que $\delta(K_{\omega(G)}) \geq 4$ y entonces podemos aplicar la Ecuación (3.1). \square

Pero en realidad podemos lograr algo mejor. Dado que la Ecuación (3.2) es válida para cualquier subgrafo y es creciente con δ , deberíamos simplemente elegir H de forma tal que su grado mínimo sea lo más grande posible. Este número es conocido como la *degeneracy* de G , que si bien está definida por Bodlaender, Koster y Wolle en [3], la idea estaba presente en el trabajo de Lick y White en [30] aunque sin alcanzar esta definición.

Definición 9 (Degeneracy). *Un grafo G tiene degeneracy D si $D = \max_{H \text{ subgrafo de } G} \delta(H)$.*

La degeneracy es un parámetro de grafos que se puede calcular en tiempo lineal por el Algoritmo MMD de [3], por lo que no es particularmente más complejo que δ . Con este parámetro, la cota inferior para la thinness de arista se puede mejorar de esta manera:

Lema 17. *Sea G un grafo, entonces*

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \min(2 \cdot \text{degen}(G) - 6, \text{degen}(G) - 2) + 1,$$

donde $\text{degen}(G)$ es la degeneracy de G . Análogamente que con δ , esto implica que la thinness de arista domina a la degeneracy.

La degeneracy domina a ω , pero el recíproco no es verdad. Esto se puede ver combinando el Teorema 3.1 de Erdős y Hajnal [19] y el Teorema de Szekeres y Wilf de [44], que juntos muestran que la degeneracy domina a χ , mientras que el Teorema de Mycielski de [32] muestra que existen grafos con $\omega < 3$ pero con número cromático arbitrariamente grande. En pocas palabras, el número cromático es dominado por la degeneracy pero no por ω , y por transitividad podemos concluir que ω no domina a la degeneracy. Con esto en mente, podemos concluir que si bien la expresión basada en la clique máxima del Lema 16 sirve como una cota inferior rápida, la información dada por la degeneracy en el Lema 17 puede brindarnos una cota inferior mucho más alta para la thinness de arista.

Volvemos al primer resultado de esta sección, y combinando con el Lema de Monotonía (3), lo podemos reescribir de esta manera:

Teorema 10. *Sea G un grafo. Entonces,*

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \max_{H \text{ subgrafo de } G} \bullet(L(H)) + 1.$$

Definición 10 (Potencial de presentación de aristas). *Sea G un grafo. Definimos su potencial de presentación de aristas como*

$$\xi(G) := \max_{H \text{ subgrafo de } G} \bullet(L(H))$$

y lo notamos $\xi(G)$.

Observar que los tres parámetros con los que nos encontramos en el camino, δ, ω y degeneracy, todos funcionan dado que la expresión de la Ecuación (3.2) evaluada en ellos resulta una cota inferior para el potencial de presentación de aristas. Pero no podemos ir más allá, por el siguiente resultado:

Lema 18. *Sea G un grafo con al menos una arista y sin vértices o aristas aisladas. Entonces, $\bullet(L(G)) \leq \delta(G) - 1$.*

Demostración. Consideremos un vértice v tal que $d(v) = \delta(G)$ con un vecino w . Consideremos a la arista vw y a algún otro vecino de w , llamado x (existe pues si w tuviera grado 1 entonces v , que tiene grado mínimo, también tendría grado 1 y la arista vw sería aislada). $\bullet(vw, wx) \leq d(v) - 1 = \delta(G) - 1$, y dado que $\bullet(L(G))$ es el mínimo poder de presentación, cumple que está acotado por $\delta(G) - 1$. \square

Corolario 10.1. *Ahora consideremos a cualquier grafo H subgrafo de G . Aplicando lo anterior llegamos a*

$$\xi(G) \leq \max_{H \text{ subgrafo de } G} \delta(H) - 1 = \text{degen}(G) - 1$$

Teorema 11. *Estos dos parámetros son equivalentes.*

- *Degeneracy*
- *Potencial de presentación de aristas*

Demostración. Sea G un grafo y sea H un subgrafo de G que realiza el máximo en la definición de degeneracy de G . Sabemos que $\xi(G) \geq \bullet(L(H)) \geq \min(2 \cdot \text{degen}(G) - 6, \text{degen}(G) - 2)$. De ahí, invirtiendo ambas operaciones podemos concluir que $\max(\frac{\xi(G)+6}{2}, \xi(G) + 2) \geq \text{degen}(G)$. Por otro lado, sabemos por el Corolario 10.1 que $\xi(G) \leq \text{degen}(G) - 1$. Combinando ambos resultados se ve que los parámetros son equivalentes. \square

Entonces llegamos a la máxima jerarquía posible, en términos de la información de G que podemos utilizar, a través del foco del Teorema 9 de [8].

Puede que el lector se decepcione con que esta sección no nos llevó a resultados del todo nuevos. La treewidth domina a la degeneracy por [3], por lo que el hecho de que

la thinness de arista domine a δ, ω y la degeneracy ya se podía vislumbrar desde el Teorema 4. Sin embargo, llamamos la atención a que las fórmulas de cotas inferiores de esta sección son considerablemente más precisas que la fórmula del Lema 11. A modo de ejemplo, en el caso de K_{150} , dado que δ es 149 podemos garantizar usando el Corolario 9.1 que su thinness de arista es al menos 148. Por otro lado, nuestro primer desarrollo apenas llega a producir la cota de \mathcal{L} -thinness(K_{150}) ≥ 4 . A pesar de esto, las grillas grandes y grafos similares a grillas tienen treewidth no acotada pero degeneracy acotada, por lo que no solo la fórmula que usa la treewidth no es obsoleta, sino que además podemos ver que la alta densidad es suficiente, pero no necesaria, para que un grafo tenga alta thinness de arista.

Hemos medido la thinness de arista de múltiples grafos usando un algoritmo escrito por Brandwein [9], programado en Sagemath (para versión al menos 10.0). Encontramos que la thinness de arista acota superiormente a la thinness, al menos en todos los grafos de hasta 8 vértices. Más importante aún, hemos calculado la thinness de arista de los grafos completos y, excepto para $n = 3$,

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(K_n) = n - 1,$$

y conjeturamos que este patrón vale en general. Recordar que para $n \geq 5$, la Ecuación (3.2) aporta la cota inferior $\mathcal{L}\text{-thinness}(K_n) \geq n - 2$, mientras que la cota superior dada por el Lema 5 es $n - 2$ sumado a un término cuadrático que depende de la paridad de n , ya que el grafo es conexo. Observar que, por el Lema de Monotonía (3), este patrón implicaría que la thinness de arista está acotada superiormente por el número de vértices, lo cual no es obvio, y sería una enorme mejora por sobre la cota de la pathwidth del grafo de línea de los grafos completos del Lema 5.

Vinculado a estas observaciones se encuentra el más curioso y profundo de nuestros hallazgos: que no encontramos un sólo grafo para el cual la siguiente expresión no sea cierta:

$$\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \leq \text{pathwidth}(G) \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G) + 1.$$

Si esto es verdad en general, significa que no solo la thinness de arista es equivalente a la pathwidth, sino que numéricamente es casi igual. Cualquier resultado de este capítulo relacionado a la dominación de un parámetro y la thinness de arista sería un corolario² si la thinness de arista dominara a la pathwidth; esa es la relevancia de este hecho.

Durante la siguiente sección vamos a introducir y relacionar diversas definiciones para llegar a un resultado parcial de esta conjetura: que la thinness de arista domina a la pathwidth.

²Usando transitividad, como la pathwidth domina a la treewidth, degeneracy, ω y δ , y a su vez no está dominada por la thinness, rápidamente llegamos a todos los resultados.

3.2. La relación entre la pathwidth y la thinness de arista

Muchos tipos de parámetros “de ancho” de grafos involucran un procedimiento común en el que se introduce una clase de descomposiciones de grafos, y a su vez se asocia cada descomposición con un número, su *ancho* o *tamaño*. Luego, el ancho de un dado grafo G en este sentido es el mínimo posible ancho de entre todas las posibles descomposiciones. Este es el caso de, para nombrar algunos ejemplos, la pathwidth, la cutwidth, el número cromático y la bandwidth.

Recordar que la definición de thinness involucra un orden y una partición de los vértices, y un sentido de *consistencia*. Ahora daremos una definición de la thinness con un formato más parecido a las de otros parámetros de ancho para llegar a una perspectiva nueva que resultará útil.

Dado un orden total de los vértices $<$, hemos definido una partición consistente en k clases como una partición tal que, para cualesquiera tres vértices $v_1 < v_2 < v_3$ tal que v_1, v_2 pertenezcan a la misma clase y v_1 sea adyacente a v_3 , v_2 debe ser adyacente a v_3 . Observar que la clase de v_3 es irrelevante. Para un dado orden, diremos que su *consistencia* es a lo sumo k si existe una partición en k clases que sea consistente con él. La thinness de un grafo es, entonces, el mínimo k tal que existe un orden de consistencia a lo sumo k .

Lo que ganamos de esta definición es que podemos dejar a la optimalidad en segundo plano, y referirnos al atributo de *consistencia* de un orden arbitrario.

Por supuesto, la thinness de arista es similar. Dado un orden de sus aristas, su *consistencia* se define análogamente, en términos de partición de aristas y adyacencia de aristas.

Definimos ahora un nuevo parámetro de ancho, introducido por Nordstrand.

Definición 11 (Linear branch-width [34]). *Sea G un grafo con al menos dos aristas. Dado un orden total de sus aristas $<$, asignamos los índices en $\{1, \dots, |E|\}$ en orden ascendiente. Para un índice i , $1 \leq i < |E|$, decimos que las aristas abajo del corte son las aristas con índice a lo sumo i , mientras que el resto son las aristas arriba del corte. El ordenamiento de aristas y la asignación de índices³ descrita es una descomposición en linear branch de G .*

Para un dado índice i , un vértice se llama activo si existe al menos una arista abajo del corte y una arriba que son incidentes en él. Para un dado índice i , el conjunto de vértices activos se denotará como $\mathcal{A}(i)$.

³Si bien resulta más ágil definir esta relación con una biyección entre las aristas y $\{1, \dots, |E|\}$ y luego tomar el orden inducido por las imágenes, esta formulación tiene la ventaja de que está definida directamente a partir del orden de aristas, en vez de una función. Esto será relevante en el futuro.

El ancho de una descomposición en linear branch es el máximo número de vértices activos, sobre todos los índices. La linear branch-width de un grafo G es el mínimo posible ancho sobre todas las descomposiciones en linear branch.

Lema 19 ([34, Teorema 6.1]). *Para cualquier grafo G ,*

$$\text{pathwidth}(G) \leq \text{linear branch-width}(G) \leq \text{pathwidth}(G) + 1.$$

Entonces, la linear branch width es un parámetro que es equivalente a la path-width y además involucra un orden de las aristas. Decimos que un orden de las aristas tiene *ancho* k si el ancho de una descomposición en linear branch con ese orden tiene ancho k . Un orden de las aristas tiene, entonces, dos atributos: *consistencia* y *ancho*. Buscamos encontrar una relación entre ellos, que nos llevará a encontrar una relación entre los parámetros subyacentes. Para ese fin, definimos algunas nociones que nos ayudarán a analizarlos en paralelo.

Como vamos a tener a las aristas particionadas en clases, nos gustaría tener la noción de vértices activos para las diferentes clases, en sentido de descomposición en linear branch:

Definición 12 (Vértices activos para una clase). *Dado un grafo G con una descomposición en linear branch y una partición de sus aristas en clases, decimos que para un índice i un vértice v es activo para la clase k si el vértice v es activo en el índice i y existe al menos una arista abajo del corte que es de la clase k e incide en v . El conjunto de vértices activos para un dado índice i y la clase k se denotará por $\mathcal{A}_k(i)$.*

Definición 13 (Arista activando un vértice). *Dado un grafo G con una descomposición en linear branch y una partición de sus aristas en clases, decimos para un índice i que una arista e de la clase k es la arista de su clase que está activando el vértice v si es la máxima arista de su clase que está abajo del corte y es incidente en v .*

Observar que si un vértice es activo para un índice, debe estar activo para al menos una clase, y para una dada clase y un vértice activo para ella, hay exactamente una arista activándolo.

Estamos listos para relacionar estos atributos. Sea G un grafo con una descomposición en linear branch con orden $<$ y consistencia a lo sumo k , y una partición de sus aristas en k clases consistente con el orden. Tenemos que, para cualquier índice i , se cumple lo siguiente:

$$|\mathcal{A}(i)| \leq \sum_{k \in \text{clases}} |\mathcal{A}_k(i)|.$$

Si la cantidad de vértices activos para una dada clase estuviera acotado por una constante, podríamos acotar la cantidad de vértices activos utilizando únicamente la cantidad de clases. Ese es nuestro objetivo.

Lema 20 (Patrón terminal). *Sea G un grafo, junto con una descomposición en linear branch con orden $<$ y una partición de sus aristas en alguna cantidad de clases consistente con él. Si para algún índice i existen tres aristas de la misma clase $e_x < e_y < e_z$ abajo del corte y e_y no es adyacente a e_z , entonces e_x no puede activar un vértice.*

Demostración. Digamos que los extremos de las aristas e_y, e_z son $(y_1, y_2), (z_1, z_2)$ respectivamente, y son 4 vértices distintos ya que e_y no es adyacente a e_z . Sea e_ψ una arista arriba del corte. Debido a la consistencia de la partición, para que sea adyacente a e_x necesita ser adyacente a tanto e_y como e_z , y por lo tanto e_ψ debe tener un extremo en $\{y_1, y_2\}$ y otro en $\{z_1, z_2\}$. Por lo que aún si e_ψ es adyacente a e_x , tenemos a la arista $e_y > e_x$ compartiendo el mismo extremo con e_ψ , por lo que e_x no está activando un vértice. Notar que e_x no es adyacente a e_z debido a la consistencia, por lo que e_x no tiene extremos en $\{z_1, z_2\}$. \square

Lo que este resultado nos dice es que nos podemos concentrar en *patrones*, subestructuras de los grafos. Notar que este Lema no usa cuántas aristas hay entre los tres, o al índice en cuestión. Fijando una clase y un índice, una no adyacencia entre aristas es un patrón *terminal* en el sentido que podemos ignorar todo lo que ocurra a las aristas inferiores a la menor. En otras palabras, sólo necesitamos concentrarnos en las cliques, dado que si para algún índice y clase tenemos que $(e_0 <) e_1 < \dots < e_j$ con e_j siendo la máxima arista abajo del corte para la clase y teniendo que $\{e_1, \dots, e_j\}$ es una clique maximal (maximal en el sentido de que $\{e_0, \dots, e_j\}$ no es una clique, o e_0 no existe), los vértices activos para la clase para este índice sólo dependen de los vértices que sean extremos de $\{e_0, \dots, e_j\}$.

Como mencionamos en el Lema 7, los únicos grafos línea-completos son las estrellas y el triángulo, por lo que sólo necesitamos ver cuántos vértices activos esos grafos pueden contribuir a una clase.

Lema 21 (Vértices activos en un triángulo). *Sea G un grafo junto con una descomposición en linear branch con un orden $<$ y una partición de las aristas en clases consistente con él. Para un dado índice i consideremos un triángulo con todas las aristas en la misma clase y abajo del corte. La cantidad de vértices activos en el triángulo para el índice i , si bien es obviamente a lo sumo 3, es en realidad a lo sumo 1.*

Demostración. Sean los vértices del triángulo v_1, v_2, v_3 y sean las aristas $(v_2, v_1) < (v_3, v_1) < (v_3, v_2)$. Una arista w arriba del corte puede ser incidente en v_3 . No puede ser incidente en v_2 dado que w sería adyacente a (v_2, v_1) pero no a (v_3, v_1) , que es

mayor, y, similarmente, no puede ser incidente en v_1 porque no sería adyacente a (v_3, v_2) . \square

Lema 22 (Vértices activos en una estrella). *Sea G un grafo junto con una descomposición en linear branch con un orden $<$ y una partición de las aristas en clases consistente con él. Para un dado índice i consideremos una n -estrella con todas las aristas en la misma clase y abajo del corte. La cantidad de vértices activos de la estrella es a lo sumo 3.*

Demostración. Sea v_c el vértice central de la estrella y sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ los otros extremos de las aristas de la estrella, en orden descendiente de $<$. Es decir, las aristas están ordenadas $(v_c, v_1) > (v_c, v_2) > \dots > (v_c, v_n)$.

Ningún vértice en $\{v_3, \dots, v_n\}$ puede ser activo para la clase para el índice i . Para que una arista arriba del corte w sea incidente en v_j con $j \geq 3$, su otro extremo debe estar en $\{v_c, v_1\}$ para que sea adyacente a la primer arista y un extremo en $\{v_c, v_2\}$ para ser adyacente a la segunda arista, pero no puede tener a v_c como extremo, ya que la arista w tendría los extremos (v_c, v_j) y no permitimos múltiples aristas entre dos vértices. Entonces, los extremos de la arista w deben ser $\{v_1, v_2, v_j\}$, que de nuevo es imposible porque una arista sólo puede incidir en dos vértices. \square

Hemos visto entonces que, en una clase, las aristas que forman una clique en el grafo de línea pueden contribuir a lo sumo 3 vértices. Estamos listos para concluir el resultado:

Teorema 12. *Sea G un grafo, junto con una descomposición en linear branch con orden $<$ de consistencia a lo sumo k y una partición de sus aristas en k clases que es consistente con él. Para cualquier índice i y clase k , $|\mathcal{A}_k(i)| \leq 5$.*

Demostración. Sean $(e_0 <) e_1 < \dots < e_j$ las mayores $j + 1$ aristas de la clase abajo del corte, tal que $\{e_1, \dots, e_j\}$ forman una clique maximal (maximal en el sentido de que $\{e_0, \dots, e_j\}$ no es una clique, si e_0 existe). Por Lemas 21 y 22 hemos visto que los vértices activos sobre los que las aristas de $\{e_1 \dots e_j\}$ inciden son a lo sumo 3, y e_0 puede activar a lo sumo a 2. Por Lema 20, ninguna arista $e_z < e_0$ en la clase puede activar un vértice a índice i . Luego, $|\mathcal{A}_k(i)| \leq 5$. \square

Vale la pena observar que el caso de 5 vértices activos en una clase puede suceder. Por ejemplo, con el orden de aristas ab, cd, ce , todas ellas en clase 1 y antes del corte, y las aristas ed en clase 2, ca y cb en clase 1, después del corte. Eso no significa que exista una familia de ejemplos parametrizable por k y donde eso ocurra simultáneamente para todas las clases, y en los casos óptimos. Pero por lo pronto, a partir de este análisis “local”, 5 es la constante más ajustada.

Teorema 13. *Sea G un grafo. Si un orden de sus aristas $<$ tiene consistencia a lo sumo k , entonces su ancho es a lo sumo $5k$.*

Demostración. Consideremos una partición consistente de las aristas en k clases. Por Teorema 12 tenemos lo siguiente:

$$|\mathcal{A}(i)| \leq \sum_{k \in \text{classes}} |\mathcal{A}_k(i)| \leq \sum_{k \in \text{classes}} 5 = 5k.$$

En particular, acota al valor máximo

$$\max_i |\mathcal{A}(i)| \leq 5k.$$

□

Corolario 13.1. *Para un dado grafo G , dado que existen órdenes de consistencia a lo sumo $\mathcal{L}\text{-thinness}(G)$, se concluye que existen descomposiciones de linear branch con ancho a lo sumo $5 \cdot \mathcal{L}\text{-thinness}(G)$ y, en particular, $\text{linear branch-width}(G) \leq 5 \cdot \mathcal{L}\text{-thinness}(G)$.*

Retomando la anterior observación sobre que el 5 es una cota ajustada, recalcamos que es ajustada exclusivamente para acotar a cada clase de forma desacoplada. Viendo en detalle la lógica de la demostración, esta cota es potencialmente muy excesiva, dado que estamos contando hasta k veces a cada vértice activo, al separar la suma sobre cada clase. Por lo que si bien esta es una cota válida, posiblemente sea mucho más ajustable, y entonces no quita verosimilitud a que se cumpla la desigualdad tan estrecha de la conjetura.

Podemos entonces concluir que la thinness de arista domina a la linear branch-width, y por transitividad que domina a la pathwidth, como buscábamos.

Cualquier grafo con pathwidth suficientemente grande tiene thinness de arista grande. Por ejemplo, como la pathwidth no es acotada en árboles, tampoco lo es la thinness de arista.

Aquí presentamos algunos corolarios que complementan los Teoremas 4 y 5.

Corolario 13.2. *La thinness de arista domina a la thinness.*

Demostración. La pathwidth domina a la thinness por Teorema 3.3 de Mannino, Oriolo, Ricci y Chandran ([31]). □

Corolario 13.3. *La treewidth no domina a la thinness de arista.*

Demostración. La treewidth no domina a la pathwidth, y entonces por transitividad no puede dominar a la thinness de arista. □

Además, podemos derivar una fórmula nueva y sencilla para producir una cota inferior.

Lema 23. *Sea G un grafo. Si $\text{pathwidth}(G) \geq k$, entonces $\mathcal{L}\text{-thinness}(G) \geq \frac{k}{5}$.*

Demostración.

$$k \leq \text{pathwidth}(G) \leq \text{linear branch-width}(G) \leq 5 \cdot \mathcal{L}\text{-thinness}(G).$$

Concluimos dividiendo en ambos extremos. □

Observar que como la treewidth es una cota inferior para la pathwidth, podemos reemplazar a la pathwidth por la treewidth para tener una nueva expresión válida. Recordemos nuestra primer fórmula, de Lema 11. Una comparación entre ambas muestra lo siguiente. Sea G un grafo. Entonces, sabemos que

$$\frac{2}{75}(\text{treewidth}(G) + 1) \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G).$$

Pero ahora podemos concluir lo siguiente

$$\frac{\text{treewidth}(G)}{5} \leq \frac{\text{pathwidth}(G)}{5} \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G).$$

Dado que para cualquier valor $x \geq 1$, $\frac{x}{5} > \frac{2}{75}(x + 1)$ podemos asegurar que nuestra nueva fórmula vuelve a la anterior obsoleta. Análogamente, dado que la thinness es esencialmente una cota inferior para la pathwidth, podemos adaptar la fórmula para obtener una cota relacionando a la thinness con la thinness de arista:

$$\text{thinness}(G) \leq \text{pathwidth}(G) + 1 \leq 5 \cdot \mathcal{L}\text{-thinness}(G) + 1$$

$$\frac{\text{thinness}(G) - 1}{5} \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G).$$

Dado que por el trabajo de Gurski y Wanke [22] la pathwidth es equivalente a la linear clique-width de arista, con un razonamiento similar a una consecuencia de Teorema 3 podemos concluir que la thinness domina a la linear clique-width en grafos de línea, de lo cual podemos deducir que las familias de grafos que tienen linear clique-width no acotada pero thinness acotada deben tener subgrafos prohibidos de los grafos de línea.

Recordando los Teoremas 6 y 7 hemos restringido la jerarquía de la thinness de arista. Está al menos a la altura de la pathwidth, pero no llega a la bandwidth.

Además, como la thinness de arista domina a la thinness, estamos en condiciones de relacionar esto con un comportamiento ya observado del operador de grafo de línea con respecto a otros parámetros de grafos, en el contexto de dominación. Harvey y Wood probaron en [26] que la treewidth y la pathwidth no sólo no dominan, sino que son dominados, por sus contrapartes “de arista”. En [22], Gurski y Wanke mostraron que la clique-width de arista es equivalente a la treewidth, y por lo tanto por transitividad, domina a (y no es dominada por) la clique-width. Además, la linear clique-width de arista es equivalente a la pathwidth, que a su vez domina a (y no es dominada por) la linear clique-width. La degeneracy y δ tampoco dominan a su contraparte de arista, evidenciado por el caso de las estrellas (donde valen 1) mientras que son no acotados en sus grafos de línea, los grafos completos. Estos grafos también permiten ver que la pathwidth tampoco domina a la treewidth de arista. Ligeramente distinto es el caso de Caoduro y Sebő en [11], donde estudian la boxicity de arista. Muestran que $\text{boxicity}(L(K_n)) \geq \lfloor \log_2 \log_2(n-1) \rfloor + 3$, lo cual que produce, aunque a un paso lento, valores eventualmente no acotados. Recordar que la boxicity es dominada por la thinness (demostrado en [12], puede verse una reproducción de esa demostración en [16]), y que los grafos completos tienen boxicity y thinness 1, por lo que en este caso, no solamente la boxicity de arista no está dominada por la boxicity, tampoco lo está por la thinness. Esta racha la rompe el trabajo de Jiang, Mubayi, Shastri, y West [28], donde estudian la bandwidth de arista, y resulta ser un parámetro equivalente.

Este fenómeno sugiere que hay un rango de parámetros donde su contraparte “de arista” son estrictamente mayores en el orden de los parámetros, pero no es universal.

Cerramos este capítulo con la Figura 3.3, que completa el diagrama de dominación con la inclusión de los parámetros de arista. Se evidencian también ahí algunas relaciones aún no establecidas.

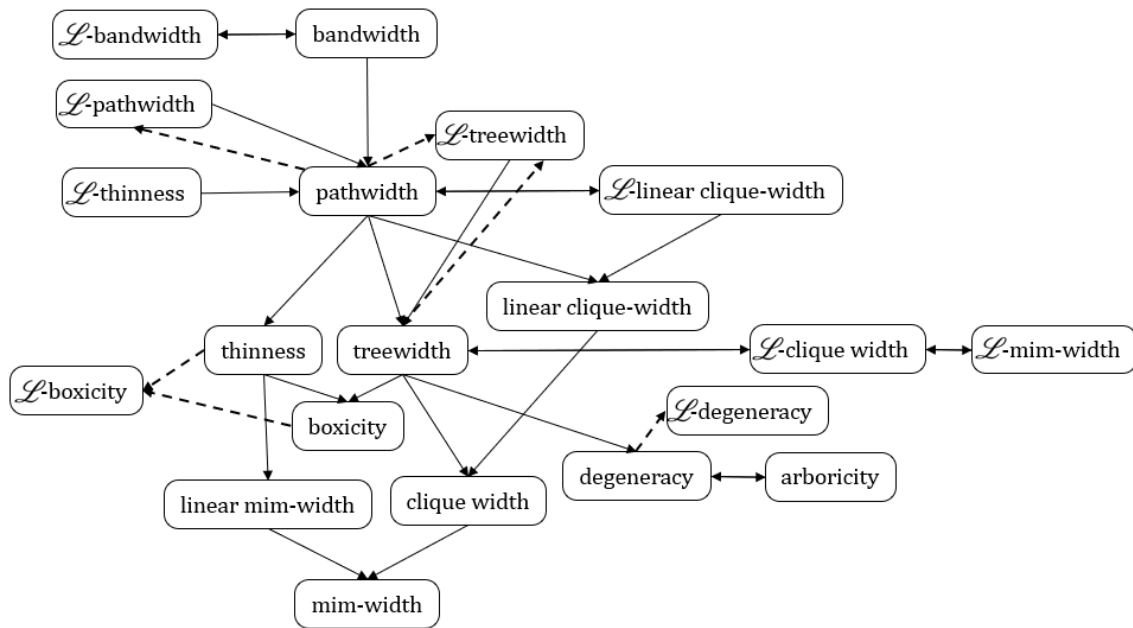


Figura 3.3: En esta figura se agregan parámetros de arista mencionados en este trabajo, junto con sus relaciones de dominación con los anteriores. No se incluyen flechas entre ellos que heredan (por ejemplo, la pathwidth de arista domina a la thinness de arista). Por otro lado, una flecha punteada de A a B se lee como “A no domina a B”, aunque notar que no toda no-dominación está incluida explícitamente.

CAPÍTULO 4

Conclusiones y trabajo futuro

Definimos un nuevo parámetro de grafo en base al operador de grafo de línea, como otros han hecho en la literatura. Estudiamos algunas de sus propiedades y logramos demostrar relaciones que lo vinculan con otros parámetros, siendo el más importante el de la pathwidth, por ser fuente de la mayor cantidad de relaciones demostrables. Caracterizamos a los grafos con thinness de arista exactamente 1, y que si bien no usamos en ninguna demostración, aporta información sobre cómo son las particiones de aristas consistentes en cualquier grafo. En grafos con alta degeneracy, la mejor cota inferior para la thinness de arista está dada por el resultado de Lema 17, dado que la cota que depende de la pathwidth es inferior en estos casos. Por otro lado, que la pathwidth sea esencialmente una cota inferior para la thinness de arista nos proporciona una amplia gama de ejemplos con thinness de arista arbitrariamente grande, entre los que los árboles se resaltan como particularmente ricos, ya que muestra que ni los ciclos ni los grados altos son necesarios para que la thinness de arista sea grande.

Por otro lado, exploramos la relación entre parámetros de dominación, por la cual podemos comparar las *dificultades esenciales* de resolver problemas asociados a los diversos parámetros de la literatura. Es decir, si P domina a Q pero no al revés, ocurre que para toda clase de grafos en la que resolver el problema asociado al parámetro Q sea difícil, resolver el parámetro asociado a P también (es decir, los valores de Q y P son altos), mientras que sin embargo también existen clases en las que resolver Q es “fácil” (que se refleja en que su valor numérico sea bajo) y que aún así el problema asociado a P puede ser difícil también.

Sobre este aspecto del trabajo, hicimos una breve revisión de lo conocido sobre

otros parámetros y su versión de arista. Nos permite ver fácilmente que para los parámetros considerados, resolver el problema asociado al parámetro en el grafo de línea resulta casi siempre estrictamente más difícil, en el sentido del párrafo anterior. Es decir, para muchos parámetros considerados, en familias de grafos donde resolver el problema asociado a un cierto parámetro P sea difícil, resolver el mismo problema en los grafos de línea no puede ser fácil.

Finalmente, el caso particular de los parámetros equivalentes es altamente interesante, ya que está asociado a una cierta dualidad entre problemas: dado que dos parámetros equivalentes se comportan, cualitativamente, de igual manera para cualquier familia de grafos, esto se puede interpretar como que los problemas asociados a los parámetros tienen el mismo tipo de estructuras que lo hacen difícil. Una aplicación de esto se mostró en el uso de la linear branch-width. Al ser definida a partir de un orden de aristas, la thinness de arista es más afín a ésta que a la pathwidth en lo relativo a demostrar una relación cualitativa. Más en general, múltiples parámetros equivalentes son utilizables como “puntos de apoyo.”^{en} las demostraciones, permitiendo usar las formulaciones más convenientes en cada caso. Y en particular, en lo relativo a la conjetura sobre thinness de arista y la pathwidth, además del interés teórico en este sentido, muestra la importancia de la experimentación empírica. No habríamos llegado a la conjetura de no haber calculado explícitamente la thinness de arista en muchos grafos, en calidad de exploración.

Con respecto a las direcciones en las que se podría continuar la investigación, la de mayor interés es mejorar la cota obtenida sobre la pathwidth. Creemos que para todo grafo G , $pathwidth(G) \leq \mathcal{L}\text{-thinness}(G) + 1$, que es considerablemente menor a la cota que logramos demostrar. Si bien creemos que vale para todo grafo porque no existen excepciones para grafos de pocos vértices, no podemos descartar la posibilidad de que existan contraejemplos en grafos más grandes.

Otra dirección que fue identificada pero que no aportó resultados es a través de matrices. Definimos la matriz de adyacencia de G como $M_{ady}(G)$ donde $M_{ady}(G) \in \{0, 1\}^{V(G) \times V(G)}$, y $M_{ady}(G)_{ij} = 1$ si y sólo si el vértice i es adyacente al vértice j . También definimos la matriz de incidencia como $B(G)$ donde $B(G) \in \{0, 1\}^{V(G) \times E(G)}$, y $B(G)_{ij} = 1$ si y sólo si el vértice i es un extremo de la arista j . Es sabido que para cualquier grafo G , $B(G)B^T(G) \cong M_{ady}(G)$ y $B^T(G)B(G) \cong M_{ady}(L(G))$, donde por \cong se entiende la igualdad en todas las entradas excepto en la diagonal. Es razonable que usando teoría de matrices y reordenamientos astutos de las filas y columnas se puedan relacionar propiedades de un grafo con su grafo de línea. Con una traducción adecuada del significado de la thinness a ecuaciones matriciales, quizás se puedan descubrir propiedades desconocidas de la thinness de arista.

Siguiendo con la misma idea, una exploración más profunda y una caracterización de la relación de dominación entre un parámetro de ancho de grafos y su contraparte

“de arista” es altamente relevante. En particular, encontrar parámetros que sean equivalentes, o que no estén dominados por su contraparte “de arista” es valioso, ya que casi ningún ejemplo de los mencionados en este trabajo tienen esa propiedad.

Bibliografía

- [1] Lowell W. Beineke. Characterizations of derived graphs. *J. Comb. Theory*, 9(2):129–135, 1970.
- [2] Rémy Belmonte and Martin Vatshelle. Graph classes with structured neighborhoods and algorithmic applications. *Theor. Comput. Sci.*, 511:54–65, 2013.
- [3] Hans L. Bodlaender, Thomas Wolle, and Arie M. C. A. Koster. Contraction and treewidth lower bounds. *J. Graph Algorithms Appl.*, 10(1):5–49, 2006.
- [4] Flavia Bonomo and Diego de Estrada. On the thinness and proper thinness of a graph. *Discret. Appl. Math.*, 261:78–92, 2019.
- [5] Flavia Bonomo-Braberman, Eric Brandwein, Fabiano de S. Oliveira, Moysés S. Sampaio Jr., Agustín Sansone, and Jayme Luiz Szwarcfiter. Thinness and its variations on some graph families and coloring graphs of bounded thinness. *RAIRO Oper. Res.*, 58(2):1681–1702, 2024.
- [6] Flavia Bonomo-Braberman, Eric Brandwein, Carolina Lucía Gonzalez, and Agustín Sansone. On the thinness of trees. *Discret. Appl. Math.*, 365:39–60, 2025.
- [7] Flavia Bonomo-Braberman, Eric Brandwein, and Ignasi Sau. Computing parameters that generalize interval graphs using restricted modular partitions. Manuscript.
- [8] Flavia Bonomo-Braberman, Carolina Lucía Gonzalez, Fabiano de Souza Oliveira, Moysés S. Sampaio Jr., and Jayme Luiz Szwarcfiter. Thinness of product graphs. *Discret. Appl. Math.*, 312:52–71, 2022.

-
- [9] Eric Brandwein. Graph thinness algorithms. <https://github.com/ericbrandwein/thinness>.
 - [10] Nick Brettell, Andrea Munaro, Daniël Paulusma, and Shizhou Yang. Comparing width parameters on graph classes. *Eur. J. Comb.*, 127:104163, 2025.
 - [11] Marco Caoduro and András Sebő. On the boxicity of line graphs and of their complements. *CoRR*, abs/2501.05049, 2025.
 - [12] L. Sunil Chandran, Carlo Mannino, and Gianpaolo Oriolo. The independent set problem and the thinness of a graph. Manuscript, 2007.
 - [13] Václav Chvátal. A remark on a problem of harary. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 20(1):109–111, 1970.
 - [14] Derek G. Corneil and Udi Rotics. On the relationship between clique-width and treewidth. *SIAM J. Comput.*, 34(4):825–847, 2005.
 - [15] Bruno Courcelle, Joost Engelfriet, and Grzegorz Rozenberg. Handle-rewriting hypergraph grammars. *J. Comput. Syst. Sci.*, 46(2):218–270, 1993.
 - [16] Diego De Estrada. Sobre la thinness y la thinness propia de un grafo. Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 2020.
 - [17] Personal Communication.
 - [18] Vida Dujmovic and David R. Wood. Graph treewidth and geometric thickness parameters. *Discret. Comput. Geom.*, 37(4):641–670, 2007.
 - [19] Paul Erdős and András Hajnal. On chromatic number of graphs and set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 17:61–99, 1966.
 - [20] Fanica Gavril. Some NP-complete problems on graphs. In *Proc. Conf. on Inform. Sci. and Systems, 1977*, pages 91–95, 1977.
 - [21] Frank Gurski and Egon Wanke. On the relationship between NLC-width and linear NLC-width. *Theor. Comput. Sci.*, 347(1-2):76–89, 2005.
 - [22] Frank Gurski and Egon Wanke. Line graphs of bounded clique-width. *Discret. Math.*, 307(22):2734–2754, 2007.
 - [23] Frank Harary, Jerald A. Kabell, and Frederick R. McMorris. Bipartite intersection graphs. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 023(4):739–745, 1982.

-
- [24] Lawrence Hueston Harper. Optimal assignments of numbers to vertices. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 12(1):131–135, 1964.
 - [25] Daniel J. Harvey and David R. Wood. Treewidth of the line graph of a complete graph. *J. Graph Theory*, 79(1):48–54, 2015.
 - [26] Daniel J. Harvey and David R. Wood. The treewidth of line graphs. *J. Comb. Theory B*, 132:157–179, 2018.
 - [27] Svein Høgemo, Jan Arne Telle, and Erlend Raa Vågset. Linear mim-width of trees. In Ignasi Sau and Dimitrios M. Thilikos, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 45th International Workshop, WG 2019, Vall de Núria, Spain, June 19-21, 2019, Revised Papers*, volume 11789 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 218–231. Springer, 2019.
 - [28] Tao Jiang, Dhruv Mubayi, Aditya Shastri, and Douglas B. West. Edge-bandwidth of graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 12(3):307–316, 1999.
 - [29] Philippe G. H. Lehot. An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. *J. ACM*, 21(4):569–575, 1974.
 - [30] Don R. Lick and Arthur T. White. k -Degenerate graphs. *Canad. J. Math.*, 22:1082–1096, 1970.
 - [31] Carlo Mannino, Gianpaolo Oriolo, Federico Ricci-Tersenghi, and L. Sunil Chandran. The stable set problem and the thinness of a graph. *Oper. Res. Lett.*, 35(1):1–9, 2007.
 - [32] Jan Mycielski. Sur le coloriage des graphs. *Colloq. Math.*, 3(2):161–162, 1955.
 - [33] C St JA Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. Lond. Math. Soc.*, 1(1):445–450, 1961.
 - [34] Joakim Alme Nordstrand. Exploring graph parameters similar to tree-width and path-width. Master’s thesis, Department of Informatics, University of Bergen, 2017.
 - [35] Stephan Olariu. An optimal greedy heuristic to color interval graphs. *Inf. Process. Lett.*, 37:21–25, 1991.
 - [36] Yota Otachi and Ryohei Suda. Bandwidth and pathwidth of three-dimensional grids. *Discret. Math.*, 311(10-11):881–887, 2011.

- [37] Ganesan Ramalingam and Chandrasekaran Pandu Rangan. A unified approach to domination problems on interval graphs. *Inf. Process. Lett.*, 27:271–274, 1988.
- [38] Fred S Roberts. On the boxicity and cubicity of a graph. In W. T. Tutte, editor, *Recent progress in combinatorics: Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics*, pages 301–310, 1969.
- [39] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. I. Excluding a forest. *J. Comb. Theory B*, 35(1):39–61, 1983.
- [40] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.
- [41] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *J. Comb. Theory B*, 52(2):153–190, 1991.
- [42] Nick Roussopoulos. A $\max\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph C . *Inf. Process. Lett.*, 2(4):108–112, 1973.
- [43] Dale Skrien. Interval line graphs. *Discret. Math.*, 51(3):317–318, 1984.
- [44] George Szekeres and Herbert S Wilf. An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Comb. Theory*, 4(1):1–3, 1968.
- [45] Martin Vatshelle. *New width parameters of graphs*. PhD thesis, Department of Informatics, University of Bergen, 2012.
- [46] Hassler Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 54(1):150–168, 1932.
- [47] Xiao Zhou and Takao Nishizeki. Graph coloring algorithms. *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E83-D(3):407–417, 2000.