



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Espacios de Sobolev fraccionarios,
Orlicz-Sobolev y sus extensiones
fraccionarias**

Laura Cúneo

Director: Julián Fernández Bonder

Febrero, 2026

Índice general

Resumen	3
1 Introducción	4
2 Espacios de sobolev fraccionarios	7
2.1 Preliminares	7
2.2 Inclusión entre los espacios de Sobolev fraccionarios	10
2.3 Compacidad de la inclusión	15
2.4 Desigualdad de Sobolev-Poincaré fraccionaria	20
2.4.1 Espacios duales	28
2.5 Estimaciones de Morrey para el caso fraccionario	28
2.5.1 Espacios de Campanato	29
3 Comportamiento Asintótico	35
3.1 comportamiento asintótico cuando $s \uparrow 1^-$	36
3.2 Implicancias de Bourgain-Brezis-Mironescu	47
3.2.1 Desigualdad de Poincaré	48
3.2.2 Γ -convergencia de funcionales	49
3.3 Comportamiento asintótico cuando $s \downarrow 0^+$	53
4 Espacios de Orlicz	60
4.1 Preliminares	60
4.2 Función de Young	62
4.2.1 Función complementaria de una función de Young	63
4.3 La clase de Orlicz	66
4.4 Espacio de Orlicz	68
4.5 Espacio modular de Orlicz	75
5 Espacio de Orlicz Sobolev y Orlicz Sobolev fraccionario	81
5.1 Preliminares	82

5.1.1	Resultado tipo Rellich-Kondrachov	86
5.2	Comportamiento asintótico	87
5.2.1	Preliminares	89
5.2.2	Resultado tipo Bourgain-Brezis-Mironescu $s \uparrow 1^-$	96
5.2.3	Desigualdad de Poincaré fraccionaria	97
	Bibliografía	100

Resumen

En esta tesis se estudian los espacios de Sobolev fraccionarios, los espacios de Orlicz-Sobolev y su extensión fraccionaria, con el objetivo de comprender los comportamientos de difusión local y no local asociados a estos marcos funcionales. Se analizan las propiedades de compacidad, densidad, dualidad y las funciones de Young que definen la estructura de los espacios de Orlicz.

En particular, se presentan resultados tipo Bourgain–Brezis–Mironescu, que describen el límite de las seminormas fraccionarias cuando $s \rightarrow 1$ y resultados tipo Maz'ya-Shaposhnikova, que caracterizan el comportamiento en el régimen $s \rightarrow 0$. Se discute cómo estas caracterizaciones se extienden (o fallan) en ausencia de la condición Δ_2 .

El trabajo combina técnicas de análisis funcional, teoría de espacios de funciones y métodos de difusión no local, con el propósito de ofrecer una visión unificada de los fenómenos de transición entre modelos locales y no locales en espacios de Sobolev y Orlicz-Sobolev.

Palabras clave: Espacios de Sobolev fraccionarios, Orlicz-sobolev fraccionarios.

Capítulo 1

Introducción

Una idea fundamental en el análisis moderno de ecuaciones en derivadas parciales es que los espacios funcionales en los que se buscan soluciones no constituyen una elección arbitraria, sino que están intrínsecamente determinados por la estructura de las ecuaciones consideradas. En particular, el tipo de operador, el crecimiento de las no linealidades y la presencia de efectos locales o no locales inducen de manera natural la regularidad esperable de las soluciones y, en consecuencia, los espacios adecuados para su estudio.

En el caso de ecuaciones elípticas lineales clásicas, como

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega,$$

la formulación variacional del problema se basa en el funcional de energía

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx,$$

lo cual conduce de forma natural al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. En este contexto, las propiedades geométricas y funcionales de los espacios de Sobolev clásicos permiten establecer resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones.

Sin embargo, numerosos modelos físicos y biológicos conducen a ecuaciones con *difusión no lineal*, en las cuales la ley constitutiva del flujo depende de forma no lineal del gradiente. Un ejemplo prototípico es la ecuación del p -laplaciano

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f,$$

para la cual el crecimiento del operador exige trabajar en espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. No obstante, en situaciones más generales, el comportamiento del operador no puede describirse mediante una potencia fija, sino que presenta crecimientos no polinómicos, lo que excede el marco de los espacios de Sobolev clásicos.

Este hecho motiva la introducción de los *espacios de Sobolev–Orlicz*, asociados a funciones de Young A , que permiten tratar operadores del tipo

$$-\operatorname{div} \left(a(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = f,$$

donde a presenta un crecimiento general. En este caso, la energía natural del problema viene dada por

$$E(u) = \int_{\Omega} A(|\nabla u|) dx - \int_{\Omega} f u dx,$$

donde $A'(t) = a$ y los espacios $W^{1,A}(\Omega)$ proporcionan el marco funcional adecuado para el análisis variacional de dichas ecuaciones ver [2]. De este modo, los espacios de Sobolev–Orlicz aparecen como una generalización necesaria cuando los espacios $W^{1,p}$ resultan insuficientes para capturar la estructura del operador.

Por otro lado, en los últimos años ha cobrado gran relevancia el estudio de *ecuaciones no locales*, motivadas por modelos que describen procesos con interacciones a distancia, tales como difusión anómala, procesos de Lévy o dinámicas con saltos. Un ejemplo fundamental es la ecuación con laplaciano fraccionario

$$(-\Delta)^s u = f, \quad 0 < s < 1,$$

cuya energía asociada está dada por la forma no local

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

Esta estructura no local induce de manera natural los *espacios de Sobolev fraccionarios* $H^s(\mathbb{R}^n)$ y, más generalmente, $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, en los cuales la regularidad se mide a través de diferencias finitas en lugar de derivadas clásicas.

Cuando la no localidad se combina con no linealidades de crecimiento general, surgen operadores no locales del tipo

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \right) \frac{dx dy}{|x - y|^n},$$

que aparecen, por ejemplo, en modelos de difusión no local no lineal. En este contexto, los espacios de Sobolev fraccionarios clásicos ya no resultan adecuados, y se hace necesario introducir los *espacios de Sobolev–Orlicz fraccionarios*, que combinan simultáneamente la no localidad del operador y el crecimiento no estándar de la no linealidad ver [9] y [10].

El objetivo de esta tesis es estudiar de manera sistemática estos espacios funcionales —espacios de Sobolev fraccionarios, espacios de Sobolev–Orlicz y espacios de

Sobolev–Orlicz fraccionarios— poniendo especial énfasis en cómo surgen , así como en las limitaciones de los marcos clásicos y la necesidad de su generalización. En los capítulos siguientes se desarrollarán las propiedades fundamentales de estos espacios, tales como completitud, reflexividad, desigualdades funcionales y resultados de inmersión, que resultan esenciales para el análisis variacional y el estudio de las ecuaciones asociadas.

Capítulo 2

Espacios de sobolev fraccionarios

Los espacios de Sobolev fraccionarios constituyen una extensión natural de los espacios de Sobolev clásicos, permitiendo describir grados intermedios de regularidad entre la simple integrabilidad y la existencia de derivadas débiles de orden entero. En numerosos problemas no locales, en modelos de difusión anómala y en formulaciones variacionales asociadas a núcleos singulares, resulta indispensable disponer de una noción de regularidad que capture la interacción entre puntos alejados.

En este contexto, la seminorma de Gagliardo mide la oscilación promedio de una función mediante diferencias finitas ponderadas por una ley de decaimiento dependiente de la distancia y constituye el punto de partida para el análisis fraccionario que desarrollaremos a lo largo de este capítulo.

2.1. Preliminares

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p < \infty$ y $s \in (0, 1)$. Para una función $u \in L^p(\Omega)$ definimos la *seminorma de Gagliardo* como

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

Esta cantidad mide la oscilación no local de u , penalizando las diferencias $u(x) - u(y)$ según una potencia crítica de la distancia $|x - y|$.

Si bien $[\cdot]_{W^{s,p}}$ satisface la homogeneidad y la desigualdad triangular, *falla en verificar la propiedad de separación*, necesaria para que un funcional sea una norma. En efecto, si $[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$, entonces

$$|u(x) - u(y)| = 0 \quad \text{para casi todo par } (x, y) \in \Omega \times \Omega$$

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = 0 \implies u \text{ es constante a.e.}$$

pero no necesariamente $u = 0$.

De este modo, el funcional no distingue entre funciones que difieren en una constante, y no cumple la condición $\|u\| = 0 \implies u = 0$.

A partir de esta seminorma (2.1) introducimos el **espacio de Sobolev fraccionario**

Definición 2.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p < \infty$ y $s \in (0, 1)$. Se define el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \quad (2.2)$$

el cual se convierte en un espacio normado cuando se considera la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \quad (2.3)$$

Cuando $p = 2$, es usual emplear la notación $H^s(\Omega)$.

Entre las propiedades básicas del espacio $W^{s,p}(\Omega)$ se destacan:

- **Compleitud:** provisto de la norma anterior, $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.
- **Separabilidad y reflexividad:** si $1 < p < \infty$, entonces $W^{s,p}(\Omega)$ es separable y reflexivo.

Proposición 2.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, $0 < s < 1$ y $1 \leq p < \infty$. El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ es completo, es decir, es un espacio de Banach provisto con la norma anterior.

Demostración. Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{s,p}(\Omega)$. Entonces, en particular,

$$\|u_k - u_m\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad [u_k - u_m]_{W^{s,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ es completo, existe una función $u \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Pasando, si es necesario, a una subsucesión, podemos suponer que $u_k(x) \rightarrow u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

Consideremos ahora la sucesión de funciones

$$f_k(x, y) := \frac{u_k(x) - u_k(y)}{|x - y|^{\frac{n+sp}{p}}} \quad \text{en } \Omega \times \Omega.$$

La condición de Cauchy implica que (f_k) es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega \times \Omega)$, y por lo tanto converge a alguna función $f \in L^p(\Omega \times \Omega)$.

Por convergencia puntual de u_k , se tiene que

$$f_k(x, y) \rightarrow \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{n+sp}{p}}} \quad \text{para casi todo } (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Por unicidad del límite en L^p , se concluye que

$$f(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{n+sp}{p}}}.$$

En particular,

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \|f\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}^p < \infty,$$

y por lo tanto $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Finalmente, usando la convergencia en $L^p(\Omega)$ y en $L^p(\Omega \times \Omega)$, se obtiene

$$\|u_k - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

lo que prueba que $W^{s,p}(\Omega)$ es completo. □

Proposición 2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, $0 < s < 1$ y $1 < p < \infty$. El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo.*

Demostración. Definimos el operador lineal

$$T : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega)$$

dado por

$$T(u) = \left(u, \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{n+sp}{p}}} \right).$$

Por definición de la norma en $W^{s,p}(\Omega)$, el operador T es una inyección lineal continua, y su imagen es un subespacio cerrado del espacio producto

$$L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega),$$

dotado de la norma

$$\|(f, g)\| = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}.$$

Como $1 < p < \infty$, los espacios $L^p(\Omega)$ y $L^p(\Omega \times \Omega)$ son reflexivos. Además, el producto de un número finito de espacios reflexivos es reflexivo, y todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo. Las propiedades utilizadas sobre la reflexividad de un espacio, pueden consultarse en[1].

Dado que $W^{s,p}(\Omega)$ es isomorfo (como espacio normado) a un subespacio cerrado de un espacio reflexivo, se concluye que $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo. \square

Observación 2.4. El argumento anterior muestra además que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es separable, ya que se inyecta continuamente en espacios L^p , los cuales son separables para $1 \leq p < \infty$.

2.2. Inclusión entre los espacios de Sobolev fraccionarios

Un aspecto fundamental en el estudio de los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$ es comprender cómo se relacionan entre sí cuando varían los parámetros s y p . Estas inclusiones son herramientas esenciales en análisis de ecuaciones en derivadas parciales y cálculo variacional, ya que permiten pasar al límite en problemas no locales, obtener compacidad y garantizar la existencia de soluciones.

En las demostraciones los siguientes cálculos serán de mucha utilidad y se usaran sin hacer mención de ellos:

Para $\alpha, \beta > 0$, consideremos los siguientes cálculos:

$$\int_{\{|x|<R\}} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} dx = \int_0^R r^{n-1} \frac{1}{r^{n-\alpha}} dr dS = n\omega_n \int_0^R r^{\alpha-1} dr = \frac{n\omega_n}{\alpha} R^\alpha. \quad (2.4)$$

$$\int_{\{|x|>R\}} \frac{1}{|x|^{n+\beta}} dx = \int_R^\infty r^{n-1} \frac{1}{r^{n+\beta}} dr dS = n\omega_n \int_R^\infty r^{-\beta-1} dr = \frac{n\omega_n}{\beta} R^{-\beta}. \quad (2.5)$$

En el primer resultado que se presenta se deja fijo el parámetro de integrabilidad p y se mueve el parámetro de regularidad s , a más regularidad los espacios se vuelven más chicos.

Teorema 2.5. Sean $0 < s \leq t < 1 \leq p < \infty$. Entonces

$$W^{t,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega).$$

Más aún, existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que

$$\|f\|_{s,p,\Omega} \leq C \|f\|_{t,p,\Omega}.$$

Demostración. En efecto, por la definición de la seminorma fraccionaria en Ω , se tiene

$$\begin{aligned} [f]_{s,p,\Omega}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Para acotar el término I , observamos que si $|x-y| < 1$ y $0 < s < t < 1$, entonces

$$|x-y|^{n+tp} \leq |x-y|^{n+sp}.$$

En consecuencia, se obtiene la estimación

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+tp}} dy dx \\ &= [f]_{t,p,\Omega}^p. \end{aligned}$$

Para acotar II se procede de la siguiente forma: se usa la desigualdad elemental válida para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $p \geq 1$:

$$|a-b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p). \quad (2.6)$$

Aplicando 2.6 con $a = f(x)$ y $b = f(y)$ obtenemos

$$|f(x) - f(y)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x)|^p + |f(y)|^p).$$

Por lo tanto,

$$II \leq 2^{p-1} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(x)|^p + |f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx$$

Ahora separamos los términos que aparecen en II . Usando la desigualdad

$$|a-b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} II &\leq 2^{p-1} \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \left(\int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \left(\int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \right) dx \right]. \end{aligned}$$

Para el segundo término, aplicando el teorema de Fubini, se obtiene

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \right) dx = \int_{\Omega} |f(y)|^p \left(\int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dx \right) dy.$$

Reemplazando esta expresión en la estimación anterior y renombrando la variable de integración, concluimos que

$$II \leq 2^p \int_{\Omega} |f(x)|^p \left(\int_{\{|x-y| \geq 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy \right) dx.$$

Luego, debemos encontrar una cota para el peso

$$\rho_{\Omega}(x) = \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy.$$

Si $|\Omega| < \infty$, se tiene $\rho_{\Omega} \leq |\Omega| < \infty$.

Para el caso general

$$\rho_{\Omega}(x) \leq \int_{\{|z| \geq 1\}} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz = \frac{n\omega_n}{sp},$$

donde ω_n es la medida de la bola de radio 1. □

Observación 2.6. El Teorema 2.5 continúa siendo válido si $t = 1$ pero exigiendo a Ω ser dominio de extensión.

Definición 2.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Decimos que Ω es un dominio de extensión para $W^{s,p}$, si existe un operador

$$E : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

lineal y continuo tal que $Ef(x) = f(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.

Al operador E se lo denomina *operador de extensión*.

Observación 2.8. Puede verse que todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado y con frontera Lipschitz es un dominio de extensión. Ver [11].

Teorema 2.9. Sean $0 < s < 1 \leq p < \infty$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de extensión para $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega),$$

y existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demostración. Comenzamos con una estimación elemental. Si $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$f(x+z) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+tz) dt = \int_0^1 \nabla f(x+tz) \cdot z dt,$$

de donde se deduce

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx \leq |z|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |\nabla f(x+tz)| dt \right)^p dx \leq |z|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx, \quad (1)$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hölder y la invariancia de la integral bajo traslaciones.

Por densidad, esta desigualdad resulta válida para $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, sea $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Como Ω es un dominio de extensión, existe una extensión $\tilde{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (2)$$

con $C = C(n, p)$. Podemos asumir directamente que $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Estimamos entonces la seminorma fraccionaria. Por definición, se tiene

$$\begin{aligned} [f]_{W^{s,p}(\Omega)}^p &= \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

La cota II es exactamente igual a la realizada en la demostración del teorema 2.5

$$II \leq C \|f\|_p^p$$

Para acotar I , se utiliza la estimación de la ecuación (1):

$$I \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z| < 1} \frac{|f(x+z) - f(x)|^p}{|z|^{n+sp}} dz dx.$$

Aplicando la desigualdad obtenida en (2), se deduce:

$$I \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \int_{|z| < 1} \frac{1}{|z|^{n+sp-p}} dz.$$

Por lo tanto,

$$I \leq \frac{n\omega_n}{p(1-s)} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

con $C = C(n, p, s)$, lo que concluye la estimación. \square

Veamos qué resultados se obtienen cuando varía el parámetro de integrabilidad.

Teorema 2.10. Sean $0 < s < t < 1 \leq p < q$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de medida finita. Entonces $W^{t,q}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$, y existe una constante $C = C(n, |\Omega|, t - s, q - p)$ tal que

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{t,q}(\Omega)}.$$

Para acotar I , se utiliza la estimación de la ecuación (1):

$$I \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z|<1} \frac{|f(x+z) - f(x)|^p}{|z|^{n+sp}} dz dx.$$

Aplicando la desigualdad obtenida en (2), se deduce:

$$I \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{n+sp-p}} dz.$$

La integral sobre la bola unitaria se puede calcular explícitamente:

$$\int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{n+sp-p}} dz = \frac{n\omega_n}{p(1-s)},$$

donde ω_n es el volumen de la bola unitaria en \mathbb{R}^n .

Por lo tanto,

$$I \leq \frac{n\omega_n}{p(1-s)} \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

con $C = C(n, p, s)$, lo que concluye la estimación.

Demostración. La demostración sigue las líneas de los Teoremas 2.5 y 2.9 Separamos la seminorma fraccionaria como

$$\begin{aligned} |f|_{W^{s,p}(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Para el segundo término, como siempre,

$$II \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}^p,$$

donde se ha usado la desigualdad de Hölder. Para acotar I , se introduce un factor auxiliar:

$$I = \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{\frac{p}{q}n+tp}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{(1-\frac{p}{q})n-(t-s)p}} dy dx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene:

$$I \leq \|f\|_{W^{t,q}(\Omega)}^p \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{1}{|x-y|^{n-(t-s)\frac{pq}{q-p}}} dy dx \right)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Finalmente, se estima la integral:

$$\int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{1}{|x-y|^{n-(t-s)\frac{pq}{q-p}}} dy dx \leq \int_{|z|<1} \frac{1}{|z|^{n-(t-s)\frac{pq}{q-p}}} dz = \frac{n\omega_n(q-p)}{pq(t-s)},$$

lo que concluye la demostración. \square

Observación 2.11. El caso $W^{1,q}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$ con $0 < s < 1 \leq p < q < \infty$ se deduce muy sencillamente del Teorema 2.9. En efecto, si Ω es de medida finita y es un dominio de extensión, de la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\|f\|_{1,p,\Omega}^p \leq |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_{1,q,\Omega}^p \quad (1)$$

Luego, usando el Teorema 2.9 se concluye que

$$\|f\|_{s,q,\Omega} \leq C \|f\|_{1,p,\Omega}$$

con $C = C(n, s, p, q, \Omega)$.

Observación 2.12. Resulta sorprendente que no se tenga una desigualdad análoga a (1) en el caso fraccionario. De hecho, es falso que exista $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{s,p,\Omega} \leq C \|f\|_{s,q,\Omega}$$

para toda $f \in W^{s,q}(\Omega)$ si $0 < s < 1 \leq p < q < \infty$.

Observación 2.13. La moraleja es que si se desea disminuir la integrabilidad en el caso fraccionario, también resulta necesario disminuir la regularidad.

2.3. Compacidad de la inclusión

En ecuaciones diferenciales no locales la existencia de soluciones depende críticamente de poder extraer una subsucesión convergente fuerte a partir de una sucesión acotada en $W^{s,p}(\Omega)$. Sin este paso, la estructura no lineal de los funcionales impide, en general, pasar al límite y obtener soluciones del problema original.

Desde un punto de vista geométrico, este resultado refleja que la regularidad fraccionaria impone un control global sobre la oscilación de las funciones: las secuencias acotadas no pueden ni oscilar arbitrariamente ni concentrar su masa. Por ello, la compacidad es también clave en el estudio de comportamientos asintóticos.

En síntesis, la compacidad de la inclusión fraccionaria no es un detalle técnico, sino un ingrediente estructural que garantiza que las técnicas de análisis funcional y variacional sigan siendo efectivas en el marco no local. Su importancia radica en que permite asegurar la existencia, estabilidad y buen comportamiento de soluciones en una amplia familia de problemas donde intervienen energías y operadores fraccionarios.

El siguiente resultado es fundamental y será clave para el teorema de compacidad que se quiere demostrar. Su demostración se encuentra en [1, Theorem 4.26].

Teorema 2.14. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ una sucesión acotada (i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty$). Dado $h \in \mathbb{R}^N$, notemos por $\tau_h f(x) = f(x + h)$. Si*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f_n - f_n\|_p = 0,$$

entonces existe $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y una subsecuencia $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Recordemos que $f_{n_k} \rightarrow f$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ significa que para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ medible y acotado se tiene $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(E)} \rightarrow 0$.

El siguiente lema es de crucial importancia para los resultados que deseamos obtener.

Lema 2.15. *Sean $0 < s < 1$ y $1 \leq p < \infty$. Existe entonces una constante $C > 0$ que depende sólo de N, s, p tal que*

$$\|\tau_h f - f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C|h|^s [f]_{s,p},$$

para todo $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Observar que

$$|h|^N \omega_N \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{|h|}(x)} |f(x+y) - f(x)|^p dy dx, \quad (2.6)$$

donde $y \leq |h|$ es la medida de Lebesgue de la bola de radio 1 en \mathbb{R}^N . Ahora, se usa la siguiente desigualdad elemental:

$$|f(x+h) - f(x)|^p \leq 2^{p-1} (|f(x+h) - f(y)|^p + |f(y) - f(x)|^p), \quad (2.7)$$

para todo $y \in B_{|h|}(x)$.

Luego, de (2.7), obtenemos

$$\int_{B_{|h|}(x)} |f(x+h) - f(x)|^p dy dx \leq 2^{p-1} \left(\int_{B_{|h|}(x)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(y)|^p + |f(y) - f(x)|^p dy dx \right).$$

Los términos I y II se acotan de manera similar. Primero se observa que, si $x \in \mathbb{R}^N$ y $y \in B_{|h|}(x)$,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq |x| + |h| \leq 2|x|. \quad (2.8)$$

Luego, de (2.8), se tiene

$$I \leq (2|h|)^{N+sp} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x+h) - f(y)|^p}{|x+h-y|^{N+sp}} dy dx \leq (2|h|)^{N+sp} [f]_{s,p}^p. \quad (2.9)$$

Análogamente,

$$II \leq |h|^{N+sp} [f]_{s,p}^p. \quad (2.10)$$

Finalmente, usando (2.6), (2.9) y (2.10) concluimos:

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq \frac{2^{p-1}(2^{N+sp} + 1)}{\omega_n} |h|^{sp} [f]_{s,p}^p,$$

lo que concluye la demostración. \square

Con la ayuda del Teorema 2.5 y el Lema 2.15 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.16. Sean $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$ y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ una sucesión acotada, i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{W^{s,p}} < \infty$. Existe entonces una función $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ en $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Si llamamos $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p}$ es claro entonces que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p} \leq M \quad \text{y} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} [f_n]_{s,p} \leq M.$$

Luego, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y, por Lema 2.15,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\tau_h f_n - f_n\|_p \leq CM |h|^s.$$

Luego, la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica las hipótesis del Teorema 2.14, con lo que tenemos que existe $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en} \quad L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N).$$

Sólo queda por verificar que $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Pero eso es consecuencia del Lema de Fatou. En efecto, pasando eventualmente a una subsucesión, podemos suponer que $f_{n_k} \rightarrow f$ en casi todo punto de \mathbb{R}^N . Luego

$$0 \leq \frac{|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \longrightarrow \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Entonces, por el Lema de Fatou,

$$[f]_{s,p}^p = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

$$[f]_{s,p}^p \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} [f_n]_{s,p}^p < \infty,$$

como queríamos ver. □

La convergencia local en $L^p(\mathbb{R}^N)$ no puede mejorarse. De hecho en general no es cierto que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ es acotada, entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tenga algún punto de acumulación en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Ejemplo 2.17. Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\text{sop}(\rho) = B_1(0)$. Por ejemplo, se puede tomar $\rho(x)$ como el núcleo regularizante estándar,

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $\rho \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo $0 < s < 1$ y $1 \leq p < \infty$. Si llamamos $f_n(x) = \rho(x + n)$ con $x \in \mathbb{R}^N$ fijo, entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ es acotada y verifica

$$\|f_n\|_{L^p} = \|\rho\|_{L^p}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad \text{y} \quad f_n \rightarrow 0 \text{ en } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N).$$

En consecuencia $f_n \not\rightarrow 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

El motivo por el cual en el ejemplo 2.17 no se obtiene compacidad de la sucesión en $L^p(\mathbb{R}^N)$ es porque la masa de la sucesión se *pierde en el infinito*. En cambio si consideramos funciones restringidas a un dominio acotado, ese fenómeno debería evitarse y así conseguir la deseada compacidad.

Corolario 2.18 (Compacidad de $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$). . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio de extensión acotado y $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ es acotada, existe $f \in W^{s,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Demostración. Sea $E : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ el operador de extensión. Tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|Ef\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall f \in W^{s,p}(\Omega).$$

Entonces, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ es una sucesión acotada,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Ef_n\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty.$$

Podemos aplicar el Teorema 2.16 a la sucesión $\{Ef_n\} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ y concluir que existe $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{Ef_{n_k}\}$ tal que

$$Ef_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

Pero entonces, como Ω es acotado,

$$Ef_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Ahora el corolario es inmediato observando que $Ef_{n_k} = f_{n_k}$ casi en todo punto de Ω y llamando $f = f|_{\Omega}$. □

Claramente, si Ω es acotado, se tiene que

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{para } 1 \leq q \leq p,$$

con inclusión continua. En efecto, por la desigualdad de Hölder tomando $\frac{p}{q}$ se tiene

$$\int_{\Omega} |f|^q dx = \int_{\Omega} |f|^q \cdot 1 dx \leq |\Omega|^{1-\frac{p-q}{p}} \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{q}{p}},$$

De donde,

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definición 2.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se define el conjunto $W_0^{s,p}(\Omega)$ de las funciones que se anulan fuera de Ω . Es decir,

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \{ f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \}.$$

Observación 2.20. Es fácil ver que si $C_c^\infty(\Omega) \subset W_0^{s,p}(\Omega)$. Luego,

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}}} \subset W_0^{s,p}(\Omega),$$

En general la inclusión puede ser estricta, pero si Ω tiene frontera Lipschitz, se tiene la igualdad (ver [11]).

Además, cuando $s < \frac{1}{p}$ vale la igualdad y, en consecuencia,

$$W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega).$$

Corolario 2.21 (Compacidad de $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$). . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ es acotada, existe $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Demostración. La demostración es inmediata del Teorema 2.16. En efecto, existe $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^N).$$

Pero, en particular, como Ω es acotado, se tiene

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Finalmente, dado que, pasando a una nueva subsucesión de ser necesario, $f_{n_k} \rightarrow f$ casi en todo punto de \mathbb{R}^N , se obtiene que $f = 0$ casi en todo punto de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Por ende, $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$. \square

Corolario 2.22. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $0 < s < 1$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ es acotada, existe $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^q(\Omega) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty, \quad \text{para todo } 1 \leq q < p.$$

Si además Ω es un dominio de extensión, se tiene $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ es acotada, existe $f \in W^{s,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{en } L^q(\Omega), \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \quad \text{para todo } 1 \leq q \leq p.$$

2.4. Desigualdad de Sobolev-Poincaré fraccionaria

Para poder obtener resultados de compacidad en $L^q(\Omega)$ para $q > p$ es necesario que valga la contención de $W^{s,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$. Este resultado es bien conocido para los espacios clásicos de Sobolev ver [1].

Para los espacios $W^{s,p}(\Omega)$ los resultados son también clásicos. Una demostración elemental de este hecho, que usa exclusivamente la desigualdad de Hölder se puede consultar en [1]. En esta sección utilizando las ideas que se encuentran en [5] y en [6] se desarrollará una demostración alternativa.

Lema 2.23. Sea $p > 1$, $a \in (0, 1]$, $b \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$, $s \in (0, 1)$. Para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n+sp}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(y+h)|^p \mathbf{1}_{A(a)}(h) dh \right) dy \leq \\ & \leq (2a)^{n+sp} N^{p(1-s)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(y+h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh dy \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A(a) &= B_{2a}(0) \setminus B_{ar}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ar < |x| < 2ar\} \\ A\left(\frac{a}{N}\right) &= B_{2a/N}(0) \setminus B_{ar}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{ar}{N} < |x| < \frac{2ar}{N}\} \end{aligned}$$

Demostración. Recordando

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |a_j|^p \leq \sum_{j=1}^N |a_j|^p \Rightarrow \sum_{j=1}^N |a_j|^p \leq N \sum_{j=1}^N |a_j|^p$$

tomando luego, $a_j = |u(y + t(j-h)) - u(y + tj)|$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(y+h)|^p \mathbf{1}_{A(a)}(h) dh &\leq N^{p-1} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \left| u\left(y + \frac{j-1}{N}h\right) - u\left(y + \frac{j}{N}h\right) \right|^p \\ &\quad \times \mathbf{1}_{A(a)}(h) dh. \end{aligned}$$

$$\leq N^{p-1} N^n \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |u(y + (j-1)h) - u(y + jh)|^p \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh$$

como $ar < |h| < 2ar$, entonces $|h| \leq 2ar \Rightarrow \frac{|h|}{2a} \leq r$ me independizo de r

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n+sp}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(y+h)|^p \mathbf{1}_{A(a)}(h) dh \right) dy \leq \\ & \leq N^{p+n-1} \left(\frac{2a}{N}\right)^{n+sp} \sum_{j=1}^N \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y + (j-1)h) - u(y + jh)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh dy \end{aligned}$$

Si se considera el cambio de variable $w = y + (j-1)h \Rightarrow w + h = y + jh$, luego $dh = dw$. Entonces

$$\leq N^{p+n-1} \left(\frac{2a}{N}\right)^{n+sp} \sum_{j=1}^N \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(\omega) - u(\omega+h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh d\omega$$

$$\begin{aligned}
&\leq N^{p+n-1} N \left(\frac{2a}{N} \right)^{n+sp} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(\omega) - u(\omega + h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh d\omega \\
&\leq N^{p(1-s)} \left(\frac{2a}{N} \right)^{n+sp} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(\omega) - u(\omega + h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(\frac{a}{N})}(h) dh d\omega
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.24 (Desigualdad de Sobolev–Poincaré Fraccionaria). *Sean $0 < s < 1$ y $1 < p < \frac{n}{s}$. Entonces, existe una constante $C > 0$, que depende de n, p , tal que:*

$$\|u\|_{p_s^*} \leq C_{n,p}(1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{W_{s,p}} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

donde p_s^* es el exponente crítico de Sobolev dado por

$$p_s^* = \frac{np}{n-sp}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Consideremos los siguientes operadores

$$Mu(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y)| dy,$$

$$M^\#u(x) = \sup_{B_r(x)} \int_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}| dy,$$

$$\text{con } u_{B_r(x)} = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(z) dz = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y)| dy$$

Como primer paso acotemos $\int_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}| dy$

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}| dy &= \int_{B_r(x)} \left| u(y) - \int_{B_r(x)} u(z) dz \right| dy \\
&\leq \int_{B_r(x)} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(z)| dz dy.
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\forall y \in B_r(x) \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \subset B_{2r}(y)$$

ya que si $z \in B_r(x)$, entonces:

$$|y - z| \leq |y - x| + |x - z| < 2r$$

si llamamos $z - y = h$, se puede en la última desigualdad reformular la integral en términos de h .

$$\int_{B_r(x)} \left| u(y) - \int_{B_r(x)} u(z) dz \right| dy \leq \int_{B_r(x)} \int_{B_{2r}(y)} |u(y) - u(y+h)| dh dy \quad (1)$$

Ahora llamo
$$F(y) = \sup_{r>0} r^{-s} \int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)| dh, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Nota: $r^s F(y)$ controla el integrando de la última desigualdad de (1)

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - (u)_{B_r}| dy \leq \int_{B_r(x)} r^s F(y) dy = r^s \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} F(y) dy$$

Aplicando Hölder

$$\int_{B_r(x)} F(y) dy \leq \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{1/p} |B_r(x)|^{1/p'} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} F(y) dy &\leq \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{1/p} |B_r(x)|^{1/p} |B_r(x)|^{1/p'} \\ &= \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{1/p} |B_r(x)|. \end{aligned}$$

$$\int_{B_r(x)} F(y) dy \leq \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{1/p} \quad (2)$$

Elevo (2) a la $p_s^* - p > 0$ y luego paso la integral elevada a la p multiplicando

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r(x)} F(y) dy \right)^{p_s^* - p} &\leq \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{\frac{p_s^* - p}{p}} \\ \left(\int_{B_r(x)} F(y) dy \right)^{p_s^*} &\leq \left(\int_{B_r(x)} F(y)^p dy \right)^{\frac{p_s^* - p}{p}} \cdot \left(\int_{B_r(x)} F(y) dy \right)^p \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \left[\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \right]^{p_s^*} &\leq r^{sp_s^*} \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} |B_r(x)|^{-\frac{p_s^* - p}{p}} \int_{B_r(x)} |F(y)|^p dy \\ &\leq \omega_n r^{sp_s^*} r^{-n \frac{sp_s^* - p}{p}} \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} \int_{B_r(x)} |F(y)|^p dy \\ &\leq \omega_m \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} \left(\int_{B_r(x)} |F(y)| dy \right)^p \quad (3) \end{aligned}$$

Notar que:

$$p_s^* = \frac{np}{n-sp} \quad \Rightarrow \quad p_s^* - p = \frac{np}{n-sp} - p = \frac{sp^2}{n-sp}$$

$$\frac{p_s^* - p}{p} = \frac{sp}{n-sp} \quad \Rightarrow \quad \frac{n(p_s^* - p)}{p} = \frac{snp}{n-sp} = sp_s^*$$

Asi obtenemos, $r^{sp_s^* - n \left(\frac{p_s^* - p}{p} \right)} = r^0 = 1$

Tomando supremo sobre r en (3):

$$[M^\# u(x)]^{p_s^*} \leq \omega_n \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} [MF(x)]^p$$

Usando la acotación que surge de la continuidad de la maximal como operador de L^p ($1 < p < p^*$).

Integrando sobre \mathbb{R}^n :

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M^\# u(x)]^{p_s^*} dx \leq \omega_n \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} \int_{\mathbb{R}^n} [MF(x)]^p dx$$

$$\Rightarrow \|M^\# u\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} \leq \omega_n \|F\|_{L^p}^{p_s^* - p} \|MF\|_{L^p}^p \quad (4)$$

Nos falta estimar en (4) la $\|f\|_{L^p}$ lo haremos usando pesos y reescribiendo el dominio como sumas de coronas.

$$F(y) := \sup_{r>0} r^{-s} \int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)| dh$$

Elevamos a la potencia p e integramos:

$$\|F\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |F(y)|^p dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-sp} \left(\int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)| dh \right)^p dy$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)| dh \right)^p &\leq \left(\frac{1}{|B_{2r}(0)|} \right)^p \left[\left(\int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)|^p dh \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. \cdot |B_{2r}(0)|^{1/p'} \right]^p \\ &= \left(\int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)|^p dh \right) |B_{2r}(0)|^{\frac{p}{p'} - p} \\ &= \int_{B_{2r}(0)} |u(y) - u(y+h)|^p dh, \quad \text{pues } \frac{p}{p'} - p = -1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(y)|^p dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \left(r^{-sp} \cdot \frac{1}{|B_{2r}|} \int_{B_{2r}} |u(y) - u(y+h)|^p dh \right) dy$$

Reescribiendo el dominio de integración como una suma de corona se tiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-sp} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(y+h)|^p \mathbf{1}_{A(i)}(h) dh dy$$

$$A_i = A_{2^{-i}} = B_{2^{-i+1}r} \setminus B_{2^{-i}r}$$

Introducimos los pesos a determinar con posterioridad

Para cada i , sea $\{d_{j,i}\}_{j=0}^{\infty}$ tal que:

$$\sum_j d_{j,i} \geq 1 \quad \text{a elegir} \quad (\text{controlará la integral sobre las corona})$$

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{j,i} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \frac{2^{-n}}{r^{n+sp}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(x+h)|^p \mathbf{1}_{A_i}(h) dh dx \right)$$

Tomando $N = 2^i$, $a = 2^{-i}$, $b = 1$, y usando el lema 2.4.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+sp}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y) - u(y+h)|^p \mathbf{1}_{A(i)}(h) dh dx \\ & \leq (2a)^{n+ps} N^{p(1-s)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |u(x) - u(x+h)|^p \mathbf{1}_{A(i+j)}(h) dh dx \end{aligned}$$

Si se procede como en el lema:

$$A_{\frac{2^{-i}}{N}} = A_{\frac{2^{-i}}{2^j}} = A_{2^{-(i+j)}}$$

obteniendose:

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{j,i} \cdot 2^{(-i+1)(n+ps)} \cdot N^{p(1-s)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(x+h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(i+j)}(h) dh dy$$

Llamando $k = i + j \Rightarrow i = k - j$, y tomando:

$$d_{j,i} = \rho \log_2(1-s) \cdot 2^{-p(1-s)j} \quad (\text{no depende de } k)$$

Como la serie a elegir es de términos positivos, se puede reordenar:

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(k+j+1)(n+ps)} 2^{jp(1-s)} d_{j,k-j} \\ & \quad \times \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(y+h)|^p}{|h|^{n+sp}} \mathbf{1}_{A(k)}(h) dh dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k p \log 2 (1-s) 2^{-k(n+sp)} 2^{j(n+sp)} 2^{n+sp} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(y+h)|^p}{|h|^{n+sp}} 1_{A(k)}(h) dh dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} p \log 2 (1-s) 2^{-k(n+sp)} \frac{2^{(k+1)n+sp}}{2^{n+sp} - 1} 2^{n+sp} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(y+h)|^p}{|h|^{n+sp}} 1_{A(k)}(h) dh dy \\
&\leq C(n, p) (1-s) \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(y+h)|^p}{|h|^{n+sp}} 1_{A(k)}(h) dh dy \\
&\leq C(n, p) (1-s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(y) - u(z)|^p}{|z-y|^{n+sp}} dz dy \\
&\leq C(n, p) (1-s) [u]_{W^{s,p}}^p
\end{aligned}$$

Se conoce la siguiente desigualdad de Fefferman–Stein:

$$\|Mu\|_{L^p} \leq C_{n,p} \|M^\#u\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Sobre la constante $C_{n,p}$ se sabe lo siguiente:

1. La constante depende únicamente de la dimensión n y del exponente p .
 2. El comportamiento en p es $C_{n,p} \sim \frac{p}{p-1}$.
- de modo que $C_{n,p} \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow 1^+$.

Entonces utilizando que la función u se acota puntualmente por la maximal, la acotación Fefferman-Stein y la desigualdad (4) se obtiene

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C(n, p) C_{s,p^*} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{W^{s,p}}$$

□

Lema 2.25 (Desigualdad de interpolación). *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y sea $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$ con $1 \leq q < p \leq \infty$. Entonces, si $q < r < p$ se tiene que $f \in L^r(E)$. Más aún,*

$$\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^p(E)}^\theta \|f\|_{L^q(E)}^{1-\theta},$$

donde

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Demostración. Demostramos el caso $p < \infty$. El caso $p = \infty$ es trivial. La demostración es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder. En efecto,

$$\int_E |f|^r dx = \int_E |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx \leq \left(\int_E |f|^p dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_E |f|^q dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}},$$

de donde se concluye la demostración. \square

Corolario 2.26. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $0 < s < 1 \leq p < \infty$. Entonces se tiene que*

$$W_0^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{para todo } 1 \leq q < p_s^*,$$

y más aún, si $1 \leq q < p_s^$, la inclusión es compacta.*

Si además Ω es un dominio de extensión, entonces

$$W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{para todo } 1 \leq q \leq p_s^*,$$

y si $1 \leq q < p_s^$, la inclusión es compacta.*

Demostración. Para concluir la demostración del corolario, basta ver que si $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ es acotada, entonces existe una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < p_s^*$.

Por el Corolario 2.21 y 2.22, existe $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$\|f_{k_j} - f\|_{L^r(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

\square

Sea ahora $p < q < p_s^*$ y veamos que $\|f_{k_j} - f\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$.

Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 2.24 y del Lema 2.25. En efecto, del Lema 2.25 se obtiene:

$$\begin{aligned} \|f_{k_j} - f\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|f_{k_j}\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|f_{k_j} - f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}, \\ &\leq \|f_{k_j} - f\|_{L^p(\Omega)}^\theta \cdot (\|f_{k_j}\|_{L^r(\Omega)} + \|f\|_{L^r(\Omega)})^{1-\theta}, \\ &\leq \|f_{k_j} - f\|_{L^p(\Omega)}^\theta \cdot (2C(N, s, p)M)^{1-\theta}, \end{aligned}$$

donde $C(N, s, p)$ es la constante dada por el Teorema 2.24 y M es la cota de $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en la norma de $W_0^{s,p}(\Omega)$. Tomando límite cuando $j \rightarrow \infty$ y usando el Corolario 2.21 se concluye lo pedido.

Si Ω es un dominio de extensión, se razona análogamente usando el Corolario 2.18 en lugar del Corolario 2.21 \square

2.4.1. Espacios duales

La desigualdad de Poincaré permite identificar el seminorma fraccionaria como una cantidad natural de control en $W_0^{s,p}(\Omega)$. En consecuencia, resulta natural preguntarse cuál es el espacio dual asociado a dicho espacio funcional y cómo caracterizar los funcionales lineales continuos que actúan sobre él.

Este análisis es esencial, en particular, para el estudio de problemas variacionales y ecuaciones no locales, donde las soluciones se entienden en sentido débil y las convergencias se formulan a través de la acción de funcionales del espacio dual.

El espacio dual de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ se denota por $W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N)$. Asimismo, el espacio dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$ se denota, como es habitual, por $W^{-s,p'}(\Omega)$.

Recordemos que en estos espacios la norma se define por

$$\|f\|_{-s,p'} := \sup\{\langle f, u \rangle : u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{s,p} = 1\},$$

y

$$\|f\|_{-s,p',\Omega} := \sup\{\langle f, u \rangle : u \in W_0^{s,p}(\Omega), [u]_{s,p} = 1\}.$$

Observar que $W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N)$ se incluye continuamente en $W^{-s,p'}(\Omega)$.

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N)$ y $f \in W^{-s,p'}(\mathbb{R}^N)$, decimos que $f_n \rightarrow f$ en $W_{\text{loc}}^{-s,p'}(\mathbb{R}^N)$ si

$$\|f_n - f\|_{-s,p',\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{para todo } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ acotado y abierto.}$$

Dado que $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{s,p}(\Omega)$, el espacio dual $W^{-s,p'}(\Omega)$ está contenido en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$ ver [11].

2.5. Estimaciones de Morrey para el caso fraccionario

Las desigualdades de Morrey constituyen un puente fundamental entre la teoría de los espacios de Sobolev y la regularidad puntual de las funciones. En el caso clásico, se sabe que si

$$f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad p > n,$$

entonces f admite un representante Hölder continuo con exponente

$$\alpha = 1 - \frac{n}{p}.$$

El objetivo de esta sección es extender dicha estimación al contexto de los *espacios de Sobolev fraccionarios* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, definidos para $0 < s < 1$. En este marco, recordemos la expresión de la seminorma de Gagliardo,

$$[f]_{s,p} = \left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p},$$

que captura la interacción no local entre valores de la función. Mostraremos que, bajo la condición $sp > n$, las funciones en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ poseen representantes Hölder continuos con exponente

$$\alpha = s - \frac{n}{p},$$

generalizando así el resultado clásico de Morrey.

La demostración se apoya en el estudio de los *espacios de Campanato*, que permiten caracterizar la continuidad Hölder a partir de estimaciones integrales sobre bolas. Esta conexión resulta esencial para trasladar las técnicas de Morrey al ámbito fraccionario y constituye una herramienta poderosa en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales no locales y problemas variacionales.

En síntesis, esta sección busca mostrar cómo las estimaciones de Morrey, reinterpretadas en el marco fraccionario, consolidan la relación entre normas integrales y regularidad puntual, ampliando el alcance de la teoría de Sobolev hacia contextos más generales .

2.5.1. Espacios de Campanato

Definición 2.27. Sea $1 \leq p < \infty$ y $\lambda \geq 0$, se define el espacio de Campanato $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ como

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \int_{B_r(x)} |f(y) - (f)_{r,x}|^p dy < \infty \right\}.$$

En este espacio se define la seminorma de Campanato como

$$[f]_{p,\lambda} = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \int_{B_r(x)} |f(y) - (f)_{r,x}|^p dy \right)^{1/p}.$$

donde la expresión $(f)_{r,x} = \int_{B_r(x)} f(y) dy$ con $x \in \mathbb{R}^n$

El primer resultado que necesitamos sobre los espacios de Campanato es que cuando $\lambda > n$, todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Lebesgue de f . Más precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.28. Sean $1 \leq p < \infty$, $\lambda > n$ y $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una función medible \tilde{f} que coincide con f c.t.p. tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{r,x} = \tilde{f}(x) \quad (1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Más aún, el límite en (1) es uniforme.

La demostración del Teorema 2.28 se descompone en una serie de lemas.

Lema 2.29. Sean $1 \leq p < \infty$, $\lambda > n$ y $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, existe una constante $C = C(p, n)$ tal que si $0 < r_1 < r_2$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|(f)_{r_2,x} - (f)_{r_1,x}| \leq C \left(\frac{r_1^\lambda + r_2^\lambda}{r_1^n} \right)^{1/p} [f]_{p,\lambda}.$$

Demostración. Para casi todo $y \in B_{r_1}(x) \subset B_{r_2}(x)$ se tiene la desigualdad

$$|(f)_{r_2,x} - (f)_{r_1,x}|^p \leq 2^{p-1} (|(f)_{r_2,x} - f(y)|^p + |(f)_{r_1,x} - f(y)|^p).$$

Integrando esta desigualdad con respecto a $y \in B_{r_1}(x)$ obtenemos

$$\omega_n r_1^n |(f)_{r_2,x} - (f)_{r_1,x}|^p \leq 2^{p-1} (r_1^\lambda + r_2^\lambda) [f]_{p,\lambda}^p.$$

□

Lema 2.30. Sean $1 \leq p < \infty$, $\lambda > n$ y $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, existe una constante $C = C(p, n)$ tal que si $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|(f)_{r,x} - (f)_{2^{-k}r,x}| \leq C [f]_{p,\lambda} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{m(\frac{n-\lambda}{p})}.$$

Demostración. Por Lema 2.29 tenemos que

$$\begin{aligned} |(f)_{2^{-m}r,x} - (f)_{2^{-(m+1)}r,x}| &\leq C(p, n) [f]_{p,\lambda} \left(\frac{(2^{-m}r)^\lambda + (2^{-(m+1)}r)^\lambda}{(2^{-m}r)^n} \right)^{1/p} \\ &= C(p, n) [f]_{p,\lambda} r^{\frac{\lambda-n}{p}} 2^{m(\frac{n-\lambda}{p})}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$|(f)_{r,x} - (f)_{2^{-k}r,x}| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |(f)_{2^{-m}r,x} - (f)_{2^{-(m+1)}r,x}|$$

y el resultado sigue aplicando la estimación previa. □

Con los lemas anteriores a continuación se demostrará el Teorema 2.28.

Demostración. Observemos primero que, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (f)_{r,x} = f(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, el teorema queda demostrado si vemos que la convergencia de $(f)_{r,x}$ es uniforme con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $r > 0$ fijo. Por el Lema 2.30, tenemos

$$\begin{aligned} |(f)_{2^{-k}r,x} - (f)_{2^{-(k+1)}r,x}| &\leq C(p, \lambda, n)[f]_{p,\lambda} \left(\frac{r}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{m=0}^{j-1} 2^{m\left(\frac{n-\lambda}{p}\right)}. \\ &\leq \tilde{C}(n, \lambda, p)[f]_{p,\lambda} \left(\frac{r}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}}. \end{aligned}$$

Luego, la sucesión $\{(f)_{2^{-k}r,x}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$. Definamos entonces

$$\tilde{f}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} (f)_{2^{-k}r,x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Observemos que pasando al límite $j \rightarrow \infty$ la desigualdad anterior, obtenemos

$$|(f)_r - \tilde{f}(x)| \leq \tilde{C}(n, \lambda, p)[f]_{p,\lambda} \left(\frac{r}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}}. \quad (1)$$

Veamos ahora que el límite \tilde{f} no depende de la elección de $r > 0$. En efecto, sea $\tilde{r} > 0$. Luego, usando (1) y el Lema 2.29, obtenemos

$$\begin{aligned} |(f)_{2^{-\tilde{r}},x} - f(\tilde{x})| &\leq |(f)_{2^{-\tilde{r}},x} - (f)_{2^{-r},x}| + |(f)_{2^{-r},x} - f(\tilde{x})| \\ &\leq C[f]_{p,\lambda} \left(\frac{r}{2^k}\right)^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left(\frac{\tilde{r}^n + r^n}{\min\{\tilde{r}, r\}^n}\right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{k(n-\lambda)}{p}}. \\ &= C[f]_{p,\lambda}(f, r) 2^{\frac{k(n-\lambda)}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego \tilde{f} es independiente de la elección de $r > 0$. Finalmente, usando el Lema 2.30,

$$|(f)_{r,x} - (f)_{2^{-r},x}| \leq C[f]_{p,\lambda} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{\frac{m(n-\lambda)}{p}}.$$

Tomando límite $k \rightarrow \infty$, obtenemos

$$|(f)_{r,x} - f(x)| \leq C[f]_{p,\lambda} r^{\frac{\lambda-n}{p}}, \quad (2)$$

de donde se deduce el teorema. \square

Un concepto importante de gran utilidad para el resultado que demostraremos a continuación es la definición que una función f sea Hölder continua.

Definición 2.31. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $0 < \alpha \leq 1$. Decimos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es α -Hölder continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

La menor constante C para la cual esta desigualdad es cierta se llama la *seminorma de Hölder* de f y se denota por

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

El espacio de funciones α -Hölder continuas en Ω se define como

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : [f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty\}.$$

Observación 2.32. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $C > 0$ y $\alpha > 1$ con

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

Entonces f es constante en cada componente conexa de Ω .

Demostración. Si $x, y \in \Omega$ pertenecientes a la misma componente conexa. Consideremos el segmento conexo que los une y generemos una partición regular del mismo es decir tomamos puntos $x = x_0, x_1, \dots, x_N = y$ con

$$|x_{j+1} - x_j| = \frac{|x - y|}{N} \quad (j = 0, \dots, N - 1).$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en cada subintervalo se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} C \left(\frac{|x - y|}{N} \right)^\alpha = C |x - y|^\alpha N^{1-\alpha}.$$

Como $\alpha > 1$ se tiene $1 - \alpha < 0$, por lo que $N^{1-\alpha} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por tanto el lado derecho tiende a 0, lo que implica $|f(x) - f(y)| = 0$. Como x, y eran dos puntos arbitrarios de la misma componente conexa, concluimos que f es constante en dicha componente. \square

El resultado principal de esta sección será demostrar que cuando $\lambda > n$, el representante \tilde{f} definido en el Teorema 2.28 de $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es Hölder continuo. El siguiente lema es clave para demostrar ese resultado.

Lema 2.33. Sea $1 \leq p < \infty$ y $\lambda > n$. Existe entonces $C > 0$ que depende de p, n y λ tal que para toda $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r = 2|x - y|$, entonces

$$|(f)_{r,x} - (f)_{r,y}| \leq C[f]_{p,\lambda} |x - y|^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Demostración. Observemos que para casi todo $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$, tenemos

$$|(f)_{r,x} - (f)_{r,y}|^p \leq 2^{p-1} (|f(z) - (f)_{r,x}|^p + |f(z) - (f)_{r,y}|^p).$$

Integramos con respecto a z sobre $B_r(x) \cap B_r(y)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} & |B_r(x) \cap B_r(y)| |(f)_{r,x} - (f)_{r,y}|^p \\ & \leq 2^{p-1} \left(\int_{B_r(x) \cap B_r(y)} |f(z) - (f)_{r,x}|^p dz + \int_{B_r(x) \cap B_r(y)} |f(z) - (f)_{r,y}|^p dz \right) \\ & \leq 2^{p-1} \left(\int_{B_r(x)} |f(z) - (f)_{r,x}|^p dz + \int_{B_r(y)} |f(z) - (f)_{r,y}|^p dz \right) \\ & \leq 2^p r^n [f]_{p,\lambda}^p. \end{aligned}$$

Ahora observamos que $B_{\frac{r}{2}}(x) \subset B_r(x) \cap B_r(y)$ y usamos que $r = 2|x - y|$ para obtener el resultado. \square

Con la ayuda del Lema anterior se deduce el resultado principal de la sección.

Teorema 2.34. Sea $1 \leq p < \infty$ y $\lambda > n$. Entonces existe una constante $C > 0$ que depende sólo de p, λ y n tal que

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C[f]_{p,\lambda}.$$

para toda $f \in L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, donde $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ y \tilde{f} es el representante dado por el Teorema 2.28.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r = 2|x - y|$. Usando el Lema 2.33 y (2) se tiene

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| & \leq |\tilde{f}(x) - (f)_{r,x}| + |(f)_{r,x} - (f)_{r,y}| + |(f)_{r,y} - \tilde{f}(y)| \\ & \leq C[f]_{p,\lambda} |x - y|^{\frac{\lambda-n}{p}}. \end{aligned}$$

\square

Observación 2.35. Del Teorema 2.34 se desprende que si $\lambda > n + p$, entonces $\alpha > 1$ por el Lema 2.32 el representante de f resulta ser una constante, luego $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

EL RESULTADO

Sea $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y consideremos $\xi \in \mathbb{R}$ arbitrario. Luego, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tenemos, usando la desigualdad de Hölder,

$$|(f)_{r,x_0} - \xi|^p = \frac{1}{|B_r(x_0)|^p} \left| \int_{B_r(x_0)} (f(y) - \xi) dy \right|^p \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} |f(y) - \xi|^p dy.$$

Luego, para casi todo $x \in B_r(x_0)$, si tomamos $\xi = f(x)$ e integramos sobre $B_r(x_0)$ obtenemos

$$\int_{B_r(x_0)} |f(x) - (f)_{r,x_0}|^p dx \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \iint_{B_r(x_0) \times B_r(x_0)} |f(x) - f(y)|^p dx dy.$$

Ahora, observamos que $|B_r(x_0)| = \omega_n r^n$ y que $|x - y| \leq 2r$ si $x, y \in B_r(x_0)$. Luego, la última integral se acota por

$$\frac{(2r)^{n+sp}}{\omega_n r^n} \iint_{B_r(x_0) \times B_r(x_0)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \leq \frac{2^{n+sp}}{\omega_n} r^{sp} [f]_{s,p}^p.$$

En conclusión, se ha demostrado que

$$\int_{B_r(x_0)} |f(x) - (f)_{r,x_0}|^p dx \leq C r^{sp} [f]_{s,p}^p, \quad (3)$$

donde $C > 0$ depende sólo de s, p y n .

La desigualdad (3) implica que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ con $\lambda = sp > n$. Luego, aplicando el Teorema 2.28 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.36. *Sea s tal que $1 \leq p < \infty$ y $0 < s < 1$ con $sp > n$. Entonces dada $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ existe f continua tal que $f = f$ c.t.p. y*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{s - \frac{n}{p}}} \leq C [f]_{s,p}.$$

donde $\alpha = s - \frac{n}{p}$ y $C > 0$ depende sólo de s, p y n .

Capítulo 3

Comportamiento Asintótico

Introducción

Al estudiar los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$, con $0 < s < 1$, hemos visto que se definen mediante seminormas que capturan interacciones entre pares de puntos del dominio, lo que los convierte en herramientas naturales para modelar fenómenos de difusión no local. A través de ellos se pueden analizar procesos donde cada punto interactúa con una vecindad extensa, reflejando dinámicas de largo alcance que no aparecen en los modelos clásicos.

Dos resultados fundamentales marcan los extremos del parámetro de diferenciabilidad. Por un lado, al acercarse s a uno, aparece la pregunta de si estas normas fraccionarias convergen y hacia que convergen.

El teorema de Bourgain–Brezis–Mironescu muestra que cuando s tiende a uno, las energías fraccionarias convergen hacia la energía clásica de Sobolev. Conceptualmente, esto significa que las interacciones no locales se concentran en vecinos inmediatos y terminan reproduciendo la difusión local, dependiente del gradiente. De este modo, se asegura que la teoría fraccionaria es coherente con la teoría clásica y que las derivadas fraccionarias constituyen una aproximación natural a las derivadas ordinarias.

Por otro lado, el resultado de Maz’ya–Shaposhnikova describe lo que ocurre cuando s tiende a cero. En ese caso, las interacciones no locales se vuelven globales y uniformes, perdiendo sensibilidad a la estructura diferencial. La seminorma fraccionaria se reduce a la norma L^p , lo que refleja una difusión completamente no local, donde cada punto del dominio se conecta con todos los demás de manera homogénea.

En conjunto, estos comportamientos asintóticos muestran que la teoría fraccionaria no es aislada, sino que se enlaza naturalmente con los modelos clásicos. El límite $s \rightarrow 1$ recupera la difusión local, mientras que el límite $s \rightarrow 0$ refleja una difusión global y no

local. Esta transición fundamenta el uso de espacios fraccionarios en problemas donde la escala de interacción, ya sea corta o larga distancia, resulta esencial.

3.1. comportamiento asintótico cuando $s \uparrow 1^-$

Comencemos con unos lemas preliminares.

Lema 3.1. *Sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces se tiene que*

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \leq \frac{n\omega_n}{p} \left(\frac{1}{1-s} \|\nabla f\|_p^p + \frac{2^p}{s} \|f\|_p^p \right),$$

para $0 < s < 1$, donde ω_n es la medida de Lebesgue de la bola unitaria B_1 .

Demostración. Para empezar, observemos que si $h \in \mathbb{R}^n$, entonces, si $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+th) dt = \int_0^1 \nabla f(x+th) \cdot h dt.$$

Luego, obtenemos

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \int_0^1 |\nabla f(x+th)| |h| dt \leq |h| \left(\int_0^1 |\nabla f(x+th)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

de donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla f(x+th)|^p dt dx = |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx,$$

donde hemos usado el Teorema de Fubini y la invariancia de la integral con respecto a traslaciones.

Usando finalmente la densidad de $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq |h| \|\nabla f\|_p, \quad (1)$$

para toda $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dx dh \\ &= \int_{B_1} \frac{1}{|h|^{n+sp}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right) dh \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|h|^{n+sp}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right) dh \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Para acotar I se usa (1). En efecto,

$$I \leq \|\nabla f\|_p^p \int_{B_1} \frac{1}{|h|^{n+sp-p}} dh = \|\nabla f\|_p^p n\omega_n \int_0^1 \frac{1}{r^{n+sp-p}} r^{n-1} dr = \frac{n\omega_n}{p(1-s)} \|\nabla f\|_p^p.$$

Para acotar II , observamos primero que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x+h)|^p + |f(x)|^p) dx = 2^p \|f\|_p^p,$$

de donde

$$II \leq 2^p \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{1}{|h|^{n+sp}} dh = 2^p \|f\|_p^p n\omega_n \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+sp}} r^{n-1} dr = \frac{2^p n\omega_n}{sp} \|f\|_p^p.$$

Combinando ambas cotas obtenemos el resultado deseado. □

□

El siguiente lema será de utilidad. Usaremos la notación

$$\rho(x) := \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$.

Llamamos a ρ *núcleo regularizante estándar*. Observemos que ρ es una función radial, no negativa, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\text{supp}(\rho) = B_1(0)$.

Construimos, a partir de ρ , las aproximaciones de la identidad

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Estas funciones $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ verifican que $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(\rho_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$, $\rho_\varepsilon \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx = 1.$$

Finalmente, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definimos las ε -regularizaciones como

$$f_\varepsilon(x) := f * \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\varepsilon(y) dy.$$

Luego, como se sabe, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, $f_\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y si f tiene soporte compacto, entonces f_ε también tiene soporte compacto.

Lema 3.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y f_ε las ε -regularizaciones. Entonces tenemos que*

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy,$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $0 < s < 1$.

Demostración. Para empezar tenemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|^p dx \right) \frac{dh}{|h|^{n+sp}}. \quad (2)$$

Ahora, usando la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h-y) - f(x-y)) \rho_\varepsilon(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)|^p \rho_\varepsilon(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)|^p dx \right) \rho_\varepsilon(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado la invariancia de la integral con respecto a traslaciones y que ρ_ε tiene integral uno.

Combinando esta desigualdad con (2) el resultado queda demostrado. \square

Finalmente observemos qué sucede cuando truncamos una función para hacerla de soporte compacto. Para eso, tomamos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta(x) = 1$ si $x \in B_1(0)$, $\text{supp}(\eta) = B_2(0)$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y definimos

$$\eta_k(x) := \eta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Observemos que la sucesión $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ verifica que

$$\begin{aligned} \eta_k &\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \eta_k \leq 1, \quad \eta_k \equiv 1 \quad \text{en } B_k(0), \\ \text{supp}(\eta_k) &= B_{2k}(0), \quad \|\nabla \eta_k\|_\infty \leq \frac{\|\nabla \eta\|_\infty}{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Luego, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definimos las truncaciones de f como $f_k := \eta_k f$. Para estas truncaciones se tiene el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dadas por (3). Luego, llamando $f_k := \eta_k f$ tenemos que*

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \leq C \left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + \frac{\|f\|_p^p}{s(1-s)} \right),$$

donde $C > 0$ depende sólo de n y p .

Demostración. Primero observemos que

$$|f_k(x) - f_k(y)|^p \leq 2^{p-1} (|\eta_k(x)|^p |f(x) - f(y)|^p + |f(y)|^p |\eta_k(x) - \eta_k(y)|^p) \quad (4)$$

y luego,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq 2^{p-1} \left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{|\eta_k(x) - \eta_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx \right] dy \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta_k(x) - \eta_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx &= \int_{B_1(y)} \frac{|\eta_k(x) - \eta_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(y)} \frac{|\eta_k(x) - \eta_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Ahora,

$$I \leq \|\nabla \eta_k\|_\infty^p n \omega_n \int_0^1 \frac{1}{r^{n+sp-p}} r^{n-1} dr = \frac{\|\nabla \eta\|_\infty^p}{k^p} \frac{n \omega_n}{p(1-s)},$$

y

$$II \leq 2^p \|\eta_k\|_\infty^p n \omega_n \int_1^\infty \frac{1}{r^{n+sp}} r^{n-1} dr = \frac{2^p n \omega_n}{sp}.$$

Combinando estas últimas estimaciones con (5) obtenemos el resultado deseado. \square

Observación 3.4. Esta cota se puede mejorar. En efecto, si en (4) se usa la estimación

$$(a + b)^p \leq (1 + \delta)a^p + C_\delta b^p, \quad \delta > 0 \text{ arbitrario,}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq (1 + \delta) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &\quad + C_\delta C(n, p) \left(\frac{1}{k^{p-1}} + \frac{1}{s} \right) \|f\|_p^p. \end{aligned} \quad (6)$$

Observemos que de (6) obtenemos que, dado $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ y $s_0 \in (0, 1)$ tal que para todo $k \geq k_0$ y $0 < s < s_0$ se tiene

$$\begin{aligned} (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy &\leq (1 + \delta)(1 - s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \\ &\quad + \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

EL RESULTADO

Veamos ahora este lema que es la clave para el teorema que demostraremos a continuación.

Lema 3.5. Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy = K(n,p) |\nabla f(x)|^p,$$

Demostración. Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ y llamemos $M := \|\nabla f\|_\infty$. Observemos que existe $C = C(M) > 0$ tal que

$$||a|^p - |b|^p| \leq C|a - b|, \quad \text{para todo } 0 \leq a, b < M.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq M \quad \text{y} \quad \left| \nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| \leq M.$$

De donde deducimos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^p} - \left(\nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right)^p \right| &\leq C \left| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} - \nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| \\ &\leq C|x-y|. \end{aligned} \tag{7}$$

Observar que hemos usado que $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ en la última desigualdad.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy &= \int_{B_1(x)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Para acotar II se procede de manera similar al Lema 3.1. En efecto,

$$II \leq 2^p \|f\|_\infty^p \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy = \frac{2^p \|f\|_\infty^p}{sp} n\omega_n.$$

Luego, tenemos que $(1-s)II \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 1^-$.

Para estimar I usamos (7) y deducimos que

$$\begin{aligned} &\int_{B_1(x)} \left| \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^p} - \left(\nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right)^p \right| \frac{1}{|x-y|^{n+sp-p}} dy \\ &\leq C \int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+sp-p-1}} dy = Cn\omega_n \int_0^1 \frac{1}{r^{n+sp-p-1}} r^{n-1} dr \\ &= \frac{Cn\omega_n}{1+p(1-s)}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{B_1(x)} \left| \nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right|^p \frac{dy}{|x-y|^{n+sp-p}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{B_1(x)} \left| \nabla f(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right|^p \frac{dy}{|x-y|^{n+sp-p}} &= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f(x) \cdot z|^p dS_z \right) \frac{1}{r^{sp-p+1}} dr \\ &= \frac{1}{p(1-s)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f(x) \cdot z|^p dS_z. \end{aligned}$$

Para concluir, observemos que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla f(x) \cdot z|^p dS_z = |\nabla f(x)|^p \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |z_1|^p dS_z,$$

de donde deducimos que

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy = K(n, p) |\nabla f(x)|^p,$$

□

Ahora sí podemos pasar a la demostración de nuestro resultado principal.

Teorema 3.6 (tipo Bourgain- Brezis-Mironescu). *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene que*

$$\lim_{s \uparrow 1} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = K(n, p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx,$$

donde

$$K(n, p) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |z_n|^p dS_z.$$

Demostración. Por Lema 3.5, sólo tenemos que mostrar la existencia de un mayorante integrable. Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $\text{supp}(f) \subset B_R(0)$. Sea

$$F_s(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \right)^{1/p}.$$

Entonces, si $|x| < 2R$, sigue que

$$|F_s(x)|^p = \int_{B_{2R}(x)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(x)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy = I + II.$$

Razonando igual que en los lemas previos obtenemos que

$$I \leq \frac{\|\nabla f\|_p^p}{(1-s)^p}, \quad \text{y} \quad II \leq \frac{2^p}{sp} \|\nabla f\|_p^p.$$

Ahora, si $|x| \geq 2R$, tenemos que

$$F_s(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \right)^{1/p} = \left(\int_{B_R(0)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy \right)^{1/p}.$$

Pero $|x-y| \geq |x| - R \geq \frac{1}{2}|x|$. Luego

$$|F_s(x)|^p \leq \left(\frac{2}{|x|} \right)^{n+sp} \|f\|_p^p \leq \left(\frac{2}{|x|} \right)^{n+sp} \|\nabla f\|_p^p,$$

si $\frac{1}{2} < s < 1$.

Luego, para $\frac{1}{2} < s < 1$ obtenemos que

$$|(1-s)F_s(x)|^p \leq C \left(\chi_{B_{2R}(0)}(x) + \frac{1}{|x|^{n+sp}} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)}(x) \right) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

donde $C > 0$ depende de n, p, f , pero es independiente de s .

Luego, el teorema queda demostrado para $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Para extenderlo a $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ arbitrario, observamos primero que si llamamos

$$[f]_{s,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx \right)^{1/p},$$

entonces $[\cdot]_{s,p}$ es una seminorma, i.e., es no negativa, homogénea de grado 1 y verifica la desigualdad triangular $[f+g]_{s,p} \leq [f]_{s,p} + [g]_{s,p}$.

Debemos entonces ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1-s)^p [f_k]_{s,p} = K(n,p)^p \|\nabla f\|_p^p.$$

Sea $f_k \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \rightarrow f$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Luego

$$\begin{aligned} |(1-s)^p [f_k]_{s,p} - K(n,p)^p \|\nabla f\|_p^p| &\leq |(1-s)^p [f_k]_{s,p} - [f_k]_{s,p}| \\ &\quad + |(1-s)^p [f_k]_{s,p} - K(n,p)^p \|\nabla f_k\|_p^p| \\ &\quad + |K(n,p)^p \|\nabla f_k\|_p^p - \|\nabla f\|_p^p| = I + II + III. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular de la seminorma $[\cdot]_{s,p}$ junto con el Lema 3.1, el primer término se acota:

$$(1-s)^p |[f_k]_{s,p} - [f]_{s,p}| \leq (1-s)^p |f_k - f|_{s,p} \leq C(n,p) \|f_k - f\|_{1,p}.$$

Luego este término converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$ uniformemente en s .

El tercer término también converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$ uniformemente en s . Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(1-s)^p [f_k]_{s,p} - K(n,p)^p \|\nabla f_k\|_{L^p}^p| \leq \varepsilon + |(1-s)^p [f_k]_{s,p} - K(n,p)^p \|\nabla f_k\|_{L^p}^p|,$$

para todo s . Luego, haciendo $s \uparrow 1$, se concluye lo deseado.

Para terminar la demostración del teorema, resta ver que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\liminf_{s \uparrow 1} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy < \infty, \quad (8)$$

implica que $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, truncando y regularizando como en el Lema 3.2 y 3.3, construimos la familia $\{f_{k,\varepsilon}\}_{k,\varepsilon>0}$,

$$f_{k,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * (f\eta_k),$$

que tiene las propiedades

$$f_{k,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (9)$$

$$\liminf_{s \uparrow 1} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_{k,\varepsilon}(x) - f_{k,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy < C, \quad (10)$$

con C independiente de $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Observar (10) es consecuencia directa de el Lema 3.2 y 3.3 y de la hipótesis (8).

Ahora, por (9) y por la primera parte de este teorema, tenemos que

$$K(n,p) \|\nabla f\|_{L^p}^p = \lim_{s \uparrow 1} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_{k,\varepsilon}(x) - f_{k,\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy < C.$$

Luego, la familia $\{f_{k,\varepsilon}\}_{k,\varepsilon>0}$ es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, existe una sucesión $f_j = f_{k_j,\varepsilon_j}$ con $j \rightarrow \infty$ y $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \rightharpoonup f$ débilmente en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Más aún, como

$$\|f_{k,\varepsilon} - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \text{ y } \varepsilon \rightarrow 0,$$

concluimos que $f_j = f$, de donde $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. □

El caso de una sucesión

En el Teorema 3.6 se considera el caso en que la función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es fija. Sin embargo, en muchas aplicaciones es útil considerar funciones f que dependan de un parámetro $s \in (0,1)$ este el contenido del teorema que enunciaremos y pasamos a demostrar. Previamente enunciaremos unos lemas preliminares.

Teorema 3.7. *Sea $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $s_k \uparrow 1$ y $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (1-s_k) \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x-y|^{n+s_k p}} dx dy < \infty \quad \text{y} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p < \infty.$$

Entonces existe $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y una subsecuencia $\{f_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{k_j} \rightarrow f$ en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la estimación

$$K(n, p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - s_k) \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+s_k p}} dx dy,$$

donde $K(n, p)$ viene dada por el Teorema 3.6.

Lema 3.8. Sea (X, μ) un espacio de medida finita y $G, H \in L^1(X)$ tales que

$$(G(x) - G(y))(H(x) - H(y)) \geq 0. \quad (1)$$

Entonces se tiene

$$\int_X GH d\mu \geq \frac{1}{\mu(X)} \int_X G d\mu \int_X H d\mu.$$

Demostración. La demostración es inmediata de la desigualdad de monotonía (1). En efecto, (1) es equivalente a

$$G(x)H(x) + G(y)H(y) \geq G(x)H(y) + G(y)H(x). \quad (2)$$

Integramos esta desigualdad respecto de x e y y obtenemos

$$2\mu(X) \int_X GH d\mu \geq 2 \int_X G d\mu \int_X H d\mu.$$

□

Lema 3.9. Sean $g, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ medibles. Supongamos que $g(t) \leq g\left(\frac{t}{2}\right)$ para $t \in (0, 1)$ y que h es decreciente. Entonces, dado $r > -1$,

$$\int_0^1 t^r g(t)h(t) dt \geq \frac{r+1}{2^{r+1}} \int_0^1 t^r g(t) dt \int_0^1 t^r h(t) dt.$$

Demostración. La idea de la demostración es usar la monotonía en saltos de $\frac{1}{2}$ para la g y luego aplicar el Lema 3.8

Tenemos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^r g(t)h(t) dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \int_{\frac{1}{2^{j+1}}}^{\frac{1}{2^j}} t^r g(t)h(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} \int_{\frac{1}{2}}^1 s^r g\left(\frac{s}{2^j}\right) h\left(\frac{s}{2^j}\right) ds \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} s^r g\left(\frac{s}{2^j}\right) h\left(\frac{s}{2^j}\right) ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema de la convergencia monótona en la última igualdad.

Observemos que tomando $h(t) \equiv 1$ en la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_0^1 t^r g(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} s^r g\left(\frac{s}{2^j}\right) ds.$$

Ahora aplicamos el Lema 3.8 a $H(j) = h\left(\frac{s}{2^j}\right)$, $G(j) = g\left(\frac{s}{2^j}\right) s^r$, $\mu(\{j\}) = \frac{1}{2^{j(r+1)}}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} g\left(\frac{s}{2^j}\right) h\left(\frac{s}{2^j}\right) &\geq \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} g\left(\frac{s}{2^j}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} h\left(\frac{s}{2^j}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} g\left(\frac{s}{2^j}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} h\left(\frac{s}{2^j}\right). \end{aligned}$$

Observemos que, al ser h decreciente, se tiene que, para $j \geq 1$,

$$\int_{\frac{1}{2^{j+1}}}^{\frac{1}{2^j}} t^r h(t) dt \leq h\left(\frac{1}{2^j}\right) \int_{\frac{1}{2^{j+1}}}^{\frac{1}{2^j}} t^r dt = \frac{2^{r+1} - 1}{r+1} \cdot \frac{1}{2^{j(r+1)}} h\left(\frac{1}{2^j}\right).$$

Usando nuevamente que h es decreciente, se tiene que $h\left(\frac{1}{2}\right) \leq h\left(\frac{t}{2}\right)$ para $0 < t < 1$, de donde

$$\int_0^1 t^r h(t) dt \leq \frac{2^{r+1} - 1}{r+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(r+1)}} \int_0^1 h\left(\frac{t}{2^j}\right) dt.$$

Juntando estas estimaciones obtenemos

$$\int_0^1 t^r g(t) h(t) dt \geq \frac{r+1}{2^{r+1}} \left(\int_0^1 t^r g(t) dt \right) \left(\int_0^1 t^r h(t) dt \right),$$

como queríamos ver. □

El siguiente resultado es clave.

Teorema 3.10. *Sea $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < s_1 < s_2 < 1$. Entonces*

$$\begin{aligned} (1 - s_1) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+s_1 p}} dx dy &\leq 2^{(1-s_1)p} (1 - s_2) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+s_2 p}} dx dy \\ &\quad + \frac{n\omega_n(1 - s_1)2^p}{s_1 p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para $t > 0$ definimos

$$F(t) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+tw) - f(x)|^p dx dS_w = \frac{1}{t^{n-1}} \int_{\{|h|=t\}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx dS_h.$$

Esta función verifica

$$F(2t) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+2tw) - f(x)|^p dx dS_w$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^p \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+2tw) - f(x+tw)|^p dx dS_w \right) \\
&+ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+tw) - f(x)|^p dx dS_w \Big) \\
&\leq 2^p \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+tw) - f(x)|^p dx dS_w = 2^p F(t).
\end{aligned}$$

Luego, si definimos $g(t) = \frac{F(t)}{t^{n-1}}$, se tiene que $g(2t) \leq g(t)$ para todo $t > 0$.

Ahora observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|h|<1\}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dx dh \\
&= \int_0^1 \int_{\{|h|=t\}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{t^{n+sp}} dx dS_h dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t^{1+sp}} F(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s)p}} g(t) dt. \tag{3}
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $0 < s_1 < s_2 < 1$. Entonces

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_2)p}} g(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_1)p}} g \left(t^{\frac{1-(1-s_2)p}{1-(1-s_1)p}} \right) \frac{1}{t^{\frac{(s_2-s_1)p}{1-(1-s_1)p}}} dt.$$

Aplicamos el Lema 3.9 con $r = (1-s_1)p - 1$ y $h(t) = t^{-(s_2-s_1)p}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_2)p}} g(t) dt &\geq \frac{(1-s_1)p}{2(1-s_1)p-1} \left(\int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_1)p}} g(t) dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_2)p}} dt \right) \tag{4} \\
&= \frac{1}{2(1-s_1)p} \cdot \frac{1-s_1}{1-s_2} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-(1-s_1)p}} g(t) dt.
\end{aligned}$$

De (3) y (4) deducimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-s_1)}{2(1-s_1)p} \int_{\{|h|<1\}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{n+s_1p}} dx dh \\
&\leq (1-s_2) \int_{\{|h|<1\}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{n+s_2p}} dx dh. \tag{5}
\end{aligned}$$

Finalmente, observamos que

$$\int_{\{|h|\geq 1\}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+h) - f(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dx dh \leq 2^p \|f\|_{L^p}^p n\omega_n \int_1^\infty \frac{1}{t^{1+sp}} dt = \frac{n\omega_n 2^p}{sp} \|f\|_{L^p}^p.$$

Combinando esta última desigualdad con (5), concluimos la demostración del teorema. \square

Utilizando el Teorema 3.10, la demostración del Teorema 3.7 se deduce fácilmente como se mostrará a continuación.

Demostración del Teorema 3.7

Sea $0 < s_k \uparrow 1$ y sea $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (1 - s_k) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+s_k p}} dx dy < \infty, \quad \text{y} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p < \infty.$$

Fijemos $0 < t < 1$. Luego, por el Teorema 3.10, tenemos que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{t,p}(\mathbb{R}^n)$ es acotada y entonces, por el Teorema de Rellich-Kondrashov, existe una subsecuencia (que seguimos denotando $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$) y una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \rightarrow f$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, pasando eventualmente a una nueva subsecuencia, podemos asumir que $f_k \rightarrow f$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Por el Lema de Fatou, tenemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+tp}} dx dy \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+tp}} dx dy.$$

Usando el Teorema 3.10 una vez más, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1-t}{2(1-s_k)} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+tp}} dx dy \\ & \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{(1-s_k)}{2} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|^p}{|x - y|^{n+s_k p}} dx dy \\ & \quad + \frac{n\omega_n 2^p (1-t)}{tp} M, \end{aligned}$$

donde $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_p^p$.

Finalmente, el resultado sigue tomando el límite $t \uparrow 1$ y usando el Teorema 3.6.

3.2. Implicancias de Bourgain-Brezis-Mironescu

En esta sección analizaremos dos consecuencias de los Teoremas 3.6 y 3.7. Para eso empezemos introduciendo algunas notaciones.

Llamamos, para $0 < s < 1 \leq p < \infty$

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : [f]_{s,p} < \infty\},$$

donde

$$[f]_{s,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y definimos, para $0 < s < 1$

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \{f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : f = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}.$$

En lo que sigue, toda función de $L^p(\Omega)$ la supondremos definida en \mathbb{R}^n con valor 0 en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

3.2.1. Desigualdad de Poincaré

Una primer consecuencia es la desigualdad de Poincaré.

Teorema 3.11. *Sea A la constante óptima en la desigualdad de Poincaré*

$$\int_{\Omega} |f|^p dx \leq A \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx \quad (1)$$

para toda $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Entonces, dado $\delta > 0$ existe $0 < s_0 < 1$ tal que

$$\int_{\Omega} |f|^p dx \leq \left(\frac{A}{K(n,p)} + \delta \right) \frac{1}{1-s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy, \quad (2)$$

para todo $s_0 \leq s < 1$ y para toda $f \in L^p(\Omega)$. La constante $K(n,p)$ viene dada por el Teorema 3.6.

Observación 3.12. La constante A de la desigualdad (1) depende de n, p y Ω .

En consecuencia, el parámetro s_0 también depende de n, p y Ω .

Demostración. La demostración es por el absurdo. Supongamos que el enunciado es falso, luego, existe una constante $C > \frac{A}{K(n,p)}$, una sucesión $s_j \uparrow 1$ y $f_j \in L^p(\Omega) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f_j\|_p = 1, \quad \frac{1}{1-s_j} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(x) - f_j(y)|^p}{|x-y|^{n+s_j p}} dx dy \leq \frac{1}{C}.$$

Por el Teorema 3.7, pasando eventualmente a una subsucesión, tenemos que existe $f \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $f_j \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y c.t.p. en \mathbb{R}^n . Luego, $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|f\|_p = 1$, nuevamente por el Teorema 3.7,

$$K(n,p) \|f\|_p^p \|\nabla f\|_p^p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s_j} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(x) - f_j(y)|^p}{|x-y|^{n+s_j p}} dx dy \leq \frac{1}{C}.$$

□

Corolario 3.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $1 < p < \infty$. Existe entonces una constante $C > 0$ que depende de n, p y Ω tal que*

$$\|f\|_{L^p}^p \leq C(1-s) \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy$$

para todo $0 < s < 1$ y para toda $f \in L^p(\Omega)$.

3.2.2. Γ -convergencia de funcionales

Se definen los funcionales $\mathcal{J}_s : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\mathcal{J}_s(f) := \begin{cases} (1-s) \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy & \text{si } f \in W_0^{s,p}(\Omega), \\ \infty & \text{sino} \end{cases}$$

Definición 3.14. Sea (X, d) un espacio métrico y $F_j, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, j \in \mathbb{N}$. Decimos que F_j Γ -converge a F , que se nota $F_j \xrightarrow{\Gamma} F$, si se verifican las siguientes:

- (desigualdad del límite inferior) Para todo $x \in X$ y para toda sucesión $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x$, se tiene que

$$F(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j);$$

- (desigualdad del límite superior) Para todo $x \in X$, existe una sucesión $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = x$ y

$$F(x) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(y_j).$$

De los Teoremas 3.6 y 3.7 se desprende inmediatamente que $\mathcal{J}_s \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J} : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ viene dado por

$$\mathcal{J}(f) := \begin{cases} K(n, p) \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx & \text{si } f \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \infty & \text{sino} \end{cases}$$

En efecto, el Teorema 3.7 es exactamente la desigualdad del límite inferior, mientras que el Teorema 3.6 dice que tomando $f_j = f$ se tiene la desigualdad del límite superior. La principal característica de la Γ -convergencia es la que implica la convergencia de mínimos.

Teorema 3.15. Sea (X, d) un espacio métrico y $F_j, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, j \in \mathbb{N}$, tales que $F_j \xrightarrow{\Gamma} F$. Asumamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in X$ tal que $F_j(x_j) = \inf F_j$ y supongamos que la sucesión de mínimos $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ es precompacta.

Entonces todo punto de acumulación de $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un mínimo de F y se tiene que

$$\inf F = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf F_j.$$

Demostración. La demostración es bien simple. Sea $x \in X$ un punto de acumulación de $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x$. Luego, por la desigualdad del límite inferior, tenemos que

$$F(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j). \quad (3)$$

Por otro lado, de la desigualdad del límite superior, sabemos que, dado $y \in X$, existe $(y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $y_j \rightarrow y$ y

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \inf_X F_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(y_j) \leq F(y).$$

Como $y \in X$ es arbitrario, podemos tomar ínfimo en la última desigualdad y concluir que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \inf_X F_j \leq \inf_X F. \quad (4)$$

Combinando (3) y (4) se concluye el teorema. \square

Consideremos ahora $g \in L^{p'}(\Omega)$, $s \uparrow 1$ y definamos los funcionales $F_j, F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dados por

$$F_j(f) := \mathcal{J}_s(f) - \int_{\Omega} fg \, dx \quad \text{y} \quad F(f) := \mathcal{J}(f) - \int_{\Omega} fg \, dx. \quad (5)$$

Es fácil ver que, como $\mathcal{J}_s \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{J}$ y $f \mapsto \int_{\Omega} fg \, dx$ es continua en $L^p(\Omega)$, entonces $F_j \xrightarrow{\Gamma} F$.

Queremos entonces aplicar el Teorema 3.15 a estos funcionales F_j . Para eso debemos verificar que existe $f_j \in L^p(\Omega)$ que minimiza F_j y que la sucesión $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es precompacta en $L^p(\Omega)$.

Lema 3.16. *Sea $0 < s < 1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado. Sea $g \in L^p(\Omega)$. Entonces existe una única función $f \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que*

$$\mathcal{J}_s(f) - \int_{\Omega} fg \, dx = \inf_{w \in W_0^{s,p}(\Omega)} \left[\mathcal{J}_s(w) - \int_{\Omega} gw \, dx \right].$$

Demostración. La demostración es una consecuencia del llamado *método directo del cálculo de variaciones*.

■ Definimos entonces $F : L^p(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$F(g) := \begin{cases} \mathcal{J}_s(g) - \int_{\Omega} g\phi \, dx & \text{si } g \in W_0^{s,p}(\Omega), \\ \infty & \text{sino} \end{cases}$$

▪ Este método consiste en lo siguiente:

1. Probar que F es acotado inferiormente.
2. Probar que una sucesión minimizante para F es precompacta en $L^p(\Omega)$.
3. Probar que F es semicontinuo inferior en $L^p(\Omega)$.

□

Supongamos demostrados estos pasos, entonces la demostración sigue de la siguiente manera: Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(f_j) = \inf_{g \in W_0^{1,p}(\Omega)} F(g) > -\infty.$$

Por el ítem 2, podemos suponer que $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f \in L^p(\Omega)$, donde el límite se entiende en sentido $L^p(\Omega)$. Finalmente, por el ítem 3,

$$F(f) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(f_j) = \inf_{g \in W_0^{1,p}(\Omega)} F(g),$$

lo que da la existencia.

La unicidad se desprende de que F es uniformemente convexo, i.e.

$$F(tf + (1-t)g) < tF(f) + (1-t)F(g) \quad \text{si } f \neq g, \quad 0 < t < 1.$$

En efecto, si $f_1 \neq f_2$ son dos mínimos para F , entonces

$$\inf_{g \in W_0^{1,p}(\Omega)} F(g) \leq F\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) < \frac{F(f_1) + F(f_2)}{2} = \inf_{g \in W_0^{1,p}(\Omega)} F(g),$$

lo que es un absurdo.

Para finalizar la demostración debemos entonces probar los ítems 1, 2 y 3 y, además, que F es uniformemente convexo.

Demostración del ítem 1.

La demostración de este ítem es una consecuencia de la desigualdad de Poincaré .

En efecto, considerando los funcionales previamente definidos \mathcal{J}_s (2),

$$\int_{\Omega} f \phi \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q} \leq C \|\nabla f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^q}.$$

Luego, usando la desigualdad de Young con ε , obtenemos que existe una constante C que depende de Ω, p y n tal que

$$\int_{\Omega} f \phi \, dx \leq \frac{1}{2} \mathcal{J}_{\varepsilon}(f) + C \|\phi\|_{W^{1,q}}^2. \quad (6)$$

Usando (6) concluimos

$$F(f) = \mathcal{J}_\varepsilon(f) - \int_{\Omega} f\phi \, dx \geq \frac{1}{2}\mathcal{J}_\varepsilon(f) - C\|\phi\|_{W^{1,q}}^2 > -\infty, \quad (7)$$

lo que concluye la demostración.

Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión minimizante para F , i.e.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(f_j) = \inf_{g \in L^p(\Omega)} F(g).$$

De (7), deducimos que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_\varepsilon(f_j) < \infty,$$

es decir, $\{f_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es acotada. Luego, por el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov, sigue que la sucesión $\{f_j\}$ es precompacta en $L^p(\Omega)$.

Demostración del ítem 3.

Sea $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = g$, donde el límite se entiende en norma $L^p(\Omega)$.

Observemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_j \phi \, dx = \int_{\Omega} g \phi \, dx.$$

Por otro lado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g_j \rightarrow g$ en casi todo punto de \mathbb{R}^n . Luego, por el Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|g(x) - g(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|g_j(x) - g_j(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} \, dx \, dy.$$

De estas dos desigualdades deducimos que

$$F(g) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(g_j),$$

como queríamos ver.

Demostración de la convexidad uniforme.

La aplicación $g \mapsto \int_{\Omega} g\phi \, dx$ es lineal. Luego alcanza con demostrar que \mathcal{J}_s es uniformemente convexa.

Ahora, la convexidad uniforme de \mathcal{J}_s es una consecuencia inmediata de la convexidad uniforme de la función $x \mapsto x^p$ para $p > 1$ y es dejada de ejercicio al lector. \square

Lema 3.17. *Sea $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $0 < s_j \uparrow 1$ y $1 < p < \infty$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $F : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ dados por (5.5). Dado $j \in \mathbb{N}$, sea $f_j \in L^p(\Omega)$ el mínimo de F_j . Entonces tenemos que la sucesión $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ es precompacta.*

Demostración. La demostración es una consecuencia del Teorema 3.10 y de la desigualdad (5.7). \square

Como corolario de los Lemas 3.16 y 3.17 y del Teorema 3.15 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y sea $1 < p < \infty$. Sea $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $s_j \uparrow 1$. Consideremos las funcionales $F_j, F : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por 3.15 y sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ la sucesión de mínimos de $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Entonces existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_j \rightarrow f$ en $L^p(\Omega)$ y f es el mínimo de F . \square*

Demostración. Por los Lemas 3.16 y 3.17, podemos aplicar el Teorema 3.15 a los funcionales $F_{j \in \mathbb{N}}$ y F . Restaría ver que toda sucesión $f_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente. Pero eso es una consecuencia de que F tiene un único mínimo por ser uniformemente convexo. \square

3.3. Comportamiento asintótico cuando $s \downarrow 0^+$

En esta sección analizamos el caso límite cuando $s \downarrow 0$ de los funcionales \mathcal{J}_s . Este tipo de resultado se conoce como de tipo Maz'ya-Shaposhnikova, en referencia a los resultados obtenidos en [12]. Es decir, dado el siguiente funcional

$$\mathcal{J}_s(u) := \frac{1-s}{p} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy,$$

nos interesa estudiar el límite

$$\lim_{s \downarrow 0^+} s \mathcal{J}_s(u).$$

Primero definimos el siguiente peso dependiente de s :

$$b_s(x) := 2s \int_{S^{n-1}} \int_{2|x|}^{\infty} \frac{1}{r^{sp+1}} dr d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Observamos que este peso satisface la siguiente expresión:

$$b_s(x) = \frac{2^{1-sp} n \omega_n}{p} \cdot \frac{1}{|x|^{sp}}.$$

Suponemos que existe la función límite

$$b(x) = \lim_{s \downarrow 0} b_s(x) \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Notar que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $b(x) = \frac{2n\omega_n}{p}$

Teorema 3.19. *Si $u \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$ para algún $s_0 \in (0, 1)$, entonces*

$$\lim_{s \downarrow 0} s \mathcal{J}_s(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b(x) dx.$$

La demostración de este resultado sigue la estrategia general desarrollada en [12], pero también aplica algunas ideas de [13].

La prueba será consecuencia directa de los siguientes dos lemas. El primero es una desigualdad tipo Hardy con pesos:

Lema 3.20. *Sea $u \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$ para algún $s_0 \in (0, 1)$, entonces*

$$\liminf_{s \downarrow 0} s \mathcal{J}_s(u) \geq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b(x) dx.$$

Demostración. Consideremos

$$I^p = \int_{\mathbb{R}^n, |h| \geq 2|x|} \frac{|u(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|h| \geq 2|x|} \frac{1}{|h|^{n+sp}} dh \right) |u(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{S^{n-1}} \int_{2|x|}^{\infty} \frac{1}{r^{1+sp}} dr d\mathcal{H}^{n-1} \right)}_{b_s(x)} |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Ahora, si sumamos y restamos $u(x-h)$ y utilizamos la siguiente desigualdad

Sea $\theta = \frac{1}{1+\varepsilon}$ y $1-\theta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

$$\left(\frac{\theta a}{\theta} + \frac{(1-\theta)b}{1-\theta} \right)^p \leq \theta \left(\frac{a}{\theta} \right)^p + (1-\theta) \left(\frac{b}{1-\theta} \right)^p$$

se tiene para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} I^p &\leq (1+\varepsilon)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n, |h| \geq 2|x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &+ \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h| \geq 2|x|} \frac{|u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &:= (1+\varepsilon)^{p-1} a^p + \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{p-1} b^p. \end{aligned}$$

Acotamos primero $(b)^p$. Como $|h| \geq 2|x|$, se tiene que :

$$|h| = |h+x-x| \leq |h-x| + |x|$$

$$|h| - |x| \leq |h-x|$$

$$||h| - |x|| \leq |h-x|$$

$$\frac{|h|}{2} = \left| |h| - \frac{|h|}{2} \right| \leq |h-x|$$

Por otro lado,

$$|x - h| \leq |x| + |h| \leq \left| \frac{|h|}{2} + |h| \right| = \frac{3}{2}|h|$$

Asi,

$$\frac{2}{3}|x - h| < |h| < 2|x - h|$$

Entonces

$$\begin{aligned} b^p &= \int_{\mathbb{R}^n, |h| \geq 2|x|} \frac{|u(x - h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &\leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\frac{2}{3}|y| \leq |x-y| < 2|y|} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{n+sp}} dy dx \\ &= \left(\frac{3}{2} \right)^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{n+sp}} \left(\int_{\frac{2}{3}|y| \leq |x-y| < 2|y|} dx \right) dy \\ &\leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{n+sp}} \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{3}|y| \leq |x - y| < 2|y| \right\} \right) dy \\ &\leq \left(\frac{3}{2} \right)^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{n+sp}} n (\omega_n 2^n |y|^n) dy \\ &= n \omega_n \frac{3^{n+sp}}{2^{sp}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{sp}} dy. \end{aligned}$$

Observamos que esta última cantidad es finita por la desigualdad de Hardy ver [15].

Para a^p , hacemos cambio de variables,

$$\begin{aligned} a^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h| \geq 2|x|} \frac{|u(x) - u(x - h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h| \geq 2|x|} \frac{|u(x) - u(x - h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx := (\tilde{a})^p, \end{aligned}$$

donde usamos la simetría implícita en la definición.

Observamos que los conjuntos $\{|h| \geq 2|x - h|\}$ y $\{|h| \geq 2|x|\}$ son disjuntos, por lo tanto

$$2a^p = a^p + \tilde{a}^p \leq \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(x - h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx.$$

□

Estimaciones inferior y superior para $s\mathcal{J}_s(u)$

Observamos que

$$s\mathcal{J}_s(u) \geq 2sa^p \geq 2s \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon)^{p-1}} I^p - \frac{1}{\varepsilon^{p-1}} b^p \right]$$

$$\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b_s(x) dx - \frac{2s}{\varepsilon^{p-1}} n\omega_n \frac{3^{n+sp}}{2^{sp}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|y|^{sp}} dy.$$

Finalmente, usando el Lema de Fatou,

$$\liminf_{s \downarrow 0^+} s\mathcal{J}_s(u) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^p} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b(x) dx,$$

para todo $\varepsilon > 0$, y el resultado se sigue. \square

El siguiente lema nos da la estimación superior.

Lema 3.21 (Estimación del lım sup). *Para todo $u \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$, con algún $s_0 \in (0, 1)$, se tiene que*

$$\limsup_{s \rightarrow 0} s\mathcal{J}_s(u) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b(x) dx.$$

Demostración. Por simetría se tiene,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-h| < |x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-h| > |x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-h| \geq |x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx.$$

Razonando como en el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{J}_s(u) &= 2s \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-h| \geq 2|x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x| < |x-h| < 2|x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \right] \\ &\leq (1+\varepsilon)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p b_s(x) dx \\ &\quad + 2s \left[\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-h| \geq 2|x|} \frac{|u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x| < |x-h| < 2|x|} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \right] \\ &=: a^p + 2s[b^p + c^p]. \end{aligned}$$

Necesitamos obtener cotas uniformes en s para los términos b^p y c^p . Para b^p , usamos que $|x-h| \geq 2|x|$ implica $|h| \geq \frac{1}{2}|x-h|$, junto con el Teorema de Fubini, para obtener

$$b^p \leq 2^{n+sp} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|x-h| \geq 2|x|} \frac{|u(x-h)|}{|x-h|^{n+sp}} dh \right)^p dx = 2^{np} n\omega_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx < \infty.$$

La desigualdad de Hardy nos da la cota uniforme deseada para $(b)^p$, y por lo tanto

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} b^p = 0.$$

Resta acotar c^p . Para comenzar, dividimos la integral en dos partes: una donde $|h|$ es grande y otra donde $|h|$ está acotado.

$$\begin{aligned} c^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| < |x-h| < 2|x| \\ |h| \leq N}} \frac{|u(x) - u(x-h)|}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| < |x-h| < 2|x| \\ |h| > N}} \frac{|u(x) - u(x-h)|}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &=: c_1^p + c_2^p. \end{aligned}$$

Para acotar c_1^p , procedemos de la siguiente manera:

$$c_1^p \leq N^{p(\tau-s)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| < |x-h| < 2|x| \\ |h| \leq N}} \frac{|u(x) - u(x-h)|^p}{|h|^{n+\tau p}} dh dx \leq N^{p(\tau-s)} [u]_{\mathbb{R}^n, p, \tau}^p,$$

donde $\tau > s$ es fijo. De esta expresión se deduce que

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} c_1^p = 0.$$

Resta obtener una cota para c_2^p . Observamos que, como $|x| < |x-h| < 2|x|$ y $|h| > N$, se sigue que $N < |h| \leq |h-x| + |x| \leq 3|x|$ luego $|x| > \frac{N}{3}$ y se deduce además $|x-h| > \frac{N}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_2^p &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| < |x-h| < 2|x| \\ |h| > N}} \frac{|u(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| < |x-h| < 2|x| \\ |h| > N}} \frac{|u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| > \frac{N}{3} \\ |h| > N}} \frac{|u(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x-h| > \frac{N}{3} \\ |h| > N}} \frac{|u(x-h)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx \end{aligned}$$

Al ser iguales nos queda

$$\begin{aligned} &= 2^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x| > \frac{N}{3} \\ |h| > N}} \frac{|u(x)|^p}{|h|^{n+sp}} dh dx = 2^p \int_{|x| > \frac{N}{3}} |u(x)|^p \left(\int_{|h| > N} \frac{1}{|h|^{n+sp}} dh \right) dx \\ &= n\omega_n 2^p \int_{|x| > \frac{N}{3}} |u(x)|^p \left(\int_N^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+sp}} dr \right) dx = n\omega_n 2^p \left(\frac{1}{N^{sp}} \right) \int_{|x| > \frac{N}{3}} |u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\limsup_{s \downarrow 0^+} c_2^p \leq \frac{n\omega_n 2^p}{p} \int_{|x| > \frac{N}{3}} |u(x)|^p dx,$$

y esta cantidad puede hacerse arbitrariamente pequeña si N es suficientemente grande. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema principal 3.19.

Demostración. Para demostrar el Teorema 3.19 nos valemos de los lemas anteriores 3.20 y 3.21 y el resultado se deduce inmediatamente. \square

Observación 3.22. Breve comentario sobre la desigualdad de Hardy

Relación entre el término de Hardy y la integral no local

El punto central en la demostración de la desigualdad de Hardy fraccionaria que se puede ver [15] consiste en interpretar el peso singular $|x|^{-sp}$ como una contribución acumulada de interacciones no locales. Esta observación permite vincular el término de Hardy con la seminorma de Gagliardo asociada al espacio de Sobolev fraccionario.

Sea $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ y supóngase $sp < n$. Para $x \neq 0$ se tiene la siguiente comparación

$$\frac{1}{|x|^{sp}} \sim \int_{\{y \in \mathbb{R}^n: |y| < |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{n+sp}} dy, \quad (1)$$

donde el símbolo “ \sim ” indica equivalencia hasta constantes positivas que dependen únicamente de n , s y p .

La relación (1) se justifica observando que, si $|y| < |x|$, entonces $|x-y| \simeq |x|$. En consecuencia,

$$\int_{|y| < |x|} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \simeq \frac{1}{|x|^{n+sp}} \int_{|y| < |x|} dy = \frac{|B_{|x|}|}{|x|^{n+sp}} \simeq \frac{1}{|x|^{sp}},$$

lo cual es válido precisamente bajo la condición $sp < n$.

Utilizando (1), el término de Hardy puede reescribirse como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \int_{|y| < |x|} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} dx.$$

Intercambiando el orden de integración se obtiene una expresión de tipo no local:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y| < |x|} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dy dx.$$

El siguiente paso consiste en controlar el valor puntual de la función en términos de sus oscilaciones. Para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$|u(x)| \leq \frac{1}{|B_{|x|}|} \int_{B_{|x|}} |u(x) - u(y)| dy,$$

y, elevando a la potencia p y aplicando la desigualdad de Jensen,

$$|u(x)|^p \lesssim \int_{B_{|x|}} |u(x) - u(y)|^p dy.$$

Sustituyendo esta estimación en la expresión anterior se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y| < |x|} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dy dx.$$

Finalmente, utilizando simetría y argumentos estándar de reordenamiento de integrales, se obtiene la cota

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \lesssim \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy,$$

lo cual prueba la desigualdad de Hardy fraccionaria en términos de la seminorma de Gagliardo. La extensión del resultado a funciones arbitrarias de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se obtiene por densidad.

Capítulo 4

Espacios de Orlicz

Los espacios de Orlicz surgen como una generalización natural de los clásicos espacios de Lebesgue L^p y constituyen una herramienta fundamental en el análisis funcional moderno. La primera aparición de estos espacios fue en 1932, cuando el matemático polaco Władysław Orlicz publicó un artículo en el que se estudiaban por primera vez la propiedad de una N -función, con posterioridad se independizaría de dicha propiedad logrando resultados más generales a mediados 1936. Uno de los conceptos fundamentales en la teoría de espacios de Orlicz, que desarrollaremos a continuación es el de la llamada **función de Young o N -función**. Esta clase de funciones resultaran cruciales para asegurar propiedades deseables como la separabilidad, reflexividad etc.

4.1. Preliminares

Definición 4.1 (Función convexa). Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea una función $A: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que A es *convexa* si para todo $u_1, u_2 \in I$ y todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene

$$A(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha A(u_1) + (1 - \alpha)A(u_2). \quad (4.1)$$

Observación 4.2. Desde un punto de vista geométrico, como ilustra la Figura 4.1, la condición (4.1) asegura que el segmento que une los puntos cualesquiera del grafo de la función queda por encima del grafo de la función entre esos dos puntos.

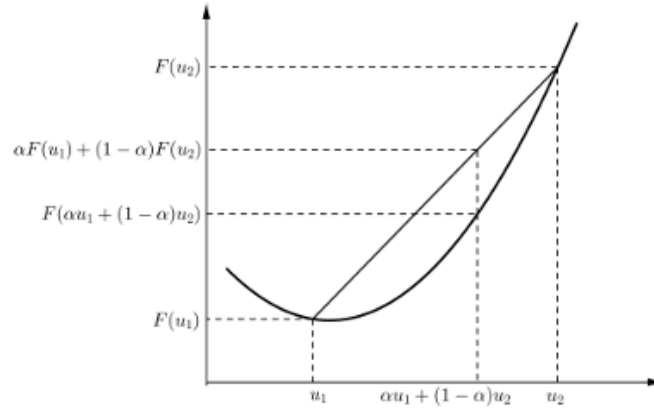


Figura 4.1: Función convexa

Además, si A es continua y satisface la desigualdad

$$A\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(A(u_1) + A(u_2)), \quad (4.2)$$

entonces A es una función convexa. En efecto, supongamos que no se satisface (4.1) para ciertos $u_1, u_2 \in I$. La función continua

$$\phi(\alpha) = A(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) - \alpha A(u_1) - (1 - \alpha)A(u_2)$$

alcanza su máximo en $[0, 1]$ y ha de ser un valor positivo M_0 . Sea α_0 el menor de los valores tales que $\phi(\alpha_0) = M_0$ y $\delta > 0$ de modo que $\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta \in [0, 1]$. Tomando los puntos

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2, \quad u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2,$$

en el intervalo $[u_1, u_2]$ y aplicándoles (4.2) se tiene que

$$A(\alpha_0 u_1 + (1 - \alpha_0)u_2) \leq \frac{1}{2}(A(u_1^*) + A(u_2^*)).$$

Usando esta desigualdad en ϕ se obtiene

$$\phi(\alpha_0) \leq \frac{1}{2}(A(u_1^*) + A(u_2^*)) - \alpha_0 A(u_1) - (1 - \alpha_0)A(u_2),$$

donde el miembro de la derecha es precisamente

$$\frac{1}{2}(\phi(\alpha_0 - \delta) + \phi(\alpha_0 + \delta)),$$

que se sabe estrictamente menor que M_0 , ya que ϕ alcanza su máximo por primera vez en α_0 . Por tanto, se llega a la contradicción

$$\phi(\alpha_0) < M_0.$$

4.2. Función de Young

Definición 4.3. Una función $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ se llama función de Young si puede escribirse como

$$A(u) = \int_0^u a(t) dt, \quad (1)$$

donde $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es no decreciente, continua por la derecha, $a(t) > 0$ si $t > 0$, $a(0) = 0$ y $a(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Observación 4.4. De la representación (1), es inmediato que toda función de Young es continua y positiva para todo $u \neq 0$.

A partir de la definición 4.3 se comprueba que A es convexa, $A(0) = 0$ y es superlineal en 0 y en ∞ , es decir

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{A(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{u} = \infty.$$

Para demostrar la convexidad de la función A , considérense dos puntos u_1 y u_2 arbitrarios.

Por lo tanto, basta ver que se cumple la condición (4.2) para $0 \leq u_1 \leq u_2$. En virtud de la monotonía de a , se tiene que

$$\begin{aligned} A\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \int_0^{(u_1+u_2)/2} a(t) dt \\ &\leq \int_0^{u_1} a(t) dt + \frac{1}{2} \left(\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} a(t) dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} a(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{u_1} a(t) dt + \int_0^{u_2} a(t) dt \right) = \frac{1}{2}(A(u_1) + A(u_2)), \end{aligned}$$

quedando que A es una función convexa.

Continuando con las propiedades de las funciones de Young, si se considera $u_2 = 0$ en (4.1), se tiene que, para todo u ,

$$A(\alpha u) \leq \alpha A(u), \quad (2)$$

con $\alpha \in [0, 1]$. De la primera condición de la definición 4.3, unida a que la monotonía de a asegura $A(u) \leq ua(u)$, se deduce que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{A(u)}{u} = 0. \quad (3)$$

Y de manera similar, la segunda condición asegura que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{u} = \infty.$$

Ejemplo 4.5. Las funciones del tipo $A(u) = |u|^\beta$, con $\beta > 1$ son funciones de Young. No es difícil comprobar que $A'(u) = \beta|u|^{\beta-1}$, se ajusta a las condiciones de la definición 4.3.

Ejemplo 4.6. Si A es una función Young, entonces $G(u) = e^{A(u)} - 1$ también lo es. Se considera $g_+(u) = a_+(u)e^{A(u)}$ es continua por la derecha, positiva para $u > 0$, no decreciente, y se ajusta a las condiciones de la definición 4.3, ver [14].

4.2.1. Función complementaria de una función de Young

Definición 4.7 (Función complementaria). La función complementaria (o conjugada) de A se define como

$$\bar{A}(v) := \sup_{u \geq 0} \{vu - A(u)\}, \quad v \geq 0.$$

Esta definición coincide con la transformada de Legendre–Fenchel de A restringida al semieje positivo.

Proposición 4.8. Si A es una función de Young, entonces su función complementaria \bar{A} es también una función de Young.

Demostración. Verificamos una a una las propiedades que caracterizan a las funciones de Young.

Paso 1: Convexidad. Para cada $u \geq 0$, la función

$$v \mapsto vu - A(u)$$

es afín en v . Como \bar{A} es el supremo de una familia de funciones afines, se deduce que \bar{A} es convexa.

Paso 2: Normalización en el origen. Dado que $A(u) \geq 0$ para todo $u \geq 0$ y $A(0) = 0$, se tiene

$$\bar{A}(0) = \sup_{u \geq 0} \{-A(u)\} = 0.$$

Paso 3: Positividad para $v > 0$. La condición

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{u} = \infty$$

implica que para todo $v > 0$ existe $u > 0$ tal que

$$vu - A(u) > 0.$$

Por lo tanto,

$$\bar{A}(v) > 0 \quad \text{para todo } v > 0.$$

Paso 4: Crecimiento superlineal. Por definición,

$$\bar{A}(v) \geq vu - A(u) \quad \text{para todo } u \geq 0.$$

Usando nuevamente que $A(u)/u \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(v)}{v} = \infty,$$

es decir, \bar{A} tiene crecimiento superlineal.

Paso 5: Monotonía y continuidad. Como \bar{A} es convexa y finita en $(0, \infty)$, resulta continua en dicho intervalo. Además, al ser el supremo de funciones crecientes, \bar{A} es creciente.

Reuniendo todas estas propiedades, concluimos que \bar{A} es una función de Young. \square

A continuación desarrollaremos otra forma de obtener la función complementaria de la función de Young A desde la construcción de la inversa generalizada de la función a . Luego se verá que la función complementaria obtenida coincide con la definición 4.7.

Definición 4.9. Sea $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente, continua por la derecha, positiva para valores mayores que cero y que satisface las condiciones $a(0) = 0$ y $a(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Se define la función $\bar{a}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\bar{a}(s) := \sup_{a(t) \leq s} t.$$

Se suele denominar a \bar{a} *inversa a la derecha* de a (o también *inversa generalizada* o *pseudo-inversa* de a). Recíprocamente, la función \bar{a} es la inversa a la derecha de a .

Definición 4.10. Sea $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, continua por la derecha, positiva para valores mayores que cero y que satisface las condiciones $a(0) = 0$ y $a(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. . Sea \bar{a} la inversa a la derecha de a . Las funciones

$$A(u) := \int_0^u a(s) ds \quad \text{y} \quad \bar{A}(u) := \int_0^u \bar{a}(s) ds$$

reciben el nombre de *funciones de Young mutuamente complementarias*.

Ejemplo 4.11. Las funciones

$$A(t) = \frac{t^p}{p} \quad \text{y} \quad \bar{A}(t) = \frac{t^q}{q},$$

con $p > 1$ y tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, son funciones de Young mutuamente complementarias. Derivando la primera, se puede ver que

$$a(t) = t^{p-1}$$

cumple con los requisitos para ser una función de Young. En efecto, $A'(t) = t^{p-1}$ es continua, positiva para $t > 0$, no decreciente (ya que $A''(t) > 0$ para $t > 0$) y satisface las condiciones de la definición 4.10. Además,

$$\bar{a}(s) = s^{\frac{1}{p-1}},$$

es la inversa a la derecha de a , y

$$\bar{A}(t) = \int_0^t \bar{a}(s) ds = \frac{1}{q} t^q.$$

Concluyendo que, efectivamente, \bar{A} es su complementaria.

La función complementaria juega un papel fundamental en la teoría de los espacios de Orlicz, ya que permite formular la desigualdad de Young

$$uv \leq A(u) + \bar{A}(v), \quad v, u \geq 0,$$

Proposición 4.12 (Desigualdad de Young). *Sean A y \bar{A} dos funciones de Young mutuamente complementarias. Entonces,*

$$uv \leq A(u) + \bar{A}(v), \tag{1}$$

y la igualdad se da si y solo si $v = a(u) \operatorname{sgn}(u)$ o $u = \bar{a}(v) \operatorname{sgn}(v)$, donde a y \bar{a} son las derivadas por la derecha de A y de \bar{A} , respectivamente.

Demostración. Sea un u arbitrario. En el caso donde $u = 0$ el resultado es inmediato, por tanto, se considerará $u \neq 0$. Si $v = a(u) \operatorname{sgn}(u)$, por la propia construcción de las funciones a y \bar{a} garantiza que las áreas acotadas por sus gráficas componen un rectángulo de área $ua(u)$. Esto es,

$$ua(u) = A(u) + \bar{A}(a(u)). \tag{2}$$

Análogamente,

$$v\bar{a}(v) = A(\bar{a}(v)) + \bar{A}(v).$$

Obsérvese que, en el caso en el que $\operatorname{sgn}(u) \neq \operatorname{sgn}(v)$ no puede darse la igualdad en (1), ya que A y \bar{A} son no negativas.

Considérese ahora $v \in [0, \infty)$. Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, $u > 0$ y $a(u) < v$. Al ser $\bar{a}(s) = \sup\{a(t) \leq s\}$, si $a(u) < s < v$ entonces $u < \bar{a}(s) < \bar{a}(v)$, y por tanto se tiene que

$$u(v - a(u)) < \int_{a(u)}^v \bar{a}(s) ds.$$

Combinando esta última desigualdad con (2) se sigue que

$$uv = ua(u) + u(v - a(u)) < \int_0^u a(t) dt + \int_0^{a(u)} \bar{a}(s) ds + \int_{a(u)}^v \bar{a}(s) ds = A(u) + \bar{A}(v).$$

Al ser ambas funciones Young con la propiedad de ser pares y mayores o iguales que cero, la desigualdad anterior es válida para todo u y para todo v . \square

Observación 4.13. De la Proposición 4.12 se sigue que $\bar{A}(v) \geq uv - A(u)$ y, para $u = \bar{a}(v) \operatorname{sgn}(v)$, se tiene la igualdad. Es por esto que

$$\bar{A}(v) = \sup_{u \geq 0} \{uv - A(u)\}.$$

Es muy común encontrar esta igualdad como definición en sí misma de función de Young complementaria.

Observación 4.14. Sean $p, q > 1$ exponentes conjugados, esto es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Esta desigualdad se obtiene particularizando en (1) con las funciones complementarias $A(u) = \frac{u^p}{p}$ y $\bar{A}(v) = \frac{v^q}{q}$.

4.3. La clase de Orlicz

Dado un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, (Ω, μ) un espacio de medida, y una función de Young A , la *clase de Orlicz* se define como

$$\mathcal{L}^A(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : \int_{\Omega} A(|u(x)|) d\mu < \infty \right\} \quad (1)$$

Observación 4.15. Notar que no se nombra directamente espacio de Orlicz si no clase de Orlicz, porque no necesariamente es un espacio vectorial. Es decir, si $u \in \mathcal{L}^A(\Omega)$, λu puede no pertenecer a $\mathcal{L}^A(\Omega)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, esto va a depender del crecimiento de A la función de Young.

Observación 4.16. En muchos libros, la clase de Orlicz se suele definir con una leve modificación que es la siguiente:

$$\mathcal{L}^A(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} A(|u(x)|) d\mu < \infty \right\} \quad (2)$$

La pregunta lícita sería ¿Definen la misma clase? La respuesta es si. La inclusión de (1) en (2) es trivial. Ahora la inclusión de (2) en (1) ya no es tan obvia y debe utilizarse las propiedades de la función de young A . Veámoslo.

Demostración Sabemos que $\frac{A(t)}{t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ luego existe un t_0 con la propiedad que $1 \leq \frac{A(t)}{t}$ para todo $t \geq t_0$.

Sea $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq t_0\}$, luego se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)| d\mu &\leq \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} |u(x)| d\mu + \int_{\tilde{\Omega}} |u(x)| d\mu \\ &\leq t_0 \mu(\Omega) + \int_{\tilde{\Omega}} A(|u(x)|) d\mu < \infty \end{aligned}$$

Observación 4.17. Notar que toda función u acotada pertenece a $\mathcal{L}^A(\Omega)$ pues si $|u(x)| < c$ entonces $\int_{\Omega} A(u(x)) d\mu \leq \mu(\Omega)A(c)$.

Teorema 4.18. Sean A_1 y A_2 dos funciones de Young, y sean $\mathcal{L}^{A_1}(\Omega)$ y $\mathcal{L}^{A_2}(\Omega)$ sus respectivas clases de Orlicz. La inclusión

$$\mathcal{L}^{A_1}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{A_2}(\Omega)$$

se cumple si y solo si existen constantes $c > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que

$$A_2(u) \leq c A_1(u), \quad \text{para todo } u \geq u_0.$$

Ver [14]

Corolario 4.19. Dos funciones de Young A_1 y A_2 determinan la misma clase de Orlicz si, y solo si, existen constantes $c, d > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que, para todo $u \geq u_0$,

$$c A_2(u) \leq A_1(u) \leq d A_2(u).$$

Es razonable preguntarse que propiedad debería satisfacer la función de young A con el fin que $\mathcal{L}^A(\Omega)$ resulte ser en principio un espacio vectorial. Se demuestra en [14] que la hipótesis necesaria y suficiente sobre A es que satisfaga la propiedad Δ_2 .

Definición 4.20. Decimos que una función de Young A satisface la condición Δ_2 si existe una constante $K > 0$ tal que

$$A(2t) \leq K A(t) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Intuitivamente esta condición nos dice que la función de Young A no crece demasiado rápido. Quedan excluidas funciones de Young con crecimiento super-exponenciales tales como $A = e^{t^2} - 1$.

En nuestro desarrollo prescindiremos de esta hipótesis sobre la función A .

4.4. Espacio de Orlicz

Dado un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n, (\Omega, \mu)$ un espacio de medida y una función de Young A el *espacio de Orlicz* $L^A(\Omega)$ se define como el subespacio lineal generado por $\mathcal{L}^A(\Omega)$ es decir,

$$L^A(\Omega) := \langle \mathcal{L}^A(\Omega) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Caracterización de $L^A(\Omega)$

En el lema siguiente daremos una caracterización más amable del espacio de Orlicz que nos será de mayor utilidad.

Lema 4.21. *Bajo las hipótesis anteriores se tiene,*

$$L^A(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \exists k > 0 \text{ tal que } \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\}.$$

Demostración. Llamemos

$$L := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \exists k > 0 \text{ tal que } \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\}.$$

Veamos que L es un espacio vectorial.

- Claramente $0 \in L$.
- Sean $u, v \in L$, es decir, existen $k_1, k_2 > 0$ tales que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) d\mu < \infty, \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{|v|}{k_2}\right) d\mu < \infty.$$

Tomemos $k = k_1 + k_2$. Entonces se tiene

$$\frac{|u(x) + v(x)|}{k} \leq \frac{|u(x)|}{k_1} \frac{k_1}{k} + \frac{|v(x)|}{k_2} \frac{k_2}{k}. \quad (4.3)$$

Sea

$$\lambda = \frac{k_1}{k} \in (0, 1), \quad 1 - \lambda = \frac{k_2}{k}.$$

Integrando (4.3) y usando la convexidad de A , obtenemos

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u+v|}{k}\right) d\mu \leq \lambda \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) d\mu + (1 - \lambda) \int_{\Omega} A\left(\frac{|v|}{k_2}\right) d\mu < \infty.$$

Por lo tanto, $u + v \in L$.

Sea $u \in L$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Sabemos que existe $k_1 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) d\mu < \infty.$$

Tomemos $k = |\lambda| k_1$. Entonces

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|\lambda u(x)|}{|\lambda| k_1}\right) d\mu = \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) d\mu < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\lambda u \in L.$$

Luego, L es un espacio vectorial.

Además, se tiene que $\mathcal{L}^A \subset L$, pues basta tomar para $u \in \mathcal{L}^A$, $k = 1$.

Por lo tanto,

$$\langle \mathcal{L}^A \rangle \subset L.$$

Por otro lado, supongamos que existe $u \in L$ tal que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u \notin \langle \mathcal{L}^A \rangle.$$

Como $u \in L$, existe $k > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty.$$

Luego,

$$\frac{u}{k} \in \mathcal{L}^A.$$

Por ser $\langle \mathcal{L}^A \rangle$ un espacio vectorial, se tiene que

$$k \cdot \frac{u}{k} \in \langle \mathcal{L}^A \rangle,$$

es decir,

$$u \in \langle \mathcal{L}^A \rangle,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$L^A = L = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \exists k > 0 \text{ tal que } \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\}.$$

□

Observación 4.22. Observar que $\mathcal{L}^A \subset L^A$ el primer conjunto admite las funciones que integran al componer con A un reescalamiento 1, mientras que L^A admite a las funciones que al componer A integran con algún reescalamiento.

El modular de Orlicz

Sea A una función de Young y sea (Ω, μ) un espacio de medida. Se define el *modular de Orlicz* asociado a A como el funcional

$$\rho_A(u) := \int_{\Omega} A(|u(x)|) d\mu, \quad u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

El funcional ρ_A verifica las siguientes propiedades:

(i) **No negatividad:**

$$\rho_A(u) \geq 0 \quad \text{para todo } u.$$

(ii) **Convexidad:** para todo $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\rho_A(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda \rho_A(u) + (1 - \lambda)\rho_A(v).$$

(iii) **No homogeneidad:** en general,

$$\rho_A(\alpha u) \neq \alpha \rho_A(u) \quad \text{para } \alpha > 0.$$

Debido a la falta de homogeneidad, el modular ρ_A no define una norma.

Para obtener una norma a partir del modular, se considera el conjunto unitario asociado

$$B := \{u \in L^A(\Omega) : \rho_A(u) \leq 1\},$$

el cual es convexo, balanceado y absorbente. La norma de Luxemburg se define como el funcional de Minkowski de dicho conjunto, es decir,

$$\|u\|_A = \inf\{k > 0 : u \in kB\}.$$

Observando que

$$u \in kB \iff \frac{u}{k} \in B \iff \rho_A\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1,$$

se obtiene la expresión habitual de la norma de Luxemburg

$$\|u\|_A = \inf\left\{k > 0 : \rho_A\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

La presencia del parámetro k en el denominador responde, por lo tanto, a la necesidad de normalizar el modular mediante un reescalamiento, de modo de obtener un funcional homogéneo. En particular, esta construcción garantiza que $\|\cdot\|_A$ sea una norma y que, en el caso particular $A(t) = t^p$, se recupere la norma clásica de $L^p(\Omega)$.

Proposición 4.23. *La aplicación $\|\cdot\|_A$ definida por*

$$\|u\|_A = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

define una norma sobre el espacio de Orlicz $L_A(\Omega)$.

Demostración. Verificamos las propiedades de una norma.

(i) Positividad y definitud. Por definición, $\|u\|_A \geq 0$ para todo $u \in L^A$. Además, si $u = 0$, entonces

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu = 0 \leq 1 \quad \text{para todo } k > 0,$$

y por lo tanto $\|0\|_A = 0$.

Recíprocamente, si $\|u\|_A = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y usando que $A(t) > 0$ para $t > 0$, se concluye que $u = 0$ casi en todo punto.

(ii) Homogeneidad. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. Entonces

$$\|\alpha u\|_A = \inf \left\{ k > 0 : \int_{\Omega} A\left(\frac{|\alpha u|}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Haciendo el cambio $k = |\alpha|\lambda$, se obtiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|\alpha u|}{k}\right) d\mu = \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) d\mu,$$

y por lo tanto

$$\|\alpha u\|_A = |\alpha| \|u\|_A.$$

(iii) Desigualdad triangular. Sean $u, v \in L^A$ y $\varepsilon > 0$. Por definición de la norma, existen $k_1, k_2 > 0$ tales que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) d\mu \leq 1, \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{|v|}{k_2}\right) d\mu \leq 1,$$

con

$$k_1 < \|u\|_A + \varepsilon, \quad k_2 < \|v\|_A + \varepsilon.$$

Sea $k = k_1 + k_2$. Usando la convexidad de A , se tiene

$$A\left(\frac{|u+v|}{k}\right) \leq \frac{k_1}{k} A\left(\frac{|u|}{k_1}\right) + \frac{k_2}{k} A\left(\frac{|v|}{k_2}\right).$$

Integrando en Ω se obtiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u+v|}{k}\right) d\mu \leq \frac{k_1}{k} + \frac{k_2}{k} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\|u+v\|_A \leq k < \|u\|_A + \|v\|_A + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\|u+v\|_A \leq \|u\|_A + \|v\|_A.$$

Hemos probado que $\|\cdot\|_A$ es una norma sobre $L^A(\Omega)$. □

Una vez establecido que $(L^A(\Omega), \|\cdot\|_A)$ es un espacio normado, resulta natural estudiar su completitud. Esta propiedad es fundamental ya que permite aplicar métodos variacionales y argumentos de compacidad.

Dado que la norma de Luxemburg se define a partir del modular de Orlicz, el estudio de la completitud no es inmediato y requiere analizar el comportamiento de sucesiones de Cauchy en términos del modular. En particular, será esencial explotar la convexidad de la función de Young asociada y el uso de resultados clásicos de convergencia en espacios de medida.

El siguiente resultado muestra que el espacio de Orlicz dotado de la norma de Luxemburg es completo y, por lo tanto, constituye un espacio de Banach.

Teorema 4.24. *El espacio $(L^A(\Omega), \|\cdot\|_A)$, es un espacio de Banach con (Ω, Σ, μ) σ -finito.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^A$ una sucesión de Cauchy, de modo que

$$\|(u_n - u_m)\|_A \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty.$$

Necesitamos construir $f \in L^A$ tal que

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como A es una función Young, basta considerar dos casos. Sea

$$x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ : A(x) = 0\}.$$

Entonces $0 \leq x_0 < \infty$, ya que el conjunto entre llaves es relativamente compacto por definición de A .

Por hipótesis existen números $k_{nm} \geq 0$ (con $k_{nm}^{-1} \leq \|u_n - u_m\|$) tales que

$$\int_{\Omega} A(k_{nm}|u_n - u_m|) d\mu \leq 1. \quad (4.4)$$

Observemos primero que

$$C_{nm} = \{\omega : k_{nm}|u_n - u_m|(\omega) > x_0\}$$

es a lo sumo σ -finito respecto de μ . En efecto, si

$$B_k = B_{nm}^k = \{\omega : k_{nm}|u_n - u_m|(\omega) > x_0 + k^{-1}\},$$

entonces $C_{nm} = \bigcup_k B_k$ y $\mu(B_k) < \infty$ para cada k . Esto se debe a que

$$\mu(B_k) \leq \frac{1}{A(x_0 + k^{-1})} \int_{B_k} A(k_{nm}|u_n - u_m|) d\mu \leq 1,$$

por (4.4).

Por lo tanto, cada C_{nm} es σ -finito, y así

$$C = \bigcup_{n,m \geq 1} C_{nm}.$$

En C^c se tiene $k_{nm}|u_n - u_m|(\omega) \leq x_0$, de modo que para todo $\omega \in C^c$,

$$|u_n(\omega) - u_m(\omega)| \rightarrow 0$$

uniformemente. En consecuencia, existe una función medible g_0 en C^c tal que

$$u_n(\omega) \rightarrow g_0(\omega), \quad |g_0| \leq x_0 \text{ en } C^c.$$

Ahora escribimos $\Omega = C \cup C^c$. Entonces $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^A(B, \mu)$ y, en consecuencia, para cada $B \in \Sigma$ con $\mu(B) < \infty$ se cumple

$$\begin{aligned} \mu(B \cap \{|u_n - u_l| \geq \varepsilon\}) &= \mu(B \cap \{A(k_{nl}|u_n - u_l|) \geq A(k_{nl}\varepsilon)\}) \\ &\leq \frac{1}{A(k_{nl}\varepsilon)} \int_B A(k_{nl}|u_n - u_l|) d\mu \leq [A(k_{nl}\varepsilon)]^{-1}, \end{aligned}$$

por (4.4). Como $k_{nl} \rightarrow \infty$ y $\varepsilon > 0$ es fijo, esto muestra que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida sobre cada tal B . Por la σ -finitud, esto implica que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida.

Pero entonces, por un resultado estándar de la teoría de la medida, $u_n \rightarrow u$ en medida. Existe entonces una subsucesión $\{u_{n_i}\}$ tal que $u_{n_i} \rightarrow \tilde{u}$ c.t.p. Sea

$$u := \tilde{u}\chi_C + g_0\chi_{C^c}.$$

Luego $u_{n_i} \rightarrow u$ c.t.p. Pero para $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que es una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_A$, se tiene $\|u_n\| \rightarrow d$ y por lo tanto $\|f_{n_i}\| \rightarrow d$ también. Por la desigualdad de Fatou,

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{d}\right) d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} A\left(\frac{u_{n_i}}{\|f_{n_i}\|}\right) d\mu \leq 1.$$

Así, $u \in L^A$. Además, si j está fijo y $k > 0$ es dado, entonces

$$A(|u_{n_i} - u_{n_j}|k) \rightarrow A(|u - u_{n_j}|k) \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty, \text{ c.t.p.}$$

Si se elige $n_0 \geq 1$ tal que $n_i, n_j \geq n_0$ implique $k_{n_i n_j} \geq k$, entonces

$$\int_{\Omega} A(k|u_{n_i} - u_{n_j}|) d\mu \leq \int_{\Omega} A(k_{n_i n_j}|u_{n_i} - u_{n_j}|) d\mu \leq 1. \quad (4.5)$$

Haciendo $n_j \rightarrow \infty$ y aplicando el lema de Fatou se obtiene $\|u_{n_i} - u\|_A \leq k^{-1}$. Como $k > 0$ es arbitrario, $\|u_{n_i} - u\|_A \rightarrow 0$. Si $\{f_{n_i}\}$ es cualquier subsucesión, entonces existe una subsucesión convergente c.t.p. a u , ya que $u_n \rightarrow u$ en medida. De modo que para toda la sucesión se tiene $\|u_n - u\|_A \rightarrow 0$. Esto demuestra que toda sucesión de Cauchy de $(L^A, \|\cdot\|_A)$ converge a un elemento del espacio. \square

Observación 4.25. Si la medida μ es σ -finita y la función A satisface la condición Δ_2 , entonces $L^A(\Omega)$ es separable. Mientras que el espacio $L^A(\Omega)$ resulta ser reflexivo si y solo si tanto A como su función complementaria \bar{A} satisfacen la condición Δ_2 .

Por ejemplo si tomamos la función de Young $A(t) = e^t - 1$ no satisface la condición Δ_2 . En efecto, si existiera una constante $C > 0$ tal que

$$A(2t) \leq C A(t) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

entonces se tendría

$$e^{2t} - 1 \leq C(e^t - 1).$$

Dividiendo ambos lados por $e^t - 1$ y observando que

$$\frac{e^{2t} - 1}{e^t - 1} = e^t + 1,$$

se obtendría

$$e^t + 1 \leq C \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

lo cual es imposible, ya que $e^t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En conclusión el espacio L^A con A la función anterior no es separable ni reflexivo.

4.5. Espacio modular de Orlicz

Motivación

Sea $\Omega = (0, 1)$ con la medida de Lebesgue. Definimos la función $A : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$A(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^t - 1, & t > 1. \end{cases}$$

Esta función es convexa, continua, creciente, satisface $A(0) = 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t} = 0$$

por lo que es una función de Young. Además, debido a su crecimiento exponencial para $t > 1$, no satisface la condición Δ_2 .

Consideremos la función

$$u(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in (0, 1).$$

Calculamos el modular asociado:

$$\int_0^1 A(|u(x)|) dx = \int_0^1 A(1) dx.$$

Como $A(1) = 1$, se obtiene

$$\int_0^1 A(|u(x)|) dx = 1 < \infty,$$

y por lo tanto

$$u \in L^A(0, 1).$$

Sin embargo, para $\lambda > 1$ se tiene

$$A(\lambda|u(x)|) = A(\lambda) = e^\lambda - 1 \quad \text{para todo } x \in (0, 1),$$

y en consecuencia

$$\int_0^1 A(\lambda|f(x)|) dx = \int_0^1 (e^\lambda - 1) dx = e^\lambda - 1.$$

Dado que este valor crece sin cota cuando $\lambda \rightarrow \infty$, el modular no permanece controlado bajo dilataciones. Vamos a definir $E(\Omega)$ como el subconjunto de $L^A(\Omega)$ formado por aquellas funciones para las cuales el modular asociado es finito para toda dilatación del argumento $\lambda > 0$. Si escribimos $\lambda = \frac{1}{k}$ con $k > 0$ definimos:

$$E(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \forall k > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\}.$$

Por otro lado, podemos considerar otro subconjunto de $L^A(\Omega)$ como el siguiente:

$$B_{L^A} = L^\infty(\Omega) \cap L^A(\Omega) = \{u \in L^A : \|u\|_\infty < \infty\}$$

y considerar

$$E^A(\Omega) := \overline{B_{L^A}(\Omega)}^{\|\cdot\|_A} = \overline{L^\infty(\Omega) \cap L^A(\Omega)}^{\|\cdot\|_A}.$$

Lema 4.26.

$$E^A(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \forall k > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\} = E(\Omega).$$

Demostración. Sea

$$E = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \forall k > 0, \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty \right\}.$$

Tomamos $u \in E$ y construimos una sucesión en B_{L^A} que converge a u en la norma $\|\cdot\|_A$.

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } |u(x)| \leq n, \\ n \operatorname{sign}(u(x)), & \text{si } |u(x)| > n. \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$|u_n(x)| \leq n \quad \forall x \in \Omega,$$

y en particular,

$$\|u_n\|_\infty \leq n < \infty.$$

Además, para todo $k > 0$,

$$\left(\frac{|u_n(x)|}{k}\right) \leq \frac{|u(x)|}{k} \implies A\left(\frac{|u_n(x)|}{k}\right) \leq A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right).$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u_n|}{k}\right) d\mu \leq \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{k}\right) d\mu < \infty.$$

De donde se concluye que $u_n \in L_A$ para todo n , y en consecuencia,

$$u_n \in B_{L^A}.$$

Ahora, si $|u(x)| > n$, se tiene

$$|u_n(x) - u(x)| = |n - |u(x)|| = ||u(x)| - n| = |u(x)| - n.$$

Definimos

$$A_n := \{x \in \Omega : |u(x)| > n\}.$$

En $\Omega \setminus A_n$ se tiene $u_n(x) = u(x)$ y, por lo tanto,

$$|u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, se obtiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u_n - u|}{\varepsilon}\right) d\mu = \int_{\Omega \setminus A_n} A\left(\frac{|u_n - u|}{\varepsilon}\right) d\mu + \int_{A_n} A\left(\frac{|u_n - u|}{\varepsilon}\right) d\mu.$$

Como el integrando es nulo en $\Omega \setminus A_n$, se sigue que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u_n - u|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \int_{A_n} A\left(\frac{|u(x)| - n}{\varepsilon}\right) d\mu.$$

Usando que A es creciente, obtenemos

$$\int_{A_n} A\left(\frac{|u(x)| - n}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \int_{A_n} A\left(\frac{|u(x)|}{\varepsilon}\right) d\mu.$$

Ahora, como $u \in E$, tomando $k = \varepsilon$, se tiene

$$\int_{A_n} A\left(\frac{|u|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq \infty.$$

Queremos ver que este término tiende a 0 al relacionarlo con la norma $\|\cdot\|_A$.

En A_n (esto es, cuando $|u(x)| > n$), se tiene

$$A(|u(x)|) \geq A(n).$$

Por lo tanto,

$$\int_{A_n} A(|u(x)|) d\mu \geq A(n) \mu(A_n).$$

De aquí se deduce que

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{A(n)} \int_{A_n} A(|u(x)|) d\mu < \infty.$$

Como $A(n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, se concluye que

$$\mu(A_n) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u_n - u|}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1$$

Luego

$$\inf \left\{ k : \int_{\Omega} A\left(\frac{|u_n - u|}{k}\right) d\mu \right\} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|u_n - u\|_A \leq \varepsilon$$

Por otro lado si $u \in E^A$, sea K

$$A\left(\frac{|u|}{K}\right) = A\left(\frac{|u - u_n + u_n|}{K}\right) \leq A\left(\frac{|u - u_n| + |u_n|}{K}\right) \leq A\left(\frac{2(|u - u_n| + |u_n|)}{2K}\right)$$

Por convexidad:

$$\leq 2A\left(\frac{|u - u_n|}{2K}\right) + \underbrace{2A\left(\frac{|u_n|}{2K}\right)}_{\in B_{L^A}}$$

Dado ese K , existe ε y n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{K}\right) d\mu \leq 2 \int_{\Omega} A\left(\frac{|u - u_n|}{\varepsilon}\right) d\mu + 2A\left(\frac{C}{K}\right) \cdot \mu(\Omega) \leq 2 \cdot 1 + C < \infty$$

Como K era cualquiera,

$$\forall K \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{K}\right) d\mu < \infty$$

□

Observación 4.27. Notar que lo visto en la motivación de la Sección 4.5 nos muestra que $E^A(\Omega) \subsetneq L^A(\Omega)$.

Observación 4.28. Observar $E^A(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^A(\Omega)$ en consecuencia ser Banach.

Antes de introducir la noción de dualidad en espacios de Orlicz, resulta imprescindible establecer una versión adecuada de la **desigualdad de Hölder**. Dicho resultado constituye la herramienta básica que permite controlar aplicaciones bilineales y, en particular, justificar la identificación del dual del espacio E^A . La desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz garantiza la continuidad de la aplicación bilineal

$$(f, g) \mapsto \int_{\Omega} fg d\mu$$

sobre $E^A(\Omega) \times L^{\bar{A}}(\Omega)$, lo que permite caracterizar al espacio $L^{\bar{A}}(\Omega)$ como el dual natural de $E^A(\Omega)$.

La caracterización del dual de los espacios de Orlicz resulta especialmente relevante en el contexto de los espacios de Orlicz–Sobolev, ya que permite dar sentido a términos de tipo

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx$$

y formular de manera rigurosa nociones de solución débil para ecuaciones elípticas con crecimiento no polinómico.

Estas herramientas permiten extender el marco clásico de los espacios de Sobolev a contextos de crecimiento general, dando lugar a los espacios de Orlicz–Sobolev, que se estudiarán en el capítulo siguiente.

Teorema 4.29 (Desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz). *Sea A una función de Young y sea \bar{A} su función complementaria. Entonces, para todo $u \in L^A(\Omega)$ y todo $v \in L^{\bar{A}}(\Omega)$, se cumple*

$$\int_{\Omega} |uv| d\mu \leq 2 \|u\|_{L^A} \|v\|_{L^{\bar{A}}}.$$

Demostración. Por definición de la norma Luxemburg, se tiene

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{\|u\|_{L^A}}\right) d\mu \leq 1, \quad \int_{\Omega} \bar{A}\left(\frac{|v|}{\|v\|_{L^{\bar{A}}}}\right) d\mu \leq 1.$$

Recordemos que la desigualdad de Young establece que, para todo $s, t \geq 0$,

$$st \leq A(s) + \bar{A}(t).$$

Aplicando esta desigualdad punto a punto con

$$s = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^A}}, \quad t = \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{\bar{A}}}},$$

se obtiene, para casi todo $x \in \Omega$,

$$\frac{|u(x)v(x)|}{\|u\|_{L^A} \|v\|_{L^{\bar{A}}}} \leq A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^A}}\right) + \bar{A}\left(\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^{\bar{A}}}}\right).$$

Integrando sobre Ω , resulta

$$\int_{\Omega} |uv| d\mu \leq \|u\|_{L^A} \|v\|_{L^{\bar{A}}} \left(\int_{\Omega} A\left(\frac{|u|}{\|u\|_{L^A}}\right) d\mu + \int_{\Omega} \bar{A}\left(\frac{|v|}{\|v\|_{L^{\bar{A}}}}\right) d\mu \right).$$

Usando las desigualdades iniciales, se concluye que

$$\int_{\Omega} |uv| d\mu \leq 2 \|u\|_{L^A} \|v\|_{L^{\bar{A}}},$$

□

Teorema 4.30 (Dualidad en espacios de Orlicz). *Sea A una función de Young y sea \bar{A} su función complementaria. Entonces, el dual de $E^A(\Omega)$ se identifica con $L^{\bar{A}}(\Omega)$, en el sentido de que*

$$(E^A(\Omega))^* \simeq L^{\bar{A}}(\Omega).$$

Más precisamente, para todo $v \in L^{\bar{A}}(\Omega)$ la aplicación

$$T_v : E^A(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_v(f) = \int_{\Omega} uv \, d\mu,$$

define un funcional lineal continuo, y todo funcional lineal continuo sobre $E^A(\Omega)$ es de esta forma. Ver[16] capítulo 4.

Capítulo 5

Espacio de Orlicz Sobolev y Orlicz Sobolev fraccionario

En el capítulo anterior se introdujeron y estudiaron los espacios de Orlicz, contruidos a partir de funciones de Young . Dichos espacios constituyen un marco adecuado para describir fenómenos con crecimiento no polinómico y proporcionan herramientas fundamentales para el análisis de problemas no lineales.

El paso natural siguiente consiste en incorporar información diferencial . En efecto, en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales , no basta con controlar la integrabilidad de las funciones, sino que resulta esencial analizar el comportamiento de sus derivadas débiles. Esta necesidad conduce a la introducción de los espacios de Orlicz–Sobolev, que extienden los espacios de Sobolev clásicos reemplazando los espacios L^p por espacios de Orlicz.

En este contexto, los espacios de Orlicz–Sobolev de orden entero se definen exigiendo que una función y sus derivadas débiles hasta un cierto orden pertenezcan a un espacio de Orlicz asociado a una función de Young. Dependiendo de las hipótesis impuestas sobre dicha función, en particular de la validez de la condición Δ_2 , resulta natural distinguir entre los espacios contruidos sobre L^A y aquellos definidos sobre el subespacio E^A , que presenta mejores propiedades .

Por otra parte, numerosos modelos modernos involucran operadores no locales o derivadas de orden no entero. Para abordar este tipo de problemas se introducen los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios, que combinan la noción de integrabilidad de tipo Orlicz con una medida no local de regularidad fraccionaria. Estos espacios generalizan simultáneamente los espacios de Sobolev fraccionarios clásicos y los espacios de Orlicz–Sobolev de orden entero, y constituyen el marco adecuado para el análisis de operadores fraccionarios con crecimiento general.

El objetivo de este capítulo es presentar las definiciones básicas de los espacios de Orlicz-Sobolev y Orlicz-Sobolev fraccionarios, así como estudiar sus propiedades fundamentales.

5.1. Preliminares

Definición 5.1. Supongamos que Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Dado $m \in \mathbb{N}$ y una función de Young A , denotamos los espacios clásicos de Orlicz-Sobolev $W^m(L^A(\Omega))$ y $W^m(E^A(\Omega))$ por

$$W^m(L^A(\Omega)) = \{u \in L^A(\Omega) : D^\alpha u \in L^A(\Omega), \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m\},$$

$$W^m(E^A(\Omega)) = \{u \in E^A(\Omega) : D^\alpha u \in E^A(\Omega), \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m\},$$

donde α es un multiíndice y las derivadas se entienden en sentido débil.

El espacio $W^m(L^A(\Omega))$ es un espacio de Banach cuando se lo dota con la norma

$$\|u\|_{W^m(L^A(\Omega))} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_A$$

La demostración es análoga a la realizada para espacios de Sobolev clásicos. El espacio $W^m(E^A(\Omega))$ por otro lado resultará cerrado y por ende Banach.

Proposición 5.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y sea A una función de Young. Entonces el espacio

$$W^m E^A(\Omega) = \{u \in E^A(\Omega) : D^\alpha u \in E^A(\Omega), \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m\}$$

es un subespacio cerrado de $W^m L^A(\Omega)$.

Demostración. Recordemos que $E^A(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^A(\Omega)$.

Sea $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset W^m E^A(\Omega)$ una sucesión tal que

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{en } W^m L^A(\Omega).$$

Por definición de la norma de $W^m L^A(\Omega)$, para cada α con $|\alpha| \leq m$ se tiene

$$D^\alpha u_j \longrightarrow D^\alpha u \quad \text{en } L^A(\Omega).$$

Dado que, por hipótesis, $D^\alpha u_j \in E^A(\Omega)$ para todo j y que $E^A(\Omega)$ es cerrado en $L^A(\Omega)$, se deduce que

$$D^\alpha u \in E^A(\Omega), \quad \text{para todo } |\alpha| \leq m.$$

En consecuencia, $u \in W^m E^A(\Omega)$, lo que prueba que $W^m E^A(\Omega)$ es cerrado en $W^m L^A(\Omega)$. \square

Debe tenerse en cuenta que $W^m E^A(\Omega)$ coincide con $W^m L^A(\Omega)$ si y solo si A satisface la condición Δ_2 . En particular, $1 < p < \infty$ y $A(t) = t^p$, entonces $W^m L^A(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

Como en el caso de los espacios de Sobolev clásicos, si se quiere trabajar sobre ecuaciones con condiciones de borde Dirichlet es necesario definir $W_0^m L^A(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^m L^A(\Omega)$ es decir con la topología $\sigma(W^m L^A, W^m E^{\bar{A}})$. Una definición análoga se tiene para $W_0^m E^A(\Omega)$.

Muchas propiedades de los espacios de Orlicz–Sobolev se obtienen mediante generalizaciones directas de las demostraciones de las propiedades correspondientes de los espacios de Sobolev clásicos. A continuación resumimos estas propiedades en el siguiente teorema y remitimos consultar [17] capítulo 3 o el artículo de Donaldson y Trudinger [18] para los detalles.

Teorema 5.3 (Propiedades básicas de los espacios de Orlicz–Sobolev).

- (a) $W^m E^A(\Omega)$ es separable.
- (b) Si (A, Ω) y (\bar{A}, Ω) satisfacen Δ_2

$$W^m E^A(\Omega) = W^m L^A(\Omega)$$

y este espacio es reflexivo.

- (c) Todo elemento F del espacio dual $(W^m E^A(\Omega))^*$ viene dado por

$$F(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) v_\alpha(x) dx,$$

para ciertas funciones $v_\alpha \in L_{\bar{A}}(\Omega)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$.

- (d) $C^\infty(\Omega) \cap W^m E^A(\Omega)$ es denso en $W^m E^A(\Omega)$.
- (e) Si Ω satisface la condición del segmento, entonces $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $W^m E^A(\Omega)$.
- (f) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^m E^A(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia,

$$W_0^m L^A(\mathbb{R}^n) = W^m E^A(\mathbb{R}^n).$$

Espacios de Orlicz Sobolev fraccionarios

En el espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ definimos la medida

$$d\nu_n := \frac{dx dy}{|x - y|^n}.$$

Obsérvese que esta es una medida de Borel y que, si $K \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta$ es compacto, entonces $\nu_n(K) < \infty$, donde

$$\Delta := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

denota la diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Consideraremos espacios de Orlicz $L^A(\Omega, d\mu)$, donde $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $d\mu = dx$ es la medida de Lebesgue, o bien $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ y $d\mu = d\nu_n$.

Utilizaremos siguientes notaciones con el fin de alivianar la notación:

$$L^A := L^A(\mathbb{R}^n, dx), \quad L^A(\nu_n) := L^A(\mathbb{R}^{2n}, d\nu_n),$$

$$E^A := E^A(\mathbb{R}^n, dx), \quad E^A(\nu_n) := E^A(\mathbb{R}^{2n}, d\nu_n).$$

Fijado un parámetro fraccionario $s \in (0, 1)$, introducimos el cociente de Hölder de una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$D^s u(x, y) := \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^s}.$$

Entonces $D^s u : \mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.

Los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios se definen por

$$W^s L^A := \left\{ u \in L^A : \iint_{\Omega \times \Omega} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} < \infty \right\}.$$

$$W^s L^A := \{u \in L^A : D^s(u) \in L^A(\nu_n)\}$$

$$W^s E^A := \left\{ u \in E^A : \forall k > 0 \quad \iint_{\Omega \times \Omega} A\left(\frac{|u(x)u(y)|}{k|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} < \infty \right\}.$$

$$W^s E^A := \{u \in E^A : D^s(u) \in E^A(\nu_n)\}$$

La estructura del espacio $W^s L^A(\Omega)$ está determinada por dos contribuciones: la integrabilidad de la función en el espacio de Orlicz $L^A(\Omega)$ y el control de sus incrementos fraccionarios medidos mediante la función de Young A .

La idea fundamental consiste en interpretar el término no local como la imagen de u bajo la aplicación lineal

$$u \mapsto \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^s},$$

la cual toma valores en un espacio de Orlicz definido sobre el producto $\Omega \times \Omega$, dotado de la medida ponderada $|x - y|^{-n} dx dy$.

Además, pueden identificarse isométricamente como subespacios cerrados de $L^A \times L^A(\nu_n)$ y $E^A \times E^A(\nu_n)$, respectivamente, mediante la aplicación

$$u \mapsto (u, D^s u).$$

Esta interpretación permite trasladar propiedades funcionales del espacio de Orlicz subyacente al contexto fraccionario. En particular, bajo hipótesis adecuadas sobre la función de Young A , como la ya mencionada condición Δ_2 , se obtienen resultados estructurales fundamentales tales como completitud, reflexividad y compacidad, que resultan esenciales en el estudio variacional de problemas no locales con crecimiento no estándar.

Dado un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el espacio $W_0^s L^A(\Omega)$ se define como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^s L^A$ con respecto a la topología $\sigma(L^A \times L^A(\nu_n), E^{\bar{A}} \times E^{\bar{A}}(\nu))$.

Este espacio se dota de la norma

$$\|u\|_{W_0^s L^A(\Omega)} := \|u\|_A + \|D^s u\|_{A, d\nu_n}. \quad (1)$$

Por la desigualdad de Poincaré fraccionaria que se demostrará a continuación, este espacio se lo considera con la norma equivalente a la norma inducida de $W^s L^A$ a saber $\|D^s u\|_{A, d\nu_n}$.

En cambio el espacio $W_0^s E^A(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^s E^A(\Omega)$ con la topología heredada de la norma.

Observación 5.4. En el contexto de los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios, la seminorma de Gagliardo se define reemplazando la potencia $|\cdot|^p$ por una función Young A . Más precisamente, para $u \in W^s L^A(\Omega)$ se define

$$[u]_{s,A} := \inf \left\{ k > 0 : \iint_{\Omega \times \Omega} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{k|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} \leq 1 \right\}.$$

Cuando $A = |t|^p$, con $1 < p < \infty$, esta definición coincide con el seminorma de Gagliardo del espacio fraccionario clásico $W^{s,p}(\Omega)$.

Extrayendo el factor k^{-p} fuera de la integral, se obtiene

$$\iint_{\Omega \times \Omega} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{k|x - y|^s}\right)^p \frac{dx dy}{|x - y|^n} = \frac{1}{k^p} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy.$$

Por lo tanto, la condición

$$\iint_{\Omega \times \Omega} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{k|x - y|^s}\right)^p \frac{dx dy}{|x - y|^n} \leq 1$$

es equivalente a

$$k^p \geq \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy.$$

De aquí se deduce que el menor valor admisible de k es

$$k = \left(\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p}.$$

En consecuencia, el seminorma de Gagliardo en este caso coincide con la expresión clásica:

$$[u]_{s,A} = \left(\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p} = [u]_{s,p}.$$

Observación 5.5. Notar que $[u]_{s,A} = \|D^s u\|_{A,d\nu_n}$

5.1.1. Resultado tipo Rellich-Kondrachov

Al igual que en el caso clásico, la convergencia débil en $W^s L^A(\Omega)$ no es suficiente para tratar términos no lineales que dependen de la función u . La falta de control puntual permite la aparición de oscilaciones y concentraciones que no son compatibles con aplicaciones no lineales.

Por esta razón, resulta necesario disponer de resultados de compacidad que permitan mejorar la convergencia débil a convergencia fuerte en espacios funcionales más pequeños.

Una de las propiedades clave que asumimos sobre el dominio Ω es que satisface la llamada propiedad del segmento.

Definición 5.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto y acotado. Decimos que Ω tiene la propiedad del segmento si existe un recubrimiento abierto localmente finito de $\partial\Omega$ con bolas $\{B_i(x_j)\}$ centradas en $x_j \in \partial\Omega$ con radio t , una secuencia correspondiente de vectores unitarios n_j , y un número $t^* \in (0, 1)$ tal que

$$x \in \Omega \cap B_i(x_j) \implies x + tn_j \in \Omega \quad \text{para todo } t \in (0, t^*).$$

Esta condición sobre el dominio Ω indica, en cierto sentido, que el dominio se encuentra localmente de un solo lado de su frontera. Observamos que la propiedad del segmento no implica ninguna regularidad sobre la frontera $\partial\Omega$. A la inversa, que un dominio sea de clase C^1 no implica que satisfaga la propiedad del segmento.

Teorema 5.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado que satisface la propiedad del segmento y sea A una función de Young. Entonces, la inclusión $W_0^s L^A(\Omega) \subset E^A(\Omega)$ es compacta. Es decir, si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_0^s L^A(\Omega)$ está acotada, existe $u \in E^A(\Omega)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \rightarrow u$ en $E^A(\Omega)$ cuando $j \rightarrow \infty$.*

Ver demostración en [4].

El espacio dual

Incluimos a continuación la definición de el espacios dual de $W_0^s(L^{\bar{A}})$ con el único propósito de fijar el marco funcional y completar la caracterización de el espacio de Orlicz-Sobolev fraccionario. No profundizaremos en sus propiedades.

Con el fin de definir el espacio dual, necesitamos introducir la noción de divergencia fraccionaria. Véase [7].

Dado $F \in L^{\bar{A}}(\nu_n)$, la divergencia fraccionaria de F se define como

$$\operatorname{div}^s F(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(y, x) - F(x, y)}{|x - y|^{n+s}} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{F(y, x) - F(x, y)}{|x - y|^{n+s}} dy.$$

En [8] se demuestra que, para $F \in L^{\bar{A}}(\nu_n)$, se tiene $\operatorname{div}^s F \in (W_0^s L^{\bar{A}}(\Omega))^*$ y que vale la siguiente fórmula de integración por partes fraccionaria:

$$\langle \operatorname{div}^s F, u \rangle = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} F D^s u d\nu_n.$$

En consecuencia, definimos los siguientes espacios de distribuciones:

$$W^{-s} L^{\bar{A}}(\Omega) := \left\{ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega) : \phi = f + \operatorname{div}^s F \quad \text{con } f \in L^{\bar{A}}, F \in L^{\bar{A}}(\nu_n) \right\},$$

$$W^{-s} E^{\bar{A}}(\Omega) := \left\{ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega) : \phi = f + \operatorname{div}^s F \quad \text{con } f \in E^{\bar{A}}, F \in E^{\bar{A}}(\nu_n) \right\}.$$

Obsérvese que, dado que $E^{\bar{A}}$ y $E^{\bar{A}}(\nu_n)$ son separables, el espacio $W^{-s} E^{\bar{A}}(\Omega)$ también es separable. Estos espacios se consideran provistos de la norma cociente usual

$$\|\phi\|_{-s, \bar{A}} := \inf \left\{ \|f\|_{\bar{A}} + \|F\|_{\bar{A}, \nu_n} : \phi = f + \operatorname{div}^s F \right\}.$$

En el caso fraccionario, la caracterización del dual obedece a la misma estructura que en el caso local. La función complementaria \bar{A} aparece de manera natural al estimar los funcionales lineales mediante la desigualdad de Hölder en espacios de Orlicz, aplicada ahora al gradiente fraccionario.

5.2. Comportamiento asintótico

Relación con el resultado de Bourgain–Brezis–Mironescu

El resultado clásico de Bourgain–Brezis–Mironescu establece que, para $u \in L^p(\Omega)$ y $1 < p < \infty$, se tiene

$$\lim_{s \uparrow 1} (1-s) \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy = K(n, p) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Este resultado describe el comportamiento asintótico de la energía fraccional evaluada en una función fija y muestra que, en el límite $s \uparrow 1$, dicha energía converge a la energía local clásica del espacio de Sobolev.

Desde el punto de vista variacional, este resultado puede interpretarse como la evaluación puntual del Γ -límite de una familia de funcionales fraccionales.

En el marco de los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios, este resultado debe reformularse debido a la falta de homogeneidad de la función de Young A . En este contexto, la energía fraccionaria se expresa mediante un reescalamiento adecuado que no es multiplicativo.

Siguiendo la idea introducida en [10], se consideran familias de funcionales no locales cuya estructura depende del parámetro fraccionario s a través de una familia de funciones de Young. El resultado principal establece que dichos funcionales convergen, en el sentido de la Γ -convergencia, a la energía local asociada al espacio de Orlicz–Sobolev cuando $s \rightarrow 1^-$, incluso en ausencia de la condición .

En esta sección se demuestra que la familia de funcionales

$$\bar{\mathcal{J}}_s(u) = (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n}$$

Γ -converge, cuando $s \uparrow 1$, a un funcional local del tipo

$$\bar{\mathcal{J}}(u) = \int_{\Omega} A_0(|\nabla u|) dx.$$

donde A_0 resulta ser una función de Young con la siguiente expresión

$$A_0(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{n-1}} A(r|\omega \cdot e_n|) d\mathcal{H}^{n-1}(\omega) \frac{dr}{r}$$

En el caso particular en que la función de Young es $A(t) = t^p$, el funcional $\bar{\mathcal{J}}_s$ coincide con la energía considerada en el resultado de Bourgain–Brezis–Mironescu, mientras que el funcional límite $\bar{\mathcal{J}}$ se reduce, salvo una constante dimensional, a

$$\mathcal{J}(u) = K(N, p) \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Por lo tanto, el resultado de Bourgain–Brezis–Mironescu puede verse como un caso particular del resultado de Γ -convergencia, correspondiente a funciones de Young de crecimiento polinómico.

La Γ -convergencia es una noción de convergencia para familias de funcionales de energía, introducida con el objetivo de describir el comportamiento asintótico de problemas de minimización que dependen de un parámetro. A diferencia de otras nociones de convergencia, la Γ -convergencia no busca la convergencia puntual de los funcionales,

sino la estabilidad de sus minimizadores. Una muestra de ello, se ha desarrollado en el capítulo de comportamiento asintótico para los espacios de Sobolev fraccionarios reinterpretando el resultado tipo Bourgain-Brezis-Mironescu.

Este tipo de resultados proporcionado por la Γ -convergencia da una justificación variacional rigurosa del paso del régimen no local al local y muestra que los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios constituyen una interpolación natural entre los espacios de Orlicz y los espacios de Orlicz–Sobolev locales.

5.2.1. Preliminares

Funciones regularizadas

Como es usual, denotamos por $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ la mollifier estándar con soporte $\text{supp}(\rho) = B_1(0)$ y $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ la aproximación de la identidad. De aquí se sigue que $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una familia de funciones positivas que satisface

$$\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp}(\rho_\varepsilon) = B_\varepsilon(0), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx = 1. \quad (5.1)$$

Dado $u \in L^A(\mathbb{R}^n)$, definimos la función regularizada $u_\varepsilon \in L^A(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como

$$u_\varepsilon(x) = u * \rho_\varepsilon(x). \quad (5.2)$$

La siguiente estimación será de utilidad para nuestros propósitos.

Lema 5.8. *Sea $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ y $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\|u * \rho\|_{C^2} \leq C \rho \|u\|_A,$$

donde C depende únicamente de A , de ρ y de sus derivadas hasta orden 2.

Demostración. Sea $u \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ y $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(u * \rho)(x)| &= |u * \partial^\alpha \rho(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| |\partial^\alpha \rho(x - y)| dy \\ &\leq 2 \|u\|_A \|\partial^\alpha \rho(x - \cdot)\|_{\bar{A}} \leq C_{\rho, \alpha, A} \|u\|_A, \end{aligned}$$

puesto que la norma de Orlicz es invariante por traslaciones, donde $\partial^\alpha \rho$ denota una derivada parcial de orden $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq 2$.

□

Lema 5.9. Sea A una función de Young, $u \in L^A(\mathbb{R}^n)$ y sea ρ_ε como en el Lema 5.8. Definimos

$$u_\varepsilon(x) = u * \rho_\varepsilon(x).$$

Entonces

$$\mathcal{J}_s(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_s(u), \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ y } 0 < s < 1.$$

Demostración. Como A es convexa y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) dy = 1,$$

usando la desigualdad de Jensen se obtiene, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que

$$A\left(\frac{|u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)|}{|h|^s}\right) \leq A\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h-y) - u(x-y)|}{|h|^s} \rho_\varepsilon(y) dy\right)$$

y, nuevamente por Jensen,

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x+h-y) - u(x-y)|}{|h|^s}\right) \rho_\varepsilon(y) dy.$$

Integrando sobre \mathbb{R}^n y usando nuevamente que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) dy = 1$, se obtiene, para todo $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dx}{|h|^n} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x+h-y) - u(x-y)|}{|h|^s}\right) \frac{dx}{|h|^n} \rho_\varepsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini, se obtiene

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x+h-y) - u(x-y)|}{|h|^s}\right) \frac{dx}{|h|^n} \right) \rho_\varepsilon(y) dy.$$

Realizando el cambio de variable $z = x - y$, con $dz = dx$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(z+h) - u(z)|}{|h|^s}\right) \frac{dz}{|h|^n},$$

que no depende de y . Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dx}{|h|^n} \leq \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(z+h) - u(z)|}{|h|^s}\right) \frac{dz}{|h|^n}.$$

Integrando finalmente respecto de $h \in \mathbb{R}^n$ se concluye que

$$\mathcal{J}_s(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_s(u),$$

como se quería probar. □

Lema 5.10. Sea A una función de Young y sea $B \subset C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que existe $C > 0$ para el cual

$$\|u\|_{C^2} \leq C \quad \text{para todo } u \in B.$$

Entonces

$$\mathcal{J}_s \longrightarrow \mathcal{J} \quad \text{uniformemente en } B \quad \text{cuando } s \uparrow 1.$$

Demostración. a) Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, en particular $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Definimos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(t) = u(x + th),$$

resulta que g es absolutamente continua localmente. Se tiene luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para casi todo $h \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, se obtiene

$$u(x + h) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(x + th) \cdot h \, dt, \quad \text{p.c.t. } x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Consideramos ahora

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|h| \leq 1\}} (\dots) \frac{dh}{|h|^n} dx}_I + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|h| > 1\}} (\dots) \frac{dh}{|h|^n} dx}_{II} \end{aligned}$$

Estimación del término I:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|h| \leq 1\}} A\left(\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|h| \leq 1\}} A\left(\int_0^1 \left|\nabla u(x+th) \cdot \frac{h}{|h|}\right| |h|^{1-s} dt\right) \frac{dh}{|h|^n} dx. \end{aligned}$$

Usando la convexidad de A , se obtiene

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\{|h| \leq 1\}} \int_0^1 A\left(\left|\nabla u(x+th) \cdot \frac{h}{|h|}\right| |h|^{1-s}\right) dt \frac{dh}{|h|^n} dx.$$

Llamando $z = x + th$, se tiene $dz = dx$, por lo tanto:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h| \leq 1} \int_0^1 A\left(\left|\nabla u(z) \frac{h}{|h|}\right| \cdot |h|^{1-s}\right) dt \frac{dh}{|h|^n} dz$$

Ahora pasamos a coordenadas polares en la variable h : sea $h = \tau\theta$, con $\tau \in (0, 1]$, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces:

$$dh = \tau^{n-1} d\tau d\sigma(\theta),$$

y la integral se transforma en:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 A(|\nabla u(z) \cdot \theta| z^{1-s}) \frac{d\tau}{\tau} d\sigma(\theta) dz.$$

Llamando $\omega = \tau^{1-s}$, se tiene que $\omega^{\frac{1}{1-s}} = \tau$. Derivando:

$$d\omega = (1-s)\tau^{-s} d\tau = (1-s)\tau^{1-s} \cdot \tau^{-1} d\tau = (1-s)\omega \cdot \tau^{-1} d\tau,$$

de donde se deduce:

$$\frac{d\omega}{(1-s)\omega} = \frac{d\tau}{\tau}.$$

Esto permite reescalar la variable de integración y estudiar el comportamiento asintótico de la integral en términos de ω , lo cual será útil para analizar el límite cuando $s \rightarrow 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 A(|\nabla u(z) \cdot \theta| \omega) \frac{d\omega}{(1-s)\omega} d\sigma(\theta) dz$$

Usando la definición de dirección, podemos reescribir:

$$= \frac{1}{1-s} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 A\left(|\nabla u(z)| \frac{|\nabla u(z) \cdot \omega|}{|\nabla u(z)|}\right) \frac{d\omega}{\omega} d\sigma(\theta)}_{A_0(|\nabla u(z)|)} dz$$

y la integral se convierte en:

$$\frac{1}{1-s} \int_{\mathbb{R}^n} A_0(|\nabla u(z)|) dz.$$

Analicemos que es lo que ocurre cuando $|h| > 1$.

Estimamos el término II

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx.$$

Aplicando la desigualdad triangular y la convexidad de A , se obtiene:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{2|u(x+h)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{2|u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx. \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{2|u(x+h)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{2|u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx \end{aligned}$$

Como $|h| > 1$ se cumple que $\frac{1}{|h|^s} \leq 1$, además $A(\lambda t) \leq \lambda A(t)$ para $\lambda < 1$ luego,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A(2|u(x+h)|) \frac{dh}{|h|^{n+s}} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} A(2|u(x)|) \left(\int_{|h|>1} \frac{1}{|h|^{n+s}} dh \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} A(2|u(x)|) dx \cdot \int_{|h|>1} \frac{1}{|h|^{n+s}} dh \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares con $h = r\theta$, $r \in (1, \infty)$, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, se tiene:

$$dh = r^{n-1} dr d\sigma(\theta), \quad |h| = r$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{|h|>1} \frac{dh}{|h|^{n+s}} &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+s}} dr d\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_1^\infty r^{-1-s} dr d\sigma(\theta) \\ &= n\omega_n \cdot \int_1^\infty r^{-1-s} dr = \frac{n\omega_n}{s} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>1} A\left(\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^s}\right) \frac{dh}{|h|^n} dx \leq \boxed{\frac{n\omega_n}{s} \int_{\mathbb{R}^n} A(2|u(x)|) dx}$$

luego,

$$\boxed{\mathcal{J}_s(u) \leq \mathcal{J}(u) + \frac{(1-s)n\omega_n}{s} \int_{\mathbb{R}^n} A(2|u(x)|) dx}$$

b) Por otro lado, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijo ,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{J}_s(x) = A_0(|\nabla u(x)|)$$

donde

$$\mathcal{J}_s(x) := (1-s) \int_{\mathbb{R}^n} A(|D^s u|) \frac{dy}{|x-y|^n}$$

Veamos por qué vale. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, dividimos la integral:

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} = \underbrace{\int_{|x-y|<1} (\dots) \frac{dy}{|x-y|^n}}_I + \underbrace{\int_{|x-y|\geq 1} (\dots) \frac{dy}{|x-y|^n}}_{II}$$

Observamos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, como A es Lipschitz continua:

$$\left| A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s}\right) - A\left(\frac{|\nabla u(x) \cdot (x-y)|}{|x-y|^s}\right) \right| \leq L \left| \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^s} - \frac{|\nabla u(x) \cdot (x-y)|}{|x-y|^s} \right|$$

$$\leq C|x-y|^{2-s} \quad (*)$$

Donde L es la constante de Lipschitz de A en el intervalo $[0, \|\nabla u\|_\infty]$ y C depende de la norma C^2 de u .

Luego, **el término** I_1 es exactamente:

$$\int_{|x-y|<1} |x-y|^{2-s-n} dy = \frac{n\omega_n}{2-s}$$

Observación 5.11. Si en (*) se integra y multiplican por $(1-s)$ tiende a cero.

Se sigue:

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \int_{|x-y|<1} A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} (1-s) \int_{|x-y|<1} A\left(|\nabla u(x)| \cdot \frac{x-y}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{|x-y|<1} A\left(|\nabla u(x)| \cdot \frac{x-y}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} A(|\nabla u(x)| \cdot \omega |r|^{1-s}) d\sigma(\omega) \frac{dr}{r}$$

Luego, tras una rotación adecuada del sistema de coordenadas podemos suponer que:

$$\nabla u(x) = |\nabla u(x)| e_n, \quad \omega_n = e_n \cdot \omega$$

Obteniéndose,

$$\int_0^1 \int_{S^{n-1}} A(|\nabla u(x)| \cdot \omega |r|^{1-s}) d\sigma(\omega) \frac{dr}{r} = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} A(|\nabla u(x)| |\omega_n| |r|^{1-s}) d\sigma(\omega) \frac{dr}{r}$$

Se concluye

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1-s) I_1 = A_0(|\nabla u|)$$

Ahora analizamos I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|x-y| \geq 1} A\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \leq \int_{|x-y| \geq 1} A\left(\frac{2\|u\|_\infty}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \\ &\leq \int_{|x-y| \geq 1} A\left(\frac{2\|u\|_\infty}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^{n+s}} \end{aligned}$$

recordando que si $\lambda = \frac{1}{|x-y|^s}$, $0 < \lambda < 1$ luego $A(\lambda u) \leq \lambda A(u)$.

Asi

$$\int_{|x-y| > 1} A\left(\frac{2\|u\|_\infty}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n} \leq A(2\|u\|_\infty) \cdot \int_1^\infty \frac{1}{r^{1+s}} dr = \frac{n\omega_n}{s} A(2\|u\|_\infty)$$

Con lo cual

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1-s)I_2 = 0$$

Con el fin de probar

$$\lim_{s \uparrow 1} \mathcal{J}_s(u) = \mathcal{J}(u)$$

vamos en búsqueda de un mayorante integrable para \mathcal{J}_s .

La demostración del punto b) nos induce a tomar

$$\left| A(D^s u) - A\left(\nabla u(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^s}\right) \right| \leq C|x-y|^{2-s}$$

con $C = C(\|u\|_{C^2})$.

Asumimos sin pérdida de generalidad que $\text{supp}(u) \subset B_R(0)$ con $R > 1$.

Cuando $|x| < 2R$, probamos

$$|\mathcal{J}_s(u)| \leq n\omega_n A(\|\nabla u\|_\infty) + \frac{1-s}{s} n\omega_n A(2\|u\|_\infty)$$

Cuando $|x| > 2R$, se tiene $u = 0$, entonces

$$\mathcal{J}_s(x) = (1-s) \int_{B_R(0)} A\left(\frac{|u(y)|}{|x-y|^s}\right) \frac{dy}{|x-y|^n}$$

Como

$$|x-y| \geq |x| - R > \frac{1}{2}|x|$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_s(x)| &\leq (1-s) \int_{B_R(0)} A\left(\frac{|u(y)|2^s}{|x|^s}\right) \frac{dy}{|x|^n} \leq \frac{2^n}{|x|^{n+s}} \int_{B_R(0)} A\left(\frac{|u(y)|2^s}{|x|^s}\right) dy \\ &\leq \frac{2^n}{|x|^{n+\frac{1}{2}}} \int_{B_R(0)} A(|u(y)|2^s) dy < \infty \quad \text{si } u \in C_c^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$$|\mathcal{J}_s(x)| \leq C_1 \left(\chi_{B_R(0)}(x) + \frac{1}{|x|^{n+\frac{1}{2}}} \chi_{B_R^c(0)}(x) \right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Donde $C_1 > 0$ depende de n y u , pero es independiente de s .

Por el teorema de convergencia dominada, sigue el resultado. □

Observación 5.12. Sea $\{u_k\}_k \subset C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\forall k, \quad \|u_k\| < C, \text{ y } u_k \rightarrow u \text{ en } C^2(\mathbb{R}^n), \quad S_k \rightarrow 1$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{S_k}(u_k) = \mathcal{J}(u)$$

por convergencia uniforme.

5.2.2. Resultado tipo Bourgain-Brezis-Mironescu $s \uparrow 1^-$

Teorema 5.13. *Sea $u \in E^A(\mathbb{R}^n)$ y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E^A(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } E^A(\mathbb{R}^n)$$

Entonces, para toda sucesión (s_k) tal que $s_k \rightarrow 1$, se tiene

$$\mathcal{J}(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{s_k}(u_k)$$

Demostración. Sea $u \in E^A(\mathbb{R}^n)$ y $(u_k)_k \subset E^A(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } E^A(\mathbb{R}^n)$$

y sea $\varepsilon > 0$ fijo. Para cada k se considera la función regularizada $u_{k,\varepsilon}$. Por el Lema 5.9

$$\mathcal{J}_{S_k}(u_{k,\varepsilon}) \leq \mathcal{J}_{S_k}(u_k)$$

Por el Lema 5.8

$$\|u_{k,\varepsilon}\|_{C^2} = \|u_k * \rho_\varepsilon\|_{C^2} \leq C_\varepsilon \|u_k\|_{L^A(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_\varepsilon \quad \forall k$$

Donde \tilde{C}_ε es independiente de k porque $\{u_k\}$ es convergente.

Usando el Lema 5.10 para ε fijo, obtenemos:

$$\mathcal{J}(u_\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{S_k}(u_{k,\varepsilon}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{S_k}(u_k)$$

$$\mathcal{J}(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{S_k}(u_k) \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0$$

□

Corolario 5.14.

$$\Gamma\text{-}\lim_{s \uparrow 1} \bar{\mathcal{J}}_s = \bar{\mathcal{J}}$$

donde $\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}_s : E^A(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ están definidos como

$$\bar{\mathcal{J}}_s(u) = \begin{cases} \mathcal{J}_s(u) & \text{si } u \in W_0^s E^A(\Omega) \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\bar{\mathcal{J}}(u) = \begin{cases} \mathcal{J}(u) & \text{si } u \in W_0^1 E^{A_0}(\Omega) \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $s \in (0, 1]$.

Demostración. Se probó en el Teorema 5.13

$$\mathcal{J}(u) \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{s_k}(u_k)$$

Falta ver que para todo $u \in E^A(\mathbb{R}^n)$ existe $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset E^A(\mathbb{R}^n)$ que converge a u tal que

$$\limsup \bar{\mathcal{J}}_{s_k}(u_k) \leq \bar{\mathcal{J}}(u)$$

Dado $u \in E^A(\mathbb{R}^n)$, construimos $\{u_k\} \subset E^A(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma:

Sea $\varphi_k \in C_c^\infty$ con $\varphi_k \geq 0$, $\text{supp}(\varphi_k) \subset B_{\frac{1}{k}}(0)$, y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = 1$$

Definimos

$$u_k := u * \varphi_k \in E^A(\mathbb{R}^n)$$

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en} \quad E^A(\mathbb{R}^n)$$

Sabemos que

$$\bar{\mathcal{J}}_s(\varphi_k) \rightarrow \bar{\mathcal{J}}(\varphi_k) \quad \text{cuando} \quad s \rightarrow \infty$$

Para cada k , elegimos S_k tal que $S_k < S_{k+1}$ y

$$|\bar{\mathcal{J}}_{S_k}(\varphi_k) - \bar{\mathcal{J}}(\varphi_k)| < \frac{1}{k}$$

Entonces

$$\limsup_k \bar{\mathcal{J}}_{S_k}(u_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{J}}(u_k) = \bar{\mathcal{J}}(u)$$

□

Observación 5.15. En el marco de los espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios, el resultado de Maz’ya–Shaposhnikova sobre el límite $s \rightarrow 0^+$ no se extiende de manera general si la función de Young A no satisface la condición Δ_2 .

Sin esta condición, el funcional fraccionario puede presentar comportamientos patológicos y el límite no coincide con el funcional . Por lo tanto, la validez del resultado en espacios de Orlicz–Sobolev fraccionarios depende esencialmente de la condición Δ_2 . Ver [19].

5.2.3. Desigualdad de Poincaré fraccionaria

A continuación estableceremos una desigualdad de tipo Poincaré. Antes de abordar la demostración, introduciremos unos resultados previos que permitan simplificar el argumento.

Teorema 5.16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, y sea A una función de Young. Entonces existe una constante $c > 0$, que depende de n y de Ω , tal que

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{c}\right) dx \leq \int_{\Omega} A(|\nabla u(x)|) dx, \quad (1)$$

para todo $u \in W_0^{1,A}(\Omega)$.

Demostración. Como $W_0^{1,A}(\Omega)$ es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ respecto de la norma de $W^{1,A}(\Omega)$, basta probar (1) para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y luego concluir por densidad.

Dado que Ω es acotado, existe un cubo

$$Q := (a, b) \times Q' \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{tal que} \quad \Omega \subset Q.$$

Fijamos $x = (x_1, x') \in \Omega$. Como u tiene soporte compacto en Ω , extendemos u por cero fuera de Ω . Entonces, para casi todo $x \in \Omega$ se cumple

$$u(x_1, x') = \int_a^{x_1} \partial_1 u(t, x') dt,$$

y por lo tanto

$$|u(x_1, x')| \leq \int_a^b |\partial_1 u(t, x')| dt \leq \int_a^b |\nabla u(t, x')| dt.$$

Dividiendo por $(b - a)$ y usando que A es convexa y creciente en $[0, \infty)$, aplicamos Jensen con respecto a la medida de probabilidad $d\mu(t) = \frac{1}{b-a} dt$ sobre (a, b) :

$$A\left(\frac{|u(x_1, x')|}{b-a}\right) \leq A\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |\nabla u(t, x')| dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b A(|\nabla u(t, x')|) dt.$$

Integramos en $x = (x_1, x') \in \Omega$ y aplicamos Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{b-a}\right) dx &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{b-a} \int_a^b A(|\nabla u(t, x')|) dt dx \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} A(|\nabla u(t, x')|) dx_1 dx' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u(x)|) dx = \int_{\Omega} A(|\nabla u(x)|) dx, \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $\nabla u = 0$ fuera de Ω por la extensión por cero.

Por consiguiente (1) vale con $c = b - a$, y como $b - a$ depende sólo de Ω , se obtiene el resultado para toda $u \in C_0^\infty(\Omega)$. El paso al límite para $u \in W_0^{1,A}(\Omega)$ se obtiene por densidad. \square

Teorema 5.17. *Sea C_0 la constante de óptima de la desigualdad de Poincaré para A_0 función de Young del Teorema BBM. Entonces, dado un $\delta > 0$ existe un $s_0 \in (0, 1)$ tal que*

$$\int_{\Omega} A_0\left(\frac{|u(x)|}{C_0 + \delta}\right) dx \leq (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} \quad (2)$$

para todo $s_0 \leq s < 1$ y toda función $u \in W^s(E^A(\Omega))$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existen $s_k \in (0, 1)$ con $s_k \uparrow 1$ y una sucesión $u_k \in W_0^{s_k}(E^A(\Omega))$ que no satisface (2). En particular, podemos elegir u_k de modo que

$$\int_{\Omega} A_0(|u_k(x)|) dx = 1, \quad \text{y} \quad (1 - s_k) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x - y|^{s_k}}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} \leq \frac{1}{C_0 + \delta}. \quad (3)$$

Por el Teorema de Bourgain-Brezis-Mironescu, y utilizando que la sucesión es acotada se obtiene $u \in W_0^{1, A_0}$ tal que $u_k \rightarrow u$ en E^{A_0} .

Por semicontinuidad inferior del modular de BBM

$$\int_{\Omega} A_0(|\nabla u|) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - s_k) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{|x - y|^{s_k}}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n},$$

Luego, pasando al limite

$$\int_{\Omega} A_0\left(\frac{|u(x)|}{C_0 + \delta}\right) dx \geq \int_{\Omega} A_0(|\nabla u|) dx$$

lo que contradice la optimalidad de la constante c_0 en la desigualdad de Poincaré asociado a A_0 . □

Observación 5.18. Observar que siempre vale $A_0(t) \leq C_1 A(t) \quad \forall t \geq 0$ con $c_1 > 0$ en cambio para que A_0 resulte equivalente a A es necesario que A satisfaga la condición Δ_2 y en ese caso se tiene una desigualdad como la del Teorema 5.17 donde solo se utiliza A ver [9].

Corolario 5.19. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea A_0 la función de Young del Teorema BBM. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende solo de Ω y A_0 , tal que*

$$\int_{\Omega} A_0\left(\frac{|u(x)|}{C}\right) dx \leq (1 - s) \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}\right) \frac{dx dy}{|x - y|^n} \quad (4)$$

para todo $0 < s < 1$ y toda función $u \in L^A(\Omega)$.

Demostración. Sea $\delta > 0$ fijo y sean $C\delta > 0$ y $s_0 \in (0, 1)$ las constantes provistas por el Teorema 5.17. Entonces la desigualdad (4) vale para todo $s \in [s_0, 1)$ con $C = C_\delta$.

Resta probar la desigualdad (4) para $0 < s < s_0$. Sea $D := \text{diam}(\Omega)$. Para $x, y \in \Omega$ se tiene $|x - y| \leq D$ y, como $s < s_0$,

$$|x - y|^{-s} = |x - y|^{-s_0} |x - y|^{s_0-s} \leq D^{s_0-s} |x - y|^{-s_0}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \leq D^{s_0-s} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s_0}}.$$

Como A es creciente,

$$A\left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s}\right) \leq A\left(D^{s_0-s} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s_0}}\right).$$

Integrando y usando que $(1 - s) \geq (1 - s_0)$ se obtiene una constante $c = c(\Omega, A) > 0$ tal que

$$(1 - s)\Phi_{s,A}(u) \geq c(1 - s_0)\Phi_{s_0,A}(u).$$

Aplicando el Teorema 5.16 con $s = s_0$ concluimos

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{C_\delta}\right) dx \leq (1 - s_0)\Phi_{s_0,A}(u) \leq \frac{1}{c}(1 - s)\Phi_{s,A}(u).$$

Absorbiendo $\frac{1}{c}$ en la constante, obtenemos la desigualdad (4) para todo $0 < s < s_0$. En consecuencia, existe $C > 0$ tal que (4) vale para todo $0 < s < 1$. \square

Bibliografía

- [1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2021. MR 2759829.
- [2] Sandra Martínez – Noemi Wolanski *A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces* Advances in Mathematics, Vol. 218, N^o 6 (2008), 1914–1971
- [3] A. Alberico, A. Cianchi, L. Pick, and L. Slavíková, *Fractional Orlicz–Sobolev embeddings*, J. Math. Pures Appl. (9), 149:216–253, 2021.
- [4] J. Fernández Bonder and J. F. Spedaletti, *Ljusternik–Schnirelmann eigenvalues for the fractional m -Laplacian without the condition*, arXiv preprint, 2024.
- [5] C. Chaker, M. Kim, *Regularity estimates for fractional orthotropic p -Laplacians of mixed order*, Adv. Nonlinear Anal, 11 (1) (2022) 1307-1331.
- [6] C. Chaker, M. Kim, M. Weidner, *The concentration compactness for the nonlocal anisotropic p -Laplacian of mixed order*, Nonlinear Anal, 232 (2023) 113254.
- [7] Julián Fernández Bonder, Antonella Ritorto, and Ariel Martín Salort. *H -convergence result for nonlocal elliptic-type problems via Tartar’s method* SIAM J. Math. Anal. 49 (2017), no. 4
- [8] Julián Fernández Bonder, Mayte Pérez-Llanos, and Ariel M. Salort. *A H^∞ -order infinity Laplacian obtained as limit of Orlicz fractional Laplacians* Rev. Mat. Complut. 35 (2022), no. 2, 447–483
- [9] J. Fernández Bonder and A. Salort, *Fractional order Orlicz–Sobolev spaces*, J. Funct. Anal., 277(2):333–367, 2019.
- [10] I. Ceresa Dussel, J. Fernández Bonder, and A. Salort, *T -convergence of energy functionals in fractional Orlicz spaces beyond the condition*, Preprint, 2024. Available at <https://arxiv.org/abs/2401.00000>.

- [11] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., 136(5):521–573, 2012.
- [12] V. Mazya and T. Shaposhnikova. *On the BBM, theorem concerning limiting embedding on fractional Sobolev spaces*, J.Func:Anal.,195(2):230-238,2002.
- [13] A. Alberico, A. Cianchi, L. Pick and L.Slavikova. *On the limit as $s \downarrow 0^+$ of fractional Orlicz-Sobolev spaces*,J. Fourier Anal. Appl.,26(6):Paper N° 80,19, 2020.
- [14] M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
- [15] B. Dyda, *A Fractional order Hardy Inequality*, Illinois Journal of Mathematics, Vol 48, N°2:575-588,2004
- [16] M. M. Rao, Z. D. Ren *Theory of Orlicz Spaces* Marcel Dekker, 1991.
- [17] Adams, Robert A. and Fournier, John J. F. *Sobolev Spaces*, Second edition,Academic Press, 2003.
- [18] Donaldson, T. K. and Trudinger, N. S. *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, Journal of Functional Analysis,volume 8, 1975.
- [19] A. Alberico and A. Cianchi and L. Pick and L. Slavíková, *On the limit as $s \rightarrow 0^+$ of fractional Orlicz Sobolev spaces* Journal of Fourier Analysis and Applications,Vol 26, 2020.