



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Detección de círculos vía persistencia homológica

Octavio Pechin Castagnino

Director: Francisco J. Gozzi

Codirector: Pablo E. Riera

Fecha de Presentación: 30 de marzo de 2026

Introducción

La creciente capacidad de producir y almacenar cantidades masivas de información motiva el desarrollo de técnicas que nos permitan comprender conjuntos de datos cada vez más grandes y complejos. Es común, por ejemplo, tratar con datos en dimensión muy alta que incluyen ruido o información que no es relevante para el problema a resolver. Esto puede dificultar la comprensión y visualización del dato y además sugiere la necesidad de extraer una señal o parte útil del mismo. También es posible que nuestros datos vengan representados en un sistema de coordenadas carente de un significado intrínseco, lo cual nos lleva a querer estudiar propiedades y nociones de similitud que no dependan de la elección de una métrica.

El *análisis topológico de datos* (o TDA por sus siglas en inglés) refiere al abordaje de estas temáticas desde la topología y la geometría para desarrollar métodos robustos de reducción de dimensionalidad. En este trabajo nos enfocamos en una de las construcciones más utilizadas en el área: la *homología persistente*, presentada originalmente en [1] por Edelsbrunner et al. en 2002. Se trata de una codificación de la evolución de propiedades topológicas presentes en una filtración de espacios asociados a un conjunto de datos bajo distintas escalas.

Lo estándar es pensar al conjunto de datos como una nube de puntos en un espacio euclídeo n -dimensional con la noción usual de distancia, pero se pueden considerar diferentes métricas y construir diversas filtraciones, lo cual puede dar lugar a distintas versiones de esta “descripción topológica” de los datos.

La homología es un concepto de la topología algebraica que ayuda a entender y distinguir los espacios topológicos asociándoles una familia de invariantes que en algunos contextos reflejan información geométrica de dicho espacio como la cantidad de componentes conexas y la presencia de loops, agujeros y sus análogos k -dimensionales.

0. INTRODUCCIÓN

Lo que ocurre es que la homología de un objeto varía en función de la escala en que lo observamos, y no siempre hay una evidente mejor elección de escala dado que puede depender de la naturaleza misma del problema. Es por eso que se opta por estudiar la evolución de estas *features* topológicas e identificar aquellas más persistentes a lo largo de una familia de escalas.

Los objetos que asociamos a los datos y a los que calculamos su homología se llaman complejos simpliciales y son muy convenientes en la práctica por su estructura puramente combinatoria. Algunos de los más utilizados y a considerar en este trabajo son los complejos de Vietoris-Rips y de Čech.

Una de las propiedades más importantes de la homología persistente es su estabilidad frente a pequeñas perturbaciones en los datos que fue demostrada en [2]. Esta la hace una herramienta robusta ante el ruido que ya ha sido utilizada en una gran diversidad de aplicaciones en áreas como la biología, astrofísica, procesamiento de imágenes, e incluso ámbitos en que los datos no tienen necesariamente una naturaleza geométrica como la medicina, ciencias sociales y finanzas, entre otros.

En los primeros dos capítulos de esta tesis vamos a desarrollar los fundamentos teóricos de la homología simplicial y la persistencia homológica dando algunos resultados esenciales. Luego presentamos una aplicación definiendo un problema de clasificación con datos sintéticos y realizando una serie de experimentos con el objetivo de validar el uso de estas herramientas.

Índice

Introducción	3
1. Homología Simplicial	6
1.1. Complejos Simpliciales	6
1.1.1. Aproximaciones simpliciales	13
1.2. Homología	18
1.2.1. Homología relativa	32
1.2.2. Cohomología	37
1.3. Ejemplos y filtraciones	40
2. Persistencia	46
2.1. Módulos de persistencia	46
2.2. Diagramas de persistencia	52
2.3. Vectorizaciones de diagramas	57
3. Aplicación: detección de círculos	65
3.1. Metodología	65
3.1.1. Datasets	66
3.1.2. Procesamiento topológico	67
3.1.3. Random Forest	69
3.1.4. Métricas de evaluación	71
3.2. Experimentos	73
3.3. Resultados	78
3.4. Discusión de los experimentos	85
4. Conclusiones	86
Apéndice Topológico	88
Bibliografía	91

1

Homología Simplicial

Comenzamos desarrollando los fundamentos teóricos de la homología simplicial. Primero presentamos la clase de espacios topológicos triangulables y demostramos un teorema de aproximación simplicial siguiendo las referencias [5] y [3]. Luego definimos la homología de un complejo simplicial con coeficientes en un cuerpo dando ejemplos y algunos resultados siguiendo [4] y [6]. Concluimos el capítulo con ejemplos de complejos que serán relevantes en esta tesis.

1.1. Complejos Simpliciales

Comenzamos recordando que la cápsula convexa de $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de finitos puntos en A :

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \mid a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

Una colección finita de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^d$ es afínmente independiente si tener escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = 0$$

y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ implica que debe ser $\lambda_i = 0$ para todo i , o equivalentemente, cuando $\{x_0, \dots, x_k\}$ no está incluido en una variedad lineal de dimensión

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

menor a k . En caso contrario decimos que $\{x_0, \dots, x_k\}$ es afínmente dependiente. Usamos $x_0x_1 \dots x_k$ en lugar de $\text{Conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_k\})$ para simplificar la notación.

Definición 1.1.1 Para $k \geq 0$ llamamos k -símplice o símplice de dimensión k a la cápsula convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes de \mathbb{R}^d .

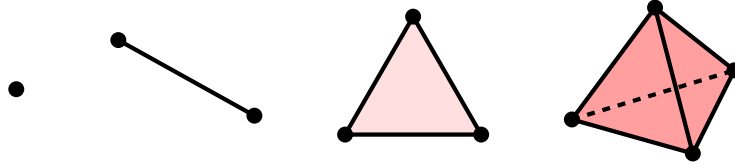


Figura 1.1: Un 0-símplice es un único punto, un 1-símplice un segmento, un 2-símplice un triángulo, un 3-símplice un tetraedro y un k -símplice su análogo k dimensional.

Si $\sigma = x_0x_1 \dots x_k$ es un k -símplice, todo elemento $w \in \sigma$ se escribe de manera única como combinación convexa de los x_i . En efecto, si fuese

$$w = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i$$

para ciertos $\lambda_i, \alpha_i \geq 0$ con $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, se sigue que

$$\sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha_i) x_i = 0$$

y $\sum_{i=0}^k (\lambda_i - \alpha_i) = 0$, lo cual por independencia afín de los x_i implica $\lambda_i = \alpha_i$ para todo i . A los λ_i en la escritura de w los llamamos coordenadas baricéntricas de w en σ .

Con esto cada x_i se escribe de forma única con coordenadas triviales $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ para $j \neq i$. En cambio si $w \in \sigma \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ debe ser $0 < \lambda_j < 1$ para algún j y se tiene que

$$w = \lambda_j x_j + (1 - \lambda_j) x,$$

donde $x = \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_j} x_i \in \sigma$. De esto se deduce que los elementos x_0, \dots, x_k son caracterizados como los únicos en σ que no son interiores a un segmento incluido en σ y por lo tanto no existe otra colección y_0, \dots, y_k afínmente independiente tal que $\sigma = y_0 \dots y_k$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Definición 1.1.2 Dado un k -símplice $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$, llamamos vértices de σ a los elementos v_0, \dots, v_k y decimos que σ está generado por sus vértices. Notamos $V(\sigma)$ al conjunto $\{v_0, \dots, v_k\}$.

Definición 1.1.3 Para $0 \leq j \leq k$, las j -caras de un k -símplice σ son los j -símplices τ dados por subconjuntos de vértices de σ , o sea $\emptyset \neq V(\tau) \subseteq V(\sigma)$ y $\#V(\tau) = j + 1$. Se dicen caras propias si $j < k$ y caras inmediatas si $j = k - 1$. Notamos $\tau \subseteq \sigma$ cuando τ es cara de σ , $\tau \subset \sigma$ cuando es cara propia y $\tau \prec \sigma$ cuando es cara inmediata.

Definición 1.1.4 El borde simplicial $\partial\sigma$ de un símplice σ es la unión de sus caras inmediatas y el interior $\sigma^\circ = \sigma \setminus \partial\sigma$ es la colección de combinaciones afines en las que $\lambda_i > 0$ para toda coordenada baricéntrica λ_i .

Un k -símplice σ es compacto y convexo, y por lo tanto se tienen los siguientes homeomorfismos:

$$\sigma \cong \overline{B^k}, \quad \sigma^\circ \cong B^k, \quad \text{y} \quad \partial\sigma \cong S^{k-1},$$

donde B^k y S^{k-1} denotan la bola k dimensional y la esfera $k - 1$ dimensional respectivamente.

Definición 1.1.5 Un complejo simplicial geométrico K es una colección de símplices en \mathbb{R}^d que satisface:

1. Si $\sigma \in K$ y τ es cara de σ , entonces $\tau \in K$.
2. Si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es cara tanto de σ como de τ .

La dimensión de un complejo simplicial K es la dimensión máxima de sus símplices y una subcolección $L \subseteq K$ es un subcomplejo de K si es también un complejo simplicial.

Observación 1.1.6 Cualquier símplice σ junto con todas sus caras es en sí mismo un complejo simplicial.

Definición 1.1.7 Para $l \geq 0$ llamamos l -esqueleto de un complejo simplicial K al subcomplejo formado por los símplices de K de dimensión a lo sumo l y lo notamos $K_{(l)}$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

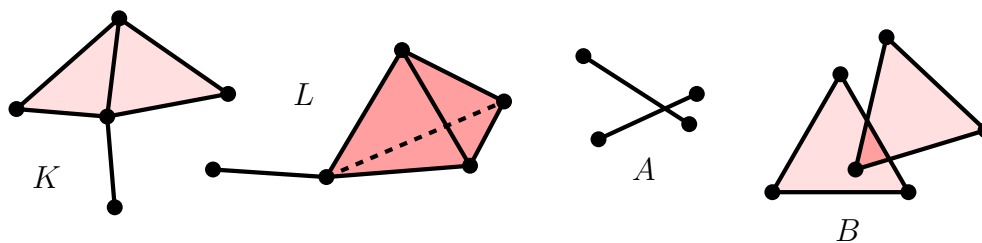


Figura 1.2: K y L son complejos simpliciales; A y B son conjuntos de símlices pero no son complejos.

Definición 1.1.8 El espacio asociado $|K|$ de un complejo simplicial geométrico K es la unión de sus símlices en \mathbb{R}^d :

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma,$$

junto con la topología en la que $A \subseteq |K|$ es cerrado si y sólo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ para todo $\sigma \in K$.

Cuando K es finito la topología de $|K|$ coincide con la que hereda como subespacio de \mathbb{R}^d . Vamos a asumir implícitamente a nuestros complejos finitos de aquí en adelante.

Decimos que un complejo K es una triangulación de $|K|$ y en general que un espacio topológico es triangulable cuando es homeomorfo al espacio asociado de un complejo simplicial. Es un importante resultado que toda variedad diferenciable es triangulable y que es compacta si y sólo si es triangulable por un complejo simplicial finito.

Dos símlices de la misma dimensión son homeomorfos vía una transformación afín que manda los vértices de uno en los del otro preservando las combinaciones convexas. Esto da lugar a una noción de isomorfismo entre complejos simpliciales y resulta que podemos definir estos objetos desde el álgebra dejando de lado la ocurrencia en un espacio euclídeo.

Definición 1.1.9 Un complejo simplicial abstracto \tilde{K} es una familia de subconjuntos de un conjunto finito dado $V(\tilde{K})$ que es cerrada bajo tomar subconjunto, es decir tal que si $\sigma \in \tilde{K}$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in \tilde{K}$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

En este caso llamamos vértices de \tilde{K} a los elementos de $V(\tilde{K})$ y k -símplices (abstractos) a los conjuntos $\sigma \in \tilde{K}$ con $\#\sigma = k+1$. Las j -caras de un símplex son todos sus subconjuntos de $j+1$ elementos y la dimensión de \tilde{K} es como antes la dimensión máxima de sus símplexes.

En lo que sigue vamos a precisar en qué sentido son equivalentes las dos versiones presentadas de un complejo simplicial.

Definición 1.1.10 Un complejo simplicial geométrico K en \mathbb{R}^d se dice una realización geométrica del complejo simplicial abstracto \tilde{K} si existe una función inyectiva $\varphi : V(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in \tilde{K}$ si y sólo si $\varphi(v_0)\varphi(v_1)\dots\varphi(v_k)$ es un k -símplex en K .

Es trivial que todo complejo simplicial geométrico induce uno abstracto (basta con listar los conjuntos de vértices que generan cada símplex) y recíprocamente se tiene que todo complejo abstracto admite una realización geométrica. El motivo es que siempre podemos ubicar los finitos vértices del complejo en un espacio de dimensión lo suficientemente alta para que los símplexes que generan se intersequen adecuadamente según la definición 1.1.5.

Una forma sencilla de dar con una realización geométrica se basa en la observación 1.1.6. Concretamente, todo complejo \tilde{K} de n vértices es a su vez un subcomplejo del complejo dado por $\mathcal{P}(V(\tilde{K}))$. Entonces alcanza con asignar los vértices de \tilde{K} a cualquier conjunto afínmente independiente de \mathbb{R}^d con $d \geq n - 1$. Cuando se elige como tal conjunto a los vectores canónicos $\{e_i\}_{i \in [n]} \subset \mathbb{R}^n$ le decimos realización canónica.

Sin embargo en la práctica puede ser costoso trabajar con tantas dimensiones como vértices del complejo a realizar. El siguiente resultado muestra que necesitamos a lo sumo una cantidad de dimensiones del orden de la dimensión del complejo.

Teorema 1.1.11 *Un complejo simplicial abstracto de dimensión k admite una realización geométrica en \mathbb{R}^{2k+1} .*

Demostración. La idea es mapear los vértices de \tilde{K} en

$$M_d = \{(t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

con $d = 2k + 1$, conocida como la curva de momentos.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

La propiedad clave de esta curva es que cualquier hiperplano de \mathbb{R}^d la interseca en a lo sumo d puntos. En efecto, si H es el hiperplano dado por la ecuación $\sum_{i=1}^d h_i x_i - h_{d+1} = 0$, entonces $x \in M_d \cap H$ si y sólo si $\sum_{i=1}^d h_i t^i - h_{d+1} = 0$ para cierto $t \geq 0$. Luego t es raíz de un polinomio de grado d , que por el teorema fundamental del álgebra tiene a lo sumo d raíces reales. Esto nos dice que cualquier elección de $d+1$ puntos sobre la curva resulta un conjunto afínmente independiente.

Sea $\varphi : V(\tilde{K}) \rightarrow M_d$ inyectiva. Afirmamos que

$$K = \{\varphi(v_0) \dots \varphi(v_k) \mid \{v_0, \dots, v_k\} \in \tilde{K}\}$$

es realización geométrica de \tilde{K} . Por lo anterior y por ser \tilde{K} un complejo abstracto se tiene que K es una colección de símlices que verifica la primera condición de la definición 1.1.5. Para ver que también cumple con la segunda notamos que dos símlices $\tau, \tau' \in K$ tienen a lo sumo un total de $n+1 \leq 2k+2 = d+1$ vértices, que por ser a.i. generan un n -símplice del cual τ y τ' son caras. Se sigue que $\tau \cap \tau'$ es (de no ser vacío) también cara de dicho n -símplice, y por lo tanto cara de τ y de τ' . \square

Ejemplo 1.1.12 *i)* El complejo simplicial abstracto

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

describe un 2-símplice con todas sus caras y el espacio asociado a cualquiera de sus realizaciones geométricas es homeomorfo al disco $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.

ii) Los grafos simples son complejos simpliciales abstractos de dimensión 1 y sólo aquellos conocidos como grafos planares admiten una realización en \mathbb{R}^2 . Esto se generaliza a más dimensiones y en particular nos muestra que la dimensión $2k+1$ en el teorema 1.1.11 no se puede mejorar.

Continuamos con la noción de morfismo entre complejos.

Definición 1.1.13 Dados K y L complejos simpliciales, una función $f : K \rightarrow L$ se dice un mapa simplicial si para cada $\sigma = v_0 \dots v_s \in K$ se tiene que $f(\sigma) = f(v_0) \dots f(v_s)$ es un símplice en L de igual o menor dimensión que la de σ .

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

La definición 1.1.13 implica que f manda vértices de K en vértices de L y por lo tanto induce un mapa de vértices $f_V : V(K) \rightarrow V(L)$ dado por $f_V = f|_{K(0)}$. Más aún, f queda completamente determinado por f_V . Sin embargo no cualquier función $g : V(K) \rightarrow V(L)$ puede extenderse a un mapa simplicial como vemos en la figura 1.3.

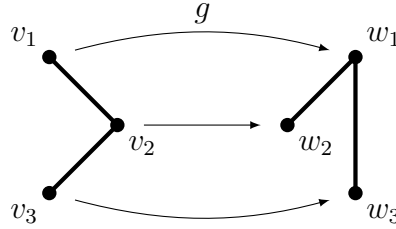


Figura 1.3: El mapa de vértices $g : v_i \mapsto w_i$ no admite extensión a un mapa simplicial pues $g(v_2)g(v_3) \notin L$.

Todo mapa simplicial $f : K \rightarrow L$ tiene asociado una función continua entre los espacios subyacentes $|f| : |K| \rightarrow |L|$ dada por

$$|f|\left(\underbrace{\sum_{i=0}^s \lambda_i v_i}_{x \in |K|}\right) = \sum_{i=0}^s \lambda_i f(v_i),$$

donde λ_i son las coordenadas baricéntricas de x en $v_0 \dots v_s \in K$, el único símplice de dimensión mínima que contiene a x . La buena definición de $|f|$ se deduce de la unicidad de las coordenadas baricéntricas y, más aún, $|f|$ es continua pues es afín a trozos (sobre cada símplice). Llamamos a $|f|$ la realización geométrica de f . Otra propiedad importante es que para complejos K, L, M y mapas simpliciales $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$, se tiene que

$$|g \circ f| = |g| \circ |f|.$$

Observación 1.1.14 Si $f : K \rightarrow L$ induce una biyección $f_V : K(0) \rightarrow L(0)$ y verifica que σ es un k -símplice en K si y sólo si $f(\sigma)$ es un k -símplice en L , entonces $|f|$ es un homeomorfismo entre $|K|$ y $|L|$ pues restringida a cada símplice es también un homeomorfismo.

Recordamos que dos mapas se dicen homotópicos si existe una homotopía que “deforma” a uno en el otro de manera continua. Este concepto también tiene su análogo en nuestro contexto simplicial.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Definición 1.1.15 Dos mapas simpliciales $f, g : K \rightarrow L$ se dicen contiguos si para cada $\sigma \in K$ se tiene que $f(\sigma) \cup g(\sigma)$ es un s3mplice en L .

De la definici3n 1.1.15 se sigue que si $f, g : K \rightarrow L$ son contiguos, entonces sus realizaciones geom3tricas $|f|, |g| : |K| \rightarrow |L|$ son mapas homot3picos. En efecto, la funci3n $H : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$ definida como

$$H(x, t) = t|g|(x) + (1 - t)|f|(x)$$

es una homotop3a entre $|f|$ y $|g|$ pues para todo $x \in |K|$ existe $\sigma \in K$ de dimensi3n m3nima tal que $|f|(x) \in f(\sigma)$, $|g|(x) \in g(\sigma)$ y la convexidad de $f(\sigma) \cup g(\sigma)$ garantiza que $\text{Im}(H) \subseteq |L|$. Sin embargo la vuelta no vale necesariamente como vemos en la figura 1.4.

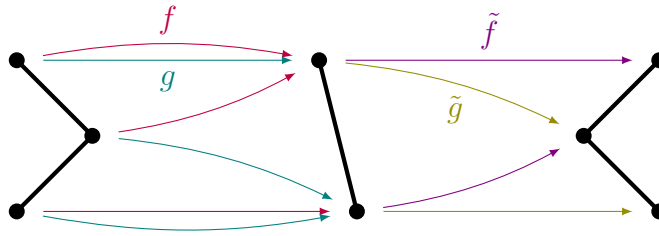


Figura 1.4: Los mapas simpliciales f y g son contiguos y por lo tanto sus realizaciones geom3tricas homot3picas. Los mapas \tilde{f} y \tilde{g} inducen realizaciones geom3tricas homot3picas pero no son contiguos.

1.1.1. Aproximaciones simpliciales

Definici3n 1.1.16 Para K un complejo simplicial y $v \in K_{(0)}$, la estrella abierta de v es la uni3n de los interiores de s3mplices que contienen a v :

$$\text{St}(v) = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ v \in V(\sigma)}} \sigma^\circ.$$

Lema 1.1.17 Sea K un complejo simplicial. Entonces $v_0 \dots v_p \in K$ si y s3lo si

$$\bigcap_{i=0}^p \text{St}(v_i) \neq \emptyset.$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Demostración. Si $\sigma = v_0 \dots v_p \in K$, claramente $\sigma^\circ \neq \emptyset$ y por definición de estrella abierta es $\sigma^\circ \subseteq \text{St}(v_i)$ para todo i . La vuelta se sigue de que si $\tau, \tau' \in K$ son dos símlices, entonces $\tau^\circ \cap (\tau')^\circ \neq \emptyset$ si y sólo si $\tau = \tau'$. Luego si $x \in \text{St}(v_i)$ para todo i , debe existir $\tau \in K$ tal que $x \in \tau^\circ \subseteq \text{St}(v_i)$ para todo i y se sigue que $v_0 \dots v_p$ es una cara de τ . \square

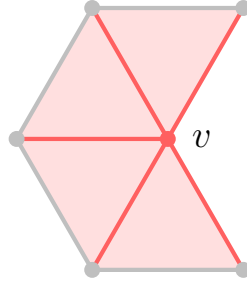


Figura 1.5: La estrella abierta de v es la parte roja y rosa del complejo.

Definición 1.1.18 Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua y K una triangulación de $|K|$. Un mapa simplicial $g : K \rightarrow L$ se dice una aproximación simplicial de f si para todo vértice $v \in K_{(0)}$ se tiene

$$f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(g(v)).$$

Proposición 1.1.19 Sea g una aproximación simplicial de $f : |K| \rightarrow |L|$. Entonces f y $|g|$ son mapas homotópicos.

Demostración. Consideramos la función $H : |K| \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$H(x, t) = t|g|(x) + (1 - t)f(x).$$

Veamos que $\text{Im}(H) \subseteq |L|$ para mostrar que H es una homotopía entre f y $|g|$. Si $x \in |K|$ tomamos $\sigma = v_0 \dots v_s \in K$ de dimensión mínima tal que $x \in \sigma$. Sabemos por definición de $|g|$ que

$$|g|(x) \in g(\sigma) = g(v_0) \dots g(v_s).$$

Además $x \in \text{St}(v_i)$ para todo i por ser σ de dimensión mínima así que

$$f(x) \in \bigcap_{i=0}^s f(\text{St}(v_i)) \subseteq \bigcap_{i=0}^s \text{St}(g(v_i)).$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Esto implica que $f(x) \in \overset{\circ}{\omega}$, donde $\omega \in L$ es o bien $g(\sigma)$ o un símplice que tiene a $g(\sigma)$ de cara. En cualquier caso por convexidad de ω se sigue que $H(x, t) \in \omega \subseteq |L|$ para todo t como queríamos ver. \square

Lema 1.1.20 Si $f, g : K \rightarrow L$ son aproximaciones simpliciales del mismo mapa $h : |K| \rightarrow |L|$, entonces f y g son contiguos.

Demostración. Sea $\sigma = v_0 \dots v_p \in K$. Entonces para todo i tenemos

$$h(\text{St}(v_i)) \subseteq \text{St}(f(v_i)) \cap \text{St}(g(v_i))$$

por definición de aproximación simplicial. Es decir que $\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^p \text{St}(f(v_i)) \cap \text{St}(g(v_i))$ y por el lema 1.1.17 se concluye que $f(v_0) \dots f(v_p)g(v_0) \dots g(v_p)$ es un símplice en L . \square

Lema 1.1.21 Si $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ son aproximaciones simpliciales de $h : |K| \rightarrow |L|$ y $k : |L| \rightarrow |M|$ respectivamente, entonces $g \circ f$ es aproximación simplicial de $k \circ h : |K| \rightarrow |M|$.

Demostración. Vale trivialmente pues para todo $v \in K_{(0)}$:

$$(k \circ h)(\text{St}(v)) = k(h(\text{St}(v))) \subseteq k(\text{St}(f(v))) \subseteq \text{St}(g(f(v))) = \text{St}((g \circ f)(v)).$$

\square

La condición de la definición 1.1.18 impone un comportamiento local sobre las estrellas abiertas que depende de la triangulación K y existen finitos mapas simpliciales definidos sobre K pero (posiblemente) infinitas clases de mapas homotópicos $f : |K| \rightarrow |L|$. Es por esto que f no admite a priori una aproximación simplicial y vamos a necesitar de otra triangulación K' de $|K|$ apropiada para aproximar mapas arbitrarios.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Definición 1.1.22 El baricentro $\hat{\sigma}$ de un símplice geométrico $\sigma = v_0 \dots v_s$ es el promedio de sus vértices:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{s+1} \sum_{i=0}^s v_i.$$

Para K un complejo simplicial definimos su primer subdivisión baricéntrica $K^{(1)}$ como el complejo simplicial

$$K^{(1)} = \{\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_m \mid \sigma_i \in K, \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_m\}.$$

La r -ésima subdivisión baricéntrica se define inductivamente como

$$K^{(r)} = (K^{(r-1)})^{(1)}.$$

Si $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_m$ son algunas caras de un símplice $\sigma \in K$, sus respectivos baricentros $\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m$ son afinmente independientes y forman un m -símplice en $K^{(1)}$. Más aún, la unión de todos estos símplices dados por los baricentros de caras anidadas de σ es precisamente σ , y como esto vale para todo $\sigma \in K$ se tiene que

$$|K| = |K^{(1)}|.$$

Vamos a usar $K^{(r)}(\sigma)$ para referirnos al subcomplejo de $K^{(r)}$ cuyo espacio asociado es $|\sigma|$.

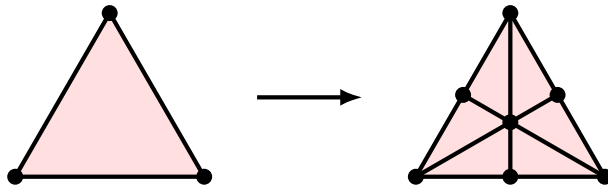


Figura 1.6: A la izquierda un 2-símplice y a la derecha su primer subdivisión baricéntrica.

Definición 1.1.23 Dados K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un k -símplice con $k \geq 1$, el diámetro $\mu(\sigma)$ de σ es la longitud máxima de sus 1-caras,

$$\mu(\sigma) = \max_{vw \subseteq \sigma} \{\|v - w\|\},$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

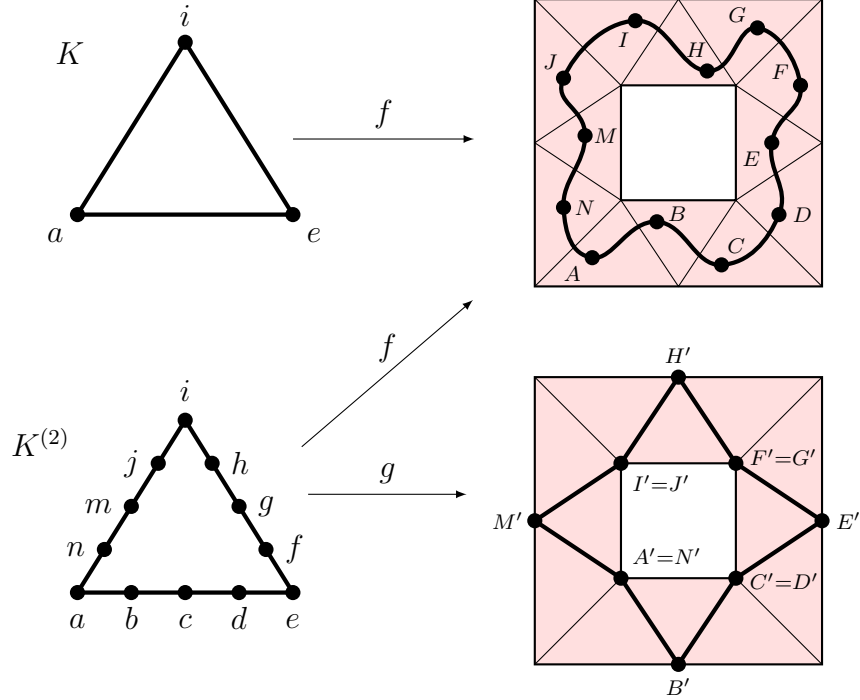


Figura 1.7: A la izquierda los complejos K y su segunda subdivisión baricéntrica $K^{(2)}$, ambos triangulaciones de S^1 . A la derecha el complejo L , una posible triangulación del anillo $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : r \leq \|x\| \leq R\}$. El mapa continuo f no admite una aproximación simplicial definida sobre K pero sí una sobre $K^{(2)}$ (el mapa dado por g), donde notamos $f(a) = A$, $g(a) = A'$ y similarmente para los demás vértices.

y el diámetro $\mu(K)$ de K es el diámetro máximo de sus símlices:

$$\mu(K) = \max_{\sigma \in K} \{\mu(\sigma)\}.$$

Lema 1.1.24 Si K es un complejo simplicial de dimensión n y $r \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mu(K^{(r)}) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \mu(K),$$

y por lo tanto $\mu(K^{(r)}) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Teorema 1.1.25 (Aproximación simplicial) Sean K y L complejos simpliciales y $f : |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ y un mapa simplicial $g : K^{(r)} \rightarrow L$ tal que g es una aproximación simplicial de f .

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{\text{St}(w)\}_{w \in L_{(0)}}$ el cubrimiento por estrellas abiertas de $|L|$. Como f es continua, $\{f^{-1}(\text{St}(w))\}_{w \in L_{(0)}}$ es un cubrimiento por abiertos de $|K|$. Por ser $|K|$ compacto este cubrimiento tiene un número de Lebesgue $\lambda > 0$ y podemos tomar r lo suficientemente grande para que $\mu(K^{(r)}) < \frac{\lambda}{2}$. Luego $\text{diam}(\text{St}(v)) < \lambda$ para todo $v \in (K^{(r)})_{(0)}$.

Tomamos $g_V : (K^{(r)})_{(0)} \rightarrow L_{(0)}$ dado por $v \mapsto w$, donde $\text{St}(v) \subseteq f^{-1}(\text{St}(w))$ (tal w existe pues $\text{diam}(\text{St}(v)) < \lambda$ y de no ser único elegimos cualquiera). De esto se deduce que $f(\text{St}(v)) \subseteq \text{St}(w) = \text{St}(g_V(v))$. Sólo queda ver que g_V se extiende a un mapa simplicial g . En efecto, si

$x_0 \dots x_k \in K^{(r)}$, entonces $\bigcap_{i=0}^k \text{St}(x_i) \neq \emptyset$ y luego

$$\emptyset \neq f \left(\bigcap_{i=0}^k \text{St}(x_i) \right) \subseteq \bigcap_{i=0}^k f(\text{St}(x_i)) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{St}(g_V(x_i)).$$

Es decir que $g_V(x_0) \dots g_V(x_k)$ es un símplice en L como queríamos ver. \square

Observación 1.1.26 Como consecuencia del teorema 1.1.25 existen a lo sumo numerables clases de mapas homotópicos $f : |K| \rightarrow |L|$ pues existen numerables mapas simpliciales definidos sobre K y sus subdivisiones baricéntricas.

1.2. Homología

En esta sección vamos a definir la *homología* de un complejo simplicial con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} (que consideramos fijo de aquí en adelante). Para esto primero definimos la noción de orientación de un símplice.

Recordamos que las permutaciones de un conjunto finito se dividen en dos clases de igual tamaño: las pares y las impares. Dado $\sigma = v_0 \dots v_p$ un p -símplice, decimos que dos ordenamientos de sus vértices (v_0, v_1, \dots, v_p) , $(v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)})$ son equivalentes si π es una permutación par. Con

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

esto definimos las posibles orientaciones de σ como las clases de ordenamientos equivalentes de $V(\sigma)$.

Definición 1.2.27 Un p -símplice orientado es un p -símplice $\sigma = v_0 \dots v_p$ junto con una orientación de σ . Usamos $[v_0 v_1 \dots v_p]$ para referirnos a σ con la orientación dada por la paridad del ordenamiento (v_0, v_1, \dots, v_p) .

Observación 1.2.28 Un 0-símplice admite una única orientación y un p -símplice ($p > 0$) tiene exactamente dos orientaciones posibles. Más aún, intercambiar dos vértices consecutivos cambia la orientación del símplice. Por ejemplo, $[v_0 v_1 v_2 \dots v_p]$ y $[v_1 v_0 v_2 \dots v_p]$ tienen orientaciones opuestas.

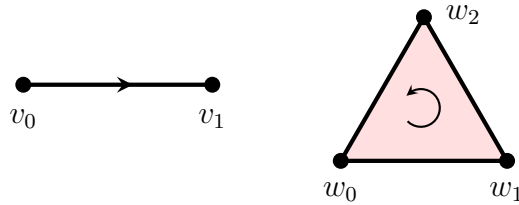


Figura 1.8: Dos símplices orientados $[v_0 v_1]$ y $[w_0 w_1 w_2]$.

Definición 1.2.29 Sea K un complejo simplicial. Una p -cadena en K ($p \geq 0$) es una suma formal finita de p -símplices orientados de K con coeficientes en el cuerpo \mathbb{K} :

$$\sum_i \alpha_i \sigma_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $\{\sigma_i\}_i$ es la colección de p -símplices orientados de K (cada símplice con sus posibles orientaciones). Adicionalmente imponemos

$$\sigma = -\sigma'$$

siempre que σ y σ' sean el mismo símplice con orientaciones opuestas.

Dado $\sigma \in K$ un p -símplice orientado, su p -cadena elemental asociada es la p -cadena $1 \cdot \sigma$. Vamos a abusar de la notación y usar σ para referirnos tanto al símplice como al símplice orientado y a su p -cadena elemental asociada.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

La suma de dos p -cadenas $c = \sum_i \alpha_i \sigma_i$, $c' = \sum_i \alpha'_i \sigma_i$ y la multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se definen a partir de las operaciones en el cuerpo:

$$c + c' = \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i) \sigma_i,$$

$$\lambda c = \sum_i (\lambda \alpha_i) \sigma_i.$$

Con estas operaciones las p -cadenas en K forman un \mathbb{K} -espacio vectorial que notaremos $C_p(K)$. Este espacio es isomorfo a \mathbb{K}^{m_p} donde m_p es la cantidad de p -símplices en K y para definir una base de $C_p(K)$ basta con elegir arbitrariamente una orientación para cada p -símplice.

Ejemplo 1.2.30 Consideramos el complejo simplicial dado por:

$$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\}\}.$$

- i) Los espacios $C_0(K)$ y $C_1(K)$ son ambos isomorfos a $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ pues K contiene exactamente tres 0-símplices y tres 1-símplices.
- ii) Para $p \geq 2$ $C_p(K)$ es el espacio trivial $\{0\}$ dado que K no contiene ningún p -símplice.

Continuamos definiendo el operador de borde $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$. Sobre una p -cadena elemental $\sigma = [v_0 \dots v_p]$ se define como sigue:

$$\partial_p : [v_0 \dots v_p] \mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p],$$

donde la notación \hat{v}_i indica que omitimos tal vértice. Notamos que esta definición coincide con la noción geométrica de borde simplicial. El operador ∂_p se define extendiéndolo linealmente a todo $C_p(K)$.

Definición 1.2.31 Para $p \geq 1$ el p -ésimo operador de borde

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$$

es la transformación lineal dada por

$$\partial_p : \sum_i \alpha_i \sigma_i \mapsto \sum_i \alpha_i \partial_p(\sigma_i).$$

Por convención definimos $\partial_0 = 0$ la transformación nula.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

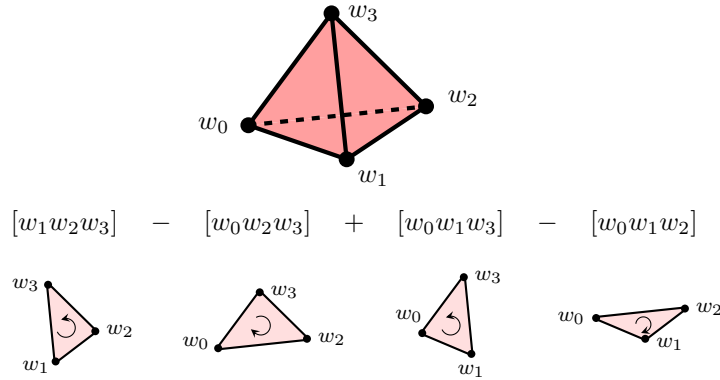


Figura 1.9: El borde del 3-símplice orientado $[w_0w_1w_2w_3]$ es la suma alternada de sus caras inmediatas.

Sean $[v_0 \dots v_j v_{j+1} \dots v_p]$ y $[v_0 \dots v_{j+1} v_j \dots v_p]$ orientaciones opuestas del mismo símplice. Para $i \neq j, j+1$ los términos i -ésimos en las sumatorias de las expresiones $\partial_p([v_0 \dots v_j v_{j+1} \dots v_p])$ y $\partial_p([v_0 \dots v_{j+1} v_j \dots v_p])$ difieren de un signo pues son idénticos pero con v_j y v_{j+1} intercambiados. Para los términos correspondientes a $i = j, j+1$ en la primer expresión tenemos

$$(-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j v_{j+1} \dots v_p] + (-1)^{j+1} [v_0 \dots v_j \hat{v}_{j+1} \dots v_p],$$

mientras que en la segunda se tiene

$$(-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_{j+1} v_j \dots v_p] + (-1)^{j+1} [v_0 \dots v_{j+1} \hat{v}_j \dots v_p].$$

Mirando con atención vemos que los términos cruzados también difieren de un signo y se sigue que

$$\partial_p([v_0 \dots v_j v_{j+1} \dots v_p]) = -\partial_p([v_0 \dots v_{j+1} v_j \dots v_p]),$$

mostrando que ∂_p está bien definido.

Lema 1.2.32 Para todo $p \geq 1$ se tiene que

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0.$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Demostración. Sea $\sigma = [v_0 v_1 \dots v_p]$. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}([v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p]) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_p] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_p],\end{aligned}$$

de donde se ve que los términos de estas sumas se cancelan de a pares. Como esto vale para todo σ el resultado se sigue por linealidad de los operadores. \square

Hasta acá obtuvimos una sucesión de \mathbb{K} -espacios vectoriales unidos por transformaciones lineales

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\partial_{k+1}} \mathbf{C}_k(K) \xrightarrow{\partial_k} \mathbf{C}_{k-1}(K) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_0(K) \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{0},$$

donde k es la dimensión de K y vale que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para todo p . Una sucesión como esta se llama un *complejo de cadenas*.

Definición 1.2.33 Un p -ciclo es una p -cadena c tal que $\partial_p(c) = 0$ y un p -borde es una p -cadena b que es la imagen bajo ∂_{p+1} de alguna $(p+1)$ -cadena w , i.e. $b = \partial_{p+1}(w)$. Notamos $\mathbf{Z}_p(K)$ y $\mathbf{B}_p(K)$ a los conjuntos de p -ciclos y p -bordes de K respectivamente.

Por definición tenemos que $\mathbf{Z}_p(K)$ y $\mathbf{B}_p(K)$ son los subespacios de $\mathbf{C}_p(K)$ dados por

$$\mathbf{Z}_p(K) = \ker(\partial_p), \quad \mathbf{B}_p(K) = \text{Im}(\partial_{p+1}),$$

y además el lema 1.2.32 nos dice que todo p -borde es un p -ciclo, es decir

$$\mathbf{B}_p(K) \subseteq \mathbf{Z}_p(K) \subseteq \mathbf{C}_p(K).$$

Definición 1.2.34 El p -ésimo espacio de homología de K es el cociente

$$\mathbf{H}_p(K) = \frac{\mathbf{Z}_p(K)}{\mathbf{B}_p(K)}.$$

Llamamos p -ésimo número de Betti a la dimensión de $\mathbf{H}_p(K)$ como \mathbb{K} -espacio vectorial y lo notamos $\beta_p(K)$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Cuando no sea ambiguo omitimos “ (K) ” en la notación introducida para simplificarla. La clase de homología de un p -ciclo $c \in \mathbf{Z}_p$ es la clase

$$c + \mathbf{B}_p = [c] \in \mathbf{H}_p$$

y dos ciclos en la misma clase de homología se dicen ciclos homólogos.

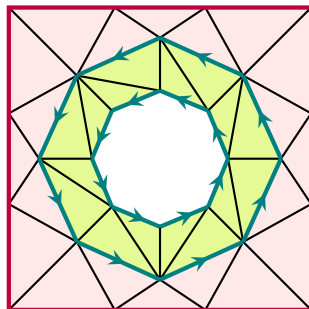


Figura 1.10: Los octógonos verdes son 1-ciclos homólogos pues la diferencia de ambos es el 1-borde de la 2-cadena dada por los triángulos verdes orientados convenientemente.

Observación 1.2.35 Los números de Betti están dados por

$$\beta_p = \dim \mathbf{Z}_p - \dim \mathbf{B}_p$$

y cuentan la cantidad de clases independientes de p -ciclos homólogos presentes en K .

Una posible intuición geométrica de la homología es que describe la presencia de “agujeros” en las distintas dimensiones de un objeto. Por ejemplo, β_0 cuenta la cantidad de componentes conexas de K , β_1 la cantidad de ciclos, β_2 las cavidades encerradas, y análogamente para p arbitrario.

Ejemplo 1.2.36 Sea K el complejo simplicial de la figura 1.11 que contiene el 3-símplice $abcd$ y los 2-símplices bce , bde y cde junto con todas sus caras. Entonces $\mathbf{C}_0(K)$ está generado por $\{a, b, c, d, e\}$ y es por lo tanto isomorfo a \mathbb{K}^5 . Similarmente se tiene que $\mathbf{C}_1(K) = \langle [ab], [ac], [ad], [bc], [cd], [db], [be], [ce], [de] \rangle \cong \mathbb{K}^9$, $\mathbf{C}_2 = \langle [abc], [acd], [abd], [bcd], [bce], [cde], [bde] \rangle \cong \mathbb{K}^7$,

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

$\mathbf{C}_3(K) = \langle [abcd] \rangle \cong \mathbb{K}$ y $\mathbf{C}_p(K) \cong \mathbf{0}$ para todo $p \geq 4$. Esto da lugar al complejo de cadenas

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\partial_4} \mathbf{C}_3 \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{0}.$$

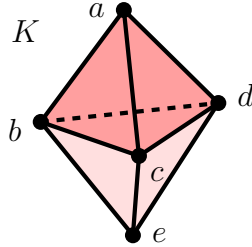


Figura 1.11: El complejo K es una triangulación de un espacio homotópicamente equivalente a S^2 .

Dado que ∂_4 es la transformación nula y $\partial_3([abcd]) = [bcd] - [acd] + [abd] - [abc] \neq 0$ se sigue que $\mathbf{Z}_3 \cong \mathbf{B}_3 \cong \mathbf{H}_3 \cong \mathbf{0}$ y que $\mathbf{B}_2 = \langle [bcd] - [acd] + [abd] - [abc] \rangle$. Para calcular los 2-ciclos planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_2(\alpha_1[abc] + \alpha_2[acd] + \alpha_3[abd] + \alpha_4[bcd] + \alpha_5[bce] + \alpha_6[cde] + \alpha_7[bde]) \\ &= \alpha_1\partial_2([abc]) + \alpha_2\partial_2([acd]) + \cdots + \alpha_7\partial_2([bde]) \\ &= \alpha_1([bc] - [ac] + [ab]) + \cdots + \alpha_7([de] - [be] + [bd]), \end{aligned}$$

la cual es equivalente al sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Omitimos los detalles de cálculos que muestran que

$$\mathbf{Z}_2 = \langle [bcd] - [acd] + [abd] - [abc], [bde] - [cde] + [bcd] - [bce] \rangle$$

y por lo tanto $\mathbf{H}_2 \cong \mathbb{K}$ pues está generado por la clase de homología de $[bde] - [cde] + [bcd] - [bce] \in \mathbf{Z}_2$. Por otro lado al aplicar ∂_2 a los generadores de \mathbf{C}_2 obtenemos dos 1-bordes que son combinaciones lineales del resto, lo que implica $\mathbf{B}_1 \cong \mathbb{K}^5$. Esto se corresponde con el hecho visual de que hay dos triángulos que “tapan” los tetraedros $abcd$ y bcd (el primero con

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

y el segundo sin su relleno). Resolviendo otro sistema lineal se sigue que $\mathbf{Z}_1 \cong \mathbb{K}^5$ y entonces $\mathbf{H}_1 \cong \mathbf{0}$. Por último siempre vale que $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{C}_0$ pues $\partial_0 = 0$ y se verifica fácilmente que $\mathbf{B}_0 \cong \mathbb{K}^4$ y $\mathbf{H}_0 \cong \mathbb{K}$.

El ejemplo 1.2.36 ilustra el hecho de que los espacios de homología de un complejo simplicial finito son computables y podemos calcularlos con un algoritmo de álgebra lineal: cada transformación ∂_p se escribe como una matriz donde cada columna representa el borde en \mathbf{C}_{p-1} de un generador de \mathbf{C}_p . Luego basta con hacer eliminación gaussiana y usar el teorema de la dimensión para calcular los números de Betti usando la observación 1.2.35. De hecho el cálculo de la homología en dimensión p depende sólo de la estructura del complejo en dimensiones p y $p + 1$.

Morfismos inducidos por mapas simpliciales

Un mapa simplicial $f : K \rightarrow L$ induce para cada $p \geq 0$ una transformación lineal $f_{\#}^p : \mathbf{C}_p(K) \rightarrow \mathbf{C}_p(L)$ dada por

$$f_{\#}^p : \sum_i \alpha_i \sigma_i \mapsto \sum_i \alpha_i \tau_i,$$

donde

$$\tau_i = \begin{cases} f(\sigma_i) & \text{si } f(\sigma_i) \text{ es un } p\text{-símplice en } L, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y la orientación de τ_i es la dada al preservar el ordenamiento de los vértices de σ_i .

Proposición 1.2.37 Sean $f : K \rightarrow L$ un mapa simplicial y $\partial_p^K, \partial_p^L$ los p -ésimos operadores de borde en $\mathbf{C}_p(K)$ y $\mathbf{C}_p(L)$ respectivamente. Entonces los mapas inducidos $f_{\#}^p, f_{\#}^{p-1}$ conmutan con dichos operadores, es decir conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_p(K) & \xrightarrow{\partial_p^K} & \mathbf{C}_{p-1}(K) \\ \downarrow f_{\#}^p & & \downarrow f_{\#}^{p-1} \\ \mathbf{C}_p(L) & \xrightarrow{\partial_p^L} & \mathbf{C}_{p-1}(L) \end{array}$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Demostración. Basta ver que $(f_{\#}^{p-1} \circ \partial_p^K)(\sigma) = (\partial_p^L \circ f_{\#}^p)(\sigma)$ para toda p -cadena elemental $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_p] \in \mathbf{C}_p(K)$. Si $f(\sigma)$ es un p -símplice en L entonces $f(\tau)$ es una cara inmediata de $f(\sigma)$ para toda cara inmediata τ de σ y el resultado se sigue por definición de $f_{\#}^p, f_{\#}^{p-1}$ y los operadores de borde:

$$\begin{aligned} \partial_p^L(f_{\#}^p(\sigma)) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_p)] \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i f_{\#}^{p-1}([v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]) = f_{\#}^{p-1}(\partial_p^K(\sigma)). \end{aligned}$$

Si $f(\sigma)$ es un k -símplice en L con $k \leq p-2$ entonces $f_{\#}^{p-1}(\tau) = 0$ para toda cara inmediata τ de σ y la igualdad se cumple trivialmente

$$\partial_p^L(f_{\#}^p(\sigma)) = 0 = f_{\#}^{p-1}(\partial_p^K(\sigma)).$$

Si $f(\sigma)$ es un $(p-1)$ -símplice en L existen únicos $j < k$ tales que $f(v_j) = f(v_k)$ y $f_{\#}^{p-1}(\tau) = 0$ para toda cara inmediata τ de σ con $\{v_j, v_k\} \subseteq V(\tau)$, lo cual implica

$$\begin{aligned} f_{\#}^{p-1}(\partial_p^K(\sigma)) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i f_{\#}^{p-1}([v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]) \\ &= (-1)^j [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_j)}, \dots, f(v_p)] \\ &\quad + (-1)^k [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_k)}, \dots, f(v_p)]. \end{aligned}$$

Dado que $(f(v_0), \dots, \widehat{f(v_j)}, \dots, f(v_p))$ y $(f(v_0), \dots, \widehat{f(v_k)}, \dots, f(v_p))$ son ordenamientos que difieren de una permutación de signo $(-1)^{k-j+1}$ se cancelan los términos dando el resultado. \square

La colección $\{f_{\#}^p\}_{p \geq 0}$ se llama un *mapa de complejos de cadenas* que vamos a notar simplemente $f_{\#}$ y puede visualizarse con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{p+2}^K} & \mathbf{C}_{p+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{p+1}^K} & \mathbf{C}_p(K) & \xrightarrow{\partial_p^K} & \mathbf{C}_{p-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^K} & \dots \\ & & \downarrow f_{\#}^{p+1} & & \downarrow f_{\#}^p & & \downarrow f_{\#}^{p-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{p+2}^L} & \mathbf{C}_{p+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{p+1}^L} & \mathbf{C}_p(L) & \xrightarrow{\partial_p^L} & \mathbf{C}_{p-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^L} & \dots \end{array}$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

donde cada subdiagrama es conmutativo debido a la proposición 1.2.37.

Lema 1.2.38 Sea $f : K \rightarrow L$ un mapa simplicial. Entonces

$$f_{\#}^p(\mathbf{Z}_p(K)) \subseteq \mathbf{Z}_p(L) \quad \text{y} \quad f_{\#}^p(\mathbf{B}_p(K)) \subseteq \mathbf{B}_p(L)$$

para todo $p \geq 0$.

Demostración. Ambos resultados se siguen de la proposición 1.2.37. En el primer caso si $c \in \mathbf{Z}_p(K)$, entonces $\partial_p^K(c) = 0$ y debe ser $0 = f_{\#}^{p-1}(\partial_p^K(c)) = \partial_p^L(f_{\#}^p(c))$, es decir $f_{\#}^p(c) \in \mathbf{Z}_p(L)$. En el segundo caso si $b \in \mathbf{B}_p(K)$ es $b = \partial_{p+1}^K(c)$ para algún $c \in \mathbf{C}_{p+1}(K)$ y la conmutatividad del diagrama implica que $f_{\#}^p(b) = f_{\#}^p(\partial_{p+1}^K(c)) = \partial_{p+1}^L(f_{\#}^{p+1}(c))$, es decir $f_{\#}^p(b) \in \text{Im}(\partial_{p+1}^L) = \mathbf{B}_p(L)$. \square

Este lema nos dice que $f : K \rightarrow L$ induce a su vez un morfismo entre los espacios de homología que está bien definido:

$$\begin{aligned} f_*^p : \mathbf{H}_p(K) &\longrightarrow \mathbf{H}_p(L) \\ [c] &\longmapsto [f_{\#}^p(c)] \end{aligned}$$

Para ver la buena definición basta verificar que $[c] = [c']$ en $\mathbf{H}_p(K)$ implica que $[f_{\#}^p(c)] = [f_{\#}^p(c')]$ en $\mathbf{H}_p(L)$, y esto se sigue inmediatamente pues $[c] = [c']$ si y sólo si $c - c' \in \mathbf{B}_p(K)$ y el lema 1.2.38 nos dice que

$$f_{\#}^p(c - c') = f_{\#}^p(c) - f_{\#}^p(c') \in \mathbf{B}_p(L),$$

o equivalentemente $[f_{\#}^p(c)] = [f_{\#}^p(c')]$ en $\mathbf{H}_p(L)$. De forma similar vamos a usar f_* para referirnos a la colección $\{f_*^p\}_{p \geq 0}$.

En general un mapa entre los espacios de homología puede ser inducido por distintos mapas simpliciales. Decimos que dos mapas de complejos de cadenas $f_{\#}$ y $g_{\#}$ son homotópicos por cadenas si existen para cada $p \geq 0$ transformaciones lineales $h_p : \mathbf{C}_p(K) \rightarrow \mathbf{C}_{p+1}(L)$ tales que

$$g_{\#}^p - f_{\#}^p = \partial_{p+1}^L \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial_p^K$$

para todo $p \geq 0$ (por convención $h_{-1} = 0$). La colección $H = \{h_p\}_{p \geq 0}$ es una homotopía por cadenas entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Lema 1.2.39 Sean $f, g : K \rightarrow L$ mapas simpliciales tales que $f_{\#}$ y $g_{\#}$ son homotópicos por cadenas. Entonces los mapas inducidos en la homología coinciden: $f_* = g_*$, es decir

$$f_*^p = g_*^p$$

para todo $p \geq 0$.

Demostración. Sea $H = \{h_p\}_{p \geq 0}$ la homotopía entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$. Basta ver que $[f_{\#}^p(c)] = [g_{\#}^p(c)]$ en $\mathbf{H}_p(L)$ para toda clase de homología $[c] \in \mathbf{H}_p(K)$. Se sigue inmediatamente pues $c \in \mathbf{Z}_p(K)$ y entonces

$$\begin{aligned} g_{\#}^p(c) - f_{\#}^p(c) &= (\partial_{p+1}^L \circ h_p)(c) + (h_{p-1} \circ \partial_p^K)(c) \\ &= \partial_{p+1}^L(h_p(c)) + 0 \in \mathbf{B}_p(L). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.40 Sean $f, g : K \rightarrow L$ mapas simpliciales contiguos. Entonces $f_* = g_*$.

Demostración. Basta ver que existe una homotopía $H = \{h_p\}_{p \geq 0}$ entre los mapas de complejos de cadenas inducidos $f_{\#}$ y $g_{\#}$ y concluir usando el lema 1.2.39. Para $\sigma = v_0 \dots v_p \in K$ notamos $L(\sigma)$ al subcomplejo de L dado por el símlice $f(v_0) \dots f(v_p)g(v_0) \dots g(v_p)$ junto con todas sus caras. Construimos H por inducción en p .

Para $p = 0$ sea $[v] \in \mathbf{C}_0(K)$ una 0-cadena elemental. Como f y g son contiguos $f(v)g(v)$ es un símlice en L y podemos definir $h_0([v])$ como la 1-cadena $\tau \in \mathbf{C}_1(L)$ dada por:

$$\tau = \begin{cases} [f(v)g(v)] & \text{si } f(v) \neq g(v) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En cualquier caso se tiene que

$$\begin{aligned} g_{\#}^0([v]) - f_{\#}^0([v]) &= [g(v)] - [f(v)] \\ &= \partial_1^L(h_0([v])) \end{aligned}$$

como queríamos y sólo queda extender linealmente h_0 a todo $\mathbf{C}_0(K)$. Notamos que $h_0([v]) \in \mathbf{C}_1(L(v))$ para toda 0-cadena elemental $[v] \in \mathbf{C}_0(K)$.

Supongamos ahora que tenemos h_q definido para todo $q < p$ de manera tal que para toda q -cadena $c \in \mathbf{C}_q(K)$ se tiene

$$g_{\#}^q(c) - f_{\#}^q(c) = \partial_{q+1}^L(h_q(c)) + h_{q-1}(\partial_q^K(c))$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

y $h_q(\sigma) \in \mathbf{C}_{q+1}(L(\sigma))$ para toda q -cadena elemental $\sigma \in \mathbf{C}_q(K)$.

Sea $\sigma \in \mathbf{C}_p(K)$ una p -cadena elemental. Queremos definir $h_p(\sigma)$ como la $(p+1)$ -cadena cuyo borde $\partial_{p+1}^L(h_p(\sigma))$ sea la p -cadena $c \in \mathbf{C}_p(L)$ dada por:

$$c = g_{\#}^p(\sigma) - f_{\#}^p(\sigma) - h_{p-1}(\partial_p^K(\sigma)).$$

Notar que c está bien definida pues h_{p-1} lo está por hipótesis inductiva. Más aún, $c \in \mathbf{Z}_p(L(\sigma))$: que es p -cadena en $L(\sigma)$ se sigue de que tanto $f_{\#}^p(\sigma)$ y $g_{\#}^p(\sigma)$ lo son por definición y $h_{p-1}(\partial_p^K(\sigma))$ lo es por hipótesis inductiva y porque $L(\tau) \subseteq L(\sigma)$ siempre que $\tau \subseteq \sigma$; que es un p -ciclo se sigue de

$$\begin{aligned} \partial_p^L(c) &= \partial_p^L(g_{\#}^p(\sigma)) - \partial_p^L(f_{\#}^p(\sigma)) - \partial_p^L(h_{p-1}(w)) \\ &= g_{\#}^{p-1}(w) - f_{\#}^{p-1}(w) - (g_{\#}^{p-1}(w) - f_{\#}^{p-1}(w) - h_{p-2}(\partial_{p-1}^K(w))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde aplicamos la hipótesis inductiva a la $(p-1)$ -cadena $w = \partial_p^K(\sigma)$ y usamos que $\partial_p^L \circ f_{\#}^p = f_{\#}^{p-1} \circ \partial_p^K$ y que $\partial_{p-1}^K \circ \partial_p^K = 0$.

Finalmente como $\mathbf{H}_p(L(\sigma)) = \{0\}$ para todo $p > 0$ debe existir $\tau \in \mathbf{C}_{p+1}(L(\sigma))$ tal que

$$\partial_{p+1}^L(\tau) = c = g_{\#}^p(\sigma) - f_{\#}^p(\sigma) - h_{p-1}(\partial_p^K(\sigma)).$$

Definiendo $h_p(\sigma) = \tau$, $h_p(-\sigma) = -\tau$ y extendiendo h_p a todo $\mathbf{C}_p(K)$ se sigue el resultado. \square

Observación 1.2.41 El morfismo h_0 está unívocamente determinado pero en general h_p no lo está dando lugar a diferentes homotopías entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$. La figura 1.12 ilustra un ejemplo de esto.

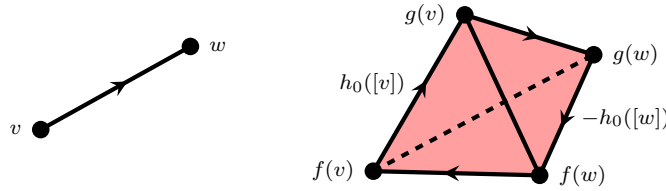


Figura 1.12: Los mapas f y g son contiguos y tales que $f(v)$, $f(w)$, $g(v)$ y $g(w)$ son todos distintos. Las 2-cadenas $[f(v)g(v)f(w)] + [g(v)g(w)f(w)]$ y $[f(v)g(v)g(w)] + [g(w)f(w)f(v)]$ son ambas posibles elecciones para $h_1([vw])$ pues tienen el mismo 1-borde dado por $g_{\#}^1([vw]) - f_{\#}^1([vw]) - h_0([w] - [v])$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

En lo que sigue vamos a ver que todo mapa arbitrario entre espacios triangulables $h : |K| \rightarrow |L|$ induce un morfismo en la homología bien definido.

Proposición 1.2.42 *Sea $K^{(r)}$ una subdivisión baricéntrica de K . Entonces la identidad $i : |K^{(r)}| \rightarrow |K|$ admite una aproximación simplicial*

$$g : K^{(r)} \rightarrow K.$$

Demostración. Lo probamos para $r = 1$. Para $w \in K^{(1)}$ por definición existe $\sigma \in K$ tal que $w = \hat{\sigma} \in \sigma^\circ$ y definimos $g(w)$ como cualquier vértice $v \in V(\sigma)$. Basta ver que g se extiende a una aproximación simplicial de la identidad. En efecto, si $w_0 \dots w_p$ es un p -símplice en $K^{(1)}$ existen caras anidadas de K $\sigma_0 \subset \dots \subset \sigma_p$ tales que $w_i = \hat{\sigma}_i$. Luego $v_0 \dots v_p$ es un símplice en K para cualquier elección de vértices $v_i \in \sigma_i$ pues en particular es una cara de σ_p . Para ver que es aproximación simplicial de la identidad tomamos $w = \hat{\sigma} \in (K^{(1)})_{(0)}$, $v \in V(\sigma)$ y alcanza con ver que

$$|K| \setminus \text{St}(v) \subseteq |K| \setminus \text{St}(w).$$

El miembro izquierdo en la inclusión es la unión de los símplices en K que no tienen a v de vértice, y por ser $K^{(1)}$ una subdivisión es también la unión de ciertos símplices $\tau \in K^{(1)}$. Se sigue que ninguno de estos símplices τ puede tener a w de vértice pues $w \in \sigma^\circ \subseteq \text{St}(v)$ y luego $\tau \subseteq |K| \setminus \text{St}(w)$. Para $r \in \mathbb{N}$ arbitrario recordamos que $K^{(r)} = (K^{(r-1)})^{(1)}$ y tomamos g como la composición sucesiva de los mapas construidos para $r = 1$. El resultado se sigue del lema 1.1.21. \square

La consecuencia algebraica de las subdivisiones que nos interesa está en el siguiente teorema que presentamos sin demostración (consultar [6]).

Teorema 1.2.43 *Sea $K^{(r)}$ la r -ésima subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial K . Entonces existe un único mapa de complejos de cadenas $\lambda_r = \{\lambda_{r,p}\}_{p \geq 0}$,*

$$\lambda_{r,p} : \mathbf{C}_p(K) \rightarrow \mathbf{C}_p(K^{(r)})$$

tales que $\lambda_{r,p}(\sigma) \in \mathbf{C}_p(K^{(r)}(\sigma))$ para toda p -cadena elemental $\sigma \in \mathbf{C}_p(K)$. Más aún, si $g : K^{(r)} \rightarrow K$ es una aproximación simplicial de la identidad $i : |K^{(r)}| \rightarrow |K|$, entonces $(\lambda_r)_^p$ y g_*^p son isomorfismos inversos el uno del otro para todo $p \geq 0$.*

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

El mapa λ_r se conoce como *operador de subdivisión baricéntrica* y es lo que nos faltaba para definir el morfismo inducido en la homología por $h : |K| \rightarrow |L|$.

Definición 1.2.44 Dados K, L complejos simpliciales y $h : |K| \rightarrow |L|$ continua, tomamos $r \in \mathbb{N}$ tal que h admita una aproximación simplicial $f : K^{(r)} \rightarrow L$ y definimos el morfismo inducido por h como la colección $h_* = \{h_*^p\}_{p \geq 0}$ dada por

$$h_*^p = f_*^p \circ (\lambda_r)_*^p.$$

Veamos que h_* es independiente tanto de la elección de $r \in \mathbb{N}$ como de la de f . Por el teorema 1.2.43,

$$h_*^p = f_*^p \circ (g_*^p)^{-1}$$

para toda $g : K^{(r)} \rightarrow K$ aproximación simplicial de la identidad. Una vez que fijamos $r \in \mathbb{N}$, aproximaciones simpliciales del mismo mapa son contiguas (esto es el lema 1.1.20) y por lo tanto inducen el mismo mapa en la homología.

Por otro lado si $r < s$ y $f_r : K^{(r)} \rightarrow L, f_s : K^{(s)} \rightarrow L$ son aproximaciones simpliciales de h , por la proposición 1.2.42 existen $g : K^{(r)} \rightarrow K, k : K^{(s)} \rightarrow K^{(r)}$ aproximaciones simpliciales de la identidad en $|K|$ y entonces $f_r \circ k$ y $g \circ k$ son aproximaciones simpliciales de h y de la identidad en $|K|$ respectivamente. Se sigue que $f_r \circ k$ y f_s son contiguas y entonces

$$\begin{aligned} (f_s)_*^p \circ (\lambda_s)_*^p &= (f_r \circ k)_*^p \circ [(g \circ k)_*^p]^{-1} \\ &= ((f_r)_*^p \circ k_*^p) \circ [(g_*^p \circ k_*^p)]^{-1} \\ &= (f_r)_*^p \circ (g_*^p)^{-1} = (f_r)_*^p \circ (\lambda_r)_*^p, \end{aligned}$$

donde usamos que el morfismo inducido por una composición de mapas simpliciales es la composición de los mapas inducidos y que una aproximación simplicial de la identidad induce el morfismo identidad en la homología.

Este morfismo inducido también cumple con las propiedades funtoriales y es invariante bajo homotopía.

Teorema 1.2.45 La identidad $i : |K| \rightarrow |K|$ induce en la homología el morfismo identidad $i_*^p : \mathbf{H}_p(K) \rightarrow \mathbf{H}_p(K)$. Si $h : |K| \rightarrow |L|$ y $k : |L| \rightarrow |M|$ son mapas continuos entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Teorema 1.2.46 Si $h, k : |K| \rightarrow |L|$ son mapas homotópicos, entonces $h_* = k_*$.

Corolario 1.2.47 (Invarianza homotópica de la homología simplicial) Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es una equivalencia homotópica, entonces f_* es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g : |L| \rightarrow |K|$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son mapas homotópicos a las identidades $i_{|L|}$ y $i_{|K|}$ respectivamente. Entonces $(f \circ g)_* = (i_{|L|})_*$ y $(g \circ f)_* = (i_{|K|})_*$. Se sigue que $f_* \circ g_*$ y $g_* \circ f_*$ son isomorfismos, y por lo tanto f_* lo es. \square

1.2.1. Homología relativa

Sea K_0 un subcomplejo de K . Dado que $\mathbf{C}_p(K_0)$ es un subespacio de $\mathbf{C}_p(K)$, el cociente

$$\mathbf{C}_p(K, K_0) = \frac{\mathbf{C}_p(K)}{\mathbf{C}_p(K_0)}$$

está bien definido y lo llamamos *espacio de cadenas relativas a K_0* . Se trata del \mathbb{K} -espacio vectorial cuyos elementos son las clases

$$\bar{c} = c + \mathbf{C}_p(K_0)$$

para $c \in \mathbf{C}_p(K)$.

El operador de borde es el inducido en los cocientes de forma natural:

$$\begin{aligned} \partial_p^{K, K_0} : \mathbf{C}_p(K, K_0) &\longrightarrow \mathbf{C}_{p-1}(K, K_0) \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{\partial_p^K(c)} \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que $\partial_{p-1}^{K, K_0} \circ \partial_p^{K, K_0} = 0$ y por lo tanto el *espacio de p -bordes relativos a K_0* ,

$$\mathbf{B}_p(K, K_0) = \text{Im}(\partial_{p+1}^{K, K_0}),$$

está incluido en el *espacio de p -ciclos relativos a K_0* ,

$$\mathbf{Z}_p(K, K_0) = \text{ker}(\partial_p^{K, K_0}),$$

y queda bien definido el *p -ésimo espacio de homología relativa a K_0* :

$$\mathbf{H}_p(K, K_0) = \frac{\mathbf{Z}_p(K, K_0)}{\mathbf{B}_p(K, K_0)}.$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Teorema 1.2.48 (Teorema de Escisión) Sean K_0 un subcomplejo de K y $U \subseteq |K_0|$ abierto tal que $|K| \setminus U = |L|$ para algún subcomplejo $L \subseteq K$. Sea L_0 el subcomplejo de K tal que $|L_0| = |K_0| \setminus U$. Entonces la inclusión induce un isomorfismo en la homología, i.e.

$$\mathbf{H}_p(L, L_0) \cong \mathbf{H}_p(K, K_0)$$

para todo $p \geq 0$.

Demostración. Sea $\phi = \pi \circ i : \mathbf{C}_p(L) \rightarrow \mathbf{C}_p(K, K_0)$ la composición de mapas dada por la inclusión seguida de la proyección:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C}_p(L) & \xrightarrow{i} & \mathbf{C}_p(K) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{C}_p(K, K_0). \\ & & \searrow \phi & \nearrow & \end{array}$$

Dado que L contiene todos los símlices que no están en K_0 se sigue que ϕ es sobreyectiva. Además son los símlices de L_0 aquellos de L que están en K_0 , por lo que $\ker(\phi) = \mathbf{C}_p(L_0)$. Por lo tanto ϕ induce un isomorfismo

$$\mathbf{C}_p(L, L_0) \cong \mathbf{C}_p(K, K_0)$$

para todo $p \geq 0$. Dado que el operador de borde se preserva bajo este isomorfismo se sigue el resultado. \square

Si K_0 y L_0 son subcomplejos de K y L respectivamente y $f : K \rightarrow L$ es un mapa simplicial tal que $f(\sigma) \in L_0$ para todo $\sigma \in K_0$, decimos que

$$f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$$

es un mapa simplicial de pares. El mapa $f_{\#}$ inducido por f satisface $f_{\#}^p(\mathbf{C}_p(K_0)) \subseteq \mathbf{C}_p(L_0)$ y por lo tanto induce un mapa en los espacios de cadenas relativas bien definido

$$\begin{array}{ccc} f_{\#}^p : \mathbf{C}_p(K, K_0) & \longrightarrow & \mathbf{C}_p(L, L_0) \\ & & \bar{c} \longmapsto \overline{f_{\#}^p(c)} \end{array}$$

que también notamos $f_{\#}$. Dicho mapa conmuta con el operador de borde y por lo tanto induce un morfismo en la homología

$$f_*^p : \mathbf{H}_p(K, K_0) \rightarrow \mathbf{H}_p(L, L_0)$$

que también satisface las propiedades functoriales.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Definición 1.2.49 Sean $f, g : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ mapas simpliciales de pares. Decimos que f y g son contiguos como mapas de pares si tanto $f, g : K \rightarrow L$ como $f, g : K_0 \rightarrow L_0$ son contiguos.

Teorema 1.2.50 Si $f, g : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$ son contiguos como mapas de pares, entonces existen para cada $p \geq 0$ mapas

$$h_p : \mathbf{C}_p(K, K_0) \rightarrow \mathbf{C}_{p+1}(L, L_0)$$

tales que $g_{\#}^p - f_{\#}^p = \partial_{p+1}^{L, L_0} \circ h_p + h_{p-1} \circ \partial_p^{K, K_0}$. Se sigue que $f_*^p = g_*^p$ como morfismos de los espacios de homología relativa para todo $p \geq 0$.

Demostración. La homotopía $h = \{h_p\}_{p \geq 0}$ construida en el teorema 1.2.40 manda p -cadenas de $\mathbf{C}_p(K_0)$ en $(p+1)$ -cadenas de $\mathbf{C}_{p+1}(L_0)$ pues $L(\sigma)$ es un subcomplejo de L_0 para todo $\sigma \in K_0$. Se sigue que h_p induce el mapa deseado en los espacios de homología relativa. \square

La homología relativa a K_0 está vinculada a un complejo conocido como el cono de K respecto a K_0 . Supongamos que K es realizable en \mathbb{R}^n y que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que todo rayo con origen en x interseca a $|K_0|$ en a lo sumo un punto (de no existir tal x en \mathbb{R}^n podemos pensar a K realizado en $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y tomar $x = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$).

Definición 1.2.51 El complejo cono de K respecto a K_0 es el complejo

$$(K, K_0) * x = K \cup \{v_0 \dots v_p x \mid v_0 \dots v_p \in K_0\}.$$

Cuando $K_0 = K$ lo notamos simplemente $K * x$.

Algebraicamente $(K, K_0) * x$ es el complejo simplicial abstracto que contiene todos los símlices de K y además los símlices $\sigma \cup \{x\}$ para todo $\sigma \in K_0$, donde x es un nuevo vértice distinto a los de K .

Para $\sigma = [v_0 \dots v_p] \in \mathbf{C}_p(K)$ una p -cadena elemental, vamos a notar $[x\sigma]$ a la $(p+1)$ -cadena elemental en $\mathbf{C}_{p+1}(K * x)$ dada por $[xv_0 \dots v_p]$. Similarmenete para una p -cadena $c = \sum_i \alpha_i \sigma_i \in \mathbf{C}_p(K)$, $[xc]$ es la $(p+1)$ -cadena en $\mathbf{C}_{p+1}(K * x)$ de la forma

$$\sum_i \alpha_i [x\sigma_i].$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

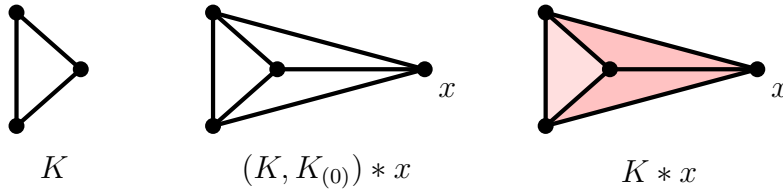


Figura 1.13: A la izquierda el complejo K , en el medio el complejo cono de K respecto a su 0-esqueleto y a la derecha respecto a todo K .

Esta notación da lugar a las siguientes fórmulas para los bordes:

$$\partial_{p+1}^{K*x}([x\sigma]) = \begin{cases} \sigma - [x] & \text{si } p = 0, \\ \sigma - [x\partial_p^K(\sigma)] & \text{si } p > 0, \end{cases}$$

y más generalmente,

$$\partial_{p+1}^{K*x}([xc]) = \begin{cases} c - \sum_i \alpha_i [v_i] & \text{si } p = 0 \text{ y } c = \sum_i \alpha_i [v_i], \\ c - [x\partial_p^K(c)] & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Teorema 1.2.52 Sea K un complejo simplicial. Entonces $\mathbf{H}_0(K * x) \cong \mathbb{K}$ y $\mathbf{H}_p(K * x) \cong \mathbf{0}$ para todo $p > 0$.

Demostración. La homología en dimensión 0 se sigue fácilmente de que $|K * x|$ es conexo: si $[v], [w] \in \mathbf{Z}_0(K * x)$ entonces

$$[v] - [w] = [v] - [w] + [x] - [x] = \partial_1^{K*x}([wx] + [xv]) \in \mathbf{B}_0(K * x),$$

es decir $[v] = [w]$ en $\mathbf{H}_0(K * x)$ y se sigue que $\mathbf{H}_0(K * x) \cong \mathbb{K}$.

Para $p > 0$ sea $c_p^* \in \mathbf{Z}_p(K * x)$ y basta ver que c_p^* es también un p -borde. En efecto, podemos escribir

$$c_p^* = c_p + [xc_{p-1}],$$

donde $c_p \in \mathbf{C}_p(K)$ y $c_{p-1} \in \mathbf{C}_{p-1}(K)$. Tomamos $[xc_p] \in \mathbf{C}_{p+1}(K * x)$ y se sigue que

$$\begin{aligned} c_p^* - \partial_{p+1}^{K*x}([xc_p]) &= c_p + [xc_{p-1}] - c_p + [x\partial_p^K(c_p)] \\ &= [xd_{p-1}], \end{aligned}$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

donde $d_{p-1} = c_{p-1} + \partial_p^K(c_p) \in \mathbf{C}_{p-1}(K)$. Aplicando ∂_p^{K*x} a cada miembro de esta igualdad obtenemos

$$0 = \begin{cases} d_{p-1} - \sum_i \alpha_i[x] & \text{si } p = 1 \text{ y } d_{p-1} = \sum_i \alpha_i[v_i], \\ d_{p-1} - [x\partial_{p-1}^K(d_{p-1})] & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

En cualquier caso se sigue que $d_{p-1} = 0$, y por lo tanto $c_p^* = \partial_{p+1}^{K*x}([xc_p]) \in \mathbf{B}_p(K * x)$ dando el resultado. \square

Proposición 1.2.53 (Homología de un símlice y su borde) *Sea σ un n -símlice y K_σ el complejo que consta de σ y todas sus caras. Entonces $\mathbf{H}_0(K_\sigma) \cong \mathbb{K}$ y $\mathbf{H}_p(K_\sigma) \cong \mathbf{0}$ para todo $p > 0$. Más aún, si $n > 1$ entonces $\mathbf{H}_0((K_\sigma)_{(n-1)}) \cong \mathbf{H}_{n-1}((K_\sigma)_{(n-1)}) \cong \mathbb{K}$ y $\mathbf{H}_p((K_\sigma)_{(n-1)}) \cong \mathbf{0}$ para todo $p \neq 0, n-1$.*

Demostración. El caso $n = 0$ es trivial. Supongamos $\sigma = v_0 \dots v_n$. La primera parte se sigue inmediatamente del teorema 1.2.52 puesto que

$$K_\sigma = K_\tau * v_i,$$

donde $\tau = v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n$ es alguna (cualquiera) de las caras inmediatas de σ . Para ver la segunda parte notamos que $\mathbf{C}_p(K_\sigma) = \mathbf{C}_p((K_\sigma)_{(n-1)})$ para todo $p \neq n$ mientras que $\mathbb{K} \cong \mathbf{C}_n(K_\sigma) \neq \mathbf{C}_n((K_\sigma)_{(n-1)}) \cong \mathbf{0}$. Se sigue que $\mathbf{H}_p(K_\sigma) = \mathbf{H}_p((K_\sigma)_{(n-1)})$ para todo $p \neq n-1$. Para $p = n-1$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{n-1}((K_\sigma)_{(n-1)}) &\stackrel{(*)}{\cong} \mathbf{Z}_{n-1}((K_\sigma)_{(n-1)}) \\ &= \ker \left(\partial_{n-1}^{(K_\sigma)_{(n-1)}} \right) = \ker \left(\partial_{n-1}^{K_\sigma} \right) \\ &\stackrel{(**)}{=} \text{Im} \left(\partial_n^{K_\sigma} \right) = \langle \partial_n^{K_\sigma}(\sigma) \rangle \cong \mathbb{K} \end{aligned}$$

donde $(*)$ vale porque no hay $(n-1)$ -bordes en $\mathbf{C}_{n-1}((K_\sigma)_{(n-1)})$ y $(**)$ porque $\mathbf{H}_{n-1}(K_\sigma) \cong \mathbf{0}$. \square

Teorema 1.2.54 *Sea K_0 un subcomplejo de K . Entonces*

$$\mathbf{H}_0((K, K_0) * x) \cong \mathbf{H}_0(K, K_0) \oplus \mathbb{K}$$

$$\text{y } \mathbf{H}_p((K, K_0) * x) \cong \mathbf{H}_p(K, K_0)$$

para todo $p > 0$.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Idea de la demostración. La primera parte es consecuencia de que $K_0 * x$ es un subcomplejo conexo de $(K, K_0) * x$ mientras que $H_0(K, K_0)$ depende sólo de la parte de K que yace fuera o en el borde de K_0 , por lo que estos espacios difieren justamente de una componente conexa.

Para la segunda parte se puede definir $\phi = \{\phi_p\}_p$ dado por

$$\begin{aligned}\phi_p : \mathbf{C}_p((K, K_0) * x) &\longrightarrow \mathbf{C}_p(K, K_0) \\ c_p^* = c_p + [xc_{p-1}] &\longmapsto \bar{c}_p = c_p + \mathbf{C}_p(K_0)\end{aligned}$$

y se sigue fácilmente que ϕ es un mapa de complejos de cadenas sobre-yectivo y tal que

$$\ker(\phi_p) = \mathbf{C}_p(K_0 * x)$$

para todo $p > 0$. Luego resta ver que ϕ induce un morfismo ϕ_* bien definido en la homología que es además un isomorfismo dando el resultado. \square

1.2.2. Cohomología

En lo que sigue fijamos K un complejo simplicial y \mathbb{K} el cuerpo de coeficientes sobre el que definimos $\mathbf{C}_p(K)$.

Definición 1.2.55 Una p -cocadena es una transformación lineal

$$\phi : \mathbf{C}_p(K) \rightarrow \mathbb{K}.$$

Para una p -cadena elemental $\sigma \in \mathbf{C}_p(K)$, notamos σ^* a la p -cocadena elemental que vale 1 sobre σ y 0 en cualquier otra p -cadena elemental. Con esta notación escribimos

$$\phi = \sum_i \alpha_i \sigma_i^*$$

pues ϕ queda determinada por sus valores sobre una base de $\mathbf{C}_p(K)$.

Las p -cocadenas junto con la suma y multiplicación escalar dadas por:

$$\begin{aligned}\phi + \varphi : c &\longmapsto \phi(c) + \varphi(c) \\ \beta \cdot \phi : c &\longmapsto \beta\phi(c)\end{aligned}$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

forman el \mathbb{K} -espacio vectorial dual a $\mathbf{C}_p(K)$, que notaremos $\mathbf{C}^p(K)$. Por ser el dual en dimensión finita, la dimensión de \mathbf{C}^p coincide con la de \mathbf{C}_p .

Definición 1.2.56 El p -ésimo operador de coborde se define como el dual del operador de borde:

$$\begin{aligned}\delta^p : \mathbf{C}^p(K) &\longrightarrow \mathbf{C}^{p+1}(K) \\ \phi &\longmapsto \delta^p \phi,\end{aligned}$$

donde $\delta^p \phi$ es la $(p+1)$ -cocadena dada por:

$$\begin{aligned}\delta^p \phi : \mathbf{C}_{p+1}(K) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ c &\longmapsto \phi(\partial_{p+1}^K(c))\end{aligned}$$

y la llamamos el coborde de la p -cocadena ϕ .

Observación 1.2.57 Se verifica fácilmente que si $\phi = \sum_i \alpha_i \sigma_i^* \in \mathbf{C}^p(K)$, entonces

$$\delta^p \phi = \sum_i \alpha_i (\delta^p \sigma_i^*).$$

Por lo tanto, $\delta^p \phi$ sólo depende del coborde de cada p -cocadena elemental:

$$\delta^p \sigma^* = \sum_j \beta_j \tau_j^*,$$

donde sumamos sobre los $(p+1)$ -símplices τ_j que tienen a σ de cara y β_j es el signo de σ en $\partial_{p+1}^K(\tau_j)$.

Similar a antes llamamos p -cociclo a toda p -cocadena $\phi \in \mathbf{C}^p$ tal que $\delta^p \phi$ es la transformación nula y p -coborde al coborde de una $(p-1)$ -cocadena, i.e. tenemos los subespacios

$$\mathbf{Z}^p = \ker(\delta^p), \quad \mathbf{B}^p = \text{Im}(\delta^{p-1}).$$

Para $p > 0$ se sigue fácilmente que $\delta^p \circ \delta^{p-1} = 0$ pues $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. En efecto, para todas $\phi \in \mathbf{C}^{p-1}$ y $c \in \mathbf{C}_{p+1}$ es

$$((\delta^p \circ \delta^{p-1})(\phi))(c) = \phi((\partial_p \circ \partial_{p+1})(c)) = \phi(0) = 0,$$

lo cual implica $\mathbf{B}^p \subseteq \mathbf{Z}^p$. Ahora tenemos un complejo de (co)cadenas pero en la dirección opuesta:

$$0 \xleftarrow{\delta^k} \mathbf{C}^k(K) \xleftarrow{\delta^{k-1}} \mathbf{C}^{k-1}(K) \xleftarrow{\delta^{k-2}} \dots \xleftarrow{\delta^1} \mathbf{C}^1(K) \xleftarrow{\delta^0} \mathbf{C}^0(K) \longleftarrow 0,$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

donde k es la dimensión de K .

Definición 1.2.58 El p -ésimo espacio de cohomología de K es el cociente

$$\mathbf{H}^p(K) = \frac{\mathbf{Z}^p(K)}{\mathbf{B}^p(K)}.$$

Observación 1.2.59 Por estar trabajando con un cuerpo de coeficientes \mathbb{K} tenemos que

$$\mathbf{H}^p(K) \cong (\mathbf{H}_p(K))^*,$$

donde $(\mathbf{H}_p(K))^*$ denota el espacio dual de $\mathbf{H}_p(K)$. Más aún, dado que nuestros complejos son finitos estos espacios son todos finitamente generados e isomorfos entre sí:

$$\mathbf{H}^p(K) \cong \mathbf{H}_p(K).$$

Un mapa simplicial $f : K \rightarrow L$ induce también un mapa de cocadenas para todo $p \geq 0$, pero en la dirección opuesta:

$$\begin{aligned} f_p^\# : \mathbf{C}^p(L) &\longrightarrow \mathbf{C}^p(K) \\ \phi &\longmapsto (c \longmapsto \phi(f_p^\#(c))). \end{aligned}$$

Ahora conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^p(L) & \xrightarrow{\delta_L^p} & \mathbf{C}^{p+1}(L) \\ \downarrow f_p^\# & & \downarrow f_{p+1}^\# \\ \mathbf{C}^p(K) & \xrightarrow{\delta_K^p} & \mathbf{C}^{p+1}(K) \end{array}$$

En efecto si $\phi \in \mathbf{C}^p(L)$, entonces

$$\delta_K^p f_p^\#(\phi) : c \longmapsto f_p^\#(\phi)(\partial_{p+1}^K(c)) = \phi(f_p^\#(\partial_{p+1}^K(c)))$$

mientras que

$$f_{p+1}^\#(\delta_L^p \phi) : c \longmapsto \delta_L^p \phi(f_{p+1}^\#(c)) = \phi(\partial_{p+1}^L(f_{p+1}^\#(c)))$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

y las dos expresiones que están en el argumento de ϕ coinciden gracias a la conmutatividad de los diagramas en la homología (ver proposición 1.2.37).

Proposición 1.2.60 Para $f : K \rightarrow L$ un mapa simplicial y $p \geq 0$ se tiene que

$$f_p^\#(\mathbf{Z}^p(L)) \subseteq \mathbf{Z}^p(K) \text{ y } f_p^\#(\mathbf{B}^p(L)) \subseteq \mathbf{B}^p(K).$$

Se sigue que f induce un morfismo en los espacios de cohomología bien definido

$$f_p^* : \mathbf{H}^p(L) \longrightarrow \mathbf{H}^p(K).$$

Demostración. Es igual que en la parte de homología. □

1.3. Ejemplos y filtraciones

Sabemos que hay espacios topológicos no triangulables por un complejo simplicial. Podemos pedir menos y preguntarnos cuándo un espacio es homotópicamente equivalente a un complejo simplicial. Motivados por esto continuamos con el concepto de nervio, un complejo asociado al cubrimiento de un espacio topológico.

Nervio

Definición 1.3.61 Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de dicho espacio. Definimos el nervio de \mathcal{C} como el complejo simplicial $N(\mathcal{C})$ que tiene de vértices al conjunto de índices I y un k -símplice $i_0 \dots i_k \in N(\mathcal{C})$ si y sólo si

$$\bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset.$$

El nervio depende del cubrimiento elegido y X puede admitir infinitos cubrimientos distintos.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Teorema 1.3.62 (Teorema del Nervio [7]) *Sea \mathcal{U} un cubrimiento por abiertos finito de un espacio topológico X tal que toda intersección no vacía de elementos de \mathcal{U} es contráctil. Entonces X es homotópicamente equivalente a $|N(\mathcal{U})|$.*

El Teorema 1.3.62 no vale para espacios topológicos arbitrarios sino para aquellos “buenos” que admiten cubrimientos de intersecciones contráctiles. En general lo que vale es que existe un nervio “débilmente equivalente” al espacio (consultar [8]).

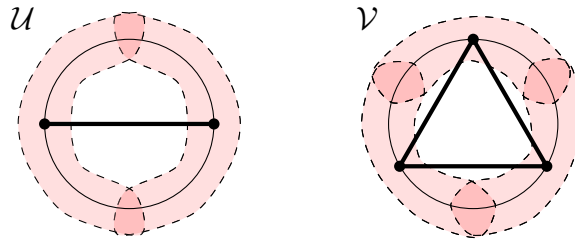


Figura 1.14: Dos cubrimientos \mathcal{U} y \mathcal{V} de S^1 y sus nervios $N(\mathcal{U})$ y $N(\mathcal{V})$. El de la izquierda no tiene intersecciones contráctiles; el de la derecha sí las tiene y por lo tanto $|N(\mathcal{V})|$ es homotópicamente equivalente a S^1 .

Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ son dos cubrimientos de un espacio X , un *mapa de cubrimientos* de \mathcal{U} a \mathcal{V} es una función

$$\xi : I \rightarrow J$$

tal que $U_i \subseteq V_{\xi(i)}$ para todo $i \in I$. Un mapa como este induce un mapa simplicial entre los nervios

$$\begin{aligned} N(\xi) : N(\mathcal{U}) &\longrightarrow N(\mathcal{V}) \\ i_0 \dots i_k &\longmapsto \xi(i_0) \dots \xi(i_k) \end{aligned}$$

dado que $\xi(i_0) \dots \xi(i_k) \in N(\mathcal{V})$ para todo $i_0 \dots i_k \in N(\mathcal{U})$ pues

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \subseteq \bigcap_{j=0}^k V_{\xi(i_j)}.$$

Más aún, si $\xi, \zeta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ son dos mapas de cubrimientos, los mapas simpliciales inducidos son contiguos pues para todo i es

$$U_i \subseteq V_{\xi(i)} \cap V_{\zeta(i)}.$$

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Cuando estudiamos datos con topología pensamos a estos como una nube de puntos $P \subseteq \mathbb{R}^d$ que proviene de algún espacio topológico subyacente X del cual queremos inferir, por ejemplo, su homología. En este contexto P es un espacio métrico finito y discreto que carece de propiedades topológicas interesantes. Es por esto que uno reemplaza a P por un complejo simplicial que se parezca a X en algún sentido.

Vietoris-Rips y Čech

Definición 1.3.63 Sean (X, d) un espacio métrico finito y $\varepsilon > 0$. El complejo de Vietoris-Rips de X a escala ε es el complejo simplicial que tiene de vértices al conjunto X y

$$\sigma \in \mathbb{V}\mathbb{R}_\varepsilon(X) \text{ si y sólo si } d(x, y) \leq 2\varepsilon$$

para todo par de vértices $x, y \in V(\sigma)$. Usamos $\mathbb{V}\mathbb{R}_\varepsilon(X)$ para referirnos a este complejo.

Observación 1.3.64 El Vietoris-Rips de X está completamente determinado por su 1-esqueleto ya que $v_0 \dots v_p \in \mathbb{V}\mathbb{R}_\varepsilon(X)$ si y sólo si $v_i v_j \in \mathbb{V}\mathbb{R}_\varepsilon(X)$ para todo par $0 \leq i, j \leq p$.

Definición 1.3.65 Sean (X, d) un espacio métrico, $P \subseteq X$ finito y $\varepsilon > 0$. El complejo de Čech de P a escala ε es el nervio del cubrimiento de P dado por la colección de bolas cerradas $\{\overline{B_\varepsilon(p)}\}_{p \in P}$. Notamos $\mathbb{C}_\varepsilon(P)$ a dicho complejo.

Observación 1.3.66 Cuando (X, d) es un espacio euclídeo las bolas son convexas y sus intersecciones contráctiles. Luego el Teorema 1.3.62 nos dice que el espacio $\bigcup_{p \in P} \overline{B_\varepsilon(p)}$ es homotópicamente equivalente a $|\mathbb{C}_\varepsilon(P)|$.

Lema 1.3.67 Sea (X, d) un espacio métrico tal que para todo $r > 0$ y todos $x, y \in X$ con $d(x, y) \leq 2r$ se tiene $B_r(x) \cap B_r(y) \neq \emptyset$ y sea $P \subseteq X$ finito. Entonces los 1-esqueletos de $\mathbb{C}^r(P)$ y $\mathbb{V}\mathbb{R}^r(P)$ coinciden.

Demostración. Por definición $vw \in \mathbb{V}\mathbb{R}^r(P)$ si y sólo si $d(v, w) \leq 2r$. Pero por la propiedad que cumple X esto equivale a $B_r(v) \cap B_r(w) \neq \emptyset$, lo cual es precisamente $vw \in \mathbb{C}^r(P)$. \square

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Proposición 1.3.68 Sea P un subconjunto finito de un espacio métrico (X, d) . Entonces

$$\mathbb{C}^r(P) \subseteq \mathbb{V}\mathbb{R}^r(P) \subseteq \mathbb{C}^{2r}(P).$$

Demostración. La primer inclusión es consecuencia de la desigualdad triangular: si $\sigma \in \mathbb{C}^r(P)$ y p, q son dos de sus vértices, debe existir $s \in B_r(p) \cap B_r(q)$ y luego $d(p, q) \leq d(p, s) + d(s, q) \leq 2r$. Para ver la segunda inclusión consideramos $\sigma = p_0 p_1 \dots p_s \in \mathbb{V}\mathbb{R}^r(P)$. Luego por definición $d(p_i, p_j) \leq 2r$ para todo $0 \leq i, j \leq s$. En particular $d(p_0, p_i) \leq 2r$ para todo $0 \leq i \leq s$, es decir, $p_0 \in \bigcap_{i=0}^s B_{2r}(p_i) \neq \emptyset$ dando el resultado. \square

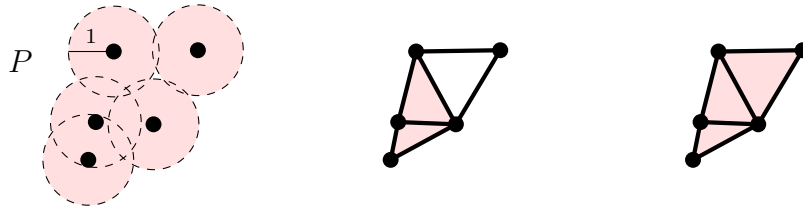


Figura 1.15: A la izquierda una colección P cubierta por $\{B_1(p)\}_{p \in P}$. En el centro el complejo $\mathbb{C}_1(P)$ y a la derecha $\mathbb{V}\mathbb{R}_1(P)$.

Cuando pensamos a P como una muestra de un espacio X a inferir, el complejo de Čech es geoméricamente más “fiel” a X . Por ejemplo, en [9] se demuestra que si ε es lo suficientemente chico y P lo suficientemente denso, $\bigcup_{p \in P} \overline{B_\varepsilon(p)}$ tiene la misma homología que X con probabilidad tendiendo a 1. Sin embargo este complejo es muy costoso computacionalmente ya que depende del espacio ambiente donde vive P y hay que calcular todas las posibles intersecciones de bolas. En cambio el complejo de Vietoris-Rips sólo depende de sus aristas y puede calcularse eficientemente a partir de la matriz de distancias de P .

Por otro lado la elección de ε no es trivial: para valores chicos los puntos no llegan a conectarse y para valores suficientemente grandes nos queda un complejo contráctil de dimensión alta. En lugar de buscar un valor óptimo para ε la idea será considerar todos los posibles y asociar a P una filtración de complejos simpliciales.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Filtraciones

Definición 1.3.69 Dado un complejo simplicial K , una filtración \mathcal{F} de K es una sucesión anidada de subcomplejos de K , i.e.

$$\mathcal{F} : \emptyset = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow K_n = K.$$

\mathcal{F} se dice *expandida* si $K_i \setminus K_{i-1}$ es un único s3mplice para todo i .

Ejemplo 1.3.70 Consideremos un complejo simplicial K y una funci3n $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\sigma') \leq f(\sigma)$ para todo $\sigma' \subseteq \sigma$. Esta propiedad garantiza que las preimágenes $f^{-1}(-\infty, a]$ sean subcomplejos de K . Con esto, una sucesi3n de n3meros reales $-\infty = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = +\infty$ da lugar a la filtraci3n

$$\emptyset = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow K_n = K,$$

donde $K_i = f^{-1}(-\infty, a_i]$. A una funci3n f con esta propiedad la llamamos *simplicial mon3tona*.

Ejemplo 1.3.71 Sea K un complejo simplicial y $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}$ una funci3n sobre sus v3rtices. Supongamos que $V(K) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de manera tal que sea

$$f(v_1) \leq f(v_2) \leq \dots \leq f(v_n).$$

Esto da lugar a la filtraci3n

$$\emptyset = K_{f(v_0)} \hookrightarrow K_{f(v_1)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow K_{f(v_n)} = K$$

donde v_0 es un v3rtice ficticio con valor $f(v_0) = -\infty$ y $K_{f(v_i)}$ denota el complejo de s3mplices generados por v3rtices en $\{v_j\}_{j \leq i}$. La figura 1.16 muestra un ejemplo de tal filtraci3n.

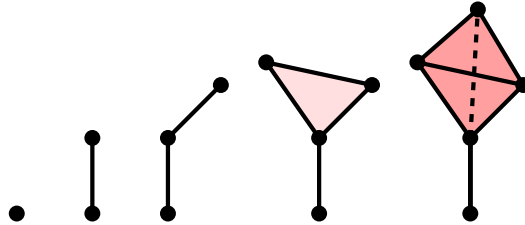


Figura 1.16: La filtraci3n inducida por una funci3n f de altura sobre los v3rtices de K . De izquierda a derecha los complejos $K_{f(v_i)}$ en sentido creciente.

1. HOMOLOGÍA SIMPLICIAL

Ejemplo 1.3.72 Sea $P \subseteq X$ un subconjunto finito de un espacio métrico. Dado que $\mathbb{VR}_\varepsilon(P) \subseteq \mathbb{VR}_{\varepsilon'}(P)$ siempre que $\varepsilon \leq \varepsilon'$, obtenemos una filtración indexada en la escala ε . Dicha colección $\mathcal{F}_{\mathbb{VR}}(P) = \{\mathbb{VR}_\varepsilon(P)\}_{\varepsilon \geq 0}$ es la filtración de Vietoris-Rips de P . Como P es finito $\mathcal{F}_{\mathbb{VR}}(P)$ puede escribirse como sigue:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{VR}}(P) : \emptyset = \mathbb{VR}_{-\infty}(P) \hookrightarrow \mathbb{VR}_{d_0}(P) \hookrightarrow \mathbb{VR}_{d_1}(P) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathbb{VR}_{d_N}(P),$$

donde $0 = d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_N = \text{diam}(P)$ son los valores en la matriz de distancias de P ordenados en forma creciente.

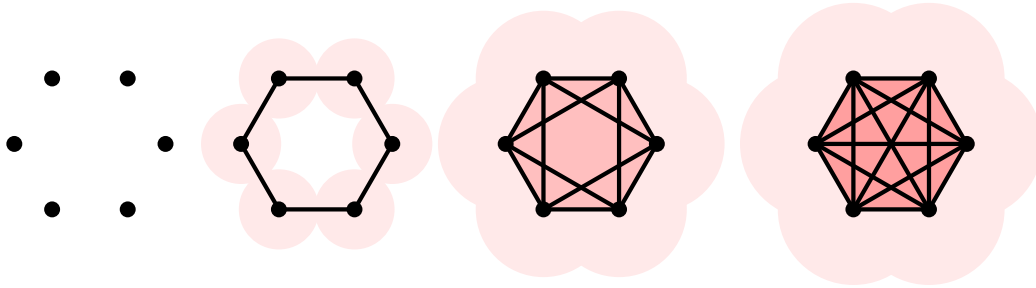


Figura 1.17: La filtración de Vietoris-Rips de P siendo P los vértices de un hexágono regular.

Observación 1.3.73 Toda filtración simplicial es inducida como en el ejemplo 1.3.70. En efecto, si \mathcal{F} es una filtración de K y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a todo símlice $\sigma \in K_i \setminus K_{i-1}$ con $K_i \neq K_{i-1}$ le asigna el valor $f(\sigma) = i$, entonces f da lugar a la filtración \mathcal{F} .

Para concluir el capítulo observamos que las inclusiones en una filtración son mapas simpliciales y por lo tanto inducen morfismos en los espacios de homología:

$$0 \cong \mathbf{H}_p(K_0) \xrightarrow{(i_0)_*^p} \mathbf{H}_p(K_1) \xrightarrow{(i_1)_*^p} \mathbf{H}_p(K_2) \longrightarrow \dots \xrightarrow{(i_{n-1})_*^p} \mathbf{H}_p(K_n),$$

donde $i_j : K_j \hookrightarrow K_{j+1}$.

2

Persistencia

En este capítulo motivados por el estudio de la homología en una filtración de complejos simpliciales introduciremos los módulos de persistencia usando el lenguaje de la teoría de *quivers* y daremos algunos resultados fundamentales siguiendo [10] y [5]. Luego definiremos los diagramas de persistencia y presentaremos algunas de sus posibles vectorizaciones.

2.1. Módulos de persistencia

Definición 2.1.1 Un quiver es un multigrafo dirigido que admite loops y múltiples flechas entre dos vértices. Un quiver finito es aquel que consta de finitos nodos y flechas.

Vamos a estudiar un caso particular de quivers que notaremos L_n para $n \in \mathbb{N}$: aquellos con n nodos, lineales y con todas las flechas orientadas en el mismo sentido como el que muestra la figura 2.1.

Definición 2.1.2 Una representación \mathbb{V} de un quiver q sobre un cuerpo \mathbb{K} es una realización de q como diagrama de \mathbb{K} -espacios vectoriales y transformaciones lineales en los nodos y flechas de q respectivamente. \mathbb{V} se dice de dimensión finita cuando los espacios son todos de dimensión finita.

2. PERSISTENCIA

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
 1 & & 2 & & & & n-1 & & n \\
 \\
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathbb{1}} & \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathbf{0}} & \mathbf{0} & \xrightarrow{\mathbf{0}} & \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\mathbf{0}} & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Figura 2.1: Arriba un quiver L_n y abajo una posible representación de L_5 sobre \mathbb{K} .

Definición 2.1.3 Un módulo de persistencia es una representación de dimensión finita de L_n .

Por ejemplo, como ya mencionamos las inclusiones en una filtración inducen morfismos en los espacios de homología. Es decir, para $p \geq 0$ tenemos el siguiente módulo de persistencia:

$$\mathbf{H}_p(K_0) \xrightarrow{h_0^p} \mathbf{H}_p(K_1) \xrightarrow{h_1^p} \mathbf{H}_p(K_2) \longrightarrow \dots \xrightarrow{h_{n-1}^p} \mathbf{H}_p(K_n),$$

donde h_j^p es el morfismo inducido por la inclusión $K_j \hookrightarrow K_{j+1}$.

En lo que sigue fijamos un quiver q y un cuerpo \mathbb{K} . Un morfismo $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ entre dos representaciones \mathbb{V} y \mathbb{W} de q sobre \mathbb{K} es una colección de transformaciones lineales

$$f_i : \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{W}_i$$

en los nodos \bullet_i de q tales que para cada flecha $\bullet_i \xrightarrow{a} \bullet_j$ de q el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{V}_i & \xrightarrow{\phi_a^{\mathbb{V}}} & \mathbb{V}_j \\
 \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\
 \mathbb{W}_i & \xrightarrow{\phi_a^{\mathbb{W}}} & \mathbb{W}_j
 \end{array}$$

f se dice monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo de representaciones cuando todas las f_i son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas respectivamente.

Ejemplo 2.1.4 Si K y L son complejos simpliciales y $f : K \rightarrow L$ un mapa simplicial, los complejos de cadenas con coeficientes en \mathbb{K} , $(\mathbf{C}_\bullet(K), \partial_\bullet^K)$,

2. PERSISTENCIA

$(\mathbf{C}_\bullet(L), \partial_\bullet^L)$, definidos en el capítulo anterior son representaciones del quiver L_N sobre \mathbb{K} , donde $N = \max\{\dim(K), \dim(L)\}$, y el mapa de complejos de cadenas $f_\#$ inducido por f es un morfismo entre dichas representaciones.

La composición de dos morfismos de representaciones $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es un morfismo de representaciones y se define componiendo cada par de transformaciones, es decir $g \circ f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ es la colección

$$(g \circ f)_i = g_i \circ f_i : \mathbb{U}_i \rightarrow \mathbb{W}_i.$$

Además toda representación \mathbb{V} admite un morfismo identidad $\mathbb{1}_\mathbb{V} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ dado por la colección de identidades $(\mathbb{1}_\mathbb{V})_i = \mathbb{1}_{\mathbb{V}_i}$.

La suma de dos representaciones \mathbb{V} y \mathbb{W} es la representación $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ con espacios vectoriales $\mathbb{V}_i \oplus \mathbb{W}_i$ y transformaciones

$$\phi_a^\mathbb{V} \oplus \phi_a^\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \phi_a^\mathbb{V} & 0 \\ 0 & \phi_a^\mathbb{W} \end{pmatrix}.$$

El “cero” de las representaciones o representación trivial es aquella con todos espacios triviales y transformaciones nulas. Decimos que una representación no trivial es *descomponible* cuando es isomorfa a la suma directa de dos representaciones no triviales, y en caso contrario decimos que es *indescomponible*.

También podemos definir el núcleo, imagen y conúcleo de un morfismo de representaciones $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$. Concretamente, se definen poniendo en cada nodo de q el espacio $\ker(\phi_i)$, $\text{Im}(\phi_i)$, $\text{coker}(\phi_i)$ respectivamente, y en las flechas los morfismos inducidos por aquellos entre \mathbb{V} y \mathbb{W} .

Todas estas son propiedades que heredan las representaciones de los espacios vectoriales (los cuales pueden pensarse como representaciones de un único nodo sin flechas). Sin embargo hay otras que los espacios vectoriales poseen pero las representaciones no. La *semisimplicidad* es un ejemplo de ellas: todo subespacio vectorial $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ posee un complemento \mathbb{T} en suma directa tal que $\mathbb{V} \cong \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$. Contrariamente la representación

$$\mathbb{W} = \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{K}$$

es una subrepresentación de $\mathbb{V} = \mathbb{K} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{K}$, i.e. sus espacios son subespacios y sus transformaciones las restricciones de aquellas en \mathbb{V} , pero \mathbb{W} no

2. PERSISTENCIA

está en suma directa, es decir no existe otra subrepresentación \mathbb{U} tal que $\mathbb{V} \cong \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$.

Un problema central en la teoría de quivers es el de caracterizar las clases de representaciones isomorfas de q sobre \mathbb{K} . Para representaciones de dimensión finita la clasificación depende sólo de las dimensiones de los espacios y de los rangos de todas las transformaciones y sus composiciones. Enunciamos sin demostración el siguiente resultado para tales representaciones de quivers finitos.

Teorema 2.1.5 (Krull, Remak, Schmidt [11]) *Sea q un quiver finito y sea \mathbb{V} una representación de dimensión finita de q sobre un cuerpo \mathbb{K} . Entonces existen representaciones no triviales indescomponibles $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \dots \mathbb{V}_r$ de q sobre \mathbb{K} tales que*

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_r.$$

Más aún, la descomposición es única salvo isomorfismo y reordenamiento de los sumandos.

El Teorema 2.1.5 convierte el problema de caracterización de representaciones en identificar las clases de representaciones indescomponibles de q . Los quivers L_n además de ser finitos se dicen de *tipo finito*: pertenecen al conjunto de quivers que admiten finitas clases de representaciones indescomponibles de dimensión finita.

Definición 2.1.6 Para $1 \leq b \leq d \leq n$, llamamos representación de intervalo y notamos $\mathbb{1}_n[b, d]$ a la siguiente representación de L_n :

$$\underbrace{\mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0}}_{[1, b-1]} \xrightarrow{\mathbf{0}} \underbrace{\mathbb{K} \xrightarrow{\mathbf{1}} \dots \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{K}}_{[b, d]} \xrightarrow{\mathbf{0}} \underbrace{\mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0}}_{[d+1, n]}$$

Notamos que una representación de intervalo $\mathbb{1}_n[b, d]$ es esencialmente un vector que “vive” o “persiste” desde el índice b hasta morir en d . El teorema a continuación nos dice que estas caracterizan las representaciones indescomponibles de los quivers L_n (esto es un caso especial del Teorema de Gabriel [12]).

2. PERSISTENCIA

Teorema 2.1.7 *Toda representación de dimensión finita de L_n sobre \mathbb{K} indecomponible es isomorfa a una representación de intervalo $\mathbb{1}_n[b, d]$ para ciertos $b, d \in [1, n]$.*

Demostración. Por inducción en n . Las representaciones de dimensión finita de L_1 se corresponden con \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita en el único nodo de L_1 , por lo que aquellas indecomponibles deben ser isomorfas a la representación $\mathbb{V} = \mathbb{K}$, es decir $\mathbb{V} = \mathbb{1}_1[1, 1]$.

Ahora supongamos que el teorema vale para n y sea \mathbb{V} una representación de dimensión finita indecomponible de L_{n+1} . Como \mathbb{V} es indecomponible también lo es $\tilde{\mathbb{V}}$, la representación de L_n dada por los primeros n espacios $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n$ de \mathbb{V} y las respectivas transformaciones $\phi_{i, i+1}^{\mathbb{V}} : \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Luego la hipótesis inductiva nos dice que $\tilde{\mathbb{V}}$ es isomorfa a $\mathbb{1}_n[\tilde{b}, \tilde{d}]$ para ciertos $\tilde{b}, \tilde{d} \in [1, n]$.

Como \mathbb{V} es indecomponible, se sigue que deben ser $\mathbb{V}_{n+1} = \mathbf{0}$ y $\phi_{n, n+1}^{\mathbb{V}} = 0$, o bien $\mathbb{V}_{n+1} \cong \mathbb{K}$ y $\phi_{n, n+1}^{\mathbb{V}} = \mathbb{1}$. En el primer caso \mathbb{V} es isomorfa a $\mathbb{1}_{n+1}[\tilde{b}, \tilde{d}]$ y en el segundo a $\mathbb{1}_{n+1}[\tilde{b}, n+1]$, dando el resultado. \square

Como corolario tenemos una respuesta al problema de clasificación de representaciones para los quivers L_n .

Corolario 2.1.8 *Sea \mathbb{V} una representación de dimensión finita de L_n sobre \mathbb{K} . Entonces existen representaciones de intervalo $\mathbb{1}_n[b_1, d_1], \dots, \mathbb{1}_n[b_{N_{\mathbb{V}}}, d_{N_{\mathbb{V}}}]$ tales que*

$$\mathbb{V} \cong \mathbb{1}_n[b_1, d_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{1}_n[b_{N_{\mathbb{V}}}, d_{N_{\mathbb{V}}}]$$

y la descomposición es única salvo isomorfismo y reordenamiento de los sumandos.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los teoremas 2.1.5 y 2.1.7. \square

Observación 2.1.9 Todo módulo de persistencia \mathbb{V} contiene un submódulo que se obtiene esencialmente descartando la parte efímera (que no persiste) de \mathbb{V} . Concretamente, para cada i existen subespacios de dimensión máxima $\mathbb{E}_i \subseteq \mathbb{V}_i$ tales que

$$\ker(\phi_{i, i+1}^{\mathbb{V}}) = \text{Im}(\phi_{i-1, i}^{\mathbb{V}}) \oplus \mathbb{E}_i.$$

2. PERSISTENCIA

Luego está bien definida la representación

$$\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{E}} = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{E}_1} \xrightarrow{\varphi_{1,2}} \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{E}_2} \xrightarrow{\varphi_{2,3}} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1,n}} \frac{\mathbb{V}_n}{\mathbb{E}_n},$$

donde $\varphi_{i,i+1}$ son los morfismos inducidos por pasar al cociente, que están bien definidos pues $\mathbb{E}_i \subset \ker(\phi_{i,i+1}^{\mathbb{V}})$. Aunque dependa de la elección de los \mathbb{E}_i , esta construcción es única salvo isomorfismo y se corresponde con eliminar los intervalos degenerados en la descomposición de \mathbb{V} . Es decir, $\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{E}}$ se descompone como una suma de intervalos no degenerados:

$$\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{E}} \cong \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{1}_n[b_j, d_j]$$

con $b_j < d_j$ para todo j .

Sea \mathcal{F} una filtración de complejos simpliciales. Tenemos naturalmente un módulo de persistencia $\mathbf{H}(\mathcal{F})$ inducido por la homología de dicha filtración:

$$\mathbf{H}(\mathcal{F}) : \mathbf{H}_p(K_0) \xrightarrow{h_p^{0,1}} \mathbf{H}_p(K_1) \xrightarrow{h_p^{1,2}} \mathbf{H}_p(K_2) \longrightarrow \dots \xrightarrow{h_p^{n-1,n}} \mathbf{H}_p(K_n). \quad (2.1)$$

En general para $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$ definimos:

$$\begin{aligned} h_p^{i,i} &= \mathbb{1} \\ h_p^{i,k} &= h_p^{j,k} \circ h_p^{i,j}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.10 Los p -ésimos espacios persistentes de homología son las imágenes de los morfismos $h_p^{i,j}$ en un módulo de homología:

$$\mathbf{H}_p^{i,j} = \text{Im}(h_p^{i,j})$$

para $0 \leq i \leq j \leq n$. Los p -ésimos números persistentes de Betti son sus dimensiones

$$\beta_p^{i,j} = \dim \mathbf{H}_p^{i,j}.$$

Observación 2.1.11 Los elementos en $\mathbf{H}_p^{i,j}$ son clases de ciclos homólogos que persisten desde i a j . Es decir, se tiene que

$$\mathbf{H}_p^{i,j} \cong \frac{\mathbf{Z}_p(K_i)}{\mathbf{Z}_p(K_i) \cap \mathbf{B}_p(K_j)}.$$

2. PERSISTENCIA

Definición 2.1.12 Decimos que una clase no trivial $[c] \in \mathbf{H}_p(K_a)$ nació en i ($i \leq a$) si $[c] \in \mathbf{H}_p^{i,a}$ pero $[c] \notin \mathbf{H}_p^{i-1,a}$. Similarmente, $[c] \in \mathbf{H}_p(K_a)$ muere en j ($a < j$) si $h_p^{a,j-1}([c])$ es no trivial pero $h_p^{a,j}([c]) = 0$.

Cuando una clase $[c]$ nace, también nacen todas las clases $[c] + [c']$ con $[c] \neq [c'] \neq 0$ y, de forma análoga, cuando $[c]$ muere (se fusiona con la clase trivial), las clases $[c] + [c']$ se fusionan con sus respectivas clases $[c']$.

Observación 2.1.13 Si $[c] \in \mathbf{H}_p(K_{j-1})$ es una clase que muere en j , entonces $[c]$ nació en i si y sólo si existen $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k = i$ tales que $0 \neq [c_{i_l}] \in H_p(K_{j-1})$ nació en i_l para todo $1 \leq l \leq k$ y

$$[c] = [c_{i_1}] + [c_{i_2}] + \dots + [c_{i_k}].$$

2.2. Diagramas de persistencia

Vamos a definir los *diagramas de persistencia*, una representación gráfica de los módulos de persistencia. Consideramos el plano extendido $\bar{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^2$ en el cual un par (a_i, a_j) representa una clase que nace en i y muere en j .

Definición 2.2.14 Para $0 < i < j \leq n + 1$ definimos la función de pares de persistencia:

$$\mu_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}).$$

Observación 2.2.15 El primer término de $\mu_p^{i,j}$ cuenta el número de clases independientes en $\mathbf{H}_p(K_{j-1})$ que persisten desde i hasta $j - 1$ y mueren al entrar en j , mientras que el segundo cuenta las que persisten desde $i - 1$ y mueren al entrar en j . La diferencia cuenta por lo tanto aquellas que nacen en i y mueren en j .

Extendemos el módulo de homología en (2.1) poniendo $\mathbf{H}_p(K_{n+1}) = \mathbf{0}$ y $h_p^{n,n+1} = \mathbf{0}$, de modo que $\mu_p^{i,n+1}$ cuenta el número de clases independientes que nacen en i y nunca mueren.

2. PERSISTENCIA

Definición 2.2.16 Si $\mu_p^{i,j} \neq 0$, la persistencia $\text{Pers}([c])$ de una clase $[c]$ que nace en i y muere en j es la diferencia

$$\text{Pers}([c]) = a_j - a_i,$$

donde $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} = +\infty$ son los valores asociados a la filtración mediante la observación 1.3.73. Cuando $j = n + 1$ ponemos $\text{Pers}([c]) = +\infty$.

Definición 2.2.17 El diagrama de persistencia $\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f)$ de una filtración \mathcal{F}_f inducida por una función f es el multiconjunto que se obtiene marcando los puntos (a_i, a_j) con multiplicidad $\mu_p^{i,j} \neq 0$ ($i < j$) en el plano extendido $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Debido a un tecnicismo que luego nos permitirá definir una métrica, incluimos en un diagrama de persistencia los puntos en la diagonal $y = x$ con multiplicidad infinita.

Definición 2.2.18 Los puntos esenciales de persistencia en un diagrama son aquellos ubicados en la recta $y = +\infty$, que se corresponden con clases de homología que nunca mueren.

Una forma alternativa de representar la persistencia es con barras, dando lugar a un *código de barras*, donde el par (a_i, a_j) se corresponde con la barra $[a_i, a_j)$ (el extremo abierto indica que la clase muere y deja de existir al entrar en j).

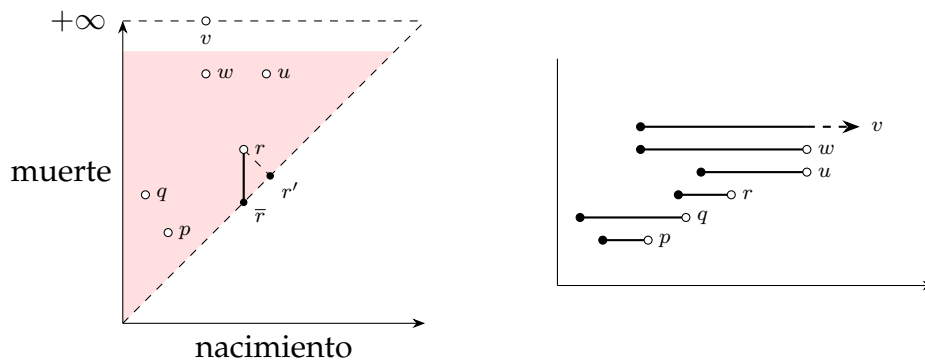


Figura 2.2: Un diagrama de persistencia y su código de barras asociado.

2. PERSISTENCIA

- Lema 2.2.19**
1. Una clase con persistencia s es representada en el diagrama por un punto a distancia $\frac{s}{\sqrt{2}}$ de la diagonal.
 2. Si m_i es la multiplicidad de un punto esencial $(a_i, +\infty)$ en el diagrama, entonces $\sum_i m_i = \beta_p(K_n)$.

Demostración. 1. Es inmediato observando el triángulo rectángulo que forman r , r' y \bar{r} en el diagrama de la figura 2.2, donde r' es la proyección de r sobre la diagonal y $s = a_j - a_i$ la persistencia del punto $r = (a_i, a_j)$.

2. Por definición $m_i = \mu_p^{i,n+1}$ es la cantidad de clases independientes que nacen en i y nunca mueren, por lo que sumando sobre i obtenemos el número de clases independientes de p -ciclos homólogos esenciales, es decir $\dim \mathbf{H}_p(K_n)$. □

Teorema 2.2.20 Para todo par de índices $0 \leq k \leq l \leq n$ y todo $p \geq 0$, el p -ésimo número persistente de Betti satisface

$$\beta_p^{k,l} = \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} \mu_p^{i,j}.$$

Demostración. Se sigue rápidamente usando la definición de $\mu_p^{i,j}$ y simplificando las sumas telescópicas:

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} \mu_p^{i,j} &= \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} [(\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j})] \\ &= \sum_{i \leq k} [(\beta_p^{i,l} - \beta_p^{i,n+1}) - (\beta_p^{i-1,l} - \beta_p^{i-1,n+1})] \\ &= \sum_{i \leq k} [(\beta_p^{i,l} - \beta_p^{i-1,l}) - (\beta_p^{i,n+1} - \beta_p^{i-1,n+1})] \\ &= (\beta_p^{k,l} - \beta_p^{0,l}) - (\beta_p^{k,n+1} - \beta_p^{0,n+1}) = \beta_p^{k,l}. \end{aligned}$$
□

Observación 2.2.21 El número persistente de Betti $\beta_p^{k,l}$ es la cantidad de puntos del diagrama (contados con sus multiplicidades) que aparecen en el cuadrante superior izquierdo de esquina (a_k, a_l) , cerrado a la derecha y abierto abajo.

2. PERSISTENCIA

Distancia de Bottleneck y estabilidad

Los diagramas de persistencia son estables, es decir, pequeñas alteraciones en la función f que induce la filtración da lugar a pequeños cambios en el respectivo diagrama. Sean \mathcal{F}_f y \mathcal{F}_g dos filtraciones inducidas por las funciones f y g y sea

$$\Pi = \{\pi : \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f) \rightarrow \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g) : \pi \text{ biyectiva}\}.$$

Dado que incluimos en la definición de diagrama los puntos de la diagonal con multiplicidad infinita Π resulta no vacío. La norma infinito entre dos puntos $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ es

$$\|x - y\|_\infty = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

donde asumimos $\infty - \infty = 0$.

Definición 2.2.22 La distancia de Bottleneck entre dos diagramas se define como sigue:

$$d_b(\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f), \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)) = \inf_{\pi \in \Pi} \sup_{x \in \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f)} \|x - \pi(x)\|_\infty.$$

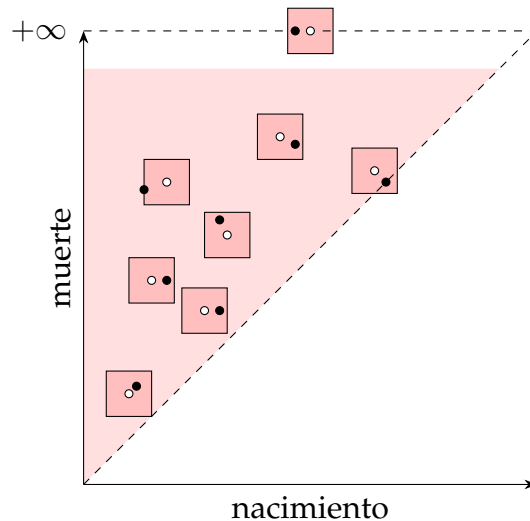


Figura 2.3: La distancia de Bottleneck entre dos diagramas de persistencia, la cual coincide con la mitad de la longitud de los lados de cada cuadrado.

2. PERSISTENCIA

La distancia d_b es una métrica en el espacio de diagramas de persistencia: vale la desigualdad triangular y, dado que incluyen los puntos de la diagonal con multiplicidad infinita, dos diagramas son distintos si y sólo si difieren sus puntos fuera de la diagonal, es decir

$$d_b(X, Y) = 0 \text{ si y sólo si } X = Y.$$

Sin embargo, cuando se la define sobre el espacio de módulos de homología como la distancia entre los diagramas inducidos:

$$d_b(\mathbf{H}(\mathcal{F}_f), \mathbf{H}(\mathcal{F}_g)) := d_b\left(\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f), \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)\right)$$

resulta una pseudo-métrica pues dos módulos con distintos intervalos degenerados en su descomposición no son isomorfos pero pueden dar lugar al mismo diagrama de persistencia.

Tenemos el siguiente resultado de estabilidad originalmente demostrado en [2].

Teorema 2.2.23 (Estabilidad de los diagramas de persistencia) *Sea K un complejo simplicial y sean $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones simpliciales monótonas dando lugar a dos filtraciones \mathcal{F}_f y \mathcal{F}_g . Entonces para todo $p \geq 0$*

$$d_b(\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f), \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Observación 2.2.24 Cuando la filtración y los complejos simpliciales son finitos, la distancia de Bottleneck se puede calcular buscando un matching perfecto en un grafo bipartito. Concretamente, sean A y B los multiconjuntos de puntos (y sus multiplicidades) fuera de la diagonal de dos diagramas de persistencia $\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f)$ y $\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)$ respectivamente. Para cada $a \in A$ y $b \in B$ notamos \bar{a} y \bar{b} a sus proyecciones sobre la diagonal y definimos $\bar{A} = \{\bar{a} : a \in A\}$ y $\bar{B} = \{\bar{b} : b \in B\}$. Sean $\tilde{A} = A \cup \bar{B}$ y $\tilde{B} = B \cup \bar{A}$. Entonces la distancia de Bottleneck entre $\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f)$ y $\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)$ se calcula encontrando un matching perfecto entre \tilde{A} y \tilde{B} . Es decir,

$$d_b(\text{Dgm}_p(\mathcal{F}_f), \text{Dgm}_p(\mathcal{F}_g)) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{x \in \tilde{A}} \|x - \pi(x)\|_\infty,$$

donde $\Pi = \{\pi : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B} : \pi \text{ biyectiva}\}$. En particular la distancia coincide con $\|x - y\|_\infty$ para algún par $x \in \tilde{A}, y \in \tilde{B}$.

2. PERSISTENCIA

2.3. Vectorizaciones de diagramas

En esta sección presentamos atributos escalares o *features* y algunas técnicas de vectorización de diagramas. Una vectorización del conjunto de diagramas de persistencia \mathcal{PD} es una función $\Phi : \mathcal{PD} \rightarrow \mathbb{V}$, donde \mathbb{V} es un espacio vectorial típicamente de dimensión finita.

Atributos escalares

Dado $D = \{(b_i, d_i)\}_{i \in I}$ un diagrama de persistencia con finitos puntos fuera de la diagonal, enumeramos a continuación algunos de sus atributos más comunes en la práctica.

1. **Cantidad de puntos** (contados con multiplicidad): $\#D$.

2. **Cantidad de puntos en rango** ($0 \leq \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq +\infty$):

$$\#D(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}) = \sum_{i \in I} \mathbb{1}\{\lambda_{\min} \leq d_i - b_i \leq \lambda_{\max}\}.$$

3. **Persistencia de puntos en rango** ($0 \leq \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq +\infty$):

$$P_D(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}) = \sum_{i \in I} \mathbb{1}\{\lambda_{\min} \leq d_i - b_i \leq \lambda_{\max}\}(d_i - b_i).$$

4. **Persistencia promedio de puntos en rango** ($0 \leq \lambda_{\min} < \lambda_{\max} \leq +\infty$):

$$\frac{P_D(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})}{\#D(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})}.$$

5. **Cantidad de puntos en intervalo** ($a < b$):

$$\#D^{[a,b]} = \sum_{i \in I} \mathbb{1}\{b_i \leq a < d_i \text{ ó } b_i < b \leq d_i\}.$$

6. **Persistencia de puntos en intervalo** ($a < b$):

$$P_D^{[a,b]} = \sum_{i \in I} \mathbb{1}\{b_i \leq a < d_i \text{ ó } b_i < b \leq d_i\}(d_i - b_i).$$

2. PERSISTENCIA

7. **Persistencia promedio de puntos en intervalo** ($a < b$):

$$\frac{P_D^{[a,b]}}{\#D^{[a,b]}}.$$

8. **Cantidad de puntos estrictamente contenidos en intervalo** ($a < b$):

$$\sum_{i \in I} \mathbb{1}\{a \leq b_i < d_i \leq b\},$$

y análogamente la persistencia y persistencia promedio de puntos estrictamente contenidas.

9. **Persistencia total:**

$$PT_D = \sum_{\substack{i \in I \\ d_i < +\infty}} (d_i - b_i).$$

10. **Persistencia de la j -ésima barra más persistente:**

$$d_{j^*} - b_{j^*},$$

donde $j^* = \arg \max_{i \in I}^{(j)} \{d_i - b_i\}$ y $\max^{(j)}$ denota el j -ésimo máximo.

11. **Valor de aparición de la j -ésima barra más persistente:**

$$VA^{(j)}(D) = b_{j^*}.$$

12. **Entropía de persistencia:**

$$EP(D) = - \sum_{\substack{i \in I \\ d_i < +\infty}} p_i \log(p_i),$$

$$\text{donde } p_i = \frac{d_i - b_i}{PT_D}.$$

13. **Amplitud** (para d alguna métrica de diagramas como Bottleneck, Wasserstein, L^p de Betti):

$$A_d(D) = d(D, D_\emptyset),$$

la distancia al diagrama trivial, o la norma de D cuando d induce una norma.

2. PERSISTENCIA

Curva de Betti

La curva de Betti es esencialmente tomar el número de Betti como función del parámetro de la filtración.

Definición 2.3.25 Sea D_p un diagrama de persistencia. Su curva de Betti es la función $\beta_{D_p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada $s \in \mathbb{R}$ le asigna el número de puntos $(b_i, d_i) \in D_p$ tales que $b_i \leq s < d_i$ contados con multiplicidad.

Cuando el diagrama viene de una filtración finita su curva de Betti cambia en finitos valores críticos y es eventualmente constante con valor igual a la cantidad de puntos esenciales.

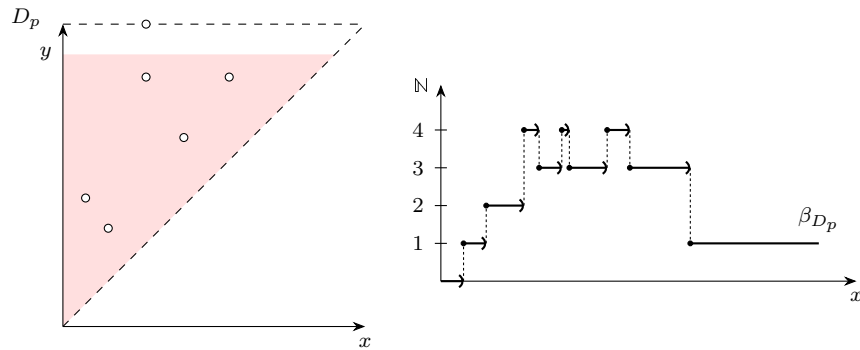


Figura 2.4: Un diagrama de persistencia y su curva de Betti asociada. Notar que cuando $x \rightarrow +\infty$, $\lim \beta_{D_p}(x)$ es la cantidad de puntos en la recta $y = +\infty$.

Fijemos un índice máximo de la filtración $\tau_{\text{máx}} > 0$. Una forma natural de vectorizar la curva de Betti consta de discretizar el intervalo $[0, \tau_{\text{máx}}]$ en $N + 1$ puntos τ_i equiespaciados y tomar el vector cuya i -ésima entrada es $\beta_{D_p}(\tau_i)$. Sin embargo, esto tiene como desventaja la posible pérdida de información, ya que por ejemplo aquellos puntos (b, d) del diagrama con $\tau_i < b < d < \tau_{i+1}$ no llegan a ser tomados en cuenta. La siguiente es una alternativa propuesta en [14] que coincide con la anterior en el límite cuando $N \rightarrow \infty$.

2. PERSISTENCIA

Definición 2.3.26 Sea D un diagrama de persistencia con finitos puntos fuera de la diagonal, y sean $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \tau_{\text{máx}}$ equiespaciados. Definimos la sucesión de Betti como el vector

$$\vec{v}_\beta(D) = (v_i)_{i=1}^N$$

cuya i -ésima entrada v_i es la cantidad de puntos $(b, d) \in D$ que satisfacen $b < \tau < d$ para al menos un valor $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$.

Proposición 2.3.27 (Inestabilidad de la sucesión de Betti) *La sucesión de Betti de la definición 2.3.26 no es estable respecto a la norma infinito y distancia de Bottleneck. Es decir, para toda constante $C > 0$ existen diagramas D, D' tales que*

$$\|\vec{v}_\beta(D) - \vec{v}_\beta(D')\|_\infty > Cd_b(D, D').$$

Demostración. Tomamos el diagrama trivial D_\emptyset sin puntos fuera de la diagonal, lo cual implica

$$\vec{v}_\beta(D_\emptyset) = (0, 0, \dots, 0)^T.$$

Fijamos un índice j y para $\varepsilon > 0$ definimos el diagrama D_ε cuyo único punto fuera de la diagonal es

$$P_\varepsilon = \left(\frac{\tau_{j-1} + \tau_j}{2} - \varepsilon, \frac{\tau_{j-1} + \tau_j}{2} + \varepsilon \right).$$

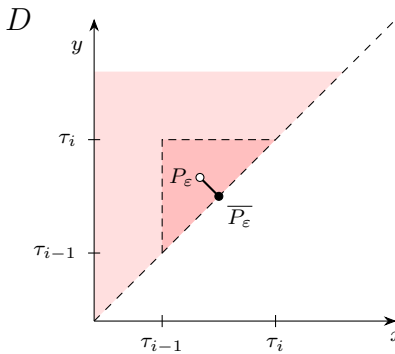


Figura 2.5: La distancia de Bottleneck entre D_ε y D_\emptyset es la norma infinito entre P_ε y \overline{P}_ε . El hecho de que P_ε caiga en la región más oscura implica que $\vec{v}_\beta(D)$ sea un vector canónico.

2. PERSISTENCIA

Se puede ver en la figura 2.5 que si tomamos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico resulta

$$\vec{v}_\beta(D_\varepsilon) = e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$$

el vector canónico, y por lo tanto $\|\vec{v}_\beta(D_\emptyset) - \vec{v}_\beta(D_\varepsilon)\|_\infty = 1$.

Sin embargo, la distancia de Bottleneck puede hacerse arbitrariamente chica pues la única biyección a considerar es la que asigna P_ε a su proyección \overline{P}_ε . Es decir, podemos hacer el cociente

$$\frac{\|\vec{v}_\beta(D_\emptyset) - \vec{v}_\beta(D_\varepsilon)\|_\infty}{d_b(D_\emptyset, D_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$$

arbitrariamente grande, eventualmente superando cualquier constante $C > 0$ y dando el resultado. □

Persistence Landscape

Continuamos con una vectorización propuesta originalmente en [15].

Definición 2.3.28 El *persistence landscape* (PL) de un diagrama $D = \{(b_i, d_i)\}_{i \in I}$ con finitos puntos fuera de la diagonal es la sucesión $\{\lambda_k : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\lambda_k(t) = \text{máx}^{(k)}\{\Lambda_i(t) : i \in I\},$$

donde $\text{máx}^{(k)}$ denota el k -ésimo valor más grande y

$$\Lambda_i(t) = [\text{mín}\{t - b_i, d_i - t\}]_+.$$

λ_k es la k -ésima capa del persistence landscape de D .

El persistence landscape de un diagrama es una colección de funciones lineales a trozos y su gráfico puede describirse en forma geométrica como sigue: por cada $i \in I$ dibujamos un triángulo isósceles con base en el intervalo (b_i, d_i) sobre el eje t horizontal y pendientes 1 y -1 . Para cada $k \geq 0$ llamamos R_k a la unión de regiones poligonales contenida en exactamente k triángulos. Luego el gráfico de λ_k no es más que el contorno

2. PERSISTENCIA

superior de la región

$$\bigcup_{j=1}^k R_j$$

como puede verse en la figura 2.6.

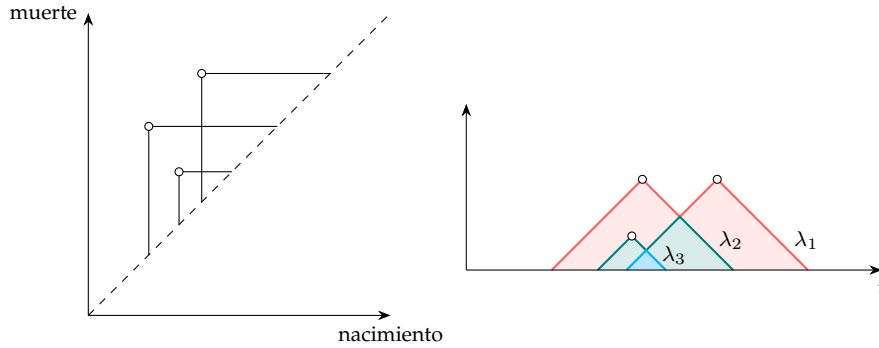


Figura 2.6: Diagrama de persistencia y su persistence landscape asociado. Las regiones R_1 , R_2 y R_3 pintadas de rosa, verde y celeste respectivamente. Intuitivamente $\lambda_k(t)$ nos da una medida de cuál es la k -ésima clase homológica que domina en el valor t de la filtración

Cuando la familia $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es p -integrable ($1 \leq p \leq +\infty$) podemos definir:

$$\|\lambda\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\lambda_k\|_p^p \right)^{1/p},$$

donde $\|\lambda_k\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda_k^p(x) dx \right)^{1/p}$. Esta norma le da al conjunto de PLs estructura de espacio de Banach separable. Adicionalmente, cuando $p = +\infty$ la distancia inducida $\Delta_\infty(D, D') = \|\lambda - \lambda'\|_\infty$ (donde λ y λ' son los PLs de los diagramas D y D') acota inferiormente a la distancia de Bottleneck garantizando la estabilidad de los PLs (consultar [15]).

2. PERSISTENCIA

Persistence Image

Para introducir a la definición, primero hacemos un cambio de variables para representar un diagrama de persistencia D en coordenadas *nacimiento-persistencia* en lugar de *nacimiento-muerte* vía la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x, y - x).$$

Luego por cada $u = (b, p) \in T(D)$ tomamos $\Phi_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución diferenciable con media u , como por ejemplo la normal simétrica:

$$\Phi_u(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-b)^2 + (y-p)^2}{2\sigma^2}}.$$

Adicionalmente fijamos una función de pesos no negativa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es continua, diferenciable a trozos y $f(x, 0) = 0$ para todo x .

Definición 2.3.29 Sea D un diagrama de persistencia con finitos puntos fuera de la diagonal. Su *superficie de persistencia* es la función escalar $\rho_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_D(w) = \sum_{u \in T(D)} f(u) \Phi_u(w).$$

Para vectorizar esta superficie discretizamos un subdominio relevante $[0, B] \times [0, P]$ en una grilla de $m = ij$ píxeles $p_{ij} = [b^{i-1}, b^i] \times [p^{j-1}, p^j]$ e integramos sobre cada uno de ellos. Llamamos imagen de persistencia (o *persistence image*) de D a la colección $\{I(\rho_D)_{ij}\}_{ij}$, donde

$$I(\rho_D)_{ij} = \iint_{p_{ij}} \rho_D dx dy.$$

Las PIs tiene la ventaja de ser una vectorización en \mathbb{R}^n , lo cual la compatibiliza con una mayor variedad de técnicas de ML. En [16] se demuestra que las normas L^∞ , L^1 y L^2 de estos vectores son estables respecto a la distancia 1-Wasserstein de sus diagramas de persistencia, con constantes que no dependen de la cantidad de puntos del diagrama.

2. PERSISTENCIA

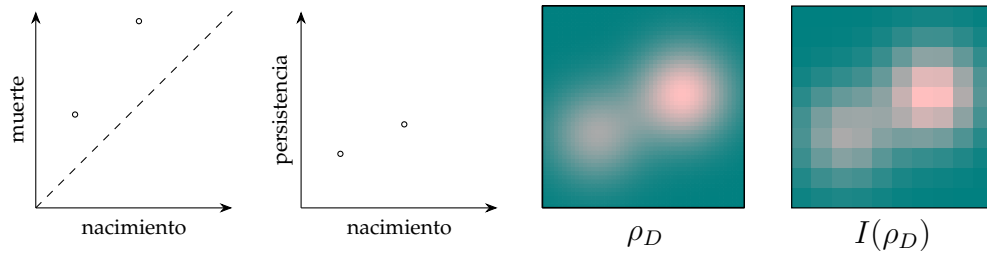


Figura 2.7: De izquierda a derecha: un diagrama de persistencia D , su versión transformada $T(D)$, su superficie de persistencia ρ_D y su imagen de persistencia $I(\rho_D)$ con resolución de 10×10 píxeles.

Cabe mencionar que esta construcción depende de tres elecciones no triviales: la **resolución** de la imagen, la **función de distribución** y sus parámetros asociados, y la **función de pesos** f .

3

Aplicación: detección de círculos

Vamos a definir un problema de detección de círculos para poner en práctica las ideas desarrolladas en los anteriores capítulos.

Consideremos $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio formado por la unión de N copias de S^1 con la topología usual. \mathcal{X} es siempre triangulable y, si las curvas no se intersecan, una variedad de dimensión 1 cuya sucesión de números de Betti a coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} es

$$\beta_0(\mathcal{X}) = \beta_1(\mathcal{X}) = N \text{ y } \beta_p(\mathcal{X}) = 0$$

para $p \geq 2$.

Supongamos que tenemos $P \subset \mathbb{R}^n$ una nube de puntos finita (o *point-cloud*) que conforma una muestra con ruido de \mathcal{X} . Adicionalmente P puede contener puntos de ruido ambiente (y sólo consta de ellos cuando $N = 0$). La tarea consistirá en adivinar N a partir de P .

La estrategia: calcular la persistencia homológica de alguna filtración de complejos simpliciales construida sobre P , vectorizar la información y usarla como covariable para inferir N con un algoritmo de aprendizaje automático.

3.1. Metodología

En esta sección detallamos los procedimientos empleados para abordar el problema: la confección de los datos, su procesamiento y vectorización, el algoritmo clasificador y los criterios para medir los resultados obtenidos. El esquema metodológico completo se ve ilustrado en la figura 3.1.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

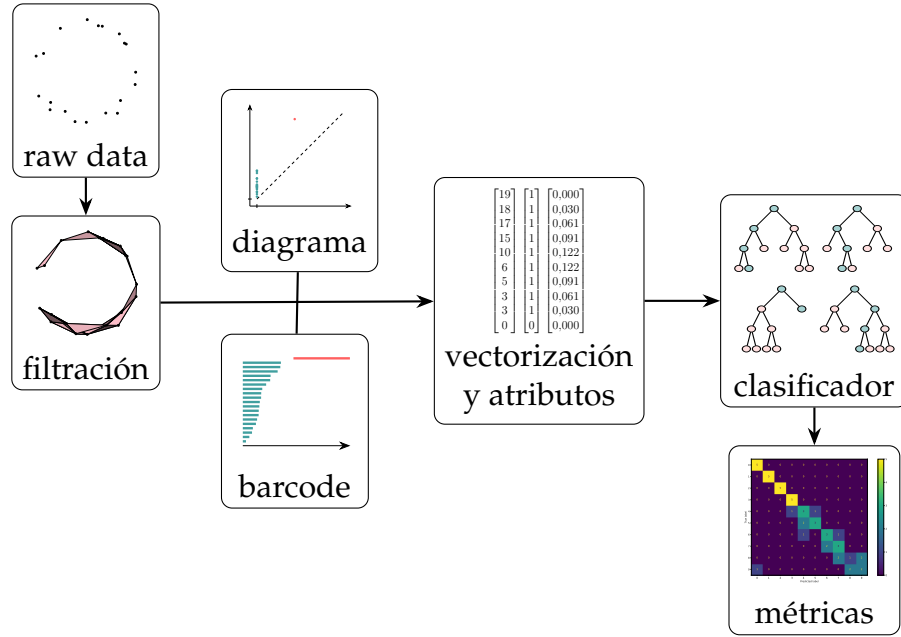


Figura 3.1: Pipeline general de la metodología empleada.

3.1.1. Datasets

Vamos a trabajar con datasets sintéticos conformados de la siguiente manera. En primer lugar son balanceados: para cada $0 \leq N \leq 9$ tenemos T instancias de pointclouds con N círculos. En cada instancia el centro y radio de cada circunferencia se muestrean uniformemente de $[0, 1]^n$ y $[r_{\min}, r_{\max}]$ respectivamente. Cuando $n > 2$ el plano contenedor de cada círculo es generado por un par de vectores con distribución gaussiana $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \text{Id}_n)$.

La cantidad total de puntos en una instancia P es la variable aleatoria $M = \lfloor Y \rfloor$, donde Y tiene distribución normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \nu)$. Dicha cantidad se divide en M_s puntos de señal y M_r puntos de ruido mediante un parámetro $\sigma \in [0, 1]$ como sigue:

$$M_s = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \lfloor (1 - \sigma)M \rfloor & \text{si } N > 0. \end{cases}$$

$$M_r = M - M_s.$$

Se reparten los M_s puntos equitativamente entre los N círculos y sus ubicaciones son perturbadas mediante un parámetro $\varepsilon \geq 0$. Concretamen-

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

te, si r es el radio de la circunferencia C entonces P ha de contener $\frac{M_s}{N}$ (o $\frac{M_s}{N} + 1$) puntos de la forma

$$X = X_C + (\varepsilon r) \cdot \vec{d},$$

donde X_C tiene distribución uniforme sobre la circunferencia C y \vec{d} es una dirección tomada uniformemente de la esfera $(n - 1)$ -dimensional. Por último, los M_r puntos de ruido restantes se toman uniformemente de $[0, 1]^n$. En la figura 3.2 un ejemplo de *pointcloud* para $N = 3$.

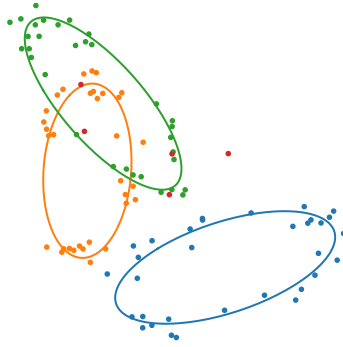


Figura 3.2: Una instancia de tres círculos en dimensión $n = 3$ y su nube de puntos generada con parámetros $\mu = 100, \nu = 10, \sigma = 0,05, r_{\text{mín}} = 0,25, r_{\text{máx}} = 0,45$ y $\varepsilon = 0,15$. En rojo los puntos de ruido ambiente.

La idea es generar variabilidad en los datos para medir la robustez del método. En un dataset los parámetros $n, \mu, \nu, \sigma, r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}$ y ε se mantienen fijos. Recordar no confundir el parámetro de ruido ε con el épsilon que indexa típicamente la filtración de Čech o Vietoris-Rips.

3.1.2. Procesamiento topológico

Hacemos uso de la librería `numpy` de Python para crear los datasets como en 3.1.1 y optamos por `giotto-tda` ([17]) para el procesamiento topológico de cada *pointcloud* P . Vamos a computar las filtraciones de Vietoris-Rips y de Čech completas de P con la métrica euclídea, y a calcular homología simplicial en dimensiones 0 y 1 con coeficientes en \mathbb{F}_2 .

En la práctica los diagramas presentan una cantidad variable de clases de baja persistencia mayormente asociadas a la presencia de ruido.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

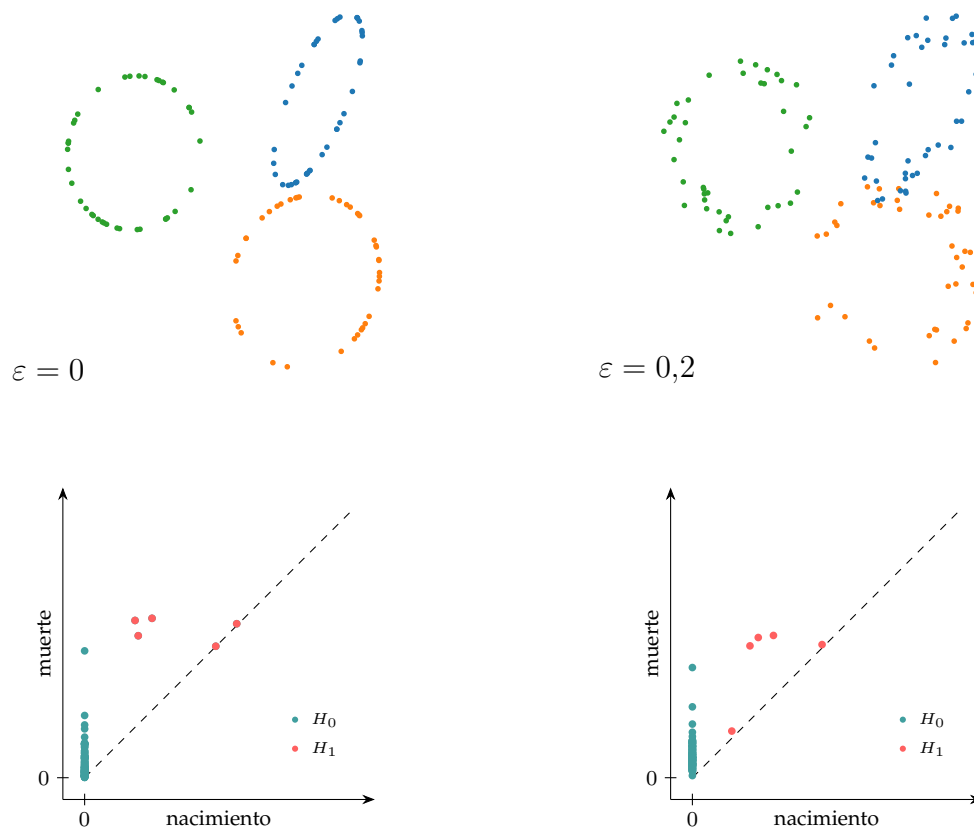


Figura 3.3: Diagramas de persistencia de la filtración VR de dos nubes con $\mu = 120$, $\sigma = 0$: a la izquierda $\varepsilon = 0$ y a la derecha $\varepsilon = 0,2$. La distancia de Bottleneck entre estos diagramas es $0,0548$ en para $p = 0$ y $0,0562$ para $p = 1$. En ambos casos se observan tres puntos de mayor persistencia en H_1 que se condicen con la presencia de los tres círculos.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

En la figura 3.3 mostramos los diagramas de persistencia de la misma instancia generada con distintos valores de ε con fines exploratorios. Tanto las distancias entre diagramas, las vectorizaciones presentadas en 2.3 y la entropía de persistencia se calcularon con funciones del paquete `giotto-tda`. En el caso de las vectorizaciones se elige un hiperparámetro de discretización `n_bins` que determina el tamaño del vector en cada dimensión (0 y 1). Para los PLs además se elige `n_layers` que determina cuántas de sus capas λ_k vamos a considerar. Los restantes atributos escalares se obtuvieron con funciones auxiliares implementadas por el autor.

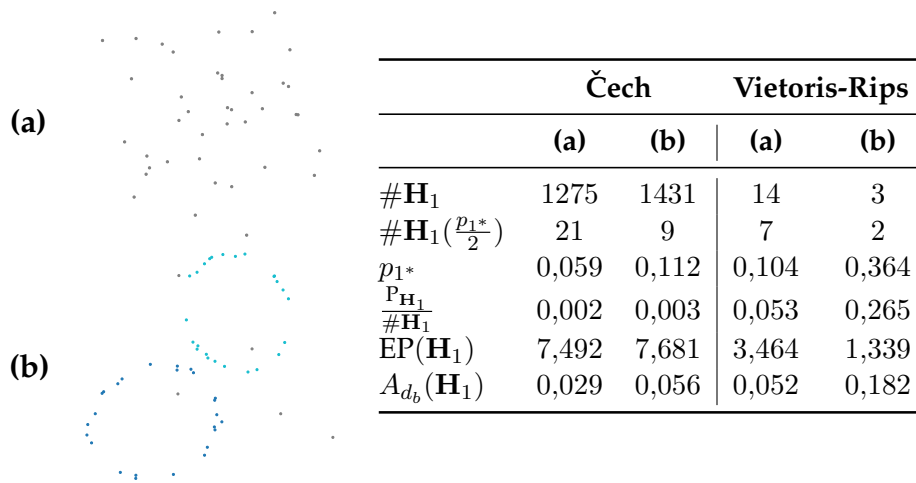


Figura 3.4: Dos instancias con $\mu = 50$: **(a)** $N = 0$ y **(b)** $N = 2$. En la tabla los siguientes atributos: $\#\mathbf{H}_1$ es la cantidad de barras de \mathbf{H}_1 ; p_{1^*} es la persistencia de la barra más persistente de \mathbf{H}_1 ; $\#\mathbf{H}_1(\frac{p_{1^*}}{2})$ la cantidad de barras en \mathbf{H}_1 de persistencia mayor a $\frac{p_{1^*}}{2}$; $\frac{P_{\mathbf{H}_1}}{\#\mathbf{H}_1}$ la persistencia promedio de barras en \mathbf{H}_1 ; $EP(\mathbf{H}_1)$ la entropía de persistencia del diagrama en \mathbf{H}_1 ; y $A_{d_b}(\mathbf{H}_1)$ la amplitud del diagrama en \mathbf{H}_1 respecto a la distancia de bottleneck.

Con el fin de explorar el uso de ambas filtraciones se incluye la figura 3.4 en la cual se muestra una tabla con algunos atributos escalares de sus diagramas de persistencia.

3.1.3. Random Forest

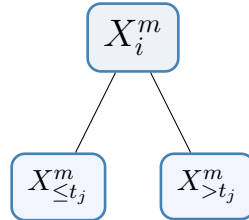
Como clasificador vamos a usar el algoritmo *random forest* (RF) implementado en `scikit-learn` ([18]). Un RF es un método de ensamble:

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

consta de un conjunto de clasificadores elementales que en nuestro caso son los *árboles de decisión* y se toma como *output-predicción* la clase más votada entre ellos.

A partir de un conjunto de datos de entrenamiento $X = \{x^k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ se ajusta una cantidad `n_estimators` de árboles con la técnica de bagging o *bootstrapping*: en lugar de usar todos los datos para cada árbol i se toma una muestra X_i con reposición de X de tamaño `max_samples`.

Un árbol i se construye comenzando por la raíz con la muestra X_i y ramificando sus nodos con reglas de decisión binaria. Una regla de decisión es un par *atributo-umbral* (j, t_j) que se elige de un conjunto de posibles candidatos y da lugar a la siguiente partición de X_i^m , los datos en el nodo m :



donde $X_{\leq t_j}^m = \{x \in X_i^m : x_j \leq t_j\}$ y $X_{> t_j}^m = X_i^m \setminus X_{\leq t_j}^m$. Las features candidatas se determinan usando la segunda técnica que caracteriza a un random forest llamada *feature bagging*: en cada nodo se selecciona aleatoriamente un subconjunto de tamaño `max_features` en lugar de considerar las d disponibles. Para cada variable seleccionada, los umbrales candidatos se toman como los puntos medios entre los valores ordenados de dicha variable.

Entre todas las reglas candidatas se elige aquella que optimice algún criterio (*criterion*) que esencialmente mide la calidad de la partición que la regla induce sobre los datos del nodo. Algunos de los posibles criterios son:

- **Impureza de Gini:**

$$G(X^m) = \sum_k p_{m,k}(1 - p_{m,k}),$$

- **Entropía log loss:**

$$H(X^m) = - \sum_k p_{m,k} \log(p_{m,k}),$$

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

donde $p_{m,k}$ es la proporción de datos del nodo m que pertenecen a la clase k .

Por último, un nodo se ramifica sólo si se satisfacen simultáneamente:

- i) no se ha alcanzado la profundidad máxima `max_depth` del árbol,
- ii) hay al menos `min_samples_split` datos en m , y
- iii) la partición a considerar deja al menos la cantidad mínima `min_samples_leaf` de datos remanentes en cada rama.

En caso contrario, el nodo representa una hoja donde se toma como output la clase de mayor proporción, i.e.

$$\arg \max_k p_{m,k}.$$

Todos estos hiperparámetros inciden en la complejidad del bosque. Por ejemplo, más árboles y de mayor profundidad aumentan la complejidad del modelo, lo que tiende a sobreajustar los datos de entrenamiento y exhibir mayor varianza en las predicciones sobre los datos de validación. Idealmente queremos un modelo poco complejo con una buena relación sesgo-varianza que logre disminuir la diferencia entre puntajes de entrenamiento y validación. Los valores en la tabla 3.1 se obtuvieron realizando una búsqueda aleatoria en el espacio de hiperparámetros con validación cruzada 30-folds sobre un dataset balanceado de 500 instancias.

hiperparámetro	valor
<code>n_estimators</code>	50
<code>max_samples</code>	0,6
<code>max_features</code>	0,3
<code>criterion</code>	'gini'
<code>max_depth</code>	9
<code>min_samples_split</code>	4
<code>min_samples_leaf</code>	13

Tabla 3.1: Hiperparámetros elegidos para el problema de clasificación.

3.1.4. Métricas de evaluación

A continuación definimos algunas de las métricas a considerar para medir la performance de un clasificador.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

- *accuracy*: proporción de predicciones correctas,

$$\text{acc} = \frac{\# \text{ aciertos}}{\# \text{ predicciones}}.$$

- *Brier score loss*: error promedio de las probabilidades de pertenencia a cada clase respecto a la norma 2. Da una medida de cuán bueno es el acierto promedio y se define como

$$\text{BSL} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|e_{(i)} - \hat{p}_{(i)}\|_2^2,$$

donde N es la cantidad total de samples a clasificar, $e_{(i)} \in \mathbb{R}^K$ el vector que tiene un 1 en la k -ésima coordenada si el dato i pertenece a la clase k y 0 en las demás coordenadas, y $\hat{p}_{(i)} \in \mathbb{R}^K$ el vector de probabilidades empíricas de pertenencia a cada clase estimado por el clasificador.

- *matriz de confusión*: se define como la matriz $C \in \mathbb{R}^{K \times K}$ donde la entrada C_{kl} es la cantidad de datos pertenecientes a la clase k que fueron clasificados como clase l . De C se pueden recuperar otras métricas como:

- **accuracy**:

$$\frac{\text{Tr}(C)}{\sum_{i,j=1}^K C_{ij}},$$

- **precisión** (respecto a la clase k):

$$\frac{C_{kk}}{\sum_{i=1}^K C_{ik}},$$

- **recall** (respecto a la clase k):

$$\frac{C_{kk}}{\sum_{j=1}^K C_{kj}}.$$

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

- *distancia cuadrática*: promedio del error cuadrático. Se define como

$$ecm = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

donde y_i y \hat{y}_i son respectivamente la clase verdadera y la clase predicha del dato i .

3.2. Experimentos

En esta sección detallamos los experimentos realizados. El procedimiento general es el ilustrado en la figura 3.1. Vamos a usar las tres representaciones definidas en 2.3 y una combinación de atributos escalares como covariables para inferir N usando un Random Forest configurado como en la tabla 3.1.

Primero vamos a fijar un dataset base y a explorar distintas formas de vectorizar los diagramas de persistencia. En el resto de los casos vamos a partir de tal configuración y hacer variar un parámetro del dataset manteniendo el resto fijos para observar el impacto en el desempeño del clasificador. La implementación de los experimentos realizados están disponibles en [este link](#) junto con la rutina de generación de datos y su procesamiento, y la exploración de hiperparámetros del modelo.

parámetro	T	n	μ	ν	σ	r_{\min}	r_{\max}	ε
valor	20	3	180	10	0,05	0,1	0,15	0,05

Tabla 3.2: Configuración base del dataset para los experimentos.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

Experimentos principales

E1. Dimensionalidad de las vectorizaciones

Comenzamos explorando la dimensionalidad de las distintas vectorizaciones. Sobre el dataset de la tabla 3.2 calculamos los diagramas de persistencia de la filtración VR y clasificamos usando distintos esquemas de vectorización. En general se espera que una mayor dimensionalidad en las covariables impacte positivamente en los resultados del clasificador hasta que eventualmente se mantengan estables y no presenten una evidente mejora.

E1.1. Betti Curves

En esta representación `n_bins` es la cantidad de valores del parámetro de la filtración en los que se evalúa la curva de Betti por dimensión homológica, por lo que el vector tiene dimensión $2 \times n_bins$. En general los valores de la filtración que se eligen son diferentes para las distintas dimensiones homológicas. Hacemos variar `n_bins` entre 10 y 150 con paso 10.

E1.2. Persistence Landscapes

Ahora `n_bins` es la cantidad de valores que se samplean de la k -ésima capa del PL por dimensión homológica, es decir tenemos dimensión $2 \times n_layers \times n_bins$. Consideramos `n_bins` de 10 a 150 con paso 10 y `n_layers` entre 1 y 20 con paso 1.

E1.3. Persistence Images

Acá `n_bins` es la cantidad de subintervalos en los que se discretiza el dominio *nacimiento-persistencia* dando una imagen rasterizada de $n_bins \times n_bins$ píxeles por cada dimensión homológica, es decir tenemos dimensión $2 \times n_bins^2$. El hiperparámetro `sigma` es la varianza de las funciones de distribución Gaussianas Φ_u en la definición de la superficie de persistencia y su incremento da lugar a una imagen más "difuminada" alrededor de los puntos de persistencia. En tercer lugar la función `weight_function` le asigna pesos a los valores de la filtración considerados en la discretización del dominio.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

Vamos a hacer variar nuevamente `n_bins` de 10 a 150 con paso 10, `sigma` entre 0,1 y 1 con paso 0,1 y consideraremos dos posibilidades para `weight_function`: la constante 1 (pesos uniformes) y la función monótona identidad.

E2. Tamaño de las nubes

Continuamos partiendo del dataset base de la tabla 3.2 y haciendo variar el tamaño promedio de P , es decir el parámetro μ , tomando como posibles valores los múltiplos de 50 entre 50 y 500. Para cada valor de μ se calcularon los diagramas de las filtraciones VR y se clasificó usando:

1. curvas de Betti con `n_bins = 80`,
2. mezcla de atributos del diagrama D_p en dimensiones homológicas $p = 0, 1$:
 - entropía de persistencia $EP(D_p)$,
 - amplitud respecto a la distancia bottleneck $A_{db}(D_p)$,
 - cantidad de puntos en intervalo $[0; 0,6]$: $\#D_p^{[0;0,6]}$,
 - persistencia de puntos en intervalo $[0; 0,6]$: $P_{D_p}^{[0;0,6]}$.

A medida que μ aumenta también crece la densidad de puntos por círculo, lo cual debería hacer más temprana la creación y prolongar la persistencia de 1-ciclos que reflejen la presencia de los círculos. Por ende se espera obtener mejores métricas de rendimiento en función de μ .

Observamos también que con μ aumenta exponencialmente la cantidad de símlices en la filtración y por lo tanto su cómputo consume significativamente más tiempo y memoria.

E3. Ruido en las circunferencias

Hacemos variar el parámetro de perturbación radial ε en el intervalo $[0, 1]$ con paso 0,05. Se aplicó el mismo flujo de procesamiento, esta vez usando:

1. los *persistence landscapes* con `n_bins = 80` y `n_layers = 10`,
2. misma mezcla de atributos que en E2.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

El incremento de ε introduce mayor dispersión en los puntos degradando la estructura de cada circunferencia hasta hacerla indistinguible cuando ε es del orden del radio. Se espera que los diagramas presenten más ruido y la accuracy del clasificador decaiga.

E4. Ruido ambiente

Se hace variar la proporción de puntos de ruido ambiente σ en el intervalo $[0, 0,5]$ con paso 0,05. Nuevamente los restantes parámetros fijos, filtraciones de VR y esta vez clasificamos usando:

1. las imágenes de persistencia con una resolución de 100×100 píxeles ($n_bins = 100$), tomando como funciones de distribución Φ_u todas gaussianas de varianza 1 y función de pesos $weight_function = 1$,
2. misma mezcla de atributos que en E2.

Al aumentar σ crece la fracción $\frac{M_r}{M}$ de puntos que no provienen de circunferencias, lo cual debería introducir pares *nacimiento-muerte* en los diagramas que no aportan información útil para la inferencia de N . Esto se debe a que la filtración VR no distingue si un punto de la nube es ruido o señal. Por lo tanto se espera que las métricas de desempeño empeoren con el incremento de σ .

Experimentos exploratorios

E5. Dimensión del espacio

Continuamos con un experimento más exploratorio haciendo variar n en los enteros entre 2 y 30 inclusive. En esta ocasión volvemos a usar filtración de VR y como vectorización las curvas de Betti con $n_bins=80$ y el mix de atributos de E2.

Para $n = 2$ las circunferencias viven todas en el mismo plano lo cual hace más probable su intersección. La superposición de los círculos afectaría directamente la homología de \mathcal{X} , disminuyendo la cantidad de componentes conexas y posiblemente incrementando las clases de 1-ciclos homólogos, lo cual se espera que dificulte la inferencia de N resultando en un peor desempeño.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

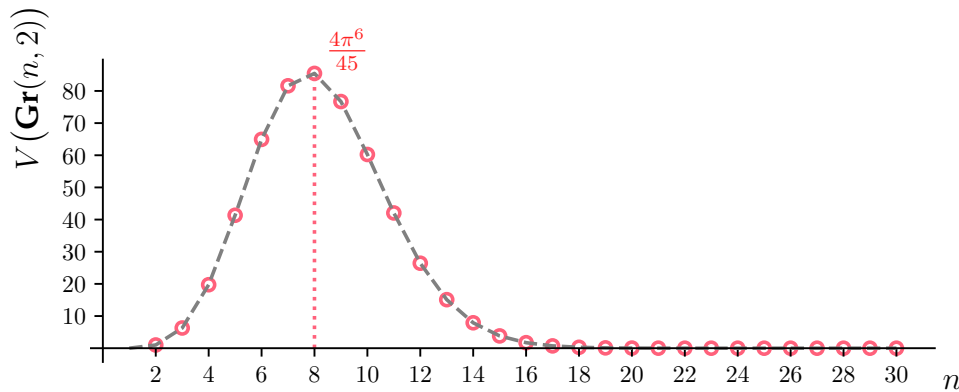


Figura 3.5: Volumen de la Grassmanniana $\text{Gr}(n, 2)$ en función de n . Alcanza su máximo en $n = 8$ y tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Cuando $n > 2$ conjeturamos mejores resultados en la medida en que haya “más espacio” para orientar los círculos y por lo tanto menos probabilidad de que se intersequen. El objeto que parametriza todos los posibles subespacios de dimensión 2 en un espacio vectorial n -dimensional corresponde a la variedad Grassmanniana $\text{Gr}(2, n)$. Como referencia graficamos en la figura 3.5 el volumen de dicha variedad respecto a la métrica inducida por la euclídea en función de n (sobre el cálculo del volumen consultar [19], Proposition 9.1.14).

E6. Radio de las circunferencias

Por último hacemos variar el rango de dispersión radial de las circunferencias. Comenzando con un radio fijo $r_{\min} = r_{\max} = 0,25$ se tomó posteriormente $\delta \geq 0$ tal que

$$r_{\min} = 0,25 - \delta \text{ y } r_{\max} = 0,25 + \delta$$

y la amplitud 2δ tome valores entre 0 y 0,5 con incremento 0,05. Nuevamente se usó la filtración VR y para clasificar Betti Curves con $n_{\text{bins}} = 80$ y la mezcla de atributos de E2.

Círculos con radios más grandes vuelven a ser más propensos a chocar entre sí dificultando la correcta clasificación, por lo que se espera que el aumento de δ afecte negativamente a los resultados.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

3.3. Resultados

Cada experimento se replicó 90 veces con datasets de idéntica configuración paramétrica, variando únicamente la semilla aleatoria. En cada corrida se dividieron los datos en conjuntos de entrenamiento y validación al 75-25 % manteniendo las proporciones de datos en cada clase y sobre cada uno se calcularon métricas de desempeño.

E1. Dimensionalidad de las vectorizaciones

E1.1. Betti Curves

La figura 3.6 muestra los resultados obtenidos para los distintos valores de n_bins usando la curva de Betti como vectorización. A partir de $n_bins = 40$ el rendimiento del clasificador no crece significativamente y ambas curvas de entrenamiento y validación se mantienen con una diferencia estable. Para el valor $n_bins = 100$ se alcanza la máxima accuracy promedio sobre los datos de validación.

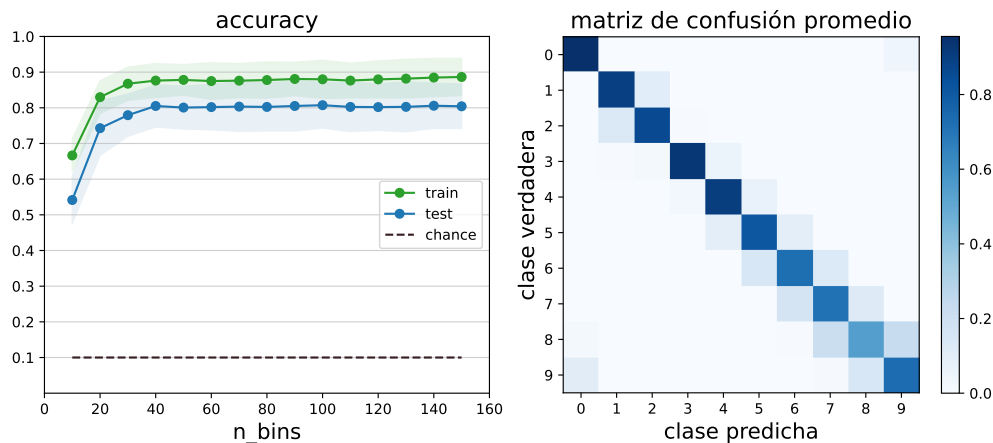


Figura 3.6: A la izquierda la accuracy promedio del clasificador en función de n_bins (cada punto es el promedio de los puntajes obtenidos sobre las 90 semillas y el sombreado representa su desvío estándar). La línea punteada representa el nivel de “chance”, es decir de acertar clasificando aleatoriamente, que al ser datos balanceados es de 1 sobre la cantidad de clases: $\frac{1}{10}$. A la derecha la matriz de confusión normalizada respecto a sus filas y promediada sobre las 90 réplicas para el valor $n_bins = 100$.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

Las entradas en la diagonal de la matriz de confusión indican el recall respecto a la clase correspondiente. Se observa una mejor detección de las clases $N = 0$ a $N = 4$ mientras que para N más grande empieza a haber mayor confusión entre clases.

E1.2. Persistence Landscapes

Continuamos con los resultados obtenidos usando los *persistence landscapes*.

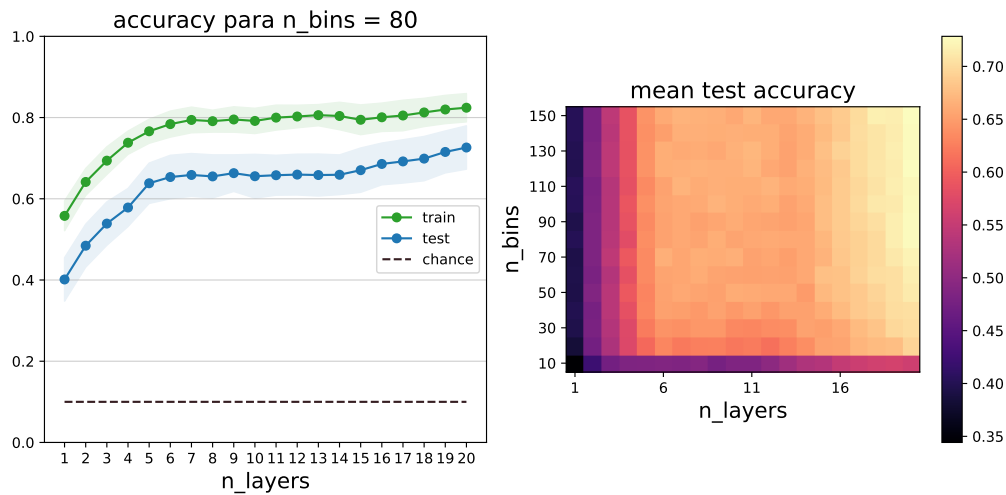


Figura 3.7: A la izquierda la accuracy promedio obtenida en entrenamiento y validación en función de n_layers para $n_bins = 80$ fijo; a la derecha la accuracy del clasificador sobre el conjunto de validación en función de n_bins y n_layers (el color de cada celda es el promedio de las 90 réplicas del experimento).

Acá podemos observar en la figura 3.7 que el incremento de n_layers tiene un gran impacto sobre la accuracy del clasificador, mientras que n_bins sólo aporta un efecto visible para valores bajos. Las curvas de entrenamiento y validación alcanzan una diferencia mínima para $n_layers = 20$.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

E1.3. Persistence Images

Concluimos el primer experimento con los resultados de las imágenes de persistencia.

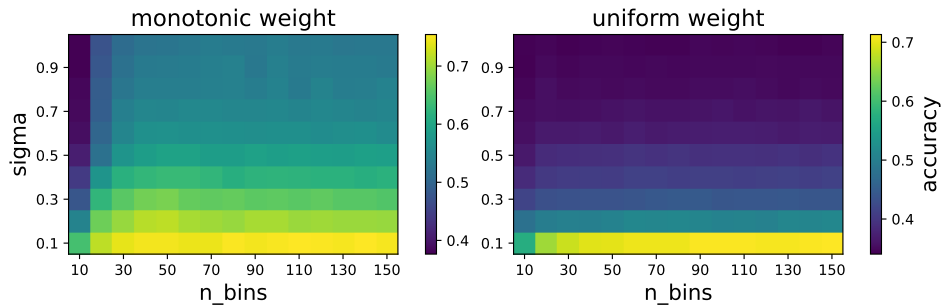


Figura 3.8: Mapa de calor con la accuracy sobre los datos de validación en función de n_bins y σ usando *persistence images*: a la izquierda con $weight_function = Id$ y a la derecha $weight_function = 1$.

Lo primero que se observa en la figura 3.8 es la ventaja de asignar más importancia a las regiones de mayor persistencia en el dominio usando la función de pesos monótona. Nuevamente el impacto de n_bins parece no ser significativo a partir de los menores valores explorados y en cambio

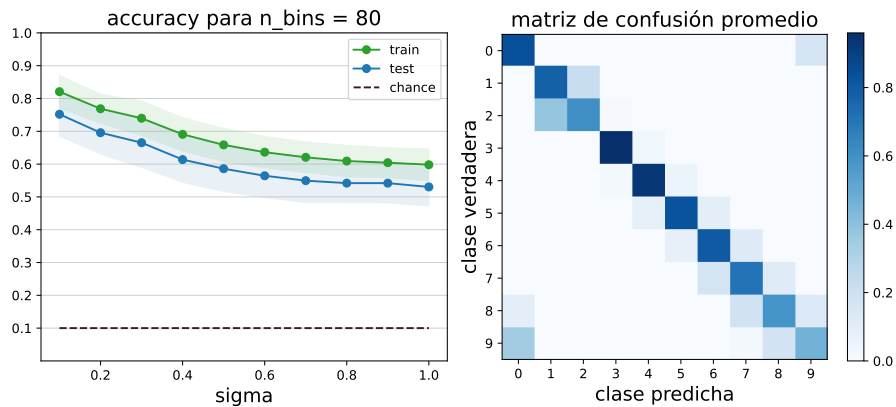


Figura 3.9: Resultados para $n_bins = 80$ y función de pesos monótona. A la izquierda las curvas de accuracy en función de σ y a la derecha la matriz de confusión promedio y normalizada respecto a sus filas para $\sigma = 0,1$.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

σ afecta positivamente al resultado a medida que este decrece en todo el intervalo explorado alcanzando el valor óptimo en $\sigma = 0,1$.

En la figura 3.9 observamos que este método detecta mejor instancias de las clases 3, 4 y 5 pero también exhibe un grado de confusión entre las clases 0 y 9.

E2. Tamaño de las nubes

Continuamos con los resultados del segundo experimento principal que consistió en variar el tamaño promedio de las nubes.

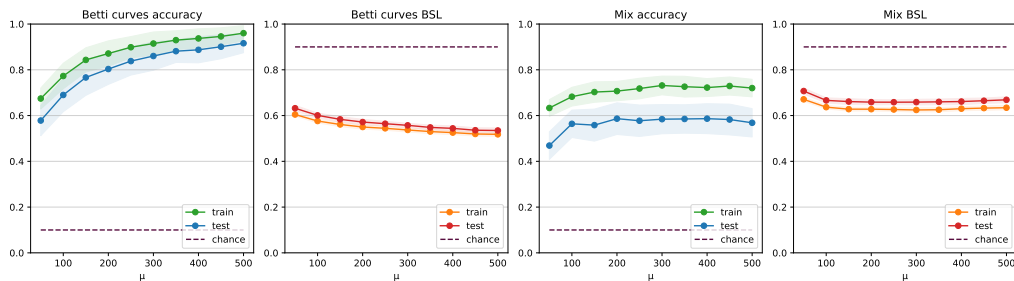


Figura 3.10: Curvas de *accuracy* y *Brier Score Loss* sobre datos de entrenamiento y validación: a la izquierda usando Betti curves y a la derecha una mezcla de atributos escalares. Para BSL el nivel esperado al clasificar aleatoriamente es de $\frac{9}{10}$. Los puntos y el sombreado en las curvas representan los promedios y desviación estándar sobre las 90 réplicas del experimento.

En los gráficos de la figura 3.10 observamos un desempeño creciente en función de μ . Las curvas de *accuracy* presentan mayor desviación respecto al promedio sobre las réplicas mientras que las de *Brier score* exhiben menor variabilidad y una menor diferencia entre puntajes de entrenamiento y validación. En la figura 3.11 vemos que la confusión entre clases es más frecuente usando los atributos escalares para clasificar, mientras que para la inferencia con Betti Curves se concentra en clases adyacentes a medida que μ crece.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

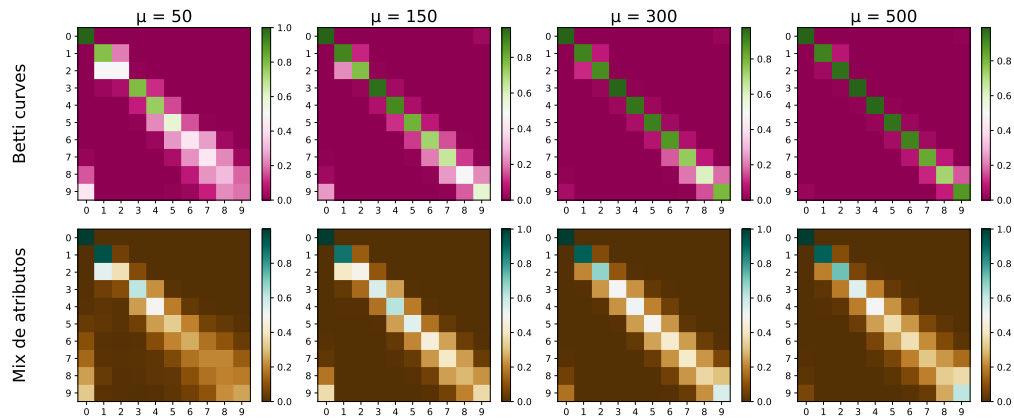


Figura 3.11: Matrices de confusión promedio normalizadas para algunos valores de μ y ambos esquemas de vectorización.

E3. Ruido en las circunferencias

En este experimento observamos en la figura 3.12 una mayor diferencia entre las curvas de entrenamiento y validación respecto a otras configuraciones, indicando un sobreajuste en los datos de entrenamiento que crece con el aumento de ε , tanto para la clasificación con PLs como con el mix de atributos. La accuracy decae a medida que ε crece y nuevamente las curvas de BSL presentan menor variabilidad respecto al promedio sobre las réplicas y menor diferencia entre entrenamiento y validación.

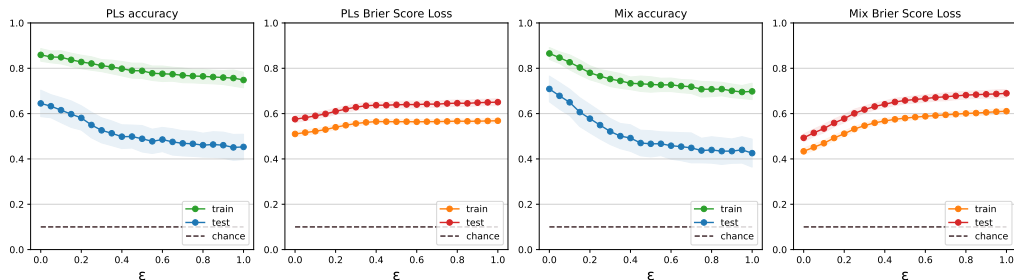


Figura 3.12: Curvas de *accuracy* y *Brier score loss* sobre los datos de entrenamiento y validación en función de ε : a la izquierda usando Persistence Landscapes y a la derecha una mezcla de atributos escalares.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

E4. Ruido ambiente

En los gráficos de la figura 3.13 se observa cómo el aumento del ruido dificulta la inferencia de N obteniendo resultados cada vez peores en todo el intervalo de σ explorado. Las curvas de accuracy en los datos de validación presentan mayor desviación estándar que en los datos de entrenamiento. El error cuadrático medio da una medida de cuán cerca está la predicción respecto a la clase verdadera y en ambos esquemas de vectorización es muy variable indicando la confusión entre clases.

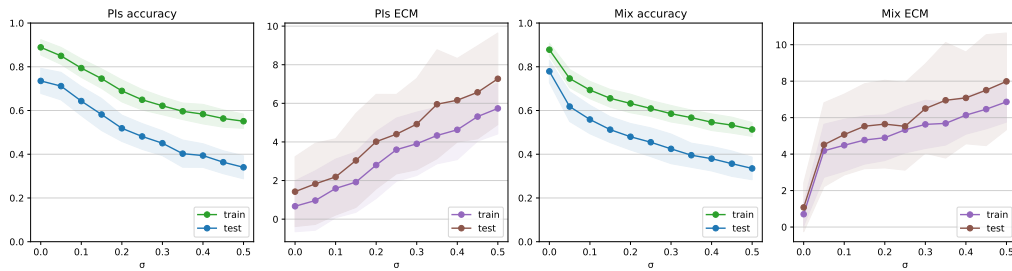


Figura 3.13: Curvas de *accuracy* y error cuadrático medio sobre entrenamiento y validación en función de σ : a la izquierda usando Persistence Images y la derecha una mezcla de atributos escalares.

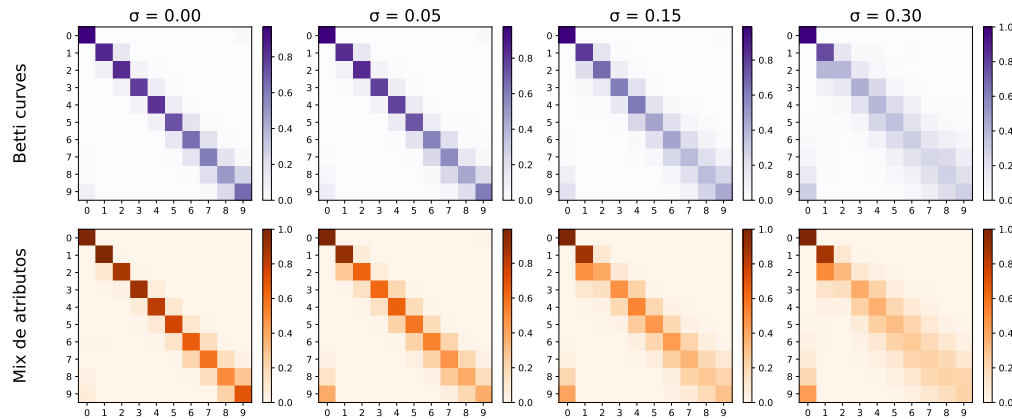


Figura 3.14: Matrices de confusión promedio normalizadas para algunos valores de σ .

En la figura 3.14 corroboramos que las clases con mayor cantidad de círculos son las que el modelo más confunde, incluso para valores bajos

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

de σ . Cuando el parámetro crece la diagonal pierde contraste aunque consistentemente preservando una alta detección de la clase $N = 0$.

E5. Dimensión del espacio

Los resultados en este experimento se muestran en la figura 3.15. Cuando usamos Betti Curves la accuracy mejora a medida que aumenta n y alcanza un máximo en $n = 7$, mientras que usando los atributos se ve un mínimo local en $n = 7$. Para dimensiones altas el modelo presenta mayor variabilidad en los puntajes de validación.

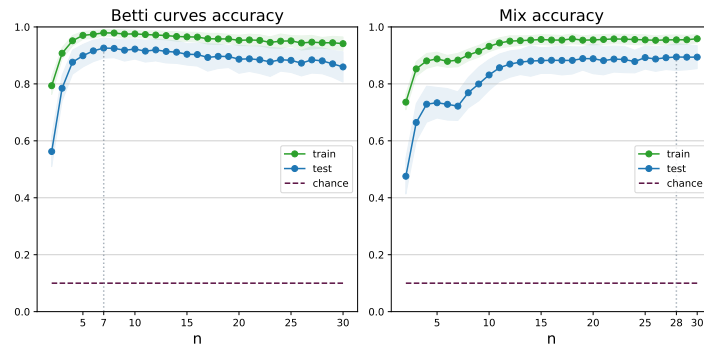


Figura 3.15: Accuracy sobre entrenamiento y validación en función de n : a la izquierda clasificando con Betti Curves y a la derecha con atributos escalares.

E6. Radio de las circunferencias

Por último los resultados del experimento en el que variamos el tamaño de las circunferencias. Acá observamos en la figura 3.16 cómo el incremento del rango radial tiende a dificultar la inferencia de N con mayor impacto en la primer región del intervalo explorado. Por otro lado la clasificación usando la mezcla de atributos escalares vuelve a presentar una mayor variabilidad en los puntajes de validación y mayor diferencia entre entrenamiento y validación.

3. APLICACIÓN: DETECCIÓN DE CÍRCULOS

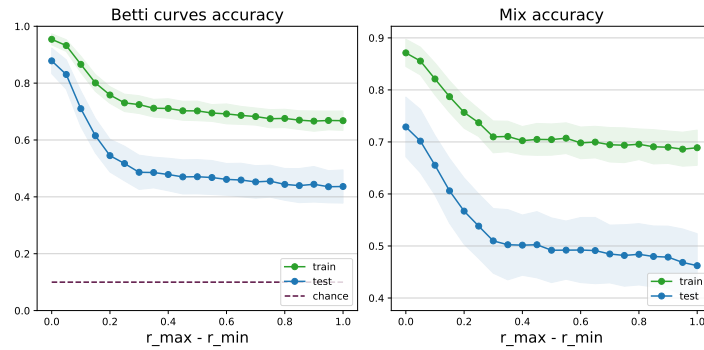


Figura 3.16: Curvas de accuracy sobre entrenamiento y validación en función de $r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}$: a la izquierda usando Betti Curves y a la derecha la mezcla de atributos escalares.

3.4. Discusión de los experimentos

Los resultados de los experimentos en general muestran que las vectorizaciones captan un mayor volumen de información útil para la detección de los círculos respecto a la mezcla de atributos escalares. Podría ampliarse la extracción de atributos escalares para ver si una nueva mezcla logra alcanzar los puntajes de alguna de las vectorizaciones.

Por otro lado la exploración de múltiples configuraciones en los parámetros de los datos tuvo un impacto en la diferencia entre los puntajes de entrenamiento y validación, lo cual es algo que usualmente se atribuye a la complejidad del modelo. Esto se ve particularmente en los experimentos E3, E4 y E6 donde el modelo tiende a sobreajustar los datos. Un posible futuro experimento sería medir el impacto de la introducción de ruido en los datos utilizando un modelo menos complejo.

En las matrices de confusión en general se observa confusión entre clases adyacentes y también entre las clases 0 y 9. Esto evidencia que una gran cantidad de círculos dificulta su distinción por haber más superposición y cercanía entre sus puntos haciendo que el modelo confunda a la nube con ruido.

4

Conclusiones

La homología persistente es una herramienta útil para estudiar cómo evolucionan las propiedades de un objeto bajo múltiples escalas. Dos propiedades que la hacen muy atractiva en un contexto de análisis de datos son: su posible formulación en un contexto discreto y finito lo cual facilita considerablemente su computabilidad mediante algoritmos eficientes; y la estabilidad de los diagramas de persistencia que la hace una herramienta robusta a la presencia de ruido en los datos.

A la hora de representar la información existe una buena diversidad de vectorizaciones que permiten explorar diferentes grados de reducción de dimensionalidad y nos ofrecen una amplia libertad de diseño apto para el aprendizaje automático. Como ejemplo recordamos la posibilidad de asignar mayor o menor importancia a las distintas regiones de los diagramas al definir las *persistence images*. Esta elección puede parecer obvia pero en realidad depende de la naturaleza del problema.

También es evidente que los complejos de Vietoris-Rips son sensibles a la presencia de outliers, lo cual abre el camino a la posibilidad de considerar filtraciones alternativas que aprovechen mejor la geometría presente en los datos, por ejemplo priorizando regiones con mayor densidad de puntos.

En esta tesis integramos conceptos de la topología algebraica con métodos de aprendizaje automático para abordar un problema de detección de círculos que podríamos pensar como una variante del problema de reconstrucción de variedades en el que tenemos una nube de puntos que representa una muestra con ruido de un objeto y se busca recuperar información sobre su estructura. Una posible continuación en esta línea de

4. *CONCLUSIONES*

trabajo podría incluir la generalización a otras familias de variedades como la clasificación de superficies en \mathbb{R}^3 .

Apéndice: Glosario Topológico

1. **contráctil:** Un espacio topológico X se dice *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un punto.
2. **espacio de Hausdorff:** Un *espacio de Hausdorff* es un espacio topológico (X, \mathcal{T}) con la propiedad de que para todo par de puntos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x, y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.
3. **espacio topológico:** Un *espacio topológico* es un par ordenado (X, \mathcal{T}) donde X es un conjunto y \mathcal{T} una *topología* sobre X , es decir, una familia de subconjuntos de X que satisface:
 - i. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
 - ii. La unión arbitraria de subconjuntos en \mathcal{T} también está en \mathcal{T} : $\forall \mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}, \bigcup_{S \in \mathcal{O}} S \in \mathcal{T}$.
 - iii. La intersección finita de subconjuntos en \mathcal{T} también está en \mathcal{T} :
$$\forall S_1, S_2, \dots, S_k \in \mathcal{T}, k \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^k S_i \in \mathcal{T}.$$

A los elementos de \mathcal{T} los llamamos *abiertos* de X y un *entorno* de $x \in X$ es cualquier abierto que contenga a x .

4. **homeomorfo:** Dados X e Y espacios topológicos, un *homeomorfismo* de X a Y es una función $f : X \rightarrow Y$ que satisface:
 - i. f es biyectiva,
 - ii. f es continua,
 - iii. la inversa de f es continua.

Cuando existe tal homeomorfismo decimos que X e Y son *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes*.

4. APÉNDICE TOPOLÓGICO

5. **homotópicamente equivalente:** Dados X e Y espacios topológicos, dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dicen *homotópicas* si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(\cdot, 0) = f$ y $H(\cdot, 1) = g$. A la función H se la llama *homotopía* entre f y g .

Dos espacios topológicos X e Y se dicen *homotópicamente equivalentes*, o que tienen el mismo *tipo homotópico*, si existen mapas $f : X \rightarrow Y$ y $h : Y \rightarrow X$ tales que $h \circ f$ y $f \circ h$ son mapas homotópicos a las respectivas identidades $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$ y $\mathbb{1}_Y : Y \rightarrow Y$.

6. **localmente euclídeo:** Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es *localmente euclídeo* si para todo $x \in X$ existe un entorno $U_x \in \mathcal{T}$ homeomorfo a \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
7. **segundo numerable:** Un espacio topológico X se dice *segundo numerable* si admite una base numerable.
8. **variedad topológica:** Una *variedad topológica* es un espacio de Hausdorff (M, \mathcal{T}) localmente euclídeo y segundo numerable.

Bibliografía

- [1] EDELSBRUNNER, LETSCHER & ZOMORODIAN. *Topological Persistence and Simplification*. Discrete Comput Geom 28, 511–533 (2002). <https://doi.org/10.1007/s00454-002-2885-2>
- [2] COHEN-STEINER, D., EDELSBRUNNER, H. Y HARER, J. *Stability of persistence diagrams*. Discrete Computational Geometry, 37(1) (2007), p. 103-120.
- [3] CAPITELLI, N. Y MINIAN, G. *Notas de Topología Combinatoria*. Unión Matemática Argentina (2009).
- [4] BARMAK, J. *Poliedros*. Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B. Fascículo 9 (2014).
- [5] KRISHNA DEY, T. Y WANG, Y. *Computational Topology for Data Analysis*. Cambridge University Press (2022).
- [6] MUNKRES, J. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publishing Company (1984).
- [7] BORSUK, K. *On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes*. Fund. Math. 35 (1948), p. 217–234.
- [8] MCCORD, M. *Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers* (1967). <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121075093>
- [9] NIYOGI, P., SMALE, S. & WEINBERGER, S. *Finding the Homology of Submanifolds with High Confidence from Random Samples*. Discrete Comput Geom 39, 419–441 (2008). <https://doi.org/10.1007/s00454-008-9053-2>

4. BIBLIOGRAFÍA

- [10] OUDOT, S.Y. *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*. Providence: American Mathematical Society (2015).
- [11] HUNGERFORD, T.W.. *Algebra*. Springer Science & Business Media (2003), p. 86-88.
- [12] GABRIEL, P. *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*. Representation Theory I, Springer (1980), p. 1-71.
- [13] CRAWLEY-BOEVEY, W. *Decompositions of pointwise finite-dimensional persistence modules*. Research Report arXiv:1210.0819 (2012).
- [14] JOHNSON M. Y JUNG, J. *Instability of the Betti sequence for persistent homology and a stabilized version of the Betti sequence*. arXiv:2109.09218 [math.AT], (2021).
- [15] BUBENIK, P. *Statistical Topological Data Analysis using Persistence Landscapes*. Journal of Machine Learning Research 16 (2015).
- [16] ADAMS, H., EMERSON, T., KIRBY, M., NEVILLE, R., PETERSON, C., SHIPMAN, P., CHEPUSHTANOVA, S., HANSON, E., MOTTA, F. Y ZIEGELMEIER, L. *Persistence Images: a stable vector representation of Persistent Homology*. Journal of Machine Learning Research 18 (2017).
- [17] TAUZIN, G., LUPO, L., TUNSTALL, L., BURELLA PÉREZ, J., CAORSI, M., MEDINA-MARDONES, A.M., DASSATTI, A. Y HESS, K. *giotto-ta: A Topological Data Analysis Toolkit for Machine Learning and Data Exploration*. Journal of Machine Learning Research, vol. 22, no. 39 (2021), p. 1-6.
Disponible en: <http://jmlr.org/papers/v22/20-325.html>.
- [18] PEDREGOSA, F., VAROQUAUX, G., GRAMFORT, A., MICHEL, V., THIRION, B., GRISEL, O., BLONDEL, M., PRETTENHOFER, P., WEISS, R., DUBOURG, V., VANDERPLAS, J., PASSOS, A., COURNAPEAU, D., BRUCHER, M., PERROT, M. Y DUCHESNAY, E. *Scikit-learn: Machine Learning in Python*. Journal of Machine Learning Research, vol. 12. (2011).
- [19] NICOLAESCU, L. *Lectures on the Geometry of Manifolds*. World Scientific, 2018.
<https://books.google.com.ar/books?id=b40FmqneFVMC>.