

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Congruencias para la Función Particiones y Coeficientes de Formas Modulares

Julián Martín Feldman

Director Dr. Nicolás Sirolli

7 de septiembre de 2026

Agradecimientos

Gracias Nico Sirolli (¡Con doble ℓ!) por tanto trabajo y por todo el tiempo invertido en esto. Por responderme aunque te escribiera a la noche o a la madrugada, o aún peor, los fines de semana. Gracias por aceptar dirigirme y darme la oportunidad de cerrar esta maravillosa etapa habiendo resuelto un problema abierto.

Gracias a los jurados Martín y Daniel por tomarse el tiempo de leer y corregir esta tesis.

Aprovecho este espacio para agradecer no solo a las personas que actuaron de manera directa en la creación de este documento, sino también a quienes, a lo largo de mi vida, construyeron quién soy.

Gracias por nunca dejarme ganar cuando era chico. Gracias por criarme con libertad y, aunque no cumplí con mis responsabilidades año tras año, nunca me la sacaste y por ello, hoy soy quién soy. Gracias por todos los sacrificios que hiciste para que yo crezca con todos los privilegios con los que crecí. Gracias madre por esto y una infinidad más de cosas. Espero algún día poder devolverle a tu vida la paz que mis gritos jugando a la compu hasta las tantas de la mañana te quitaron.

Gracias por decirme que como jugaba mucho con los legos iba a ser un ingeniero, o bueno, por decirme que me iba a convertir en un profesional de todo lo que mostraba interés. Gracias porque aunque yo quería jugar a la mancha o a los Power Rangers, vos me jugabas un ajedrez o un Abalone. Gracias por enseñarme cómo tratar a mamá, enseñanza que intenté y sigo intentando generalizar a todas mis relaciones. Gracias padre, por contagiarme ese optimismo que hoy me define. Espero con el pasar de los años, poder seguir absorbiendo toda la sabiduría que tenés para ofrecerme.

Por ser mi primer referente. Con cariño recuerdo los días y noches en tu cuarto viéndote jugar al Counter 1.6 o al GTA trayéndote una botellita de agua o una mandarina. Gracias Nico, te debo gran parte de la competitividad que hoy me caracteriza.

Por jugar conmigo hasta en mi máxima euforia y locura. Por ser mi aliado y defenderme con uñas y dientes cada vez que alguien me enfrentaba. A Gastón, porque si mi infancia fue un viaje, vos fuiste mi fiel compañero en ella.

Gracias a mis abuelos: Nena, Diana, Gigi y Tito. Aunque con algunos tengo más recuerdos que con otros, haré que sus legados me acompañen toda la vida.

Gracias Mike, por las charlas técnicas y por dejarme escalarte como si fueras una pared.

Gracias Tomi, por mostrarme que a los adultos también les pueden gustar los videojuegos.

A mis tías Vale, Nati y Anita. Porque en cada reunión me hacen sentir ese cariño y me enseñan de nuevo lo que significa la palabra "familia".

Gracias Luis, espero algún día poder ganarte en el ajedrez. Gracias Marce, porque sé que si vos venís a la juntada, va a ser divertida. Gracias a todos mis primitos: Valen, Hila, Lucas, Lila y Jazmín, con quienes ansío construir buenos momentos vividos.

Porque el tiempo es el recurso más valioso que tenemos, y gracias a tu esfuerzo, tengo el privilegio de que mis días sean más largos. Gracias Lore, por cumplir muchos más caprichos míos de los que probablemente merezco.

Por soportar que le marque todos y cada uno de los minions que erraste. Por acompañarme jugando videojuegos, y así, ayudarme a entender lo que es el arte. Porque aunque no desperdiciás la oportunidad de robarte una porción de pizza o una coca cola, siempre terminás dando lo mismo que recibís por el otro. A Sesto, por codear horas y horas hasta las tantas de la madrugada, y de manera adelantada, por las horas que faltan.

Gracias por escuchar y acompañarme en todas y cada una de las ideas que tuve. Por tu honestidad, y porque siempre estuviste ahí, ofreciéndome tu mano. Porque sé que si tenés algo que decirme, me lo decís de frente. Por tu lealtad, que siempre me hiciste sentir. Porque al lado tuyo, nunca me sentí raro. Gracias Pato, porque ambos sabemos que no pasó ni un 1 % de lo que nos queda por vivir y lograr.

Gracias, porque fuiste el que dio la chispa que despertó un fuego en mí. Porque me mostraste que si teóricamente es posible... ¿Por qué no lo puedo hacer yo? Gracias Fran, y que tu ansia por exceder te acompañe por toda la vida.

Gracias por hacerme reír más que nadie en el mundo. Por despertar en mí el interés por las artes marciales. Porque no hay ningún secreto que no te pueda confiar. Gracias Zenón, por ser mi fiel compañero de esas largas charlas filosóficas que tenemos juntos. Me ayudás a entenderme a mí y al mundo mejor.

Gracias a aquellos que atestiguaron a la tortuga ninja Perón. Gracias Iván, por tu humor y tus incontables (literalmente, y mirá que lo intentamos) partidas de ajedrez. Gracias Lauty, por no solo ser un compañero de aventuras y ocio, sino por ser el verdadero autor intelectual del Teorema de Newman (3.2.6). Gracias, porque viajar en Uber con vos, es viajar gratis. Gracias Ivancín, porque sos el primero que se preocupa. Gracias Lu, por ser la verdadera alfa del grupo. Gracias Pepe, porque no hay desafío intelectual que se nos resista, y por siempre ser franco conmigo. A Dante, supiste estar conmigo cuando más lo necesité y por ser un tipo tan absurdamente gracioso. Gracias Delfi, por los 2 billones de años de amistad ya. Gracias Fer, porque aunque no compartimos tanto juntos, siempre me hacés sentir querido. Gracias Puri, porque sos la encarnación de un buen tipo y alguien súper agradable

con quien pasar el rato y con quien dialogar, ojalá te conviertas en todo lo que deseás ser. Gracias Uly, porque me enseñaste que a veces la amistad, es la familia.

Gracias a los integrantes de Lapar Tusa. Gracias Nicolini, por esas incontables noches, o más bien madrugadas que pasamos charlando mientras veíamos las olimpiadas mientras ponías en loop 505. Gracias Merca, porque fuiste y siempre serás mi P. Gracias Euge, por compartirme tu visión tan única sobre el arte. Gracias Mati y Gus, porque en el puerto de Naniwa, por fin estas flores florecen. Tras el encierro del invierno, ahora la primavera llega, por fin estas flores florecen. Gracias Barbas, por mostrarme tantos juegos únicos de mesa y a Pablito, por nunca (y digo nunca) faltar para jugarlos. A Boris, porque aparte de ser tremendo monkey troll, también sos un excelente amigo. Porque si definimos inteligencia como la capacidad que uno tiene de cambiar sus acciones respecto a los conocimientos que va adquiriendo, tenés una inteligencia como pocos.

Me acompañaste en tantas etapas de mi vida diferentes. Porque con vos pasé más tiempo en Discord que con cualquier otra persona. Gracias porque jugar un juego con vos, es diversión y tryhardeo asegurado. Admiro tu entusiasmo único por la ciencia y el conocimiento. Gracias Gonza, porque si juntamos todos los buenos momentos vividos que tuvimos, tendríamos que hacer un museo entero.

Gracias Cata Y, por el viaje compartido y por tantas piruetas.

Gracias Cata M, por cocinar tan rico y por tu sentido de la moda. (Un placer ser tu daltónico de confianza!)

Gracias por contagiarme la alegría como nadie. Porque con vos estar en la naturaleza se siente mucho mejor. Por siempre ser tan agradable y flexible a nuestras locuras. Gracias Ren, por ser una fiel compañera de mis viajes y aventuras.

Porque ser sincero es mucho más que no mentir, y vos sos sincero como ningún otro. Por ser una excelente persona. Gracias Popi, porque no hay tema o álbum que me guste y que no quiera compartir y experimentar con vos.

Porque me acompañaste en cada final. Porque cada regalo está hecho con tus propias manos y pensado a medida. Porque el amor que sentís por tus amigos, tus familiares y demás, es un amor puro como ninguno. Porque si para jugar un partido de fútbol tenés que cargarnos a todos y cada uno de nosotros a tu espalda y llevarnos a la cancha, lo harías (¡y a veces lo hacés!). Gracias Cami, por las incontables noches que nos quedamos hasta las tantas de la madrugada, tu amistad es valiosa como pocas cosas en el mundo.

A mis amigos de la facultad, a los que me acompañaron en búnkeres y a los que pensaron conmigo problemitas en la facultad. Gracias a Manuca, por tus charlas sobre religión, y porque sé que si quiero discutir un problema con vos, vas a estar en tema. Gracias Ian, por la rigurosidad que le das a las ideas. Gracias a Tomer, por las risas en las aulas y por ser el que más levanta en banco plano de esas aulas.

Gracias a Lau, Cami H, Jorge, Mateo, Lucas, Luca, Fran C y otros que seguro me olvidé de nombrar por hacer únicas las cursadas.

Gracias a Nacho y Ceci por los búnkeres y los Carcassonnes. Gracias a Chanu, por ser my fellow chef y con quien puedo hablar largo y arduo sobre lógica, matemática, metafísica y la vida. A Juli 1, con quien me atreví a decir cosas en voz alta que hoy terminaron definiendo quién soy. Gracias por darme el espacio para abrirme, sincerarme y en el proceso conocerme a mí mismo. A JPG, porque nunca es mal momento para compartir un buen vinito. A Joa, por búnkeres, viajes, trabajo y demás cosas que compartimos. Siempre es un placer que estés presente. A Frodo, por estar en los detalles y luchar por tus creencias. A Numa, porque cualquier contexto es un buen contexto para una profunda charla con vos.

Gracias por que en su casa, me siento como en casa. Gracias Gabi y Dani, por hacerme sentir parte de la familia.

Por acompañarme en mi cambio físico. Por mostrarme lo que se puede hacer con disciplina e intensidad. Gracias Broski, porque juntos sigamos creciendo.y no solo de tamaño.

Gracias por acompañarme en toda la carrera. Porque no hay como charlar con vos de problemas de matemática, hablar de fútbol, de física, de emprender, de codear, de videojuegos, de películas, de música, de política, de filosofía, de todo. Por tu ironía y ese humor absurdo. Porque nadie me dijo "no flaco"tantas veces como vos. Porque sé que te vas a copar, no importa qué sea lo que proponga. Gracias Pedro, por haber sido una pieza tan fundamental en tantos aspectos distintos de mi vida.

Thank you to my partner in learning. I deeply admire your determination. When I first met you, you didn't know what a polynomial was, and after just 1 or 2 months, you already knew what absolute convergence was. With you, I shared more bunkers than with anyone else. You, who are always willing to have a deep conversation about how the nature of any phenomenon works. Always willing to put the effort for a meeting to happen. Thank you Valen, because even if the house is a circus, I know that we can figure out a way around.

Gracias a la UBA y a todas las personas que la conforman, por otorgarme un estudio de tanta calidad. Gracias a las diversas olimpiadas académicas, especialmente a OMA, por darme el espacio para que mi curiosidad por la ciencia crezca.

Por último, a vos. Que me acompañaste desde que entré a la carrera. De quien me enamoré más rápido que el viento. Con quien comparto lo que quiero ser no solo porque se lo comenté en una charla, sino porque realmente voy a compartirlo en carne y hueso. A quien admiro profundamente por su determinación y su inteligencia. Quien me alegra todas y cada una de las mañanas. Con quien acostarnos a dormir significa soñar juntos. Gracias y miles de gracias Amore, y si bien te podría agradecer por millones de cosas más, elijo agradecerte por lo que se viene. Ojalá tenga el

privilegio de agradecerte todos los días de mi vida.

Introducción

Las formas modulares son funciones meromorfas definidas en el semiplano superior complejo que satisfacen propiedades de simetría bajo la acción del grupo modular o de sus subgrupos de congruencia, que además cumplen cierta holomorfía. Una propiedad fundamental de estas funciones es que, debido a su periodicidad, toda forma modular f admite una expansión en serie de Fourier de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q^n, \quad \text{donde } q = e^{2\pi iz}.$$

Estos objetos son centrales en la teoría de números moderna. Un caso destacado de su relevancia es la demostración del Último Teorema de Fermat por Andrew Wiles [Wil95], quien probó el Teorema de Taniyama-Shimura [Tan57, Shi58] que dice que toda curva elíptica racional tiene una forma modular asociada.

Más allá de esta aplicación, las formas modulares son una herramienta fundamental para estudiar las propiedades aritméticas de funciones generadoras. La estrategia consiste en probar que la serie de potencias de una función aritmética es, en efecto, la expansión de Fourier de una forma modular, permitiendo así utilizar la rica estructura de esta última para inferir propiedades sobre los coeficientes.

Un ejemplo clásico de esta relación es la función de partición $p(n)$, que cuenta las formas de escribir un entero positivo n como suma de enteros positivos. Euler estableció su función generadora como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}.$$

Ramanujan [Ram19] utilizó esto para obtener las siguientes congruencias para los coeficientes:

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Durante mucho tiempo se consideraron estas propiedades como casos aislados, aunque generaron un gran interés sobre la distribución de los valores de $p(n)$ en clases de congruencia. En este contexto, Erdös e Ivíc [EI89] conjeturaron que para todo primo m, existe al menos un entero no negativo n tal que $p(n) \equiv 0 \pmod m$. En una dirección más fuerte, M. Newman [New60] conjeturó que para todo entero m, la función de partición llena todas las clases de residuos módulo m infinitas veces.

Trabajos posteriores de Ono [Ono00] y Ahlgren [Ahl00] hicieron avances significativos sobre estos resultados, demostrando la existencia de infinitas familias de congruencias lineales, validando la Conjetura de Erdös e Ivíc como corolario.

Teorema (Ahlgren-Ono [Ahl00, Ono00])**.** *Sea $\ell \geq 5$ un número primo y m un entero positivo. Existe una proporción positiva de primos $Q \equiv -1 \pmod{24\ell}$ tales que:*

$$p\left(\frac{Q^3 n + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{\ell^m},$$

para los enteros n coprimos con Q que satisfacen una congruencia módulo 24ℓ.

Un aspecto crucial en la demostración de este resultado radica en el hecho de que la función generadora de $p(n)$ es una *forma modular débil*; es decir, satisface las condiciones de modularidad y de holomorfía en el semiplano superior, pero posee polos en las cúspides. La estrategia central de Ahlgren y Ono consistió en demostrar que, a pesar de las singularidades en las cúspides, dicha forma débil es congruente módulo m a una forma modular holomorfa clásica. Este resultado permite utilizar la teoría sobre formas modulares para concluir propiedades módulo m sobre los coeficientes de la forma original.

La observación de que una forma débil es congruente módulo m a una forma holomorfa motivó a Treneer [Tre06a] a investigar si este fenómeno es una propiedad general. Treneer generalizó los trabajos previos demostrando que los coeficientes de cualquier forma modular débil pueden ser capturados por formas cuspidales.

Teorema (Treneer [Tre06a]). *Sea $f(z) = \sum a(n)q^n$ una forma modular débil de peso $k/2$, nivel N y caracter χ. Para cualquier primo p que no divida a N, si m es suficientemente grande, existe una forma cuspidal g_p tal que:*

$$g_p(z) \equiv \sum_{n \not\equiv 0 \pmod{p}} a(p^m n)q^n \pmod{p}.$$

Específicamente, la forma g_p construida tiene nivel Np^2, caracter $\chi\chi_p^{km}$ y peso $\frac{k}{2} + \frac{p^\beta(p^2-1)}{2}$ para un entero β suficientemente grande.

Sin embargo, las técnicas empleadas por Treneer suelen producir formas modulares g_p cuyo peso crece como un polinomio sobre p de grado arbitrariamente grande, y con un nivel que aumenta como el cuadrado del primo. Desde una perspectiva computacional, esto representa un obstáculo mayor para verificar congruencias, ya que la cantidad de coeficientes necesarios depende linealmente de estos parámetros, según lo establece el siguiente resultado fundamental:

Teorema (Cota de Sturm [Stu87]). *Sea $k \geq 3$ un entero y m un número primo. Supongamos que $g = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$ es una forma modular débil de peso $\frac{k}{2}$ y nivel N con coeficientes $a_n \in \mathbb{Z}$. Sea*

$$n_0 = \left\lfloor \frac{k}{24}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] \right\rfloor.$$

Si $a(n) \equiv 0 \pmod{m}$ para todo $1 \leq n \leq n_0$, entonces $g \equiv 0 \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$.

En consecuencia, para demostrar que dos formas modulares son congruentes (aplicando el teorema a su diferencia), reducir el peso a un crecimiento lineal y mantener el nivel fijo disminuye drásticamente este límite, haciendo viable la verificación computacional.

La evidencia computacional obtenida al estudiar la función de sobreparticiones junto con el trabajo de [Wea01] para la función de particiones, sugiere que es posible encontrar formas congruentes mucho más eficientes en términos del peso y el nivel. Esta mostraba que la congruencia se puede satisfacer con una forma modular de peso

lineal, aproximadamente $m/2$, y manteniendo el nivel fijo. Esto motiva la pregunta central de esta tesis:

¿Es posible demostrar que una forma modular débil es congruente módulo m a una forma modular holomorfa con un peso que supere a la original en $\frac{m-1}{2}$ y nivel fijo?

Respondemos afirmativamente a esta pregunta en el caso particular de los cocientes eta.

Tanto la función generadora de particiones como la de sobreparticiones pertenecen a una familia especial de funciones conocidas como *cocientes eta*. Estas funciones se construyen a partir de la función eta de Dedekind, definida como:

$$\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad \text{donde } q = e^{2\pi i z}.$$

En general, un cociente eta se define como un producto finito de la forma:

$$f(z) = \prod_{\delta} \eta(\delta z)^{r_\delta},$$

donde δ recorre un conjunto finito de enteros positivos y $r_\delta \in \mathbb{Z}$. En el caso de la función de partición, esta se constituye como un cociente eta a través de la siguiente relación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{24n-1} = \frac{1}{\eta(24z)}.$$

Gracias a los resultados de Newman [New57] y Ligozat [Lig75], es posible determinar condiciones explícitas para que estas funciones sean formas modulares, y calcular con exactitud su orden de anulación en las cúspides. Esto nos permite identificar fácilmente cuáles de ellos son formas holomorfas y cuáles poseen polos (formas débiles).

Sobre esta familia de funciones, se obtuvo el siguiente resultado.

Teorema (3.5.4)**.** *Sea f un cociente eta de nivel d, peso k. Para todo primo m suficientemente grande, existe una forma modular holomorfa g_m tal que:*

$$f|U_m \equiv g_m \pmod{m},$$

donde g_m tiene peso $\frac{m-1}{2} + k$, nivel constante $N = mcm(d, 576)$ y caracter χ_{12}^{m-1}.

Como aplicación, mejoramos los resultados de Ono [Ono00] para la función de partición $p(n)$, reduciendo el peso de la forma modular congruente de un orden cuadrático a uno lineal y fijando el nivel. Es destacable que Weaver [Wea01] ya había logrado encontrar dicha congruencia con peso $\frac{m-2}{2}$ y nivel 576, pero restringiéndose solo a los primos $m \leq 31$, mientras que nuestro resultado garantiza la existencia de tales formas para todo primo m. De manera similar, refinamos los resultados de [RSVMZ24] para la función de sobreparticiones $\overline{p}(n)$, obteniendo formas congruentes de peso $\frac{m-2}{2}$ en lugar de $\frac{1}{2}(m(16 - a_m) - 17)$ con $0 < a_m < 8$, $a_m \equiv -m \pmod 8$. Estos resultados optimizan la verificación computacional de congruencias.

Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada en tres capítulos que condensan las bases teóricas necesarias y conducen hacia los resultados originales.

En el Capítulo 1 establecemos los fundamentos de la teoría de formas modulares de peso entero. Definimos los subgrupos de congruencia y las propiedades de holomorfía en las cúspides. Estudiamos en detalle el espacio de Eisenstein y los operadores lineales que actúan sobre estos espacios: los operadores de Hecke, las involuciones de Atkin-Lehner y los operadores U y V. Finalizamos el capítulo presentando el Teorema de Densidad de Serre, una herramienta crucial para establecer la existencia de infinitos primos con ciertas propiedades de congruencia.

El Capítulo 2 extiende la teoría al contexto de formas modulares de peso semientero. Introducimos los factores de automorfía necesarios y la definición de los operadores de Hecke en este entorno. El núcleo de este capítulo es la Correspondencia de Shimura, que actúa como un puente conectando las formas de peso semientero con las de peso entero. Utilizando esta correspondencia y los resultados del capítulo anterior, detallamos la prueba de una versión del teorema de densidad para peso semientero.

Finalmente, el Capítulo 3 se centra en los cocientes eta de Dedekind. En este capítulo incluimos demostraciones formales y detalladas del Teorema de Newman, que determina cuándo un cociente eta es una forma modular, y del Teorema de Ligozat, que proporciona una fórmula explícita para el orden de anulación en las cúspides. Dado que las demostraciones completas de estos teoremas suelen estar dispersas o resumidas en la literatura, su desarrollo en esta tesis pretende servir como una referencia autocontenida y accesible. Exploramos la conexión con las funciones generadoras aritméticas, como la función de partición $p(n)$ y la de sobreparticiones $\overline{p}(n)$. El trabajo culmina en la Sección 3.5, donde presentamos los resultados originales de esta tesis. Demostramos que, bajo la acción del operador U_m, una amplia clase de cocientes eta resulta congruente módulo m a formas modulares holomorfas de peso lineal y nivel fijo, y aplicamos este teorema general para recuperar familias explícitas de congruencias.

Índice general

1. Formas modulares de peso entero **12**
- 1.1. Subgrupos de congruencia . . . 12
- 1.2. Formas modulares . . . 15
  - 1.2.1. Cúspides . . . 17
- 1.3. Operadores de Hecke . . . 25
- 1.4. Espacio de Einsestein . . . 31
  - 1.4.1. Autovectores: Una base del espacio de Einsestein . . . 32
- 1.5. Involuciones de Atkin-Lehner . . . 36
- 1.6. Operadores U y V . . . 39
- 1.7. Teorema de densidad de Serre . . . 44

2. Formas modulares de peso semientero **47**
- 2.1. Preliminares . . . 47
- 2.2. Operador de Hecke para peso semientero . . . 50
- 2.3. Correspondencia de Shimura y Serre para peso semientero . . . 51
  - 2.3.1. El Puente entre Pesos Semi-Enteros y Enteros . . . 51
  - 2.3.2. Teorema de densidad de Serre para peso semientero . . . 53

3. Cocientes eta **57**
- 3.1. Función eta de Dedekind . . . 57
  - 3.1.1. Ley de transformación para eta . . . 57
  - 3.1.2. Sumas de Dedekind . . . 60
- 3.2. Cocientes eta y el Teorema de Newman . . . 64
- 3.3. Teorema de Ligozat . . . 68
- 3.4. Funciones generadoras de particiones y cocientes eta . . . 75
  - 3.4.1. Función de particiones . . . 75
  - 3.4.2. Funcion de sobreparticiones . . . 76
  - 3.4.3. Otros ejemplos . . . 78
  - 3.4.4. Aplicaciones del teorema de Newman y de Ligozat . . . 79
- 3.5. Congruencias para cocientes eta . . . 85

Capítulo 1

Formas modulares de peso entero

Las formas modulares son funciones complejas definidas en el semiplano superior complejo que satisfacen ciertas propiedades de simetría y condiciones analíticas. Juegan un papel crucial en diversas áreas de las matemáticas, como la teoría de números y la geometría algebraica. Esta sección introduce los conceptos fundamentales de las formas modulares; para un tratamiento riguroso y detallado de estos fundamentos, referimos al lector al texto de Diamond y Shurman [DS05].

1.1. Subgrupos de congruencia

El escenario principal para las formas modulares es el semiplano superior complejo.

Definición 1.1.1 (Semiplano superior complejo)**.** El *semiplano superior complejo*, denotado por $\mathbb{H}$, es el conjunto

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

El grupo que actúa naturalmente sobre $\mathbb{H}$ es el grupo lineal especial real $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.2. El *grupo lineal general real* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ consiste en matrices de 2×2 con entradas reales con determinante positivo:

$$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\right\}$$

Este grupo actúa sobre $\mathbb{H}$ mediante las *transformaciones fraccionales lineales* (o transformaciones de Möbius).

Definición 1.1.3 (Acción de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}$)**.** Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{H}$, la acción de γ sobre z se define como:

$$\gamma z \coloneqq \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.1}$$

Proposición 1.1.4. *La acción definida en* (1.1) *mapea* $\mathbb{H}$ *en sí mismo. Es decir, si* $z \in \mathbb{H}$ *y* $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$*, entonces* $\gamma z \in \mathbb{H}$*.*

Demostración. Calculamos la parte imaginaria de γz:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\gamma z) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{Im}(acz\bar{z}+adz+bc\bar{z}+bd)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{ad\operatorname{Im}(z)+bc\operatorname{Im}(\bar{z})}{|cz+d|^2} \quad (\text{ya que } \operatorname{Im}(acz\bar{z}+db)=0) \\
&= \frac{ad\operatorname{Im}(z)-bc\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad (\text{ya que } \operatorname{Im}(\bar{z})=-\operatorname{Im}(z)) \\
&= \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{k\cdot\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad (\text{con } ad-bc=k>0)
\end{aligned}$$

Dado que $k\operatorname{Im}(z) > 0$ ya que $k > 0$ para $z \in \mathbb{H}$ y $|cz+d|^2 > 0$ con $c, d \in \mathbb{R}$ no ambos cero, se tiene que $\operatorname{Im}(\gamma z) > 0$. □

Un subgrupo discreto fundamental de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ es el grupo modular $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Definición 1.1.5 (Grupo modular)**.** El *grupo modular* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es el subgrupo de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ formado por matrices con entradas enteras:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}$$

Las formas modulares se definen con respecto a ciertos subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de índice finito, conocidos como subgrupos de congruencia.

Definición 1.1.6 (Subgrupo principal de congruencia)**.** Dado un entero positivo $N \geq 1$, el *subgrupo principal de congruencia de nivel* N es:

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

La congruencia módulo N significa que $a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}$ y $b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}$.

Definición 1.1.7 (Subgrupo de congruencia)**.** Un subgrupo $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se dice *de congruencia* si existe algún $N \geq 1$ tal que $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. El menor entero N para el cual esto sucede se llama el *nivel* de Γ.

Ejemplo 1.1.8. Otros subgrupos de congruencia importantes incluyen:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \tag{1.2}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\} \tag{1.3}$$

Estos subgrupos satisfacen la cadena de inclusiones:

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Lema 1.1.9 (Índice finito de subgrupos de congruencia)**.** *Si* Γ *es un subgrupo de congruencia de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*, entonces el índice* $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ *es finito.*

Demostración. Por definición, si Γ es un subgrupo de congruencia, existe un entero positivo $N \geq 1$ tal que el subgrupo principal de congruencia $\Gamma(N)$ está contenido en Γ. Es decir, $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

La fórmula de la torre para índices de subgrupos establece que:

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \cdot [\Gamma : \Gamma(N)]$$

Para demostrar que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ es finito, es suficiente con demostrar que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$ es finito.

Consideremos la aplicación que reduce las entradas de una matriz módulo N:

$$\phi_N : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \pmod N & b \pmod N \\ c \pmod N & d \pmod N \end{pmatrix}$$

El núcleo de este homomorfismo, $\ker(\phi_N)$, es el conjunto de matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ que se mapean a la matriz identidad en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Por definición, este es precisamente el subgrupo principal de congruencia $\Gamma(N)$:

$$\ker(\phi_N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\} = \Gamma(N)$$

Por el Primer Teorema de Isomorfismo para grupos, tenemos que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\ker(\phi_N) \cong \mathrm{Im}(\phi_N)$. Por lo tanto, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

El grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ es el grupo de matrices de 2×2 con entradas en el anillo finito $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ y determinante 1. Como el anillo base es finito, el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ es un grupo finito. El índice que buscamos es el orden del grupo cociente:

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)| = |\mathrm{Im}(\phi_N)| \leq |\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| < \infty$$

Hemos establecido que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$ es finito. Como $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \leq [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$, se sigue que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ debe ser finito. □

Proposición 1.1.10 (Generadores del grupo modular)**.** *El grupo modular* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *está generado por las matrices* $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *y* $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Demostración. Sea G el subgrupo generado por S y T. Dada una matriz $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, nuestro objetivo es reducirla a la identidad multiplicando por la izquierda por elementos de G. Observamos que la operación T^n suma n veces la segunda fila a la primera ($a \mapsto a + nc$), mientras que S intercambia las filas y cambia signos ($c \mapsto a, a \mapsto -c$). Si $c \neq 0$, podemos elegir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|a + nc| < |c|$ (división con resto) y luego aplicar S, obteniendo una nueva matriz cuya entrada inferior izquierda tiene valor absoluto estrictamente menor. Repitiendo este algoritmo de Euclides, eventualmente llegamos a una matriz con $c = 0$, que necesariamente es de la forma $\pm T^k$ ya que el determinante sigue siendo 1. Como $-I = S^2 \in G$, concluimos que la matriz reducida pertenece a G, lo que implica que $\gamma \in G$. □

1.2. Formas modulares

En esta sección, definiremos el factor de automorfía, la noción de forma modular débil y de forma modular para peso entero.

Definición 1.2.1 (Operador slash de Peso k)**.** Sea $k \in \mathbb{Z}$ (el *peso*) y sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ una función. Para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, el *operador slash (de peso k)* denotado $-|_k\gamma$ se define como:

$$(f|_k\gamma)(z) \coloneqq (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k} f(\gamma z) \tag{1.4}$$

Cuando nos restringimos a $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\det\gamma = 1$ y la definición se simplifica a:

$$(f|_k\gamma)(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma z) \quad \text{para } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \tag{1.5}$$

Definición 1.2.2 (Factor de automorfía $j(\gamma, z)$)**.** Para una matriz $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{H}$, definimos el *factor de automorfía* $j(\gamma, z)$ como:

$$j(\gamma, z) \coloneqq cz + d$$

Con esta notación, el operador slash de peso k (para $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) se puede escribir como:

$$(f|_k\gamma)(z) = j(\gamma, z)^{-k} f(\gamma z)$$

Proposición 1.2.3 (Propiedades de $j(\gamma, z)$ y el operador slash)**.** *Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$ y $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ una función.*

(a) (Relación Cociclo) *El factor de automorfía satisface:*

$$j(\gamma_1\gamma_2, z) = j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)$$

(b) (Acción de Grupo) *El operador slash define una acción de grupo (derecha):*

$$(f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2 = f|_k(\gamma_1\gamma_2)$$

Demostración. (a): Sean $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ y $\gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$. Primero, calculamos el producto matricial $\gamma_1\gamma_2$:

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

El lado izquierdo de la identidad es $j(\gamma_1\gamma_2, z)$, que por definición es:

$$j(\gamma_1\gamma_2, z) = (c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)$$

Ahora, calculamos el lado derecho, $j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)$:

$$\begin{aligned} j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z) &= [c_1(\gamma_2 z) + d_1] \cdot (c_2 z + d_2) \\ &= \left[c_1\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) + d_1\right](c_2 z + d_2) \\ &= c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2) \\ &= c_1a_2 z + c_1b_2 + d_1c_2 z + d_1d_2 \\ &= (c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2) \end{aligned}$$

de lo que se concluye la relación de cociclo.

(b): Partimos del lado izquierdo, $(f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2$, y aplicamos la definición del operador slash dos veces. Sea $g(z) = (f|_k\gamma_1)(z) = j(\gamma_1, z)^{-k} f(\gamma_1 z)$.

$$\begin{aligned}((f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2)(z) &= (g|_k\gamma_2)(z) \\ &= j(\gamma_2, z)^{-k} g(\gamma_2 z) \\ &= j(\gamma_2, z)^{-k} \left[j(\gamma_1, \gamma_2 z)^{-k} f(\gamma_1(\gamma_2 z))\right] \\ &\qquad \text{(sustituyendo } z \text{ por } \gamma_2 z \text{ en la def. de } g) \\ &= \left[j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)\right]^{-k} f((\gamma_1\gamma_2)z)\end{aligned}$$

usando la relación cociclo que probamos en la parte (a), $j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z) = j(\gamma_1\gamma_2, z)$ obtenemos:

$$\left[j(\gamma_1, \gamma_2 z) j(\gamma_2, z)\right]^{-k} f((\gamma_1\gamma_2)z) = \left[j(\gamma_1\gamma_2, z)\right]^{-k} f((\gamma_1\gamma_2)z),$$

por definición, esta es la expresión para $(f|_k(\gamma_1\gamma_2))(z)$. Por lo tanto:

$$(f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2 = f|_k(\gamma_1\gamma_2)$$

como se queria ver. □

Proposición 1.2.4 (Conservación de la holomorfía por el operador slash)**.** *Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en el semiplano superior, $k \in \mathbb{Z}$ un entero, y $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. La función transformada $(f|_k\sigma)(z)$, definida por:*

$$(f|_k\sigma)(z) = (cz + d)^{-k} f(\sigma z)$$

es también una función holomorfa en $\mathbb{H}$.

Demostración. La holomorfía de $(f|_k\sigma)(z)$ es consecuencia de las siguientes propiedades:

1. La función $z \mapsto \sigma z = \frac{az+b}{cz+d}$ es holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H}$.
2. La composición de una función holomorfa (f) con una función holomorfa (σz) resulta en una función holomorfa. Por lo tanto, $z \mapsto f(\sigma z)$ es holomorfa.
3. El factor de automorfía $(cz+d)^{-k}$ es una función holomorfa en $\mathbb{H}$, ya que $cz+d$ nunca se anula para $z \in \mathbb{H}$.
4. El producto de dos funciones holomorfas, $(cz + d)^{-k}$ y $f(\sigma z)$, es holomorfo.

Se concluye que $(f|_k\sigma)(z)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$. □

Definición 1.2.5 (Ley de modularidad)**.** Sea Γ un subgrupo de congruencia y $k \in \mathbb{Z}$. Decimos que una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ satisface la *ley de modularidad* de peso k para Γ si es invariante bajo el operador slash para toda matriz del grupo. Es decir, si $f|_k\gamma = f$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Explícitamente, esto significa que:

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{H} \text{ y } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

Proposición 1.2.6. *Sea Γ un subgrupo generado por un conjunto de matrices S. Si una función f satisface la condición de modularidad $f|_k\gamma = f$ para todo generador $\gamma \in S$, entonces satisface la condición para todo elemento $\gamma \in \Gamma$.*

Demostración. La demostración se basa en la propiedad asociativa del operador slash (acción de grupo a derecha), la cual es consecuencia directa de la relación de cociclo del factor de automorfía $j(\gamma, z) = (cz + d)$. Específicamente, sabemos que para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$:

$$f|_k(\gamma_1\gamma_2) = (f|_k\gamma_1)|_k\gamma_2$$

Sea $\gamma \in \Gamma$. Podemos escribir γ como un producto finito de generadores $\gamma = g_1 g_2 \dots g_m$, donde $g_i \in S$. Procedemos por inducción sobre la longitud m del producto.

El caso base ($m = 1$) se cumple por hipótesis. Supongamos que la propiedad es cierta para cualquier producto de longitud $m - 1$. Sea $\gamma' = g_1 \dots g_{m-1}$ tal que $f|_k\gamma' = f$. Entonces:

$$f|_k\gamma = f|_k(\gamma' g_m) = (f|_k\gamma')|_k g_m$$

Por hipótesis inductiva, $f|_k\gamma' = f$, por lo que la expresión se reduce a:

$$f|_k\gamma = f|_k g_m$$

Dado que g_m es un generador, tenemos $f|_k g_m = f$. Concluimos así que $f|_k\gamma = f$ para todo $\gamma \in \Gamma$. □

1.2.1. Cúspides

Una forma modular debe comportarse bien en la "frontera" de $\mathbb{H}$, compuesta por las cúspides.

Definición 1.2.7 (Cúspides y acción sobre $\hat{\mathbb{Q}}$)**.** A continuación, vamos a definir el conjunto $\hat{\mathbb{Q}}$, las matrices actúan sobre este y por último el concepto de cúspide.

1. *Puntos racionales extendidos:* El conjunto de *puntos racionales extendidos* es $\hat{\mathbb{Q}} \coloneqq \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

2. *Acción de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *sobre* $\hat{\mathbb{Q}}$*:* La acción de una matriz $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre un punto $x \in \hat{\mathbb{Q}}$ se define de la siguiente manera:

   - *Si $x \in \mathbb{Q}$:* Escribimos $x = p/q$ para enteros p, q con $q \neq 0$. La acción es el resultado de aplicar la transformación fraccional lineal:

     $$\gamma \cdot x = \gamma \cdot \frac{p}{q} \coloneqq \frac{a(p/q) + b}{c(p/q) + d} = \frac{ap + bq}{cp + dq}$$

     Adoptamos la convención de que si el denominador $cp + dq = 0$, entonces el resultado de la acción es ∞.

- *Si $x = \infty$:* La acción se define como el límite de la transformación cuando $z \to \infty$, o equivalentemente, pensando en ∞ como "p/0":

$$\gamma \cdot \infty := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

  Adoptamos la convención de que si $c = 0$, el resultado es ∞. (Notar que si $c = 0$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces $ad = 1$, así $a = \pm 1$, y $\gamma \cdot \infty = \pm 1/0 = \infty$).

Se puede verificar que esta acción está bien definida (el resultado para $x \in \mathbb{Q}$ no depende de la representación p/q) y que cada $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ define una biyección de $\hat{\mathbb{Q}}$ en sí mismo.

3. *Cúspide:* Las *cúspides* de un subgrupo de congruencia $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ son las clases de equivalencia (órbitas) de $\hat{\mathbb{Q}}$ bajo la acción de Γ definida anteriormente. El conjunto de cúspides se denota como $\Gamma\backslash\hat{\mathbb{Q}}$.

Ejemplo 1.2.8. Para $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, la acción sobre $\hat{\mathbb{Q}}$ es transitiva. Esto significa que cualquier elemento $p/q \in \mathbb{Q}$ puede ser mapeado a ∞ por alguna $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene una sola cúspide, usualmente representada por ∞.

Proposición 1.2.9 (Finitud del número de cúspides)**.** *Sea Γ un subgrupo de congruencia de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Entonces, el número de cúspides de Γ, es decir, el número de órbitas $\Gamma\backslash\hat{\mathbb{Q}}$, es finito.*

Demostración. Por el Lema 1.1.9, sabemos que si Γ es un subgrupo de congruencia, su índice $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ es finito. Sea $m = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$.

Podemos escribir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ como una unión disjunta finita de coclases a izquierda respecto a Γ:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma\gamma_i$$

donde $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ es un conjunto de representantes de estas coclases.

Sabemos que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa transitivamente sobre el conjunto $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (como se mencionó en el ejemplo anterior, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tiene una sola cúspide, ∞). Esto significa que para cualquier $x \in \hat{\mathbb{Q}}$, existe alguna matriz $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $x = g \cdot \infty$.

Dado $x \in \hat{\mathbb{Q}}$, tomemos $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $x = g \cdot \infty$. Como $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, debe pertenecer a una de las coclases izquierdas $\Gamma\gamma_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así, podemos escribir $g = \gamma\gamma_i$ para alguna $\gamma \in \Gamma$.

Ahora consideramos la órbita de x bajo la acción de Γ. Usando que la acción de grupo es asociativa:

$$x = g \cdot \infty = (\gamma\gamma_i) \cdot \infty = \gamma \cdot (\gamma_i \cdot \infty)$$

Sea $s_i = \gamma_i \cdot \infty$. El punto s_i pertenece a $\hat{\mathbb{Q}}$ y, la ecuación $x = \gamma \cdot s_i$ muestra que x está en la misma Γ-órbita que s_i, ya que $\gamma \in \Gamma$, es decir, $\Gamma x = \Gamma s_i$.

Hemos demostrado que todo $x \in \hat{\mathbb{Q}}$ pertenece a la Γ-órbita de alguno de los puntos $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Por lo tanto, el conjunto de todas las Γ-órbitas (es decir, el conjunto de cúspides de Γ) está contenido en el conjunto $\{\Gamma s_1, \Gamma s_2, \ldots, \Gamma s_m\}$. El número de cúspides de Γ, $|\Gamma\backslash\hat{\mathbb{Q}}|$, es por lo tanto menor o igual que el número de estos representantes, m. Como $m = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ es finito, concluimos que el número de cúspides de Γ es finito. □

Para analizar el comportamiento de una forma modular débil f en una cúspide $s \in \hat{\mathbb{Q}}$, se utiliza una matriz $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\sigma(\infty) = s$. Se estudia entonces el comportamiento de la función $g(z) \coloneqq (f|_k\sigma)(z)$ cuando $z \to i\infty$.

Proposición 1.2.10 (Estructura del estabilizador de una cúspide)**.** *Sea Γ un subgrupo de congruencia de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, s una de sus cúspides, y sea $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ una matriz tal que $\sigma(\infty) = s$. El estabilizador de la cúspide ∞ en el grupo conjugado $\sigma^{-1}\Gamma\sigma$, denotado $(\sigma^{-1}\Gamma\sigma)_\infty$, está formado por matrices de traslación y es de la forma:*

$$(\sigma^{-1}\Gamma\sigma)_\infty = \{\pm I\} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

para algún entero positivo h.

Demostración. Sea $\Gamma' = \sigma^{-1}\Gamma\sigma$. El estabilizador de ∞ en este grupo, Γ'_∞, consiste en las matrices $\gamma' \in \Gamma'$ que fijan ∞.

Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ fija ∞ si y solo si $c = 0$. La condición del determinante $ad - bc = 1$ se reduce a $ad = 1$, lo que para enteros implica que $a = d = \pm 1$. Por lo tanto, cualquier elemento de Γ'_∞ debe ser de la forma $\begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ para algún $n \in \mathbb{R}$.

El resto se deduce de que Γ es un subgrupo discreto de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y de que la matrices de Γ tienen coeficientes enteros. □

Definición 1.2.11 (Ancho de cúspide)**.** Con la notación de la Proposición 1.2.10, el *ancho* de la cúspide s (respecto a Γ), denotado h_s, es el menor generador positivo del grupo de traslaciones. Es decir, es el menor valor positivo de h para el cual se cumple la igualdad del estabilizador (notar que el h que nos da la proposición anterior, también va a ser el mínimo).

Para el grupo $\Gamma_0(N)$, el ancho puede calcularse explícitamente.

Proposición 1.2.12 (Fórmula para el ancho de cúspide en $\Gamma_0(N)$)**.** *Sea $s = a/c$ una cúspide de $\Gamma_0(N)$ representada por una fracción irreducible (i.e., $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$). El ancho h_s de la cúspide s para $\Gamma_0(N)$ está dado por la fórmula:*

$$h_s = \frac{N}{\mathrm{mcd}(c^2, N)}$$

En particular, para la cúspide $s = \infty$ (representada por $1/0$, i.e., $c = 0$), el ancho es $h_\infty = 1$.

Demostración. Sea $s = a/c$ con $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$. Dividimos la prueba en dos casos.

Caso 1: $s = \infty$. Esta cúspide se representa por $a/c = 1/0$, por lo que $c = 0$. Podemos elegir $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ya que $\sigma(\infty) = \infty = s$. El estabilizador de $s = \infty$ en $\Gamma_0(N)$, denotado $\Gamma_0(N)_\infty$, consiste en las matrices $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ tales que $\gamma(\infty) = \infty$. La condición $\gamma(\infty) = \infty$ implica $C = 0$. La condición $\gamma \in \Gamma_0(N)$ requiere $C \equiv 0 \pmod{N}$ (lo cual se cumple si $C = 0$) y $AD - BC = 1$. Con $C = 0$, la condición del determinante se convierte en $AD = 1$. Como $A, D \in \mathbb{Z}$, las

únicas posibilidades son $A = D = 1$ o $A = D = -1$. Por lo tanto, el estabilizador es:

$$\Gamma_0(N)_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & B \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \mid B \in \mathbb{Z} \right\} = \{\pm I\} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid B \in \mathbb{Z} \right\}$$

El subgrupo de traslaciones puras dentro de $\sigma^{-1}\Gamma_0(N)\sigma = \Gamma_0(N)_\infty$ es $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid B \in \mathbb{Z}\}$. El menor entero positivo h tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ está en este grupo es claramente $h = 1$. Así, el ancho de la cúspide ∞ es $h_\infty = 1$. Verifiquemos con la fórmula: para $c = 0$, $\mathrm{mcd}(c^2, N) = \mathrm{mcd}(0, N) = N$. La fórmula da $h_\infty = N/N = 1$. Coinciden.

Caso 2: $s = a/c$ con $c \neq 0$. Como $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$, por la identidad de Bézout, existen enteros b, d tales que $ad - bc = 1$. Tomamos $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Esta matriz satisface $\sigma(\infty) = a/c = s$. De acuerdo con la Definición 1.2.11, el ancho h_s es el menor entero positivo h tal que $\gamma_h = \sigma T^h \sigma^{-1} \in \Gamma_0(N)$, donde $T^h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculamos γ_h:

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= \sigma \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & ah + b \\ c & ch + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - c(ah + b) & -ab + a(ah + b) \\ cd - c(ch + d) & -bc + a(ch + d) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ad - ach - bc & a^2 h \\ -c^2 h & ad - bc + ach \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - ach & a^2 h \\ -c^2 h & 1 + ach \end{pmatrix} \quad (\text{usando } ad - bc = 1)
\end{aligned}$$

Esta matriz γ_h tiene entradas enteras y $\det(\gamma_h) = (1-ach)(1+ach) - (a^2h)(-c^2h) = 1$. Para que $\gamma_h \in \Gamma_0(N)$, necesitamos que la entrada $(2, 1)$ sea congruente a 0 módulo N:

$$-c^2 h \equiv 0 \pmod{N}$$

Esto es equivalente a la condición de divisibilidad $N | c^2 h$. Buscamos el menor entero positivo h que satisfaga $N | c^2 h$. Sea $g = \mathrm{mcd}(c^2, N)$. Entonces podemos escribir $c^2 = gx$ y $N = gy$ para algunos enteros x, y tales que $\mathrm{mcd}(x, y) = 1$. La condición $N | c^2 h$ se convierte en $gy | (gx)h$. Como $g \geq 1$, podemos dividir por g: $y | xh$. Dado que $\mathrm{mcd}(x, y) = 1$, la condición $y | xh$ implica que y debe dividir a h. El menor entero positivo h que es divisible por y es precisamente $h = y$. Por lo tanto, el ancho buscado es $h_s = y$. Sustituyendo $y = N/g = N/\mathrm{mcd}(c^2, N)$, obtenemos:

$$h_s = \frac{N}{\mathrm{mcd}(c^2, N)}$$

Esto completa la demostración para $c \neq 0$. □

Proposición 1.2.13 (Desarrollo de fourier para funciones periódicas)**.** *Sea $h > 0$ un número real. Si una función $g : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en el semiplano superior*

$\mathbb{H}$ *y periódica con período* h *(es decir,* $g(z+h) = g(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{H}$*), entonces* g *admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma:*

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n q_h^n$$

donde $q_h = e^{2\pi iz/h}$.

Demostración. Este es un resultado clásico del análisis complejo. La demostración se basa en el cambio de variable $q = e^{2\pi iz/h}$, que transforma la función $g(z)$ en una función holomorfa sobre un disco perforado, a la cual se le puede aplicar el Teorema de la Serie de Laurent.

□

Proposición 1.2.14 (Existencia de la expansión de Fourier en cúspides)**.** *Sea* f *una función que satisface la ley de modularidad de peso* k *para* Γ*. Sea* s *una cúspide de* Γ *con ancho* h_s*, y sea* $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *una matriz tal que* $\sigma(\infty) = s$*. Entonces la función* $g(z) = (f|_k\sigma)(z)$ *es holomorfa y periódica con período* h_s*. Por lo tanto, admite un desarrollo de Fourier (o q-expansión) de la forma:*

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n q_{h_s}^n$$

donde $q_{h_s} = e^{2\pi iz/h_s}$.

Demostración. Sea $g(z) = (f|_k\sigma)(z)$.

1. *Holomorfía de g:* Dado que f es holomorfa, la Proposición 1.2.4 establece directamente que $g(z)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$.

2. *Periodicidad de g:* Por la Definición 1.2.11, el ancho h_s es el menor entero positivo tal que $\pm\sigma T^{h_s}\sigma^{-1} \in \Gamma$, donde $T^{h_s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h_s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sea $\gamma_T = \sigma T^{h_s}\sigma^{-1}$. Como f cumple la ley de modularidad para Γ, satisface $f|_k\gamma_T = f$. Ahora, usando que $(f|_kA)|_kB = f|_k(AB)$ (1.2.3):

$$f = f|_k\gamma_T = f|_k(\sigma T^{h_s}\sigma^{-1}) = (f|_k\sigma T^{h_s})|_k\sigma^{-1}$$

Aplicamos $|_k\sigma$ desde la derecha a ambos lados de la ecuación:

$$f|_k\sigma = (f|_k\sigma T^{h_s})|_k(\sigma^{-1}\sigma) = (f|_k\sigma T^{h_s})|_kI = f|_k(\sigma T^{h_s})$$

Por otro lado, consideremos $g|_kT^{h_s}$:

$$g|_kT^{h_s} = (f|_k\sigma)|_kT^{h_s} = f|_k(\sigma T^{h_s})$$

Combinando las dos líneas anteriores, obtenemos $g|_kT^{h_s} = f|_k\sigma = g$. Finalmente, expandimos $g|_kT^{h_s}$: el factor de automorfía para $T^{h_s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h_s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es $(0\cdot z+1)^k = 1$. Entonces, $(g|_kT^{h_s})(z) = (1)^{-k}g(z+h_s) = g(z+h_s)$. Como $g|_kT^{h_s} = g$, concluimos que $g(z+h_s) = g(z)$. La función $g(z)$ es periódica con período h_s.

Habiendo probado que $g(z)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$ y periódica con período h_s, aplicamos la Proposición 1.2.13 para concluir que admite el desarrollo de Fourier buscado. □

Definición 1.2.15 (Forma modular débil)**.** Sea Γ un subgrupo de congruencia y $k \in \mathbb{Z}$. Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ se dice que es una *forma modular débil de peso k para* Γ si satisface las siguientes tres condiciones:

1. *Holomorfía en* $\mathbb{H}$*:* La función f es holomorfa en todo punto del semiplano superior $\mathbb{H}$.

2. *Ley de modularidad:* Para toda matriz $\gamma \in \Gamma$, se cumple $f|_k\gamma = f$. Es decir:

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z) \quad \text{para todo } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

3. *Meromorfía en las cúspides:* La función f es meromorfa en todas las cúspides de Γ. Esto significa que para cualquier $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, la expansión de Fourier de la función transformada $(f|_k\gamma)(z)$ en torno al infinito,

$$(f|_k\gamma)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q_N^n \quad (q_N = e^{2\pi iz/N}),$$

tiene solo un número finito de coeficientes a_n no nulos con índice $n < 0$. En otras palabras, f no tiene singularidades esenciales en las cúspides, sino a lo sumo polos.

Definición 1.2.16 (Holomorfía y anulación en cúspides)**.** Sea f una forma modular débil de peso k para Γ, s una cúspide, h_s su ancho, y sea $g(z) = (f|_k\sigma)(z)$ (con $\sigma(\infty) = s$) la función periódica asociada cuya expansión de Fourier (garantizada por la Proposición 1.2.14) es $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n q_{h_s}^n$.

- Decimos que f es *holomorfa en la cúspide s* si su q-expansión asociada no tiene potencias negativas, es decir, si $c_n = 0$ para todo $n < 0$. En este caso, la expansión es $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q_{h_s}^n$.
- Decimos que f *se anula en la cúspide s* (o que es cuspidal en s) si es holomorfa en s y su término constante en la q-expansión asociada es cero, es decir, si $c_n = 0$ para todo $n \leq 0$ ($c_0 = 0$).

Se puede demostrar que esta definición es independiente de la elección de la matriz $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ utilizada para mapear ∞ a s.

Ahora podemos dar la definición completa de forma modular.

Definición 1.2.17 (Forma modular)**.** Sea Γ un subgrupo de congruencia y $k \in \mathbb{Z}$. Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una *forma modular de peso k para* Γ si:

1. f es holomorfa en $\mathbb{H}$.

2. f satisface $f|_k\gamma = f$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

3. f es holomorfa en todas las cúspides de Γ.

El espacio vectorial de formas modulares de peso k para Γ se denota por $M_k(\Gamma)$.

Definición 1.2.18 (Forma cuspidal)**.** Una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides de Γ. Esto significa que el coeficiente constante ($n = 0$) de su desarrollo de Fourier en cada cúspide es cero. El espacio vectorial de formas cuspidales de peso k para Γ se denota por $S_k(\Gamma)$. Es un subespacio de $M_k(\Gamma)$.

Ejemplo 1.2.19 (Forma modular discriminante y función τ de Ramanujan)**.** La función discriminante, definida por el producto infinito:

$$\Delta(z) \coloneqq q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24},$$

es una forma cuspidal de peso 12 para el grupo modular completo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (es decir, $\Delta \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$).

Los coeficientes de su expansión de Fourier definen la *función tau de Ramanujan*, denotada por $\tau(n)$, de modo que:

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

Demostración. Este resultado será demostrado rigurosamente en el Capítulo 3. La prueba se sigue directamente como una aplicación del Teorema de Newman (para el nivel y el carácter) y del Teorema de Ligozat (para el orden de anulación en las cúspides), los cuales nos permitirán determinar las propiedades de transformación y la condición de cuspidalidad de los cocientes eta. □

A continuación, generalizamos la noción de forma modular para Γ permitiendo una transformación no trivial bajo la acción de este. Esto se logra introduciendo la noción de un caracter de Dirichlet.

Definición 1.2.20 (Caracter de Dirichlet)**.** Un *caracter de Dirichlet módulo N* es un morfismo de grupos $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. Por convención, se extiende χ a una función sobre todo $\mathbb{Z}$ definiendo $\chi(n) = 0$ si $\mathrm{mcd}(n, N) \neq 1$.

Definición 1.2.21 (Espacio de formas modulares con caracter)**.** Sea χ un caracter de Dirichlet módulo N. El *espacio de formas modulares de peso k y nivel N con caracter χ*, denotado $M_k(N, \chi)$, es el subespacio de $M_k(\Gamma_1(N))$ que consiste en las formas que satisfacen la siguiente condición de transformación:

$$f|_k\gamma = \chi(d)f, \quad \text{para todo } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

Observación 1.2.22. Es importante notar que, si bien muchos teoremas en la literatura se enuncian para el caso sin caracter (es decir, para el espacio $M_k(\Gamma_0(N))$), la mayoría de estos resultados pueden generalizarse al espacio $M_k(N, \chi)$ sin mayor dificultad. Del mismo modo, los resultados demostrados para el caso general con caracter a menudo recuperan los resultados clásicos al especializarlos para el *caracter trivial* (el caracter χ que toma el valor 1 para todo argumento).

Si una forma modular f no es idénticamente nula, podemos definir su orden de anulación en cada cúspide. Existen dos convenciones comunes:

Definición 1.2.23 (Orden normalizado en una cúspide)**.** Sea $f \in M_k(\Gamma)$, $f \not\equiv 0$.

- *En la cúspide ∞:* Sea $h = h_\infty$ el ancho de ∞. Sea $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(f) q_h^n$ el desarrollo de Fourier ($q_h = e^{2\pi i z/h}$), con $a_{n_0}(f) \neq 0$. El *orden normalizado de f en ∞* es $\mathrm{ord}_\infty(f) \coloneqq n_0/h$.
- *En una cúspide $s \neq \infty$:* Sea h_s el ancho de s. Sea $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\sigma(\infty) = s$. Sea $g(z) = (f|_k\sigma)(z) = \sum_{n=m_0}^{\infty} b_n(g) q_{h_s}^n$ el desarrollo correspondiente ($q_{h_s} = e^{2\pi i z/h_s}$), con $b_{m_0}(g) \neq 0$. El *orden normalizado de f en s* es $\mathrm{ord}_s(f) \coloneqq m_0/h_s$.

El orden $\mathrm{ord}_s(f)$ es un número racional no negativo.

Definición 1.2.24 (Orden no normalizado en cúspide)**.** Con la misma notación que en la Definición 1.2.23, el *orden no normalizado* de f en la cúspide s, denotado $\nu_s(f)$, es el exponente entero más bajo que aparece en la expansión de Fourier relevante:

- $\nu_\infty(f) \coloneqq n_0$ (exponente más bajo de q_{h_∞})
- $\nu_s(f) \coloneqq m_0$ (exponente más bajo de q_{h_s} para $s \neq \infty$)

Este orden $\nu_s(f)$ es siempre un entero no negativo.

Observación 1.2.25 (Relación entre órdenes)**.** El orden normalizado $\mathrm{ord}_s(f)$ y el orden no normalizado $\nu_s(f)$ están relacionados por el ancho h_s de la cúspide s:

$$\mathrm{ord}_s(f) = \frac{\nu_s(f)}{h_s}$$

El orden no normalizado $\nu_s(f)$ es útil porque es siempre un entero y simplifica algunas fórmulas, como la del Teorema de Ligozat (Teorema 3.3.8).

Observación 1.2.26 (Formas cuspidales y orden)**.** Una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ es una forma cuspidal ($f \in S_k(\Gamma)$) si y solo si su orden es estrictamente positivo en todas las cúspides. Esto es equivalente a $\mathrm{ord}_s(f) > 0$ para toda cúspide s, o equivalentemente, $\nu_s(f) > 0$ para toda cúspide s (ya que $h_s > 0$). Si f no es cuspidal, entonces $\nu_s(f) = 0$ (y $\mathrm{ord}_s(f) = 0$) para al menos una cúspide s.

Múltiples veces a lo largo de este texto usaremos la palabra *orden* sin aclarar si es el normalizado o el no normalizado; hay dos formas de entender a cual nos referimos. Uno es por la notación usada, siguiendo la convención elegida en las definiciones de arriba. Y la otra es por contexto.

Teorema 1.2.27 (Dimensión Finita)**.** *El espacio de formas modulares $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.*

Demostración. El ingrediente clave para la finitud es la condición de *holomorfía en las cúspides*. Sin esta restricción, el espacio sería de dimensión infinita.

La demostración puede realizarse de manera elemental utilizando la *Fórmula de Valencia*. Esta fórmula establece que, para cualquier $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ no nula, la

suma ponderada de los órdenes de sus ceros en el dominio fundamental compactificado es igual a una constante fija ($k/12$ multiplicado por el índice del grupo).

Puesto que f es holomorfa tanto en el semiplano superior como en las cúspides, todos los órdenes de anulación son no negativos ($v_p(f) \geq 0$). Esto limita severamente la cantidad de ceros que la función puede tener. En consecuencia, una forma modular queda unívocamente determinada por un número finito de los primeros coeficientes de su expansión de Fourier, lo que implica que la dimensión del espacio es finita.

Para la fórmula explícita de la dimensión (cuya deducción habitual sí utiliza el Teorema de Riemann-Roch), véase [DS05, Teorema 3.5.1]. □

1.3. Operadores de Hecke

En las secciones anteriores introdujimos las formas modulares clásicas, sus espacios $M_k(\Gamma)$ y $S_k(\Gamma)$, y la descripción mediante coeficientes de Fourier. En lo que sigue, estudiamos operadores lineales naturales sobre estos espacios, definidos de manera que preservan el peso y actúan de forma controlada sobre el nivel. En todos los casos trabajaremos con descripciones explícitas en términos de matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y de q-expansiones.

Comenzamos con los operadores de Hecke. Primero los definimos a partir de coclases de matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y luego mostramos cómo esta construcción se traduce en fórmulas explícitas sobre las q-expansiones. Esto nos permite trabajar con autovectores de Hecke y expresar los autovalores de estos operadores en función de los coeficientes de Fourier. En particular, las relaciones algebraicas entre los operadores de Hecke se reflejan directamente en relaciones de tipo multiplicativo entre los coeficientes, que serán utilizadas más adelante al estudiar congruencias entre coeficientes de formas modulares y de cocientes eta.

Definiremos los operadores de Hecke comenzando por su estructura algebraica relacionada con coclases de matrices y luego mostraremos su conexión con otras formulaciones. Nos centraremos en $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ para claridad.

Definición 1.3.1 (Conjunto M_p)**.** Para un número primo p, se define M_p como el conjunto de matrices enteras de 2×2 con determinante p:

$$M_p = \{\alpha \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(\alpha) = p\}$$

El grupo $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa sobre M_p por multiplicación a la izquierda: $(\gamma, \alpha) \mapsto \gamma\alpha$. Nos interesan las órbitas $\Gamma\alpha$, es decir, las coclases izquierdas $\Gamma\backslash M_p$.

Lema 1.3.2 (Representantes de coclases para M_p)**.** *Un conjunto completo de representantes para las coclases izquierdas $\Gamma\backslash M_p$ (donde $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) es:*

$$\mathcal{R}_p = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \mid j = 0, 1, \ldots, p-1 \right\}.$$

Demostración. Sea $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_p$. Como Γ contiene las matrices elementales $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (y sus transposiciones), la acción de Γ por la izquierda permite realizar operaciones elementales de fila sobre α. Usando el algoritmo de Euclides sobre la

primera columna mediante estas operaciones, podemos transformar α en una matriz $\alpha' = \gamma\alpha$ (con $\gamma \in \Gamma$) tal que $\alpha' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)$. Como $\det(\alpha') = \det(\gamma\alpha) = \det(\gamma)\det(\alpha) = 1 \cdot p = p$, tenemos $a'd' = p$. Ya que a', d' son enteros, y podemos asumir $a' > 0$ (multiplicando por $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ si es necesario), las únicas posibilidades para (a', d') son $(p, 1)$ y $(1, p)$.

Caso 1: $(a', d') = (p, 1)$. La matriz es $\left(\begin{smallmatrix} p & b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Multiplicando por la izquierda por $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, obtenemos $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p & b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Este es el primer tipo de representante en $\mathcal{R}_p$.

Caso 2: $(a', d') = (1, p)$. La matriz es $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b' \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$. La entrada b' está determinada módulo p, porque si multiplicamos por la izquierda por $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, obtenemos $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & b' \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b'+np \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$. Podemos elegir un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq b' + np < p$. Por lo tanto, cada matriz en este caso es Γ-equivalente a una única matriz de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ con $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Estos son los otros p representantes en $\mathcal{R}_p$.

Finalmente, hay que verificar que estos $p+1$ representantes no son Γ-equivalentes entre sí. Si $\gamma\alpha_1 = \alpha_2$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_p$, se puede mostrar que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2$ y γ debe ser una matriz triangular superior $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & * \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ que actúa trivialmente en estos representantes. □

A continuación, vamos a definir el operador de Hecke T_p usando estos representantes. A lo largo de la literatura uno puede encontrar multiples definiciones de este, por supuesto, todas equivalentes. Vamos a presentar las distintas definiciones que se conocen y que serán útiles para probar diversas propiedades. Luego probaremos que estas son todas equivalentes.

Definición 1.3.3 (Operador de Hecke T_p vía coclases)**.** Sea $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ una función sobre la que actúa el operador slash $|_k$ (Def. 1.2.1). Para un primo p, el *operador de Hecke* T_p se define como:

$$T_p f \coloneqq p^{k/2-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_p} f|_k \alpha \tag{1.6}$$

donde $\mathcal{R}_p$ es el conjunto de representantes del Lema 1.3.2.

Teorema 1.3.4 (Equivalencia de definiciones de T_p)**.** *Sea $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. El operador $T_p f$ definido en 1.3.3 es igual al operador $T_p f$ definido por la suma de transformaciones:*

$$T_p f(z) \coloneqq \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right) + p^{k-1} f(pz). \tag{1.7}$$

Demostración. Calculamos explícitamente $T_p f$ usando los representantes $\mathcal{R}_p$.

$$T_p f = p^{k/2-1} \left(f|_k \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{p-1} f|_k \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

Calculamos cada término usando $f|_k \alpha = (\det \alpha)^{k/2} j(\alpha, z)^{-k} f(\alpha z)$.

- Para $\alpha_0 = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: $\det \alpha_0 = p$, $j(\alpha_0, z) = 0 \cdot z + 1 = 1$.

$$f|_k \alpha_0 = p^{k/2}(1)^{-k} f(pz) = p^{k/2} f(pz)$$

- Para $\alpha_j = \left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ $(j = 0, \ldots, p-1)$: $\det \alpha_j = p$, $j(\alpha_j, z) = 0 \cdot z + p = p$.

$$f|_k \alpha_j = p^{k/2}(p)^{-k} f\left(\frac{z+j}{p}\right) = p^{k/2-k} f\left(\frac{z+j}{p}\right) = p^{-k/2} f\left(\frac{z+j}{p}\right)$$

Sustituyendo en la definición de $T_p f$:

$$\begin{aligned} T_p f(z) &= p^{k/2-1}\left(p^{k/2} f(pz) + \sum_{j=0}^{p-1} p^{-k/2} f\left(\frac{z+j}{p}\right)\right) \\ &= p^{k/2-1} p^{k/2} f(pz) + p^{k/2-1} p^{-k/2} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right) \\ &= p^{k-1} f(pz) + p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right) \end{aligned}$$

Comparando con la suma de transformaciones, vemos que son idénticos. □

Definición 1.3.5 (Operador de Hecke T_n)**.** Para un entero $n \geq 1$, el operador T_n (para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) se define mediante: $T_1 = \mathrm{Id}$, $T_{p^r} = T_p T_{p^{r-1}} - p^{k-1} T_{p^{r-2}}$ $(r \geq 2)$, y $T_n = \prod T_{p_i^{e_i}}$ si $n = \prod p_i^{e_i}$.

Proposición 1.3.6 (Acción de T_n en coeficientes de Fourier)**.** *Sea $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $f \in M_k(\Gamma)$ con q-expansión $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m$. La q-expansión de $T_n f$ es $T_n f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m$, donde*

$$c_m = \sum_{d|\,\mathrm{mcd}(m,n), d>0} d^{k-1} a_{mn/d^2}$$

En particular, para un primo p, $T_p f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{mp} + p^{k-1} a_{m/p}) q^m$ con $a_{m/n} = 0$ si $n \nmid m$.

Demostración. Vamos a probar unicamente la formula para T_p con p primo. La idea para el caso general es proceder por inducción en la cantidad de factores primos de n. Lo que vamos a mostrar a continuación, es el caso base.

De (1.7) tenemos que

$$T_p f(z) = p^{k-1} f(pz) + p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right)$$

remplazando ahora con la q-expansión de f obtenemos

$$T_p f(z) = p^{k-1} f(pz) + p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right)$$
$$= p^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^{mp} + p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{z+j}{p}}.$$

Expandiendo el lado derecho de la ultima igualdad

$$p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \frac{z+j}{p}} = p^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i z \frac{m}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i z \frac{mj}{p}}.$$

Donde $\sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i z \frac{mj}{p}} = \sum_{j=0}^{p-1} \xi_p^{mj}$ con ξ_p la raíz p-ésima primitiva de la unidad de menor argumento. Esta suma da 0 si $p \nmid m$ o, si $p|m$, tenemos que $\xi_p^{mj} = 1$ para todo j y por ende $\sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i z \frac{mj}{p}} = p$. Sustituyendo obtenemos

$$T_p f(z) = p^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^{mp} + p^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i z \frac{m}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i z \frac{mj}{p}}$$
$$= p^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^{mp} + p^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mp} q_p^{pm} p$$
$$= p^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m/p} q^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{mp} q^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (p^{k-1} a_{m/p} + a_{mp}) q^m$$

Como se quería ver.

□

Proposición 1.3.7 (Preservación de espacios por operadores de Hecke)**.** *Sea* $\Gamma = \Gamma_0(N)$ *un subgrupo de congruencia.* T_n *mapea* $M_k(\Gamma)$ *a* $M_k(\Gamma)$ *y* $S_k(\Gamma)$ *a* $S_k(\Gamma)$*.*

Demostración. Sea $f \in M_k(\Gamma)$.

1. *Holomorfía en* $\mathbb{H}$*:* La definición T_p (1.7) muestra que $T_p f$ es holomorfa si f lo es. Por inducción usando las recurrencias (Def. 1.3.5), $T_n f$ es holomorfa.

2. *Holomorfía en cúspides:* Debemos mostrar que $T_n f$ es holomorfa en cada cúspide s de Γ. Distinguimos dos casos.

   - *Caso 1: Cúspide* $s = \infty$. Si $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m$ es holomorfa en ∞ (i.e., $a_m = 0$ para $m < 0$), entonces

$$T_n f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m$$

con $c_m = \sum_{d|\,\mathrm{mcd}(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}$ (Proposición 1.3.6). Como $m \geq 0$, el índice mn/d^2 también es ≥ 0. Ya que f es holomorfa en ∞, todos los a_{mn/d^2} con índice no negativo están bien definidos y los de índice negativo son cero. Por lo tanto, $c_m = 0$ si $m < 0$, y $T_n f$ es holomorfa en ∞.

- *Caso 2: Cúspide $s \neq \infty$.* Sea s una cúspide arbitraria. Por definición, f es holomorfa en s si la función transformada $g(z) = (f|_k\sigma)(z)$ es holomorfa en ∞, donde $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una matriz tal que $\sigma(\infty) = s$. Para probar que $T_n f$ es holomorfa en s, debemos probar que $(T_n f)|_k\sigma$ es holomorfa en ∞. Usando la propiedad

$$(T_n f)|_k\sigma = T_n(f|_k\sigma)$$

y usando un argumento similar al del caso anterior, tenemos que es holomorfa en s. Dado que s era una cúspide arbitraria, $T_n f$ es holomorfa en todas las cúspides.

3. *Modularidad en Γ:* Sea $\gamma \in \Gamma$, aplicando T_p como en (1.3.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}(T_p f)|_k\gamma &= \left(p^{k/2-1}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_p} f|_k\alpha\right)\Bigg|_k\gamma \\ &= p^{k/2-1}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_p}(f|_k\alpha)|_k\gamma = p^{k/2-1}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_p} f|_k(\alpha\gamma)\end{aligned}$$

Como se argumentó en pruebas anteriores, el conjunto $\{\alpha\gamma \mid \alpha \in \mathcal{R}_p\}$ es tal que sus elementos pertenecen a coclases $\Gamma\alpha'$ donde $\{\Gamma\alpha' \mid \alpha' \in \mathcal{R}_p\} = \Gamma\backslash M_p$. Específicamente, $\alpha\gamma = \delta_{\alpha,\gamma}\alpha'$ para algún $\delta_{\alpha,\gamma} \in \Gamma$ y $\alpha' \in \mathcal{R}_p$, donde $\alpha \mapsto \alpha'$ es una permutación de $\mathcal{R}_p$. Entonces $f|_k(\alpha\gamma) = f|_k(\delta_{\alpha,\gamma}\alpha') = (f|_k\delta_{\alpha,\gamma})|_k\alpha' = f|_k\alpha'$. La suma se convierte en $p^{k/2-1}\sum_{\alpha'\in\mathcal{R}_p} f|_k\alpha' = T_p f$. Esto prueba la modularidad para T_p. Para T_n, la propiedad se sigue usando las relaciones de recurrencia, ya que si T_a y T_b satisfacen la condición, también lo hacen T_aT_b y cT_a.

4. *Preservación de $S_k(\Gamma)$:* Si $f \in S_k(\Gamma)$, $a_0 = 0$. El término constante c_0 de $T_n f$ es $c_0 = (\sum_{d|n} d^{k-1})a_0 = 0$ (usando la Proposición 1.3.6). Argumentos similares aplican a otras cúspides. Así $T_n f \in S_k(\Gamma)$.

Concluimos que T_n preserva $M_k(\Gamma)$ y $S_k(\Gamma)$. □

Definición 1.3.8 (Autovector de Hecke)**.** Una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ que no sea idénticamente nula ($f \not\equiv 0$), se llama *autovector de Hecke* si es un autovector para todos los operadores de Hecke T_n con $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$. Es decir, para cada entero $n \geq 1$ tal que $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$, existe un número complejo $\lambda_n(f) \in \mathbb{C}$, llamado el *valor propio* asociado a T_n y f, tal que:

$$T_n f = \lambda_n(f) f$$

Proposición 1.3.9 (El primer coeficiente de una forma propia no es nulo)**.** *Sea* $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m \in S_k(\Gamma)$ *una forma cuspidal no nula (*$f \not\equiv 0$*) que es autovector simultáneo de todos los operadores de Hecke* T_n *con* $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$*. Entonces, el primer coeficiente de Fourier es no nulo:*

$$a_1 \neq 0$$

Demostración. Sea λ_n el valor propio tal que $T_n f = \lambda_n f$. Comparemos el coeficiente del término q^1 (es decir, para $m = 1$) en ambos lados de la ecuación.

Por un lado, el coeficiente de q^1 en la expansión de $\lambda_n f$ es simplemente $\lambda_n a_1$.

Por otro lado, recordemos la acción del operador de Hecke T_n sobre los coeficientes. Si escribimos $T_n f = \sum c_m q^m$, la fórmula para el coeficiente $m = 1$ es:

$$c_1 = \sum_{d \mid \mathrm{mcd}(1,n)} d^{k-1} \chi(d) a_{1 \cdot n/d^2}$$

Como el único divisor positivo de $\mathrm{mcd}(1, n) = 1$ es $d = 1$, la suma se reduce a un solo término:

$$c_1 = 1^{k-1} \chi(1) a_n = a_n$$

Igualando ambos resultados, obtenemos la relación fundamental para los coeficientes de una forma propia:

$$a_n = \lambda_n a_1 \quad \text{para todo } n \text{ con } \mathrm{mcd}(n, N) = 1$$

Supongamos por el absurdo que $a_1 = 0$. Entonces, la ecuación anterior implica que $a_n = \lambda_n \cdot 0 = 0$ para todo n (donde operan los T_n). Esto implicaría que todos los coeficientes de Fourier de f son cero, es decir, $f \equiv 0$. Esto contradice la hipótesis de que f es un autovector (que por definición debe ser un vector no nulo). Por lo tanto, concluimos que $a_1 \neq 0$. □

Proposición 1.3.10 (Autovalores y coeficientes de Fourier normalizados)**.** *Sea* $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) q^m \in S_k(\Gamma)$ *una autovector de Hecke cuspidal con* $a_1(f) = 1$ *(Notemos que todo autovector de Hecke cuspidal se puede normalizar por la proposición anterior). Entonces, para todo entero* $n \geq 1$ *con* $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$*, el valor propio* $\lambda_n(f)$ *asociado al operador* T_n *es precisamente igual al n-ésimo coeficiente de Fourier de* f*:*

$$\lambda_n(f) = a_n(f)$$

Como consecuencia, los coeficientes de Fourier de una forma propia normalizada satisfacen las mismas relaciones algebraicas que los operadores de Hecke. En particular, si χ *es el caracter de* f*:*

- $a_m(f) a_n(f) = a_{mn}(f)$ *si* $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ *y* $\mathrm{mcd}(mn, N) = 1$.
- $a_{p^r}(f) = a_p(f) a_{p^{r-1}}(f) - \chi(p) p^{k-1} a_{p^{r-2}}(f)$ *para primo* $p \nmid N$ *y* $r \geq 2$.

Demostración. Sea $f = \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m$ una forma propia de Hecke normalizada ($a_1 = 1$) con $T_n f = \lambda_n f$ para $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$. (Omitimos el (f) en a_m, λ_n por brevedad). Consideramos la q-expansión de ambos lados de la ecuación $T_n f = \lambda_n f$.

1. *Lado Derecho:* La q-expansión es $\lambda_n f = \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_n a_m) q^m$.

2. *Lado Izquierdo:* La q-expansión es $T_n f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m q^m$, donde, según la Proposición 1.3.6 (generalizada para $\Gamma_1(N)$ con caracter χ), el coeficiente c_m viene dado por:
$$c_m = \sum_{d \mid \operatorname{mcd}(m,n), d>0} d^{k-1} \chi(d) a_{mn/d^2}$$

Igualando los coeficientes de q^m para todo $m \geq 1$:

$$\lambda_n a_m = c_m = \sum_{d \mid \operatorname{mcd}(m,n), d>0} d^{k-1} \chi(d) a_{mn/d^2} \tag{1.8}$$

Esta igualdad es válida para todo $m \geq 1$ y n con $\operatorname{mcd}(n, N) = 1$.

Ahora, especializamos la ecuación 1.8 para el caso particular $m = 1$:

$$\lambda_n a_1 = \sum_{d \mid \operatorname{mcd}(1,n), d>0} d^{k-1} \chi(d) a_{1 \cdot n/d^2}$$

El único divisor positivo d de $\operatorname{mcd}(1, n) = 1$ es $d = 1$. La suma en el lado derecho se reduce a un único término:

$$\lambda_n a_1 = 1^{k-1} \chi(1) a_{n/1^2}$$

Sabemos que $1^{k-1} = 1$ (para $k \in \mathbb{Z}$) y $\chi(1) = 1$ para cualquier caracter de Dirichlet. Por lo tanto:

$$\lambda_n a_1 = a_n$$

Finalmente, utilizamos la condición de que f está normalizada, es decir, $a_1 = 1$:

$$\lambda_n \cdot 1 = a_n$$

Esto prueba que $\lambda_n = a_n$ para todo n con $\operatorname{mcd}(n, N) = 1$.

Las relaciones multiplicativas para los coeficientes a_n son una consecuencia directa de este resultado y de las relaciones algebraicas que satisfacen los operadores T_n (Definición 1.3.5), ya que los a_n son los autovalores. Por ejemplo, para $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$ (y $\operatorname{mcd}(mn, N) = 1$), sabemos $T_m T_n = T_{mn}$. Aplicando a f: $T_m T_n f = T_m(\lambda_n f) = \lambda_n(T_m f) = \lambda_n(\lambda_m f) = \lambda_m \lambda_n f$. También $T_{mn} f = \lambda_{mn} f$. Comparando, $\lambda_m \lambda_n = \lambda_{mn}$. Sustituyendo $\lambda_n = a_n$, obtenemos $a_m a_n = a_{mn}$. La relación de recurrencia para a_{p^r} se deriva de forma análoga a partir de la relación para T_{p^r}. □

1.4. Espacio de Einsestein

En esta sección definimos el espacio de series de Eisenstein y establecemos la descomposición fundamental del espacio de formas modulares.

Definición 1.4.1 (Producto Interno de Petersson)**.** Sean $f, g \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Si al menos una de las dos formas es cuspidal (es decir, pertenece a $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$), la integral

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx\, dy}{y^2}$$

converge absolutamente. Aquí, $z = x + iy$, y la integral se evalúa sobre un dominio fundamental para la acción de $\Gamma_0(N)$ en el semiplano superior $\mathbb{H}$. Definimos $\langle f, g\rangle$ como el *producto interno de Petersson* de f y g.

Este producto dota a $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ de estructura de espacio de Hilbert de dimensión finita. La finitud es una propiedad crucial de los espacios de formas modulares.

Recordemos que el espacio de formas modulares $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ contiene al subespacio de formas cuspidales $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Definimos el espacio de Eisenstein como el complemento ortogonal de las formas cuspidales respecto al producto interno de Petersson.

Definición 1.4.2 (Espacio de Eisenstein)**.** El espacio de series de Eisenstein, denotado por $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$, se define como:

$$\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi) \coloneqq S_k(\Gamma_0(N), \chi)^{\perp}$$

donde el complemento ortogonal se toma en $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ con respecto al producto interno de Petersson $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.2.27 sobre la finitud del espacio de formas modulares y la propiedad del producto interno es la siguiente descomposición.

Proposición 1.4.3 (Descomposición de M_k)**.** *El espacio de formas modulares se descompone como la suma directa:*

$$M_k(\Gamma_0(N), \chi) = \mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi) \oplus S_k(\Gamma_0(N), \chi)$$

En particular, toda forma modular $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ puede escribirse de manera única como $f = E + g$, donde E pertenece al espacio de Eisenstein y g es una forma cuspidal.

1.4.1. Autovectores: Una base del espacio de Einsestein

El espacio $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ tiene una base formada por autovectores para los operadores de Hecke T_p (para $p \nmid N$). Estas series se construyen explícitamente a partir de caracteres de Dirichlet.

Sean ψ y φ caracteres primitivos de Dirichlet módulo u y v respectivamente, tales que $uv \mid N$ y $(\psi\varphi)(-1) = (-1)^k$. Definimos la serie de Eisenstein asociada

$$E_k^{\psi,\varphi}(z) = \sum \sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n) q^n$$

cuyo n-ésimo coeficiente de Fourier (para $n \geq 1$, normalizado) es

$$\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n) = \sum_{d|n} \psi(n/d)\varphi(d) d^{k-1}.$$

Teorema 1.4.4 (Base del Espacio de Eisenstein)**.** *El espacio $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ está generado por el conjunto de series de Eisenstein generalizadas de la forma*

$$E_k^{\psi,\varphi}(dz)$$

donde los parámetros recorren todas las posibles elecciones que satisfacen:

- *ψ y φ son caracteres primitivos de Dirichlet módulo u y v respectivamente, tales que $(\psi\varphi)(-1) = (-1)^k$.*
- *$\psi\varphi = \chi$ (visto como igualdad de caracteres inducidos módulo N).*
- *d es un entero positivo tal que $duv \mid N$.*

Más aun, la dimensión de $\mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ es igual al número de tales tuplas (ψ, φ, d).

Demostración. Para una demostración rigurosa de que estas series forman una base, remitimos al lector a [DS05, Teorema 4.5.2] y a [DS05, Proposición 4.2.1] para verificar su modularidad. □

Proposición 1.4.5 (Las series de Eisenstein son autovectores de Hecke)**.** *La serie de Eisenstein $E_k^{\psi,\varphi}(z)$ es un autovector normalizado para todos los operadores de Hecke T_p. Específicamente, si $f = E_k^{\psi,\varphi}$, entonces para todo primo p:*

$$f|T_p = \lambda_p f$$

donde el autovalor λ_p está dado por:

$$\lambda_p = \psi(p) + \varphi(p)p^{k-1} \tag{1.9}$$

Demostración. La demostración sigue los pasos delineados en [DS05, Ejercicio 5.2.5]. Para probar que $E_k^{\psi,\varphi}$ es una autovector, debemos analizar el comportamiento de sus coeficientes de Fourier bajo la acción de los operadores de Hecke.

Recordemos que el n-ésimo coeficiente de Fourier de la serie de Eisenstein $E_k^{\psi,\varphi}$ (salvo constantes de normalización) está dado por la función:

$$\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n) = \sum_{d|n} \psi(n/d)\varphi(d)d^{k-1}.$$

La acción del operador de Hecke T_p sobre una forma modular $f = \sum a_n q^n$ produce una nueva forma cuyos coeficientes b_n están dados por:

$$b_n = a_{np} + \chi(p)p^{k-1}a_{n/p},$$

donde $\chi = \psi\varphi$ es el carácter de Dirichlet asociado y $a_{n/p} = 0$ si $p \nmid n$. Por lo tanto, para demostrar que $f|T_p = \lambda_p f$, basta demostrar que los coeficientes $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n)$ satisfacen la relación de recurrencia:

$$\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(np) + \psi(p)\varphi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n/p) = \left(\psi(p) + \varphi(p)p^{k-1}\right)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n). \tag{1.10}$$

Primero, observamos que la función $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(n)$ es multiplicativa. Esto se debe a que es la convolución de Dirichlet de dos funciones multiplicativas: $n \mapsto \psi(n)$ y $n \mapsto \varphi(n)n^{k-1}$. Dado que $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}$ es multiplicativa, es suficiente verificar la ecuación (1.10) para potencias de primos. Sea $n = p^e$ con $e \geq 0$.

Evaluamos $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e)$. Usando la multiplicativdad de los caracteres, tenemos:

$$\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) = \sum_{j=0}^{e} \psi(p^{e-j})\varphi(p^j)(p^j)^{k-1} = \sum_{j=0}^{e} \psi(p)^{e-j}\left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^j.$$

Para probar (1.10), analizamos el término $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e+1})$. Separando el último término de la suma ($j = e+1$) y factorizando $\psi(p)$ de los restantes, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e+1}) &= \sum_{j=0}^{e+1} \psi(p)^{e+1-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^j \\ &= \psi(p) \left(\sum_{j=0}^{e} \psi(p)^{e-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^j \right) + \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{e+1} \\ &= \psi(p)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) + \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{e+1}.\end{aligned}$$

Ahora, consideramos el lado derecho de la relación deseada (1.10) para $n = p^e$:

$$\left(\psi(p) + \varphi(p)p^{k-1}\right) \sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) = \psi(p)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) + \varphi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e).$$

Desarrollamos el segundo término del lado derecho usando la suma explícita de $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e)$:

$$\begin{aligned}\varphi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) &= \varphi(p)p^{k-1} \sum_{j=0}^{e} \psi(p)^{e-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{e} \psi(p)^{e-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{j+1}.\end{aligned}$$

El término correspondiente a $j = e$ en esta suma es precisamente $(\varphi(p)p^{k-1})^{e+1}$. Los términos restantes (de $j = 0$ a $e-1$) pueden reescribirse factorizando $\psi(p)\varphi(p)p^{k-1}$:

$$\sum_{j=0}^{e-1} \psi(p)^{e-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{j+1} = \psi(p)\varphi(p)p^{k-1} \sum_{j=0}^{e-1} \psi(p)^{(e-1)-j} \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^j,$$

donde reconocemos la suma de la derecha como $\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e-1})$. Por lo tanto:

$$\varphi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) = \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{e+1} + \chi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e-1}).$$

Sustituyendo esto en la expresión del autovalor, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_p\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) &= \psi(p)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) + \varphi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) \\ &= \psi(p)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) + \left[\left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{e+1} + \chi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e-1})\right] \\ &= \left[\psi(p)\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^e) + \left(\varphi(p)p^{k-1}\right)^{e+1}\right] + \chi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e-1}) \\ &= \sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e+1}) + \chi(p)p^{k-1}\sigma_{k-1}^{\psi,\varphi}(p^{e-1}).\end{aligned}$$

Esto demuestra la relación de recurrencia para potencias de primos. Debido a la multiplicatividad de σ, la relación se extiende a todo n. □

Para los propósitos del teorema de densidad de Serre (Teorema 1.7.4) es crucial encontrar un conjunto de primos con densidad positiva para los cuales la parte Eisenstein se anula módulo m. El siguiente lema muestra una condición suficiente bajo la cual el autovalor de Hecke es congruente a 0.

Lema 1.4.6 (Anulación de autovalores de Eisenstein)**.** *Sea* $E_k^{\psi,\varphi} \in \mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ *un elemento de la base del espacio de Eisenstein, con* ψ *y* φ *caracteres primitivos módulo* u *y* v *respectivamente* $(uv \mid N)$*. Sea* m *un entero positivo arbitrario.*

Si p *es un primo tal que:*

$$p \equiv -1 \pmod{Nm}$$

entonces el autovalor de Hecke (1.9) *asociado satisface la congruencia:*

$$\lambda_p \equiv 0 \pmod{m}$$

Demostración. El autovalor de Hecke para la serie $E_k^{\psi,\varphi}$ en un primo p está dado por la fórmula $\lambda_p = \psi(p) + \varphi(p)p^{k-1}$.

La condición $p \equiv -1 \pmod{Nm}$ implica:

1. $p \equiv -1 \pmod{N}$. Como u y v dividen a N, entonces $p \equiv -1 \pmod{u}$ y $p \equiv -1 \pmod{v}$. Por lo tanto, los caracteres toman los valores:

$$\psi(p) = \psi(-1) \quad \text{y} \quad \varphi(p) = \varphi(-1)$$

2. $p \equiv -1 \pmod{m}$. Esto implica que para la potencia:

$$p^{k-1} \equiv (-1)^{k-1} \pmod{m}$$

Sustituyendo esto en la fórmula del autovalor módulo m:

$$\lambda_p \equiv \psi(-1) + \varphi(-1)(-1)^{k-1} \pmod{m}$$

Recordemos ademas que vale la condición $(\psi\varphi)(-1) = (-1)^k$. Como los valores de los caracteres en -1 son ± 1, sus inversos son ellos mismos. Multiplicando la condición de paridad por $\varphi(-1)$, obtenemos la relación:

$$\psi(-1) = \varphi(-1)(-1)^k$$

Reemplazando $\psi(-1)$ en la ecuación de la congruencia:

$$\lambda_p \equiv \varphi(-1)(-1)^k + \varphi(-1)(-1)^{k-1} \pmod{m}$$

Factorizando $\varphi(-1)$:

$$\lambda_p \equiv \varphi(-1)\left[(-1)^k + (-1)^{k-1}\right] \pmod{m}$$

Dado que k y $k-1$ tienen paridades opuestas, la suma dentro del corchete es exactamente cero $(1 + (-1)$ o $-1 + 1)$. Por lo tanto:

$$\lambda_p \equiv 0 \pmod{m}$$

□

1.5. Involuciones de Atkin-Lehner

Para el grupo $\Gamma_0(N)$, existe otro conjunto importante de operadores llamados involuciones de Atkin-Lehner, asociados a los divisores primos de N.

Definición 1.5.1 (Divisor de Hall)**.** Un *divisor de Hall* de N es un entero Q tal que $Q|N$ y $\text{mcd}(Q, N/Q) = 1$

Proposición 1.5.2 (Existencia de la matriz α_Q)**.** *Sea N un entero positivo y sea Q un* divisor de Hall *de N. Existe una matriz $\alpha_Q \in M_2(\mathbb{Z})$ de la forma*

$$\alpha_Q = \begin{pmatrix} Qa & b \\ Nc & Qd \end{pmatrix}$$

tales que $\det(\alpha_Q) = Q$.

Demostración. Por la definición de divisor de Hall, sabemos que $Q \mid N$ y que $\text{mcd}(Q, N/Q) = 1$. Aplicando la identidad de Bézout a los enteros coprimos Q y N/Q, existen enteros $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$Qx - \frac{N}{Q}y = 1. \tag{1.11}$$

Definimos los coeficientes de la matriz α_Q como:

$$a = x, \quad b = y, \quad c = 1, \quad d = 1.$$

Sustituyendo estos valores en la forma general de α_Q, obtenemos:

$$\alpha_Q = \begin{pmatrix} Qx & y \\ N(1) & Q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qx & y \\ N & Q \end{pmatrix}.$$

Dado que $x, y \in \mathbb{Z}$, es claro que $\alpha_Q \in M_2(\mathbb{Z})$. Finalmente, calculamos su determinante:

$$\det(\alpha_Q) = (Qx)(Q) - (y)(N) = Q^2x - Ny = Q\left(Qx - \frac{N}{Q}y\right).$$

Usando la identidad (1.11), sustituimos el término entre paréntesis por 1:

$$\det(\alpha_Q) = Q \cdot 1 = Q.$$

Esto demuestra la existencia de la matriz con las propiedades deseadas. □

Definición 1.5.3 (Involución de Atkin-Lehner W_Q)**.** Sea N un entero positivo y sea Q un *divisor de Hall* de N y sea α_Q una matriz como en la proposición anterior (1.5.2). La *involución de Atkin-Lehner* W_Q es el operador que actúa sobre $M_k(\Gamma_0(N))$ definido por:

$$f|W_Q \coloneqq f|_k\alpha_Q = Q^{k/2}(Ncz + Qd)^{-k} f(\alpha_Q z).$$

Definición 1.5.4 (Involución de Fricke W_N)**.** Definimos la *involución de Fricke* como la involución de Atkin-Lehner para el divisor de Hall $Q = N$. La condición de ser un divisor de Hall, $\mathrm{mcd}(N, N/N) = \mathrm{mcd}(N, 1) = 1$, se cumple trivialmente para cualquier $N \geq 1$.

El operador W_N se representa comúnmente por la matriz:

$$\alpha_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

y su acción sobre una forma f es:

$$f|W_N(z) := f|_k\alpha_N(z) = N^{-k/2}z^{-k}f\left(-\frac{1}{Nz}\right) \tag{1.12}$$

Observación 1.5.5. La definición de $f|W_Q$ parece depender de la elección de α_Q, pero se puede demostrar que el operador está bien definido módulo $\Gamma_0(N)$.

Proposición 1.5.6 (Propiedades de W_Q)**.** *Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ y Q un divisor de Hall de N.*

1. *W_Q preserva los espacios $M_k(\Gamma_0(N))$ y $S_k(\Gamma_0(N))$.*
2. *W_Q conmuta con los operadores de Hecke T_n si $\mathrm{mcd}(n, N) = 1$.*

Demostración. Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N))$ y $W_Q f = f|_k\alpha_Q$. Primero veamos que preserva los espacios.

- *Modularidad en $\Gamma_0(N)$:* Necesitamos mostrar que $(W_Q f)|_k\gamma = W_Q f$ para $\gamma \in \Gamma_0(N)$. Tenemos $(W_Q f)|_k\gamma = (f|_k\alpha_Q)|_k\gamma = f|_k(\alpha_Q\gamma)$. Para que esto sea igual a $f|_k\alpha_Q = W_Q f$, necesitamos que $\alpha_Q\gamma = \delta\alpha_Q$ para alguna $\delta \in \Gamma_0(N)$. Esto es equivalente a $\delta = \alpha_Q\gamma\alpha_Q^{-1} \in \Gamma_0(N)$. Este es un resultado estándar que afirma que α_Q normaliza $\Gamma_0(N)$, i.e., $\alpha_Q\Gamma_0(N)\alpha_Q^{-1} = \Gamma_0(N)$. La prueba de este hecho involucra verificar explícitamente que para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ (con $C = kN$), la matriz $\delta = \alpha_Q\gamma\alpha_Q^{-1}$ tiene entradas enteras, determinante 1, y su entrada $(2, 1)$ es divisible por N. Los cálculos matriciales, usando la condición $\mathrm{mcd}(Q, N/Q) = 1$ y la existencia de a, b, c, d tales que $\det\alpha_Q = Q$, confirman esto. Asumiéndolo, si $\alpha_Q\gamma\alpha_Q^{-1} = \delta \in \Gamma_0(N)$, entonces $\alpha_Q\gamma = \delta\alpha_Q$. Luego $f|_k(\alpha_Q\gamma) = f|_k(\delta\alpha_Q) = (f|_k\delta)|_k\alpha_Q$. Como $f \in M_k(\Gamma_0(N))$, $f|_k\delta = f$. Por lo tanto, $f|_k(\alpha_Q\gamma) = f|_k\alpha_Q = W_Q f$.

- *Holomorfía en cúspides:* El operador W_Q induce una permutación en el conjunto de cúspides de $\Gamma_0(N)$. Si f es holomorfa en una cúspide s, entonces $f|W_Q$ será holomorfa en la cúspide $s' = \alpha_Q^{-1}s$ (la acción aquí es conceptual, la verificación formal requiere analizar $f|_k(\alpha_Q\sigma)$). Como f es holomorfa en todas las cúspides, y W_Q las permuta, $f|W_Q$ también es holomorfa en todas las cúspides.

- *Preservación de S_k:* Si $f \in S_k(\Gamma_0(N))$, f se anula en todas las cúspides s. El valor de $W_Q f$ en una cúspide s' está relacionado (por un factor no nulo) con el valor de f en la cúspide $s = \alpha_Q s'$. Si $f(s) = 0$ para todas las s, entonces $(f|W_Q)(s') = 0$ para todas las s'. Por lo tanto, W_Q mapea $S_k(\Gamma_0(N))$ en $S_k(\Gamma_0(N))$.

Concluimos que W_Q preserva $M_k(\Gamma_0(N))$ y $S_k(\Gamma_0(N))$.

La demostración de la conmutatividad se puede encontrar esbozada en, por ejemplo, [AL70, Lema 11] □

Proposición 1.5.7 (Relación de órdenes bajo W_N)**.** *Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N))$. Sea W_N la involución de Fricke, representada por la acción $f|W_N = f|_k \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, usando el orden no normalizado $\nu_s(f)$ (Definición 1.2.24), se tiene la igualdad:*

$$\nu_0(f) = \nu_\infty(f|W_N)$$

Demostración. Recordemos que $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mapea ∞ a 0. Por la definición del orden no normalizado en la cúspide $s = 0$, tenemos $\nu_0(f) = \nu_\infty(f|_k S)$. Sea $G(z) = f|_k S(z)$.

Por otro lado, sea $F(z) = f|W_N(z)$. Queremos calcular $\nu_\infty(F)$. La acción de W_N usando $\alpha_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ esta dada como en (1.12), es decir:

$$F(z) = N^{k/2}(Nz)^{-k} f(-1/Nz)$$

Queremos relacionar $F(z)$ con $G(z) = z^{-k} f(-1/z)$. Consideremos $G(Nz)$:

$$G(Nz) = (Nz)^{-k} f(-1/(Nz))$$

Comparando con $F(z)$, vemos que:

$$F(z) = N^{k/2}(Nz)^{-k} f(-1/Nz) = N^{k/2} G(Nz)$$

Ahora analizamos las expansiones en ∞. Sea h_0 el ancho de la cúspide 0 y h_∞ el ancho de ∞ para $\Gamma_0(N)$. Sabemos que $h_0 = N$ y $h_\infty = 1$. Sea la expansión de $G(z)$ (que corresponde a f en la cúspide 0) en la variable local apropiada $q_{h_0} = e^{2\pi i z/h_0} = e^{2\pi i z/N}$:

$$G(z) = \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j (e^{2\pi i z/N})^j \quad \text{con } b_{j_0} \neq 0$$

Por definición, el orden no normalizado de G en ∞ es $\nu_\infty(G) = j_0$. Y por definición, $\nu_0(f) = \nu_\infty(G) = j_0$.

Ahora calculamos la expansión de $F(z)$:

$$F(z) = N^{k/2} G(Nz) = N^{k/2} \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j (e^{2\pi i (Nz)/N})^j = N^{k/2} \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j (e^{2\pi i z})^j.$$

Sea $q = e^{2\pi i z}$. Como $h_\infty = 1$, q es la variable local q_{h_∞} para la cúspide ∞. La expansión de $F(z)$ es:

$$F(z) = N^{k/2} \sum_{j=j_0}^{\infty} b_j q^j$$

El exponente más bajo de q en esta expansión con coeficiente no nulo ($N^{k/2} b_{j_0}$) es j_0. Por lo tanto, el orden no normalizado de F en ∞ es $\nu_\infty(F) = j_0$. Como $F = f|W_N$, tenemos $\nu_\infty(f|W_N) = j_0$.

Comparando ambos resultados, concluimos que $\nu_0(f) = j_0 = \nu_\infty(f|W_N)$. □

1.6. Operadores U y V

Además de los operadores de Hecke y Atkin-Lehner, otros dos operadores que actúan directamente sobre las series de Fourier (q-expansiones) son de uso frecuente, especialmente en el estudio de congruencias y la relación entre formas modulares de diferentes niveles.

Dado un anillo conmutativo A, denotamos por $A[\![q]\!]$ al anillo de series formales de potencias $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, y por $A((q))$ al anillo de series formales de Laurent $f(q) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n$ (con $n_0 \in \mathbb{Z}$).

Sea $f(q) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n \in A((q))$ una serie formal de Laurent y sea m un entero positivo.

Definición 1.6.1 (Operador V_m)**.** El operador V_m es un endomorfismo del anillo $A((q))$ que actúa sobre una serie $f(q)$ mediante la sustitución formal de la indeterminada q por q^m:

$$(f|V_m)(q) \coloneqq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (q^m)^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^{mn}$$

En el caso donde f es una forma modular y la identificamos con su q-expansión, se tiene que la acción del operador se corresponde con la evaluación de la función en mz: $(f|V_m)(z) = f(mz)$.

Definición 1.6.2 (Operador U_m)**.** El operador U_m actúa sobre f seleccionando los términos cuyo índice es múltiplo de m:

$$f|U_m = U_m(f) \coloneqq \sum_{n=\lceil n_0/m \rceil}^{\infty} a_{mn} q^n$$

Si f es una función holomorfa en $\mathbb{H}$, también:

$$(f|U_m)(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{z+j}{m}\right)$$

Proposición 1.6.3 (Acción del operador V_m en espacios de formas modulares)**.** *Sea k un entero, $m \geq 1$ un entero, y χ un caracter de Dirichlet módulo N. El operador V_m actúa sobre los espacios de formas modulares y cuspidales de la siguiente manera:*

1. *Si $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, entonces $f|V_m \in M_k(\Gamma_0(Nm), \chi)$.*
2. *Si $f \in M_k(\Gamma_1(N))$, entonces $f|V_m \in M_k(\Gamma_1(Nm))$.*

En ambos casos, si f es una forma cuspidal ($f \in S_k$), entonces $f|V_m$ también es una forma cuspidal.

Demostración. La prueba es una generalización directa. Probaremos el caso (1) para $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, ya que los demás son análogos o más simples.

Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ y sea $g(z) = (f|V_m)(z) = f(mz)$.

1. Holomorfía: La holomorfía de g en $\mathbb{H}$ y en las cúspides se deduce directamente de la holomorfía de f, ya que $z \mapsto mz$ es una función holomorfa que preserva la condición de anulación en las cúspides (si la q-expansión de f tiene solo potencias no negativas, la de g también).

2. Ley de transformación: Sea $\gamma' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(Nm)$. Debemos verificar que g se transforma como una forma de nivel Nm y caracter χ. Construimos la matriz $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a' & mb' \\ c'/m & d' \end{smallmatrix}\right)$. Como $c' \equiv 0 \pmod{Nm}$, se deduce que $m|c'$ y que $c'/m \equiv 0 \pmod{N}$. Esto, junto con $\det\gamma = \det\gamma' = 1$, implica que $\gamma \in \Gamma_0(N)$.

La ley de transformación para f, al ser actuada por γ, es $f(\gamma z) = \chi(d')((c'/m)z + d')^k f(z)$. Ahora, transformamos g con γ'. Usando la identidad $m(\gamma' z) = \gamma(mz)$, tenemos:

$$\begin{aligned} g(\gamma' z) &= f(m(\gamma' z)) \\ &= f(\gamma(mz)) \\ &= \chi(d')\left(\frac{c'}{m}(mz) + d'\right)^k f(mz) \quad \text{(por la transformación de } f\text{)} \\ &= \chi(d')(c'z + d')^k f(mz) \\ &= \chi(d')(c'z + d')^k g(z) \end{aligned}$$

Esta es precisamente la ley de transformación requerida para que g pertenezca a $M_k(\Gamma_0(Nm), \chi)$.

La prueba para $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ es idéntica, notando que si $\gamma' \in \Gamma_1(Nm)$ (i.e., $a' \equiv d' \equiv 1 \pmod{Nm}$), entonces la matriz γ construida satisface $a' \equiv d' \equiv 1 \pmod{N}$, por lo que $\gamma \in \Gamma_1(N)$.

3. Holomorfía en las cúspides: Debemos verificar que si f es holomorfa (o se anula) en todas las cúspides de $\Gamma_0(N)$, entonces g lo es en todas las cúspides de $\Gamma_0(Nm)$.

- *Cúspide ∞:* La q-expansión de f en ∞ es $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n$. Si f es holomorfa en ∞, $n_0 \geq 0$. La expansión de g es $g(z) = f(mz) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^{mn}$. Como $m \geq 1$, si $n_0 \geq 0$, entonces $mn_0 \geq 0$, por lo que g es holomorfa en ∞. Si f es cuspidal ($n_0 \geq 1$), entonces $mn_0 \geq 1$, y g también es cuspidal.

- *Otras cúspides:* Sea s' una cúspide arbitraria de $\Gamma_0(Nm)$. Para analizar el comportamiento de g en s', escogemos una matriz $\sigma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\sigma'(\infty) = s'$. La holomorfía de g en s' requiere que la función $(g|_k\sigma')(z)$ tenga una q-expansión con potencias no negativas.Analicemos esta función:

  $$(g|_k\sigma')(z) = \chi(d')(\det\sigma')^{k/2}(c'z + d')^{-k} g(\sigma' z) = \chi(d')(c'z + d')^{-k} f(m\sigma' z)$$

  .

  La clave es que la aplicación $z \mapsto mz$ mapea la cúspide s' (para g) a la cúspide $s = ms'$ (para f), para la cual sabemos que el orden es no negativo.

Habiendo verificado las tres condiciones, concluimos que la proposición es cierta.

□

Proposición 1.6.4 (Acción de U_p en espacios de formas de peso entero)**.** *Sea k un entero, χ un caracter de Dirichlet módulo N, y p un número primo. El operador U_p actúa sobre los espacios de formas modulares de peso entero de la siguiente manera:*

1. *Si $p|N$, entonces U_p es un endomorfismo que preserva el espacio:*
$$U_p : M_k(\Gamma_0(N), \chi) \to M_k(\Gamma_0(N), \chi)$$
2. *Si $p \nmid N$, el operador U_p sube el nivel pero preserva el caracter (interpretado en el nuevo nivel):*
$$U_p : M_k(\Gamma_0(N), \chi) \to M_k(\Gamma_0(Np), \chi)$$

En ambos casos, los subespacios de formas cuspidales S_k son preservados.

Demostración. La holomorfía en $\mathbb{H}$ y en las cúspides se deduce directamente de la definición de U_p sobre las q-expansiones, por lo que nos enfocamos en la ley de transformación.

Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ y sea $g = f|U_p$. Por definición:
$$g = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f|_k \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Ahora, sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz en el grupo de congruencia correspondiente. Debemos demostrar que $g|_k\gamma = \chi(d)g$.
$$g|_k\gamma = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f|_k \left(\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \gamma \right)$$

La clave es la identidad matricial: para cada $j \in \{0, \dots, p-1\}$, existe un único $j' \in \{0, \dots, p-1\}$ y una matriz $\gamma_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que
$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \gamma = \gamma_j \begin{pmatrix} 1 & j' \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

La correspondencia $j \mapsto j'$ es una permutación del conjunto $\{0, \dots, p-1\}$, y un cálculo muestra que la entrada $(2,2)$ de γ_j es d.

Caso 1 ($p|N$ y $\gamma \in \Gamma_0(N)$): En este caso, se puede verificar que la matriz γ_j construida pertenece a $\Gamma_0(N)$. La demostración sigue:
$$\begin{aligned} g|_k\gamma &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} f|_k \left(\gamma_j \begin{pmatrix} 1 & j' \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (f|_k\gamma_j)|_k \begin{pmatrix} 1 & j' \\ 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \chi(d) f|_k \begin{pmatrix} 1 & j' \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{(ya que } f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi) \text{ y } \gamma_j \in \Gamma_0(N)) \\ &= \chi(d) \left(\frac{1}{p} \sum_{j'=0}^{p-1} f|_k \begin{pmatrix} 1 & j' \\ 0 & p \end{pmatrix} \right) \quad \text{(al ser } j \mapsto j' \text{ una permutación)} \\ &= \chi(d) g \end{aligned}$$

Esto demuestra que $g \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, preservando el nivel y el caracter.

Caso 2 ($p \nmid N$ y $\gamma \in \Gamma_0(Np)$): La misma manipulación algebraica es válida. La diferencia es que la matriz γ_j construida ahora pertenece a $\Gamma_0(N)$ (no necesariamente a $\Gamma_0(Np)$). Como f es una forma de nivel N, la ley de transformación $f|_k\gamma_j = \chi(d)f$ sigue siendo válida. El resultado final es que g satisface la ley de transformación para el nivel Np, es decir, $g \in M_k(\Gamma_0(Np), \chi)$. □

Observación 1.6.5. Sean $f(q) = \sum a_n q^n, g(q) = \sum b_n q^n \in \mathbb{Z}[[q]]$, y sea p un número primo. f y g son congruentes módulo p, y lo denotamos por:

$$f(q) \equiv g(q) \pmod{p\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

si la diferencia entre f y g está en el ideal generado por p en $\mathbb{Z}[[q]]$, es decir

$$a_n \equiv b_n \pmod{p}$$

para cada n.

Proposición 1.6.6 (Congruencia entre T_p y U_p)**.** *Sea p un número primo. Sea $f(z) \in M_k(N, \chi)$ con coeficientes de Fourier en $\mathbb{Z}$, $k \geq 2$ y χ un caracter cuadrado. Si p no divide al nivel N, entonces la acción de los operadores T_p y U_p sobre f es congruente módulo p:*

$$f|T_p \equiv f|U_p \pmod{p\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

Demostración. Consideramos el caso $p \nmid N$. La acción del operador de Hecke T_p sobre los coeficientes de Fourier es (Prop. 1.3.6, adaptada para χ):

$$T_p f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n, \quad \text{donde } c_n = a_{np} + \chi(p)p^{k-1}a_{n/p}$$

(con la convención $a_{n/p} = 0$ si $p \nmid n$). La acción del operador U_p es (Def. 1.6.2):

$$U_p f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} q^n$$

Calculamos la diferencia de las series:

$$f|T_p - f|U_p = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n - a_{np})q^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\chi(p)p^{k-1}a_{n/p}\right)q^n$$

Sea $C_n = \chi(p)p^{k-1}a_{n/p}$ el n-ésimo coeficiente de esta serie diferencia. Por hipótesis, los coeficientes a_j son enteros ($a_{n/p} \in \mathbb{Z}$ o es 0). El caracter cuadrado χ toma valores enteros. El peso k es un entero tal que $k \geq 2$. El exponente $k-1$ satisface $k-1 \geq 1$. Esto significa que el factor p^{k-1} es un entero divisible por p. Como C_n es un producto de enteros donde uno de los factores (p^{k-1}) es divisible por p, el coeficiente C_n es divisible por p para todo n. Es decir, $C_n \equiv 0 \pmod{p}$ para todo n. Esto significa que todos los coeficientes de la serie $f|T_p - f|U_p$ son congruentes a 0 módulo p. Por lo tanto:

$$f|T_p \equiv f|U_p \pmod{p\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

□

Lema 1.6.7 (Identidad U_m, V_m (cf. [RSVMZ24, Lemma 4.2])). *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ *y* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ *dos series de potencias en* q. *Sea* $m \geq 1$ *un entero. Entonces, se cumple la siguiente identidad entre los operadores* U_m *y* V_m*:*

$$((f|V_m) \cdot g)\,|U_m = f \cdot (g|U_m)$$

Demostración. Usaremos la definición de los operadores en términos de los coeficientes de las q-series. Denotamos:

- $(f|V_m)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^{mn}$
- $(g|U_m)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b(ml)q^l$
- Para una serie $H(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c(h)q^h$, tenemos $(H|U_m)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c(jm)q^j$.

Primero, calculamos el producto $(f|V_m) \cdot g$.

Sea

$$H(z) = (f|V_m)(z) \cdot g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c(h)q^h.$$

Los coeficientes $c(h)$ vienen dados por el producto de Cauchy. Podemos escribir

$$f|V_m = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}(j)q^j,$$

donde

$$\tilde{a}(j) = \begin{cases} a(n), & \text{si } j = nm \text{ para algún } n \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, el coeficiente $c(h)$ de q^h en $H(z)$ es:

$$c(h) = \sum_{k=0}^{h} \tilde{a}(k)b(h-k),$$

ahora, aplicamos U_m a $H(z)$. El coeficiente de q^j en $(H|U_m)(z)$ es $c(jm)$:

$$((f|V_m) \cdot g)|U_m = \sum_{j=0}^{\infty} c(jm)q^j.$$

Calculamos explícitamente $c(jm)$:

$$c(jm) = \sum_{k=0}^{jm} \tilde{a}(k)b(jm-k),$$

en la suma, $\tilde{a}(k)$ es no nulo solo si k es un múltiplo de m. Sea $k = lm$, donde $0 \leq lm \leq jm$, lo que implica $0 \leq l \leq j$. Cuando $k = lm$, $\tilde{a}(k) = a(l)$. Por lo tanto, la suma se reduce a:

$$c(jm) = \sum_{l=0}^{j} a(l)b(jm - lm) = \sum_{l=0}^{j} a(l)b(m(j-l))$$

Este es el coeficiente de q^j en el lado izquierdo de la identidad que queremos probar.

Ahora, calculamos el lado derecho, $f \cdot (g|U_m)$:

$$f(z) \cdot (g|U_m)(z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a(l)q^l\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b(mi)q^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} d(j)q^j$$

El coeficiente $d(j)$ de q^j en este producto es:

$$d(j) = \sum_{l=0}^{j} a(l) \cdot (\text{coeficiente de } q^{j-l} \text{ en } g|U_m)$$

El coeficiente de q^i en $g|U_m$ es $b(mi)$. Por lo tanto, el coeficiente de q^{j-l} es $b(m(j-l))$.

$$d(j) = \sum_{l=0}^{j} a(l)b(m(j-l))$$

Comparando las expresiones para $c(jm)$ y $d(j)$, vemos que $c(jm) = d(j)$ para todo $j \geq 0$. Como los coeficientes de las q-series son iguales, las series mismas son iguales:

$$((f|V_m) \cdot g)\,|U_m = f \cdot (g|U_m)$$

□

1.7. Teorema de densidad de Serre

Utilizando la maquinaria de las representaciones de Galois, Jean-Pierre Serre probó resultados sobre las congruencias que satisfacen los coeficientes de las formas modulares.

Definición 1.7.1 (Reducción módulo m)**.** Sea $f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \chi) \cap \mathbb{Z}[[q]]$. Definimos el espacio $S_k(\Gamma_0(N), \chi)_m$ como el conjunto formado por las reducciones de dichas formas módulo m, donde los coeficientes se consideran en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Definición 1.7.2 (Densidad Natural)**.** Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los números primos. Dado un subconjunto $S \subseteq \mathcal{P}$, definimos su función contadora como $\pi_S(x) = \#\{p \in S : p \leq x\}$. La *densidad natural* de S, denotada por $\delta(S)$, se define como el límite (si existe):

$$\delta(S) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi_S(x)}{\pi(x)},$$

donde $\pi(x)$ es la función contadora de primos usual. Decimos que el conjunto S tiene *densidad positiva* si $\delta(S) > 0$.

Teorema 1.7.3 (Teorema de densidad de Serre [Ser75, Exercise 6.4])**.** *El conjunto de los números primos* $\ell \equiv -1 \pmod{mN}$ *para los cuales*

$$f|T_\ell \equiv 0 \pmod{m}$$

para toda forma modular $f \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)_m$*, tiene una densidad positiva.*

Demostración. Para una demostración, ver [Tre06b, Teorema 2.11]. □

Significado del Teorema

Este teorema es una afirmación muy fuerte. Vayamos por partes:

- La condición $f|T_\ell \equiv 0 \pmod{m}$ significa que $f|T_\ell$ tiene todos sus coeficientes de Fourier divisibles por m. En particular, si f es una autovector, esto implica que su ℓ-ésimo coeficiente $a_\ell(f)$ es divisible por m.
- La conclusión de que el conjunto de primos ℓ tiene *densidad positiva* significa que no solo hay infinitos primos que cumplen esta propiedad, sino que constituyen una proporción no nula de todos los números primos.

La demostración está basada en la teoría de representaciones de Galois, la cual escapa a esta tesis, y por ello no la contaremos con detalle. La idea de la demostración es la siguiente:

1. Se comienza reduciendo el problema a probarlo para cada autofunción, ya que toda forma es combinación de estas.
2. Se traduce la condición de congruencia $a_\ell(f) \equiv 0 \pmod{m}$ a una condición sobre la representación de Galois asociada $\rho_{f,m}$. Usando la relación $\operatorname{tr}(\rho_{f,m}(\mathrm{Frob}_\ell)) \equiv a_\ell(f) \pmod{m}$, la condición se convierte en $\operatorname{tr}(\rho_{f,m}(\mathrm{Frob}_\ell)) \equiv 0 \pmod{m}$.
3. La condición $\ell \equiv -1 \pmod{N}$ corresponde a elegir elementos de Frobenius asociados a la conjugación compleja en el cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}(\mu_N)$.
4. Finalmente, se utilizando el *teorema de densidad de Chebotarev*, que relaciona la densidad de los primos para los cuales Frob_p pertenece a una cierta clase de conjugación en el grupo de Galois, con el tamaño de dicha clase.

Serre señala que para que Frob_p tenga traza cero, basta que este en la clase de la conjugación compleja. En efecto, la imagen de la conjugación compleja en el grupo de Galois está formada por elementos de traza nula, y por el teorema de Chebotarev, el conjunto de primos p tales que Frob_p pertenece a esa clase tiene densidad positiva. Esto permite concluir el teorema de densidad.

A continuación, presentaremos un corolario clave que constituye el fundamento para demostrar la generalización establecida en [RSVMZ24, Teorema 4.8]. Cabe destacar que, si bien este resultado se desprende de la teoría subyacente en el artículo, su demostración no aparece desarrollada de manera explícita en el mismo. Por ello, aquí reconstruimos el argumento formal completo para clarificar este paso esencial.

Complementamos la prueba original utilizando la descomposición del espacio de formas modulares como suma directa del espacio cuspidal y el de Eisenstein (Proposición 1.4.3) y los resultados sobre series de Eisenstein obtenidos anteriormente, extendiendo así la validez del resultado a todo el espacio de formas modulares y no solo a los cuspidales.

Corolario 1.7.4 (Densidad para formas modulares)**.** *El conjunto de los números primos* $\ell \equiv -1 \pmod{mN}$ *para los cuales*

$$f|T_\ell \equiv 0 \pmod{m}$$

para toda forma modular $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)_m$ *tiene una densidad positiva*

Demostración. En virtud del Teorema 1.4.3, cualquier f admite una descomposición única como la suma $f = E + g$, donde $E \in \mathcal{E}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ es una serie de Eisenstein y $g \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ es una forma cuspidal. Nuestro objetivo es identificar un conjunto de primos donde la acción del operador de Hecke T_p anule ambas componentes simultáneamente módulo m.

Consideremos los primos en la progresión aritmética $p \equiv -1 \pmod{Nm}$. Según el Lema 1.4.6, para cualquier elemento de la base del espacio de Eisenstein, el autovalor asociado a dichos primos es congruente a 0 módulo m. Por la linealidad de T_p, esto implica que $E\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}$ para todo primo en esta progresión.

Por otro lado, para la componente cuspidal g, el Teorema 1.7.3 asegura la existencia de un conjunto de primos de densidad positiva que verifican $p \equiv -1 \pmod{Nm}$ y para los cuales $g\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}$. Luego, para estos primos, se satisface que tanto E como g se anulan bajo T_p módulo m, y en consecuencia, $f\big|T_p = E\big|T_p + g\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}$, lo que concluye la demostración. □

Capítulo 2

Formas modulares de peso semientero

En el capítulo anterior establecimos los fundamentos de la teoría para formas modulares de peso entero. Sin embargo, muchas de las funciones generadoras de interés aritmético —como las funciones theta o, centralmente para esta tesis, los cocientes eta asociados a particiones— poseen un comportamiento modular que no puede ser capturado enteramente bajo esa definición, requiriendo la noción de peso semientero $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

El propósito de este capítulo es extender la maquinaria desarrollada previamente a este contexto más general. Comenzaremos en la Sección 2.1 definiendo las formas modulares de peso semientero, introduciendo el factor de automorfía necesario que involucra el símbolo de Jacobi extendido.

Posteriormente, en la Sección 2.2, estudiaremos la acción de los operadores de Hecke. Veremos que la teoría difiere significativamente del caso de peso entero: los operadores T_p se anulan y la estructura multiplicativa relevante recae sobre los operadores indexados por cuadrados, T_{p^2}.

Finalmente, la Sección 2.3 presenta la herramienta teórica central de este capítulo: la Correspondencia de Shimura. Este resultado establece un isomorfismo que permite trasladar problemas sobre formas de peso semientero al contexto, mejor entendido, de peso entero. Utilizaremos esto para extender el Teorema de densidad de Serre (1.7.3), probando así la existencia de infinitas congruencias para los coeficientes de Fourier de formas modulares de peso semientero, un resultado clave para las aplicaciones sobre particiones que discutiremos en el Capítulo 3.

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1 (Símbolo de Legendre)**.** Sean p un número primo impar y c un entero. El *símbolo de Legendre* $\left(\frac{c}{p}\right)$ se define como:

$$\left(\frac{c}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \equiv 0 \pmod{p} \\ 1 & \text{si } c \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ y } c \text{ es un residuo cuadrático módulo } p \\ -1 & \text{si } c \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ y } c \text{ es un no residuo cuadrático módulo } p \end{cases}$$

Es decir, si $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ vale 1 si la congruencia $x^2 \equiv c \pmod{p}$ tiene solución, y -1 si no la tiene.

Definición 2.1.2 (Símbolo de Jacobi extendido)**.** Para enteros c y d con d *impar* y $d \neq 0$, se define el *símbolo de Jacobi extendido* $\left(\frac{c}{d}\right)$ de la siguiente manera:

1. *Caso $d > 0$ (Símbolo de Jacobi clásico):* Si $d = 1$, entonces $\left(\frac{c}{1}\right) = 1$. Si $d > 1$, sea $d = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ su factorización en primos impares. El símbolo de Jacobi se define a partir del símbolo de Legendre como:

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{c}{p_i}\right)^{\nu_i}$$

   Este símbolo es completamente multiplicativo en ambas variables.

2. *Caso $d < 0$:* Se define en términos del valor absoluto de d:

$$\left(\frac{c}{d}\right) = \begin{cases} \left(\frac{c}{|d|}\right) & \text{si } c \geq 0 \\ -\left(\frac{c}{|d|}\right) & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

   En particular, para $d = -1$ se tiene $\left(\frac{c}{-1}\right) = \operatorname{sgn}(c)$ si $c \neq 0$, y $\left(\frac{0}{-1}\right) = 1$.

Definición 2.1.3 (Factor ϵ_d)**.** Para $d \in \mathbb{Z}$ impar,

$$\epsilon_d = \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4} \\ i & \text{si } d \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Notar que $\epsilon_d^2 = \left(\frac{-1}{d}\right)$.

Definición 2.1.4 (Factor de automorfía $j_k(\gamma, z)$)**.** Sea $k = \lambda + 1/2$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$. Para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$, el factor de automorfía de peso k es:

$$j_k(\gamma, z) \coloneqq \left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \epsilon_d^{-2k} (cz + d)^k$$

con $(cz+d)^k = (cz+d)^\lambda \sqrt{cz+d}$ usa la rama principal de la raíz cuadrada (argumento en $(-\pi/2, \pi/2]$).

Observación 2.1.5. Observamos que para cualquier $k \in \mathbb{Z} + 1/2$, el factor de automorfía de peso k se relaciona con el de peso $1/2$ mediante la identidad:

$$j_k(\gamma, z) = \big(j_{1/2}(\gamma, z)\big)^{2k}.$$

Definición 2.1.6 (Forma modular de peso semientero)**.** Sea $k = \lambda + 1/2$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$. Sea N un entero positivo divisible por 4, y sea χ un caracter de Dirichlet módulo N. Una función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una *forma modular de peso k, nivel N y caracter χ* si:

1. f es holomorfa en $\mathbb{H}$.

2. Para toda $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, se cumple la ley de transformación:

$$f(\gamma z) = \chi(d) j_k(\gamma, z) f(z)$$

Notar que $\Gamma_0(N) \subseteq \Gamma_0(4)$ ya que $4|N$.

3. f es *holomorfa en todas las cúspides* de $\Gamma_0(N)$. Esto significa que para toda $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, la función $(f|_k\sigma)(z) \coloneqq j_k(\sigma, z)^{-1} f(\sigma z)$ tiene una q-expansión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{n/h_s}$ en ∞.

El espacio de estas formas se denota por $M_k(N, \chi)$ o $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$.

Definición 2.1.7 (Forma cuspidal de peso semientero)**.** Una forma $f \in M_k(N, \chi)$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides. Esto significa que el coeficiente constante c_0 en la q-expansión de $(f|_k\sigma)(z)$ es cero para toda $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. El espacio de formas cuspidales se denota por $S_k(N, \chi)$ o $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$.

Ejemplo 2.1.8. La función $\theta(z) = \sum q^{n^2}$ es una forma modular de peso $1/2$, nivel $N = 4$, caracter trivial χ_0 y no se anula en el semiplano superior. Pertenece a $M_{1/2}(4, \chi_0)$.

Asumiendo la modularidad de la función θ, vamos a demostrar la siguiente proposición como es estándar. Mas adelante en la Proposición 3.4.13 vamos a proveer una demostración de este hecho utilizando el Teorema de Newman (Teorema 3.2.6).

Proposición 2.1.9 (Relación cociclo para $j_k(\gamma, z)$)**.** *Para $k \in \mathbb{Z}+1/2$ y cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(4)$, el factor de automorfía $j_k(\gamma, z)$ satisface la* relación cociclo*:*

$$j_k(\gamma_1\gamma_2, z) = j_k(\gamma_1, \gamma_2 z) j_k(\gamma_2, z)$$

Demostración. Por la Observación 2.1.5, basta con demostrar la relación para el peso $1/2$. Es decir, queremos ver que:

$$j_{1/2}(\gamma_1\gamma_2, z) = j_{1/2}(\gamma_1, \gamma_2 z) j_{1/2}(\gamma_2, z).$$

Como θ es una forma modular no nula de peso $\frac{1}{2}$ y nivel 4. Entonces $\theta(\gamma z) = j_{1/2}(\gamma, z)\theta(z)$.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(4)$. La composición $\gamma_1\gamma_2$ también está en $\Gamma_0(4)$.

Por un lado, aplicando la ley de transformación a $\gamma_1\gamma_2$ directamente:

$$\theta(\gamma_1\gamma_2 z) = j_{1/2}(\gamma_1\gamma_2, z)\theta(z) \tag{2.1}$$

Por otro lado, aplicando la ley secuencialmente:

$$\begin{aligned} \theta(\gamma_1\gamma_2 z) &= \theta(\gamma_1(\gamma_2 z)) \\ &= j_{1/2}(\gamma_1, \gamma_2 z) \cdot \theta(\gamma_2 z) \\ &= j_{1/2}(\gamma_1, \gamma_2 z) \cdot [j_{1/2}(\gamma_2, z)\theta(z)] \\ &= [j_{1/2}(\gamma_1, \gamma_2 z) j_{1/2}(\gamma_2, z)]\theta(z) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Al igualar las ecuaciones (2.1) y (2.2) y notar que $\theta(z)$ no es idénticamente nula, podemos concluir que:

$$j_{1/2}(\gamma_1\gamma_2, z) = j_{1/2}(\gamma_1, \gamma_2 z) j_{1/2}(\gamma_2, z).$$

□

2.2. Operador de Hecke para peso semientero

Los operadores de Hecke para peso semientero son más sutiles que en el caso de peso entero. Notablemente, los operadores T_p para p primo son nulos. Sin embargo, podemos definir los operadores indexados por cuadrados, T_{p^2}.

Definición 2.2.1 (Operador de Hecke T_{p^2})**.** Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ una forma modular de peso semientero y p un primo que no divide al nivel N. El operador de Hecke T_{p^2} se define como la acción de un doble coset (double coset).

Sea $\alpha_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$. El doble cociente $\Gamma_0(N)\alpha_p\Gamma_0(N)$ se puede descomponer en una unión disjunta de cocientes por la derecha:

$$\Gamma_0(N)\alpha_p\Gamma_0(N) = \bigcup_j \Gamma_0(N)\beta_j$$

El operador de Hecke se define entonces como la suma sobre las acciones de estos representantes:

$$f|T_{p^2} := p^{k/2-2} \sum_j \chi(a_j)(f|_k\beta_j)$$

para ciertas matrices β_j.

De forma explícita, los representantes β_j se pueden tomar como el conjunto de $p^2 + p$ matrices:

- $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$ para $0 \leq b < p^2$.
- $\begin{pmatrix} ap & b \\ cN & dp \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ para $0 \leq b < p$.
- $\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposición 2.2.2 (Acción de T_{p^2} sobre las q-expansiones)**.** *Sea $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ una forma modular de peso semientero con q-expansión $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m$. La acción del operador de Hecke T_{p^2} sobre f resulta en una nueva forma modular cuya q-expansión $T_{p^2}f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m$ tiene coeficientes dados por:*

$$c_m = a_{mp^2} + \chi_1(p)\left(\frac{m}{p}\right)p^{\lambda-1}a_m + \chi(p^2)p^{k-2}a_{m/p^2}$$

Aquí, $\lambda = (k-1)/2$, $\chi_1(p) = \chi(p)\left(\frac{(-1)^\lambda}{p}\right)$, y se entiende que $a_{m/p^2} = 0$ si $p^2 \nmid m$.

Esquema de la demostración. La fórmula para los coeficientes se obtiene al aplicar la definición de Shimura (Def. 2.2.1) y sumar los efectos de cada conjunto de representantes sobre la q-serie de f. La demostración se encuentra en el artículo de Shimura [Shi73, Teorema 1.7]. □

2.3. Correspondencia de Shimura y Serre para peso semientero

En esta sección se establece uno de los resultados centrales de esta tesis, concerniente a las propiedades aritméticas de las formas modulares de peso semientero. El objetivo principal es demostrar el siguiente teorema, que garantiza la existencia de congruencias para sus coeficientes de Fourier:

Teorema 2.3.1 (Congruencias para los coeficientes de Fourier)**.** *Sea $k \geq 3$ un entero impar, y sea $f(z) = \sum a(n)q^n \in M_{k/2}(\Gamma_0(4N), \chi)$ una forma con coeficientes de Fourier $a(n)$ enteros. Para cualquier entero positivo m, existe un conjunto de primos p de densidad positiva tal que los coeficientes $a(n)$ satisfacen las congruencias $a(p^3 n) \equiv 0 \pmod{m}$.*

La estrategia para esta demostración se basa en dos pilares fundamentales. Primero, usaremos el resultado análogo para formas de peso entero (Teorema 1.7.3). Segundo, se introducirá la correspondencia de Shimura, la cual provee un "puente" que conecta las formas de peso semientero con las de peso entero.

Finalmente, se combinarán ambas herramientas: se utilizará la correspondencia de Shimura para trasladar el problema al contexto de peso entero, donde se aplicará el teorema de Serre, permitiendo así probar el resultado principal.

2.3.1. El Puente entre Pesos Semi-Enteros y Enteros

El resultado de Serre se aplica únicamente a formas modulares de peso entero, mientras que en nuestro caso nos interesa considerar formas de peso semi-entero. Para superar esta limitación, en esta sección presentamos una de las conexiones más profundas y fructíferas de la teoría de formas modulares: la *Correspondencia de Shimura*.

Descubierta por Goro Shimura, esta correspondencia establece un puente entre los espacios de formas modulares de peso semi-entero y los de peso entero par, permitiendo transferir información aritmética entre ambos. En particular, asocia a cada forma modular g de peso $k/2$ (con k impar) con una forma modular f de peso entero $k-1$, vinculando de manera precisa sus coeficientes de Fourier.

Teorema 2.3.2 (Correspondencia de Shimura [Shi73, Main Theorem])**.** *Sea $k \geq 3$ un entero impar, y sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ una forma cuspidal en $S_{k/2}(N, \chi)$ con $4|N$. Para un entero positivo libre de cuadrados t, se define una función $F_t(z)$ a través de su serie de Dirichlet:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n) n^{-s} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi_t(m) m^{\lambda - 1 - s} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a(tm^2) m^{-s} \right)$$

donde $\lambda = (k-1)/2$ y $\chi_t(m) = \chi(m)(\frac{-1}{m})^{\lambda}(\frac{t}{m})$. Si f es una autovector de los operadores T_{p^2} para todo primos p, entonces la función $F_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n$ es una forma modular de peso entero $k-1$ y nivel N_t (En la mayoria de casos, $N_t = N/2$). Si $k \geq 5$, F_t es una forma cuspidal.

Este teorema, aunque potente, depende de la elección de t. El corolario siguiente unifica el resultado de una manera más elegante y directa.

Corolario 2.3.3 (Corolario del teorema principal)**.** *Sea f una autofunción común de los operadores T_{p^2} para todos los primos p, con autovalores ω_p. Se define una función $F(z)$ a través del siguiente producto de Euler:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A(n)n^{-s} = \prod_{p}[1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s}]^{-1}$$

Entonces, la función $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)q^n$ es una forma modular de peso entero. Específicamente, si $k \geq 3$, F pertenece a $M_{k-1}(N_0, \chi^2)$, y si $k \geq 5$, F pertenece a $S_{k-1}(N_0, \chi^2)$.

En esencia, la correspondencia de Shimura toma los autovalores $\{\omega_p\}$ de una forma de peso semientero y los usa para construir los coeficientes de Fourier de una forma de peso entero.

Teorema 2.3.4 (Generalización de la correspondencia de Shimura)**.** *La correspondencia de Shimura, formulada originalmente para autovectores de Hecke, puede extenderse a cualquier forma modular de peso semientero, y el nivel del levantado se puede tomar siempre como $N_t = N/2$ (donde N es el nivel de la forma original en $\Gamma_0(4N)$).*

Demostración. La demostración, desarrollada por Niwa y extendida por Cipra, consiste en introducir una definición alternativa de la correspondencia y luego demostrar que ambas son equivalentes.

1. Siguiendo a Cipra [Cip83], definimos el *levantamiento de Niwa* para un entero t libre de cuadrados, denotado por $N_t(f)$. Si escribimos la variable compleja en el semiplano superior como $z = u + iv$ (con $u \in \mathbb{R}$ y $v > 0$), el levantamiento se define como la transformación integral contra el núcleo theta $\theta_t^*(z, w)$ utilizando la medida hiperbólica $v^{-2}du\,dv$:

$$N_t(f)(w) = \int_{\Gamma_0(4Nt)\backslash\mathbb{H}} v^{k/2} f(tz)\overline{\theta_t^*(z, w)}\,\frac{du\,dv}{v^2} \tag{2.3}$$

   Es importante notar que esta definición integral no requiere que f sea un autovector de los operadores de Hecke.

2. Utilizando las propiedades de transformación del núcleo theta, se demuestra que el levantado de Niwa, $N_t(f)$, es efectivamente una forma modular de peso entero $k - 1$.

3. El resultado clave que conecta ambas definiciones es que están directamente relacionadas (coinciden salvo constante y reescalamiento). El Teorema 2.17 en el trabajo de Cipra establece que:

$$N_t(f)(w) = C_t(\lambda) \cdot S_t(f)(tw)$$

   donde $C_t(\lambda)$ es una constante explícita y $S_t(f)$ es el levantamiento de Shimura clásico.

Por lo tanto, la construcción integral asegura que existe una forma modular de peso entero correspondiente para *cualquier* forma f en el espacio de partida, generalizando así la correspondencia. □

El operador de Hecke conmuta con la correspondencia de Shimura

Proposición 2.3.5 (Conmutatividad del levantado de Shimura con los operadores de Hecke)**.** *Sea $f \in S_{k/2}(4N, \chi)$ una forma cuspidal de peso semientero. Sea t un entero libre de cuadrados y p un número primo. Entonces, el levantado de Shimura S_t conmuta con la acción de los operadores de Hecke de la siguiente manera:*

$$S_t(f|T_{p^2}) = (S_t(f))|T_p$$

Donde T_{p^2} es el operador de Hecke que actúa sobre formas de peso semi-entero, y T_p es el operador de Hecke que actúa sobre formas de peso entero.

Demostración. La igualdad se verifica directamente cuando f es una autovector simultánea de los operadores de Hecke. Dado que los autovectores de Hecke generan el espacio $S_{k/2}(4N, \chi)$ y que tanto S_t como los operadores de Hecke son operadores lineales, la identidad se extiende por linealidad a toda forma cuspidal $f \in S_{k/2}(4N, \chi)$. □

2.3.2. Teorema de densidad de Serre para peso semientero

Combinado el teorema de densidad de Serre con la correspondencia de Shimura, obtenemos ahora una demostración de [RSVMZ24, Teorema 4.8], cuya demostración completa solo se encuentra desarrollada para el caso cuspidal, desarrollada en [AO01, Lema 3.1]

Proposición 2.3.6 (Teorema de densidad para formas de peso semientero)**.** *Sea $k \geq 3$ un entero impar y sea $f(z) \in M_{k/2}(\Gamma_0(4N), \chi)$ con coeficientes de Fourier enteros. Para cualquier entero positivo m, el conjunto de números primos p que satisfacen $p \equiv -1 \pmod{4Nm}$ y para los cuales*

$$f|T_{p^2} \equiv 0 \pmod{m}$$

tiene una densidad positiva.

Demostración. Escribimos $k = 2\lambda + 1$ con $\lambda = (k-1)/2$.

Por la generalización de la correspondencia de Shimura (Teoerma 2.3.4), para cada entero libre de cuadrados $t \geq 1$ el levantado de Shimura

$$S_t(f)(z) = \sum_{n \geq 1} A_t(n) q^n$$

es una forma de peso entero $k-1$ y nivel $2N$ (con cierto caracter ν independiente de t). Es decir,

$$S_t(f) \in M_{k-1}(\Gamma_0(2N), \nu) \qquad \text{para todo } t \text{ libre de cuadrados.}$$

Vemos ahora este espacio como subespacio de

$$M_{k-1}(\Gamma_0(4Nm), \nu)$$

mediante la inclusión natural. Aplicamos el Teorema de Serre 1.7.4 a este espacio. Obtenemos un conjunto de primos $\mathcal{P}$ de densidad positiva, todos satisfaciendo

$$p \equiv -1 \pmod{4Nm},$$

tal que para toda forma modular

$$G \in M_{k-1}(\Gamma_0(4Nm), \nu)_m$$

se cumple

$$G\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}.$$

En particular, para cada entero libre de cuadrados $t \geq 1$ y todo $p \in \mathcal{P}$ tenemos

$$S_t(f)\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}.$$

Fijemos ahora un primo $p \in \mathcal{P}$ y consideremos

$$g(z) := f\big|T_{p^2}(z) = \sum_{n\geq 1} b(n)q^n.$$

Por definición de T_{p^2}, los coeficientes $b(n)$ son enteros. La conmutatividad del levantado de Shimura con los operadores de Hecke (Proposición 2.3.5) nos dice que

$$S_t(g) = S_t\big(f\big|T_{p^2}\big) = S_t(f)\big|T_p \equiv 0 \pmod{m}$$

para todo t libre de cuadrados. Es decir, para todo t libre de cuadrados la forma de peso entero $S_t(g)$ es congruente a cero módulo m.

Por la definición de la correspondencia de Shimura (Teorema 2.3.2), si escribimos

$$S_t(g)(z) = \sum_{n\geq 1} B_t(n)q^n,$$

los coeficientes de Fourier satisfacen

$$B_t(n) = \sum_{d|n} \chi_t(d)\, d^{\lambda-1}\, b\left(t\left(\frac{n}{d}\right)^2\right), \tag{2.4}$$

donde χ_t es el caracter asociado a t. Como $S_t(g) \equiv 0 \pmod{m}$ para todo t, se tiene

$$B_t(n) \equiv 0 \pmod{m} \qquad \text{para todo } n \geq 1 \text{ y todo } t \text{ libre de cuadrados.}$$

Fijemos un t libre de cuadrados y probemos por inducción en $n \geq 1$ que

$$b(tn^2) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Para $n = 1$, la fórmula (2.4) da

$$B_t(1) = \chi_t(1)\, 1^{\lambda-1}\, b(t) = b(t),$$

de modo que $B_t(1) \equiv 0 \pmod{m}$ implica $b(t) \equiv 0 \pmod{m}$. Supongamos ahora que para algún $n_0 \geq 2$ se tiene $b(tn^2) \equiv 0 \pmod{m}$ para todo $1 \leq n < n_0$. Aplicando (2.4) con $n = n_0$ obtenemos

$$B_t(n_0) = \sum_{d|n_0} \chi_t(d)\, d^{\lambda-1}\, b\left(t\left(\frac{n_0}{d}\right)^2\right) = b(tn_0^2) + \sum_{\substack{d|n_0 \\ d>1}} \chi_t(d)\, d^{\lambda-1}\, b\left(t\left(\frac{n_0}{d}\right)^2\right).$$

En la suma restringida se tiene $n_0/d < n_0$, así que por hipótesis inductiva todos esos términos son congruentes a 0 módulo m. Por lo tanto

$$B_t(n_0) \equiv b(tn_0^2) \pmod{m}.$$

Como además $B_t(n_0) \equiv 0 \pmod{m}$, concluimos que $b(tn_0^2) \equiv 0 \pmod{m}$, cerrando la inducción. Por tanto, para todo t libre de cuadrados y todo $n \geq 1$ se cumple

$$b(tn^2) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Finalmente, sea $n \geq 1$ cualquier entero. Escribimos $n = t_n d_n^2$, donde t_n es el factor libre de cuadrados de n y $d_n \geq 1$. Entonces

$$b(n) = b(t_n d_n^2) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Es decir, todos los coeficientes de Fourier de $g = f|T_{p^2}$ son congruentes a cero módulo m, y por lo tanto

$$f\big|T_{p^2} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Como esto vale para todo $p \in \mathcal{P}$, y el conjunto $\mathcal{P}$ tiene densidad positiva y está contenido en la clase de congruencia $p \equiv -1 \pmod{4Nm}$, el enunciado queda demostrado. □

Ahora ya tenemos todos los ingredientes para concluir el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.7 (Congruencias para los coeficientes de Fourier)**.** *Sea $k \geq 3$ un entero impar, y sea $f(z) = \sum a(n)q^n \in M_{k/2}(\Gamma_0(4N), \chi)$ una forma con coeficientes de Fourier enteros. Para cualquier entero positivo m, existe un conjunto de primos p de densidad positiva tal que los coeficientes $a(n)$ satisfacen las congruencias $a(p^3 n) \equiv 0 \pmod{m}$*

Demostración. La Proposición 2.3.6 garantiza que para un conjunto de primos p de densidad positiva (que satisfacen $p \equiv -1 \pmod{4Nm}$), se cumple que $f|T_{p^2} \equiv 0 \pmod{m}$. Esto implica que todos los coeficientes de Fourier de la forma transformada $f|T_{p^2}$ son congruentes a cero módulo m.

El n-ésimo coeficiente de Fourier de $f|T_{p^2}$ está dado por la fórmula:

$$a(p^2 n) + \chi(p)\left(\frac{(-1)^\lambda n}{p}\right) p^{\lambda-1} a(n) + \chi(p^2) p^{2\lambda-1} a(n/p^2)$$

donde $\lambda = (k-1)/2$. Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, esta expresión es congruente a $0 \pmod{m}$.

A partir de esta congruencia general, podemos deducir una relación más simple eligiendo valores específicos de n.

Tomando $n = np$ con $\text{mcd}(n, p) = 1$ y remplazando en la ecuación obtenemos:

$$a(p^3 n) + \chi(p)\left(\frac{(-1)^\lambda np}{p}\right) p^{\lambda-1} a(np) + \chi(p^2) p^{2\lambda-1} a(n/p) \equiv a(p^3 n) \equiv 0 \pmod{m}$$

ya que $a(n/p) = 0$ y $\left(\frac{(-1)^\lambda np}{p}\right) = 0$. □

Capítulo 3

Cocientes eta

En este capítulo se introduce y estudia la teoría de los *cocientes eta*, una clase fundamental de formas modulares que constituyen el objeto central de los resultados originales presentados en esta tesis.

El recorrido comenzará con la definición formal de los cocientes eta. Posteriormente, se enunciarán y demostrarán las condiciones precisas bajo las cuales estas funciones son formas modulares débiles de peso entero o semientero, especificando su nivel, peso y caracter (teorema de Newman). Se presentará el teorema de Ligozat, una herramienta esencial que proporciona un método directo para calcular el orden de anulación de un cociente eta en cualquier cúspide. Finalmente, se concluirá con los resultados originales para congruencias sobre cocientes eta.

3.1. Función eta de Dedekind

Definición 3.1.1 (Función Eta de Dedekind)**.** La *función eta de Dedekind*, denotada $\eta(z)$, se define para $z \in \mathbb{H}$ mediante el producto infinito:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

donde $q = e^{2\pi i z}$ y tomamos la rama principal para la raíz, es decir, $q^{1/24} = e^{\pi i z/12}$.

Proposición 3.1.2 (Holomorfía y no anulación de η)**.** *La función $\eta(z)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$ y no se anula en ningún punto $z \in \mathbb{H}$.*

Demostración. Para $z \in \mathbb{H}$, tenemos que $|q| < 1$. La convergencia de la serie geométrica $\sum |q|^n$ implica que el producto infinito converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{H}$, garantizando la holomorfía. Por otro lado, la función no se anula dado que el factor exponencial $q^{1/24}$ nunca es cero y los factores del producto $(1 - q^n)$ son distintos de cero para todo $z \in \mathbb{H}$ (pues $|q^n| < 1$). □

3.1.1. Ley de transformación para eta

En esta sección, se buscan leyes de transformación para η que serán de utilidad para probar la modularidad de esta más adelante.

Proposición 3.1.3 (Ley de Transformación de $\eta(\tau)$ bajo T)**.** *La función eta de Dedekind satisface la siguiente ley de transformación para el generador* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*:*

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12}\eta(\tau)$$

Demostración. La demostración se sigue directamente de la definición de $\eta(\tau)$. Reemplazamos τ por $\tau + 1$ en la fórmula del producto:

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i(\tau+1)/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in(\tau+1)})$$

El factor exponencial inicial se puede separar como $e^{\pi i\tau/12} \cdot e^{\pi i/12}$. Para el término dentro del producto, usamos el hecho de que $e^{2\pi in} = 1$ para cualquier entero n:

$$e^{2\pi in(\tau+1)} = e^{2\pi in\tau} \cdot e^{2\pi in} = e^{2\pi in\tau}$$

Por lo tanto, el producto infinito no cambia:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in(\tau+1)}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in\tau})$$

Combinando estos resultados, obtenemos:

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12} \cdot \left(e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in\tau}) \right) = e^{\pi i/12}\eta(\tau)$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 3.1.4 (Transformación bajo T^b)**.** *La función eta se transforma bajo la traslación* $\tau \mapsto \tau + b$ *de la siguiente manera:*

$$\eta(\tau + b) = e^{\pi ib/12}\eta(\tau)$$

Definición 3.1.5 (Serie de Eisenstein $G_2(\tau)$)**.** Para $\tau \in \mathbb{H}$, la *serie de Eisenstein* $G_2(\tau)$ se define mediante su expansión de Fourier:

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) + 2(2\pi i)^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)e^{2\pi in\tau}$$

donde $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ es la función suma de los divisores.

Si bien G_2 no es una forma modular, satisface una ley de transformación similar.

Lema 3.1.6 (Ley de Transformación de $G_2(\tau)$)**.** *La serie de Eisenstein* $G_2(\tau)$ *satisface la siguiente ley de transformación bajo la inversión* $S\tau = -1/\tau$*:*

$$G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i\tau$$

Referencia. Esta es una propiedad fundamental de la serie $G_2(\tau)$. Una demostración detallada se describe en los ejercicios 1 a 5 del Capítulo 3 del libro de Apostol [Apo90]. □

Proposición 3.1.7 (Derivada Logarítmica de la Función Eta)**.** *La derivada logarítmica de la función eta de Dedekind está relacionada con la serie de Eisenstein $G_2(\tau)$ por la siguiente identidad:*

$$\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) = \frac{G_2(\tau)}{-4\pi i}$$

Demostración. La demostración parte de la definición en producto de $\eta(\tau)$ y su logaritmo. Tomando el logaritmo de la definición de $\eta(\tau)$, obtenemos:

$$\log\eta(\tau) = \frac{\pi i\tau}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1-e^{2\pi in\tau})$$

Usando la expansión en serie de potencias para $\log(1-x)$, la expresión se convierte en:

$$\log\eta(\tau) = \frac{\pi i\tau}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inm\tau}}{m}$$

Ahora, derivamos con respecto a τ:

$$\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) = \frac{\pi i}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\pi inm}{m}e^{2\pi inm\tau} = \frac{\pi i}{12} - 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}ne^{2\pi inm\tau}$$

Haciendo el cambio de índice $k = nm$ y reordenando la suma (lo cual es válido por la convergencia absoluta), podemos agrupar los términos por el valor de k:

$$\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) = \frac{\pi i}{12} - 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{d|k,d\geq 1}d\right)e^{2\pi ik\tau} = \frac{\pi i}{12} - 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_1(k)e^{2\pi ik\tau}$$

Recordemos la definición de $G_2(\tau)$:

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_1(k)e^{2\pi ik\tau}$$

Sabiendo que $\zeta(2) = \pi^2/6$, tenemos:

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_1(k)e^{2\pi ik\tau}$$

Multiplicando la expresión para la derivada logarítmica por $-4\pi i$:

$$\begin{aligned}-4\pi i\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) &= -4\pi i\left(\frac{\pi i}{12} - 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_1(k)e^{2\pi ik\tau}\right)\\ &= \frac{4\pi^2}{12} - 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_1(k)e^{2\pi ik\tau}\\ &= G_2(\tau)\end{aligned}$$

De aquí se deduce la relación enunciada. □

Teorema 3.1.8 (Ley de Transformación de $\eta(\tau)$ bajo S)**.** *La función eta de Dedekind satisface la siguiente ley de transformación para el generador* $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *del grupo modular:*

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$

donde se elige la rama de la raíz cuadrada con argumento en $(-\pi/2, \pi/2]$.

Demostración. La demostración se basa en la relación entre la derivada logarítmica de $\eta(\tau)$ y la serie de Eisenstein $G_2(\tau)$, establecida en la Proposición 3.1.7:

$$\frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) = \frac{G_2(\tau)}{-4\pi i}$$

Para encontrar la ley de transformación de $\eta(\tau)$, analizamos la derivada de $\log\eta(-1/\tau)$ usando la regla de la cadena. Al aplicar la relación anterior y la ley de transformación de $G_2(\tau)$ del Lema 3.1.6, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\log\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) &= \frac{\eta'(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)}\cdot\frac{1}{\tau^2} \\
&= \left(\frac{G_2(-1/\tau)}{-4\pi i}\right)\frac{1}{\tau^2} \\
&= \left(\frac{\tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i\tau}{-4\pi i}\right)\frac{1}{\tau^2} \\
&= \frac{G_2(\tau)}{-4\pi i} + \frac{1}{2\tau} = \frac{d}{d\tau}\log\eta(\tau) + \frac{1}{2\tau}
\end{aligned}$$

Por otro lado, calculamos la derivada de la función que esperamos obtener:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\log\eta(\tau) + \frac{1}{2}\log(-i\tau)\right) = \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} + \frac{1}{2}\frac{1}{-i\tau}(-i) = \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} + \frac{1}{2\tau}$$

Hemos demostrado que las funciones $\log\eta(-1/\tau)$ y $\log(\eta(\tau)(-i\tau)^{1/2})$ tienen la misma derivada. Por lo tanto, deben diferir en una constante de integración C:

$$\log\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \log\eta(\tau) + \frac{1}{2}\log(-i\tau) + C$$

Tomando la exponencial de ambos lados, encontramos que $\eta(-1/\tau) = e^C(-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$. Para determinar la constante e^C, evaluamos la expresión en el punto fijo $\tau = i$. Esto nos da $\eta(i) = e^C(-i\cdot i)^{1/2}\eta(i) = e^C\eta(i)$. Como $\eta(i) \neq 0$, se concluye que $e^C = 1$, lo que completa la demostración. □

3.1.2. Sumas de Dedekind

Habiendo establecido las leyes de transformación de la función eta para los generadores T y S del grupo modular, el objetivo de esta sección es deducir la fórmula general para una matriz arbitraria. La demostración procederá por inducción, utilizando las dos propiedades ya probadas. Para poder enunciar el teorema general, es necesario introducir primero las sumas de Dedekind, un objeto aritmético que constituye un componente esencial en la ley de transformación.

Definición 3.1.9 (Suma de Dedekind)**.** Para enteros h, k con $k \geq 1$, se define la función $((x))$ como:

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - 1/2 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La *suma de Dedekind*, denotada $s(h, k)$, se define entonces como:

$$s(h,k) = \sum_{0 \leq r < k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

Si $(h, k) = 1$, la suma se puede restringir a los valores de r desde 1 hasta $k - 1$.

Lema 3.1.10 (Identidad para la suma de Dedekind)**.** *Para enteros coprimos h, k con $k \geq 1$, se cumple la siguiente identidad:*

$$2hs(h,k) + \sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k}\right]\left(\left[\frac{hr}{k}\right] + 1\right) = \frac{h^2+1}{k^2}\sum_{r=1}^{k-1} r^2 - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1} r$$

Demostración. La prueba se obtiene al evaluar la suma $\sum_{r=1}^{k-1}((hr/k))^2$ de dos maneras. Primero, como $(h, k) = 1$, la secuencia $hr \pmod k$ es una permutación de $r \pmod k$, por lo que:

$$\sum_{r=1}^{k-1}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)^2 = \sum_{r=1}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)^2 = \frac{(k-1)(k-2)}{12k}$$

Segundo, expandimos el término $((hr/k))^2 = (hr/k - [hr/k] - 1/2)^2$. Una reorganización algebraica de la suma de esta expresión expandida, diseñada para aislar el término $s(h, k)$, conduce a la identidad enunciada. La manipulación es extensa pero directa, y los detalles se pueden seguir en la derivación de la Ecuación (33) en [Apo90]. □

Lema 3.1.11 (Propiedades de las sumas de Dedekind)**.** *Las sumas de Dedekind $s(h, k)$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Periodicidad: *Si $h_1 \equiv h_2 \pmod k$, entonces $s(h_1, k) = s(h_2, k)$.*

2. Ley de reciprocidad: *Si h, k son enteros positivos coprimos, entonces:*

$$s(h,k) + s(k,h) = \frac{h^2+k^2+1}{12hk} - \frac{1}{4}$$

Demostración. Ambas propiedades se demuestran a partir de la definición de $s(h, k)$.

1. Demostración de la periodicidad: La función $((x))$ es periódica con período 1. Si $h_1 \equiv h_2 \pmod k$, entonces $\frac{h_1 r}{k} - \frac{h_2 r}{k}$ es un entero para cualquier r. Por la periodicidad de la función $((\cdot))$, tenemos:

$$\left(\left(\frac{h_1 r}{k}\right)\right) = \left(\left(\frac{h_2 r}{k}\right)\right)$$

Sustituyendo esto en la definición de la suma de Dedekind, se sigue inmediatamente que $s(h_1, k) = s(h_2, k)$.

2. Referencia para la ley de reciprocidad: Para una exposición completa y detallada, nos remitimos a la demostración del teorema 3.7 en el libro de Apostol [Apo90].

□

Teorema 3.1.12 (Ley de Transformación General de la Función Eta)**.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ *una matriz del grupo modular con* $c > 0$*. La función eta de Dedekind se transforma según la fórmula:*

$$\eta(A\tau) = \epsilon(A)\{-i(c\tau + d)\}^{1/2}\eta(\tau)$$

donde $\epsilon(A)$ *es la raíz de la unidad dada por:*

$$\epsilon(A) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - s(d, c)\right)\right\}.$$

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre la estructura del grupo modular. Dado que toda matriz en Γ se puede escribir como un producto de los generadores T y S, basta con demostrar que si la fórmula es válida para una matriz A, también lo es para AT^m (para cualquier entero m) y para AS.

Casos Base: La fórmula es válida para los generadores.

- Para $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la fórmula no aplica directamente ya que $c = 0$. Sin embargo, ya hemos probado en la Proposición 3.1.3 que $\eta(\tau + 1) = e^{\pi i/12}\eta(\tau)$.
- Para $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$. El factor de la raíz de la unidad es $\epsilon(S) = \exp\{\pi i(0 - s(0, 1))\}$. Como $s(0, 1) = 0$, $\epsilon(S) = 1$. La fórmula predice $\eta(-1/\tau) = \{-i\tau\}^{1/2}\eta(\tau)$, lo cual coincide con el Teorema 3.1.8.

Paso Inductivo: Asumimos que la fórmula del teorema es válida para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c > 0$.

1. Estabilidad bajo T^m*:* Consideremos $A' = AT^m = \begin{pmatrix} a & am + b \\ c & cm + d \end{pmatrix}$.

$$\eta(A'\tau) = \eta(A(\tau + m)) = \epsilon(A)\{-i(c(\tau + m) + d)\}^{1/2}\eta(\tau + m)$$

$$= \epsilon(A)\{-i(c\tau + (cm + d))\}^{1/2}e^{\pi im/12}\eta(\tau)$$

Por otro lado, el factor de la raíz de la unidad para A' es:

$$\epsilon(A') = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a + (cm + d)}{12c} - s(cm + d, c)\right)\right\}$$

Usando la periodicidad de las sumas de Dedekind (Lema 3.1.11), $s(cm+d,c) = s(d,c)$. Así:

$$\epsilon(A') = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + \frac{m}{12} - s(d,c)\right)\right\} = \epsilon(A)e^{\pi i m/12}$$

Sustituyendo $\epsilon(A) = \epsilon(A')e^{-\pi i m/12}$ en la expresión para $\eta(A'\tau)$, los factores exponenciales se cancelan y obtenemos la fórmula correcta para A'.

2. Estabilidad bajo S: Consideremos la matriz $A' = AS = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$. Debemos demostrar que la fórmula también es válida para A'. Para ello, calculamos $\eta(A'\tau) = \eta(A(-1/\tau))$. Usando la hipótesis inductiva para A con la variable $-1/\tau$:

$$\eta(A(-1/\tau)) = \epsilon(A)\{-i(c(-1/\tau)+d)\}^{1/2}\eta(-1/\tau)$$

Ahora usamos la ley de transformación para $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$:

$$\eta(A'\tau) = \epsilon(A)\left\{-i\frac{d\tau - c}{\tau}\right\}^{1/2}(-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$

El producto de las raíces cuadradas requiere un análisis cuidadoso de los argumentos de los números complejos. Dependiendo del signo de d, se aplica una de las siguientes identidades:

- Si $d > 0$, $\{-i\frac{d\tau-c}{\tau}\}^{1/2}(-i\tau)^{1/2} = e^{-\pi i/4}\{-i(d\tau - c)\}^{1/2}$.
- Si $d < 0$, $\{-i\frac{d\tau-c}{\tau}\}^{1/2}(-i\tau)^{1/2} = e^{\pi i/4}\{-i(-d\tau + c)\}^{1/2}$.

Dividimos la prueba en dos casos.

Caso (a): $d > 0$. La matriz A' tiene su entrada $(2,1)$ positiva. Sustituimos la primera identidad de raíz cuadrada:

$$\eta(A'\tau) = \epsilon(A)e^{-\pi i/4}\{-i(d\tau - c)\}^{1/2}\eta(\tau)$$

La fórmula del teorema para $A' = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ predice:

$$\eta(A'\tau) = \epsilon(A')\{-i(d\tau - c)\}^{1/2}\eta(\tau) \quad \text{con} \quad \epsilon(A') = \exp\left\{\pi i\left(\frac{b-c}{12d} - s(-c,d)\right)\right\}$$

Comparando ambas expresiones, la prueba se reduce a demostrar que $\epsilon(A)e^{-\pi i/4} = \epsilon(A')$. Esto es equivalente a demostrar la identidad:

$$\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4} = \frac{b-c}{12d} - s(-c,d)$$

Usando $s(-c,d) = -s(c,d)$ y reordenando, esto es equivalente a la ley de reciprocidad para las sumas de Dedekind (Lema 3.1.11). Por lo tanto, la igualdad se cumple y la fórmula es válida para A' en este caso.

Caso (b): $d < 0$. La matriz A' tiene su entrada $(2,1)$ negativa. Para aplicar la fórmula del teorema, debemos usar la matriz $-A' = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$, que tiene la entrada $(2,1)$ positiva. Sustituimos la segunda identidad de raíz cuadrada:

$$\eta(A'\tau) = \epsilon(A)e^{\pi i/4}\{-i(-d\tau + c)\}^{1/2}\eta(\tau)$$

La fórmula del teorema para $-A'$ predice:

$$\eta((-A')\tau) = \eta(A'\tau) = \epsilon(-A')\{-i(-d\tau + c)\}^{1/2}\eta(\tau)$$

con

$$\epsilon(-A') = \exp\left\{\pi i\left(\frac{-b+c}{12(-d)} - s(c,-d)\right)\right\}$$

Comparando, debemos demostrar que $\epsilon(A)e^{\pi i/4} = \epsilon(-A')$. Esto es equivalente a:

$$\frac{a+d}{12c} - s(d,c) + \frac{1}{4} = \frac{b-c}{12d} - s(c,-d)$$

Usando la ley de reciprocidad y las propiedades de $s(h,k)$, esta identidad también se verifica.

Como la fórmula es válida para el generador S y se preserva bajo la multiplicación a la derecha por T^m y S, se concluye por inducción que es válida para cualquier matriz $A \in \Gamma$ con $c > 0$. □

3.2. Cocientes eta y el Teorema de Newman

El objetivo ahora es probar que bajo ciertas hipótesis, un cociente eta arbitrario, es en efecto una forma modular con un peso, nivel y caracter apropiado.

Definición 3.2.1 (Cociente eta)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}$ un conjunto finito tal que

$$\sum_{(\delta,r_\delta)\in X} \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Definimos el cociente eta f asociado a X de la forma:

$$f(z) = \eta^X(z) := \prod_{(\delta,r_\delta)\in X} \eta(\delta z)^{r_\delta}.$$

Lema 3.2.2. *El grupo modular* $\Gamma_0(N)$ *está generado por el conjunto de matrices*

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \;\middle|\; \text{mcd}(a,6) = 1 \right\}.$$

Demostración. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix}$ un elemento arbitrario de $\Gamma_0(N)$. Consideremos la matriz de traslación $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que $S \in \mathcal{G}$, ya que $S \in \Gamma_0(N)$

(pues $c = 0$ es múltiplo de N) y su entrada superior izquierda es 1, la cual cumple $\text{mcd}(1, 6) = 1$.

Multiplicamos M por la izquierda por una potencia entera S^x:

$$M' = S^x M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xNc & b + xd \\ Nc & d \end{pmatrix}.$$

Notemos que M' sigue perteneciendo a $\Gamma_0(N)$. Sea $a' = a + xNc$ la nueva entrada superior izquierda. Dado que $\det(M) = 1$, tenemos que $ad - b(Nc) = 1$, lo que implica que $\gcd(a, Nc) = 1$.

Aplicando el Teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas, dado que $\gcd(a, Nc) = 1$, existen infinitos enteros x tales que $a' = a + xNc$ es un número primo. Podemos elegir un x tal que $a' = p$ sea un primo mayor que 3. Al ser $p > 3$, se cumple que $\gcd(p, 6) = 1$.

Por lo tanto, la matriz M' pertenece a $\mathcal{G}$. Como podemos escribir $M = S^{-x} M'$, y sabemos que S (y por tanto S^{-1}) pertenece al grupo generado por $\mathcal{G}$, concluimos que M es producto de elementos de $\mathcal{G}$. Dado que M es arbitraria, $\mathcal{G}$ genera $\Gamma_0(N)$. □

Recordemos la definición de $\epsilon(A) = \exp\{-\pi i \alpha(A)\})$ con $\alpha(A) = s(d, c) - \frac{a+d}{12c}$.

Lema 3.2.3. *Si $a > 0, c > 0$ y a es coprimo con 6, entonces*

$$\alpha(A) \equiv \frac{a(c - b - 3)}{12} - \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)\right) \quad (\text{mód } 2)$$

donde $a \equiv b$ (mód 2) sii $a - b = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ (no necesariamente a y b enteros).

Demostración. Este lema lo probo Newman en su paper [New59]. Para hacerlo primero prueba un resultado similar pero pidiendo que c sea coprimo con 6, resultado que se puede deducir de la ecuación 7 en [New57], y luego utiliza esto junto al Lema 1 del primero para concluir. □

Observación 3.2.4. Notemos que $a \equiv b$ (mód 2) sii $\exp(-\pi i a) = \exp(-\pi i b)$. Vamos a usar esto para estudiar el comportamiento de $\epsilon(A)$ en el siguiente teorema.

Definición 3.2.5 (Carácter de Dirichlet χ_m)**.** Dado un entero no nulo m, denotamos por χ_m al carácter de Dirichlet primitivo definido como:

$$\chi_m(a) = \left(\frac{m}{a}\right)$$

para todo entero a tal que $\text{mcd}(a, 4m) = 1$.

Teorema 3.2.6 (Newman)**.** *Toda f como en 3.2.1 es una forma modular débil de peso $k = \frac{1}{2}\sum_\delta r_\delta$, nivel N, el mínimo número natural que verifica:*

- *N es múltiplo de cada δ,*
- *si $k \notin \mathbb{Z}$, entonces N es múltiplo de 4,*
- $\displaystyle\sum_\delta \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$;

y caracter χ_m*, donde* $m = \prod_\delta \delta^{r_\delta}$ *si* $k \in \mathbb{Z}$ *o* $m = 2\prod_\delta \delta^{r_\delta}$ *si* $k \notin \mathbb{Z}$

Demostración. Dado que basta con probar la ley de modularidad sobre un conjunto de generadores, por el Lema 3.2.2, y como A y $-A$ actúan de la misma manera, es suficiente con probar que f cumple la ley de modularidad para las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $(a, 6) = 1$, $c > 0$. Usando la ley de transformación del Teorema 3.1.12 obtenemos:

$$f(A\tau) = \left(\prod_X \epsilon(A_\delta)^{r_\delta}\right)((-i)(c\tau + d))^k f(\tau)$$

con $A_\delta = \begin{pmatrix} a & \delta b \\ c/\delta & d \end{pmatrix}$. Como $c > 0$, tenemos que $((-i)(c\tau + d))^k = (-i)^k(c\tau + d)^k$. Luego, para que se cumpla la modularidad, se debe verificar

$$\left(\prod_X \epsilon(A_\delta)^{r_\delta}\right)(-i)^k = \chi_m(d)\epsilon_d^{-2k}\left(\frac{c}{d}\right)^{2k} \tag{3.1}$$

con $\epsilon(A_\delta) = \exp(-\pi i\alpha(A_\delta))$. Sea $\lambda = \sum_{\delta|N} r_\delta\alpha(A_\delta)$, tenemos entonces $\prod_X \epsilon(A_\delta)^{r_\delta} = \exp(-\pi i\lambda)$. Estudiemos entonces las congruencias de λ módulo 2. Tenemos entonces

$$\lambda = \sum_{\delta|N} r_\delta\alpha(A_\delta)$$

por el Lema 3.2.3, remplazando el valor de $\alpha(A_\delta)$ obtenemos

$$\lambda \equiv \sum_{\delta|N} r_\delta\left(\frac{a(c/\delta - \delta b - 3)}{12}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta\left[1 - \left(\frac{c/\delta}{a}\right)\right] \quad (\text{mód } 2)$$

luego la expresión se simplifica a

$$\lambda \equiv \sum_{\delta|N} r_\delta(\frac{(ac/\delta)}{12} - \frac{ab\delta}{12} - \frac{3a}{12}) - \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta\left[1 - \left(\frac{c/\delta}{a}\right)\right] \quad (\text{mód } 2).$$

Como $\sum_{(\delta, r_\delta)\in X} \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$ y $\sum_\delta \frac{c}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$ (la segunda ya que $c \equiv 0 \pmod{N}$) tenemos

$$\lambda \equiv \sum_{\delta|N} r_\delta(-\frac{a}{4}) - \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta\left[1 - \left(\frac{c/\delta}{a}\right)\right].$$

Como $k = \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta$ y $\left(\frac{c/\delta}{a}\right) = \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)$

$$\lambda \equiv -k\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta\left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

y dado que $(-i)^k = \exp(-\pi i \frac{k}{2})$, el lado izquierdo de (3.1) nos queda

$$\exp(-\pi i\lambda)\exp(-\pi i\frac{k}{2}) = \exp(-\pi i(\lambda + \frac{k}{2}))$$

estudiemos entonces, la congruencia de $\lambda + \frac{k}{2}$.

$$\lambda + \frac{k}{2} \equiv -k(\frac{a-1}{2}) - \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta \left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right].$$

Sean $\Phi = -k(\frac{a-1}{2})$ y $\Psi = -\frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta \left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right]$. Calculemos primero $\exp(-\pi i\Psi)$

$$\exp\left(-\pi i\Psi\right) = \exp\left(\pi i\frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta \left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right)$$

$$= \prod_{\delta|N} \exp\left(\pi i\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right)^{r_\delta}.$$

Notemos que si $x = \pm 1$, entonces $\exp\left(-\pi i\frac{1}{2}(1-x)\right) = x$ luego

$$\prod_{\delta|N} \exp\left(\pi i\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right]\right)^{r_\delta} = \prod_{\delta|N}\left(\left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right)^{r_\delta}.$$

Sea $s = \prod_\delta \delta^{r_\delta}$, la expresión se simplifica a

$$\prod_{\delta|N}\left(\left(\frac{\delta}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\right)^{r_\delta} = \left(\frac{s}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^{2k}.$$

Notemos además que como $A \in \Gamma_0(N)$, tenemos que $ad - bc = 1$ y por ende $ad \equiv 1$ (mód N). Escribiendo a c como el producto de una potencia de 2 por un impar y usando la multiplicatividad del símbolo de Jacobi combinada con la ley de reciprocidad cuadrática, es fácil ver que

$$\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = 1.$$

Ademas, si escribimos a $s = a^2 n$ con n libre de cuadrados, es fácil ver que $c \equiv 0$ (mód n) ya que $N|c$ y $n|N$. Tenemos entonces

$$\left(\frac{s}{a}\right)\left(\frac{s}{d}\right) = 1$$

de lo que se deduce

$$\left(\frac{s}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^{2k} = \left(\frac{s}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)^{2k}.$$

Por otro lado,

$$\exp(-\pi i\Phi) = \exp(\pi ik\frac{a-1}{2}) = (-1)^{k\frac{a-1}{2}},$$

la ecuacion (3.1) se reduce a probar

$$\left(\frac{s}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)^{2k}(-1)^{k\frac{a-1}{2}} = \chi_m(d)\epsilon_d^{-2k}\left(\frac{c}{d}\right)^{2k}$$

$$\left(\frac{s}{d}\right)(-1)^{k\frac{a-1}{2}} = \chi_m(d)\epsilon_d^{-2k}$$

con $m = s$ si $k \in \mathbb{Z}$ o $m = 2s$ si $k \notin \mathbb{Z}$. Separemos en casos.

- $k \in \mathbb{Z}$: Como $m = s$, tenemos que $\chi_m(d) = \left(\frac{s}{d}\right)$ y la expresión se reduce a probar

  $$(-1)^{k\frac{d-1}{2}} = \epsilon_d^{-2k}$$

  que, como k es entero, se reduce a probar que

  $$(-1)^{k\frac{d-1}{2}} = ((-1)^{\frac{d-1}{2}})^k$$

  y como $\epsilon_d^2 = \left(\frac{-1}{d}\right) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}$ tenemos la igualdad deseada.

- $k \notin \mathbb{Z}$: Tenemos $m = 2s$, luego la igualdad se reduce a

  $$\left(\frac{2}{d}\right)(-1)^{k\frac{d-1}{2}} = \epsilon_d^{-2k}$$

  separando en los distintos valores de d (mód 8) vemos que la identidad se verifica.

□

Aunque no es necesario el Teorema de Newman para probar el siguiente resultado, se sigue como corolario inmediato de este.

Corolario 3.2.7. *La función $\Delta(z) = \eta(z)^{24}$ es una forma modular débil de peso 12 para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con caracter trivial.*

Demostración. Notemos que $\eta(z)^{24}$ cumple las hipótesis del teorema, ya que

$$\sum_{(\delta,r_\delta)\in X} \delta r_\delta = 24 \equiv 0 \pmod{24}.$$

El mínimo N que verifica las condiciones del teorema es claramente 1, el peso es $k = \frac{24}{2} = 12$ y el caracter es trivial.

□

3.3. Teorema de Ligozat

Recordemos algunos conceptos para $\Gamma_0(N)$.

Recordatorio 3.3.1 (Cúspides y nivel de cúspide)**.** Las cúspides de $\Gamma_0(N)$ son las $\Gamma_0(N)$-órbitas de $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Cada cúspide s puede ser representada por una fracción a/c con $\mathrm{mcd}(a,c) = 1$ y $c|N$.

Recordemos que, según la Proposición 1.2.12, el ancho de una cúspide $s = a/c$ (en su forma irreducible) para $\Gamma_0(N)$ está determinado por la fórmula $h_s = \frac{N}{\mathrm{mcd}(c^2,N)}$.

Lema 3.3.2. *Sea $s = b/d$ una cúspide de $\Gamma_0(N)$ con $d \mid N$ y $\mathrm{mcd}(b,d) = 1$, y sea*

$$\rho \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \qquad \rho(s) = \infty.$$

Escribamos

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \qquad \text{con } ad - bc = 1.$$

Sea δ_0 un divisor positivo de N y pongamos

$$u = \mathrm{mcd}(d, \delta_0), \qquad \delta_0 = u\delta_1, \qquad d = ud_1.$$

Entonces existe una matriz $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y un entero q tales que

$$M := \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rho^{-1} = \gamma \begin{pmatrix} u & q \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Más explícitamente, podemos tomar

$$\gamma = \begin{pmatrix} -b\delta_1 & au + bq \\ -d_1 & \dfrac{c + d_1 q}{\delta_1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Demostración. Partimos de

$$M = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\delta_0 & a\delta_0 \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis, $\det(\rho^{-1}) = 1$, luego $\det M = \delta_0$.

Definimos

$$u = \mathrm{mcd}(d, \delta_0), \qquad \delta_0 = u\delta_1, \qquad d = ud_1,$$

de modo que necesariamente $\mathrm{mcd}(d_1, \delta_1) = 1$. Escribiendo esto en la primera columna de M obtenemos

$$M = \begin{pmatrix} -b\delta_1 u & a\delta_1 u \\ -d_1 u & c \end{pmatrix}.$$

Buscamos una factorización

$$M = \gamma S, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad S = \begin{pmatrix} u & q \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$.

La igualdad $M = \gamma S$ equivale a

$$\begin{pmatrix} -b\delta_1 u & a\delta_1 u \\ -d_1 u & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & q \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au & Aq + B\delta_1 \\ Cu & Cq + D\delta_1 \end{pmatrix}.$$

Comparando entradas de la primera columna, obtenemos

$$Au = -b\delta_1 u, \qquad Cu = -d_1 u,$$

luego

$$A = -b\delta_1, \qquad C = -d_1.$$

Nos queda por determinar B, D, q a partir de las ecuaciones

$$Aq + B\delta_1 = a\delta_1 u, \tag{3.2}$$
$$Cq + D\delta_1 = c \tag{3.3}$$

de (3.2) se obtiene

$$-b\delta_1 q + B\delta_1 = a\delta_1 u \quad \Longrightarrow \quad B = au + bq$$

y de (3.3) se deduce

$$-d_1 q + D\delta_1 = c \quad \Longrightarrow \quad D\delta_1 = c + d_1 q.$$

Como $\mathrm{mcd}(d_1, \delta_1) = 1$, la congruencia

$$c + d_1 q \equiv 0 \pmod{\delta_1}$$

tiene solución en $q \in \mathbb{Z}$. Fijamos una de estas soluciones; entonces

$$D = \frac{c + d_1 q}{\delta_1} \in \mathbb{Z}.$$

Sólo queda comprobar que $\det(\gamma) = 1$. Usando las expresiones previas:

$$\begin{aligned} AD - BC &= (-b\delta_1) \cdot \frac{c + d_1 q}{\delta_1} - (au + bq)(-d_1) \\ &= -b(c + d_1 q) + d_1(au + bq) \\ &= -bc - bd_1 q + ad_1 u + bd_1 q \\ &= ad_1 u - bc \\ &= ad - bc \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde usamos que $d = d_1 u$ y que $ad - bc = 1$ viene de $\det(\rho^{-1}) = 1$.

Por lo tanto, $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y se tiene $M = \gamma S$ con S triangular superior de la forma indicada. □

El siguiente Lema es útil para estudiar el comportamiento de $\eta(\delta z)$ en las cúspides.

Recordatorio 3.3.3. La función Δ está definida por la siguiente fórmula

$$\Delta(z) = \eta(z)^{24}$$

En el Corolario 3.2.7 se probó que es una forma modular débil de peso 12 para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con carácter trivial.

Lema 3.3.4 (Lema de transformación de Ligozat)**.** *Sea $s = b/d$ una cúspide de $\Gamma_0(N)$ de nivel con $d \mid N$ y $\mathrm{mcd}(b,d) = 1$. Sea δ_0 un divisor positivo de N y sea $\rho \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\rho(s) = \infty$. Entonces existen constantes complejas β, γ (dependiendo sólo de ρ, d, δ_0) tales que*

$$\Delta(\delta_0 \rho^{-1}(z)) = \left(\frac{d\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}\, z + \beta\right)^{12} \Delta\left(\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}\, z + \gamma\right).$$

Demostración. Sea ρ tal que

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1.$$

Sea

$$M := \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rho^{-1} = \begin{pmatrix} -b\delta_0 & a\delta_0 \\ -d & c \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\Delta(\delta_0 \rho^{-1}(z)) = \Delta(Mz).$$

Ponemos $u = \mathrm{mcd}(d, \delta_0)$ y escribimos $\delta_0 = u\delta_1$, $d = ud_1$. Por el Lema 3.3.2, existen $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $q \in \mathbb{Z}$ tales que

$$M = \gamma \begin{pmatrix} u & q \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\delta_1 & au + bq \\ -d_1 & \dfrac{c + d_1 q}{\delta_1} \end{pmatrix}.$$

Sea

$$S := \begin{pmatrix} u & q \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \qquad w := Sz = \frac{uz + q}{\delta_1}.$$

Entonces $Mz = \gamma(Sz) = \gamma w$, y por el Corolario 3.2.7, tenemos que Δ cumple la propiedad de modularidad para toda matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y con peso 12. Luego, para toda

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

se tiene

$$\Delta(\gamma w) = (Cw + D)^{12}\, \Delta(w).$$

Aplicando esto a $w = Sz$ obtenemos

$$\Delta(Mz) = \Delta(\gamma(Sz)) = (C(Sz) + D)^{12}\, \Delta(Sz).$$

Calculamos por separado el factor lineal y el argumento de Δ.

1. *El factor $C(Sz) + D$*: Con $C = -d_1$ y $D = \dfrac{c + d_1 q}{\delta_1}$,

$$C(Sz) + D = -d_1 \frac{uz + q}{\delta_1} + \frac{c + d_1 q}{\delta_1} = \frac{-d_1 uz - d_1 q + c + d_1 q}{\delta_1} = \frac{-d_1 uz + c}{\delta_1}.$$

Como $(-X)^{12} = X^{12}$, podemos escribir

$$(C(Sz) + D)^{12} = \left(\frac{d_1 uz - c}{\delta_1}\right)^{12}.$$

2. *El argumento* Sz: Por definición,

$$Sz = \frac{uz+q}{\delta_1}.$$

Reintroducimos ahora $u = \mathrm{mcd}(d, \delta_0)$, $d_1 = d/u$, $\delta_1 = \delta_0/u$. Para el factor lineal tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d_1 uz - c}{\delta_1} = \frac{(d/u)uz - c}{\delta_0/u} = \frac{dz-c}{\delta_0/u} = \frac{u(dz-c)}{\delta_0} \\ = \frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)\, d}{\delta_0}\, z - \frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)\, c}{\delta_0}.\end{aligned}$$

Para el argumento de Δ,

$$Sz = \frac{uz+q}{\delta_1} = \frac{u(uz+q)}{u\delta_1} = \frac{u^2 z + uq}{\delta_0} = \frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}\, z + \frac{q\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}.$$

Resumiendo,

$$\Delta(Mz) = \left(\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)\, d}{\delta_0}\, z - \frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)\, c}{\delta_0}\right)^{12} \Delta\left(\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}\, z + \frac{q\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}\right).$$

Recordando que $\Delta(Mz) = \Delta(\delta_0 \rho^{-1}(z))$, obtenemos la forma anunciada:

$$\Delta(\delta_0\rho^{-1}(z)) = \left(\frac{d\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}\, z + \beta\right)^{12} \Delta\left(\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}\, z + \gamma\right),$$

donde podemos tomar

$$\beta = -\frac{c\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}, \qquad \gamma = \frac{q\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}.$$

Finalmente, observamos que la elección de q en el Lema 3.3.2 no es única: si $q' = q + m\delta_1$ con $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\gamma' = \frac{q'\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0} = \gamma + m,$$

y como $\Delta(z+m) = \Delta(z)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, el lado derecho de la identidad no depende de la elección concreta de q. Por lo tanto, las constantes β, γ quedan bien definidas en función de ρ, d, δ_0, y el lema queda demostrado. □

Teorema 3.3.5 (Orden de $\eta(\delta_0 z)$ en cúspides)**.** *Sea $s = b/d$ una cúspide para $\Gamma_0(N)$ con $\mathrm{mcd}(b,d) = 1$ y $d|N$. Sea δ_0 un divisor positivo de N. El orden no normalizado $\nu_s(\eta(\delta_0 z))$ es:*

$$\nu_s(\eta(\delta_0 z)) = \frac{h(d)\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0}$$

Demostración. Queremos $\nu_s(f)$ donde $f(w) = \eta(\delta_0 w)$. Sea $\rho \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ con $\rho(s) = \infty$. Necesitamos el exponente más bajo n_0 en la expansión de $f(\rho^{-1}(z)) = \eta(\delta_0\rho^{-1}(z))$ en potencias de $q_h = e^{2\pi iz/h}$. Usamos que $\eta(w)^{24} = \Delta(w)$, así
$f(\rho^{-1}(z)) = [\Delta(\delta_0\rho^{-1}(z))]^{1/24}$. Aplicando el Lema 3.3.4:

$$f(\rho^{-1}(z)) = \left[\left(\frac{d\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}z + \beta\right)^{12} \Delta\left(\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}z + \gamma\right)\right]^{1/24}$$

$$= \left(\frac{d\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}z + \beta\right)^{1/2} [\Delta\,(W)]^{1/24}$$

donde $W = \frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}z + \gamma$. Cuando $z \to i\infty$, $W \to i\infty$. La expansión de $\Delta(W)$ es $\Delta(W) = q_W \prod(1-q_W^n)^{24} = q_W + O(q_W^2)$, donde $q_W = e^{2\pi iW}$. Luego, tenemos la siguientes igualdades:

$$[\Delta(W)]^{1/24} = (q_W + \cdots)^{1/24} = q_W^{1/24}(1 + \cdots)$$

. El factor $q_W^{1/24}$ es el que determina el orden:

$$q_W^{1/24} = (e^{2\pi iW})^{1/24} = \exp\left(\frac{2\pi i}{24}W\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{24}\left[\frac{\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{\delta_0}z + \gamma\right]\right)$$

$$= e^{2\pi i\gamma/24}\exp\left(\frac{2\pi iz}{h}\cdot\frac{h\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0}\right) = (\text{constante})\cdot(q_h)^{\frac{h\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0}}$$

El factor $\left(\frac{d\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)}{\delta_0}z + \beta\right)^{1/2}$ no contribuye al exponente más bajo de q_h ya que es del orden de $\sqrt{z}$. Por la Definición 1.2.24, el exponente más bajo $n_0 = \nu_s(f)$ es:

$$\nu_s(\eta(\delta_0 z)) = \frac{h(d)\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0}$$

□

Teorema 3.3.6 (Fórmula explícita del orden de $\eta(\delta_0 z)$)**.** *Sea $s = a/c$ una cúspide para $\Gamma_0(N)$ con $\mathrm{mcd}(a,c) = 1$, $c|N$. El orden no normalizado $\nu_s(\eta(\delta_0 z))$ es:*

$$\nu_{a/c}(\eta(\delta_0 z)) = \frac{N\ \mathrm{mcd}(c,\delta_0)^2}{24\delta_0\ \mathrm{mcd}(c^2,N)}$$

Demostración. Sustituimos la fórmula del ancho $h(c) = N/\mathrm{mcd}(c^2,N)$ en el resultado del Teorema 3.3.5.

$$\nu_s(\eta(\delta_0 z)) = \frac{(N/\mathrm{mcd}(d^2,N))\,\mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0} = \frac{N\ \mathrm{mcd}(d,\delta_0)^2}{24\delta_0\ \mathrm{mcd}(d^2,N)}.$$

La verificación para $c = 0$, $\mathrm{mcd}(c,\delta_0) = \delta_0$ y $\mathrm{mcd}(c^2.N) = N$. La formula se reduce a

$$\frac{\delta_0}{24}$$

Lo cual coincide con lo deseado. □

Lema 3.3.7 (Propiedades del orden de anulación). *Sea Γ un subgrupo de congruencia y $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ una cúspide. La función orden de anulación $v_s : \mathcal{M}_k(\Gamma) \to \mathbb{Q}$ satisface las siguientes propiedades para cualesquiera formas f, g y entero r:*

1. Aditividad: $v_s(f \cdot g) = v_s(f) + v_s(g)$.
2. Homogeneidad: $v_s(g^r) = r v_s(g)$.

Demostración. Sea la expansión de Fourier de f en la cúspide s la siguiente (respecto a la variable local q_s):

$$f = \sum_{n \geq v_s(f)} a_n q_s^n = q_s^{v_s(f)}(a_{v_s(f)} + a_{v_s(f)+1} q_s + \dots),$$

donde $a_{v_s(f)} \neq 0$. Análogamente, para g tenemos:

$$g = \sum_{m \geq v_s(g)} b_m q_s^m = q_s^{v_s(g)}(b_{v_s(g)} + b_{v_s(g)+1} q_s + \dots),$$

con $b_{v_s(g)} \neq 0$. Al multiplicar las series, el término de menor grado es el producto de los términos líderes:

$$f \cdot g = q_s^{v_s(f)+v_s(g)} \left(a_{v_s(f)} b_{v_s(g)} + \dots\right).$$

Dado que $a_{v_s(f)} b_{v_s(g)} \neq 0$, el orden de anulación del producto es la suma de los órdenes, probando la aditividad. La homogeneidad se sigue aplicando esto inductivamente (o elevando directamente la serie de g a la potencia r). □

Teorema 3.3.8 (Ligozat, 1975). *Sea $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ un cociente eta. Sea $s = a/c$ una cúspide de $\Gamma_0(N)$ con $\operatorname{mcd}(a, c) = 1$ ($c = 0$ si $s = \infty$). El orden (no normalizado) de f en la cúspide s está dado por:*

$$\nu_s(f) = \frac{N}{24 \operatorname{mcd}(c^2, N)} \sum_{\delta|N} r_\delta \frac{\operatorname{mcd}(c, \delta)^2}{\delta}$$

Demostración. Por el Lema 3.3.7, podemos expresar el orden del producto como la suma de los órdenes de sus factores:

$$\nu_s(f) = \nu_s\left(\prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}\right) = \sum_{\delta|N} r_\delta \cdot \nu_s(\eta(\delta z)).$$

Ahora, sustituimos el valor de $\nu_s(\eta(\delta z))$ dado por la fórmula del Teorema 3.3.6:

$$\nu_s(\eta(\delta z)) = \frac{N \operatorname{mcd}(c, \delta)^2}{24\delta \operatorname{mcd}(c^2, N)}.$$

Al insertar esta expresión en la sumatoria, obtenemos:

$$\nu_s(f) = \sum_{\delta|N} r_\delta \left(\frac{N \operatorname{mcd}(c, \delta)^2}{24\delta \operatorname{mcd}(c^2, N)}\right).$$

Finalmente, factorizando el término $\frac{N}{24\,\mathrm{mcd}(c^2,N)}$, que no depende del índice de la suma δ, llegamos al resultado:

$$\nu_s(f) = \frac{N}{24\,\mathrm{mcd}(c^2,N)} \sum_{\delta|N} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c,\delta)^2}{\delta}.$$

□

3.4. Funciones generadoras de particiones y cocientes eta

Una conexión importante y clásica en la teoría de números es la que existe entre las funciones generadoras de ciertas funciones aritméticas (como las funciones de partición) y los productos infinitos que definen a la función η y sus cocientes. En esta sección se explorará la función de partición $p(n)$, la función de sobreparticiones $\bar{p}(n)$ y otros ejemplos con interés combinatorio.

3.4.1. Función de particiones

Definición 3.4.1 (Función de partición $p(n)$)**.** La *función de partición* $p(n)$, para un entero $n \geq 1$, cuenta el número de formas de escribir n como suma de enteros positivos, sin importar el orden de los sumandos. Por convención, se define $p(0) = 1$. Por ejemplo, $p(4) = 5$ ya que las particiones de 4 son: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$.

Euler descubrió la notable función generadora para $p(n)$.

Teorema 3.4.2 (Función generadora de $p(n)$ (Euler))**.** *La serie generadora para la función de partición $p(n)$ viene dada por el siguiente producto infinito convergente para $|q| < 1$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}.$$

Idea de la Prueba. Expandimos cada factor del producto como una serie geométrica: $\frac{1}{1-q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \cdots$ El producto infinito es entonces:

$$(1 + q^1 + q^{1+1} + \cdots)(1 + q^2 + q^{2+2} + \cdots)(1 + q^3 + \cdots)\cdots$$

Al multiplicar estos términos, un término genérico q^n en la expansión final se forma eligiendo $q^{m_k \cdot k}$ del k-ésimo factor, de tal manera que $\sum_{k=1}^{\infty} m_k \cdot k = n$. Cada una de estas elecciones corresponde precisamente a una partición de n donde la parte k aparece m_k veces. Por lo tanto, el coeficiente de q^n en el producto es exactamente $p(n)$. □

Esta función generadora está directamente relacionada con la función eta de Dedekind.

Proposición 3.4.3 (Relación de $1/\eta(24z)$ con $p(n)$)**.** *La función* $1/\eta(24z)$ *tiene la siguiente expansión en serie de potencias de* $q = e^{2\pi iz}$*, relacionada con la función de partición* $p(n)$ *(Def. 3.4.1):*

$$\frac{1}{\eta(24z)} = \sum_{n\geq -1} p\left(\frac{n+1}{24}\right) q^n$$

con $p(k) = 0$ *si* $k \notin \mathbb{Z}$*. Equivalentemente, esta identidad se puede escribir como:*

$$\frac{1}{\eta(24z)} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{24k-1} = q^{-1} + q^{23} + 2q^{47} + 3q^{71} + 5q^{95} + \cdots$$

Demostración. La prueba se basa en la identidad fundamental para la función generadora de $p(n)$ y la definición de $\eta(z)$. Sabemos por el Teorema 3.4.2 y la definición de $\eta(z)$ que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} = \frac{q^{1/24}}{\eta(z)}$$

Despejando $1/\eta(z)$:

$$\frac{1}{\eta(z)} = q^{-1/24} \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k-1/24} \tag{3.4}$$

Ahora, aplicamos una sustitución de variable, reemplazando z por $24z$. Esto significa que la variable $q = e^{2\pi iz}$ se reemplaza por $q' = e^{2\pi i(24z)} = (e^{2\pi iz})^{24} = q^{24}$. Sustituimos en ambos lados de (3.4).

El lado izquierdo $1/\eta(z)$ se convierte en $1/\eta(24z)$. El lado derecho $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{k-1/24}$ se convierte en

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) (q^{24})^{k-1/24} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{24(k-1/24)} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{24k-1}.$$

Obtenemos así la identidad:

$$\frac{1}{\eta(24z)} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) q^{24k-1} \tag{3.5}$$

Como se quería ver. □

3.4.2. Funcion de sobreparticiones

Definición 3.4.4 (Función de sobrepartición $\bar{p}(n)$)**.** Una *sobrepartición* de un entero $n \geq 1$ es una partición de n donde la *primera* aparición de cada parte distinta puede ser opcionalmente marcada (usualmente con una barra superior). La función $\bar{p}(n)$ cuenta el número de sobreparticiones de n. Por convención, $\bar{p}(0) = 1$. Por ejemplo, $\bar{p}(3) = 8$. Las sobreparticiones de 3 son: 3, $\bar{3}$, $2+1$, $\bar{2}+1$, $2+\bar{1}$, $\bar{2}+\bar{1}$, $1+1+1$, $\bar{1}+1+1$.

La función generadora para $\bar{p}(n)$ también admite una hermosa forma de producto.

Teorema 3.4.5 (Función generadora de $\bar{p}(n)$)**.** *La serie generadora para la función de sobrepartición $\bar{p}(n)$ viene dada por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+q^k}{1-q^k} = \frac{(1+q)(1+q^2)\cdots}{(1-q)(1-q^2)\cdots}$$

Demostración. Una sobrepartición de un entero n puede ser vista como la unión de dos particiones independientes: una formada por las partes no sobrerayadas y otra por las partes sobrerayadas.

La definición de una sobrepartición permite que las partes no sobrerayadas se repitan, constituyendo una partición ordinaria. La función generatriz de esta componente, $A(q) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j q^j$, es:

$$A(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}$$

donde a_j es el número de particiones ordinarias de j.

Por otro lado, la condición de sobrerayado implica que las partes sobrerayadas deben ser todas distintas. La función generatriz de esta componente, $B(q) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k q^k$, es:

$$B(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^k)$$

donde b_k es el número de particiones de k en partes distintas.

El número total de sobreparticiones de n, $\bar{p}(n)$, se obtiene combinando una partición ordinaria de tamaño j (de a_j maneras) y una partición en partes distintas de tamaño k (de b_k maneras), de forma independiente, tal que sus tamaños sumen n (es decir, $j+k=n$). El número total de formas es, por tanto, la convolución de los coeficientes:

$$\bar{p}(n) = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

Esta operación de convolución es precisamente la que define el coeficiente de q^n en el producto de las series de potencias $A(q) \cdot B(q)$. Por lo tanto, la función generatriz para $\bar{p}(n)$ es el producto de las funciones generatrices de sus componentes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = A(q) \cdot B(q) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1+q^k) \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+q^k}{1-q^k}$$

□

Notablemente, esta función generadora resulta ser un cociente eta simple.

Proposición 3.4.6 (Relación de $\sum \bar{p}(n)q^n$ con $\eta(z)$)**.** *La función generadora de $\bar{p}(n)$ es igual al cociente eta $\frac{\eta(2z)}{\eta(z)^2}$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \frac{\eta(2z)}{\eta(z)^2}$$

Demostración. Manipulamos el producto infinito usando $(1+q) = (1-q^2)/(1-q)$:

$$\frac{1+q^k}{1-q^k} = \frac{(1-q^{2k})/(1-q^k)}{1-q^k} = \frac{1-q^{2k}}{(1-q^k)^2}$$

Aplicando esto a cada factor del producto:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+q^k}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-q^{2k}}{(1-q^k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})}{\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)\right)^2}$$

Ahora usamos la definición $\eta(z) = q^{1/24}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)$. El numerador es $\prod_{k=1}^{\infty}(1-(q^2)^k)$. Lo relacionamos con $\eta(2z)$: $\eta(2z) = (q^2)^{1/24}\prod(1-(q^2)^k) = q^{1/12}\prod(1-q^{2k})$. Así, $\prod(1-q^{2k}) = q^{-1/12}\eta(2z)$. El denominador es $(\prod(1-q^k))^2 = (q^{-1/24}\eta(z))^2 = q^{-1/12}\eta(z)^2$. Sustituyendo en la fracción:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+q^k}{1-q^k} = \frac{q^{-1/12}\eta(2z)}{q^{-1/12}\eta(z)^2} = \frac{\eta(2z)}{\eta(z)^2}$$

El resultado se sigue utilizando el teorema 3.4.5. □

3.4.3. Otros ejemplos

Observación 3.4.7. La función $f(z) = 1/\eta(24z)^k$ es la función generatriz para las k-particiones coloreadas, $p_k(n)$, como se describe en [Tre06a, Ejemplo 1]. Sus coeficientes están dados por

$$f(z) = \sum_{n\geq -k, n\equiv -k \pmod{24}} p_k\left(\frac{n+k}{24}\right) q^n.$$

Esta función es un cociente eta. Por el teorema 3.2.6, $f(z)$ se transforma como una forma modular de peso $-k/2$, nivel $N = 576$, y caracter $\chi = \chi_{12}^k$.

El orden en las cúspides se deduce de la observación anterior.

Observación 3.4.8. La función generatriz para las particiones en partes distintas, $D(n)$, está relacionada con el cociente eta $f(z) = \eta(48z)/\eta(24z)$, como se describe en [Tre06a, Ejemplo 3]. Específicamente,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1, n\equiv 1 \pmod{24}} D\left(\frac{n-1}{24}\right) q^n.$$

Por el teorema 3.2.6, este cociente eta se transforma como una forma modular de peso 0 y nivel $N = 1152$ con caracter trivial.

Aplicando el Teorema de Ligozat (3.3.8), podemos calcular el orden de $f(z)$ en las cúspides. En vez de verificar las cúspides una a una, como el nivel es muy alto, es conveniente usar Sage para computar las cúspides. En la siguiente tabla se puede ver el resultado:

Cúspide	Orden	Cúspide	Orden	Cúspide	Orden	Cúspide	Orden
0	-1	$\frac{5}{144}$	1	$\frac{7}{48}$	1	$\frac{7}{16}$	1
$\frac{1}{576}$	1	$\frac{1}{24}$	-1	$\frac{11}{72}$	-1	$\frac{11}{24}$	-1
$\frac{1}{384}$	1	$\frac{7}{144}$	1	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{23}{48}$	1
$\frac{1}{288}$	1	$\frac{5}{96}$	1	$\frac{3}{16}$	1	$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{192}$	1	$\frac{1}{18}$	-1	$\frac{7}{36}$	-1	$\frac{13}{24}$	-1
$\frac{1}{144}$	1	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{5}{24}$	-1	$\frac{7}{12}$	-1
$\frac{1}{128}$	1	$\frac{5}{72}$	-1	$\frac{11}{48}$	1	$\frac{5}{8}$	-1
$\frac{1}{96}$	1	$\frac{7}{96}$	1	$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{2}{3}$	-1
$\frac{5}{384}$	1	$\frac{11}{144}$	1	$\frac{13}{48}$	1	$\frac{17}{24}$	-1
$\frac{1}{72}$	-1	$\frac{1}{12}$	-1	$\frac{7}{24}$	-1	$\frac{3}{4}$	-1
$\frac{1}{64}$	1	$\frac{3}{32}$	1	$\frac{5}{16}$	1	$\frac{19}{24}$	-1
$\frac{1}{48}$	1	$\frac{7}{72}$	-1	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{5}{6}$	-1
$\frac{7}{288}$	1	$\frac{5}{48}$	1	$\frac{17}{48}$	1	$\frac{7}{8}$	-1
$\frac{5}{192}$	1	$\frac{1}{9}$	-1	$\frac{3}{8}$	-1	$\frac{11}{12}$	-1
$\frac{1}{36}$	-1	$\frac{11}{96}$	1	$\frac{19}{48}$	1	$\frac{23}{24}$	-1
$\frac{1}{32}$	1	$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{5}{12}$	-1	∞	1

Cuadro 3.1: Orden de anulación de $\frac{\eta(48z)}{\eta(24z)}$ en las cúspides de $\Gamma_0(576)$

Proposición 3.4.9 (Identidad entre cociente eta y la función theta)**.** *La función theta clásica* $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}$ *satisface la siguiente identidad en términos de la función eta de Dedekind:*

$$\theta(z) = \frac{\eta^5(2z)}{\eta^2(z)\eta^2(4z)}$$

Demostración. La demostración se basa en expandir correctamente la siguiente conocida identidad para la funcion θ:

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2.$$

□

3.4.4. Aplicaciones del teorema de Newman y de Ligozat

Lema 3.4.10. *La función* $\eta(24z)$ *pertenece a* $S_{\frac{1}{2}}(576, \chi_{12})$.

Demostración. Escribimos $\eta(24z)$ como un cociente eta en el sentido de la Definición 3.2.1:

$$\eta(24z) = \prod_{\delta|576} \eta(\delta z)^{r_\delta},$$

donde el único exponente no nulo es $r_{24} = 1$.

En primer lugar, verificamos la condición

$$\sum_{\delta} \delta\, r_\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

En nuestro caso,

$$\sum_{\delta} \delta\, r_\delta = 24 \cdot 1 = 24 \equiv 0 \pmod{24},$$

de modo que el Teorema 3.2.6 es aplicable.

El peso viene dado por

$$k = \frac{1}{2}\sum_{\delta} r_\delta = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\eta(24z)$ tiene peso $1/2$.

Para el nivel, el teorema exige que N sea el entero positivo mínimo que verifica:

- N es múltiplo de cada δ con $r_\delta \neq 0$, es decir, N es múltiplo de 24;
- como $k \notin \mathbb{Z}$, N debe ser múltiplo de 4 (lo cual ya está implícito en que $24 \mid N$);
- $\sum_\delta \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$.

En nuestro caso,

$$\sum_{\delta} \frac{N}{\delta} r_\delta = \frac{N}{24} \cdot 1 = \frac{N}{24}.$$

La condición $\frac{N}{24} \equiv 0 \pmod{24}$ equivale a

$$N \equiv 0 \pmod{24^2} = \pmod{576}.$$

El entero mínimo que cumple esto es $N = 576$. Luego, el nivel de $\eta(24z)$ es 576.

El caracter viene dado por el entero

$$m = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\delta} \delta^{r_\delta}, & \text{si } k \in \mathbb{Z}, \\ \displaystyle 2\prod_{\delta} \delta^{r_\delta}, & \text{si } k \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $k = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, estamos en el segundo caso:

$$\prod_{\delta} \delta^{r_\delta} = 24^1 = 24, \qquad m = 2 \cdot 24 = 48.$$

Por el Teorema 3.2.6, el caracter asociado es χ_{48}. Observamos que, como $48 = 4 \cdot 12$, los caracteres cuadráticos χ_{48} y χ_{12} coinciden (difieren sólo en el módulo por un cuadrado), de modo que podemos escribir simplemente χ_{12} en la notación de la tesis. Concluimos que $\eta(24z)$ es una forma modular débil de peso $1/2$, nivel 576 y caracter χ_{12}.

Para calcular el orden en las cúspides de $\eta(24z)$, aplicamos el Teorema de Ligozat (Teorema 3.3.8) con $N = 576$ y $r_{24} = 1$.

Sea $s = a/c$ una cúspide de $\Gamma_0(576)$ con $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$ y $c \mid 576$, o bien $s = \infty$ (caso $c = 0$). El Teorema 3.3.8 nos da el orden no normalizado de $f(z) = \eta(24z)$ en la cúspide s:

$$\nu_s(\eta(24z)) = \frac{576}{24\ \mathrm{mcd}(c^2, 576)} \sum_{\delta \mid 576} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta}.$$

Como sólo r_{24} es no nulo, la suma se reduce a

$$\sum_{\delta \mid 576} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta} = 1 \cdot \frac{\mathrm{mcd}(c, 24)^2}{24}.$$

(a) Cúspide en el infinito $s = \infty$. Aquí $c = 0$, y por la convención en el enunciado de Ligozat, tenemos

$$\mathrm{mcd}(c^2, 576) = 576, \qquad \mathrm{mcd}(c, 24) = 24.$$

Entonces

$$\sum_{\delta} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta} = \frac{24^2}{24} = 24,$$

y por tanto

$$\nu_\infty(\eta(24z)) = \frac{576}{24 \cdot 576} \cdot 24 = \frac{1}{24} \cdot 24 = 1.$$

Así, el orden de $\eta(24z)$ en la cúspide ∞ es $1 > 0$.

Supongamos ahora $c > 0$ con $c \mid 576$. Entonces

$$\nu_s(\eta(24z)) = \frac{576}{24\ \mathrm{mcd}(c^2, 576)} \cdot \frac{\mathrm{mcd}(c, 24)^2}{24} = \frac{24^2}{24^2} \cdot \frac{\mathrm{mcd}(c, 24)^2}{\mathrm{mcd}(c^2, 24^2)} = \frac{\mathrm{mcd}(c, 24)^2}{\mathrm{mcd}(c^2, 24^2)} = 1$$

para toda cúspide $s = a/c$ con $c > 0$.

En resumen, hemos probado que

$$\nu_s(\eta(24z)) = 1 > 0$$

para *todas* las cúspides s de $\Gamma_0(576)$ (incluida la cúspide en el infinito). En particular, $\eta(24z)$ no tiene polos en ninguna cúspide y se anula en todas ellas. Como ya sabemos por el Teorema 3.2.6 que es modular débil de peso $1/2$, nivel 576 y caracter χ_{12}, concluimos que $\eta(24z)$ es una forma cuspidal:

$$\eta(24z) \in S_{\frac{1}{2}}(576, \chi_{12}).$$

Esto prueba el lema. □

Proposición 3.4.11. *La función $f(z) = 1/\eta(24z)$ es una forma modular débil de peso $k = -1/2$, nivel $N = 576$ y carácter $\chi = \chi_{12}$. Además, $f(z)$ tiene polos simples en todas sus cúspides.*

Demostración. La propiedades de transformación (peso, nivel y carácter) se obtienen aplicando el Teorema 3.2.6 al cociente eta $f(z) = \eta(24z)^{-1}$.

Para determinar el comportamiento en las cúspides, utilizamos el Teorema de Ligozat (Teorema 3.3.8). Al calcular los órdenes de anulación en las cúspides para este cociente eta, se verifica que el orden es -1 en todas ellas (como se detalla en el Lema 3.4.10). La existencia de polos (en este caso, polos simples) en las cúspides confirma que $f(z)$ es una forma modular débil y no una forma modular holomorfa en todo el dominio extendido. □

Lema 3.4.12. *Sea la función*

$$F(z) = \frac{\eta(z)^2}{\eta(2z)}.$$

Entonces F es una forma modular de peso $1/2$ y nivel 16 con caracter trivial, es decir, $F \in M_{1/2}(16, \chi_0)$. Además, sus órdenes no normalizados en las cúspides de $\Gamma_0(16)$ son:

- $\nu_0(F) = 1$ *(en la cúspide $s = 0$).*
- $\nu_s(F) = 0$ *para toda cúspide $s \neq 0$ de $\Gamma_0(16)$.*

Demostración. Escribimos F como un cociente eta en el sentido de la Definición 3.2.1:

$$F(z) = \eta(z)^2\,\eta(2z)^{-1} = \prod_{\delta|16} \eta(\delta z)^{r_\delta},$$

donde los únicos exponentes no nulos son

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = -1.$$

En primer lugar, verificamos la condición

$$\sum_{\delta} \delta\, r_\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

En nuestro caso,

$$\sum_{\delta} \delta\, r_\delta = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0 \equiv 0 \pmod{24},$$

de modo que el Teorema de Newman (Teorema 3.2.6) es aplicable.

El peso viene dado por

$$k = \frac{1}{2} \sum_{\delta} r_\delta = \frac{1}{2}\,(2 + (-1)) = \frac{1}{2},$$

luego F tiene peso $1/2$.

Para el nivel, el Teorema 3.2.6 nos dice que debemos tomar el entero positivo N mínimo que satisface:

- N es múltiplo de cada δ con $r_\delta \neq 0$, es decir, N es múltiplo de 1 y de 2;

- como $k \notin \mathbb{Z}$, N debe ser múltiplo de 4;
- $\sum_\delta \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$.

En nuestro caso

$$\sum_\delta \frac{N}{\delta} r_\delta = \frac{N}{1} \cdot 2 + \frac{N}{2} \cdot (-1) = 2N - \frac{N}{2} = \frac{3N}{2}.$$

La condición $\frac{3N}{2} \equiv 0 \pmod{24}$ equivale a

$$3N \equiv 0 \pmod{48} \iff N \equiv 0 \pmod{16}.$$

Como además N debe ser múltiplo de 4, el mínimo N que cumple estas condiciones es $N = 16$. Por lo tanto, el nivel de F es 16.

El caracter viene dado por el entero

$$m = \begin{cases} \displaystyle\prod_\delta \delta^{r_\delta}, & \text{si } k \in \mathbb{Z}, \\ \displaystyle 2\prod_\delta \delta^{r_\delta}, & \text{si } k \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $k = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, estamos en el segundo caso. Aquí

$$\prod_\delta \delta^{r_\delta} = 1^2 \cdot 2^{-1} = 2^{-1},$$

de modo que $m = 2 \cdot 2^{-1} = 1$.

Por el Teorema 3.2.6, el caracter de F es $\chi_m = \chi_1$, que es precisamente el caracter trivial. Lo vemos como caracter módulo 16, que denotamos por χ_0. En conclusión, F es una forma modular débil de peso $1/2$, nivel 16 y caracter trivial.

Para ver que F es holomorfa en todas las cúspides y calcular sus órdenes, aplicamos el Teorema de Ligozat 3.3.8 con $N = 16$ y los exponentes $r_1 = 2$, $r_2 = -1$ ya fijados.

Sea $s = a/c$ una cúspide de $\Gamma_0(16)$ con $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$ y $c \mid 16$, o bien $s = \infty$ (caso $c = 0$). El Teorema 3.3.8 afirma que el orden no normalizado de F en s es

$$\nu_s(F) = \frac{16}{24\ \mathrm{mcd}(c^2, 16)} \sum_{\delta \mid 16} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta}.$$

Como sólo r_1 y r_2 son no nulos, la suma se reduce a

$$\sum_{\delta \mid 16} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta} = 2\frac{\mathrm{mcd}(c, 1)^2}{1} + (-1)\frac{\mathrm{mcd}(c, 2)^2}{2}.$$

(a) Cúspide en el infinito $s = \infty$. Aquí $c = 0$ y, por la convención del Teorema 3.3.8, $\mathrm{mcd}(c^2, 16) = 16$ y $\mathrm{mcd}(c, \delta) = \delta$. Entonces

$$\nu_\infty(F) = \frac{16}{24 \cdot 16} \sum_{\delta \mid 16} r_\delta \frac{\delta^2}{\delta} = \frac{1}{24} \sum_{\delta \mid 16} r_\delta \delta = \frac{1}{24} (2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2) = \frac{1}{24} (2 - 2) = 0.$$

Luego F tiene orden 0 en la cúspide ∞.

(b) Cúspide $s = 0$. La cúspide 0 se representa como $0/1$, por lo que tomamos $c = 1$. En este caso

$$\mathrm{mcd}(c^2, 16) = \mathrm{mcd}(1, 16) = 1, \qquad \mathrm{mcd}(c, 1) = 1, \qquad \mathrm{mcd}(c, 2) = 1.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\delta|16} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta} = 2\frac{1^2}{1} + (-1)\frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Y entonces

$$\nu_0(F) = \frac{16}{24 \cdot 1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{16}{24} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Así, $\nu_0(F) = 1$, como se afirma en el enunciado.

(c) Cúspides con $c \neq 0, 1$. Las demás cúspides de $\Gamma_0(16)$ pueden representarse por fracciones a/c con $c \mid 16$ y $c \neq 0, 1$. En particular, c es un divisor par de 16, es decir $c \in \{2, 4, 8, 16\}$. Para cualquier tal c se tiene

$$\mathrm{mcd}(c, 1) = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{mcd}(c, 2) = 2,$$

de modo que

$$\sum_{\delta|16} r_\delta \frac{\mathrm{mcd}(c, \delta)^2}{\delta} = 2\frac{1^2}{1} + (-1)\frac{2^2}{2} = 2 - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0.$$

Por consiguiente,

$$\nu_s(F) = \frac{16}{24\ \mathrm{mcd}(c^2, 16)} \cdot 0 = 0$$

para toda cúspide s con denominador $c \in \{2, 4, 8, 16\}$.

Resumiendo, los órdenes no normalizados de F en las cúspides de $\Gamma_0(16)$ son:

$$\nu_0(F) = 1, \qquad \nu_s(F) = 0 \text{ para toda cúspide } s \neq 0,$$

en particular son todos ≥ 0. Como ya sabemos por el Teorema 3.2.6 que F es una forma modular débil de peso $1/2$, nivel 16 y caracter trivial, el hecho de que no tenga polos en ninguna cúspide implica que F es de hecho holomorfa en todas ellas. Por lo tanto

$$F \in M_{1/2}(16),$$

y el lema queda demostrado. □

Ademas, introduciremos una forma modular cuspidal que usaremos mas adelante

Proposición 3.4.13. *La función*

$$\theta(z) = \frac{\eta^5(2z)}{\eta^2(z)\eta^2(4z)}$$

es una forma modular débil de peso $k = 1/2$ y nivel $N = 4$ con caracter trivial.

Demostración. Para aplicar el Teorema de Newman (Teorema 3.2.6), primero identificamos los parámetros del cociente eta $f(z) = \prod_\delta \eta(\delta z)^{r_\delta}$. El conjunto de pares (δ, r_δ) es:

$$X = \{(1,-2),(2,5),(4,-2)\}$$

Verificamos primero la condición preliminar de la Definición 3.2.1 sobre la suma $\sum \delta r_\delta$:

$$\sum_{(\delta,r_\delta)\in X} \delta r_\delta = 1(-2) + 2(5) + 4(-2) = -2 + 10 - 8 = 0.$$

Como $0 \equiv 0 \pmod{24}$, $f(z)$ es un cociente eta válido para aplicar el teorema. A continuación calculamos los parámetros:

1. *Peso (k):* Calculamos el peso sumando los exponentes:

$$k = \frac{1}{2}\sum_\delta r_\delta = \frac{1}{2}(-2+5-2) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}.$$

2. *Nivel (N):* Buscamos el mínimo N que satisfaga las tres condiciones del teorema:

   - N debe ser múltiplo de cada $\delta \in \{1,2,4\}$. Por lo tanto, $4 \mid N$.
   - Como $k = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, N debe ser múltiplo de 4. Esto es consistente con la condición anterior.
   - Verificamos la condición de congruencia para el candidato mínimo $N = 4$:

$$\sum_\delta \frac{N}{\delta} r_\delta = \frac{4}{1}(-2) + \frac{4}{2}(5) + \frac{4}{4}(-2)$$

$$= 4(-2) + 2(5) + 1(-2) = -8 + 10 - 2 = 0.$$

   Dado que $0 \equiv 0 \pmod{24}$, el nivel es $N = 4$.

3. *Caracter (χ_m):* Dado que $k \notin \mathbb{Z}$, calculamos m como:

$$m = 2\prod_\delta \delta^{r_\delta} = 2 \cdot (1)^{-2} \cdot (2)^5 \cdot (4)^{-2} = 2 \cdot 1 \cdot 32 \cdot \frac{1}{16} = \frac{64}{16} = 4.$$

   Por lo tanto, el caracter es χ_4 el cual es igual al trivial.

Concluimos que $\theta(z)$ es una forma modular débil de peso $1/2$, nivel 4 y caracter trivial. □

3.5. Congruencias para cocientes eta

Esta sección está dedicada al estudio de ciertas propiedades de congruencia de los cocientes eta. Un fenómeno interesante en esta área es que algunos cocientes eta, que a priori sólo son formas modulares débiles (es decir, no necesariamente

holomorfas en todas las cúspides), pueden ser congruentes módulo un primo m a formas modulares (holomorfas en todas las cúspides).

Demostraremos que, en el caso de cocientes eta, el Teorema 3.1 de [Tre06a] sigue siendo válido con un peso del orden de $\frac{m}{2}$ y un nivel constante, independiente del primo m. Aplicaremos este resultado para mejorar el Teorema 8 de [Ono00] y así obtener que la función generadora de particiones es congruente módulo m a una forma de peso $\frac{m-2}{2}$ y nivel 576. Asimismo, refinaremos la Proposición 4.6 de [RSVMZ24] para la función generadora de sobreparticiones. Por último, combinando el Teorema 2.3.7 de la sección anterior con las mejoras obtenidas en esta sección, veremos cómo estos resultados se traducen en congruencias aritméticas para estas funciones.

Para las demostraciones que siguen, recordamos las siguientes propiedades fundamentales de los operadores de Hecke (T_m) y Atkin-Lehner (W_N) cuando actúan sobre formas modulares f de peso k y nivel $\Gamma_0(N)$ (o $\Gamma_1(N)$), asumiendo que m es un número primo tal que $\text{mcd}(m, N) = 1$:

Recordatorio 3.5.1 (Propiedades de los operadores)**.** A continuación, recordamos tres propiedades fundamentales sobre la interacción de los operadores de Hecke y la involución de Fricke que serán utilizadas recurrentemente.

(a) *Orden en 0 y ∞ bajo W_N:* El orden no normalizado en la cúspide 0 se relaciona con el orden no normalizado en ∞ de la forma transformada por la involución de Fricke W_N:

$$\nu_0(f) = \nu_\infty(f|W_N)$$

(Ver Proposición 1.5.7).

(b) *Preservación de anulación en ∞ por T_m:* El operador de Hecke T_m preserva la propiedad de anularse en la cúspide ∞. Específicamente:

$$\nu_\infty(f) \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \nu_\infty(f|T_m) \geq 1$$

(ver Proposición 1.3.7).

(c) *Conmutatividad de T_m y W_N:* Para $\text{mcd}(m, N) = 1$, los operadores T_m y la involución de Fricke W_N conmutan:

$$f|T_m|W_N = f|W_N|T_m$$

(Ver Proposición 1.5.6).

Ademas, recordamos propiedades de las series de potencias y de los operadores U_m y V_m

(a) *Congruencia entre T_p y U_p*

Sea p un primo tal que p no divide a n. Para formas modulares con coeficientes enteros, se tiene que

$$f|T_p \equiv f|U_p \pmod{p\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

(Ver Proposición 1.6.6).

(b) *Identidad para series de potencias*

Para f una serie de potencias y m un entero, se tiene

$$((f|V_m)\cdot g)\,|U_m = f\cdot(g|U_m)$$

(Ver Lema 1.6.7).

Si bien el siguiente lema podría enunciarse inmediatamente después de la definición de cociente eta, lo presentamos en este punto ya que su aplicación es esencial para la demostración del teorema siguiente.

Lema 3.5.2 (Congruencia para V_m (cf. [RSVMZ24, Lemma 4.3])). *Sea $f(z) = \prod_{\delta|N}\eta(\delta z)^{r_\delta}$ un cociente eta tal que su q-expansión pertenece a $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ (lo cual se cumple si $\sum \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$). Sea m un número primo. Entonces se cumple la siguiente congruencia coeficiente a coeficiente módulo m:*

$$f|V(m) \equiv f^m \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

Es decir, $f(mz)\equiv f(z)^m \pmod m$.

Demostración. La prueba se basa en la propiedad multiplicativa de ambos lados de la congruencia y una congruencia fundamental para series de potencias módulo un primo m.

1. Reducción a factores: El operador V_m es multiplicativo: si $f = g\cdot h$, entonces $f|V(m) = f(mz) = g(mz)h(mz) = (g|V(m))(h|V(m))$. La operación $f\mapsto f^m \pmod m$ también es multiplicativa: $(gh)^m = g^m h^m$. Por lo tanto, si podemos probar que $g|V(m)\equiv g^m \pmod m$ para los factores básicos de un cociente eta, la propiedad se extenderá al producto completo.

2. Factores de un cociente eta: Un cociente eta $f(z)$ es de la forma:

$$f(z) = C\cdot q^A\cdot\prod_{\delta,j}(1-q^{\delta j})^{r'_{\delta,j}}$$

donde C es una constante (usualmente 1), $A = \frac{1}{24}\sum\delta r_\delta$ (que asumimos entero), y el producto infinito $P(q) = \prod(1-q^{\delta j})^{r'_{\delta,j}}$ es una serie en $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ con término constante 1. (Los exponentes $r'_{\delta,j}$ provienen de los r_δ). Necesitamos verificar la congruencia para $g(z) = q^A$ y para $h(z) = 1-q^N$ (donde $N=\delta j$).

3. Factor $g(z) = q^A$: $g|V(m) = (q^A)|V(m) = (q^m)^A = q^{mA}$. $g^m = (q^A)^m = q^{mA}$. Claramente, $g|V(m) = g^m$, por lo que la congruencia $g|V(m)\equiv g^m \pmod m$ se cumple trivialmente.

4. Factor $h(z) = 1-q^N$: Sea $h(q) = 1-q^N$. Queremos probar $h|V(m)\equiv h^m \pmod m$. $h|V(m)$ significa reemplazar q por q^m, así $h|V(m) = 1-q^{mN}$. $h^m = (1-q^N)^m$. Necesitamos probar que $1-q^{mN}\equiv(1-q^N)^m \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$. Usamos el hecho $(X+Y)^m\equiv X^m+Y^m \pmod m$. Aplicamos esto con $X=1$ e $Y=-q^N$:

$$(1+(-q^N))^m \equiv 1^m + (-q^N)^m \pmod m$$

$$(1-q^N)^m \equiv 1+(-1)^m(q^N)^m \pmod m$$

$$(1-q^N)^m \equiv 1+(-1)^m q^{mN} \pmod{m}$$

Ahora consideramos dos casos para el primo m: * Si $m=2$: $(-1)^m=(-1)^2=1$. La congruencia es $(1-q^N)^2 \equiv 1+q^{2N} \pmod 2$. Esto es cierto, ya que $(1-q^N)^2 = 1-2q^N+q^{2N} \equiv 1+q^{2N} \pmod 2$. Y $1-q^{2N} \equiv 1+q^{2N} \pmod 2$. * Si m es un primo impar: $(-1)^m=-1$. La congruencia es $(1-q^N)^m \equiv 1-q^{mN} \pmod m$. En ambos casos, $(1-q^N)^m \equiv 1-q^{mN} \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$, que es lo que necesitábamos probar para el factor $h(z)$.

5. Conclusión: Como la congruencia $g|V(m) \equiv g^m \pmod m$ se cumple para el factor q^A y para cada factor de la forma $(1-q^N)$, y como ambas operaciones (V_m y $(\cdot)^m \pmod m$) son multiplicativas, la congruencia se cumple para el producto completo que define al cociente eta $f(z)$:

$$f|V(m) \equiv f^m \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

□

Lema 3.5.3 (División de formas modulares)**.** *Sean $f \in M_n(N,\chi_f)$ y $g \in M_k(N,\chi_g)$ dos formas modulares para $\Gamma_0(N)$ con pesos n,k (enteros o semienteros) y caracteres χ_f,χ_g respectivamente. Supongamos que:*

- *$g(z)$ no se anula en el semiplano superior $\mathbb{H}$*
- *El orden no normalizado de f es mayor o igual que el de g en todas las cúspides s de $\Gamma_0(N)$.*

Entonces, el cociente $h(z)=f(z)/g(z)$ es una forma modular de peso $n-k$ y caracter $\chi_f\overline{\chi_g}$ para $\Gamma_0(N)$.

Demostración. Definimos $h(z)=f(z)/g(z)$. Debemos verificar las condiciones para que h sea una forma modular del tipo indicado.

1. *Holomorfía en $\mathbb{H}$:* Como f y g son holomorfas en $\mathbb{H}$ por ser formas modulares, y por hipótesis $g(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{H}$, el cociente $h(z)=f(z)/g(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{H}$.

2. *Transformación modular:* Sea $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$. Sabemos que $f(\gamma z)=\chi_f(d)j_n(\gamma,z)f(z)$ y $g(\gamma z)=\chi_g(d)j_k(\gamma,z)g(z)$, donde $j_w(\gamma,z)$ es el factor de automorfía para el peso w. Calculamos:

$$h(\gamma z)=\frac{f(\gamma z)}{g(\gamma z)}=\frac{\chi_f(d)j_n(\gamma,z)f(z)}{\chi_g(d)j_k(\gamma,z)g(z)}=\frac{\chi_f(d)}{\chi_g(d)}\frac{j_n(\gamma,z)}{j_k(\gamma,z)}\frac{f(z)}{g(z)}$$

$$=(\chi_f\overline{\chi_g})(d)\frac{j_n(\gamma,z)}{j_k(\gamma,z)}h(z)$$

   Se puede verificar que el cociente de los factores de automorfía es el factor de automorfía para el peso diferencia: $\frac{j_n(\gamma,z)}{j_k(\gamma,z)}=j_{n-k}(\gamma,z)$. (Si $n,k\in\mathbb{Z}$, esto es $(cz+d)^n/(cz+d)^k=(cz+d)^{n-k}$. Si $n,k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, los factores $\left(\frac{c}{d}\right)\epsilon_d^{-1}$ se cancelan y queda $(cz+d)^n/(cz+d)^k=(cz+d)^{n-k}$). Por lo tanto, $h(\gamma z)=(\chi_f\overline{\chi_g})(d)j_{n-k}(\gamma,z)h(z)$, cumpliendo la ley de transformación para peso $n-k$ y caracter $\chi_f\overline{\chi_g}$.

3. *Holomorfía en cúspides:* Consideremos una cúspide s. Al transformar f y g a la cúspide s (mapeándola a ∞), sus expansiones locales son de la forma $f(z') \approx C_f q_s^{\nu_s(f)}$ y $g(z') \approx C_g q_s^{\nu_s(g)}$, donde q_s es el parámetro local. El cociente $h(z') = f(z')/g(z')$ tendrá una expansión local que comienza con $q_s^{\nu_s(f)-\nu_s(g)}$. Por hipótesis, $\nu_s(f) \geq \nu_s(g)$, por lo que $\nu_s(f) - \nu_s(g) \geq 0$. Esto significa que la expansión de h en la cúspide s no tiene potencias negativas de q_s, por lo que h es holomorfa en s. Esto vale para todas las cúspides.

Al cumplir las tres condiciones, concluimos que $h \in M_{n-k}(N, \chi_f\overline{\chi_g})$. □

A continuación, presentamos el resultado central de este capítulo. Este teorema establece que, al restringirnos a la familia de los cocientes eta, es posible obtener una forma modular congruente con parámetros considerablemente más eficientes que los garantizados por la teoría general para formas débiles ([Tre06a, Teorema 3.1]). En concreto, demostramos que la acción del operador U_m produce una forma holomorfa cuyo nivel se estabiliza y cuyo peso crece únicamente de manera lineal respecto al primo m.

Teorema 3.5.4 (Congruencia de cocientes eta)**.** *Sea f un cociente eta de nivel d, peso k y caracter χ. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ y para todo $m > m_0$ primo, $g_m \in \mathcal{M}_{\frac{m-1}{2}+k}(N, \chi\chi_{12}^{m-1})$ con $N = mcm(d, 576)$ tal que*

$$f|U_m \equiv g_m \ (mod\ m\mathbb{Z}[\![q]\!]) \ .$$

Demostración. Sea

$$\beta(z) = f(z)\eta(24z)^m$$

Es claro que β es una forma modular débil de peso $\frac{m}{2}+k$, nivel $N = mcm(d, 576)$ y caracter $\chi\chi_{12}^m$, ya que es producto de ellas, y mas aun, tomando m_0 igual al mínimo $(\nu_s(f))$ sobre todas las cúspides s, tenemos que β es una forma modular cuspidal $\forall m > m_0$. Esto se debe a que $\nu_s(f \cdot \eta(24z)^m) = \nu_s(f) + m\nu_s(\eta(24z) = \nu_s(f) + m > \nu_s(f) + m_0 \geq 0$.

Como el operador de Hecke preserva formas cuspidales, tenemos que $\beta|T_m$ es una forma cuspidal. Luego, por el Lema 3.5.3, la forma $g_m = \frac{\beta|T_m}{\eta(24z)}$ es modular con $g_m \in M_{\frac{m-1}{2}+k}(N, \chi\chi_{12}^{m-1})$.

Por el Lema 3.5.2 para el operador V_m tenemos que

$$\eta(24z)^m \equiv \eta(24z)|V_m \quad (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!])$$

y utilizando identidades de los operadores U_m y V_m (ver Lema 1.6.7) deducimos que

$$\beta|U_m \equiv (f \cdot (\eta(24z)|V_m))|U_m \equiv f|U_m \cdot \eta(24z) \quad (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!]).$$

Sabemos ademas que $\beta|T_m \equiv \beta|U_m \ (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!])$ (ver Proposición 1.6.6), luego

$$g_m \cdot \eta(24z) \equiv \beta|T_m \equiv \beta|U_m \equiv f|U_m \cdot \eta(24z) \quad (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!])$$

De lo que se deduce que $g_m \equiv f|U_m \ (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!])$ como se quería ver.

□

Corolario 3.5.5 (Congruencia para $\frac{1}{\eta(24z)}$)**.** *Sea $f(z) = 1/\eta(24z)$. Para todo primo m, se tiene*

$$f|U_m \equiv g_m \ (mod\ m\mathbb{Z}[\![q]\!])$$

con $g_m \in \mathcal{M}_{\frac{m-2}{2}}(576, \chi_{12}^{m-2})$.

Demostración. La demostración es una aplicación directa del Teorema 3.5.4 y del Lema 3.4.10. □

Observación 3.5.6. El Teorema 3.5.4 representa una mejora significativa sobre resultados previos para establecer congruencias para los coeficientes de cocientes eta.

En el caso general de una forma débilmente holomorfa, el Teorema 3.1 de Treneer en [Tre06a] construye una forma cuspidal congruente, pero de un peso considerablemente mayor (del orden de m^β para un β grande) y un nivel que depende del primo m (de la forma Np^2). Al especializarse sobre cocientes eta, nuestro teorema produce una forma congruente cuyo peso es meramente lineal en m y cuyo nivel N es una constante fija.

En el caso particular e importante de la función de partición ($f(z) = 1/\eta(24z)$), el teorema 8 de Ono en [Ono00] proporciona una forma modular congruente de peso cuadrático en m (específicamente, $\frac{m^2-m-1}{2}$) y nivel $576m$. Nuevamente, nuestro resultado reduce el peso a un orden lineal y mantiene el nivel fijo en 576.

Estas mejoras son sustanciales, ya que un peso y nivel menores facilitan enormemente los cálculos computacionales necesarios para encontrar congruencias explícitas, por ejemplo, mediante el uso de la cota de Sturm.

El motivo por el que se multiplica por $\eta(24z)$ en la demostración anterior es porque f podría tener órdenes negativos en cualquiera de las cúspides. Cuando especializamos a ciertos cocientes etas cuyos órdenes en las cúspides estén más controlados, podemos multiplicar por una forma cuyo nivel sea aún más bajo para conseguir una forma modular. Esto se puede ver en el siguiente resultado para f la forma asociada a sobreparticiones.

Teorema 3.5.7 (Congruencias para $\frac{\eta(2z)}{\eta(z)^2}$)**.** *Sea $f = \frac{\eta(2z)}{\eta(z)^2}$. Para todo primo m impar, existe $g_m \in \mathcal{M}_{\frac{m-2}{2}}(16)$ tal que*

$$f|U_m \equiv g_m \quad (\text{mód } m\mathbb{Z}[\![q]\!])$$

Demostración. Sea $\beta = fF^m = F^{m-1}$ con $F = \frac{1}{f}$. Por el Lema 3.4.12 se tiene que $F \in \mathcal{M}_{\frac{1}{2}}(16)$ por lo que β es una forma modular para todo $m > 1$. Como el operador de Hecke manda formas modulares en formas modulares, $\beta|T_m$ es también una forma modular y, en particular, vale lo siguiente: (ver (a) y (c) del Recordatorio 3.5.1)

$$\nu_0(\beta|T_m) = \nu_\infty(\beta|T_m|W_{16})$$

y, como $16 \perp m$, los operadores conmutan

$$\nu_\infty(\beta|T_m|W_{16}) = \nu_\infty(\beta|W_{16}|T_m)$$

pero $\nu_\infty(g) \geq 1$ sii $\nu_\infty(g|T_m) \geq 1$ (ver (b) de la Observación 3.5.1) pero

$$\nu_\infty(\beta|W_{16}) = \nu_0(\beta)$$

y $\nu_0(\beta) \geq 1$ ya que $\nu_0(F) = 1$ (ver Lema 3.4.12), por lo que $\nu_0(\beta|T_m) \geq 1$. Ahora, por el Lema 3.5.3 (Con la notación del lema, $\beta|T_m = f$ y $F = g$) existe $g_m \in \mathcal{M}_{\frac{m-2}{2}}(16)$ tal que

$$\beta|T_m = g_m F.$$

Utilizando las mismas identidades del Teorema 3.5.4:

$$\beta|U_m \equiv (f \cdot (F|V_m))|U_m \equiv f|U_m \cdot F \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

y, como $\beta|U_m \equiv \beta|T_m \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$

$$g_m F \equiv f|U_m F \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

de lo que se deduce

$$f|U_m \equiv g_m \pmod{m\mathbb{Z}[\![q]\!]}$$

como se quería ver. □

Como corolario de los anteriores resultados, recuperaremos resultados ya conocidos en la literatura sobre congruencias para cocientes eta.

Teorema 3.5.8 (Congruencias para los coeficientes de cocientes eta)**.** *Sea $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q^n$ un cociente eta de peso semientero $k/2$ y nivel d. Para cualquier primo m suficientemente grande, para una proporción positiva de los primos p que satisfacen la congruencia $p \equiv -1 \pmod{Nm}$ (donde $N = mcm(d, 576)$) tiene la propiedad de que los coeficientes de Fourier de f satisfacen:*

$$a_{mp^3n} \equiv 0 \pmod{m}$$

para todo entero n coprimo con p.

Demostración. Por el Teorema 3.5.4, para un primo m suficientemente grande, la serie $h(z) = f|U_m = \sum a_{mj} q^j$ es congruente módulo m a una forma modular holomorfa $g_m(z) \in \mathcal{M}_{\frac{m-1}{2}+k}(N)$, con $N = \text{mcm}(d, 576)$.

El peso de g_m es semientero y mayor o igual que $\frac{3}{2}$, por lo que podemos aplicar el Corolario 2.3.7 a g_m. Debido a que, $h(z) \equiv g_m(z) \pmod{m}$, la congruencia se traslada a los coeficientes de $h(z)$, denotados $b_j = a_{mj}$, por lo que el corolario nos asegura que para una proporción positiva de los números primos p que satisface $p \equiv -1 \pmod{Nm}$, tenemos

$$b_{p^3n} \equiv 0 \pmod{m}$$

para todo n coprimo con p. Finalmente, sustituyendo la definición de b_j, obtenemos la congruencia deseada para los coeficientes de $f(z)$:

$$a_{mp^3n} \equiv 0 \pmod{m}$$

□

Corolario 3.5.9 (Congruencias para la función de particiones)**.** *Sea $p(k)$ la función de partición. Para cualquier primo m, una proporción positiva de los números primos p que satisfacen $p \equiv -1 \pmod{576m}$ tiene la siguiente propiedad: Para todo entero n que sea coprimo con p y satisfaga la congruencia $mn \equiv 1 \pmod{24}$, se cumple que*

$$p\left(\frac{mp^3n+1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Demostración. Se aplica el Teorema 3.5.8 a la forma modular $f(z) = 1/\eta(24z)$, cuyos coeficientes de Fourier c_j están relacionados con la función de partición por la Proposición 3.4.3, a saber, $c_j = p((j+1)/24)$ para $j \equiv -1 \pmod{24}$. El Teorema 3.5.8 asegura que $c_{mp^3n} \equiv 0 \pmod{m}$ bajo las condiciones dadas. Para que el coeficiente no sea trivialmente cero, el índice $j = mp^3n$ debe ser congruente a $-1 \pmod{24}$. Como $p \equiv -1 \pmod{24}$, esto impone la condición $mn \equiv 1 \pmod{24}$. Al sustituir $j = mp^3n$ en la relación con la función de partición, se obtiene la congruencia enunciada. □

Corolario 3.5.10 (Congruencias para la función de sobreparticiones)**.** *Sea $\overline{p}(n)$ la función de sobrepartición. Para cualquier primo impar m, para una proporción positiva de los números primos p que satisfacen la congruencia $p \equiv -1 \pmod{16m}$ tiene la propiedad de que:*

$$\overline{p}(mp^3n) \equiv 0 \pmod{m}$$

para todo entero n coprimo con p.

Demostración. Este resultado es una aplicación directa del Teorema 3.5.8. La función generadora de las sobreparticiones es el cociente eta $f(z) = \sum \overline{p}(n)q^n = \eta(2z)/\eta(z)^2$, como se establece en la Proposición 3.4.6. Los coeficientes de Fourier de esta forma son directamente $\overline{p}(n)$.

El Teorema 3.5.7 especifica que para esta función, el nivel efectivo N para la forma congruente módulo m es 16. Aplicando el Teorema 3.5.8 con $N = 16$, la congruencia para los primos es $p \equiv -1 \pmod{16 \cdot m}$. El teorema concluye que los coeficientes de $f(z)$ satisfacen $a_{mp^3n} \equiv 0 \pmod{m}$, lo que se traduce directamente en la congruencia para $\overline{p}(n)$ enunciada. □

Bibliografía

[Ahl00] Scott Ahlgren, *Distribution of the partition function modulo composite integers M*, Mathematische Annalen **318** (2000), no. 4, 795–803.

[AL70] A. O. L. Atkin and J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Mathematische Annalen **185** (1970), no. 2, 134–160.

[AO01] Scott Ahlgren and Ken Ono, *Congruence properties for the partition function*, Proceedings of the National Academy of Sciences **98** (2001), no. 23, 12882–12884.

[Apo90] Tom M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 41, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Cip83] Barry A. Cipra, *On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms*, Nagoya Mathematical Journal **91** (1983), 49–117.

[DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman, *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005.

[EI89] Paul Erdős and Aleksandar Ivić, *The distribution of certain arithmetical functions at consecutive integers*, Number Theory, Vol. I (Budapest, 1987) (Amsterdam), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 51, North-Holland, 1989, pp. 45–91.

[Lig75] G. Ligozat, *Courbes modulaires de genre 1*, Mémoires de la Société Mathématique de France **43** (1975), 1–80, Disponible en NUMDAM.

[New57] Morris Newman, *Construction and application of a class of modular functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-7** (1957), no. 1, 334–350.

[New59] Morris Newman, *Construction and application of a certain class of modular functions ii*, Proceedings of the London Mathematical Society **9** (1959), 373–387.

[New60] Morris Newman, *Periodicity modulo m and divisibility properties of the partition function*, Transactions of the American Mathematical Society **97** (1960), no. 2, 225–236.

[Ono00] Ken Ono, *Distribution of the partition function modulo m*, Annals of Mathematics **151** (2000), no. 1, 293–307.

[Ram19] Srinivasa Ramanujan, *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **19** (1919), 207–210.

[RSVMZ24] Nathan C. Ryan, Nicolás Sirolli, Jean Carlos Villegas-Morales, and Qi-Yang Zheng, *Explicit families of congruences for the overpartition function*, The Ramanujan Journal (2024).

[Ser75] Jean-Pierre Serre, *Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres **16** (1975), no. 1, 1–28, Exposé no. 20.

[Shi58] Goro Shimura, *Correspondance modulaire et les fonctions ζ de courbes algébriques*, Journal of the Mathematical Society of Japan **10** (1958), 1–28.

[Shi73] ———, *On modular forms of half integral weight*, Annals of Mathematics **97** (1973), no. 3, 440–481.

[Stu87] Jacob Sturm, *On the congruence of modular forms*, Number Theory (New York, 1984–1985), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1240, Springer, Berlin, 1987, pp. 275–280.

[Tan57] Yutaka Taniyama, *Problem 13*, Sūgaku **9** (1957), 296–297.

[Tre06a] Stephanie Treneer, *Congruences for the coefficients of weakly holomorphic modular forms*, Proceedings of the London Mathematical Society **93** (2006), no. 2, 304–324.

[Tre06b] Stephanie Treneer, *Congruences for the coefficients of weakly holomorphic modular forms*, Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2006, ProQuest LLC UMI No. 3223718.

[Wea01] Rhiannon L. Weaver, *New congruences for the partition function*, The Ramanujan Journal **5** (2001), no. 1, 53–63.

[Wil95] Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and fermat's last theorem*, Annals of Mathematics **141** (1995), no. 3, 443–551.