



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de control óptimo aplicada al modelo de
Lotka-Volterra

Nelson Alejandro Poma Guzmán

Dirección: Dra. Constanza Sánchez de la Vega

Fecha de Presentación: 18 de Junio de 2026

Agradecimientos

A Constanza por aceptar dirigir esta tesis. Por su infinita paciencia, acompañamiento y confianza en estos años.

A Pablo Amster y Nicolas Saintier por aceptar ser jurados y por las observaciones sobre la tesis.

A mi familia por apoyar mi formación.

A los amigos y amigas que conocí y con quienes pude compartir mi recorrido por la facultad.

A la universidad pública por brindar educación gratuita y de calidad.

A los docentes que tuve a lo largo de la carrera.

Al CBC, los espacios de divulgación, y todas las experiencias que me permitieron ver la matemática más allá de mi formación académica.

Índice general

1. Modelos Poblacionales	7
1.1. Modelado de sistemas ecológicos	7
1.2. Modelos de interacción	8
1.3. Métodos de control en ecología	10
2. Preliminares	13
2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias	13
2.1.1. Estudio geométrico de las soluciones	16
2.2. Teoría de control óptimo	21
2.2.1. Introducción	21
2.2.2. Formulación del problema de optimización	21
2.2.3. Controlabilidad	24
2.2.4. Existencia de control óptimo	25
2.2.5. Caracterización de las soluciones	29
2.2.6. Arco singular y condición de Legendre-Clebsch	34
3. Control sobre Sistema Predador-Presa	37
3.1. Modelo Lotka-Volterra sin control	37
3.2. Modelo de control sobre las presas	40
3.3. Modelo de control sobre los predadores	51
3.4. Modelo de control sobre las presas y predadores	61
3.5. Resultados numéricos	66
3.5.1. Control sobre las presas	66
3.5.2. Control sobre los predadores	68
4. Métodos Numéricos	69
4.1. Algoritmo Forward Backward Sweep Method	69
5. Apéndice	73

Introducción

A lo largo de la historia, la matemática se ha nutrido de diversas áreas de investigación de otras ramas científicas. Muchos problemas sirvieron como motivación para el desarrollo de herramientas teóricas más sofisticadas que se adecuaron para la resolución de problemas provenientes de la física, biología e ingeniería entre otras. Del mismo modo, los avances en el cálculo de variaciones, los sistemas dinámicos y la optimización matemática tuvieron numerosas aplicaciones en la intervención y regulación de sistemas reales, ya sea mediante mecanismos ingenieriles como en la gestión de recursos.

En la intersección de ambos caminos se encuentra la teoría de control óptimo donde los aportes de L. Pontryagin, R. Bellman y R. Kalman a mediados del siglo XX sentaron las bases de la teoría moderna en el área alcanzando numerosos avances en los años posteriores. Las aplicaciones de la teoría de control varían desde el diseño de sistemas mecánicos, modelos epidemiológicos hasta el control biomédico entre otras. Un caso particular de interés debido a su impacto sanitario, ambiental y económico es el control de plagas, donde se buscan métodos de intervención sobre el crecimiento poblacional de una determinada especie con el fin de reducir sus efectos negativos.

Por otra parte el estudio de la dinámica de poblaciones representa un área de gran interés dentro de la ecología. En este contexto, la descripción de las relaciones entre especies, así como su evolución a lo largo del tiempo motivaron el desarrollo de múltiples modelos matemáticos siendo uno de los más conocidos el modelo de predadores-presas introducido por A. Lotka y V. Volterra.

El presente trabajo abordará el problema de control óptimo aplicado a un sistema dinámico de tipo Lotka-Volterra. Consideraremos el modelo estudiado por S. B. Goh en [10] donde se analiza el problema de minimización en el uso de un pesticida ideal para el control de plagas y se busca alcanzar el estado de equilibrio del sistema a tiempo final. A su vez se considera el tiempo final como otra variable de optimización sin restricciones y el control restringido a un intervalo acotado.

El objetivo de esta tesis es desarrollar de forma detallada los distintos aspectos teóricos asociados al problema propuesto en [10], donde se presenta una aproximación numérica de la solución y su caracterización analítica. En particular, estudiaremos el problema de controlabilidad, la existencia de controles óptimos, la caracterización de las soluciones mediante el Principio del Máximo de Pontryagin y su resolución numérica a través de métodos indirectos.

La tesis se organiza en 4 capítulos: en el capítulo 1, vamos a desarrollar el proceso de modelización de sistemas poblaciones con relaciones interespecíficas y concluir en los sistemas de tipo Lotka-Volterra. Incluimos una sección introductoria sobre los métodos de control en ecología.

El capítulo 2 se divide en dos secciones, la primer sección donde expondremos los preliminares en la teoría de ecuaciones diferenciales y curvas de nivel en el plano que utilizaremos para abordar el problema de controlabilidad; y una segunda donde expondremos el marco teórico sobre teoría de control óptimo. En particular demostraremos las condiciones de primer orden para la optimalidad de la solución cuando el problema cumple condiciones de regularidad y probaremos un resultado que garantiza la existencia de soluciones para el caso de estudio.

En el capítulo 3 utilizaremos las herramientas introducidas en los preliminares para resolver el problema de controlabilidad, existencia de control óptimo y caracterización de la solución para los casos donde se aplique el control sobre la población de presas y la población de predadores de forma independiente. Mostraremos como se adapta el análisis para el caso donde se aplica el control sobre ambas poblaciones en simultáneo y estudiaremos la aparición de controles singulares mediante la condición de Legendre-Clebsch. Por último dedicamos una sección para exponer los resultados numéricos obtenidos.

En el capítulo 4 resumimos el método numérico utilizado y la adaptación requerida para nuestro caso particular.

Capítulo 1

Modelos Poblacionales

1.1. Modelado de sistemas ecológicos

Una de las áreas de interés dentro de la ecología es el estudio de poblaciones y las relaciones que surgen entre organismos de una misma especie como entre varias especies que comparten una misma comunidad. Se busca explicar el crecimiento, fluctuaciones y oscilaciones en su cantidad[22].

Vamos a definir una población como un conjunto de individuos de la misma especie que ocupan un área determinada en un periodo de tiempo específico. Los individuos de la población comparten ciertas características que los hacen ecológicamente equivalentes: presentar un ciclo de vida similar, involucrarse en los mismo procesos y mantener tasas equivalentes cuando comparten el mismo estadio. Al estudiar las características y los procesos a nivel poblacional surgen propiedades emergentes derivadas de las características individuales. Para analizar estas componentes no solo se considera el comportamiento propio de los individuos sino también como se relacionan con su medio ambiente.

Los factores externos que influyen sobre los organismos pueden ser de tipo abiótico (factores físicos o químicos) o bióticos(relación con otros organismos). Estas características, tanto su estructura como su dinámica, conforman el complejo sistema ecológico que describe el comportamiento de la población.

Los agentes y relaciones interactuantes se pueden formalizar desde un punto mas abstracto a través del concepto de sistema. Siguiendo el enfoque dado en [14], vamos a entender un sistema como un conjunto de elementos con conexiones de información dentro de los límites de un entorno determinado. Estas interacciones representan las relaciones entre los distintos componentes como así también con los agentes externos al modelo. Esta representación a través de elementos y conexiones permite trabajar con las propiedades estructurales y dinámicas del sistema.

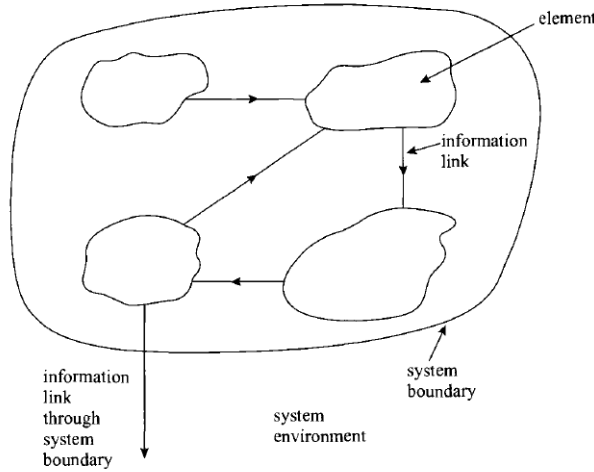


Figura 1.1: Modelo conceptual de elementos, relaciones y frontera [14].

El modelado y análisis de los sistemas ecológicos presenta dificultades propias dadas por la complejidad de las relaciones y elementos involucrados. Asimismo, las interacciones no se rigen por leyes rigurosas como en la física, aunque a lo largo de los años se buscó formalizar de modo tal que puedan plantearse principios que permitan describir la *mecánica* del sistema [15, 23]. En lo que respecta al modelado temporal del sistema, la simplificación a *agentes* que evolucionan respetando ecuaciones de un sistema dinámico nos permitirá determinar el estado del sistema a partir de condiciones iniciales.

Para los crecimientos poblacionales se puede expresar un modelo simplificado mediante ecuaciones diferenciales que representen la variación en función de la población y su tasa de crecimiento per cápita en cada instante de un intervalo determinado. Esto se puede plantear mediante la igualdad

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t) \cdot r(x(t)), \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es la población a tiempo t y $r(x)$ es la tasa de crecimiento per cápita.

Existen numerosos modelos que consideran las particularidades de los distintos sistemas ecológicos. Entre los más conocidos, debido a su generalidad y amplio estudio, están los modelos de crecimiento geométrico y logístico desarrollados por Thomas Malthus y Pierre Verhulst respectivamente. Un estudio detallado sobre la construcción de modelos matemáticos en ecología y sus consideraciones se puede ver en [11].

1.2. Modelos de interacción

En el estudio de poblaciones que conforman una comunidad se debe tener en cuenta las distintas interacciones que se establecen entre las especies. Estas relaciones

se puede abordar usando modelos discretos que representen las redes de conexión como también mediante modelos continuos que expresen el comportamiento de cada especie en función de las otras. En [12] se puede ver un análisis comparativo de las distintas formas de representar analíticamente la incidencia entre poblaciones que se relacionan entre sí.

Para simplificar el modelo vamos a considerar las relaciones entre especies dadas de a pares. En este caso podemos considerar el efecto de la interacción sobre cada una de las especies como favorables (+), desfavorables (-) o neutras (0). Esto da origen a 6 tipos de relaciones interespecíficas[18, 24]:

- Tipo $+/+$ (Mutualismo): Son aquellas relaciones que representan en un beneficio para ambas especies. Entre ellas están las relaciones de simbiosis (obligatorias o esenciales) y la protocooperación.
- Tipo $+/-$ (Antagonismo): Son las relaciones que resultan en el beneficio de una y el perjuicio sobre la otra. Ejemplos de estas son la predación y el parasitismo.
- Tipo $+/0$ (Comensalismo): Son las relaciones donde una de las especies es beneficiada mientras que la otra es neutral. Entre otras se encuentran la epibiosis y el inquilinismo.
- Tipo $-/-$ (Competencia): Son aquellas relaciones donde ambas especies reducen su aptitud biológica de forma directa, ya sea por confrontación (interferencia), o de forma indirecta, por la explotación de un mismo recurso.
- Tipo $-/0$ (Amensalismo): Son aquellas relaciones donde una se ve perjudicada mientras que la otra resulta neutral. Ejemplos de este tipo son la antibiosis y la aleopatía.
- Tipo $0/0$ (Neutralismo): Son aquellas relaciones donde ninguna de las especies se ve favorecida ni perjudicada. Esta categoría se considera de forma conceptual aunque en la práctica es difícil probar que no exista efectos entre las especies.

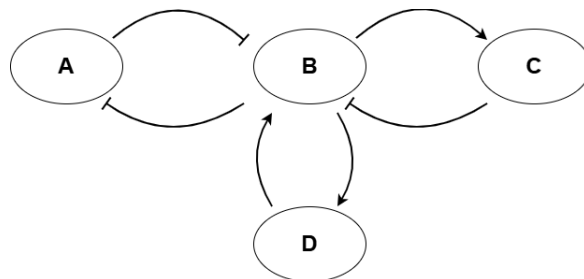


Figura 1.2: Representación de 4 especies que se relacionan entre sí. La especies A y B tiene una relación de competencia, B y C de antagonismo, B y D de mutualismo.

Una forma de representar el sistema dinámico con interacción entre especies es mediante un sistema de ecuaciones diferenciales *acopladas*. Para el caso de dos poblaciones se puede considerar el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = g(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ indican la población de cada especie a tiempo t , y las funciones f y g representan la tasa de crecimiento determinada por la relación interespecífica. Relacionando esto con la ecuación (1.1) se puede pensar una simplificación donde cada especie tiene su tasa intrínseca con una componente propia en ausencia de la interacción y otra componente proporcional a la población interactuante.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x \cdot (r_1(x) + c_1 \cdot y) = x \cdot r_1(x) + c_1 \cdot x \cdot y, \\ \frac{dy(t)}{dt} = y \cdot (r_2(y) + c_2 \cdot x) = y \cdot r_2(y) + c_2 \cdot x \cdot y. \end{cases} \quad (1.3)$$

Esta construcción permite obtener distintos modelos poblacionales según como se defina la tasa de crecimiento intrínseca y el término de interacción. En la ecuación (1.3) el signo de las constantes c_1 y c_2 determina el tipo de relación interespecífica considerado en el modelo. Veremos más adelante en la sección 3 el caso particular del modelo predador-presa que resulta de tomar la tasa de crecimiento geométrica para cada población.

Por último se puede destacar que las ecuaciones se extienden fácilmente a múltiples poblaciones que interactúan entre sí mediante lo que se conoce como ecuaciones de Lotka-Volterra generalizadas:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x} \cdot \vec{r}(\vec{x}), \quad (1.4)$$

donde consideramos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}(\vec{x}) = \vec{b} + A \cdot \vec{x}$, siendo $\vec{b}$ vector constante y A una matriz no singular.

1.3. Métodos de control en ecología

La teoría de control se desarrolló originalmente desde la ingeniería con el propósito de regular el comportamiento de sistemas mecánicos. De la misma forma, las ideas de la teoría de control forman parte de una teoría más general de sistemas y llegaron a aplicarse a diversas áreas entre ellas los sistemas biológicos y la gestión de ecosistemas. Una de las áreas de interés por su impacto económico y ambiental es el *control de plagas*, esto es, la búsqueda de métodos que permitan regular el crecimiento poblacional de determinadas especies mediante la intervención humana. Entre los distintos métodos utilizados se puede distinguir el control biológico, el control químico y el control físico [13, 15]:

- **Control Químico:** consiste en el uso de pesticidas con sustancias de origen sintético o naturales. Tiene la ventaja de tener alta eficacia y con resultados a corto plazo. La elección para su mejor efectividad debe tener en cuenta las características de la población objetivo y tiene como desventaja que su implementación puede generar resistencia a largo plazo como también efectos ecológicos no deseados.
- **Control Físico:** consiste en el uso de dispositivos e instrumentos para la erradicación artificial. Algunas especies son sensibles a la radiación, sonido, electricidad, iluminación, temperatura y otros factores físicos. Tiene la ventaja de que son reutilizables aunque pueden ser costosos y susceptibles a daños.
- **Control Biológico:** consiste en introducir enemigos naturales para la reducción de población. Tiene menor costo respecto a los otros métodos y presenta beneficios ambientales. Se pueden diferenciar tres modalidades: a) por conservación, que consiste en proteger y aumentar las poblaciones de antagonistas naturales mediante la manipulación del ecosistema, b) clásico, que implica la introducción o el uso intencional de antagonistas naturales provenientes del área de origen de una especie, en la región donde ésta se ha vuelto plaga, con el objetivo de que los antagonistas se establezcan en forma permanente, y c) aumentativo, que consiste en la cría de antagonistas naturales en grandes cantidades y su liberación en el sistema en forma repetida, sin la intención de lograr un control permanente de la plaga

En todos los casos se busca alcanzar un valor o umbral objetivo las poblaciones. Así mismo, la aplicación de estas acciones de regulación a lo largo del tiempo pueden evaluarse en base a su efectividad y costos generados.

En nuestro caso de estudio el control se representa como otro elemento en el sistema dinámico dado por la ecuación (1.2) y nuestro objetivo será probar analíticamente cuál es la mejor estrategia para alcanzar el estado de equilibrio.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección presentaremos los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y diagramas de fases que utilizaremos más adelante en el presente trabajo.

Para comenzar definimos el problema de valor inicial (PVI) o Problema de Cauchy de la siguiente forma:

Definición 2.1. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Omega = I \times V$ un conjunto abierto no vacío y $f(t, x)$ una función continua, consideramos la ecuación diferencial de primer orden con condición inicial:

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)), \\x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ e I es un intervalo que no se reduce a un punto.

Este problema representa la dinámica de un sistema que evoluciona en el tiempo y cuya tasa de cambio también depende del instante t . A este tipo de sistemas se los llama sistemas no autónomos mientras que el caso independiente del tiempo, es decir cuando $f(t, x) = f(x)$, se dirá autónomo. Esta distinción se puede simplificar tomando una variable extendida $\bar{x} = (t, x)$ de forma que podemos considerar el sistema como autónomo en caso de ser necesario.

Para abordar el problema de valor inicial estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones como también caracterizaremos el dominio de definición e imagen de la solución. Uno de los resultados principales que garantiza la existencia de solución está dado por el **Teorema de Picard**.

Teorema 2.1 (Teorema de Picard). Dado el dominio $\Omega = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_r(x_0)}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua y lipschitz, entonces el PVI (2.1) tiene una única solución $x(t)$ definida en $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ siendo $\alpha = \min\{a, \frac{r}{M}\}$ con $M = \max_{[t_0 - a, t_0 + a]} \|f\|$.

Este resultado nos indica que bajo ciertas condiciones locales sobre la función f , continuidad para garantizar la existencia y la condición Lipschitz para obtener la unicidad, valdrá el resultado en un entorno local del punto (t_0, x_0) . Como veremos más adelante, será de interés estudiar el comportamiento de la solución en su dominio maximal de definición. Para esto veremos algunos resultados que nos permiten extender la solución local a una solución global.

Lema 2.1. Sean $x : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones del problema de valor inicial (2.1) con I_1, I_2 intervalos abiertos, entonces dado un intervalo $I \subset I_1 \cap I_2$ vale $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I$.

Este lema nos permite extender el dominio de la solución $x(t)$ usando la superposición de intervalos y la condición de unicidad. Luego podemos definir el intervalo maximal solución como

$$(\omega_-, \omega_+) = \cup \{I_{(t_0, x_0)} : I_{(t_0, x_0)} \text{ es un intervalo solución del PVI con } x(t_0) = x_0\}.$$

Teorema 2.2 (Solución Maximal). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y Ω un conjunto abierto. Si vale que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución local del PVI determinada en un intervalo $I_{(t_0, x_0)}$ entonces existe una única solución $x(t)$ definida en el intervalo maximal (ω_-, ω_+) .

El siguiente resultado nos permitirá caracterizar las solución $x(t)$ en el intervalo maximal.

Teorema 2.3 (Principio Blow Up). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 con $\Omega = I \times V$ un conjunto abierto, y $x(t) : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución maximal del problema (2.1); entonces si $\omega_+ < \text{Sup}(I)$ vale que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe $\eta > 0$ tal que $(t, x(t)) \notin K \forall t \in (\omega_+ - \eta, \omega_+)$. En particular si el sistema es autónomo y $V = \mathbb{R}^n$ vale $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \omega_+} +\infty$

Proposición 2.1. Sea $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 y $x(t) : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$ la solución maximal del problema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

entonces vale alguna de las siguientes afirmaciones:

1. $x(t)$ es inyectiva.
2. $(\omega_-, \omega_+) = \mathbb{R}$ y $x(t)$ es periódica o constante.

Demostración. Se demostrará la proposición por contradicción. Supongamos que $x(t)$ no es inyectiva, es decir, existen $t_1 < t_2$ tal que

$$x(t_1) = x(t_2) = y_0.$$

Puedo tomar $T = t_2 - t_1$ y definir la función $z(t) = x(t + T)$ cumpliéndose

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t + T) = f(x(t + T)) = f(z(t)).$$

Más aún se tiene $z(t_1) = x(t_1 + (t_2 - t_1)) = x(t_2) = y_0$. Luego $z(t)$ y $x(t)$ son soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)), \\ x(t_1) &= y_0.\end{aligned}$$

Por la continuidad de f se tiene unicidad de solución y por lo tanto $x(t) = x(t + T)$. $\square$

Retomando la ecuación dinámica (2.1) se puede considerar las componentes paramétricas como otro elemento que define el sistema. Estos parámetros se pueden considerar fijos o variables en el tiempo:

$$x'(t) = f(t, x, p), \tag{2.2}$$

$$x'(t) = f(t, x, p(t)). \tag{2.3}$$

Cuando el sistema tiene la forma (2.2) se lo denomina *sistema parametrizado* y se puede extender los resultados de existencia vistos previamente considerando la nueva componente $p \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ y tomando la variable extendida $\bar{x} = (x, p)$. En particular para los sistemas parametrizados se cumple que, bajo condiciones de regularidad sobre la función f , la solución es continua y diferenciable respecto al parámetro p . Enunciamos el siguiente resultado abordado en [16]

Proposición 2.2. *Sea $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ una función continua tal que para todo $t \in [t_0, t_f]$ la función $f(t, \cdot, \cdot)$ es C^1 . Sea $h(p)$ una función C^1 y $x(t) = x(t, p_0)$ la única solución del sistema parametrizado*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), p_0), \\ x(t_0) &= h(p_0),\end{aligned}$$

entonces la solución es diferenciable respecto a la variable p y se tiene que su derivada parcial $\frac{\partial}{\partial p} x(t, p) = x_p(t)$ es solución del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= f_x(t, x_p, p_0) \cdot x_p + f_p(t, x_p, p_0), \\ x_p(t_0) &= h_p(p_0).\end{aligned}$$

En el caso dado por la ecuación (2.3) se considera los parámetros que definen la ODE como variables en el tiempo y se tiene lo que se conoce como un *sistema controlado*. Este caso se puede pensar dentro del problema original si se toma el sistema dinámico dado por

$$F(t, x) := f(t, x, p(t)), \tag{2.4}$$

y se considera la función $p(t)$ continua.

Como veremos más adelante esta condición de continuidad resulta restrictiva para las soluciones *admisibles* en el problema a analizar. El siguiente resultado es una versión más general del teorema 2.1 que se puede ver en [1] y nos permitirá garantizar la existencia y unicidad para funciones no necesariamente continuas.

Proposición 2.3. *Sea una función $f : I \times V \longrightarrow V$ que verifica las siguientes hipótesis:*

1. *f es localmente lipschitz, es decir:*

$$\begin{aligned} \forall x \in V \quad \exists r > 0, B(x, r) \subset V, \quad \exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+) \\ \forall t \in I \quad \forall y, z \in B(x, r) \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t)\|y - z\|, \end{aligned}$$

2. *f es localmente integrable, es decir:*

$$\forall x \in V \quad \exists \beta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+) \quad \forall t \in I \quad \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Entonces para todo valor inicial $(t_0, x_0) \in I \times V$ existe una solución maximal única del Problema de Cauchy dado por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds, \quad (2.5)$$

con $x(t)$ absolutamente continua en I .

Se concluye luego la existencia de solución para sistemas controlados en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Si $p(t) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{C}^1$ entonces la función $F(t, x)$ en (2.4) cumple las condiciones de la proposición 2.3.*

Finalmente se puede resaltar que la integral definida en (2.5) se interpreta en el sentido de Lebesgue, donde la unicidad vale en casi todo punto. Cuando en la proposición anterior se toma $p(t)$ una función continua a trozos, la integral se puede definir en el sentido de Riemann y la igualdad se cumple salvo para un conjunto finito de puntos. Un desarrollo más exhaustivo de la formulación del PVI en el contexto de problemas de control se puede ver en [1, 4, 9].

2.1.1. Estudio geométrico de las soluciones

El objetivo de esta sección es mostrar algunos resultados que nos permitan interpretar geoméricamente las soluciones determinadas por la ecuación diferencial (2.1).

Consideremos un sistema autónomo en el plano $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$x'(t) = f(x(t)) \quad , \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.6)$$

Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio si es solución de la ecuación

$$f(x) = 0. \quad (2.7)$$

El estudio de los puntos de equilibrios permite clasificar el comportamiento de las soluciones de forma exacta para el caso lineal y de forma aproximada en un entorno para el caso no lineal. Más aún para el caso no lineal existen herramientas mas sofisticadas que permiten analizar el comportamiento asintótico para cualquier punto inicial [7]. Enunciamos el siguiente resultado clásico sobre convergencia asintótica para sistema autónomos.

Proposición 2.5. *Si $X(t) \rightarrow X_0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ entonces $f(X_0) = 0$, valiendo un resultado análogo si $t \rightarrow -\infty$*

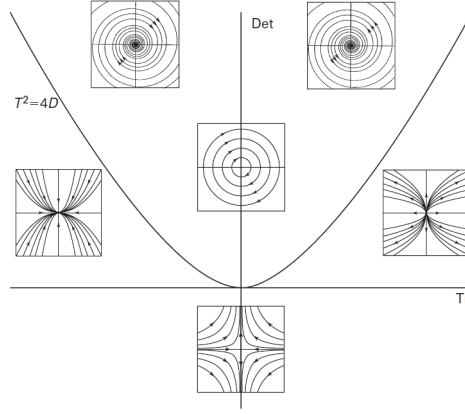


Figura 2.1: Clasificación de las curvas solución en un entorno del punto de equilibrio[7].

Por otra parte la ecuación diferencial dada en (2.6) se puede generalizar tomando la representación implícita dada por la igualdad

$$F(x, x') = 0. \quad (2.8)$$

Un caso particular en $\mathbb{R}^2$ son las llamadas *ecuaciones diferenciales exactas* donde vale la igualdad

$$f(x_1, x_2).x'_1 + g(x_1, x_2).x'_2 = 0, \quad (2.9)$$

y existe una función potencial H que cumple la condición $f(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ y $g(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2)$. Una escritura utilizada comúnmente es

$$f(x_1, x_2).dx_1 + g(x_1, x_2).dx_2 = 0. \quad (2.10)$$

Por último se tiene el siguiente resultado que caracteriza las curvas solución para el caso de ecuaciones exactas.

Proposición 2.6. Si $(x_1(t), x_2(t))$ es solución de la ecuación diferencial exacta (2.10) que pasa por el punto (x_1^0, x_2^0) entonces el gráfico de la solución en el plano $\mathbb{R}^2$ está contenida en la curva de nivel definida por la función potencial H que pasa por el punto, es decir, se cumple la inclusión:

$$\{(x_1(t), x_2(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = H(x_1^0, y_2^0)\}. \quad (2.11)$$

Demostración. Para la demostración basta considerar la función compuesta $h(t) = H(x_1(t), x_2(t))$. Derivando y usando que la solución satisface la ecuación exacta se obtiene:

$$h'(t) = \nabla H(x_1(t), x_2(t)) \cdot (x_1'(t), x_2'(t)) = 0.$$

Luego se tiene que $H(x_1(t), x_2(t)) \equiv c$ y en particular evaluando en t_0 se tiene

$$H(x_1(t), x_2(t)) = H(x_1(t_0), x_2(t_0)) = H(x_1^0, x_2^0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Como veremos más adelante el estudio de curvas de nivel nos permite estudiar los puntos *alcanzables* en los sistemas de control. Para relacionar la solución de un PVI con las ideas geométricas asociadas a curvas en el plano utilizaremos el concepto de concatenación de curvas.

Definición 2.2 (Concatenación de curvas).

Sean $X : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Y : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $X(b_1) = Y(a_2)$, se define la concatenación como

$$(X * Y)(t) = \begin{cases} X(t) & \text{Si } t \in [a_1, b_1] \\ Y(a_2 + (t - b_1)) & \text{Si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}. \quad (2.12)$$

Proposición 2.7. Sea $X : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Y : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ soluciones de los sistemas

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(X) \\ X(a_1) = A \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{Y} = f_2(Y) \\ Y(b_2) = B \end{cases}. \quad (2.13)$$

donde además vale $X(b_1) = Y(a_2)$. Entonces la concatenación cumple:

1) $(X \overset{\bullet}{*} Y) = f_1(X) * f_2(Y)$, o equivalentemente

$$(X \overset{\bullet}{*} Y)(t) = \begin{cases} f_1(X(t)) & \text{Si } t \in (a_1, b_1) \\ f_2(Y(a_2 + (t - b_1))) & \text{Si } t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2). \end{cases}$$

2) $(X * Y)(a_1) = A$.

3) $(X * Y)(b_1 + b_2 - a_2) = B$.

El resultado anterior nos permite combinar dos soluciones con condiciones a tiempo inicial y tiempo final respectivamente para obtener una solución de un sistema que cumple restricciones de borde.

Este resultado válido para funciones que definen curvas abiertas se puede extender para el caso donde una de las funciones tiene como imagen una curva cerrada. En particular se tiene la siguiente proposición cuya interpretación geométrica se puede ver en la figura 2.2

Proposición 2.8.

Sea $X : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $Y : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ soluciones de los sistemas

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(X) \\ X(a_1) = A \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{Y} = f_2(Y) \\ Y(b_2) = B \end{cases}. \quad (2.14)$$

donde además se cumple:

- $Im(Y)$ es una curva cerrada.
- $Im(X) \cap Im(Y) \neq \emptyset$.

entonces $\forall Q \in Im(Y)$ existe una función $Z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $c \in (a, b)$ tal que

1)

$$\dot{Z}(t) = \begin{cases} f_1(Z(t)) & \text{Si } t \in (a, c) \\ f_2(Z(t)) & \text{Si } t \in (c, b), \end{cases}$$

2) $Z(a) = A$ y $Z(b) = Q$.

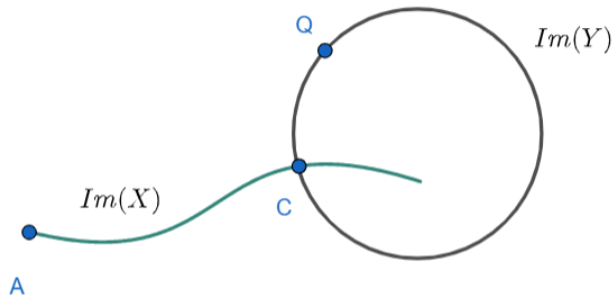


Figura 2.2: Si $Im(Y)$ es una curva cerrada y se cumple $Im(X) \cap Im(Y) \neq \emptyset$, entonces para todo punto $Q \in Im(Y)$ se puede definir una curva que une A con Q .

Demostración. Si consideramos $C \in Im(X) \cap Im(Y)$ entonces existen $\hat{b}_1 \in [a_1, b_1]$ y $\hat{a}_2 \in [a_2, b_2]$ tal que

$$X(\hat{b}_1) = C = Y(\hat{a}_2).$$

En particular si tomamos la restricción $X : [a_1, \hat{b}_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= f_1(X(t)), \\ X(a_1) &= A \text{ y } X(\hat{b}_1) = C.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Por otra parte, dado que $Im(Y)$ es una curva cerrada, se tiene que existen $a_2 \leq t_1 < t_2 \leq b_2$ tal que

$$Y(t_1) = Y(t_2).$$

Más aún, si tomamos la extensión maximal $\varphi : (\omega_-, \omega_+) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se tiene $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ y por la proposición 2.1 se concluye que $\varphi(t)$ es una función periódica.

Luego para todo punto $Q \in Im(Y)$ existe $\hat{b}_2$ tal que $\varphi(\hat{b}_2) = Q$, donde se puede suponer $\hat{a}_2 < \hat{b}_2$. Tomando la restricción $\varphi : [\hat{a}_2, \hat{b}_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= f_2(\varphi(t)), \\ \varphi(\hat{a}_2) &= C \text{ y } \varphi(\hat{b}_2) = Q.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Finalmente por la proposición 2.7 se tiene que las funciones dadas en (2.15) y (2.16) definen mediante la concatenación una función $Z : [a_1, \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{a}_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple

1)

$$\dot{Z}(t) = \begin{cases} f_1(X(t)) & \text{Si } t \in (a_1, \hat{b}_1) \\ f_2(\varphi(t)) & \text{Si } t \in (\hat{b}_1, \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{a}_2), \end{cases}$$

siendo $Z(t) = X(t) \forall t \in (a_1, \hat{b}_1)$ y $Z(t) = \varphi(t) \forall t \in (\hat{b}_1, \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{a}_2)$ por la definición de concatenación.

2) $Z(a_1) = A$ y $Z(\hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{a}_2) = Q$.

Lo que concluye la demostración tomando $a = \hat{a}_1$, $b = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 - \hat{a}_2$ y $c = \hat{b}_1$ □

2.2. Teoría de control óptimo

2.2.1. Introducción

La teoría de control es una rama de la matemática e ingeniería que aborda el estudio de sistemas que pueden ser intervenidos mediante un parámetro de ajuste o *control*. En los casos en que el sistema se pueda describir mediante una ecuación diferencial se puede expresar esta relación mediante la igualdad

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

donde u es la variable de control y x es el estado o *respuesta* del sistema.

El estudio de sistemas intervenidos por una variable de control fue de interés desde la antigüedad aunque tuvo mayor desarrollo a partir del siglo XVIII impulsado por la construcción de mecanismos autorregulados como también por los avances en diversas áreas de la matemática. Las aplicaciones de la teoría de control varían desde la ingeniería, mecánica, electrónica, biología y economía entre otras.

Por otra parte los problemas planteados desde la ingeniería impulsaron el desarrollo de basta teoría matemática a lo largo de los años incorporando avances en el campos de las ecuaciones diferenciales, calculo variacional y optimización matemática. Se puede ver una breve introducción del recorrido histórico en [2].

Entre los problemas estudiados en teoría de control pueden distinguirse dos que serán considerados en el presente trabajo: el *problema de controlabilidad* y la *teoría de control óptimo*. Decimos que un sistema es controlable si es posible hallar un control cuya respuesta asociada permita alcanzar un estado final x_F a partir de un estado inicial x_0 en un tiempo finito. La condición a tiempo final se puede plantear de forma mas general como $x_F \in \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T}$ recibe el nombre de conjunto objetivo o *target set*.

Si al sistema se agrega un funcional que evalúe el rendimiento obtenido a partir de la aplicación del control, se puede definir el problema de maximizar la ganancia o minimizar el costo representado por el funcional, es decir, se plantea un problema de optimización.

Estos dos enfoques derivaron en las principales líneas de investigación en la teoría de control moderna y ambos tuvieron avances notorios a mediados del siglo XX a través de los trabajos de Rudolf. E. Kalman y Lev. S. Pontryagin.

2.2.2. Formulación del problema de optimización

A continuación vamos a introducir los conceptos principales de la teoría de control óptimo. Como vimos anteriormente nuestro objetivo será resolver un problema de optimización descrito en su forma general como

$$\max_{u \in \mathcal{U}} J[u].$$

En nuestro caso de interés tomaremos lo que se conoce como el problema en *forma de Lagrange* donde el funcional se define mediante una integral en un intervalo acotado

y representa una cantidad acumulada resultado de aplicar el control:

$$J[u] = \int_0^{t_F} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Por otra parte el funcional no solo dependerá de la variable de control sino también de la respuesta $x(t)$ determinada por el sistema dinámico controlado. En este caso tomamos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde para la buena definición del funcional es necesario que la solución del sistema sea única en casi todo punto.

Otros casos de interés se obtienen incorporando al funcional un término que represente el valor puntual en el estado final dando lugar a los problemas en forma de Mayer y Bolza.

Definición 2.3. *Un problema de control óptimo se dice que está planteado en la forma de Mayer si tiene la forma*

$$\begin{aligned} \text{Max } J[u] &= \psi(x(t_F)) \\ \text{s.a. :} & \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Proposición 2.9. *Un problema en forma de Mayer se puede reescribir en la forma de Lagrange y viceversa.*

Demostración. Para la demostración basta considerar una variable auxiliar que represente la función de costo dentro de la dinámica del sistema. Si tomamos las variables extendidas

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \left(\int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds, x(t) \right), \\ \hat{f}(t) &= (f_0(t), f(t)), \\ \hat{x}_0 &= (0, x_0), \end{aligned} \tag{2.19}$$

entonces el problema de Lagrange se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \text{Max } \psi(\hat{x}(t_F)) &= \text{proy}_1(\hat{x}(t_F)) \\ \text{s.a. :} & \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{f}(t, x(t), u(t)), \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $proy_1(\hat{x}(t_F))$ es la proyección de la primer coordenada del vector $\hat{x}(t)$.

Recíprocamente dado el problema en forma de Mayer se puede tomar las variables extendidas

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= (x(t), x_{n+1}(t)), \\ \hat{f}(t) &= (f(t, x), 0), \\ \hat{x}_0 &= (x_0, \psi(x(t_F))),\end{aligned}\tag{2.21}$$

Luego el problema de Mayer es equivalente a

$$\begin{aligned}Max \quad & \psi(\hat{x}(t_F)) = \int_0^{t_F} \frac{1}{t_F} \text{proy}_{n+1}(s, \hat{x}(s), u(s)) ds \\ s.a. : \quad & \dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, x(t), u(t)), \\ & \hat{x}(0) = \hat{x}_0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde $proy_{n+1}(\hat{x}(t_F))$ es la proyección de la última coordenada del vector $\hat{x}(t)$. $\square$

Un desarrollo extensivo de las distintas formulaciones para el problema de control óptimo se puede encontrar en [3].

La función de control vista como variable es un elemento de un espacio de funciones y puede admitir restricciones de conjunto

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R} \quad \forall t \in \text{Dom}(u),$$

como también restricciones sobre el espacio funcional

$$u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M},$$

siendo $\mathcal{M}$ el espacio de funciones medibles. Cuando ambas restricciones se cumplan diremos que u es un control *admissible*.

Para todo control u , queda definido el sistema dinámico (2.17), donde se puede considerar *restricciones físicas* adicionales sobre la respuesta x . En caso de que un control defina una solución x que cumple (2.17) y las restricciones adicionales, se dice que es un control *factible*.

Otro elemento del problema es el tiempo final t_F . Esta componente se puede considerar como una constante definida en el enunciado del problema o como otra variable de optimización. En caso de ser variable se puede considerar acotada o libre y se debe garantizar que tanto la función de control $u(t)$ como la respuesta $x(t)$ estén definidas en todo intervalo $[0, t_F]$.

Las consideraciones mencionadas sobre el tiempo final t_F y el estado final x_F permite clasificar los problemas de control óptimo valiendo en cada caso distintas caracterizaciones para la solución. Un tratamiento detallado de los elementos que definen el problema de control se puede ver en [16].

Finalmente podemos definir el problema de control óptimo con tiempo final libre y estado final fijo (*Free endtime - Fixed endpoint*) en la forma

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar} \quad \int_0^{t_F} f_0(t, x, u(t)) dt \\
 &\text{Sujeto a} \\
 &\quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\
 &\quad x(0) = x_0, \\
 &\quad x(t_F) \in \mathcal{T} = \{x_F\}, \\
 &\quad t_F \in (0, +\infty), \\
 &\quad u \in \{u \in \mathcal{U} : u(t) \in U \quad \forall t \in [0, t_F]\}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esta formulación se puede pensar como un problema de optimización donde para su buena definición se requiere verificar una serie de condiciones: la existencia de controles factibles; la existencia de al menos un control óptimo; que sea posible caracterizar la solución y tener métodos analíticos y numéricos que permitan su cálculo y aproximación.

A continuación veremos algunos de estos aspectos que nos permitirán abordar el caso de estudio del presente trabajo.

2.2.3. Controlabilidad

Como mencionamos anteriormente la buena definición del problema de control óptimo requiere que exista un espacio de controles admisibles, es decir que existan funciones que dada la dinámica del sistema lleven el estado inicial al estado objetivo bajo las restricciones del problema. Veremos en el desarrollo del problema particular que esto se puede garantizar bajo ciertas condiciones sobre la función de control y veremos más aún cómo se aproxima numéricamente la solución. El objetivo de esta sección es presentar las características del conjunto de puntos iniciales donde el problema será controlable como también las ideas geométricas subyacentes que permiten interpretar la controlabilidad en $\mathbb{R}^2$. Utilizando el enfoque presentado en [4] definimos el conjunto de *puntos alcanzables* a tiempo t desde un punto x_0 como

$$K(t, x_0) = \{x(t, x_0, u(\cdot)) : u \in \mathcal{U}_m\}.$$

Si se considera el conjunto objetivo $\mathcal{T}$ se puede tomar los puntos x_0 que pueden ser dirigidos a este en tiempo t como

$$\mathcal{C}(t) = \{x_0 \in \mathbb{R} : \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}_m \text{ tal que } x(t, x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{T}\}.$$

Luego el *conjunto controlable* se define como $\mathcal{C} = \cup_{t>0} \mathcal{C}(t)$.

Cuando el conjunto objetivo se reduce a un punto, es decir $\mathcal{T} = x_F$, vale que un punto x_0 es controlable si y solo si x_F es alcanzable desde x_0 . Más aún, se puede formalizar la relación entre los puntos extremos de la curva considerando el sistema reverso asociado:

Proposición 2.10. Si $x(t)$ es solución del sistema 2.17 con condición a tiempo final $x(t_F) = x_F$ entonces $z(t) = x(t_F - t)$ es solución del sistema reverso

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -f(z, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(t) &= u(t_F - t), \\ z(0) &= x_F, \\ z(t_F) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

La proposición es una equivalencia cuya interpretación geométrica se basa en la reversibilidad del recorrido de una curva que une dos puntos dados.

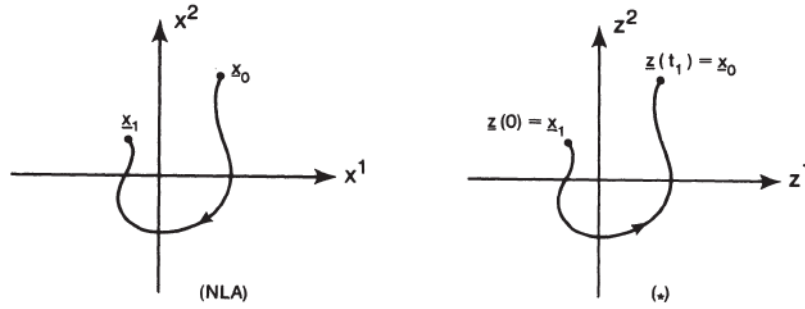


Figura 2.3: Curva solución para el sistema original (izquierda) y el sistema reverso (derecha)[4].

Existen resultados dentro de la teoría de controlabilidad clásica que permiten estudiar la controlabilidad para sistemas lineales mediante el análisis de autovalores mientras que para el caso no lineal se hace uso de la teoría de álgebras de Lie. Finalizaremos esta sección con un resultado que permite caracterizar el conjunto de puntos controlables cuya demostración se puede ver en [4].

Teorema 2.4. El conjunto de puntos controlables para un sistema dinámico no lineal es arco conexo, y es abierto si y solo si $x_F \in \mathcal{C}^o$.

2.2.4. Existencia de control óptimo

A continuación veremos qué condiciones garantizan la existencia de solución para el problema de control óptimo planteado en (2.23). El tratamiento exhaustivo de estos resultados se desarrollan en [3] y nos limitaremos a mostrar como se ajustan las condiciones para nuestro caso de estudio particular.

Definición 2.4 (Semicontinuidad). Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es semicontinua inferiormente si $\forall c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ es cerrado.

Proposición 2.11. Si f es continua entonces es semicontinua inferiormente.

Definición 2.5 (Espacio Tangente). *Dada una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ y el conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = c\}$ no vacío. Definimos el espacio tangente como*

$$T_E(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle F'(x), y \rangle = 0\}. \quad (2.25)$$

Enunciamos a continuación el teorema de existencia de control óptimo para el problema con tiempo final fijo. El mismo es una adaptación del teorema 23.11 de [3].

Teorema 2.5 (Existencia de control óptimo a tiempo fijo).
Consideremos el problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \text{Min } J[u] &= \int_0^{t_F} f_0(x(t), u(t)) dt \\ \text{Sujeto a: } x'(t) &= g_0(x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(x(t)) \cdot u_j(t) \quad \text{a.e.} \\ u(t) &\in U \quad \text{a.e.} \\ x(t) &\in S \quad \forall t \in [0, t_F] \\ x(0) &= x_0, x(t_F) \in E \end{aligned} \quad (2.26)$$

suponiendo que se cumplen las siguientes condiciones:

(H1) *Existe una constante M tal que:*

$$x \in S \implies |g_j(x)| \leq M(1 + |x|) \quad \forall j = 0, 1, \dots, m \quad (2.27)$$

(H2) *U es compacto y convexo*

(H3) *E y S son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ con $S \supset E$*

(H4) *f_0 es semicontinua inferiormente en (x, u) , convexa en u y existe una constante λ_0 tal que*

$$x \in S, u \in U \implies f_0(x, u) \geq \lambda_0 \quad (2.28)$$

(H5) *Para todo $x \in E$, se tiene $T_E(x) \cap f(x, U) \neq \emptyset$.*

Luego si existe al menos una solución factible del proceso que une x_0 con E en tiempo finito y para la cual el costo es finito, entonces el problema admite solución óptima.

Veremos a continuación que bajo las mismas hipótesis se puede extender el resultado de existencia para el problema a tiempo libre.

Teorema 2.6 (Existencia de control óptimo a tiempo libre). *Consideremos el problema de control óptimo*

$$\begin{aligned}
 \text{Min } J[t_F, u] &= \int_0^{t_F} f_0(x(t), u(t)) dt \\
 \text{Sujeto a: } x'(t) &= g_0(x(t)) + \sum_{j=1}^m g_j(x(t)) \cdot u_j(t) \quad a.e. \\
 u(t) &\in U \quad a.e. \\
 x(t) &\in S \quad \forall t \in [0, t_F] \\
 x(0) &= x_0, x(t_F) \in E \\
 t_F &\in (0, +\infty)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

suponiendo que se cumplen las condiciones (H1), (H2), (H3) y (H5) del teorema 2.5 y que vale:

(H4') f_0 es semicontinua inferiormente en (x, u) , convexa en u y existe una constante $\lambda_0 > 0$ tal que

$$x \in S, u \in U \implies f_0(x, u) \geq \lambda_0 \tag{2.30}$$

Luego si existe al menos una solución factible del proceso que une x_0 con E en tiempo finito y para la cual el costo es finito, entonces el problema admite solución óptima.

Demostración. Consideremos el control factible $\bar{u}$ asociado al estado $\bar{x}$ y tiempo final $\bar{t}_F$. Dada otra terna (u, x, t_F) factible, podemos utilizar la condición (H4') para comparar los funcionales evaluados en cada caso. En particular si tomamos (u, x, t_F) con un costo menor o igual, se tiene

$$J[\bar{t}_F, \bar{u}] \geq J[t_F, u] = \int_0^{t_F} f_0(x(s), u(s)) ds \geq \lambda_0 \cdot t_F \tag{2.31}$$

Como $\lambda_0 > 0$ se tiene que los tiempos asociados a los controles con un valor del funcional menor o igual están uniformemente acotados

$$t_F \leq \frac{\int_0^{\bar{t}_F} f_0(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) ds}{\lambda_0} =: T \tag{2.32}$$

Por otra parte podemos considerar la extensión de la función de costo dada por

$$f_0^+(x, u) = \begin{cases} f_0(x, u) & \text{si } x \notin E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Luego se puede definir el problema a tiempo fijo T con las mismas restricciones sobre x y u pero dado por el funcional

$$J^+[u] = \int_0^T f_0^+(x(s), u(s)) ds$$

Este problema a tiempo fijo cumple las condiciones (H1) – (H5) por lo que alcanza probar que tiene al menos una solución factible para aplicar el teorema de existencia a tiempo fijo 2.5.

Para la terna inicial $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{t}_F)$ se cumple la desigualdad (2.31) y se tiene que la solución factible esta definida en un intervalo $[0, \bar{t}_F] \subset [0, T]$. Siguiendo los teoremas 23.11 y 12.3 de Clarke en [3] se puede afirmar, mediante el concepto de *invariacia débil*, que las condiciones que cumplen los conjuntos E, S, U junto a la condición de continuidad y crecimiento lineal sobre $f(x, u)$ permiten extender $(\bar{u}, \bar{x})$ a todo el intervalo $[0, T]$ de forma tal que $\bar{x}(t) \in E$ para todo $t \in [\bar{t}_F, T]$.

Luego existe un control factible para el problema a tiempo fijo y por 2.5 existe un óptimo (u^*, x^*) . En particular vale

$$J^+[u^*] \leq J^+[\bar{u}] = J[\bar{t}_F, \bar{u}]$$

Veremos a continuación que el óptimo encontrado también resuelve el problema a tiempo libre.

Dado el par óptimo (u^*, x^*) se puede considerar t_F^* , el primer instante tal que $x^* \in E$. Se tiene que $(x^*, u^*)|_{[t_F^*, T]} \in E$, en caso contrario se podría extender por invariancia débil la función $(x^*, u^*)|_{[0, t_F^*]}$ a todo el intervalo como un par $(\tilde{x}, \tilde{u})$ y valdría

$$\begin{aligned} \int_0^T f_0^+(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds &= \int_0^{t_F^*} f_0^+(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds + \int_{t_F^*}^T f_0^+(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds \\ &= \int_0^{t_F^*} f_0^+(x^*(s), u^*(s)) ds \\ &< \int_0^{t_F^*} f_0^+(x^*(s), u^*(s)) ds + \int_{t_F^*}^T f_0^+(x^*(s), u^*(s)) ds, \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde usamos $f_0 \geq \lambda_0 > 0$ para obtener la desigualdad estricta. Se tiene entonces que para $(\tilde{x}, \tilde{u})$ vale $J^+[\tilde{u}] < J^+[u^*]$ lo que contradice la optimalidad de u^* .

Si consideramos la restricción de u^* al intervalo $[0, t_F^*]$ se tiene que el par (t_F^*, u^*) resuelve el problema a tiempo libre. En caso contrario, existe un par (t_F, u) tal que

$$J[t_F, u] < J[t_F^*, u^*] = J^+[u^*] \leq J[\bar{t}_F, \bar{u}].$$

por lo que $t_F \leq T$. Aplicando un razonamiento similar al visto anteriormente, se puede extender al intervalo $[0, T]$ y siguiendo lo planteado en la desigualdad (2.33) se obtiene

$$J^+[u] = J[t_F, u] < J^+[u^*]$$

lo que contradice la optimalidad de u^* . □

Como resultado de la demostración se tiene que las desigualdades (2.31), (2.32), (2.33), permiten reemplazar la condición $(H4')$ por una versión más débil que utilizaremos en nuestro caso particular.

Corolario 2.1. *El teorema de existencia 2.6 sigue valiendo si se reemplaza la condición $(H4')$ por:*

$(H4'')$ f_0 es semicontinua inferiormente en (x, u) , convexa en u que cumple $f_0(x, u) > 0 \quad \forall x \notin E$ y que satisface la implicación

$$J[t_F, u] \leq J[\bar{t}_F, \bar{u}] \implies t_F \leq T = T(\bar{t}_F) \quad (2.34)$$

Por último, notemos que en el teorema planteamos el problema de control óptimo como uno de minimización, veremos en la siguiente sección que esta condición no dificulta el análisis de existencia ni la caracterización de las soluciones.

2.2.5. Caracterización de las soluciones

Abordaremos a continuación las condiciones necesarias que debe cumplir una solución del problema de control óptimo. Veremos primero la demostración para el caso donde las funciones son regulares y tanto el estado final como controles admisibles no tienen restricciones de conjunto. En un segundo paso plantearemos el caso general con restricciones conocido como el *Principio del Máximo de Pontryagin*.

Condiciones Necesarias de 1er Orden

En el caso de funciones suficientemente regulares se puede deducir las condiciones necesarias a partir de las herramientas de calculo variacional y obtener ecuaciones que caractericen a las posibles soluciones del problema de control óptimo.

Teorema 2.7. *Dado el problema de control óptimo*

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad \int_0^{t_F} f_0(t, x, u(t)) dt \\ & \text{Sujeto a} \\ & \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ & \quad x(0) = x_0, \\ & \quad t_F \text{ fijo}, \\ & \quad u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

con f_0 y f funciones con derivadas continuas respecto a x . Si (u^*, x^*) es un par óptimo, entonces existe un vector λ^* tal que la terna (u^*, x^*, λ^*) es solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, u) & x(0) = x_0, \\ \dot{\lambda}(t) = -f_{0x}(t, x, u) - f_x(t, x, u)^T \lambda(t) & \lambda(t_F) = 0, \\ 0 = f_{0u}(t, x, u) + f_u(t, x, u)^T \lambda, \end{cases} \quad (2.35)$$

Demostración. Para la demostración vamos a considerar las variaciones del funcional $J[u]$ respecto a su variable de optimización. Como en este caso estamos optimizando respecto a la función de control, consideraremos funciones de la forma

$$u_\eta(t) = u^*(t) + \eta.\omega(t) \quad (2.36)$$

donde $u^*(t)$ es el control óptimo, ω una función medible y η un número real.

Más aún, si tomamos η suficientemente chico, podemos asumir la existencia de solución $x_\eta(t) = x(t, \eta)$ del sistema dinámico con condición inicial para la función de control u_η , cumpliéndose así

$$\dot{x}_\eta(t) = f(t, x_\eta(t), u_\eta) \implies f(t, x_\eta(t), u_\eta) - \dot{x}_\eta(t) = 0. \quad (2.37)$$

Evalutando el funcional en el control u_η y usando la igualdad anterior se puede expresar el incremento del funcional respecto a la variable de control

$$\begin{aligned} J[u_\eta] &= \int_0^{t_F} f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) dt = \int_0^{t_F} f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) + \lambda(t) \cdot [f(t, x_\eta(t), u_\eta) - \dot{x}_\eta(t)] dt \\ &= \int_0^{t_F} f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) + \lambda(t) \cdot f(t, x_\eta(t), u_\eta) - \lambda(t) \cdot \dot{x}_\eta(t) dt \\ &= \int_0^{t_F} f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) + \lambda(t) \cdot f(t, x_\eta(t), u_\eta) + \dot{\lambda}(t) \cdot x_\eta(t) - \frac{d}{dt}[\lambda(t) \cdot x_\eta(t)] dt \\ &= \int_0^{t_F} f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) + \lambda(t) \cdot f(t, x_\eta(t), u_\eta) + \dot{\lambda}(t) \cdot x_\eta(t) dt \\ &\quad - \lambda(t_F) \cdot x_\eta(t_F) + \lambda(0) \cdot x_\eta(0), \end{aligned}$$

donde tomamos $\lambda(t)$ una función integrable arbitraria.

Aplicando la misma cadena de igualdades para el control-estado óptimo y calculando la diferencia término a término entre ambos funcionales se tiene

$$\begin{aligned} J[u_\eta] - J[u^*] &= \int_0^{t_F} \{ [f_0(t, x_\eta, u_\eta(t)) - f_0(t, x^*, u^*(t))] \\ &\quad + \lambda(t) \cdot [f(t, x_\eta(t), u_\eta) - f(t, x^*(t), u^*(t))] \\ &\quad + \dot{\lambda}(t) \cdot [x_\eta(t) - x^*(t)] \} dt \\ &\quad - \lambda(t_F) \cdot [x_\eta(t_F) - x^*(t_F)] + \lambda(0) \cdot [x_\eta(0) - x^*(0)] \end{aligned} \quad (2.38)$$

En este punto podemos observar que la función $x_\eta(t)$ es solución del sistema parametrizado

$$\dot{x}_\eta(t) = \bar{f}(t, x_\eta(t), \eta) \quad \text{con} \quad \bar{f}(t, x, \eta) = f(t, x, u^*(t) + \eta.\omega(t)), \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Luego por las condiciones de diferenciabilidad de f se tiene que $\bar{f}_x = f_x$ existe y es continua. Por otra parte si tomamos $\omega^* \in L^\infty([0, t_F])$ entonces $u_\eta \rightrightarrows u^*$ y luego $\bar{f}$ es derivable respecto al parámetro η y vale $\bar{f}_\eta = f_u.\omega$.

Se tiene entonces por la proposición 2.2 que $x(t, \eta)$ es diferenciable respecto al parámetro cumpliendo la igualdad

$$\left(\frac{d}{d\eta}x_\eta\right)^\bullet = f_x(t, x^*, u^*) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta + f_u(t, x^*, u^*) \cdot \omega,$$

valiendo una expresión similar si tomamos f_0 en el lugar de f .

En consecuencia se puede tomar el cociente incremental y tomando límite reemplazar estas igualdades en la ecuación (2.38). Por otra parte, usando la igualdad sobre la condición inicial, $x_\eta(0) = x(0) = x_0$, se obtiene una expresión para la variación del funcional en la dirección del control ω .

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{J[u_\eta] - J[u^*]}{\eta} &= \int_0^{t_F} \{ [f_{0x}(t, x^*, u^*) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta + f_{0u}(t, x^*, u^*) \cdot \omega] \\ &\quad + \lambda(t) \cdot [f_x(t, x^*, u^*) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta + f_u(t, x^*, u^*) \cdot \omega] \\ &\quad + \dot{\lambda}(t) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta(t) \} dt - \lambda(t_F) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta(t_F) \\ &= \int_0^{t_F} \{ [f_{0u}(t, x^*, u^*) + \lambda(t) \cdot f_u(t, x^*, u^*(t))] \cdot \omega(t) \\ &\quad + [f_{0x}(t, x^*, u^*) + \lambda(t) \cdot f_x(t, x^*, u^*)] \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta + \dot{\lambda}(t) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta \} dt \\ &\quad - \lambda(t_F) \cdot \frac{d}{d\eta}x_\eta(t_F) \end{aligned}$$

En este punto podemos considerar el caso particular donde tomamos $\lambda(t)$ solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -f_{0x}(t, x^*, u^*) - \lambda(t) \cdot f_x(t, x^*, u^*) \\ \lambda(t_F) &= 0, \end{aligned}$$

cuya existencia esta garantizada por la regularidad de f_0 y f . Como consecuencia se tiene que el variacional se reduce a la siguiente expresión

$$\delta_\omega J[u^*] := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{J[u_\eta] - J[u^*]}{\eta} = \int_0^{t_F} [f_{0u}(t, x^*, u^*) + \lambda(t) \cdot f_u(t, x^*, u^*(t))] \cdot \omega(t)$$

para ω arbitrario y siendo u^* un óptimo local.

Finalmente, como $u \in \mathcal{U}$ no tiene restricciones de conjunto, se tiene que $\eta = 0$ es un mínimo local pudiendo tomar ambos límites laterales. Luego por la condición de primer orden para funciones a valores reales se obtiene para cualquier función $\omega \in L^\infty$ la igualdad

$$0 = \delta_\omega J[u^*]$$

En particular, tomando $\omega = f_{0u}(t, x^*, u^*) + \lambda(t) \cdot f_u(t, x^*, u^*(t))$ se concluye la condición de optimalidad. $\square$

Las ecuaciones del teorema (2.7) se pueden expresar de una forma simplificada introduciendo la función de Hamilton que en su expresión considera tanto el

integrando de la función objetivo como también las restricciones dinámicas del problema. Este planteo se puede interpretar como el análogo al uso de multiplicadores de Lagrange en un problema clásico de optimización con restricciones en $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H} = f_0 + \lambda^T f. \quad (2.39)$$

Con la función de Hamilton se puede expresar el sistema (2.35) de forma reducida obteniendo así

$$\dot{x}(t) = \mathcal{H}_\lambda \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.40a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathcal{H}_x \quad \lambda(t_F) = 0, \quad (2.40b)$$

$$0 = \mathcal{H}_u, \quad (2.40c)$$

donde la ecuación (2.40b) recibe el nombre de ecuación adjunta o de coestado y (2.40c) representa la condición de optimalidad respecto a la variable u . El sistema también muestra la dependencia entre las tres componentes que definen el óptimo.

El resultado anterior nos muestra que la condición necesaria sobre el óptimo del problema de control se puede interpretar de forma análoga al caso de optimización en variable real mediante el uso de derivadas direccionales sobre el funcional. Esto sin embargo presenta dificultades cuando se considera restricciones adicionales sobre el conjunto de control, por ejemplo cuando el conjunto de controles es acotado; o cuando se toman condiciones a tiempo final sobre la función de estado.

Las perturbaciones sobre la variable de control, definidas mediante $\omega(t)$ en (2.36), deben concluir en pares estado-control factibles. En consecuencia será necesario definir qué tipo de variaciones se puede realizar sobre el óptimo local de forma tal que las restricciones de sistema y de control se cumplan.

Estas particularidades se resolverán con un resultado mas fuerte que permitirá plantear las condiciones necesarias para la solución del problema de control incluso cuando el tiempo final no sea dado.

Principio de Pontryagin

A continuación vamos a desarrollar la formulación general de las condiciones necesarias siguiendo lo planteado en [4] para el caso de sistemas autónomos. Como mencionamos en la proposición 2.9 se puede formular el problema de control óptimo utilizando variables extendidas y obtener de esta forma las siguientes ecuaciones de estado y coestado

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, u) &= (f_0(x, u), f(x, u)), \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{f}(x, u), \\ \dot{\hat{\lambda}}(t) &= -\hat{f}_x(x, u)^T \cdot \hat{\lambda}(t), \end{aligned} \quad (2.41)$$

Esta formulación permite considerar al *Hamiltoniano extendido* con un multiplicador adicional asociado al integrando de la función objetivo.

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\lambda}, \hat{x}, \hat{u}) = \lambda_0 \cdot f_0(x, u) + \lambda_1 \cdot f_1(x, u) + \cdots + \lambda_n f_n(x, u). \quad (2.42)$$

Esta formulación es una generalización de lo planteado en (2.39) donde el caso $\lambda_0 \neq 0$ es equivalente mediante una normalización, y el caso $\lambda_0 = 0$ da lugar a lo que se conoce como el problema **abnormal**.

Si se consideran fijos los componentes $\hat{\lambda}(t)$ y $\hat{x}(t)$, se puede buscar el supremo del Hamiltoniano en cada instante $t \in [0, t_F]$, es decir se tiene:

$$M(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t)) := \sup_{v \in U} \hat{\mathcal{H}}(\hat{\lambda}(t), \hat{x}(t), v).$$

Notemos que estas definiciones planteadas inicialmente para el problema de maximización valen también para el problema de minimización haciendo el cambio correspondiente en la función objetivo

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J[u] = \max_{u \in \mathcal{U}} -J[u] = \max_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{t_f} -f_0(x(t), u(t)) dt.$$

Obteniendo la función Hamiltoniana correspondiente

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\lambda}, \hat{x}, u) = -\lambda_0 \cdot f_0(t, x, u) + \lambda_1 \cdot f_1(t, x, u) + \cdots + \lambda_n f_n(t, x, u).$$

Se tiene finalmente el resultado principal de esta sección cuya demostración se puede ver en detalle en [9] y [4].

Teorema 2.8 (Principio del Máximo de Pontryagin).

Dado el problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & J[t_F, u] = \int_0^{t_F} f_0(x(t), u(t)) dt \\ \text{Sujeto a} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ & x(t_0) = x_0 \quad x(t_F) = x_F, \\ & t_F \in (0, +\infty), \\ & u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in [u_{min}, u_{max}]\}. \end{aligned}$$

Si (u^, x^*) es un par óptimo, entonces existe un vector $\hat{\lambda}^*$ tal que la terna $(u^*, \hat{x}^*, \hat{\lambda}^*)$ es solución del sistema 2.41 y además cumple:*

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\lambda}^*, \hat{x}^*, u^*) = M(\hat{\lambda}^*, \hat{x}^*), \quad \text{c.t.p. en } [t_0, t_F] \quad (2.43a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\lambda}^*, \hat{x}^*, u^*) = 0 \text{ en } [t_0, t_F], \quad (2.43b)$$

$$\lambda_0(t) = \lambda(t_0) \leq 0 \quad \text{c.t.p. en } [t_0, t_F], \quad (2.43c)$$

$$\hat{\lambda} \neq 0. \quad (2.43d)$$

En particular la igualdad (2.43a) recibe el nombre de *condición de optimalidad*, mientras que (2.43b) y (2.43c) son la *condición de estacionalidad o transversalidad*, y (2.43d) es la *condición de no trivialidad*.

2.2.6. Arco singular y condición de Legendre-Clebsch

A partir del Principio del Máximo de Pontryagin visto en la sección anterior se puede observar que las condiciones necesarias plantean un sistema de ecuaciones que caracterizan a la terna $(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t))$. Este sistema no siempre se podrá resolver de forma directa aunque como veremos a continuación existen casos en los que se puede obtener más información sobre el control $u^*(t)$ para el problema donde el conjunto de control es acotado. Basaremos el siguiente desarrollo en lo expuesto en [5] y [17]

Consideremos el problema de control óptimo donde la función de costo y la función dinámica son lineales respecto al control, es decir:

$$\begin{aligned} f_0(t, x, u) &= f_0^1(t, x) + f_0^2(t, x).u, \\ f(t, x, u) &= f^1(t, x) + f^2(t, x).u. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En este caso el Hamiltoniano resulta lineal respecto al control $u = u(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \lambda, x, u) &= (f_0^1(t, x) + \lambda f^1(t, x)) + (f_0^2(t, x) + \lambda f^2(t, x)).u \\ &=: \mathcal{H}^1(t, \lambda, x) + \mathcal{H}^2(t, \lambda, x).u. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por la condición de optimalidad vista en la proposición 2.8 se tiene que para casi todo punto vale

$$\mathcal{H}(t, \hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \sup_{v \in U} \mathcal{H}(t, \hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), v). \quad (2.46)$$

Si usamos la notación $\mathcal{H}_*^i(t) = \mathcal{H}^i(t, \hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t))$ para $i = 1, 2$, esto equivale a afirmar que, salvo en un conjunto de medida cero, si fijamos t vale

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_*^1(t) + \mathcal{H}_*^2(t).u^*(t) &\geq \mathcal{H}_*^1(t) + \mathcal{H}_*^2(t).v \\ \mathcal{H}_*^2(t).u^*(t) &\geq \mathcal{H}_*^2(t).v, \end{aligned} \quad (2.47)$$

para todo $v \in U = [u_{min}, u_{max}]$.

Se tiene luego que el signo del factor que multiplica al control en (2.47) define cuándo el valor óptimo se toma en un extremo u otro del intervalo. A este factor, que depende de $t \in [t_0, t_F]$, lo llamamos *función switching* y se define para el caso lineal como

$$\phi(t) := \mathcal{H}_*^2(t) = \mathcal{H}_u(t, \hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)).$$

Si suponemos que la función $\phi(t)$ es continua, se puede estudiar el signo a partir de sus raíces, en particular se distinguen tres casos posibles:

- (a) cuando la función switching se anula en un intervalo,
- (b) cuando las raíces son puntos aislados finitos,

(c) cuando las raíces son puntos aislados con un punto de acumulación.

El caso (a) da lugar a lo que se conoce como solución singular, cuya caracterización requiere condiciones adicionales. En el caso (b) las soluciones son de tipo *bang-bang*, es decir, controles que alternan entre los extremos del intervalo. Por último, el caso (c) plantea lo que se conoce como *Fenómeno de Fuller* que omitiremos en el presente trabajo aunque se puede ver en profundidad para casos particulares en [9].

Para el caso bang-bang se puede ver la alternancia de valores tomando un intervalo (t_a, t_b) que no contenga raíces en su interior. En este caso podemos usar la desigualdad (2.47) para determinar el valor de u^* a partir del signo de $\phi(t)$:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{Si } \phi(t) > 0 \text{ en } (t_a, t_b) \\ u_{min} & \text{Si } \phi(t) < 0 \text{ en } (t_a, t_b) \end{cases} \quad (2.48)$$

Para el caso cuando $\phi(t) = 0$ en un intervalo se tiene que la desigualdad (2.47) se cumple trivialmente para cualquier valor en U y por lo tanto la condición de optimalidad no nos brinda restricciones para caracterizar u por lo que se necesitará de ecuaciones adicionales para definir el control óptimo. Estas restricciones se obtienen a través de lo que se conoce como las condiciones generalizadas de Legendre-Clebsch.

Para el caso en que el problema es lineal respecto al control se tiene que

$$\phi(t) = \mathcal{H}_u(t, \lambda^*(t), x^*(t), u^*(t)) = f_0^2(t, x(t)) + \lambda(t)f^2(t, x(t)), \quad (2.49)$$

donde diremos, en caso de existir, que $x^*(t)$ es un arco singular extremal. Para caracterizar el control singular u^* utilizaremos los siguientes resultados presentados en [5].

Definición 2.6. Se define el orden de un arco singular extremal en un intervalo (t_a, t_b) como el entero q tal que $\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\mathcal{H}_u$ es el mínimo orden de derivada total de $\mathcal{H}_u$ en el que aparece explícitamente u .

Definición 2.7. Se define el orden intrínseco de un problema de control óptimo en el cual el control aparece linealmente, como el menor entero q tal que $\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\mathcal{H}_u$ depende explícitamente de u

Teorema 2.9 (Legendre-Clebsch). Supongamos que (x, p, u) es un extremo normal para el problema de orden intrínseco q , con un arco singular en el intervalo (t_a, t_b) , y tal que $u(t) \leq K$ para $t \in (t_a, t_b)$. Luego, para que el extremo sea óptimo es necesario que valga

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \mathcal{H}_u(t, x^*, \cdot, \lambda^*) \right] \geq 0, \quad (2.50)$$

para todo $t \in (t_a, t_b)$ para los cuales u es analítica.

La desigualdad (2.50) permite agregar una restricción adicional a las condiciones dadas por el teorema 2.8. Como veremos en nuestro caso de estudio, esto permitirá hallar la solución $u^*(t)$ en el intervalo donde la solución es singular. Luego la solución del problema de control óptimo para el caso lineal será una combinación de un control de tipo bang-bang y un arco singular obtenido a partir de la condición de Legendre-Clebsch.

Capítulo 3

Control sobre Sistema Predador-Presa

3.1. Modelo Lotka-Volterra sin control

A continuación abordaremos el tema principal del presente trabajo. En las secciones anteriores vimos las distintas herramientas de modelado matemático para la dinámica de poblaciones. La representación mediante ecuaciones diferenciales así como la definición abstracta de sistema nos permite representar las relaciones de los distintos agentes que conforman un sistema ecológico. Entre las múltiples relaciones interespecíficas, una de las más estudiadas es el modelo predador-presa. Esta representación estudiada de forma independiente por A. Lotka y V. Volterra formaliza matemáticamente la relación de predación y es un enfoque clásico de interacción en ecología aunque se puede extender a relaciones más generales entre agentes como también aplicarse a modelos en otras áreas como la economía.

De la misma forma, otra área de interés debido a su impacto sobre los ecosistemas como también por sus consecuencias en las actividades del ser humano, es el estudio del crecimiento poblacional de las especies. El efecto puede ser económico, mediante la afectación de actividades productivas, como también sanitario por su impacto en la propagación de enfermedades. En este contexto, se puede abordar el estudio de plagas, como el análisis de poblaciones animales, vegetales o de microorganismos, cuya proliferación tiene efectos negativos en las actividades humanas y el medio ambiente.

Como consecuencia, el objetivo del control de plagas consistirá en regular el crecimiento poblacional de estas especies, en nuestro caso de interés considerando una dinámica preexistente de tipo Lotka-Volterra, mediante la aplicación de técnicas control, como por ejemplo, las mencionadas en la sección 1.3. Uno de los autores que estudió este problema y cuyo trabajo motiva el desarrollo posterior es B.S.Goh en [10] donde se abordan distintos modelos de control óptimo aplicado a la dinámica de predador-presa siendo la presa una plaga de insectos.

Para empezar consideraremos el sistema dinámico dado por el modelo de Lotka-

Volterra donde consideramos X_1 como la plaga y X_2 como su predador:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (\alpha_1 - \beta_1 X_2) X_1, \\ \dot{X}_2 = (\beta_2 X_1 - \alpha_2) X_2, \\ (X_1, X_2)(t_0) = (x_1, x_2) \text{ con } x_1, x_2 > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Este modelo de interacción, a pesar de su simplicidad, es frecuentemente referenciado en ecología y biología matemática. Entre los autores que estudiaron este tópico y en cuyo análisis basaremos el desarrollo a continuación están N. Gotelli en [11] y E. Sontag en [18].

El modelo asume ciertos supuestos sobre las especies interactuantes, estas son:

- El crecimiento de la población de presas está limitada solamente por los predadores.
- El predador tiene una alimentación especialista, es decir, en caso de ausencia de la presa se extinguiría.
- Los individuos de la especie predadora pueden consumir un número infinito de presas.
- El predador y la presa se encuentran de manera aleatoria en un entorno homogéneo.

Visto como ecuación diferencial, se puede estudiar el comportamiento del sistema caracterizando los puntos de equilibrio y su diagrama de fases. En particular se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *El problema de valor inicial dado por (3.1) cumple:*

1. *Sus únicos puntos de equilibrio son $P = \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$ y $P = (0, 0)$.*
2. *La solución del sistema (3.1) define una curva cerrada dada por la ecuación*

$$\alpha_2 \ln(X_1) - \beta_2 X_1 + \alpha_1 \ln(X_2) - \beta_1 X_2 = c. \quad (3.2)$$

En particular si $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ vale $c \leq -2$

Demostración. Para la demostración supongamos que $X_1 \neq 0$ y $X_2 \neq 0$. Calculando el cociente entre ambas ecuaciones se tiene:

$$\frac{\dot{X}_2}{\dot{X}_1} = \frac{-\alpha_2 X_2 + \beta_2 X_1 X_2}{\alpha_1 X_1 - \beta_1 X_1 X_2} \implies [\alpha_1 X_1 - \beta_1 X_1 X_2] \dot{X}_2 = [-\alpha_2 X_2 + \beta_2 X_1 X_2] \dot{X}_1. \quad (3.3)$$

Reescribiendo la igualdad y factorizando se obtiene:

$$(X_1 X_2) \left[\alpha_2 \frac{1}{X_1} - \beta_2 \right] \dot{X}_1 + (X_1 X_2) \left[\alpha_1 \frac{1}{X_2} - \beta_1 \right] \dot{X}_2 = 0, \quad (3.4)$$

que es una ecuación exacta con *factor integrante* $\mu(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$.

Luego por la proposición 2.6 se tiene que las soluciones son las curvas de nivel de la función potencial $H(X_1, X_2) = \alpha_2 \cdot \ln(X_1) - \beta_2 \cdot X_1 + \alpha_1 \cdot \ln(X_2) - \beta_1 \cdot X_2$.

Más aún calculando las derivadas de segundo orden se obtiene que la función alcanza su máximo global en el punto de equilibrio no trivial. Luego para toda curva de nivel vale $H(X_1, X_2) \leq H\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$.

Para el caso $X_1 = 0$ o $X_2 = 0$ basta reemplazar en la ecuación 3.1 y se obtiene el punto de equilibrio $P = (0, 0)$. $\square$

Por otra parte, se puede probar la periodicidad de las soluciones de la ecuación (3.1), en particular usaremos los siguientes resultados de las curvas solución:

Proposición 3.2. *Si $(x_1(t), x_2(t))$ es solución de la ecuación (3.1) que pasa por un punto Q entonces su imagen define una curva cerrada cíclica que tiene al punto P en su interior.*

Proposición 3.3. *Si $\mathcal{C}$ es una curva de nivel de la función potencial H definida en (3.2) y se tiene dos puntos $Q, R \in \mathcal{C}$, entonces existe una función $x(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ solución de (3.1) tal que $x(a) = P$ y $x(b) = Q$.*

En la figura 3.1 se puede observar el comportamiento cíclico en el espacio de estados, como así también la representación del tamaño poblacional en función del tiempo tomando los valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$

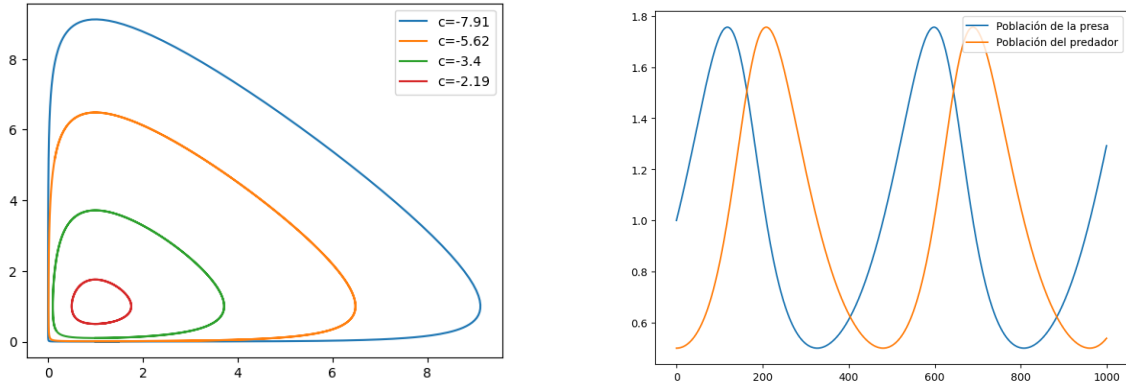


Figura 3.1: Espacio de estados (izquierda) y gráfico de población respecto al tiempo (derecha).

3.2. Modelo de control sobre las presas

El primer caso que estudiaremos es el sistema donde se aplica la variable de control solamente a la población de presas, es decir, un control directo sobre la plaga. Vamos a suponer que el método aplicado no deja residuos y disminuye la tasa de crecimiento de forma proporcional al tamaño de la población. Este caso se suele denominar control mediante un pesticida ideal que puede ser a través de la difusión de una sustancia química o con la introducción de un agente biológico. Para este caso el sistema se expresa mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1 - b_1 u X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2, \end{cases} \quad (3.5)$$

o en forma vectorial como $\dot{X} = LV_1(X, u)$.

Proposición 3.4. *Si $u \equiv cte \in [0, \frac{\alpha_1}{b_1}]$, la ecuación (3.5) define una ecuación diferencial del tipo*

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\tilde{\alpha}_1 - \beta_2 \cdot X_2) X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

con $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - b_1 \cdot u$.

El objetivo de nuestro programa de control será llevar el sistema al punto de equilibrio en un tiempo final no determinado. Respecto a nuestra variable $u(t)$ vamos a suponer que esta toma valores en un intervalo acotado $U = [0, u_{max}]$ y que vista como función está en el espacio de funciones medibles. Tomaremos por simplicidad el caso donde $u_{max} = \frac{\alpha_1}{b_1}$ y se dejará para la sección 3.4 el caso donde $u_{max} < \frac{\alpha_1}{b_1}$.

Por otra parte buscamos minimizar el costo acumulado, consecuencia de la presencia de la plaga y de aplicar el control, tomando una función lineal respecto a ambas variables. Este modelo se puede resumir en el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \int_0^{t_F} [c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot u] \, dt \\ &\text{Sujeto a} \\ &\quad \dot{X}_1 = (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1 - b_1 u X_1, \\ &\quad \dot{X}_2 = (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2, \\ &\quad X(0) = x_0, \, X(t_F) = P, \\ &\quad t_F \in (0, +\infty), \\ &\quad u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in [0, \frac{\alpha_1}{b_1}]\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde X_1 es la población plaga y X_2 sus predadores naturales.

Enunciamos a continuación un resultado que nos permite afirmar que la solución del sistema controlado es invariante en $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ y que está acotado en tiempo finito. Plantearemos el caso general que nos servirá para los casos de estudio de las próximas secciones.

Proposición 3.5. *Sea $X(t) = (X_1(t), X_2(t)) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ solución del problema*

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \alpha_1.X_1 - \beta_1.X_1.X_2 - b_1.u.X_1 & \forall t \in [0, T] \\ \dot{X}_2 &= -\alpha_2.X_2 + \beta_2.X_1.X_2 - b_2.u.X_2 & \forall t \in [0, T] \\ u &\in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in [0, \frac{\alpha_1}{b_1}]\}. \\ (X_1, X_2)(0) &\in D \end{aligned} \tag{3.8}$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Entonces:

1. Vale $(X_1, X_2)(t) \in D \quad \forall t \in [0, T]$.
2. Si $T \leq T_F$ entonces existe $R = R(T_F) \in \mathbb{R}$ tal que $(X_1, X_2)(t) \in B(0, R) \quad \forall t \in [0, T]$

Demostración. Para demostrar 1 consideramos los casos posibles para el punto inicial de la región D .

- Si $X_1(0) = X_2(0) = 0$: por unicidad se tiene que

$$\begin{cases} X_1(t) \equiv 0 \\ X_2(t) \equiv 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, T]$$

es la solución del sistema y se cumple lo pedido.

- Si $X_1(0) = 0$ y $X_2(0) > 0$: tomando la solución trivial para X_1 y resolviendo la ecuación para X_2 se tiene que

$$\begin{cases} X_1(t) \equiv 0 \\ X_2(t) = X_2(0).e^{-\int_0^t \alpha_2 + b_2.u(s) ds} \end{cases}$$

es la solución del sistema. Como $X_2(t) > 0$ se concluye lo pedido.

- Si $X_1(0) > 0$ y $X_2(0) = 0$: se puede plantear igual que antes la solución trivial para X_2 y resolver el sistema resultante para X_1 obteniendo

$$\begin{cases} X_1(t) = X_1(0).e^{\int_0^t \alpha_1 - b_1.u(s) ds} \\ X_2(t) = 0 \end{cases}.$$

Luego por unicidad se tiene que es la solución del sistema y vale lo pedido.

- Si $X_1(0) > 0$, $X_2(0) > 0$: basta observar que el sistema tiene como solución el par

$$\begin{cases} X_1(t) = X_1(0).e^{\int_0^t \alpha_1 - \beta_1.X_2(s) - b_1.u(s) ds} \\ X_2(t) = X_2(0).e^{\int_0^t -\alpha_2 + \beta_2.X_1(s) - b_2.u(s) ds} \end{cases}.$$

Luego como $X_1(t), X_2(t) > 0$ se cumple lo pedido.

Para demostrar 2 se puede utilizar la expresión integral de la función para obtener la acotación uniforme:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) + \int_0^t \underbrace{(\alpha_1 - b_1.u(s))}_{\leq \alpha_1} . X_1(s) - \underbrace{\beta_1.X_1(s).X_2(s)}_{\geq 0} ds \\ &\leq X_1(0) + \alpha_1. \int_0^t X_1(s) ds \end{aligned}$$

Luego usando que $X_1(0) \geq 0$ y aplicando el lema de Gronwall se tiene

$$X_1(t) \leq X_1(0).e^{\alpha_1.t} \leq X_1(0).e^{\alpha_1.T_F} =: R_1(T_F)$$

Por otra parte, planteando un razonamiento similar para la segunda variable se obtiene

$$\begin{aligned} X_2(t) &= X_2(0) + \int_0^t \beta_2. \underbrace{X_1(s)}_{\leq R_1(T_F)} . X_2(s) - \underbrace{(\alpha_2 + b_2.u(s))}_{>0} . \underbrace{X_2(s)}_{\geq 0} ds \\ &\leq X_2(0) + \beta_2.R_1(T_F). \int_0^t X_2(s) ds \end{aligned}$$

Volviendo a aplicar el lema de Gronwall se tiene la acotación respecto a la segunda variable

$$X_2(t) \leq X_2(0).e^{\beta_2.R_1(T_F).t} \leq X_2(0).e^{\beta_2.R_1(T_F).T_F} =: R_2(T_F)$$

Finalmente tomando $R = \max(R_1, R_2)$ y la equivalencia de normas en el espacio $\mathbb{R}^2$ se obtiene el resultado enunciado. $\square$

Veremos a continuación que todo punto inicial se puede llevar al punto de equilibrio aplicando un control adecuado. La demostración se basa en una construcción geométrica que se puede observar en la figura 3.2.

Proposición 3.6. *El sistema descripto en (3.7) es controlable.*

Demostración. Para probar este resultado veremos que se cumple la definición de controlabilidad, es decir, que $\forall Q \in \mathbb{R}_{>0}^2$, existe $u \in \mathcal{U}$ y $t_F > 0$ tal que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{X} &= LV_1(X, u), \\ X(0) &= Q, \\ X(t_F) &= P,\end{aligned}$$

admite solución.

Usaremos la proposición 2.7 para hallar el control a partir de la concatenación de soluciones particulares y la intersección de las curvas de nivel de las ecuaciones definidas en la proposición 3.4.

Dado un punto $Q \in \mathbb{R}_{>0}^2$ existe una única solución de la ecuación (3.1) con condición inicial $X(0) = Q$. Más aún se puede pensar la ecuación de forma vectorial como un caso particular de la ecuación de Lotka-Volterra con control

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= F_1(Y) := LV_1(Y, u_1) \quad \text{con } u_1 \equiv 0, \\ Y(0) &= Q.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Por lo que vimos en la proposición 3.1 esta solución tiene como imagen una curva cerrada alrededor de P que pasa por Q y se puede definir el conjunto compacto K que tiene a esta curva como borde y contiene a su región interior

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : H_1(x, y) \geq H_1(Q)\},\tag{3.10}$$

con la función potencial

$$H_1(x, y) = \alpha_2 \ln(x) - \beta_2 x + \alpha_1 \ln(y) - \beta_1 y.\tag{3.11}$$

Por otra parte, usando el punto P se puede definir la función que pasa por el mismo y cumple la ecuación (3.1) tomando el control máximo $u_2 \equiv \frac{\alpha_1}{b_1}$, es decir, existe Z que cumple

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= LV_1(Z, u_2) =: F_2(Z) \quad \text{con } u_2 \equiv \frac{\alpha_1}{b_1}, \\ Z(0) &= P.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Para este control se tiene el sistema (3.6) con $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - b_1 \frac{\alpha_1}{b_1} = 0$. Luego para la respuesta $Z = (Z_1, Z_2)$ se puede aplicar un razonamiento similar al visto en la proposición 3.5 y se tiene que $Z_1(t), Z_2(t) > 0$. Más aún se tiene

$$\dot{Z}_1 = -\alpha_1 Z_1 Z_2 < 0,$$

por lo que $Z_1 : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente y existe el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_1(t) = Z_1^0$.

Por otra parte utilizando la proposición 3.1 se puede obtener la relación implícita entre Z_1 y Z_2 :

$$\alpha_2 \ln(Z_1) - \beta_2 Z_1 + \tilde{\alpha}_1 \ln(Z_2) - \beta_1 Z_2 = c.$$

Usando el hecho de que $\tilde{\alpha}_1 = 0$, se puede despejar Z_2 y se obtiene

$$Z_2(t) = \frac{\alpha_2}{\beta_1} \ln(Z_1(t)) - \frac{\beta_2}{\beta_1} Z_1(t) - c. \quad (3.13)$$

Luego existe el límite $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_2(t) = Z_2^0$ y por la proposición 2.5 se tiene que (Z_1^0, Z_2^0) es un punto de equilibrio del sistema (3.12).

De manera similar a lo visto en la proposición 3.1 se tiene que los puntos de equilibrio del sistema (3.12) se encuentran en la semirrecta

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$$

y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_2(t) = 0$.

Por otra parte, para el caso $t \rightarrow -\infty$ se puede utilizar el hecho de que $Z_2(t) > 0$ y utilizando la expresión (3.13) se deduce que $Z_1(t)$ se encuentra acotado superiormente. Se concluye entonces que existe el límite $\lim_{t \rightarrow -\infty} Z_1(t)$ e igual que antes se tiene que $\lim_{t \rightarrow -\infty} Z_2(t) = 0$.

A partir del último límite se puede afirmar que existe $t_0 \in (-\infty, 0)$ tal que $Z(t) \in K^c$, donde por la definición del conjunto K se tiene:

$$K^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : H_1(x, y) < H_1(Q)\}.$$

Utilizando la continuidad de Z y de H_1 existe $\tilde{t}_1 \in (t_0, 0)$ tal que $H_1(Z(\tilde{t}_1)) = H_1(Q)$, y por lo tanto $Im(Z) \cap Im(Y) \neq \emptyset$. Llamemos a este punto de intersección $R := Z(\tilde{t}_1)$.

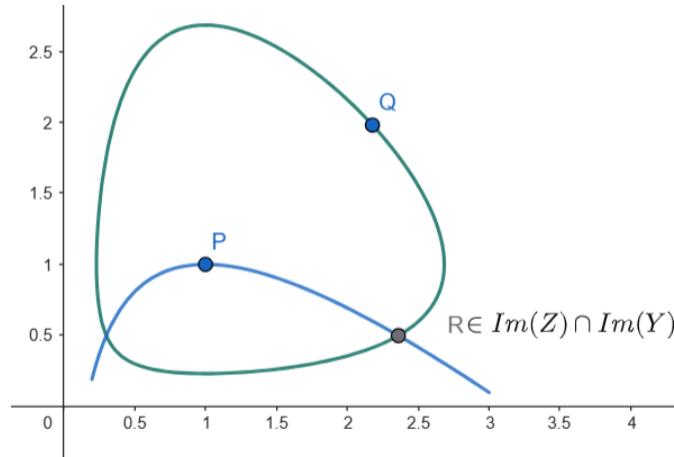


Figura 3.2: Intersección entre las curvas de nivel definidas por los puntos P y Q .

Restringiendo la función Z al arco definido a partir de P y R se obtiene una función $Z : [\tilde{t}_1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple:

$$\begin{aligned} Z &= F_2(Z), \\ Z(0) &= P, \\ Z(\tilde{t}_1) &= R. \end{aligned}$$

Con el mismo punto R y asumiendo sin pérdida de generalidad que Y es la solución maximal periódica, se puede considerar la restricción $Y : [0, \tilde{t}_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} Y &= F_1(Y), \\ Y(0) &= Q, \\ Y(\tilde{t}_2) &= R. \end{aligned}$$

Luego por la proposición 2.7 existe $X := Y * Z$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F_1(Y) * F_2(Z), \\ X(0) &= Q, \\ X(t_F) &= P. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Notemos que la función concatenada también se puede describir como un caso particular del sistema de Lotk-Volterra con control. Para esto basta observar la definición de la función concatenada:

$$F_1(Y) * F_2(Z) = \begin{cases} F_1(Y(t)) = LV_1(Y, u_1) & \text{si } t \in I_1 \\ F_2(Z(t)) = LV_1(Z, u_2) & \text{si } t \in I_2 \end{cases} \implies \dot{X} = LV_1(X, u),$$

donde u es el control de tipo bang-bang

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in I_1 \\ \frac{a_1}{b_1} & \text{si } t \in I_2 \end{cases}.$$

□

Como resultado de la proposición anterior se tiene que el problema a tiempo libre tiene al menos un control admisible. Veremos a continuación que para nuestro caso particular esto garantiza la existencia de un control óptimo.

Teorema 3.1. *El problema (3.7) tiene control óptimo.*

Demostración. Para demostrar la existencia del control óptimo usaremos los resultados vistos en la sección 2.2.4 aplicado a las funciones y conjuntos descriptos en el sistema (3.7). En primer lugar notemos que nuestro problema considera el tiempo final libre, sin embargo veremos a continuación que se puede redefinir la minimización a un problema de tiempo fijo.

Por la proposición 3.6 existe al menos un control factible $\bar{u}$ asociado a un tiempo final $\bar{T}$. Dado $u \in \mathcal{U}[0, T]$, otro control factible con costo menor respecto a $\bar{u}$, se tiene la relación

$$J[u] \leq J[\bar{u}] \implies \int_0^T c_1 X_1(s) + c_2 u(s) ds \leq \int_0^{\bar{T}} c_1 \bar{X}_1(s) + c_2 \bar{u}(s) ds \tag{3.15}$$

Por otra parte, las ecuaciones del sistema de Lotka-Volterra nos permiten obtener una expresión para la integral de X_1 :

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_2(t) &= -\alpha_2 \cdot X_2(t) + \beta_2 \cdot X_2(t) \cdot X_1(t) \\
 \implies \frac{\dot{X}_2(t)}{X_2(t)} &= -\alpha_2 + \beta_2 \cdot X_1(t) \\
 \implies \ln(X_2(T)) - \ln(X_2(0)) &= \int_0^T (-\alpha_2 + \beta_2 \cdot X_1(s)) ds \\
 \implies \beta_2 \cdot \int_0^T X_1(s) ds &= \ln\left(\frac{X_2(T)}{X_2(0)}\right) + \alpha_2 \cdot T
 \end{aligned}$$

valiendo lo mismo si se toma el par $(\bar{u}, \bar{T})$.

Se tiene además que ambos controles definen soluciones que cumplen las condiciones de borde dadas en (3.7), es decir, vale $X_2(0) = \bar{X}_2(0)$ y $X_2(T) = \bar{X}_2(\bar{T})$. Luego reemplazando en la ecuación (3.15) y usando que $0 \leq u, \bar{u} \leq \frac{\alpha_1}{b_1}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 c_1 \cdot \int_0^T X_1(s) ds &\leq J[u] \leq J[\bar{u}] \leq c_1 \cdot \int_0^{\bar{T}} \bar{X}_1(s) ds + c_2 \cdot \frac{\alpha_1}{b_1} \cdot \bar{T} \\
 \implies \frac{c_1}{\beta_2} \cdot [\ln\left(\frac{X_2(T)}{X_2(0)}\right) + \alpha_2 \cdot T] &\leq \frac{c_1}{\beta_2} \cdot [\ln\left(\frac{\bar{X}_2(\bar{T})}{\bar{X}_2(0)}\right) + \alpha_2 \cdot \bar{T}] + c_2 \cdot \frac{\alpha_1}{b_1} \cdot \bar{T} \\
 \implies \frac{c_1}{\beta_2} \cdot \alpha_2 \cdot T &\leq \frac{c_1}{\beta_2} \cdot \alpha_2 \cdot \bar{T} + c_2 \cdot \frac{\alpha_1}{b_1} \cdot \bar{T} \\
 \implies T &\leq \bar{T} + \frac{\beta_2 \cdot c_2}{\alpha_2 \cdot c_1} \cdot \frac{\alpha_1}{b_1} \cdot \bar{T} =: \hat{T}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\bar{u}(s) \in [0, \frac{\alpha_1}{b_1}]$.

Siguiendo lo visto en el teorema de existencia 2.6 y el corolario 2.1 se tiene que, en caso de cumplirse las hipótesis $H1, H2, H3, H5$ del teorema y la condición $H4''$ del corolario, la acotación uniforme sobre el tiempo permite extender los controles al intervalo $[0, \hat{T}]$ preservando el valor del funcional. Esto nos permite afirmar que el problema de minimización se puede restringir a las funciones admisibles con tiempo final fijo $t_F = \hat{T}$.

Estamos en condiciones de verificar las hipótesis del teorema de existencia.

- **H1:** Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \in S \implies |g_j(x)| \leq M(1 + |x|) \quad \forall j = 0, 1, \dots, m$:

En este caso las funciones quedan definidas como

$$\begin{aligned}
 g_0(x_1, x_2) &= ((\alpha_1 - \beta_1 \cdot x_2) \cdot x_1, (\beta_2 \cdot x_1 - \alpha_2) \cdot x_2), \\
 g_1(x_1, x_2) &= (-b_1 \cdot x_1, 0),
 \end{aligned}$$

donde consideramos $(x_1(t), x_2(t))$ solución de (3.7) en un intervalo $[0, T]$ con $T \leq \hat{T}$.

Por la proposición 3.5 se tiene que $(x_1(t), x_2(t))$ están uniformemente acotadas en un compacto $\overline{B(0, R)}$ y se tiene:

$$\begin{aligned}
 |g_0(x_1, x_2)| &= |(\alpha_1 - \beta_1 \cdot x_2, \beta_2 \cdot x_1 - \alpha_2) \cdot (x_1, x_2)| \\
 &\leq \|(\alpha_1 - \beta_1 \cdot x_2, \beta_2 \cdot x_1 - \alpha_2)\| \cdot \|(x_1, x_2)\| \\
 &\leq M_1 \cdot \|(x_1, x_2)\|
 \end{aligned}$$

donde M_1 se obtiene tomando el máximo del primer factor sobre el compacto. Para g_1 se obtiene una cota de forma similar

$$|g_1(x_1, x_2)| = |(-b_1, 0) \cdot (x_1, x_2)| \leq M_2 \cdot \|(x_1, x_2)\|$$

Tomando $M = \max(M_1, M_2)$ se obtiene la acotación buscada.

- **H2:** U es compacto y convexo:

Basta observar que el conjunto considerado es $U = [0, \frac{a_1}{b_1}]$.

- **H3:** $E \subset S \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos cerrados:

Para el problema a tiempo fijo consideramos $E = \{x_0\}$ y $S = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ donde ambos conjuntos son cerrados y vale la inclusión.

- **H4'':** f_0 es semicontinua inferiormente en (x, u) , convexa en u que además cumple $f_0(x, u) > 0 \forall x \notin E$ y satisface la implicación (2.34).

Se tiene la función $f_0(x, u) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot u$ lineal respecto a las variables. En particular es continua y convexa respecto a u . De la misma forma, por lo visto en la demostración de la proposición 3.5 se tiene que las trayectorias factibles se encuentran en $\mathbb{R}_{>0}^2$ y como $c_1, c_2 > 0$ entonces vale $f_0(x, u) > 0$. La implicación (2.34) se cumple por lo visto en (3.16).

- **H5:** Para todo $x \in E$ se tiene $T_E(x) \cap f(x, U) \neq \emptyset$.

Se tiene en este caso $T_P(P) = \{\vec{0}\}$ y por otra parte $f(P, 0) \in f(P, U)$ donde $f(P, 0) = g_0(P) + g_1(P), 0 = \vec{0}$.

Luego como el problema tiene un control factible por la proposición 3.6 se puede aplicar el teorema de existencia y existe un control óptimo. $\square$

Por último caracterizamos la solución del problema utilizando el principio de Pontryagin.

Teorema 3.2. *El sistema descrito en (3.7) tiene como solución un control de tipo bang-bang (combinación de $u = 0$ y $u = u_{max}$).*

Demostración. Para la demostración vamos a considerar la formulación del Principio de Pontryagin vista en 2.8. Plantearemos el caso general dado por el sistema (3.8) y veremos que, cuando $b_1 > 0$ y $b_2 = 0$, se obtiene el resultado particular de control sobre la plaga.

Sea $H(x, u, \lambda) = \lambda_0 \cdot f_0(x, u) + \lambda_1 \cdot f_1(x, u) + \dots + \lambda_n \cdot f_n(x, u)$ la función Hamiltoniana y (x^*, u^*) solución óptima del problema de minimización asociada a la función adjunta $\lambda^*(t)$ correspondiente, entonces vale:

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) &= \sup_{v \in [0, u_{max}]} H(x^*(t), v, \lambda^*(t)) \quad c.t.p. \ t \in [0, t_F], \\ \lambda_0(t) &= \lambda_0(t_0), \\ \lambda &\neq 0. \end{aligned}$$

Con las ecuaciones dinámicas del caso general se puede formular el Hamiltoniano como

$$H(x, u, \lambda) = \lambda_0[c_1.x_1 + c_2.u] + \lambda_1[(\alpha_1 - \beta_1.x_2).x_1 - b_1.u.x_1] + \lambda_2[x_2.(\beta_2.x_1 - \alpha_2) - b_2.u.x_2],$$

donde para este primer caso corresponde $b_1 \neq 0$ y $b_2 = 0$.

Desarrollando el Hamiltoniano se puede reescribir en términos lineales respecto al control

$$H(x^*, u, \lambda^*) = H_1(x^*, \lambda^*) + H_2(x^*, \lambda^*).u, \quad (3.17)$$

con

$$\begin{aligned} H_1(x, \lambda) &= \lambda_0.c_1.x_1 + \lambda_1[(\alpha_1 - \beta_1.x_2).x_1] + \lambda_2[x_2.(\beta_2.x_1 - \alpha_2)], \\ H_2(x, \lambda) &= \lambda_0.c_2 - \lambda_1.b_1.x_1 - \lambda_2.b_2.x_2. \end{aligned}$$

Siguiendo un análisis similar al visto en la sección 2.2.6 se puede expresar la condición de optimalidad con el uso de la función switching $\phi(t) = H_2(x^*(t), \lambda^*(t))$ y se tiene

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(t) > 0 \forall t \in (t_a, t_b) &\implies u^*(t) = u_{max} \\ \text{Si } \phi(t) < 0 \forall t \in (t_a, t_b) &\implies u^*(t) = 0 \\ \text{Si } \phi(t) = 0 \forall t \in (t_a, t_b) &\implies \text{No define} \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde consideramos

$$\phi(t) = \lambda_0.c_2 - \lambda_1.b_1.x_1 - \lambda_2.b_2.x_2. \quad (3.19)$$

Probaremos a continuación que el caso $\phi(t) = 0$ no puede suceder y por lo tanto la solución deberá ser de tipo bang-bang.

Para lo siguiente planteamos las ecuaciones adjuntas para el Hamiltoniano del problema general:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_0.c_1 - \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1.x_2 - b_1.u) - \lambda_2.\beta_2.x_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1\beta_1.x_1 - \lambda_2.(\beta_2.x_1 - \alpha_2 - b_2.u) \end{cases}. \quad (3.20)$$

Si suponemos cierta la igualdad $\phi(t) = 0 \forall t \in (t_a, t_b)$ se tiene:

$$0 = \dot{\phi}(t) = \dot{\lambda}_0.c_2 - \dot{\lambda}_1.b_1.x_1 - \lambda_1.b_1.\dot{x}_1 - \dot{\lambda}_2.b_2.x_2 - \lambda_2.b_2.\dot{x}_2. \quad (3.21)$$

Usando la condición de estacionalidad (2.43c) y las igualdades obtenidas en (3.20) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= -[-\lambda_0.c_1 - \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1.x_2 - b_1.u) - \lambda_2.\beta_2.x_2].b_1.x_1 - b_1\lambda_1.\dot{x}_1 \\ &\quad - [\lambda_1\beta_1.x_1 - \lambda_2.(\beta_2.x_1 - \alpha_2 - b_2.u)].b_2.x_2 - \lambda_2.b_2.\dot{x}_2. \end{aligned}$$

Distribuyendo y reordenando los términos se tiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}(t) = & [\lambda_0.c_1.x_1 + \lambda_1[(\alpha_1 - \beta_1.x_2).x_1 - b_1.u.x_1] + \lambda_2.\beta_2.x_1.x_2].b_1 \\
 & + [-\lambda_1\beta_1.x_1.x_2 + \lambda_2.[(\beta_2.x_1 - \alpha_2).x_2 - b_2.u.x_2]].b_2 \\
 & - b_1\lambda_1.\dot{x}_1 \\
 & - \lambda_2.b_2.\dot{x}_2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora si se utiliza el sistema (3.5) se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}(t) = & [\lambda_0.c_1.x_1 + \lambda_1[(\alpha_1 - \beta_1.x_2).x_1 - b_1.u.x_1] + \lambda_2.\beta_2.x_1.x_2].b_1 \\
 & + [-\lambda_1\beta_1.x_1.x_2 + \lambda_2.[(\beta_2.x_1 - \alpha_2).x_2 - b_2.u.x_2]].b_2 \\
 & - b_1\lambda_1.[(\alpha_1 - \beta_1.x_2).x_1 - b_1.u.x_1] \\
 & - \lambda_2.b_2.[(\beta_2.x_1 - \alpha_2).x_2 - b_2.u.x_2].
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Simplificando se llega a la igualdad

$$\dot{\phi}(t) = [\lambda_0.c_1.x_1 + \lambda_2.\beta_2.x_2.x_1].b_1 + [-\lambda_1.\beta_1.x_1.x_2].b_2.$$

Como asumimos $\dot{\phi}(t) = 0$, en particular se tiene

$$\dot{\phi}(t) = x_1[\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2] = 0. \tag{3.24}$$

Más aún suponiendo para las soluciones factibles podemos suponer $x_1 > 0$, y se tiene de la igualdad anterior:

$$\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.X_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2 = 0. \tag{3.25}$$

Tomando la expresión anterior se puede reemplazar en la derivada de segundo orden de la función $\phi(t)$ y se concluye

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi}(t) = & \dot{x}_1[\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2] \\
 & + x_1[\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2]^{\bullet} \\
 = & x_1[\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2]^{\bullet} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Usando de nuevo que $x_1 > 0$ y las ecuaciones (3.5), (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 = & -\dot{\lambda}_1.b_2.\beta_1.x_2 - \lambda_1.b_2.\beta_1.\dot{x}_2 + \dot{\lambda}_2.\beta_2.b_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.\dot{x}_2 \\
 = & -[\lambda_0.c_1 - \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1.x_2 - b_1.u) - \lambda_2.\beta_2.x_2].b_2.\beta_1.x_2 \\
 & - \lambda_1.b_2.\beta_1.\dot{x}_2 \\
 & + [\lambda_1.\beta_1.x_1 - \lambda_2(\beta_2.x_1 - \alpha_2 - b_2.u)]\beta_2.b_1.x_2 \\
 & + \lambda_2.\beta_2.b_1.\dot{x}_2.
 \end{aligned}$$

Distribuyendo y simplificando términos se concluye a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} 0 &= [\lambda_0.c_1 + \lambda_1(\alpha_1 - \beta_1.x_2 - b_1.u) + \lambda_2.\beta_2.x_2].b_2.\beta_1.x_2 \\ &\quad + [\lambda_1.\beta_1.x_1].\beta_2.b_1.x_2 \\ &\quad - \lambda_1.b_2.\beta_1.[x_2.(\beta_2.x_1 - \alpha_2) - b_2.u.x_2]. \end{aligned}$$

De donde se puede continuar el desarrollo y factorizando respecto a x_2 se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= x_2.[\lambda_0.c_1.b_2.\beta_1 + \lambda_2.\beta_2.x_2.b_2.\beta_1 + \lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.x_1 \\ &\quad + \lambda_1.[\alpha_1.b_2.\beta_1 - \beta_1.x_2.b_2.\beta_1 - b_1.u.b_2.\beta_1 - b_2.\beta_1.[(\beta_2.x_1 - \alpha_2) - b_2.u]]] \\ &= x_2[\lambda_0.c_1.b_2.\beta_1 + \lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.x_1 + \lambda_2.\beta_2.b_2.\beta_1.x_2 \\ &\quad + \lambda_1.\beta_1.b_2[\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2).u - \beta_1.x_2 - \beta_2.x_1]]. \end{aligned}$$

Usando la expresión anterior en la ecuación (3.26) se obtiene una expresión para la segunda derivada de la función switching:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) &= x_1.x_2[\lambda_0.c_1.b_2.\beta_1 + \lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.x_1 \\ &\quad + \lambda_2.\beta_2.b_2.\beta_1.x_2 \\ &\quad + \lambda_1.\beta_1.b_2[\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2).u - \beta_1.x_2 - \beta_2.x_1]]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Recordando que estamos asumiendo $x_1, x_2 > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0.c_1.b_2.\beta_1 + \lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.x_1 + \lambda_2.\beta_2.b_2.\beta_1.x_2 \\ &\quad + \lambda_1.\beta_1.b_2[\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2).u - \beta_1.x_2 - \beta_2.x_1]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En este punto volvemos a las consideraciones del sistema en este primer caso donde tomamos $b_1 \neq 0$ y $b_2 = 0$, luego de la igualdad anterior se tiene

$$\lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.x_1 = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Volviendo a la ecuación (3.19) se tiene

$$\lambda_0.c_2 = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Haciendo lo mismo en la ecuación (3.25) se despeja λ_2

$$\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.x_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.x_2 = 0 \implies \lambda_2 = 0.$$

Esto último contradice la condición de no trivialidad $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0$. Luego no puede valer $\phi(t) = 0$ en un intervalo. $\square$

3.3. Modelo de control sobre los predadores

Otro enfoque para regular el crecimiento de la plaga consiste en aplicar la variable de control sobre la población de predadores. Este método se sustenta en el hecho que el predador actúa como un regulador natural del crecimiento de las presas y su dinámica está acoplada con un comportamiento cíclico a lo largo del tiempo. En este sentido el control sobre los predadores también se traduce, en instancias posteriores, en un control de las presas.

Para este caso la dinámica del sistema se representa por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2 - b_2 u X_2, \end{cases} \quad (3.29)$$

o en forma vectorial como $\dot{X} = LV_2(X, u)$. Se tiene igual al caso de control sobre presas la siguiente proposición:

Proposición 3.7. *Si $u \equiv cte \in [0, +\infty)$ la ecuación (3.29) define un sistema de tipo Lotka-Volterra de la forma*

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\alpha_1 - \beta_2 \cdot X_2) X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \tilde{\alpha}_2) \cdot X_2, \end{cases}$$

con $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + b_2 \cdot u$.

De nuevo vamos a considerar como objetivo alcanzar el punto de equilibrio P en un tiempo finito t_F no acotado y bajo las restricciones:

- $0 \leq u \leq u_{max}$, con u_{max} constante positiva arbitraria.
- Minimizando la función de costo

$$J = \int_0^{t_F} [c_1 \cdot N_1 + c_2 \cdot u] dt.$$

Luego el problema de control óptimo se expresa como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \int_0^{t_F} [c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot u] dt \\ &\text{Sujeto a} \\ &\quad \dot{X}_1 = (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1, \\ &\quad \dot{X}_2 = (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2 - b_2 u X_2, \\ &\quad x(0) = x_0, \quad x(t_F) = P, \\ &\quad t_F \in (0, +\infty), \\ &\quad u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in [0, u_{max}]\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Empezamos nuestro análisis probando que existe al menos un control factible.

Proposición 3.8. *El sistema descrito en (3.30) es controlable.*

Para probar la afirmación anterior seguiremos un razonamiento similar al utilizado en la demostración de la proposición 3.6. Mostraremos que al aplicar el control nulo $u \equiv 0$ y el control máximo $u \equiv u_{max}$ se obtiene una familia de curvas donde el resultado vale para todo punto perteneciente a la unión de las curvas.

Veremos en segundo lugar que si tomamos un punto inicial en la región definida por dos curvas consecutivas de la familia definida anteriormente, entonces también es controlable.

Por último probaremos que la familia de curvas definen un cubrimiento del cuadrante y por lo tanto el resultado vale para cualquier punto $Q \in \mathbb{R}_{>0}^2$. La construcción a continuación se sustenta en gran parte en las relaciones geométricas representadas en la figura 3.3.

En el sistema (3.30) vamos a asumir sin pérdida de generalidad que todas las constantes son iguales a 1, esto es $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = u_{max} = 1$. Notemos que acorde a las proposiciones 2.6, 3.1 y 3.7, si se aplica control constante $u \equiv 0$ o $u \equiv 1$, la ecuación (3.29) resulta en dos sistemas de tipo Lotka-Volterra con funciones potenciales H_1 y H_2 , cuyas soluciones definen curvas cerradas alrededor de los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (2, 1)$ respectivamente.

Tomando la función potencial H_2 podemos definir la curva de nivel que pasa por P_1 y tiene a P_2 en su interior.

$$\mathcal{C}_1 : \quad H_2(x, y) = 2.\ln(x_1) - x_1 + \ln(x_2) - x_2 = c_1, \quad (3.31)$$

con $c_1 = H_2(1, 1) = -2$.

Para esta curva tomamos el punto de intersección con la recta $y = 1$ que además tiene componente $x > 2$. Llamemos a este punto $A_1 = (a_1, 1)$ y se tiene

$$A_1 : \quad 2.\ln(a_1) - a_1 + \ln(1) - 1 = c_1, \quad \text{con } a_1 > 2. \quad (3.32)$$

Tomando este elemento y la función potencial H_1 , se puede definir una segunda curva $\mathcal{D}_1$ que pasa por A_1 y tiene a P_1 en su interior. Se tiene luego:

$$\mathcal{D}_1 : \quad H_1(x, y) = \ln(x_1) - x_1 + \ln(x_2) - x_2 = d_1, \quad (3.33)$$

con $d_1 = H_1(a_1, 1)$.

Repitiendo el procedimiento se define ahora un punto $B_1 = (b_1, 1) \in \mathcal{D}_1$ que resulta de la intersección con la recta $y = 1$, y que tiene componente $x < 1$. Se tiene en este caso:

$$B_1 : \quad \ln(b_1) - b_1 + \ln(1) - 1 = d_1, \quad \text{con } b_1 < 1. \quad (3.34)$$

Con este punto se puede iterar el razonamiento y definir una curva de nivel definida por H_2 y que pasa por B_1 . Se tiene en este caso la curva $\mathcal{C}_2$ que cumple

$$\mathcal{C}_2 : \quad 2.\ln(x_1) - x_1 + \ln(x_2) - x_2 = c_2, \quad (3.35)$$

con $c_2 = H_2(b_1, 1)$.

Este proceso permite definir una familia de curvas $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\mathcal{D}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y puntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde los elementos se obtienen de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n+1} : \quad & 2 \ln(x_1) - x_1 + \ln(x_2) - x_2 = c_{n+1} = H_2(b_n, 1), \\ A_{n+1} = (a_{n+1}, 1) \in & \mathcal{C}_{n+1} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, x > 2\}, \\ \mathcal{D}_{n+1} : \quad & \ln(x_1) - x_1 + \ln(x_2) - x_2 = d_{n+1} = H_1(a_{n+1}, 1), \\ B_{n+1} = (b_{n+1}, 1) \in & \mathcal{D}_{n+1} \cap \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, x < 1\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

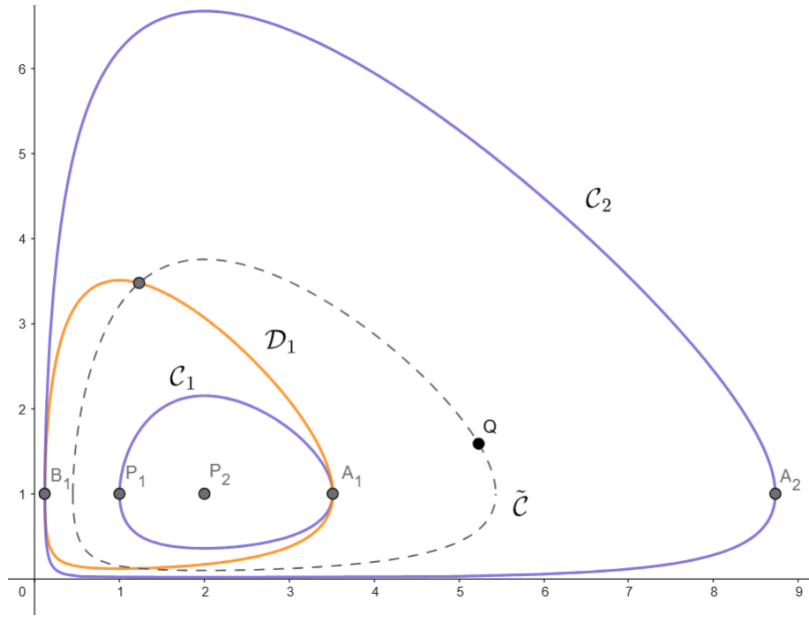


Figura 3.3: Gráfico de las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ (azul) y curva $\mathcal{D}_1$ (naranja). En línea punteada se grafica la curva de nivel $\tilde{\mathcal{C}}_1$ que pasa por el punto $Q \in \text{Int}(\mathcal{C}_2) \setminus \text{Int}(\mathcal{C}_1)$.

De la construcción anterior se obtiene una relación entre dos curvas definidas de forma consecutiva:

$$\mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.37a)$$

$$\mathcal{D}_n \cap \mathcal{C}_{n+1} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.37b)$$

Más aún, si tomamos X e Y soluciones maximales de los sistemas

$$\begin{cases} \dot{X} = LV_2(X, u_{\max}) \\ X(0) = B_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{Y} = LV_2(Y, 0) \\ Y(0) = A_n \end{cases}, \quad (3.38)$$

entonces vale $\mathcal{C}_{n+1} = \text{Im}(X)$ y $\mathcal{D}_n = \text{Im}(Y)$.

Esto nos permite probar el siguiente resultado.

Proposición 3.9. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:*

Si $Q \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$ entonces es controlable.

Demostración. El resultado se demuestra por inducción. Consideremos $Q \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$ se puede separar en casos:

- Si $Q \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{D}_1$: por construcción se tiene que $\mathcal{C}_1 = \text{Im}(X)$ donde X es solución del sistema

$$\begin{aligned}\dot{X} &= LV_2(X, u_{\max}), \\ X(0) &= P_1.\end{aligned}$$

Por la proposición 2.1 vale que X es periódica y por lo tanto existen $0 < t_1 < t_2$ tales que $X(t_1) = Q$ y $X(t_2) = P_1$. Luego tomando $\tilde{X}(t) = X(t + t_1)$ se cumple

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{X}} &= LV_2(\tilde{X}, u), \\ \tilde{X}(0) &= Q, \\ \tilde{X}(t_2 - t_1) &= P_1.\end{aligned}$$

para el control $u(t) \equiv u_{\max}$

- Si $Q \in \mathcal{D}_1$: tomando Y la función definida por la ecuación 3.38 se tiene que existe s_1 tal que $Y(s_1) = Q$. Luego si tomamos $\tilde{Y}(t) = Y(t + s_1)$ y la función $\tilde{X}$ definida en el paso anterior se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{Y}} &= LV_2(\tilde{Y}, u) \quad \text{con } u \equiv 0, \\ \tilde{Y}(0) &= Q, \\ A_1 &\in \text{Im}(\tilde{Y}) \cap \text{Im}(\tilde{X}), \\ P_1 &\in \text{Im}(\tilde{X}),\end{aligned}$$

Luego por la proposición 2.8 se tiene que existe Z que cumple:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= LV_2(Z, u) \\ Z(0) &= Q \\ Z(t_F) &= P_1\end{aligned}$$

donde u es la concatenación de $u(t) \equiv 0$ y $u(t) \equiv u_{\max}$.

Probaremos ahora el paso inductivo suponiendo válida la afirmación para $n \in \mathbb{N}$ y queriendo ver el caso $n + 1$:

- Si $Q \in \mathcal{C}_{n+1} \setminus \mathcal{D}_{n+1}$: podemos considerar X definida en 3.38 y por la proposición 2.1 existe $\tilde{X}$ que cumple:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{X}} &= LV_2(\tilde{X}, u_1) \quad \text{con } u_1 \equiv u_{\max} \\ \tilde{X}(0) &= Q \\ \text{Im}(\tilde{X}) &= \mathcal{C}_{n+1}.\end{aligned}$$

Por la relación dada en (3.37b) se tiene que existe $R \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{C}_{n+1}$. Luego existe $t_1 > 0$ tal que $\tilde{X}(t_1) = R$.

Por otra parte la hipótesis inductiva nos permite afirmar que existe $u_2 \in \mathcal{U}$, $t_F > 0$ y una función Y tal que:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= LV_2(Y, u_2) \\ Y(0) &= R \\ Y(t_F) &= P_1\end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2.7 a las funciones $X_{|[0, t_1]}$, $Y_{|[0, t_F]}$ se obtiene una función una función Z que cumple:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= LV_2(Z, u) \\ Z(0) &= Q \\ Z(t_1 + t_F) &= P_1\end{aligned}$$

con $u = u_1 \cdot \mathbb{1}_{|[0, t_1]} + u_2 \cdot \mathbb{1}_{|[t_1, t_1 + t_F]} \in \mathcal{U}$.

- Si $Q \in \mathcal{D}_{n+1}$: usando la relación (3.37a) se tiene que existe $R \in \mathcal{C}_{n+1} \cap \mathcal{D}_{n+1}$. Considerando la construcción de los pasos anteriores se puede afirmar que existen funciones X_1, X_2 y $t_1, t_2 > 0$ que cumplen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = LV_2(X_1, u_1) \\ X_1(0) = Q \\ X_1(t_1) = R \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_2 = LV_2(X_2, u_1) \\ X_2(0) = R \\ X_2(t_2) = P_1 \end{array} \right\}, \quad (3.39)$$

con $u_1 \equiv 0$ y $u \in \mathcal{U}$. Luego tomando $X_1 * X_2$ y aplicando la proposición 2.7 se concluye la demostración. □

Para probar que un punto Q por fuera de la familia de curvas también es controlable, basta ver que estas curvas son alcanzables desde Q aplicando una combinación de control nulo y control máximo. En particular vamos a considerar la siguiente caracterización de región interior de una curva para continuar con nuestra demostración.

Proposición 3.10. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente cóncava, es decir, $H(f) \prec 0$, y se $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ una curva de nivel. Entonces, la región interior definida por la curva satisface*

$$Int(\mathcal{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > c\}$$

A partir de esta definición y considerando que las funciones H_1 y H_2 son estrictamente cóncavas, se tiene el siguiente resultado cuya interpretación geométrica se puede observar en la figura 3.3.

Proposición 3.11.

1. $\forall n \geq 1$ vale: si $Q \in \text{Int}(\mathcal{C}_{n+1}) \setminus \overline{\text{Int}(\mathcal{C}_n)}$ y se considera el conjunto

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : H_2(x, y) = H_2(Q)\},$$

entonces $\tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset$.

2. Si $Q \in \text{Int}(\mathcal{C}_1)$ y se considera el conjunto

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{>0}^2 : H_1(x, y) = H_1(Q)\},$$

entonces $\tilde{\mathcal{D}} \cap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$.

Por último probaremos que todo punto $Q \in \mathbb{R}_{>0}^2 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n)$ se encuentra en el interior de alguna de las curvas de nivel. Para esto alcanzará probar que la familia de curvas $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento del cuadrante $\mathbb{R}_{>0}^2$. Por la definición (3.36) y la proposición 3.10 se tiene que la región interior de las curvas de nivel $\mathcal{C}_n$ satisfacen

$$\text{Int}(\mathcal{C}_n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : H_2(x, y) > c_n\}. \quad (3.40)$$

Luego alcanza con probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$. Para esto usaremos la definición recursiva de las curvas de nivel en la siguiente proposición:

Proposición 3.12. Para las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas en (3.36) vale

$$c_n = -2 - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i) \quad \forall n \geq 2.$$

En particular se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty.$$

Demostración. La demostración se obtiene por inducción. Para el caso $n = 2$ se prueba el resultado utilizando las definiciones de las curvas de nivel. Como $(b_1, 1) \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{D}_1$ se tiene:

$$\begin{aligned} c_2 &= H_2(b_1, 1) = 2 \ln(b_1) - b_1 + \ln(1) - 1 \\ &= 2 \cdot \underbrace{(\ln(b_1) - b_1 - 1)}_{H_1(b_1, 1)} + b_1 + 1 = 2 \cdot d_1 + b_1 + 1. \end{aligned}$$

Luego usando que $(a_1, 1) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{C}_1$ y la ecuación (3.31) se tiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot d_1 + b_1 + 1 &= 2 \cdot (\ln(a_1) - a_1 - 1) + b_1 + 1 \\ &= \underbrace{2 \ln(a_1) - a_1 - 1}_{H_2(a_1, 1)} + b_1 - a_1 \\ &= -2 - (a_1 - b_1). \end{aligned}$$

Para el caso $n > 2$ se utiliza las igualdades dadas en (3.36) y se tiene:

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} &= H_2(b_n, 1) = 2 \cdot \ln(b_n) - b_n + \ln(1) - 1 \\
 &= 2 \cdot \underbrace{(\ln(b_n) - b_n - 1)}_{H_1(b_n, 1) = H_1(a_n, 1)} + b_n + 1 \\
 &= 2 \cdot (\ln(a_n) - a_n - 1) + b_n + 1 \\
 &= \underbrace{2 \cdot \ln(a_n) - a_n - 1}_{H_2(a_n, 1)} + b_n - a_n \\
 &= c_n - (a_n - b_n).
 \end{aligned}$$

Usando la hipótesis inductiva se tiene entonces

$$c_{n+1} = -2 - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i) + b_n - a_n = -2 - \sum_{i=1}^n (a_i - b_i).$$

Por último como la definición de los puntos asume $a_n > 2$ y $b_n < 1 \forall n \geq 1$ se tiene que $(a_n - b_n) > 1 \forall n \in \mathbb{N}$ y entonces la serie diverge a $-\infty$. $\square$

Con estos resultados estamos en condiciones de probar la proposición 3.8.

Demostración de proposición 3.8. Si $Q \in \mathbb{R}_{>0}^2$ por la proposición 3.12 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n < H_2(Q)$. Si consideramos n_0 tal que

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : c_n < H_2(Q)\},$$

podemos considerar dos casos posibles:

- Si $n_0 > 1$: se tiene $c_{n_0} < H_2(Q) \leq c_{n_0-1}$ y por la ecuación (3.36) vale $Q \in \text{Int}(\mathcal{C}_{n_0}) \setminus \text{Int}(\mathcal{C}_{n_0-1})$. Si consideramos la curva

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_2(x, y) = H_2(Q)\},$$

por la proposición 3.11 se tiene que $\tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}_{n_0} \neq \emptyset$. En particular tomando $R \in \tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}_{n_0}$ podemos utilizar las proposiciones 2.6, 3.1 y 3.7 para definir una función $X_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumple

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= LV_2(X_1, u) \quad \text{con } u \equiv u_{\max}, \\
 X_1(0) &= Q, \\
 X_1(t_1) &= R.
 \end{aligned}$$

Por otra parte si $R \in \mathcal{D}_{n_0}$, por la proposición 3.9 existe $X_2 : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_2 &= LV_2(X_2, u) \quad u \in \mathcal{U} \\
 X_2(0) &= R, \\
 X_2(t_2) &= P_1.
 \end{aligned}$$

Luego concatenando ambas funciones y usando la proposición 2.7 se tiene que Q es controlable.

- Si $n_0 = 1$: se tiene $Q \in \text{Int}(\mathcal{C}_1)$. Aplicando un razonamiento similar al caso anterior se puede considerar

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_1(x, y) = H_1(Q)\},$$

y se tiene $\tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$. Luego se puede considerar las soluciones maximales X_1, X_2 de los sistemas

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = LV_2(X_1, 0) \\ X_1(0) = Q \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{X}_2 = LV_2(X_2, u_{max}) \\ X_2(0) = P_1 \end{cases},$$

y se tiene $\text{Im}(X_1) = \tilde{\mathcal{C}}$ y $\text{Im}(X_2) = \mathcal{C}_1$. Como $\text{Im}(X_1) \cap \text{Im}(X_2) \neq \emptyset$, se puede aplicar la proposición 2.8 y se concluye que Q es controlable.

□

A continuación enunciamos el resultado de existencia para el problema de control óptimo considerado.

Teorema 3.3. *El problema (3.30) tiene control óptimo.*

Demostración. La demostración es similar a lo visto en el teorema 3.1 dado que tomamos los mismos conjuntos E, S, U y las funciones mantienen las propiedades de continuidad y crecimiento lineal como consecuencia de 3.5. Nos limitaremos a probar que vale la implicación (2.34) para el sistema dado.

Por la proposición 3.7 existe al menos un control factible $\bar{u}$ asociado a un tiempo final $\bar{T}$. Dado $u \in \mathcal{U}[0, T]$, otro control factible con costo menor respecto a $\bar{u}$, se tiene la relación

$$J[u] \leq J[\bar{u}] \implies \int_0^T c_1 \cdot X_1(s) + c_2 \cdot u(s) ds \leq \int_0^{\bar{T}} c_1 \cdot \bar{X}_1(s) + c_2 \cdot \bar{u}(s) ds \quad (3.41)$$

Como $0 \leq u, \bar{u} \leq u_{max}$, se puede acotar ambas integrales y se tiene.

$$c_1 \int_0^T X_1(s) ds \leq J[u] \leq J[\bar{u}] \leq c_1 \int_0^{\bar{T}} \bar{X}_1(s) ds + c_2 \cdot u_{max} \cdot \bar{T} \quad (3.42)$$

Usando las ecuaciones del sistema controlado (3.29) podemos obtener una expresión para la integral de X_1 :

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= -\alpha_2 \cdot X_2(t) + \beta_2 \cdot X_2(t) \cdot X_1(t) - b_2 \cdot u(t) \cdot X_2(t) \\ \implies \frac{\dot{X}_2(t)}{X_2(t)} &= -(\alpha_2 + b_2 \cdot u(t)) + \beta_2 \cdot X_1(t) \\ \implies \ln(X_2(T)) - \ln(X_2(0)) &= -\int_0^T (\alpha_2 + b_2 \cdot u(s)) ds + \beta_2 \cdot \int_0^T X_1(s) ds \\ \implies \beta_2 \cdot \int_0^T X_1(s) ds &= \ln\left(\frac{X_2(T)}{X_2(0)}\right) + \alpha_2 \cdot T + b_2 \cdot \int_0^T u(s) ds \end{aligned}$$

valiendo lo mismo si se toma el par $(\bar{u}, \bar{T})$.

Se tiene además que ambos controles definen soluciones que cumplen las condiciones de borde dadas en (3.7), es decir, vale $X_2(0) = \bar{X}_2(0)$ y $X_2(T) = \bar{X}_2(\bar{T})$. Luego reemplazando en (3.42) se tiene

$$\frac{c_1}{\beta_2} \cdot [\ln(\frac{X_2(T)}{X_2(0)}) + \alpha_2 \cdot T + b_2 \cdot \int_0^T u(s) ds] \leq \frac{c_1}{\beta_2} \cdot [\ln(\frac{\bar{X}_2(\bar{T})}{\bar{X}_2(0)}) + \alpha_2 \cdot \bar{T} + b_2 \cdot \int_0^{\bar{T}} \bar{u}(s) ds] + c_2 \cdot u_{max} \cdot \bar{T}.$$

Despejando y usando que el control está acotado se obtiene una acotación para el tiempo T

$$\begin{aligned} \alpha_2 \cdot T + b_2 \cdot \int_0^T u(s) ds &\leq \alpha_2 \cdot \bar{T} + b_2 \cdot \int_0^{\bar{T}} \bar{u}(s) ds + \frac{\beta_2 \cdot c_2}{c_1} \cdot u_{max} \cdot \bar{T} \\ \implies \alpha_2 \cdot T &\leq \alpha_2 \cdot \bar{T} + b_2 \cdot u_{max} \cdot \bar{T} + \frac{\beta_2 \cdot c_2}{c_1} \cdot u_{max} \cdot \bar{T} \\ \implies T &\leq \bar{T} + \frac{b_2 \cdot u_{max}}{\alpha_2} \cdot \bar{T} + \frac{\beta_2 \cdot c_2}{c_1 \cdot \alpha_2} \cdot u_{max} \cdot \bar{T} =: \hat{T} \end{aligned}$$

Luego se cumple la acotación uniforme del tiempo para los controles factibles dado por (2.32). Se concluye el resto de la demostración verificando las condiciones $H1, H2, H3, H4''$ y $H5$ usando 3.5 para el caso $b_1 = 0, b_2 > 0$. $\square$

Por último caracterizamos el control óptimo usando el Principio de Pontryagin.

Teorema 3.4. *El sistema descrito en (3.30) tiene como solución un control de tipo bang-bang.*

Demostración. Para probar el resultado vamos a utilizar las ecuaciones obtenidas en la demostración de la proposición 3.2 tomando en este caso $b_1 = 0$ y $b_2 \neq 0$. Asumiendo $\phi(t) = 0 \forall t \in (t_a, t_b)$ se obtiene la ecuación (3.25) donde tomando ahora $b_2 \neq 0$ y usando que el estado factible cumple $x_2 > 0$ se obtiene

$$-\lambda_1 \cdot b_2 \cdot \beta_1 \cdot x_2 = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Luego si consideramos la ecuación (3.19) vale:

$$\lambda_0 \cdot c_2 - \lambda_2 \cdot b_2 \cdot x_2 = 0. \quad (3.43)$$

Con esto se puede reescribir el Hamiltoniano y se tiene

$$\begin{aligned} H(x^*, u^*, \lambda^*) &= \lambda_0 [c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot u] + \lambda_2 [x_2 \cdot (\beta_2 \cdot x_1 - \alpha_2) - b_2 \cdot u \cdot x_2] \\ &= (\lambda_0 \cdot c_1 + \beta_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2) \cdot x_1 - \lambda_2 \cdot x_2 \alpha_2 + \underbrace{(\lambda_0 \cdot c_2 - \lambda_2 \cdot b_2 \cdot x_2)}_{=0} \cdot u = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde la última igualdad se tiene por la condición (2.43b) del Principio de Pontryagin. Por otra parte usando $\lambda_1 = 0$ en la ecuación (3.28) se tiene:

$$\lambda_0 \cdot \beta_1 \cdot b_2 \cdot c_1 + \beta_1 \cdot b_2 \cdot \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot x_2 = (\lambda_0 \cdot c_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 \cdot x_2) \cdot \beta_1 \cdot b_2 = 0 \quad \text{con } \beta_1, b_2 \neq 0.$$

Reemplazando en (3.44) se obtiene entonces:

$$-\lambda_2.x_2.\alpha_2 = 0 \implies \lambda_2 = 0.$$

Por último sustituyendo en (3.43) se concluye que $\lambda_0 = 0$ lo que contradice la condición de no trivialidad.

La contradicción obtenida se obtuvo de asumir que vale $\phi(t) = 0$ en un intervalo, luego el control tiene finitas raíces aisladas y por lo tanto la función es de tipo bang-bang. $\square$

3.4. Modelo de control sobre las presas y predadores

En este caso vamos a considerar una variable de control que afecta a ambas poblaciones. La dinámica del sistema queda:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1 - b_1 u X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2 - b_2 u X_2. \end{cases} \quad (3.45)$$

Igual que en los casos anteriores consideramos el objetivo de alcanzar el punto P en un tiempo finito t_F no determinado bajo las mismas restricciones de espacio y de control pero ahora tomando en el funcional de costo solamente el término asociado al control. Se tiene entonces el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \int_0^{t_F} u \, dt \\ &\text{Sujeto a} \\ &\quad \dot{X}_1 = (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot X_1 - b_1 u X_1, \\ &\quad \dot{X}_2 = (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \cdot X_2 - b_2 u X_2, \\ &\quad x(0) = x_0, \, x(t_F) = P, \\ &\quad t_F \in (0, +\infty), \\ &\quad u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathcal{M} : u(t) \in [0, u_{max}]\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

El problema planteado de este modo presenta algunas particularidades en el análisis de controlabilidad y existencia de solución respecto a los casos estudiados en las secciones anteriores. Se puede observar que al aplicar el control en ambas poblaciones se modifica de forma simultanea la tasa de crecimiento intrínseca de cada una valiendo el siguiente resultado:

Proposición 3.13. *Si $u \equiv cte \in [0, u_{max}]$, la ecuación (3.45) define una ecuación diferencial del tipo:*

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= (\tilde{\alpha}_1 - \beta_2 \cdot X_2) X_1, \\ \dot{X}_2 &= (\beta_2 \cdot X_1 - \tilde{\alpha}_2) \cdot X_2, \end{cases}$$

con $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - b_1 \cdot u$ y $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 + b_2 \cdot u$.

Más aún, la proposición anterior nos permite hacer un estudio de las curvas de nivel que se obtienen al aplicar un control constante que tome los valores extremos 0 y u_{max} , y de esta forma analizar la controlabilidad de forma similar a lo expuesto en 3.6 y 3.8.

Omitiremos un análisis riguroso del estudio de curvas aunque se puede distinguir dos casos posibles para el problema dado:

1) Caso $u_{max} < \frac{\alpha_1}{b_1}$ y por lo tanto $\tilde{\alpha}_1 \neq 0$:

En este caso las curvas de nivel definidas por el uso de un control de tipo bang-bang vienen dadas por dos sistemas Lotka-Volterra cada uno con puntos de equilibrio $P_1 = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ y $P_2 = (\frac{\tilde{\alpha}_2}{\beta_2}, \frac{\tilde{\alpha}_1}{\beta_1})$. Como resultado se puede adaptar la construcción vista en 3.8 y se obtiene que el problema es controlable. En particular tomando $b_2 = 0$ se obtiene el caso omitido en la sección 3.2. En la figura 3.4 se puede ver una construcción geométrica para ambos casos.

2) Caso $u_{max} = \frac{\alpha_1}{b_1}$ y entonces se admite $\tilde{\alpha}_1 = 0$:

En este caso las curvas de nivel dadas por el control bang-bang vienen dadas por el sistema Lotka-Volterra sin control con $P_1 = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ y la curva

$$\mathcal{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\beta_1} \ln(x) - \frac{\beta_2}{\beta_1} x + c, \quad x > 0, y > 0 \}$$

de forma similar a lo visto en 3.6. Luego, siguiendo la misma construcción mediante concatenación de curvas, se tiene que el problema es controlable.

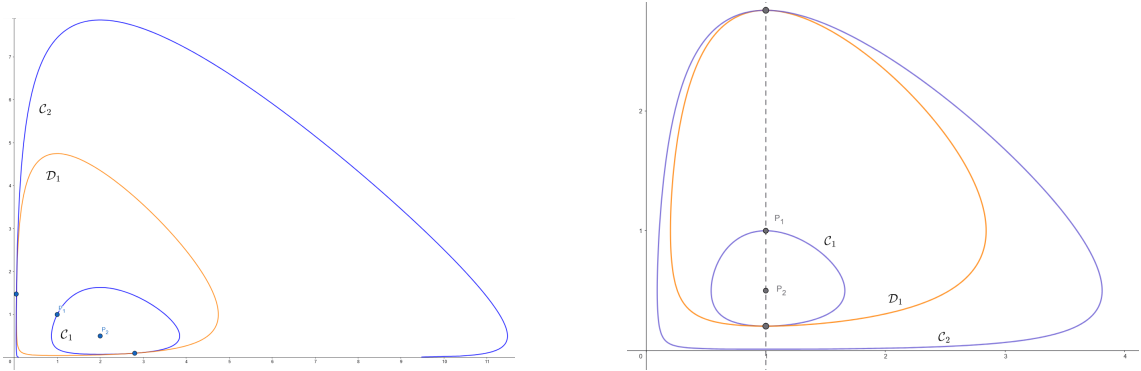


Figura 3.4: Construcción de curvas de nivel para el caso con control sobre presas y predadores tomando $\tilde{\alpha}_1 = 0,5, \tilde{\alpha}_2 = 2, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ (izquierda), y caso de control exclusivamente sobre las presas tomando $\tilde{\alpha}_1 = 0,5, \tilde{\alpha}_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ (derecha).

A continuación nos restringimos a estudiar la caracterización del control óptimo para nuestro caso particular mediante el Principio de Pontryagin.

Teorema 3.5. *Dado el problema de control óptimo descrito anteriormente, la solución u es una combinación de las funciones:*

- $u = 0$,
- $u = u_{max}$,
- $u = \frac{b_1^2 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + b_2^2 \cdot \beta_1 \cdot X_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot (b_1 - b_2)} + \frac{(\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) - (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2)}{(b_1 - b_2)}$ (control singular).

con $b_1 > b_2$.

Demostración. Para probar el resultado volvemos a usar las ecuaciones obtenidas en la demostración de la proposición 3.2 considerando en este caso $b_1, b_2 \neq 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. En particular si tomamos $\phi(t) = 0$ se obtiene las ecuaciones (3.19) y (3.25) y se puede plantear el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_0.c_2 - \lambda_1.b_1.X_1 - \lambda_2.b_2.X_2 &= 0 \\ \lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.X_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.X_2 &= 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Haciendo operaciones de filas entre ambas ecuaciones se tiene

$$\xrightarrow{\beta_2.b_1.F_1 + b_2.F_2} \lambda_0.(\beta_2.b_1.c_2 + b_2.c_1.b_1) - \lambda_1.(\beta_2.b_1^2.X_1 + b_2^2.\beta_1.X_2) = 0.$$

Luego despejando λ_1 y considerando $c_1 = 0, c_2 = 1$ se deduce

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0.b_1.\beta_2}{b_1^2.\beta_2.X_1 + b_2^2.\beta_1.X_2}. \quad (3.48)$$

Haciendo un razonamiento similar para despejar λ_2 se observa la igualdad

$$\xrightarrow{\beta_1.b_2.X_2.F_1 - b_1.X_1.F_2} \lambda_0.(\beta_1.b_2.c_2.X_2 - b_1^2.c_1.X_1) - \lambda_2.(\beta_1.b_2^2.X_2^2 + b_1^2.\beta_2.X_1.X_2) = 0.$$

Por lo tanto

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0.b_2.\beta_1}{b_1^2.\beta_2.X_1 + b_2^2.\beta_1.X_2}, \quad (3.49)$$

de donde se verifica la relación

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{b_2.\beta_1}{b_1.\beta_2}. \quad (3.50)$$

Como ambas igualdades dependen de λ_0 se puede considerar por separado el caso $\lambda_0 = 0$ (caso abnormal) y el caso $\lambda_0 \neq 0$ (caso normal).

Para el caso abnormal se concluye de las ecuaciones (3.48) y (3.49) que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ lo que contradice la condición de no trivialidad del Principio de Pontryagin.

Para el caso normal vamos a utilizar la condición generalizada de Legendre-Clebsch descripta en la sección 2.2.6. En este sentido notemos que las expresiones obtenidas sobre la función switching $\phi(t)$ y sus derivas sucesivas, en las ecuaciones (3.19), (3.24) y (3.27), se pueden expresar en términos del Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= H_u(x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda_0.c_2 - \lambda_1.b_1.x_1 - \lambda_2.b_2.x_2, \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{dH_u}{dt}(x(t), u(t), \lambda(t)) = X_1[\lambda_0.c_1.b_1 - \lambda_1.b_2.\beta_1.X_2 + \lambda_2.\beta_2.b_1.X_2], \\ \ddot{\phi}(t) &= \frac{d^2H_u}{dt^2}(x(t), u(t), \lambda(t)) = X_1.X_2[\lambda_0.c_1.b_2.\beta_1 + \lambda_1.b_1.\beta_1.\beta_2.X_1 \\ &\quad + \lambda_2.\beta_2.b_2.\beta_1.X_2 \\ &\quad + \lambda_1.\beta_1.b_2[\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2).u - \beta_1.X_2 - \beta_2.X_1]]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Por la definición de orden intrínseco 2.7 se tiene que en este caso el arco singular tiene orden $q = 1$. Luego usando el teorema 2.9 vale:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 H_u}{dt^2} &= \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot b_2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot (b_1 - b_2) \geq 0 \\ \iff b_1 - b_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde usamos que $b_2 \neq 0$.

Ahora si tomo $b_1 = b_2$ se puede usar la igualdad 3.50 en 3.51 y reemplazando el valor considerado $c_1 = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_u}{dt^2} &= X_1 \cdot X_2 \cdot [\lambda_1 \cdot b_1 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + \lambda_1 \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \beta_2 \cdot b_2 \cdot \beta_1 \cdot X_2 + \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot b_2 [\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 \cdot X_2 - \beta_2 \cdot X_1]] \\ &= X_1 \cdot X_2 \cdot [\lambda_1 \cdot b_1 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot b_2 [\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2 \cdot X_1]] \\ &= X_1 \cdot X_2 \cdot b_2 \cdot \beta_1 \cdot \lambda_1 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \\ \implies \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Lo que usando las ecuaciones (3.48) y (3.50) contradice la condición de no trivialidad. Luego para que se cumpla con condición de Legendre se tiene $b_1 > b_2 > 0$

Volviendo a la expresión del Hamiltoniano dada en la ecuación (2.45) se tiene

$$H(t, \hat{\lambda}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = H_1^*(t) + H_2^*(t) \cdot u^*(t),$$

con $H_2^*(t) = \phi(t) = 0$.

Reemplazando las ecuaciones de estado y la ecuación (3.50) se tiene

$$\begin{aligned} H = H_1 &= \lambda_1 [X_1 (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2)] + \lambda_2 [X_2 (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2)] \\ &\quad \lambda_1 \cdot X_1 \cdot (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) + \lambda_1 \cdot \frac{b_2 \cdot \beta_1}{b_1 \cdot \beta_2} \cdot X_2 \cdot (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) \\ &\quad \frac{\lambda_1}{b_1 \cdot \beta_2} [X_1 \cdot (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot b_1 \cdot \beta_2 + b_2 \cdot \beta_1 \cdot X_2 \cdot (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Usando la condición $H(t, \lambda(t), x(t), u(t)) = 0$, dada (2.43b) del principio de Pontryagin, se obtiene la ecuación implícita para el arco singular:

$$X_1 \cdot (\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) \cdot b_1 \cdot \beta_2 + b_2 \cdot \beta_1 \cdot X_2 \cdot (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2) = 0.$$

Por otra parte si se reemplaza la igualdad (3.50) en $\frac{d^2 H_u}{dt^2}$ se obtiene una expresión de donde se puede despejar el control singular

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2 H_u}{dt^2} &= \lambda_1 \cdot \beta_1 \cdot [b_1 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + \frac{b_2^2 \cdot \beta_1}{b_1} \cdot X_2 + b_2 (\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2) \cdot u - \beta_1 \cdot X_2 - \beta_2 \cdot X_1)] \\ \implies 0 &= b_1 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + \frac{b_2^2 \cdot \beta_1}{b_1} \cdot X_2 + b_2 (\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2) \cdot u - \beta_1 \cdot X_2 - \beta_2 \cdot X_1). \end{aligned}$$

Usando $b_1 \neq b_2$ se despeja u y se obtiene

$$u_{sing} = \frac{b_1^2 \cdot \beta_2 \cdot X_1 + b_2^2 \cdot \beta_1 \cdot X_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot (b_1 - b_2)} + \frac{(\alpha_1 - \beta_1 \cdot X_2) - (\beta_2 \cdot X_1 - \alpha_2)}{b_1 - b_2}.$$

Luego si definimos los intervalos

$$\begin{aligned}
 I_+ &= \{t \in (0, t_F) : \phi(t) > 0\} \implies u|_{I_+} = 0, \\
 I_- &= \{t \in (0, t_F) : \phi(t) < 0\} \implies u|_{I_-} = u_{max}, \\
 I_0 &= \{t \in (0, t_F) : \phi(t) = 0\} \implies u|_{I_0} = u_{sing},
 \end{aligned}$$

vale la descomposición de la función de control según el tipo de control aplicado

$$u = 0 \cdot \mathbb{1}_{I_-} + u_{max} \cdot \mathbb{1}_{I_+} + u_{sing} \cdot \mathbb{1}_{I_0}.$$

Notemos que la cuenta anterior no asegura que $u_{sing} \in [0, u_{max}]$, esto debe ser corroborado en el caso correspondiente. $\square$

3.5. Resultados numéricos

El desarrollo expuesto en las secciones anteriores nos permitió caracterizar de forma analítica las soluciones del problema de control óptimo siendo estas de tipo bang-bang para los casos planteados en las secciones 3.2 y 3.3, y admitiendo un control singular para el caso de la sección 3.4. Estas condiciones sin embargo no brindan una *política de control* explícita para aplicar al problema en cuestión ya que desconocemos los instantes, denominados *switching times*, en que se produce el cambio entre el control máximo y el control mínimo. Para determinar estos valores numéricamente usaremos una adaptación de uno de los métodos usualmente mencionados en la bibliografía conocido como *Forward Backward Sweep Method* cuya descripción se detalla en la sección 4.1. Más aún, veremos que este método presenta dificultades para el tipo de problema *free endtime - fixed endpoint* propuesto aunque se logra obtener resultados satisfactorios mediante un ajuste de los hiperparámetros del algoritmo. En [6, 13, 15] se puede encontrar otros métodos numéricos utilizados para resolver modelos similares al problema planteado, basados en técnicas de programación dinámica y considerando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

3.5.1. Control sobre las presas

En primer lugar estudiaremos el caso visto en la sección 3.2 donde el control se aplica solamente sobre la población de presas. En la figura 3.5 se puede observar el resultado obtenido a partir de distintos puntos iniciales y comparando el estado final aproximado ($\hat{x}_F$) con el estado final objetivo del problema (x_F). Para cada caso se puede observar el comportamiento de la función de control asociada y el instante donde ocurre el cambio de control. En todos los casos se obtiene que la solución consiste en aplicar a lo sumo 2 switches, resultado que replica lo obtenido por Goh en [10].

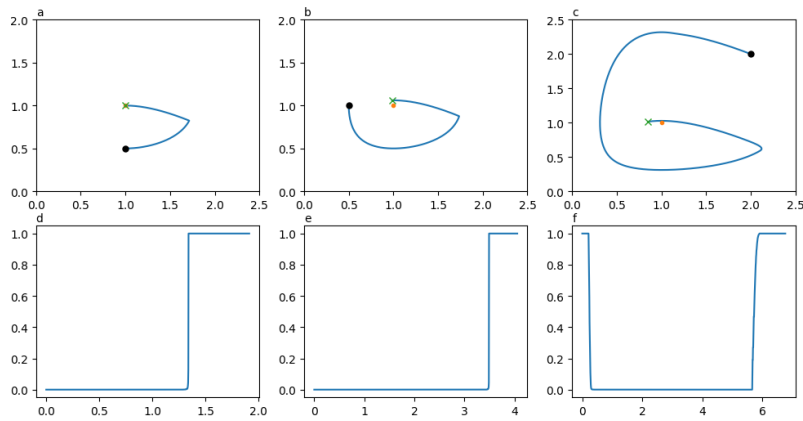


Figura 3.5: Solución obtenida tomando los puntos iniciales $Q = (1, \frac{1}{2})$, $Q = (\frac{1}{2}, 1)$ y $Q = (2, 2)$. Gráficos (a), (b) y (c) representan la trayectoria en el espacio de estados con punto inicial Q ($\bullet$) y estado final aproximado $\hat{x}_F$ ($\times$). Gráficos (d), (e) y (f) muestran el valor del control aplicado en el tiempo, siendo $t_a \sim 3,49307$, $t_b \sim 1,3410$, $t_{c,1} \sim 0,24336$ y $t_{c,2} \sim 5,71896$ los switching times respectivamente.

Otra interpretación del comportamiento del sistema controlado se puede observar en el gráfico de estado respecto al tiempo. En este caso se puede comparar como evoluciona cada población en el caso con control respecto al caso no regulado. En la figura 3.6 se puede notar que el método es robusto para pequeñas variaciones en los parámetros.

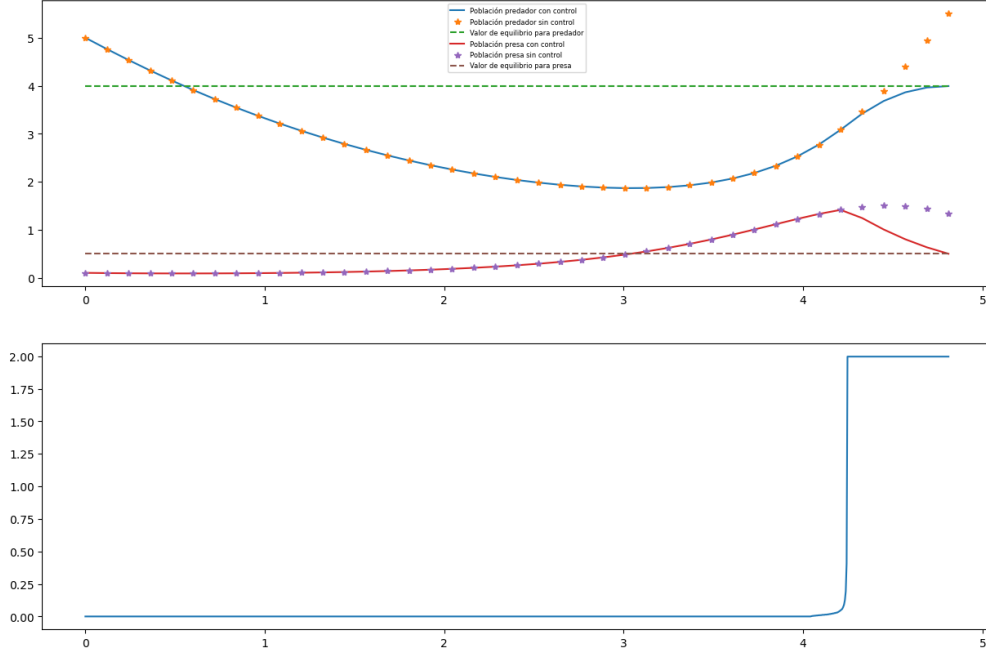


Figura 3.6: Poblaciones con y sin control tomando $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0,5$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$. El valor del switching time aproximado es $t \sim 4,24723$

Por último en la figura 3.7 consideramos un conjunto de puntos iniciales cercanos entre sí y estudiamos el comportamiento de la solución ante variaciones respecto a la condición inicial x_0 . Se puede observar que la política de control se mantiene de forma tal que los puntos donde ocurre el cambio de control, varían en correspondencia al punto inicial formando una curva conocida como *switching curve*.

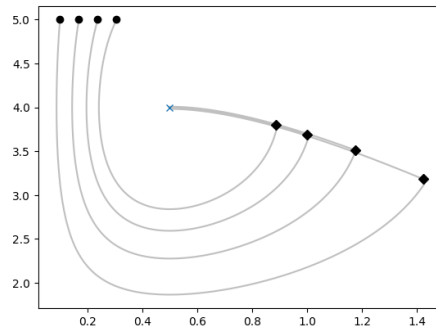


Figura 3.7: Trayectorias óptimas para distintos puntos iniciales Q (•) con puntos switching x_s (◆).

3.5.2. Control sobre los predadores

Para el segundo caso, donde el control se aplica solamente sobre la población de predadores, el método presenta resultados similares a los vistos en la sección anterior. En este caso la convergencia del método, descrito en 4.4, queda sujeto al ajuste adecuado de los hiperparámetros y de la función de finalización.

En la figura 3.8 consideramos la *trayectoria segmentada* donde se puede distinguir, en el mismo espacio de estados, los intervalos correspondientes a cada valor de control aplicado. Se puede observar que el resultado numérico es consistente con el análisis geométrico mediante curvas de nivel utilizado en la demostración de la proposición 3.8.

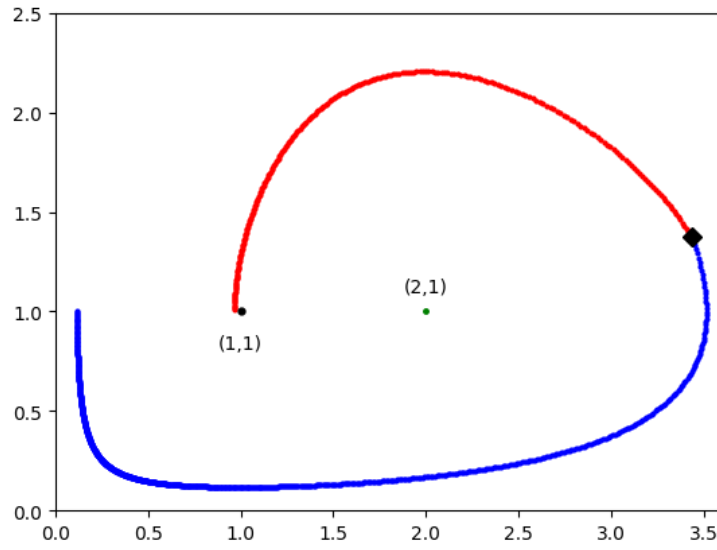


Figura 3.8: Trayectoria óptima considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$. Se identifica el segmento de la trayectoria correspondiente al control nulo (azul) y al control máximo (rojo) separados por el punto switching $x_s(\blacklozenge)$.

A partir de las simulaciones se observó que el ajuste de los hiperparámetros, como también del valor de inicialización y la elección del criterio de finalización, son determinantes para la convergencia del método. Por otra parte, la implementación del algoritmo FBMS adaptado se realizó combinando el método de Runge-Kutta de orden 4 para la resolución de las ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera y la utilización de librerías integradas en Python. Este proceso de ajuste para lograr la convergencia del algoritmo se sustentó en parte en el trabajo expuesto por J. Sharp et al. en [8].

Capítulo 4

Métodos Numéricos

4.1. Algoritmo Forward Backward Sweep Method

A continuación veremos uno de los métodos numéricos más utilizados en la resolución de problemas de control óptimo conocido como *Forward Backward Sweep Method* (FBSM). El mismo es un caso particular de los llamados *métodos indirectos*, que determinan la solución del problema de control mediante la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales derivado de las condiciones del Principio de Pontryagin.

En contraposición también se encuentran los métodos directos, que mediante la discretización de las variables consideran el problema original como uno de optimización no lineal para su resolución. Una exposición de las distintas técnicas de resolución numérica, como también las particularidades de implementación se puede ver en [19, 20, 21], mientras que Lenhart en [6] desarrolla exhaustivamente el método que veremos a continuación.

Para la formulación del algoritmo se considera las condiciones necesarias para el problema de tipo *fixed endtime* - *free endpoint* planteadas en las ecuaciones (2.40a), (2.40b) y (2.40c):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{H}_\lambda & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{\lambda}(t) &= -\mathcal{H}_x & \lambda(t_F) &= 0, \\ 0 &= \mathcal{H}_u, \end{aligned}$$

donde para el caso de control acotado reemplazaremos la condición de optimalidad por el criterio definido en (2.48).

Algoritmo 4.1. *Dado un problema de control óptimo cuya solución cumple las ecuaciones 2.35 se puede hallar la solución numérica de forma iterativa con el siguiente algoritmo:*

1. *Tomar una aproximación inicial de u en el intervalo.*
2. *Usando la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y los valores de u resolver hacia adelante la ecuación diferencial para $x(t)$.*

3. Usando la condición de transversalidad $\lambda(t_F) = 0$ y los valores de u y $\vec{x}$, resolver hacia atrás en el tiempo la ecuación diferencial para $\vec{\lambda}(t)$.
4. Actualizar u utilizando $x(t)$ y $\lambda(t)$ en la condición de optimalidad.
5. Verificar la convergencia utilizando algún criterio de finalización, en caso contrario volver al paso 2.

El método mencionado se utiliza para resolver una variedad de problemas con tiempo final fijo y estado final libre, mientras que en el problema de interés enunciado en (2.8), se considera la condición opuesta en ambas variables. Para resolver este problema utilizaremos lo que se conoce como el método FBSM Adaptado, donde además de iterar utilizando FBSM, aplicaremos un método de optimización para satisfacer la condición de estado final y la ecuación (2.43b) definida para el caso de tiempo final no determinado.

Algoritmo 4.2 (Problema con estado final). *Sea el problema de control óptimo donde además pedimos que se cumpla la condición $x(t_F) = x_F$, se puede hallar la solución de forma iterativa mediante el algoritmo:*

1. Considerar una estimación inicial de la adjunta a tiempo final $\lambda(t_F) = \theta$.
2. Calcular la solución óptima $(x_\theta^*, u_\theta^*, \lambda_\theta^*)$ mediante el algoritmo 4.1 utilizando θ como condición final del coestado.
3. Calcular el error de estimación cometido por $x_\theta^*(t_F)$ respecto al estado final objetivo mediante una función de error $V(\theta)$. Por ejemplo: $V(\theta) = \|x_\theta^* - x_F\|^2$.
4. Verificar la convergencia la convergencia de $V(\theta)$ a 0 usando un criterio de finalización. En caso contrario mejorar el valor de θ mediante algún método de aproximación de raíces para $V(\theta)$.

Algoritmo 4.3 (Problema con tiempo libre). *Sea el problema de control óptimo donde tomamos el tiempo final sin restricciones $t \in (0, +\infty)$, se puede hallar la solución de forma iterativa mediante el siguiente algoritmo:*

1. Considerar una estimación inicial del tiempo final $t_F = \theta$.
2. Calcular la solución óptima $(x_\theta^*, u_\theta^*, \lambda_\theta^*)$ mediante el algoritmo 4.1 utilizando θ para la definición del intervalo de tiempo.
3. Calcular el error de estimación sobre la condición de transversalidad del Hamiltoniano a tiempo final mediante una función de error. Por ejemplo $V(\theta) = H(x_\theta^*(\theta), u_\theta^*(\theta), \lambda_\theta^*(\theta))$.
4. Verificar la convergencia a 0 usando un criterio de finalización, en caso contrario mejorar el valor de θ mediante algún método de aproximación de raíces para $V(\theta)$.

El método descrito se conoce como *método de disparos* (Shooting Method) y consiste en el ajuste iterativo de las estimaciones sobre los valores desconocidos de t_F y $\lambda(t_F)$ hasta alcanzar un umbral de tolerancia determinado. Por otra parte se puede observar que la aplicación de FBMS adaptado combina la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales como también la aproximación de raíces. En nuestro caso de interés aplicaremos una combinación de los algoritmos 4.2 y 4.3.

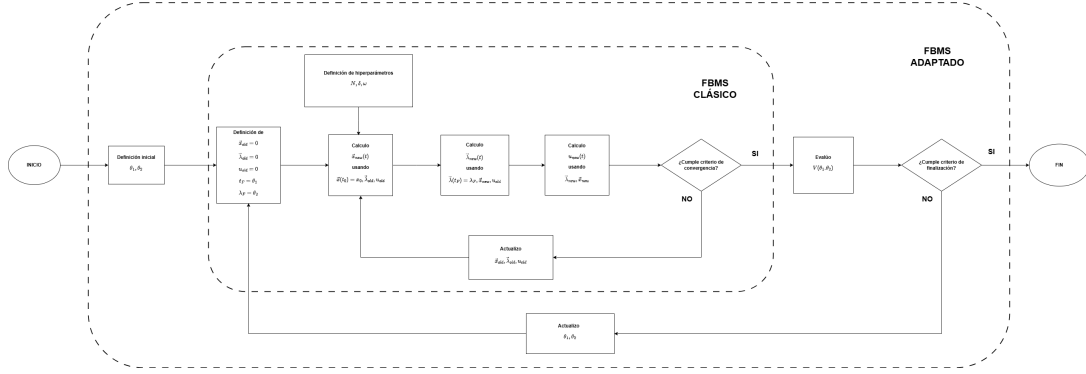


Figura 4.1: Diagrama de flujo del método FBMS adaptado. Para FBMS clásico se consideran hiperparámetros adicionales: la cantidad de pasos (N), el umbral de error relativo (δ) y el factor de relajación de la variable de control (ω).

Algoritmo 4.4 (Problema con estado final fijo y tiempo final libre). Sea el problema de control óptimo donde además pedimos que se cumpla la condición $X(t_f) = x_F$, se puede hallar la solución de forma iterativa mediante el algoritmo:

1. Considerar una estimación inicial conjunta del tiempo final y adjunta $\theta = (t_F, \lambda(t_F))$.
2. Calcular la solución óptima $(x_\theta^*, u_\theta^*, \lambda_\theta^*)$ mediante el algoritmo 4.1 utilizando θ para la definición del intervalo de tiempo y la condición de coestado.
3. Calcular el error de estimación cometido por $x_\theta^*(t_F)$ y $H(x_\theta^*(\theta), u_\theta^*(\theta), \lambda_\theta^*(\theta))$ respecto el estado final objetivo y la condición de transversalidad, mediante una función de error compuesta $V(\theta)$. En nuestro caso tomaremos $V(\theta) = (V_1(\theta), V_2(\theta))$.
4. Verificar la convergencia la convergencia de $V(\theta)$ a 0 usando un criterio de finalización. En caso contrario mejorar el valor de θ mediante algún método de aproximación de raíces.

Capítulo 5

Apéndice

En este apéndice detallamos el código utilizado para resolver el problema de control óptimo descrito en las secciones 3.2 y 3.3. El mismo utiliza la versión Python 3.12 y las librerías numpy 2.0.2, matplotlib 3.10.0 y scipy 1.16.3.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.optimize import root
4
5  def solver_rk4_FBSM_iter(c_1, c_2, alpha_1, alpha_2, beta_1, beta_2, \
6                          b_1, x0, M_1, M_2, Tf, theta):
7
8      # Defino hiperparámetros
9      T_f = Tf
10     N = 100
11     dt = T_f / N
12     x_0 = x0
13     w = 0.9
14     delta = 10**(-3)
15
16     # Defino vectores
17     t = np.linspace(0, T_f, N+1)
18     x1 = np.zeros(N+1)
19     x2 = np.zeros(N+1)
20     u = np.zeros(N+1)
21     l1 = np.zeros(N+1)
22     l2 = np.zeros(N+1)
23
24     # Iteraciones
25     test = -2
26     stp = 0
27     while (test < 0 and stp < 80):
28
29         old_x1 = x1
30         old_x2 = x2
31         old_u = u
32         old_l1 = l1
33         old_l2 = l2
34
35         # Forward
36         x1[0] = x_0[0]
37         x2[0] = x_0[1]
38
39         for i in range(N):
40             k11 = alpha_1 * x1[i] - beta_1*x1[i]*x2[i] - b_1*u[i]*x1[i]
41             k21 = -alpha_2 * x2[i] + beta_2*x1[i]*x2[i]
```

```

42
43     k12 = alpha_1 * (x1[i]+0.5*dt*k11)- beta_1*(x1[i]+0.5*dt*k11)*(x2[i]+0.5*dt*k21) \
44         - b_1*(0.5*(u[i]+u[i+1]))*(x1[i]+0.5*dt*k11)
45     k22 = -alpha_2*(x2[i]+0.5*dt*k21) + beta_2*(x1[i]+0.5*dt*k11)*(x2[i]+0.5*dt*k21)
46
47     k13 = alpha_1 * (x1[i]+0.5*dt*k12)- beta_1*(x1[i]+0.5*dt*k12)*(x2[i]+0.5*dt*k22) \
48         - b_1*(0.5*(u[i]+u[i+1]))*(x1[i]+0.5*dt*k12)
49     k23 = -alpha_2*(x2[i]+0.5*dt*k22) + beta_2*(x1[i]+0.5*dt*k12)*(x2[i]+0.5*dt*k22)
50
51     k14 = alpha_1 * (x1[i]+dt*k13)- beta_1*(x1[i]+dt*k13)*(x2[i]+dt*k23) \
52         - b_1*u[i+1]*(x1[i]+dt*k13)
53     k24 = -alpha_2*(x2[i]+dt*k23) + beta_2*(x1[i]+dt*k13)*(x2[i]+dt*k23)
54
55     x1[i+1] = x1[i] + dt*(k11 + 2*k12 + 2*k13 + k14)/6
56     x2[i+1] = x2[i] + dt*(k21 + 2*k22 + 2*k23 + k24)/6
57
58     l1[N] = theta[0]
59     l2[N] = theta[1]
60
61     for i in range(N,0,-1):
62         k11 = c_1 - l1[i]*(alpha_1 - beta_1*x2[i] - b_1*u[i]) - l2[i]*(beta_2*x2[i])
63         k21 = -l1[i]*(-beta_1*x1[i]) - l2[i]*(-alpha_2+beta_2*x1[i])
64
65         k12 = c_1 - (l1[i]-0.5*dt*k11)*(alpha_1 - beta_1*0.5*(x2[i]+x2[i-1])) \
66             - b_1*0.5*(u[i]+u[i-1])) - (l2[i]-0.5*dt*k21)*(beta_2*0.5*(x2[i]+x2[i-1]))
67         k22 = -(l1[i]-0.5*dt*k11)*(-beta_1*0.5*(x1[i]+x1[i-1])) \
68             - (l2[i]-0.5*dt*k21)*(-alpha_2+beta_2*0.5*(x1[i]+x1[i-1]))
69
70         k13 = c_1 - (l1[i]-0.5*dt*k12)*(alpha_1 - beta_1*0.5*(x2[i]+x2[i-1])) \
71             - b_1*0.5*(u[i]+u[i-1])) - (l2[i]-0.5*dt*k22)*(beta_2*0.5*(x2[i]+x2[i-1]))
72         k23 = -(l1[i]-0.5*dt*k12)*(-beta_1*0.5*(x1[i]+x1[i-1])) \
73             - (l2[i]-0.5*dt*k22)*(-alpha_2+beta_2*0.5*(x1[i]+x1[i-1]))
74
75         k14 = c_1 - (l1[i]-dt*k13)*(alpha_1 - beta_1*x2[i-1] - b_1*u[i-1]) \
76             - (l2[i]-dt*k23)*(beta_2*x2[i-1])
77         k24 = -(l1[i]-dt*k13)*(-beta_1*x1[i-1]) - (l2[i]-dt*k23)*(-alpha_2+beta_2*x1[i-1])
78
79         l1[i-1] = l1[i] - dt*(k11 + 2*k12 + 2*k13 + k14)/6
80         l2[i-1] = l2[i] - dt*(k21 + 2*k22 + 2*k23 + k24)/6
81
82     u_old = u
83     u_new = np.zeros(len(u))
84     for j in range(len(u)):
85         dH_du = -c_2 + l1[j]*(-b_1*x1[j])
86         if dH_du < 0:
87             u_new[j] = M_1
88         if dH_du >= 0:
89             u_new[j] = M_2
90
91     u = u_old*(w) + u_new*(1-w)
92
93     test1 = delta*sum(abs(x1)) - sum(abs(x1-old_x1))
94     test2 = delta*sum(abs(x2)) - sum(abs(x2-old_x2))
95     test3 = delta*sum(abs(l1)) - sum(abs(l1-old_l1))
96     test4 = delta*sum(abs(l2)) - sum(abs(l2-old_l2))
97     test5 = delta*sum(abs(u)) - sum(abs(u-u_old))
98     test = min(test1,
99               min(test2,
100                  min(test3,
101                      min(test4,test5)
102                  )
103               )
104 )
105     stp = stp +1
106     return x1, x2, l1, l2, u
107

```

```

108 # Función que calcula la desviación a partir de un valor guess_val
109
110 def total_dev(guess_val, initial_point):
111     c_1 = 1.0
112     c_2 = 1.0
113     alpha_1 = 1.0
114     alpha_2 = 1.0
115     beta_1 = 1.0
116     beta_2 = 1.0
117     b_1 = 1.0
118     x_0 = initial_point
119     M_1 = 0
120     M_2 = 1
121
122     P_eq = [alpha_2/beta_2, alpha_1/beta_1]
123
124     Tf_guess = guess_val[0]
125     theta_guess = [-2, guess_val[1]] # El valor de theta_guess[0] se obtiene analíticamente
126                                     # a partir de la condición de estacionalidad
127
128     x1, x2, l1, l2, u = solver_rk4_FBSM_iter(c_1, c_2, alpha_1, alpha_2, beta_1, beta_2, \
129                                             b_1, x_0, M_1, M_2, Tf_guess, theta_guess)
130
131     er1 = (x1[-1]-P_eq[0])**2
132     er2 = (x2[-1]-P_eq[1])**2
133     er3 = (-c_1*x1[-1]-c_2*u[-1] \
134           + l1[-1] * (alpha_1*x1[-1]-beta_1*x1[-1]*x2[-1] - b_1*u[-1]*x1[-1])\
135           + l2[-1]*(-alpha_2*x2[-1]+beta_2*x1[-1]*x2[-1]))**2
136
137     return x1,x2, u, l1, l2
138     #return [max(4.25*er1,er3), max(er2,er3)] # Función error definida para aplicar la
139                                     # instancia de minimización sobre theta_guess
140
141 # Función que minimiza el valor de theta_guess para un punto inicial
142
143 initial_point = [2, 2]
144 f_obj = lambda guess: total_dev(guess, initial_point)
145 solution = root(f_obj, [7, 1], tol = 10**(-6))

```


Bibliografía

- [1] E. TRELAT *Contrôle Optimal: Theorie et Applications*, Vuibert, Collection Mathématiques Concrètes, Paris, 2005.
- [2] E. FERNANDEZ-CARA AND E. ZUAZUA *Control Theory: History, Mathematical Achievements and Perspectives*, SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 2003.
- [3] F. CLARKE *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer London, 2013.
- [4] J. MACKI, A. STRAUSS *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag London, 1968.
- [5] R.M. LEWIS *Definitions of order and junction conditions in singular optimal control problems*, SIAM J. Control and optimization, Vol 18, No 1, January 1980.
- [6] S. LENHART, J. T. WORKMAN *Optimal Control Applied to Biological Models*, Chapman & Hall/CRC mathematical and computational biology, CRC Press, 2007.
- [7] M. HIRSCH *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Elsevier Academic Press, 2004
- [8] J. SHARP, K. BURRAGE, M.J. SIMPSON *Implementation and acceleration of optimal control for systems biology*. J. R. Soc. Interface, 2021.
- [9] D. LIBERZON *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*, Princeton University Press, 2012.
- [10] B.S. GOH, G. LEITMAN AND T.L. VICENT *Optimal Control of a Prey-Predator System*, Math. Biosci. 19, (1974), pp. 263–286.
- [11] N. GOTELLI *A primer of ecology*. Sinauer Associates Inc., Massachusetts, 1974.
- [12] M. NOVAK ET AL. *Characterizing Species Interactions to Understand Press Perturbations: What Is the Community Matrix?*. Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics, 2016.

- [13] Y. BAI, L. WANG AND X. YUAN *Pesticide control, physical control, or biological control? How to manage forest pests and diseases more effectively. Frontiers in Ecology and Evolution*, 2023.
- [14] J.R. LEIGH *Control Theory: A guided tour. The Institution of Engineering and Technology, London*, 2004.
- [15] M.RAFIKOV, J.M.BALTHAZAR, H.F. VON BREMEN *Mathematical modeling and control of population systems: Applications in biological pest control. Applied Mathematics and Computation*. 200. 557-573. 10.1016/j.amc.2007.11.036.
- [16] B. CHACHUAT *Nonlinear and dynamic optimization: From theory to practice, IC32: Optimal Control, McMaster University*, 2009. Course lecture.
- [17] H.M. ROBBINS *A Generalized Legendre-Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control, IBM J. Res. Dev.* 11, 4 (1967), 361–372. <https://doi.org/10.1147/rd.114.0361>
- [18] E.D. SONTAG *Notes on Mathematical Systems Biology*, 2018.
- [19] A. E. BRYSON *Optimal Control - From 1950 to 1985. IEEE Control Systems Magazine (1996)*, 16, 26-33.
- [20] A. RAO *A Survey of Numerical Methods for Optimal Control. Advances in the Astronautical Sciences*, 135, 497-528.
- [21] F. BIRAL, E. BERTOLAZZI, P. BOSETTI *Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems(2016). IEEJ Journal of Industry Applications*. 5. 154-166. 10.1541/ieejia.5.154.
- [22] M. BEGON, J. HARPER, C. TOWNSEND *Ecología: individuos, poblaciones y comunidades. 3ª ed. Barcelona: Ediciones Omega*, 1999.
- [23] A. BERRYMAN *On principles, laws and theory in population ecology(2003). Oikos*, 103(3), 695–701. <https://doi.org/10.1034/j.1600-0706.2003.12353.x>
- [24] G. ABRAMSON *La matemática de los sistemas biológicos, Instituto Balseiro, Notas de curso*, 2013.