

# ¿Cómo enseñarle a una computadora? (Y que aprenda)

Pablo Turco  
Instituto de Matemática Luis A. Santaló  
UBA-CONICET



SEMANAS | Popularización  
Secretaría de Extensión, Graduados y Bienestar - FCEyN



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Semana de la Matemática,  
25 de Abril 2019

# Introducción

- ¿Qué queremos hacer?
- ¿Cómo lo vamos a hacer?
- ¿Para qué lo queremos hacer?

# Introducción

- ¿Qué queremos hacer?  
Enseñarle a una computadora. ¡Y que aprenda!
- ¿Cómo lo vamos a hacer?  
Depende de lo que le queremos enseñar.
- ¿Para qué lo queremos hacer?



# Introducción

- ¿Qué queremos hacer?  
Enseñarle a una computadora. ¡Y que aprenda!  
Enseñarle las reglas de un juego y que aprenda a jugarlo.
- ¿Cómo lo vamos a hacer?  
Depende de lo que le queremos enseñar.  
Depende del juego.
- ¿Para qué lo queremos hacer?

- Antes de empezar. ¿Que sabe hacer una computadora?  
Sabe cumplir un conjunto de instrucciones o reglas ordenadas y claras.

- Antes de empezar. ¿Que sabe hacer una computadora?  
Sabe cumplir un conjunto de instrucciones o reglas ordenadas y claras.
- En un juego, le podríamos enseñar a hacer "la jugada ganadora", pero no queremos eso.

Queremos que la computadora aprenda cuál es "la jugada ganadora"

# PRIMER JUEGO

# Juego 1: Hexapawn de Martin Gardner

El juego fue creado por Martin Garden en 1962 (Further Mathematical Diversions, por Martin Gardner).

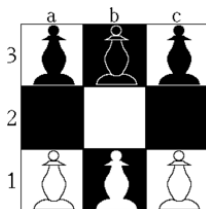
Se juega en un tablero de ajedrez de 3x3, con 3 peones blancos y 3 negros.

- Movimientos:

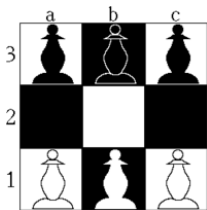
- Un peón pueden avanzar hacia adelante a un lugar vacío.
- Un peón puede comer a otro moviendo en diagonal hacia adelante.

- Un jugador gana si:

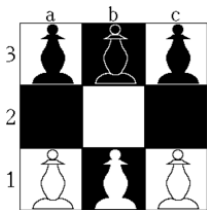
- Un peón llega a la 3ra fila.
- Comiendo a todos los peones del adversario.
- Llegando a una posición donde el adversario no pueda moverse.



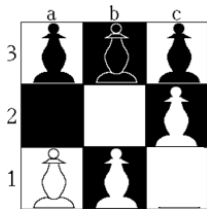
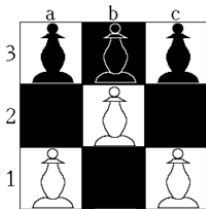
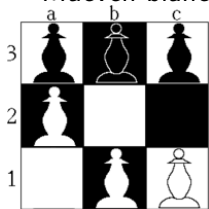


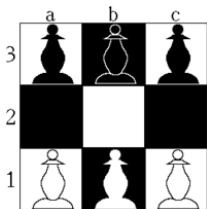


Mueven blancas

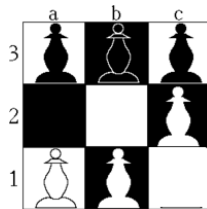
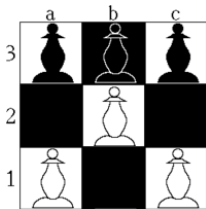
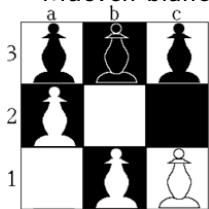


Mueven blancas

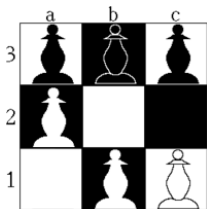




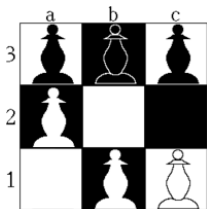
Mueven blancas



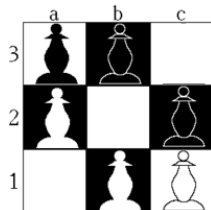
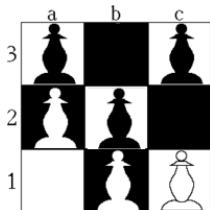
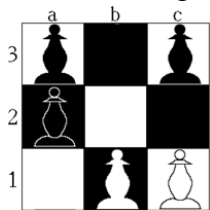
MOVEMOS a1-a2

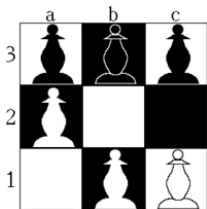


Mueven negras

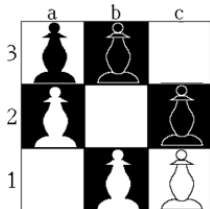
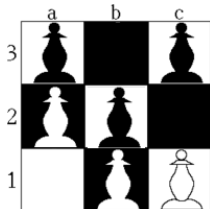
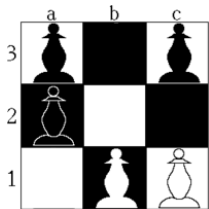


Mueven negras

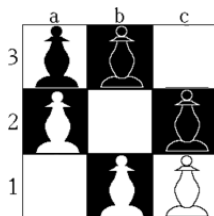




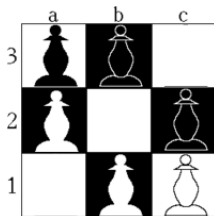
Mueven negras



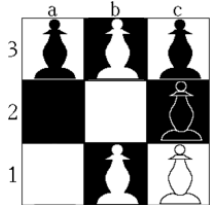
MOVEMOS c3-c2



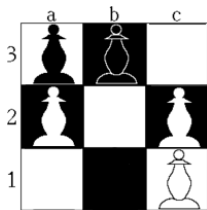
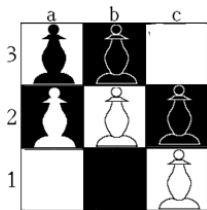
Mueven blancas



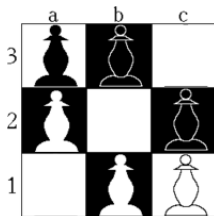
Mueven blancas



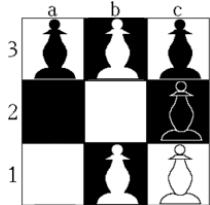
GANAN BLANCAS



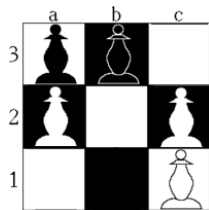
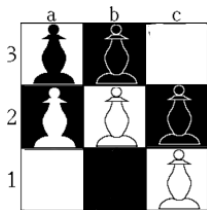




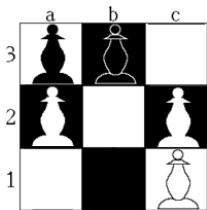
Mueven blancas



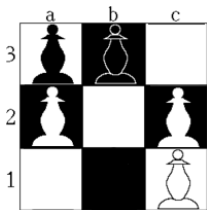
GANAN BLANCAS



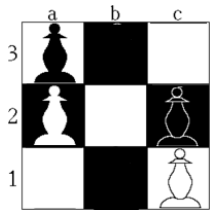
MOVEMOS b1xc2



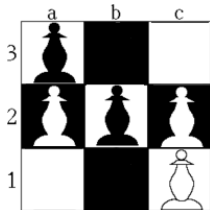
Mueven negras



Mueven negras



GANAN NEGRAS

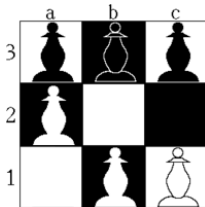


Y seguimos...

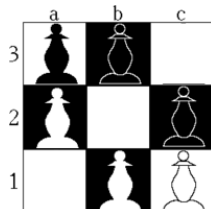
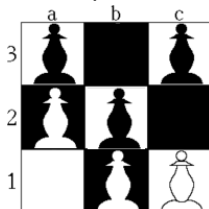
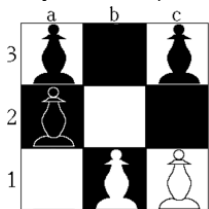
Vamos a enseñar como se juega con negras.

# Partida 1

Empieza el blanco. Si movió a1-a2, la computadora ve el tablero



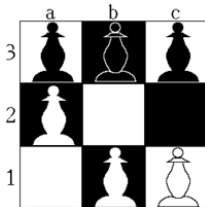
y tienen que elegir entre las opciones:



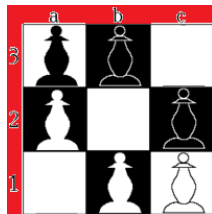
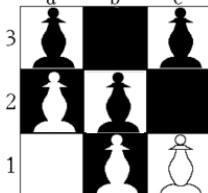
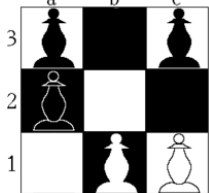
¿Como elige que hacer? Elige al azar.

# Partida 1

Empieza el blanco. Si movió a1-a2, la computadora ve el tablero



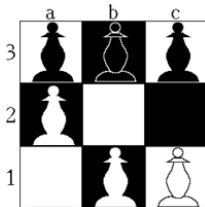
y tienen que elegir entre las opciones:



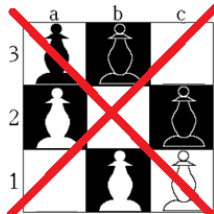
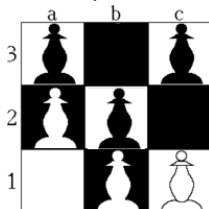
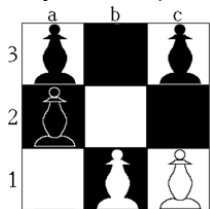
¿Como elige que hacer? Elige al azar.

## Partida 2

Empieza el blanco. Si movió a1-a2, la computadora ve el tablero

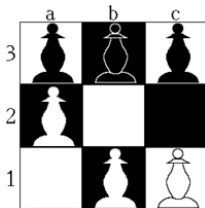


y tienen que elegir entre las opciones:

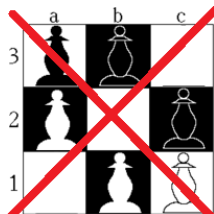
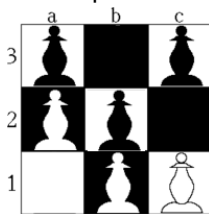
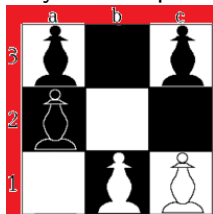


## Partida 2

Empieza el blanco. Si movió a1-a2, la computadora ve el tablero



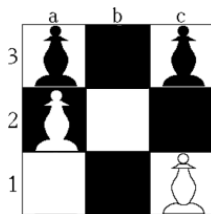
y tienen que elegir entre las opciones:



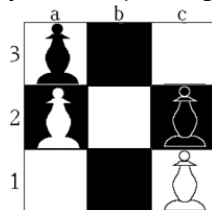


## Partida 2

Si movió b1xa2, la computadora ve el tablero

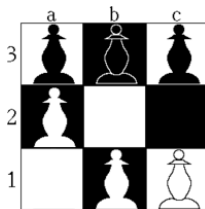


y tienen que elegir entre las opciones:

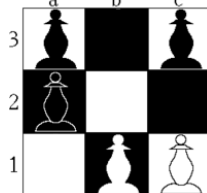


## Partida 3

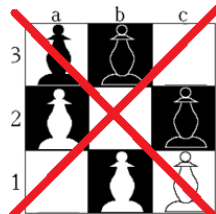
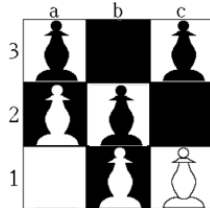
Empieza el blanco. Si movió a1-a2, la computadora ve el tablero



y tienen que elegir entre las opciones:



Y seguimos...



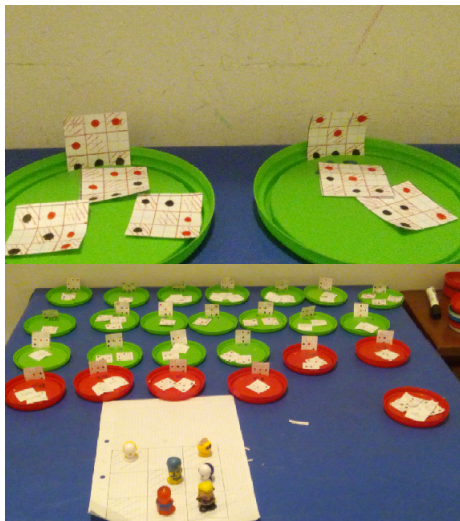
En resumen, lo que hacemos para enseñar es:

- Dejar que juegue "libremente", es decir, eligiendo las jugadas al azar.
- Si al final de la partida gana, dejamos todo como esta.
- Si al final de la partida pierde, le decimos que para la próxima, la última movida no la elija.

¡Vamos a jugar!

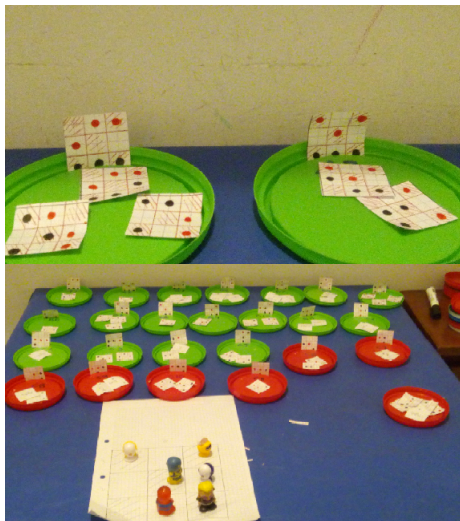


# ¡Vamos a jugar!



Después de 31 partidas, ganó 22 y perdió 9... ¡Y nunca mas perdería!  
(A Martin Gardner le llevó 36 partidas, con 25 triunfos y 11 derrotas).

# ¡Vamos a jugar!



Después de 31 partidas, ganó 22 y perdió 9... ¡Y nunca más perdería!

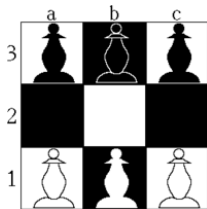
(A Martin Gardner le llevó 36 partidas, con 25 triunfos y 11 derrotas).

Características:

- El juego es *determinista*. Si se juega perfecto, uno de los 2 gana (en este caso, el negro).
- La enseñanza no es "óptima" (en principio).

Pero lo importante es que, después de un tiempo, "sin decirle nada" la computadora es una experta en jugar.

# Cambiemos un poco el juego



- Movimientos:
  - Un peón pueden avanzar hacia adelante a un lugar vacío.
  - Un peón puede comer a otro moviendo en diagonal hacia adelante.
- Un jugador gana si:
  - Un peón llega a la 3ra fila.
  - Comiendo a todos los peones del adversario.
  - ~~Llegando a una posición donde el adversario no pueda moverse.~~
- Empatán si no se pueden mover piezas.

Se le podría enseñar haciendo:

- Dejar que juegue "libremente", es decir, eligiendo las jugadas al azar.
- Si al final del juego gana, le decimos que elija esa para el próximo juego.
- Si al final del juego empata, dejamos todo como esta.
- Si al final del juego pierde, le decimos que para el próximo juego, la última opción no la elija.

Juegos de este estilo: Ta-Te-Ti, 4 en línea, damas, ajedrez...



# SEGUNDO JUEGO

## Juego 2: ¿Eres cobarde?

## Juego 2: ¿Eres cobarde?

El juego funciona de la siguiente manera:

La computadora haga una serie de preguntas y, en base a las respuestas obtenidas, va a predecir cuál será la próxima respuesta.

## Juego 2: ¿Eres cobarde?

El juego funciona de la siguiente manera:

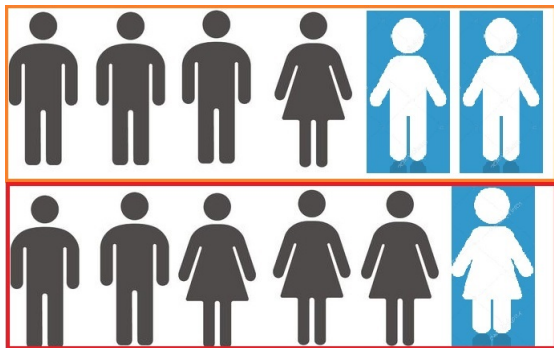
La computadora haga una serie de preguntas y, en base a las respuestas obtenidas, va a predecir cuál será la próxima respuesta.

Ejemplo:

Pronostico	Temperatura	¿Sale Picnic?
Soleado	Calor	Si
Lloviendo	Frío	No
Lloviendo	Calor	No

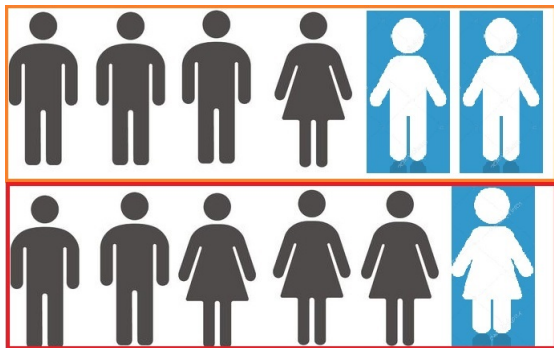
Si esta soleado y hace frío, ¿Sale Picnic?

## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar?

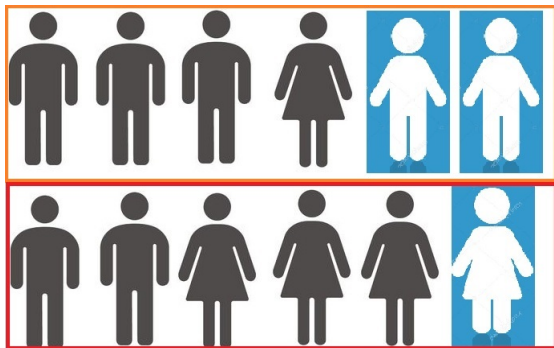
## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar?

$$\text{Rta: } \mathcal{P}(HG) = \frac{\#\{\text{Hombres grises}\}}{\{\text{Total}\}} = \frac{5}{12}.$$

## Algo de probabilidad

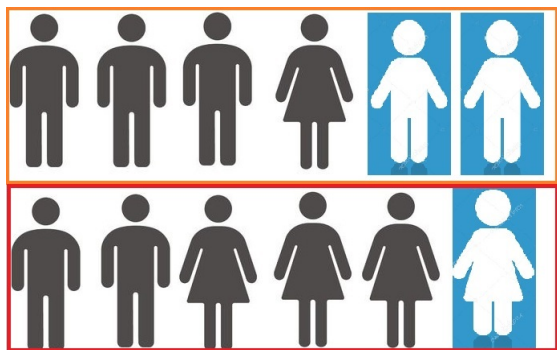


¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar?

$$\text{Rta: } \mathcal{P}(HG) = \frac{\#\{\text{Hombres grises}\}}{\{\text{Total}\}} = \frac{5}{12}.$$

¿Cuál es la probabilidad de elegir una mujer azul al azar?

## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar?

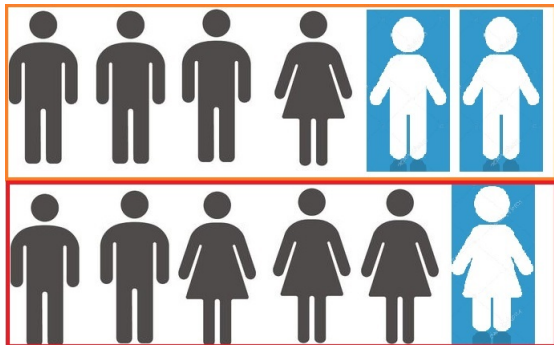
$$\text{Rta: } \mathcal{P}(HG) = \frac{\#\{\text{Hombres grises}\}}{\{\text{Total}\}} = \frac{5}{12}.$$

¿Cuál es la probabilidad de elegir una mujer azul al azar?

$$\text{Rta: } \mathcal{P}(MA) = \frac{\#\{\text{Mujeres azules}\}}{\{\text{Total}\}} = \frac{1}{12}.$$

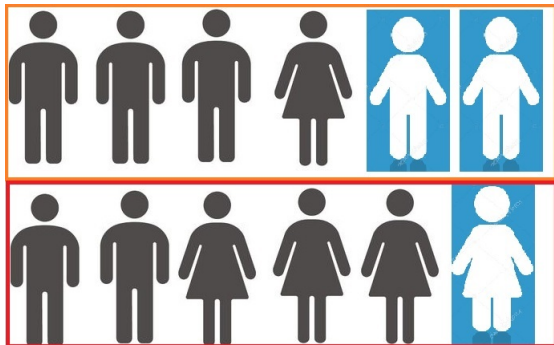


## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar, sabiendo que elegí una persona que esta abajo?

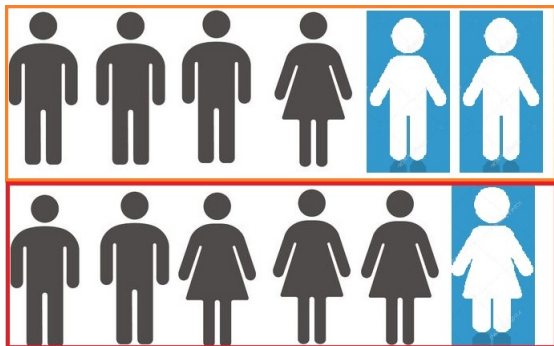
## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar, sabiendo que elegí una persona que esta abajo?

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Personas abajo}\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

## Algo de probabilidad

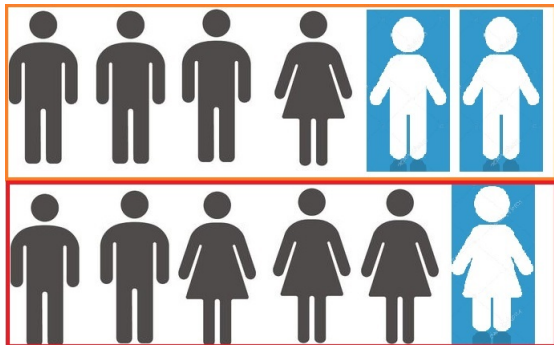


¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar, sabiendo que elegí una persona que esta abajo?

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Personas abajo}\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que esta abajo, sabiendo que elegí un hombre gris?

## Algo de probabilidad



¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre gris al azar, sabiendo que elegí una persona que esta abajo?

$$P(HG|Abajo) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Personas abajo}\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona que esta abajo, sabiendo que elegí un hombre gris?

$$P(Abajo|HG) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Hombre gris}\}} = \frac{2}{5}$$

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Personas abajo}\}}$$

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\#\{\text{Hombre grises y abajo}\}}{\#\{\text{Personas abajo}\}} \frac{\text{Total}}{\text{Total}}$$

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Personas abajo})}$$

## Algo de probabilidad

$$\mathcal{P}(HG|Abaajo) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Personas abajo})}$$

$$\mathcal{P}(Abaajo|HG) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Hombre gris})}$$



## Algo de probabilidad

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Personas abajo})}$$

$$\mathcal{P}(Abajo|HG) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Hombre gris})}$$

Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\mathcal{P}(Abajo|HG)\mathcal{P}(\text{Hombre gris})}{\mathcal{P}(\text{Personas abajo})}$$

$$\mathcal{P}(HG|Abajo) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Personas abajo})}$$

$$\mathcal{P}(Abajo|HG) = \frac{\mathcal{P}(\text{Hombre grises y abajo})}{\mathcal{P}(\text{Hombre gris})}$$

Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

## Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

## Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Pronostico	Temperatura	¿Sale Picnic?
Soleado	Calor	Si
Lloviendo	Frío	No
Lloviendo	Calor	No

Si esta soleado y hace frío, ¿Sale Picnic?

## Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Pronostico	Temperatura	¿Sale Picnic?
Soleado	Calor	Si
Lloviendo	Frío	No
Lloviendo	Calor	No

Si esta soleado y hace frío, ¿Sale Picnic?

Vamos a también suponer que "Soleado y Lloviendo" son independientes de "Frío y Calor".

## Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Pronostico	Temperatura	¿Sale Picnic?
Soleado	Calor	Si
Lloviendo	Frío	No
Lloviendo	Calor	No

Si esta soleado y hace frío, ¿Sale Picnic?

Vamos a también suponer que "Soleado y Lloviendo" son independientes de "Frío y Calor". Es decir:

$$\mathcal{P}(\text{Soleado y Frío}) = \mathcal{P}(\text{Soleado})\mathcal{P}(\text{Frío})$$

## Teorema de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}$$

Pronostico	Temperatura	¿Sale Picnic?
Soleado	Calor	Si
Lloviendo	Frío	No
Lloviendo	Calor	No

Si esta soleado y hace frío, ¿Sale Picnic?

Vamos a también suponer que "Soleado y Lloviendo" son independientes de "Frío y Calor". Es decir:

$$\mathcal{P}(\text{Soleado y Frío}) = \mathcal{P}(\text{Soleado})\mathcal{P}(\text{Frío}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

# ¡ Vamos a jugar!

¿Eres cobarde? Voy a preguntar que tipo de película, a que hora y con quien la ves. En función de eso, decidiré si eres cobarde o no.

Tipo de película: Romántica, Humor o Terror.

A que hora la ves: Mañana, Tarde o Noche.

Como quien la ves: Solo o Acompañado.



## Juego 2, Usamos el "Ingenuo Bayes"

Opción 1 (R,H,T)	Opción 2 (N,T,M)	Opción 3 (S,A)	Resultado
Romántica	Noche	Solo	NO
Romántica	Noche	Acompañado	SI
Humor	Noche	Solo	SI
Terror	Tarde	Solo	NO
Terror	Mañana	Solo	NO
Terror	Mañana	Acompañado	SI
Humor	Mañana	Acompañado	SI
Romántica	Tarde	Solo	NO
Romántica	Mañana	Solo	NO
Romántica	Tarde	Acompañado	SI
Humor	Tarde	Acompañado	SI
Terror	Noche	Acompañado	NO

## Juego 2, Usamos el "Ingenuo Bayes"

Opción 1 (R,H,T)	Opción 2 (N,T,M)	Opción 3 (S,A)	Resultado
Romántica	Noche	Solo	NO
Romántica	Noche	Acompañado	SI
Humor	Noche	Solo	SI
Terror	Tarde	Solo	NO
Terror	Mañana	Solo	NO
Terror	Mañana	Acompañado	SI
Humor	Mañana	Acompañado	SI
Romántica	Tarde	Solo	NO
Romántica	Mañana	Solo	NO
Romántica	Tarde	Acompañado	SI
Humor	Tarde	Acompañado	SI
Terror	Noche	Acompañado	NO

¿Vería una película de terror a la noche solo?

## Juego 2, Usamos el "Ingenuo Bayes"

Opción 1 (R,H,T)	Opción 2 (N,T,M)	Opción 3 (S,A)	Resultado
Romántica	Noche	Solo	NO
Romántica	Noche	Acompañado	SI
Humor	Noche	Solo	SI
Terror	Tarde	Solo	NO
Terror	Mañana	Solo	NO
Terror	Mañana	Acompañado	SI
Humor	Mañana	Acompañado	SI
Romántica	Tarde	Solo	NO
Romántica	Mañana	Solo	NO
Romántica	Tarde	Acompañado	SI
Humor	Tarde	Acompañado	SI
Terror	Noche	Acompañado	NO

¿Vería una película de terror a la noche solo?

$$\mathcal{P}(Si|T,N,S) = \frac{\mathcal{P}(T,N,S|Si)\mathcal{P}(Si)}{\mathcal{P}(T,N,S)} = \frac{\mathcal{P}(T|Si)\mathcal{P}(N|Si)\mathcal{P}(S|Si)\mathcal{P}(Si)}{\mathcal{P}(T)\mathcal{P}(N)\mathcal{P}(S)} =$$

$$\mathcal{P}(No|T,N,S) = \frac{\mathcal{P}(T,N,S|No)\mathcal{P}(No)}{\mathcal{P}(T,N,S)} = \frac{\mathcal{P}(T|No)\mathcal{P}(N|No)\mathcal{P}(S|No)\mathcal{P}(No)}{\mathcal{P}(T)\mathcal{P}(N)\mathcal{P}(S)} =$$

## Juego 2, Usamos el "Ingenuo Bayes"

Opción 1 (R,H,T)	Opción 2 (N,T,M)	Opción 3 (S,A)	Resultado
Romántica	Noche	Solo	NO
Romántica	Noche	Acompañado	SI
Humor	Noche	Solo	SI
Terror	Tarde	Solo	NO
Terror	Mañana	Solo	NO
Terror	Mañana	Acompañado	SI
Humor	Mañana	Acompañado	SI
Romántica	Tarde	Solo	NO
Romántica	Mañana	Solo	NO
Romántica	Tarde	Acompañado	SI
Humor	Tarde	Acompañado	SI
Terror	Noche	Acompañado	NO

¿Vería una película de terror a la noche solo?

$$\mathcal{P}(Si|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|Si)\mathcal{P}(N|Si)\mathcal{P}(S|Si)\mathcal{P}(Si)$$

$$\mathcal{P}(No|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|No)\mathcal{P}(N|No)\mathcal{P}(S|No)\mathcal{P}(No)$$

$$\mathcal{P}(Si|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|Si)\mathcal{P}(N|Si)\mathcal{P}(S|Si)\mathcal{P}(Si) = \frac{1}{6} \frac{2}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{216}$$

$$\mathcal{P}(No|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|No)\mathcal{P}(N|No)\mathcal{P}(S|No)\mathcal{P}(No) = \frac{3}{6} \frac{2}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{2} = \frac{15}{216}$$

$$\mathcal{P}(Si|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|Si)\mathcal{P}(N|Si)\mathcal{P}(S|Si)\mathcal{P}(Si) = \frac{1}{6} \frac{2}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{216}$$

$$\mathcal{P}(No|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|No)\mathcal{P}(N|No)\mathcal{P}(S|No)\mathcal{P}(No) = \frac{3}{6} \frac{2}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{2} = \frac{15}{216}$$

Resultado:

$$\text{La vería: } \frac{\frac{1}{216}}{\frac{1}{216} + \frac{15}{216}} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

$$\text{No la vería: } \frac{\frac{15}{216}}{\frac{1}{216} + \frac{15}{216}} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

$$\mathcal{P}(Si|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|Si)\mathcal{P}(N|Si)\mathcal{P}(S|Si)\mathcal{P}(Si) = \frac{1}{6} \frac{2}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{216}$$

$$\mathcal{P}(No|T,N,S) \propto \mathcal{P}(T|No)\mathcal{P}(N|No)\mathcal{P}(S|No)\mathcal{P}(No) = \frac{3}{6} \frac{2}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{2} = \frac{15}{216}$$

Resultado:

$$\text{La vería: } \frac{\frac{1}{216}}{\frac{1}{216} + \frac{15}{216}} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

$$\text{No la vería: } \frac{\frac{15}{216}}{\frac{1}{216} + \frac{15}{216}} = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

COBARDE

Cambiamos el juego...



## Cambiamos el juego...

Opción 1: Palabras en el asunto de un mail (Ganador, Único, Oferta)

Opción 2: Palabras en el cuerpo del un mail (Dólares, Precio, Premio)

Opción 3: Idioma del mail (Inglés, Español)

Resultado: ¿El mail es Spam o no?

## Resumiendo

Vimos 2 formas de "enseñar" a una computadora y que aprenda.

# Resumiendo

Vimos 2 formas de "enseñar" a una computadora y que aprenda.  
¿Para que lo hicimos?



## Resumiendo

Vimos 2 formas de "enseñar" a una computadora y que aprenda.  
¿Para que lo hicimos?



¡GRACIAS!