¡Un matemático ahí, por favor!

ILUSTRACIONES: VANINA FARÍAS DG

Adrián Paenza

¡Un matemático ahí, por favor!

Sudamericana

Paenza, Adrián
¡Un matemático ahí, por favor! / Adrián Paenza. - 1ª ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Sudamericana, 2018.
336 p. ; 22 x 15 cm. (Obras Diversas)

ISBN 978-950-07-6207-6

1. Matemática. I. Título.
CDD 150

Imagen de página 53: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dürer_Melancholia_I.jpg
Imagen de página 54: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Melancholia_square_turned_and_reflected.png

Printed in Argentina – Impreso en la Argentina

ISBN: 978-950-07-6207-6

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723.

Esta edición de 3500 ejemplares se terminó de imprimir en Arcángel Maggio - División Libros, Lafayette 1695, Buenos Aires, en el mes de octubre de 2018.

Penguin Random House Grupo Editorial

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto.

Como escribí al comenzar cada uno de los libros que hemos publicado, todo lo que soy se lo debo a lo que ellos hicieron por mí. Si cada niño que nace hubiera tenido las oportunidades que tuvimos mi hermana y yo, el mundo sería ciertamente diferente.

A mi hermana, Laura, y mi cuñado, Daniel.

A todos mis sobrinos (cada año se van agregando más, como es esperable): Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Lucas, Alessandra, Amanda, Anderson, Brenda, Dante, Diego, Ellie, Gabriel, Griffin, Jason, Landon, Luca, Luz, María, María José, Mario, Marius, Max, Mía, Mila, Miguelito, Natalie, Nicola, Nicolás, Riley, Sabina, Sebastián, Ulises, Valentín, Valentina, Viviana y Whitney.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos fuentes de inspiración inagotables y los faros que me guiaron la mayor parte de mi vida.

A los cuatro amigos con quienes me crié: Leonardo Peskin, Miguel Davidson, Lawrence Kreiter y Miguel Fernández.

A mis amigas Alicia Dickenstein, Ana María D'Alessio, Andrea Salvucci, Beatriz de Nava, Betty Cooper, Betty Suárez, Carmen Sessa, Cristina Serra Selva, Edy Gerber, Érica Kreiter, Etel Novacovsky, Glenda Vieites, Pamela Rocchetti, Isabel Segurola, *Julie Rogers, Karina Griguol, Kim Morris, Laura Bracalenti, Many Oroño, Marcela Smetanka, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Marisa Giménez, Marisa Pombo, Marta Valdano, Martina Cortese, Mónica Müller, Montse Besa, Nilda Rozenfeld, Nora Bar, Nora Bernardes, Norma Galetti, Patricia Breyter, Paula Aimonetto, Raquel Maccari, Raquel Guerra Vega, Teresa Krick, Teresa Reinés y Verónica Fiorito.*

A mis amigos Alejandro Fabbri, Andrés Nocioni, Ariel Hassan, Baldomero Rubio Segovia, Carlos Delfino, Claudio Martínez, Craig Rogers, Cristian Czubara, David Boodey, Dennis Fugh, Don Coleman, Emanuel Ginóbili, Fabricio Oberto, Ernesto Tiffenberg, Fernando Pacini, Floyd Canaday, Fred Weis, Gary Crotts, Gerry Garbulsky, Hugo Soriani, Jorge Ginóbili, Raphael James, Jorge Valdano, Juan Ignacio Sánchez, Juan Pablo Pinasco, Julio Bruetman, Keith Morris, Kevin Bryson, Lenny Gunsteen, Gordon Fernstron, Luis Scola, Marcos Salt, Oscar Bruno, Pablo Prigioni, Pep Guardiola, Ramón Besa, Ricardo Medina, Santiago Segurola, Víctor Hugo Marchesini, Carlos Aimar, Claudio Pustelnik y Woody González.

A mis primas Lili, Mirta y Silvia, y a mis primos Josi y Ricardo.

A Guido y Soledad. Nunca voy a sobreponerme a la pérdida de dos personitas que vieron interrumpidas sus vidas cuando virtualmente no las habían empezado.

A la memoria de mis tías Delia, Elena, Elenita y Miriam, de mi tío Saúl, del inolvidable Héctor Maguregui, de Juan Denegri, Noemí Cuño, Lola Bryson, Manny Kreiter y Vivian Crotts, y una vez más, mi gratitud perenne para otros dos amigos entrañables: Luis Bonini y Jorge Guinzburg.

Y para el final, todo libro estará siempre dedicado a las cuatro personas que son mis guías éticos: Alberto Kornblihtt, Marcelo Bielsa, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

Aunque no lo parezca, un libro *también* es una construcción colectiva. Mucha gente, quizá sin saberlo, me aportó alguna cosa para pensar, me ofreció ayuda para mirar hacia algún lugar donde no había mirado antes, me hizo descubrir lo que nunca había visto. Estoy convencido que no me he dado cuenta de todo, y por eso, nunca podrá hacer justicia en el reconocimiento, pero algunos de los nombres (y acciones) fueron las siguientes.

Primero, a quienes leen *todo* lo que escribo, lo piensan, me hacen observaciones, correcciones y mejoran el texto. Carlos D'Andrea, Juan Sabia y Carlos Sarraute son los tres líderes para este libro, pero también conté con el aporte de Gerry Garbulsky, Juan Pablo Pinasco, Alicia Dickenstein, Claudio Martínez y Manu Ginóbili.

Después, dos personas que son *claves* en mi vida personal (y profesional): Glenda Vieites y Claudio Martínez.

Todo el grupo de Penguin Random House: Mariana Creo, Gabriela Vigo, Mariana Vera, Juan Ignacio Boido, Fernanda Mainelli, Érica Marino, Lucrecia Rampoldi, Vanina Farías, Max Rompo, Ana Dusman y Javier López Llovet.

Mi gratitud también para Carlos Díaz y Diego Golombek, de Editorial Siglo XXI, porque ellos fueron quienes me invitaron a escribir el primer libro, allá lejos y hace tiempo. Hoy, el que usted tiene en sus manos es el número 17... Sí, ¡diecisiete! Un verdadero disparate. ¿Quién hubiera dicho? Mi reconocimiento a todos los que trabajaron conmigo inicialmente, como Violeta Collado y Héctor Benedetti.

También para Miguel Aguilar y Jose Rafoso, la 'rama española' de Penguin Random House, por lo que hacen por mí en Europa.

Mi gratitud muy especial para tres personas más. Por un lado, Guillermo Schavelzon y Bárbara Graham, mis amigos y representantes literarios (con base en Barcelona), y por otro para Aldo Fernández, quien como Claudio Martínez me contrata y representa en todo lo que hago en los medios electrónicos.

Desde el lugar de la matemática, me importa destacar enfáticamente a quienes fueron mis tutores/mentores/guías a lo largo de un camino que empezó en marzo de 1964, cuando fui por primera vez a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), que en ese momento estaba ubicada en la calle Perú, en la Capital Federal. Las personas que figuran en la lista que sigue me educaron y me empujaron para ser 'mejor': Miguel Herrera (director de mi tesis doctoral y finalmente amigo, quien murió brutalmente joven); Enzo Gentile, mi primer PROFESOR, así, con mayúsculas, igual que Luis Santaló, un verdadero *maestro*; Horacio Porta (un desafío a todo orden establecido y *gran matemático*); mi querido Eduardo Dubuc, otra persona extraordinaria en el sentido literal de la palabra, y Ángel Larrotonda (director de mi tesis de licenciatura). Ellos seis fueron los que me moldearon inicialmente.

Ricardo Noriega, Néstor Búcari, Carlos Sánchez, Malena Becker, Marcela Fainbrum, Teresita Freidenberg y Hugo Álvarez fueron compañeros de ruta y 'tocaron' mi vida.

Alicia Dickenstein, Carmen Sessa, Carlos D'Andrea, Oscar Bruno, Gerry Garbulsky, Juan Sabia, Teresa Krick, Ricardo Durán, Noemí Wolansky, Pablo Calderón, Carlos Sarraute, Marcos Dajczer, Ricardo Fraiman, Fernando Cukierman, Lucas Monzón, Gustavo Stolovitzky, Cristina López, María del Carmen Calvo, Gabriela Jerónimo, Martín Sombra y Cristian Czubara pertenecen a generaciones posteriores. Salvo Gerry y Gustavo (ambos físicos), todo el resto son matemáticos. Todos fueron alumnos en alguna materia. De *todos* aprendí... y mucho. *Todos* hicieron carreras excelentes en diferentes partes del mundo. Además, soy amigo de todos.

Siempre dentro de Exactas, otro grupo maravilloso formado por docentes y no docentes: María Angélica Tancredi, Silvia López, Julio Corbalán, Leandro Caniglia, Luis Mazziotti, Juan José Martínez, Alfaro, Marina, 'Lolina' Álvarez Alonso, Juan Pablo Paz, Jorge Aliaga, Luis Cafarelli, Ariel Arbiser, Jorge Zilber, Joos Heinz, Matías Graña, Pablo Coll, Pablo Milrud y Eduardo Antín. La mayoría aún vive, pero otros no. Con *todos* y cada uno tengo algún recuerdo imborrable.

No me olvido de otro grupo enorme de personas con quienes compartimos horas en salas de producción, islas de edición, estudios de televisión o de radio, *gente* de los medios, el cerebro y corazón de lo que se escucha y se ve en algunos medios argentinos, todos *profesionales de primera*: Deborah Gornitz, Alejandro Burlaka, Edy Gerber, Betina Rodríguez, Claudia Eiberman, Dolores Bosch, Elisabeth Alegre, Ezequiel Rodríguez, Gabriel Díaz, Laura Cukierman, Ignacio Martínez, Pedro Martínez, Luis Hassan, María Marta García Scarano, Carla Novak, Mario Bouco, Paola Russo, Paola Campodónico, Yanila Ghio, Andrés Gericke, Augusto Albo, Yamila Abud, Fernando Nogueira, Gustavo Cataldi, Fernando Morón y Valeria Trevisán.

Cualquier lista de personas que yo escriba en cualquier construcción colectiva requiere de algunos nombres más, a quienes les tengo no solo afecto sino una gratitud perenne: Claudio Martínez (que aparece en *todas* las listas), Verónica Fiorito, Tristán Bauer, Soledad Quereilhac, Axel Kicillof y Emmanuel Álvarez Agis.

A *mi* gente de *Página 12*, Ernesto Tiffenberg y Hugo Soriani en particular. A mis compañeros de trabajo y colegas durante tantos años. A mi queridísimo Horacio Verbitsky, director/fundador/creador de El Cohete a la Luna, y también a Marcelo Figueras.

A los integrantes de los dos *colectivos* a los que estoy 'subido': el grupo CyTA (Ciencia y Técnica), en defensa de la investigación y desarrollo para la inclusión, y el Manifiesto Argentino, en búsqueda de una Argentina más justa, soberana, inclusiva e igualitaria.

Es muy posible que me haya olvidado de alguna persona: a cada uno de ellos, sepan disculparme. La omisión es involuntaria. Mi afecto, no.

Prólogo

Quisiera pedirle un favor. Este libro contiene múltiples historias. En general, se trata de problemas para pensar, para entretenerse, para jugar. No todos tienen la misma complejidad. No todos tienen grados de dificultad similares, pero yo no sabría *graduarlos*. Lo que sí sé es que muchas veces, a lo largo de los últimos treinta o cuarenta años, estuve enfrascado en discusiones sobre *qué es lo que habría que hacer con 'la matemática'* si uno quisiera presentarla en forma 'seductora'. ¿Cómo puede ser que una ciencia que tiene una *rama* que se llama Teoría de Juegos —una vez más… ¡Teoría de Juegos!— genere tantas reacciones en contra? ¿No habrá *algo* que podamos hacer para mostrar que la matemática tiene costados atractivos, divertidos, desafiantes, detectivescos, creativos…? (seguramente si invirtiéramos más tiempo, podríamos encontrar muchos más adjetivos para calificarla). Pero ¿por qué pasa lo contrario? Ni siquiera pasa algo 'neutro', lo que sucede es exactamente lo opuesto. Muy poca gente quiere tener algo que ver con ella, y más allá de llamarla o tildarla de *aburrida*, la matemática que se enseña (o la que se ha venido enseñando durante siglos) parece totalmente *inservible*.

Dicho todo esto, ¿qué podemos hacer? ¿Qué puedo aportar yo? Creo que ya han pasado muchísimos años y muchísimos libros que sostienen que esto '*así*… ¡no va!'. Bueno, aceptado. Así… no va.

Ahora me imagino que usted (que está leyendo estas líneas pero que *no es un profesional de la matemática*), me está increpando o cuestionando: "*Pero ¿usted (que vendría a ser yo) qué puede proponer? Mejor dicho, ¿ustedes (los matemáticos) qué otra cosa pueden ofrecer?*".

Y es aquí donde yo me pregunto: "*¿Por qué no somos capaces de 'mostrar' o 'exhibir' de qué hablamos cuando decimos todo lo que escribí antes? ¿Qué ejemplos puedo dar?*".

Mientras preparaba más historias para este libro, se me ocurrió presentar una *decena* de problemas que ya conté alguna vez, en algún otro momento y en algún otro contexto, pero que, como parte de la 'matemática recreativa', me gustaría proponerle a una persona que recién 'aterriza' y no tiene idea de la matemática que se enseñó hasta acá, ni de la matemática que habría que enseñar, y tampoco escuchó hablar de 'seducciones' o 'aburrimientos'. Es simplemente una persona que viene 'virgen'… ¿Qué le diría yo?

Lo único que tengo que suponer o asumir es que esta *persona* es capaz de pensar, de leer con cuidado cualquier cosa que se le ponga delante y, sobre todo, que cuente con condiciones de contorno que lo hagan sentir bien antes de empezar.

¿Qué quiero decir con esto último? Que lo que sigue es *optativo*, no está forzada/o a hacerlo, 'si quiere lo hace y si no quiere no lo hace', solo pretende despertar su curiosidad. Confío —en todo caso— en que la misma curiosidad que me despertó a mí, le despertará a ella/él. ¿Será posible que eso suceda?

Antes de avanzar en la lista de problemas, permítame aclarar: no estoy proponiendo que la siguiente lista de ejercicios para pensar *reemplace* a la matemática que se enseña hoy… ¡No! Solo pretendo que empecemos en un lugar diferente, que entremos por una puerta que no sea *La puerta equivocada*. En todo caso, propongo *otras* puertas de entrada.

Fíjese lo que le pasa a usted. En principio, yo había elegido 25 problemas, pero después me parecieron demasiados. De hecho, tendría que escribir un libro entero dedicado a ellos. Los enunciados están al principio de cada texto y las soluciones siguen en forma inmediata.

Si le interesa ahondar más en los diez puntos, el material que existe sobre *cada uno* es muy amplio y, en cualquier caso, están escritos en algún otro libro de esta misma colección. Encontrará la referencia a la que puede acudir si siente que el texto la/lo deja insatisfecha/o.

Ahora sí, acá voy.

1. Lotería en Alemania

En Alemania, como en el resto del mundo, hay múltiples maneras de jugar a la lotería. Una de ellas es elegir seis números[1] entre los primeros 50, sin importar el orden. Por ejemplo, uno puede elegir esta combinación: 7, 11, 16, 17, 48 y 50. ¿Quiere calcular usted cuáles son sus posibilidades de 'ganar'?[2]

---

1. Entre los primeros 50 números naturales: 1, 2, 3, 4, …, 48, 49, 50.

2. La forma de calcular cuántas posibilidades hay de extraer 6 números entre los primeros 50, requiere el uso del número combinatorio C(50,6). No voy a poder desarrollar la *teoría* necesaria para poder 'justificar' la aparición de este número, pero tengo varias sugerencias al respecto:

    1. Fíjese en *cualquier* libro de *combinatoria*. Virtualmente en las primeras páginas, junto con la definición del 'factorial' de un número, aparecerán los números combinatorios.
    2. Puede googlear las palabras 'números combinatorios', encontrará una variedad de ejemplos y aplicaciones. Yo lo hice, por eso estoy seguro de lo que escribo.

Mientras tanto, le propongo que piense en estos dos ejemplos:

1) Suponga que usted está viajando en un colectivo. Recién se subió después de comprar un billete de lotería. Está contento porque eligió los seis números que más le gustan. Está parado porque no hay asientos libres. Afuera llueve torrencialmente. El colectivo se detiene y una señorita que está sentada advierte que *esa* es la parada en la que ella tendría que bajarse. Sale corriendo pero se olvida el paraguas. Usted no alcanza a entregárselo y se lo lleva a su casa. Cuando llega, toma el teléfono y disca un número al azar de siete dígitos.

<u>Pregunta 1</u>*: ¿Qué es más probable? ¿Qué sea ella quien atienda el teléfono o que usted gane la lotería acertando los seis números que eligió?*

2) Tome un mazo de cartas con las que se juega al póquer. En total son 52. Póngalas arriba de una mesa. Verá que el mazo tiene una 'altura' de aproximadamente 2,5 cm (dos centímetros y medio). Entonces usted llama por teléfono al fabricante de esas cartas y le pide que le envíe 270.000 mazos. Sí, 270 mil. Saca las cartas de las respectivas cajas y las apila todas. La *pila* que se formó mide casi ¡7 kilómetros! Ahora, le pide a su hija que por favor 'le haga una marca' a *una* de las cartas.

---

3. La definición *propiamente dicha* del número combinatorio C(50,6) es esta:

$$(50!) / ((44!) \times (6!)) = 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45/6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 15.890.700$$

4. En total entonces hay casi 16 millones de posibilidades. En cambio, hay 10 millones de posibles números de teléfono de siete cifras: desde el 000-0000 (suponiendo que este número fuera *válido*) hasta el 999-9999.

Pregunta 2: ¿Qué es más probable? ¿Qué usted encuentre la carta marcada o que su billete con los seis números le sirva para ganar la lotería?

Moraleja 1: Es más probable que la señorita atienda el teléfono.

Moraleja 2: Es más probable que usted encuentre la cara marcada.

Moraleja final: ¡No juegue a la lotería!

2. 128 Tenistas

En el torneo de Roland Garros, en Francia, todos los años participan 128 tenistas. Las autoridades tienen que preparar las canchas para que el torneo se pueda completar en dos semanas. Como usted sabe, el torneo es por *simple* eliminación. Es decir, jugador que pierde un partido queda eliminado. Solamente siguen los ganadores. Pregunta: ¿cuántos partidos se jugarán en total?

Respuesta

La tentación es *contar*. En la primera ronda habrá 64 partidos (ya que los 128 se dividirán en dos para poder enfrentarse), después 32 (que son los que quedarán después de haberse jugado esos 64 encuentros) y así siguiendo. Es *seguro* de que usted llegará al resultado correcto.

Sin embargo, quiero ofrecerle *otra* manera de pensar el problema. Si usted sabe que empiezan el torneo 128 participantes, el *ganador* será el *único* que no perderá *ningún* partido. Todos los demás, en una instancia u otra, tendrán que quedar eliminados. ¿Cuántos eliminados habrá al finalizar el torneo? Respuesta: 127. Por lo tanto, esos 127 tenistas tendrán que haber jugado un partido que perdieron. Entonces, las autoridades pueden estar tranquilas: en total, ¡se jugarán 127 encuentros! No hace falta hacer ninguna suma.

Apéndice

Si en un torneo de tenis (o de cualquier otro deporte o actividad) por *simple* eliminación, participan un millón de jugadores, ¿cuántos partidos habrá que jugar? Después del análisis anterior, la respuesta es inmediata: 999.999 partidos. Notable, ¿no es así?

3. La remera y el señor que robó un billete de 100 pesos

Un señor se quiere comprar una remera. Llega una mañana al negocio y, cuando se dirige al estante en donde están las remeras que le gustan y está a punto de encontrar su talle, advierte que el cajero no está presente en ese momento. Más aún: el señor ve que hay un billete de 100 pesos que está a un costado, apoyado sobre el mostrador. Mira a ambos costados y como no ve a nadie toma el billete de 100 pesos, deja la remera y se va. ¡Se robó el billete de 100 pesos!

A la tarde, vuelve al mismo negocio. Ahora sí, hay un empleado en la caja. El señor se dirige al mismo estante, elige la remera que quería en el talle que le hace falta y se fija en el precio: ¡70 pesos! Toma la remera y se dirige a la caja. Aprovecha el billete de 100 pesos que se llevó a la mañana y paga. El cajero envuelve la remera y le devuelve 30 pesos (el vuelto que le corresponde). El señor se retira del negocio.

Pregunta (multiple choice): ¿Cuánto dinero perdió el negocio?

a. 30 pesos
b. 70 pesos
c. 100 pesos
d. 130 pesos
e. 170 pesos
f. 200 pesos

Por supuesto, le pido que usted piense el resultado por su cuenta.

Sigo yo. Al haber planteado este problema en múltiples lugares, escuché también, múltiples respuestas. No sé lo que pensó usted, pero le propongo que sigamos juntos este camino hacia la solución.

Si la persona que entró a la tarde y compró la remera no fue el mismo señor de la mañana sino otra persona (digamos yo), ¿cuánto dinero habría perdido el negocio?

Usted puede contestar rápido ¡100 pesos!, segura/o de su respuesta porque las dos personas no están conectadas: el señor de la mañana es una persona diferente del de la tarde.

Pregunta: ¿Y qué diferencia hay en el análisis si la persona de la mañana y la de la tarde es la misma? Respuesta: ¡Ninguna! La persona que fue a la tarde hizo una operación 'normal' y 'legal'. Lo que sucedió a la mañana (el robo del billete de 100 pesos) es totalmente independiente.

Moraleja: La respuesta correcta es la c. El negocio perdió 100 pesos.

4. Ping-pong

Sábado por la tarde. Tres amigos —A, B y C— deciden jugar al ping-pong. Afuera llueve mucho y por eso deciden pasar el sábado jugando al tenis de mesa. Como al ping-pong se juega de a dos, hay uno de los tres que *siempre* se queda afuera y mira el partido de sus amigos. El perdedor *sale*, el ganador *se queda*, y el que estaba mirando juega el partido siguiente.

Al finalizar la tarde, deciden contar *cuántos partidos jugó cada uno*. Fíjese bien: no digo cuántos partidos *ganó* cada uno, sino cuántos partidos *jugó* cada uno. Los suman y obtienen este resultado:

A jugó 10 partidos; B jugó 15 y C jugó 17.

Pregunta (que parece loca): ¿Quién *perdió* el *segundo* partido?

Sí, me doy cuenta de que parece imposible de contestar, pero créame que se puede. Ahora le toca a usted.

Respuesta

Si uno *suma* la cantidad de partidos que jugaron los tres, obtiene: 10 + 15 + 17 = 42. Rápidamente se da cuenta de que hay algo que está mal: 42 no es la cantidad de partidos que jugaron, porque al ping-pong se juega de a dos, y entre los 42 partidos estoy contando *dos* veces cada partido. Conclusión: en total se jugaron 21 partidos.

Dicho esto, ¿cuántos partidos tiene que jugar *como* mínimo cualquiera de los tres? Sí, como mínimo. Advierta que en dos partidos consecutivos cualesquiera, tienen que haber participado los tres amigos. No puede suceder que haya uno que no participe en dos partidos seguidos.

Entonces, pregunto otra vez: *¿cuántos partidos tuvo que haber jugado* como mínimo *cada uno de los tres?* Para hacer esta cuenta, es necesario suponer que uno de los tres *perdió todos los partidos que jugó*. Muy bien, pero ¿cuántos tuvieron que haber sido *como mínimo*?

Contemos: supongamos que A jugó el primer partido, lo perdió y, por lo tanto, tuvo que salir. Jugó el tercero, y también lo perdió. Salió para que B y C jugaran el cuarto. A tuvo que volver a jugar el quinto, lo perdió y así siguiendo. En definitiva, si A jugó el primer partido y perdió *todos* los que jugó, es porque jugó todos los partidos *impares*:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21

¿Cuántos son? Cuéntelos y verá que le da 11 partidos. ¿Podría alguno de los tres haber jugado *menos*? Pensemos juntos. Si en lugar de haber jugado todos los partidos impares, hubiera jugado *todos los pares*, ¿qué partidos tuvo que haber jugado?

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Si ahora los contamos, verá que la suma da ¡10 partidos! Justamente, si se fija en los datos del principio, advertirá que el participante A *jugó* 10 partidos. ¿Qué dice esto? Que A fue *no solo* quien *jugó* el segundo partido, sino que fue también quien *perdió* el segundo partido. Y eso era lo que estábamos buscando averiguar: ¿quién *perdió* el segundo partido?

Además de saber quién perdió el segundo partido, con estos argumentos hemos descubierto que A *también* perdió el cuarto, el sexto, el octavo… (todos los pares).[3]

5. Suma de los primeros 100 números

Corría el año 1642. El maestro de un colegio primario les pide a los alumnos que hagan silencio, pero los niños *no responden*. El docente decide entonces darles una tarea para que tuvieran que concentrarse. Les dice: “¡Sumen todos los números desde el 1 hasta el 100!”.

Como en esa época no había calculadoras, computadoras, ni siquiera electricidad… a los alumnos no les queda más remedio que… ¡sumar los primeros 100 números!

---

3. Para completar el razonamiento, quiero exhibir *una forma* (de las múltiples que hay) en las que pudieron haber sucedido los resultados. En la distribución que va a encontrar a continuación, el jugador que figura en la fila superior, es quien ganó el partido, y en cada columna aparecen los dos participantes. Yo escribo una manera (que me sugirió Carlos D’Andrea), pero le sugeriría que usted intente buscar otra(s):

B	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C	A	C	A	C	A	C	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B

Si usted cuenta, verá que A jugó 10 partidos, B jugó 15 y C jugó 17. Esto se deduce del hecho que en los 11 partidos ‘impares’ B *tuvo que haber jugado contra* C (porque A jugó solo los partidos ‘pares’). Por otro lado, B tuvo que haberle ganado 4 de los 10 partidos pares a A, y C le ganó los restantes 6. Una vez más, le sugiero que *usted* busque alguna otra distribución. Verá que hay muchas y son fáciles de encontrar.

No habían pasado ni 30 segundos cuando uno de los alumnos dice: "¡Ya está!". El maestro, que aún no había llegado a sentarse en la silla que había al frente del aula, le pregunta: "¿Ya está? ¿Cuánto le dio?". El alumno contesta: "El resultado es 5.050".

El docente no puede creer lo que escuchó porque, efectivamente, el resultado *es* 5.050. Como no estaba convencido de que alguien pudiera contestar *tan rápido*, le vuelve a preguntar: "¿Había hecho la cuenta en su casa antes?". El alumno responde: "No, la hice recién".

Entonces, el maestro lo invita a pasar al frente y explicarle a sus compañeros cómo hizo para sumar *tan rápido*. El niño dio la siguiente explicación:

Como tenía que sumar los primeros 100 números, si los hubiera escrito, habría quedado 'algo' así:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Lo que hice entonces fue sumar el primero y el último (el 1 más el 100). El resultado es 101. Después, sumé el segundo (el 2) y el penúltimo (el 99). El resultado *también* es 101. Después, sumé el tercero (el 3) y el antepenúltimo (el 98). El resultado vuelve a ser 101. Y seguí repitiendo el mismo *patrón*: fui eligiendo uno de la izquierda y uno de la derecha. Los pares suman *siempre* 101. ¿Cuántos *pares* hay? [¿Quiere pensar usted, querido lector?] En total, hay 50 pares. Luego, todo lo que hice fue *multiplicar* (50×101) = 5.050. ¡Y listo!

Apéndice

El 'alumno' que resolvió el problema de esa forma y *sumó* así (de acuerdo con lo que indica la 'leyenda') fue Carl Friedrich Gauss, conocido en la historia como "El príncipe de la matemática". Sinceramente, ¿cree usted que *solo a un príncipe* se le puede ocurrir un argumento como el expuesto aquí? Yo creo que no, pero claro, yo no soy usted.

6. 50 bolillas blancas y 50 bolillas negras

Piense este problema que me parece *espectacular* y totalmente 'antiintuitivo'. Suponga que en una urna ponemos 50 bolillas blancas (B) y 50 bolillas negras (N). Le voy a pedir que meta una mano dentro de la urna y *sin mirar* escoja dos de ellas.

Si las dos son de *distinto* color, reponga en la urna la bolilla 'blanca'. Si son del mismo color, reponga una 'negra'. Ahora, repita el procedimiento: es decir, vuelva a meter la mano en la urna y, sin mirar, retire dos bolillas y proceda como antes.

Como usted advierte, al principio hay 100 bolillas, pero en cada paso la cantidad de bolillas disminuye en uno, ya que siempre escoge dos y repone una (independientemente del color).

Dicho esto, ¿de qué color es la última bolilla? ¿Se puede decidir?

Respuesta

Pensemos juntos. Al empezar, hay 50 bolillas de cada color, lo que implica que en total hay 100 bolillas. El número de bolillas blancas, entonces, es un número par: 50. Fijémonos qué puede pasar después de haber hecho el primer paso.

a) Si elegí dos de distinto color, repongo la blanca. Luego, las blancas siguen siendo 50.
b) Si elijo dos blancas, repongo una negra. Ahora quedan 48 blancas.
c) Si elijo dos negras, repongo una negra. Las blancas siguen siendo 50.

¿Por qué escribí esto? Lo hice para que nos convenzamos juntos que la cantidad de bolillas blancas o bien sigue siendo 50 o bien pasa a ser 48. ¡Nunca puede ser 49! Es decir, nunca es un número *impar*.

Si de 50 pasó a 48 (las blancas), elija lo que elija entre las dos, después de ese paso, seguirán siendo o bien 48 o bien saltará a 46, pero ¡en ningún caso puede ser 47!

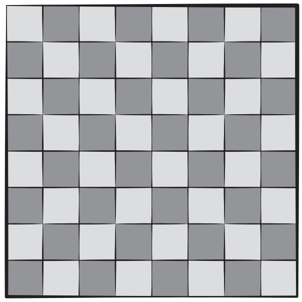
Si usted me sigue con este argumento, verá que el número de bolillas blancas es ¡siempre un número *par*!

Este hecho es muy importante, porque en cada paso que damos, el número de bolillas disminuye en *uno*. Cuando llegamos al final, quedará una sola bolilla. "¿De qué color será la bolilla?", pregunta el problema. Respuesta: ¡Será de color negro! ¿Por qué? Porque dentro de la urna, no importa cómo hayamos elegido, ¡nunca puede haber un número impar de bolillas blancas!

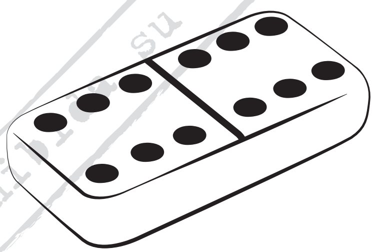
Eso responde la pregunta. ¿No es maravilloso que se pueda contestar *sin tener que hacer ningún tipo de experimento* trayendo 50 bolillas blancas, 50 bolillas negras, y empezar a probar diferentes posibilidades? ¿No es increíble que ni siquiera haga falta saber cuál fue la elección en cada paso?

7. Tablero recortado

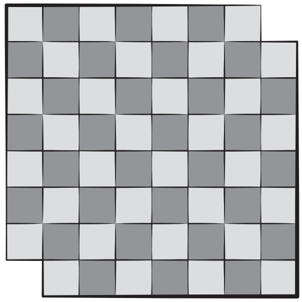
Fíjese en este tablero de ajedrez:



Si cuenta, verá que hay 8 filas y 8 columnas. En total, 64 casilleros. Si colocara arriba del tablero una ficha de dominó, ocuparía exactamente dos casillas. Es decir, para poder cubrir todo el tablero, necesito ¡32 fichas de dominó!



Bien. Al llegar acá, suponga que recorto dos casillas, la inferior izquierda y la superior derecha.



Como usted advierte, ahora quedaron 62 casillas en lugar de las 64 originales. Por lo tanto, si ahora quisiera *cubrir* el tablero con fichas de dominó, ¡no necesito 32 sino *una* menos! Es decir, 31 fichas deberían ser suficientes.

Propuesta: ¿Puede hacer un *diagrama* o *dibujo* mostrando cómo distribuiría esas 31 fichas para cubrir el ‘nuevo’ tablero, el tablero ‘recortado’?

Respuesta

Piense alguna forma y fíjese cuál (o cuáles) se le ocurre(n). Después de un rato, verá que le resulta o bien muy difícil o bien no le sale. ¿Y sabe por qué? ¡Porque no se puede!

La pregunta natural ahora es: ¿No me sale a mí o no le saldría a nadie? No, no es solamente a usted, no importa quién venga, ¡no le va a salir a nadie! ¿Por qué? ¿Quiere pensar por su cuenta?

Es que si se fija, cuando apoya cada ficha de dominó convenientemente en el tablero, cubre dos casillas. Esta sería la parte *fácil*. Pero lo notable es que no importa si usted la ubica en forma horizontal o vertical, lo que *siempre* sucede es que usted cubre un casillero blanco y otro negro.

¿De qué color son las dos casillas que hemos recortado en el tablero? Como puede verificar fácilmente, son dos casillas de color negro. Luego, si bien en el tablero quedaron (después del recorte) 62 casillas, ahora hay 32 casillas blancas pero ¡30 casillas negras! O sea, el número de casillas blancas y negras no es más el mismo. Por lo tanto, las 31 fichas de dominó, no importa cómo las distribuya, no van a poder cubrir el tablero 'recortado'.

¡Y listo! Este argumento nos permitió deducir que no somos usted y yo los que no podemos cubrir el tablero: *¡nunca nadie va a poder!* Y el argumento se basa en cuestiones de paridad. Notable, ¿no es así?

8. Tetris

Estoy 'casi' seguro de que usted alguna vez o bien jugó o bien vio el Tetris. Es un juego creado por el matemático ruso Alexey Pajitnov cuando trabajaba en el Centro de Computación de la Academia de Ciencias de la URSS. Pajitnov se dedicaba a investigaciones en inteligencia artificial y reconocimiento de voz. Tenía en ese momento 29 años y lanzó su 'producto' el 6 de junio de 1984.

Observe las siete piezas con las que se juega tal como aparecen en la Figura 1:

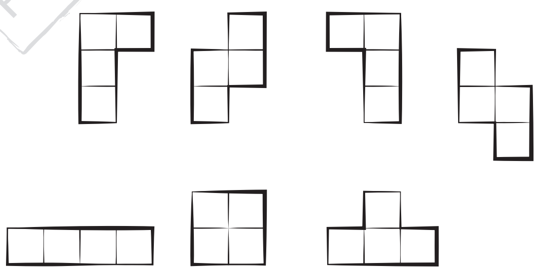


Figura 1

Cada una de ellas consiste de *cuatro cuadraditos* del mismo tamaño. Por lo tanto, EN TOTAL, hay 28 cuadraditos.

Ahora, tomemos un rectángulo de 4×7, como se ve en la Figura 2.

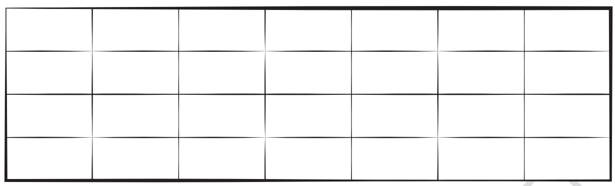


Figura 2

Tome las siete piezas del Tetris y diseñe una estrategia para 'cubrir' el rectángulo. En principio, el rectángulo consiste de 28 cuadraditos iguales a los cuadraditos que componen cada una de las piezas del Tetris. Encuentre alguna forma de cubrirlo y fíjese de cuántas maneras puede lograrlo.

Acá, una pausa (en donde usted piensa y se pone a *probar*). Yo voy a seguir a continuación, por lo que le pido que, antes de haberle dedicado un rato, no lea las líneas que siguen.

Respuesta

¿No pudo? La pregunta que uno se hace a esta altura (como me la hice yo en su momento) es: ¿No se me ocurre a mí cómo cubrir el rectángulo o, en realidad, ninguna persona va a poder? Y si la respuesta es que *ninguna persona va a poder*, ¿cómo lo demuestro? ¿Cómo convenzo a cualquier persona de que yo no pude y de que ella/él tampoco van a poder, no importa cuántos intentos hagan?

Acompáñeme por acá. Miremos juntos las Figuras 3 y 4.

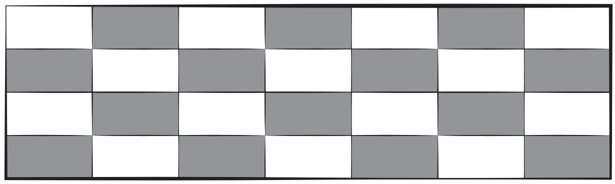


Figura 3

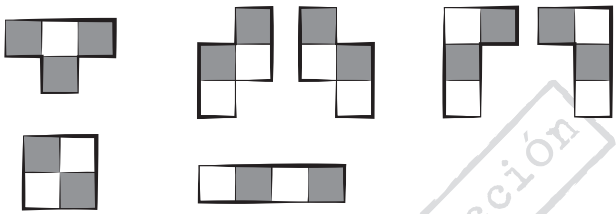


Figura 4

Lo que hice en la Figura 3 fue 'pintar' la mitad de los cuadraditos de un color y la otra mitad (los otros 14) de 'otro' color como si fuera un tablero de ajedrez.

Ahora, fíjese en la Figura 4. Cuente los cuadraditos que hay de cada color. En todas las piezas del Tetris, salvo la *primera* —la que parece una letra T—, hay dos cuadraditos de cada color. Sin embargo, en la letra T hay tres de un color y *un solo cuadradito* del 'otro' color. O sea, en total, hay 15 cuadraditos 'grises' y 13 cuadraditos 'blancos'.

Cuando yo quiera 'cubrir' el rectángulo de la Figura 3 con las piezas de Tetris de la Figura 4, ¡no voy a poder! ¿Por qué? Tendría que intentar cubrir con piezas que tuvieran la mitad de los cuadraditos de un color y la mitad del otro color. Las piezas del Tetris no cumplen con esa condición: hay más cuadrados de un color que de otro.

¡Y listo! ¡No se puede! ¡No pudo usted, no pude yo y no va a poder nadie!

Una vez más, los argumentos de *paridad* llegan para solucionar un problema sencillo.

9. El recorrido de un caballo

Tome un tablero de ajedrez. Resulta ser un cuadrado de 8 filas por 8 columnas.

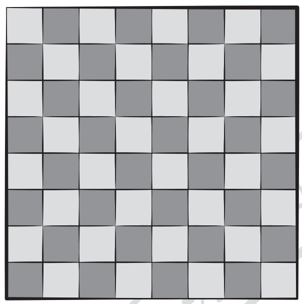


Figura 1

No hace falta que sepa jugar al ajedrez, pero voy a necesitar que *sepa* cómo son los movimientos de un caballo. Para ayudarla/o, fíjese en la Figura 2.

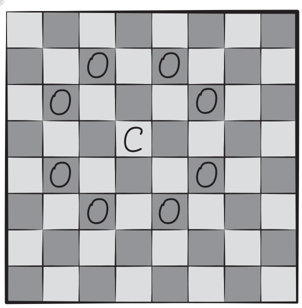


Figura 2

Lo que hice, fue imaginar que el caballo está en la casilla que marqué con la letra C, y sus *posibles movimientos* le permitirían ir hasta los que marqué con una letra O. Como usted advierte, son ocho movimientos posibles.

Mire ahora la Figura 3.

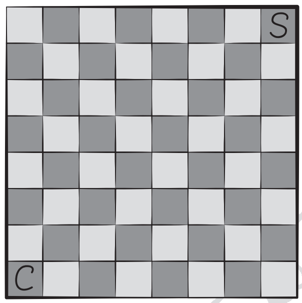


Figura 3

Si el caballo está ubicado en la casilla inferior izquierda y solamente se puede mover usando los movimientos que expliqué antes, ¿puede usted diseñar una estrategia que le permita al caballo ir desde allí, hasta la casilla superior izquierda (la que marqué con una S, de salida), pasando por *todas* las casillas *una sola vez*?

Antes de leer la respuesta, como siempre, le propongo que piense alguna forma de hacerlo y, eventualmente, trate de descubrir dónde está la dificultad y si la puede superar.

Respuesta

Revise nuevamente la Figura 2. Mire el color de la casilla donde está puesta la letra C (que indica la posición del caballo). Fíjese los *ocho* movimientos posibles que puede hacer y descubra el color de la casilla a la que va a llegar. Luego, habrá visto que el caballo con cada movimiento *cambia de color* en el tablero: o bien pasa de color blanco a negro o de negro a blanco. Todo bien hasta acá.

El problema plantea si uno es capaz de diseñar una estrategia para recorrer el tablero de manera tal de detenerse en todas las casillas, una sola vez. Empecemos en donde está la letra C.

a) En total hay 64 casilleros y el caballo ya está en uno de ellos, eso significa que tendrá que hacer 63 movimientos hasta llegar a la letra S.
b) En el primer movimiento, pasa de uno negro a uno blanco. En el segundo, cualquiera que este sea, pasará de uno blanco a uno negro. En el tercer movimiento, pasará de uno negro a uno blanco, y así siguiendo. En cada movimiento *impar* llegará a una casilla de color blanco. En cada movimiento *par* llegará a una casilla de color negro.

Juntando lo que escribimos en (a) y (b), fíjese que en total, el caballo tendrá que hacer 63 movimientos. Como 63 es un número impar, terminará en una casilla blanca. Pero la casilla S es de color negro. ¿Qué se deduce de esto? ¡Que no se va a poder! No importa cuál sea la estrategia o el camino que usted elija, nunca va a poder porque o bien le faltará recorrer algún casillero, o bien habrá pasado más de una vez por alguno de ellos. Cumpliendo las reglas… ¡no se puede!

10. ¿Hay más números naturales que números pares?

Supongamos que en un cine van a pasar en tres dimensiones el partido final del campeonato del mundo. El dueño del teatro decidió que no cobraría la entrada pero, por una disposición municipal, cada persona *necesitaba tener una entrada* para evitar que hubiera gente parada. Llegado este punto, la pregunta es: ¿Cómo puede hacer usted para saber si tendrá lugar o no? Por supuesto, hay múltiples maneras de encontrar la respuesta. Una forma sería quedarse en la cola esperando que a uno le llegue el turno. Si todavía queda/n entrada/s, listo. Podría pasar también que las localidades se agotaran *antes* de que le toque a usted. En este caso, *usted también sabría que no hay lugar antes de llegar hasta la puerta*. Otra idea podría ser preguntar cuántas butacas tiene el cine y después contar el número de personas que hay en la cola.

Si no fuera necesario tener un 'ticket' o si no hubiera problemas en que haya gente parada, uno podría dejar pasar a todos de manera tal que cada uno se ubicara en algún asiento. Si se acaban las sillas antes que termine de entrar el público, es porque había más personas que butacas. Si la cola se agota y todavía quedan asientos libres, es porque había menos personas que lugares. Y si al terminar de entrar todos no queda ningún asiento vacío ni hay ninguna persona parada, es porque hay *exactamente* el mismo número de personas que de butacas. En este último caso, no hace falta saber cuántas butacas hay en el cine ni cuántas personas hay en la cola. Basta con que cada uno ocupe un asiento y listo.

Siguiendo con esta misma idea, quiero proponerle que pensemos si hay más números naturales (1, 2, 3, 4, 5, …, 72, 73, 74, etc.) que números *pares* (2, 4, 6, 8, 10, 12, etc.). ¿Usted qué contestaría?

A priori, uno tiene la tentación (acertada en otro contexto) de contestar que hay *más números naturales que pares*, aunque más no sea porque los *pares* forman una *parte* de todos los números. No son *todos* los números (porque faltan todos los impares), por eso uno contestaría (con convicción): ¡No hay la misma cantidad!

Sin embargo, si reproducimos el análisis que hicimos recién para las butacas del cine y las personas que están en la cola, usted habrá descubierto que *no hace falta contar*. Basta con asignarle a cada butaca una persona y viceversa, pero esencialmente el 'acto' o la 'acción' de 'contar' es innecesaria.

Hagamos lo mismo entonces con los números. Voy a proponerle *esta* asignación, algo así como si los números naturales fueran las personas que están esperando en la cola y los números pares, las butacas del cine.

Uno podría hacer así: al número *uno* le asignamos el número *dos*. Al número *dos* le asignamos el número *cuatro*. Al número *tres*, le asignamos el número *seis*… Y así sigo: al número 53 le asignamos el número 106, etc. O, más en general, al número *n* le asignamos el número ¡*2n*!

1					2
2					4
3					6
4					8
5					10
6					12
7					14
8					16
9					18
...					...
23					46
...					...
72					144
...					...
n					$2n$

Como usted advierte, a diferencia de lo que sucede cuando uno tiene una cantidad *finita* (ya sea por la cantidad de gente que está en la cola esperando para entrar o por el número de butacas que hay dentro de un cine), en este caso, a cada número natural le corresponde un *par* y viceversa: ¡cada número par *proviene* de un número natural! Por ejemplo, si me preguntara qué número *natural* está asociado con el número 1.472, *todo* lo que hay que hacer es dividirlo por dos (cosa que *siempre* podremos hacer porque estos números son todos *pares*). El número 1.472 proviene entonces (o tiene *asociado*) del número 736.

Si seguimos con la misma idea, todo natural tiene un par asociado, y al revés: todo par tiene un natural asociado. Es decir: no sobran butacas, no sobran personas en la cola, no queda gente parada… nada.

Uno puede concluir, a pesar de cuán 'antiintuitivo' parezca, que la *cantidad* de números naturales y números pares *¡es la misma!*

Justamente, esta situación se da *únicamente* cuando los conjuntos son *infinitos*, si no, no habría manera de llegar a esta instancia. En el mundo donde 'viven' los *infinitos* —en el mundo donde no se puede contar—, es posible demostrar (como hicimos recién) que hay tantos pares como números naturales.

Más aún: ¿no le dan ganas de preguntarse —y después buscar la respuesta— si hay más números pares que impares? ¿O si hay más números naturales que múltiplos de 5, o más naturales que múltiplos de 7?

Ya que seguimos avanzando: ¿habrá más números enteros (los que incluyen al *número cero* y a los *números negativos*) que números naturales? ¿Y si ahora quiero *comparar* si hay más números *racionales* (los que en el colegio nos enseñaron como 'fracciones') que números naturales?

Cuando se haya convencido de lo que sucede, uno podría hacerse una *nueva* pregunta: ¿todos los infinitos son *iguales*? ¿O es que hay infinitos que son más *grandes* que otros?

¿No la/lo tientan todas estas preguntas?

Inténtelo usted. No importa cuáles sean las conclusiones… siempre se pueden encontrar en un libro, o en internet, o preguntándolo. Pero más allá de las respuestas, ¿no tiene ganas de *pensar por su cuenta*?

Créame: vale la pena hacerlo, y verá qué satisfacción produce descubrir este mundo nuevo, el mundo de los infinitos.

Espero que haya podido disfrutar de los textos precedentes. Aunque, más que haber disfrutado de 'los textos', yo debería haber escrito: "Ojalá que haya podido disfrutar de *pensar* los textos precedentes tanto como yo de escribirlos".

Ahora sí, el libro propiamente dicho.

Buenas tardes, ¿puedo hablar con la *mediana*, por favor?

Hace unos meses, en la presentación del libro *La matemática del futuro* en la Feria del Libro 2018, me encontré con Teresa Krick y Santiago Laplagne. Ambos estaban esperando (como yo) que terminara la presentación anterior y nos quedamos charlando sobre un texto con el que me había tropezado unos días atrás.

Acá va, acompáñeme y fíjese lo que piensa usted.

Primero, quiero proponerle una suerte de juego. Elijamos 11 números cualesquiera (enteros positivos). Yo elijo los míos, usted haga lo mismo.

Por ejemplo:

2, 5, 7, 14, 120, 30, 230, 27, 200, 15 y 100

Ordenémoslos en forma creciente. Esta es la lista que me queda a mí:

2, 5, 7, 14, 15, 27, 30, 100, 120, 200 y 230

Ahora, elija el número que está *en el medio* de la lista. Es decir, el que deja ‘a la izquierda’ y ‘a la derecha’ la mitad de los números. Como en total tenemos 11, tendrán que quedar *cinco* *números de cada lado*. En mi caso, el número que divide la lista en dos es 27.

Como usted advierte, *menores* que 27 quedan cinco números: 2, 5, 7, 14 y 15. Por otro lado, *mayores* que 27 quedan otros cinco números: 30, 100, 120, 200 y 230.

Este número particular, el 27, tiene un nombre: 'la mediana'.

Es decir, si a usted le dan un conjunto de números enteros, ordénelos en forma creciente. Después, fíjese cuál es el que separa la lista en dos partes iguales (de manera tal que quede la mitad de los números de cada lado, menores que 'la mediana' y mayores que 'la mediana').

Ya sé: usted estará pensando que para que esto suceda, tiene que haber una cantidad *impar* de números. Si no, no quedará claro cuál es la mediana. Lo resolvemos así: a) si hay una cantidad *impar* de números, la mediana es el número que separa la lista en dos partes iguales; b) si hay una cantidad *par* de números, entonces, elija los dos que quedaron en el medio, y calcule 'el promedio' de ambos.

Por ejemplo, si la lista está compuesta por:

2, 5, 7, 14, 15, 27, 30, 100, 120 y 230

ahora, quedan *dos números* en el medio: el 15 y el 27. El promedio de los dos es (15 + 27) /2 = 21. En este caso, entonces, la *mediana* es el número 21.

En el afán de seguir 'leyendo su mente', me imagino que usted debe estar pensando: "¿Y para qué servirá la mediana? ¿Qué aporta?".

Si sigue leyendo, verá que lo que parece nada más que un 'juego', termina siendo un número *verdaderamente importante*. Acompáñeme por acá.

Suponga que en una oficina trabajan 100 personas. Todas cobran el mismo salario. Para fijar las ideas, supongamos que cobran 100 mil pesos por mes. Si yo le preguntara: “¿Cuál es el promedio de los salarios que perciben estas personas?”, su respuesta sería —supongo— casi inmediata: “¡100 mil pesos!”. Y por supuesto, es la respuesta correcta.

En este caso particular, no hizo falta hacer ningún cálculo pero, en general, cuando uno tiene que determinar el promedio de un grupo de números, lo que hace es *sumarlos todos* y al resultado dividirlo por la cantidad de sumandos. En esta situación, como *todos* cobran lo mismo, no importa si son 100, 20 o 1000, el promedio no se va a alterar.

Ahora bien, si yo le pidiera que calculara el promedio entre estos diez números:

2, 5, 7, 14, 120, 30, 27, 200, 15 y 100,

usted *tendrá* que hacer un cálculo… fácil, pero cálculo al fin. Al sumar todos los números obtiene 520 y como son 10 números, el promedio es 52.

¿Por qué habría de relatar esta historia?

Volvamos al ejemplo de las 100 personas que trabajan en la oficina de manera tal que todas cobran 100 mil pesos por mes. Supongamos que por un instante uno de los trabajadores *sale de la oficina* y entra Bill Gates. Sigue habiendo 100 personas, *todos* siguen cobrando 100 mil pesos, con la excepción de uno: el nuevo integrante del grupo. ¿Cuánto dará el promedio ahora?

Hay 99 personas que cobran 100 mil, por lo que la suma de sus salarios resulta ser 9.900.000. Ahora nos falta Bill Gates. No sabría estimar cuánto recibe Bill Gates por mes pero, a los efectos de este cálculo, supongamos que gana 1.000 millones de pesos mensuales. Cuando sumemos 9.900.000 más esos 1.000 millones, el resultado será: 1.009.900.000, o sea, mil nueve millones novecientos mil. ¿Cómo calculamos el promedio? Una vez más, dividiendo este número por 100:

$$(1.009.900.000) / 100 = 10.099.000.$$

Como usted advierte, el resultado ha sufrido un brutal incremento: el salario promedio de las personas que están dentro de la oficina ahora es de 10.099.000 pesos, mientras que *sin* Bill Gates, ascendía a 100 mil.

Todo esto está bien, pero creo que estará de acuerdo conmigo en que este número no da una *verdadera* idea de lo que está sucediendo en la oficina. La presencia de *una sola persona* que gane una cantidad *tan diferente* del resto fuerza a pensar que, si bien los números son correctos, en caso de querer conocer el promedio de los ingresos, esta metodología nos dejaría con una impresión (para ser verdaderamente generosos) *equivocada*.

¿Habrá entonces alguna otra forma de *evitar* esta distorsión? Es decir, el promedio es un número que está definido como usted y yo sabemos. Ese número ¡no lo vamos a poder cambiar! Tampoco podemos decir que lo 'ajustamos' de acuerdo con las circunstancias. El promedio es (y será) el número que cumple con la definición que vimos antes: la suma de todos los números dividido por la cantidad de números.

Al llegar a este punto, me gustaría proponerle que pensemos (en lugar del promedio) en la *mediana*. Veamos cómo se ve afectada la mediana con el ingreso de Bill Gates en la oficina.

Primero: calculemos la mediana *sin* Bill Gates, en donde *todos* ganan 100 mil pesos por mes. Tal como sucedía en el caso del promedio —y le pido que usted haga el cálculo *por las suyas*— verá que la mediana *también* resulta ser 100 mil pesos.

Segundo: incluyamos a Bill Gates y excluyamos a una de las personas que había en la oficina. Siguen siendo 100, pero 99 de ellos cobran 100 mil pesos mensuales y estamos suponiendo que los ingresos de Bill Gates son 1.000 millones de pesos por mes. Ya calculamos el promedio (que se vio fuertemente distorsionado): ¡10.099.000 mensuales!

¿Quiere calcular la mediana? Si pudiera, le pediría que no siga leyendo sin hacer la cuenta usted.

Sigo: en este caso, *¡la mediana seguirá siendo 100 mil pesos!*

Es decir, la aparición de Bill Gates, distorsionó el promedio y ofrece una muy mala idea de lo que uno querría estimar (cuánto cobran en promedio las personas que trabajan en la oficina). Técnicamente, es irreprochable: el promedio con Bill Gates se eleva a más de 10 millones de pesos mensuales, pero es la mediana la que evita que *la aparición de un solo integrante* que percibe un número *tan diferente* de todos los otros, distorsione la percepción que querríamos obtener.

Más aún: si en lugar de haber ingresado sólo Bill Gates, hubiera entrado también Tim Cook (por poner otro ejemplo), incluso sin sacar a otra persona en el lugar del CEO de Apple (ahora habría 101), el *promedio* se modificaría de una manera brutal (alejándose de lo que uno quisiera: un número cercano a los 100 mil), pero la mediana *seguiría siendo* 100 mil.

Moraleja

Cuando lea en un diario o escuche por televisión o por radio que alguien quiere evaluar el promedio de los salarios en alguna región o ciudad o barrio, piense que *este particular número* (el promedio) no es el *único* que debería usarse. Uno debería llamar al medio de comunicación que ofreció ese dato y pedirle que le ofrezcan un segundo número: *¡la mediana!* Los mismos datos que les permitieron obtener el *promedio* sirven para calcular la *mediana*. Con ambos números, las conclusiones que sacaremos estarán decididamente más cercanas a la realidad.

La propuesta

Ismail declaró: “Cuando el equipo A ganó el sorteo inicial, con las reglas actuales, si patea primero tiene más de un 60% de posibilidades de *ganar* el partido. Con Brams hemos pensado que esto es una ventaja *demasiado importante* teniendo en cuenta lo que se decide en cada caso. Es por eso que analizamos los datos que recolectamos desde el año 1970 hasta 2008, incluyendo Copas del Mundo, Copas de Europa (tanto las Champions League como los diferentes torneos jugados en el viejo continente), las Copas de África, las Copas Libertadores de América, y otras que se juegan en Sudamérica, en la CONCACAF y las diferentes Copas de Oro). Tanto los entrenadores como los jugadores están bien advertidos de la ventaja que tiene quien inicia las ejecuciones. En la única encuesta seria que se hizo entre la mayoría de los participantes, más del 90% contestó *que sin ninguna duda* elegirían iniciar los tiros desde el punto del penal. Allí entendimos que era *imprescindible* buscar alguna otra alternativa para compensar esa *desventaja deportiva* que era (y es) visiblemente injusta. La moneda *no puede* (ni debe) decidir el resultado”.

Y siguió: “En este momento, la liga inglesa de fútbol, pero también la UEFA y la FIFA, están analizando la posibilidad de modificar la regla AB AB AB AB AB e implementar lo que ya propuso hace unos años Palacios-Huerta: ABBA ABBA".

En sí mismo, esto ya representaría un cambio muy importante teniendo en cuenta el carácter tradicionalmente conservador que ha mantenido la FIFA ante cualquier modificación reglamentaria.

Por supuesto, el cambio ABBA ABBA ABBA sería de hecho una mejora excepcional y ciertamente no menor… Pero algo no está suficientemente explícito: si bien es una mejora, funciona bien *siempre y cuando haya un número par de 'vueltas'*.

Acá es donde me imagino su cara de incredulidad: "¿Vueltas? ¿De qué habla? Hasta acá entendía todo, pero ¿de qué vueltas habla este hombre?". Me explico.

Piense en la tanda inicial de cinco penales por equipo. De acuerdo con lo que se hace hoy, los primeros diez penales siguen esta progresión: AB AB AB AB y AB. Ellos llaman una 'vuelta' al par AB solamente. Es decir, al primero pateado por cada equipo. La segunda vuelta sería *nuevamente* AB. De hecho, en las condiciones actuales, hay cinco vueltas: AB AB AB AB y AB.

Si ahora uno se situara en lo que propuso Palacios-Huerta —o sea, ABBA ABBA AB(BA)— también hay cinco vueltas, pero ahora son AB, BA, AB, BA y AB. Como usted advierte, todavía persiste una ventaja para A. No es tan inmensa como había antes, pero A *sigue pateando primero* tres veces contra dos de B. Aunque parezca intangible, *es* una ventaja. Justamente esta situación es la que llevó a Ismail a declarar que está todo bien, que es mejor, pero para que sea verdaderamente *justo* tendría que haber un número *par* de rounds. Y eso, con el sistema actual (y aún con el 'mejorado') no pasa, ya que el equipo A empieza pateando *tres de los cinco rounds*.

¿Se puede corregir esto? Después de analizar los datos desde un ángulo diferente, Brams e Ismail sugieren *un agregado* a la regla ABBA ABBA… Es lo que ellos llaman (la traducción corre por cuenta mía) 'la regla compensatoria'. ¿Qué quiere decir?

Aquí, una pausa: antes de avanzar, piense que *todo este artículo*, todo lo que escribí hasta acá, fue para llegar a este punto: explicar qué variante proponen al cambio que está analizando la FIFA hoy.

Todo empieza como siempre: arrojando la moneda. Eso definirá *inexorablemente* quién patea primero. Supongamos que ganó A.

Entonces, el primer round es AB. Después que los dos equipos patearon su primer penal, hay dos posibilidades: están empatados (0-0 o 1-1) o bien alguno de los dos convirtió y el otro no. Es decir, podría terminar 1-0 o 0-1.

Ellos proponen que el equipo que *perdió* después del primer round… ¡patee primero! No importa si fue A o B, lo que *sí* importa es que quien perdió, pueda *compensar* el error pateando primero en el round siguiente. Esto funcionaría si alguno de los dos erró un penal o si algún arquero lo atajó.

En el caso que haya habido un empate (0-0 o 1-1), entonces el equipo que empezó pateando en el round anterior, ahora patea segundo. ¡Y listo! No hace falta analizar más.

En resumen: si hubo empate, patea primero el que pateó segundo. Y si alguno de los dos sacó alguna ventaja, entonces el que perdió, patea primero.

De alguna forma, esto le permite al equipo que está 'abajo' en el marcador compensar el problema, y de esa forma hacer el desenlace mucho más atractivo ¡y a la vez más justo!

Ismail terminó diciendo: "Esto hace que el encuentro sea mucho más competitivo, más atractivo para dilucidar el final, y una situación en la que todos ganan: los jugadores y los espectadores".

Para terminar

La pregunta que subsiste es esta: "¿Es más justo?".

Para poder contestarla, hace falta recurrir a los datos, *no a las opiniones*. No importa cuán calificadas sean. Es por eso que vuelvo a sugerirle que si le interesa el tema, vaya hasta el trabajo publicado y mire los números. Allí verá que con los mismos datos que Ignacio Palacios-Huerta dio el paso inicial (enorme) de proponer un cambio que mejore lo que existía/existe, lo que sugieren Brams e Ismail es un paso aún más *drástico* en esta dirección. Y los números que aparecen en el artículo son *determinantes.* Es más: hace que 'la regla compensatoria' (que ellos llaman '*Catch-Up Rule*') sea muy necesaria para *igualar hacia arriba*, y lograr que la competencia (o su definición) sea muchísimo más justa.

Por ahora, final, pero me dan ganas de escribir: "Continuará…".

Países y animales

Le propongo que hagamos juntos un juego. Es una lástima que yo no esté allí para que lo podamos disfrutar al mismo tiempo. Veremos si puedo convencerla/o de que valió la pena. Acá voy.

Estos son los pasos que usted tiene que dar. Yo, mientras tanto, espero que los vaya haciendo uno por uno.

1) Elija un número entre 1 y 6.
2) Divídalo por 7.
3) Sume las *primeras seis* cifras (después de la coma).
4) Al resultado, súmele 11.

Estoy seguro de que le dio un número de *dos* dígitos. Ahora, fíjese la siguiente *tabla* en donde 'asocié' cada *dígito* a una *letra*.

Al número *cero*, le asocio la letra A
Al número *uno*, le asocio la letra B
Al número *dos*, le asocio la letra C
Al número *tres*, le asocio la letra D
Al número *cuatro*, le asocio la letra E
Al número *cinco*, le asocio la letra F

Al número *seis*, le asocio la letra G
Al número *siete*, le asocio la letra H
Al número *ocho*, le asocio la letra I
Al número *nueve*, le asocio la letra J

Ahora, vuelva a mirar el número de *dos dígitos* que había obtenido al principio. Supongamos que le dio 72:

siete es el primer dígito
dos es el segundo dígito

Por lo tanto, mirando en la 'tablita' que escribimos antes, al número *siete* le corresponde la letra H y al número *dos* le corresponde la letra C.

En ese caso, le voy a pedir que piense en el nombre de un *país* que empiece con la letra asociada al número siete (o sea, que empiece con H) y piense también el nombre de un *animal* que empiece con C (letra con la que se asocia el número dos). Por ejemplo, una respuesta posible sería: Hungría y Caballo.

Ahora, hágalo con el número de dos dígitos que obtuvo usted. Piense entonces en un país que empiece con la letra que le corresponde al primer dígito y un animal que empiece con la letra que le corresponde al segundo dígito.

Le doy tiempo para que piense. Avíseme cuando ya los tiene a ambos.

¿Listo?

Bueno, estoy dispuesto a apostar que *¡yo sé qué país y qué animal eligió usted!*

El país que encontró es 'Dinamarca' y el animal, una 'iguana'. ¿Acerté? Si sucedió lo que yo tenía previsto, la pregunta es ¿por qué pasó esto?

¿Quiere pensar usted por su cuenta? ¿No le parece *muy* interesante?

En principio, más allá del país y el animal que usted hubiera elegido, fíjese que yo tengo que estar seguro de que el número de dos dígitos que encontró es 38. ¿Por qué? Bueno, porque el número 3 está asociado con la letra D (de ahí el nombre de Dinamarca) y el número 8 está asociado con la letra I (y de allí se me ocurre el animal: iguana).

Todo bien, pero ¿entonces no importa qué número había elegido usted al principio? Es decir: ¿será verdad que empiece usted con el número que empiece, *siempre* se llega al 38?

Lo notable es la respuesta: ¡Sí, siempre se llega al 38! ¿Por qué? Elija usted el número que elija (entre 1 y 6) cuando lo divide por 7 (como le pedía yo), llegamos a estos posibles resultados:

1 / 7 = 0,142857…
2 / 7 = 0,285714…
3 / 7 = 0,428571…
4 / 7 = 0,571429…
5 / 7 = 0,714286…
6 / 7 = 0,857143…

Mire los primeros seis decimales en cada caso: ¡son siempre los mismos! (1, 2 , 4, 5, 7 y 8). Luego, elija lo que usted elija para empezar, cuando los sume, siempre le va a dar 27. Como le pedí que le sume 11, llegará al número 38, como yo quería.

Una vez que usted tenga el número 38, tiene que pensar en un país que empiece con D (por el número 3) y un animal que empiece con I (por el número 8). Pregunta: ¿cuántos países conoce usted que empiecen con la letra D? Y por otro lado, ¿cuántos animales que empiecen con la letra I? ¿No le resulta casi *natural* decir "Dinamarca e iguana"?

Por supuesto, no siempre *tiene* que llegar a esa respuesta: una persona pudo haber elegido Djibuti o Dominica, pero convengamos en que Dinamarca es el *primer nombre* que a uno se le ocurre. Con los animales sucede lo mismo: ¿Usted diría *ibis* antes que *iguana*? Ni siquiera estoy seguro de que la mayoría de las personas siquiera *sepa* lo que es un *ibis* (yo tuve que fijarme en Wikipedia).

De esta forma, con una cuenta muy convencional (dividir algún número elegido entre 1 y 6 por el número 7), se puede hacer un *truco* que parece justamente eso *¡magia!* Algo así como si yo pudiera estar leyendo su mente.

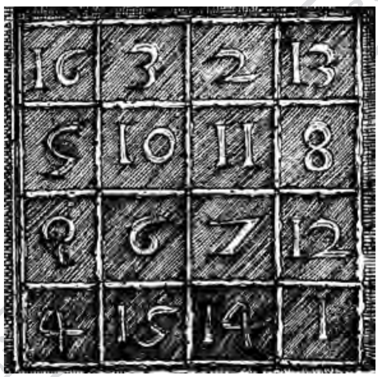
Cuadrados mágicos[4]

Fíjese en esta foto. Mírela con cuidado.

4. El lunes 18 de julio de 2011, Pablo Ottenstein me envió un correo electrónico con el título "Cuadrado mágico de Durero". Nunca tuve oportunidad de dedicarle el tiempo que merecía hasta que ahora, a fines de mayo de 2018 (casi siete años después), puedo hacer justicia y ofrecerle a usted la posibilidad de disfrutar de estas curiosidades aritméticas como me pasó a mí.

Se trata de un cuadro que se conoce como *Melancolía I*, y fue pintado por uno de los artistas alemanes más famosos del Renacimiento: Albrecht Durer (aunque en español se lo conoce como Alberto Durero).

Durero terminó el cuadro en el año 1514. Fíjese en el ángulo superior derecho. Debajo de lo que parece ser una campana, hay un cuadrado que está dividido en cuatro filas por cuatro columnas. En la foto es complicado detectar que dentro de cada uno de los casilleros hay un número. Más aún: si se esfuerza un poquito, verá que aparecen los primeros 16 números naturales, del 1 al 16. Ahora, observe la distribución.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ahora, llegó el momento de *investigar* sobre la distribución de los números. Le sugiero que se entretenga/divierta tratando de detectar algunas particularidades. Yo sigo a continuación, pero una vez más, la/lo invito a que trate usted de sacar conclusiones.

Si sigue leyendo, las sabrá todas, pero qué gracia tendría. Usted decide…

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

a) Sume todas las filas.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

b) Sume todas las columnas.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

c) Sume las cuatro esquinas.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

d) Rote las cuatro esquinas hacia la derecha, como si moviera las agujas de un reloj: en lugar de tener 16, 13, 1 y 4, ahora va a tener 3, 8, 14 y 9. Súmelos.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

e) Rótelos una vez más. Ahora tiene (2, 12, 15 y 5). Súmelos.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

f) Sume los cuatro cuadrados que están en el medio (10, 11, 6 y 7).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

g) Sume los dos cuadrados intermedios de la primera columna (5 y 9) más los dos cuadrados intermedios de la última columna (8 y 12).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

h) Sume los dos cuadrados intermedios de la primera fila (3 y 2) más los dos cuadrados intermedios de la última fila (15 y 14).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

i) Sume la diagonal que va de izquierda a derecha (16, 10, 7 y 1).

j) Sume la diagonal que va de derecha a izquierda (13, 11, 6 y 4).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

k) Fabríquese una diagonal imaginaria (empezando con 3 y 5, de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda) y continúe siempre de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo (12 y 14).

l) Haga lo mismo pero ahora de izquierda a derecha (2 y 8) y continúe hacia abajo con (9 y 15).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

m) Durero creó este cuadrado en 1514. La C del cuadrado es la tercera letra del alfabeto. La D de Durero es la cuarta. Componga este número con estos dos dígitos y obtiene (como era de esperar) ¡34!

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Este (*tipo de*) cuadrado que aparece en el cuadro de Durero se llama *cuadrado mágico*. Ahora, cuando usted ya debe haber descubierto que *todas* las sumas que le propuse dan el mismo resultado (34), le propongo algunas ideas más para pensar.

- ¿Se podrán encontrar *más cuadrados mágicos*?
- ¿Tendrán que ser *siempre* de cuatro filas por cuatro columnas?
- En este caso, los cuatro números que uno va eligiendo siempre suman 34. Pregunta: si yo eligiera —por ejemplo— el número 72, ¿se podrá encontrar un cuadrado mágico de manera tal que al sumar las filas, columnas, diagonales, etc., se obtenga el número 72?
- Yo seleccioné el número 72 como ejemplo, pero ¿se podrá encontrar un cuadrado mágico para *cualquier número* que yo elija?

Estas son *algunas* preguntas. Estoy seguro de que usted debe tener las suyas que sin duda serán más interesantes que las mías, aunque más no sea porque se le ocurrieron a usted. La *única* manera que conozco de poder contestarlas es a través de *la prueba y el error*. Bueno, también se puede leer lo que hicieron otros pero, una vez más, ¿qué gracia tiene?

Si le interesa avanzar con este tema, puede empezar revisando esta página de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado_mágico

Espías (Primera parte)

Cuando le garantiza acceso a una app en su teléfono celular, ¿qué es lo que está permitiendo que (le) hagan?

Todos los que tenemos un teléfono celular que permite instalar apps elegimos algunas que son particularmente útiles. No importa cuáles. Usted las conoce. Sin embargo, en algún momento hay una parte de la 'letra chica' a la que no necesariamente le prestamos atención. Lo que queremos es tener *acceso y satisfacción inmediatos*.

Por ejemplo, y para fijar las ideas, imagínese su cuenta con Facebook, Twitter, Instagram, Snapchat, LinkedIn, Google, WhatsApp, Viber, etc., y elija cómo continuar.

Ahora bien. Supongamos que esa app le pidió permiso para poder usar su cámara, y usted dijo que "sí", ¡métale para adelante! Desde ese momento usted acaba de autorizar:

a) Acceso a sus dos cámaras (si es que su teléfono las tiene), la que está en el frente y en la parte trasera de su celular
b) *Grabarla/lo* en *todo* momento si la app está funcionando, aunque sea por debajo de la actividad —que usted cree que es— principal y es la que la/lo tiene más concentrado. Digamos que está actuando *subterráneamente*…

c) Sacar(le) fotos y también grabar videos *sin* darle ninguna advertencia ni pedirle permiso.
d) Subir a la nube esas fotos/videos inmediatamente.
e) Aprovechar esas fotos o videos para que los programas que hacen reconocimientos faciales pueden descubrir (y almacenar) esas variantes que acaban de subir a la red.

Todo esto sin necesidad de advertirle que lo están haciendo. Es una captura totalmente *silenciosa* y que sucede sin que usted se 'despeine'. ¡Nada!

En particular, si alguna vez usted autorizó alguna de sus apps para crear o enviar un avatar o para mandar una foto, ¡listo: en el horno! A partir de allí, *todo* lo que haga/envíe/vea/registre/filme ya no será propiedad suya únicamente. Habrá muchísima más gente que lo tendrá guardado y almacenado para siempre.

Por supuesto, una vez que quedó registrado un video en el que aparece usted, ese mismo video provee muchísimos *cuadros* (o fotos) que podrán ser utilizados para 'rastrearla/o' por internet y extraer de la nube (o de donde sea) *todas las fotos* que se le parezcan (¡o que sean fotos suyas!) que están navegando *por allí*. Además, esto permitirá crear versiones *tridimensionales* suyas. Es decir, con todos estos datos, piense en lo que sucede cuando le hacen alguna tomografía computada. El tomógrafo hace cortes bidimensionales, planos, de determinadas partes de su cuerpo y luego los junta todos y forma una imagen tridimensional. Bueno, en lugar de hacerlo con alguna parte *interna* de su cuerpo, se puede usar la misma tecnología (o equivalente) para lograr 'pegar' toda la información y reproducirla con su *exterior*.

Por otro lado —no sé si hace falta que escriba esto, pero por las dudas—, si usted es una persona que *siempre* o *algunas veces* o *alguna vez* ha llevado su teléfono celular o tableta al baño, sepa que podría estar *todo* filmado. Ahora bien, usted se preguntará: ¿a quién podría interesarle? Tiene razón: no tengo respuesta, pero el hecho de que *yo* no tenga respuesta no significa que no *alguien* sí. Por razones que ignoro, podría haber gente a la que *sí* le interese: usted sabrá. Y una vez más, podría estar sucediendo en vivo, en lo que se llama *streaming video*. ¡Qué sé yo! ¿A quién podría interesarle mirarla/o a usted dentro del baño en tiempo real?

Aunque no lo escribí todavía, usted sabe que varias veces tuvo que autorizar en distintas aplicaciones el acceso a sus contactos, mensajes, e-mails, fotos, videos y cualquier otro tipo de información almacenada en su teléfono. Como sugiere el autor de la nota más impresionante que leí al respecto (a continuación encontrará los enlaces correspondientes), si quiere intentar *protegerse*, al menos parcialmente *tape* las cámaras con cinta aisladora (como la que usan los electricistas) o algo equivalente. Niegue acceso a cualquier base de datos que usted tenga. No creo que sirva para garantizar que se transformará en inexpugnable, pero es mejor que nada.

Por otro lado, como el propio Krause sugiere, instale *algún ícono* en la pantalla de su teléfono, de manera tal que le indique si alguna de sus dos cámaras están en uso. Si no es usted, ya sabrá por qué.

Si habla inglés (o puede conseguir una traducción), el informe que Krause le presentó a Apple está acá: https://openradar.appspot.com/radar?id=5007947352506368. Por otro lado, mediante el link https://github.com/KrauseFx/watch.user, puede sacarse fotos uno mismo, creyendo que lo hace en soledad, y descubrir 'casi' inmediatamente que ya están 'posteadas' en la nube (yo no lo hice, pero sé de gente que lo usó). Esa parte se la dejo como tarea para el hogar.

Hay otro sitio (https://github.com/KrauseFx/user.activity) en donde tratan de contestar la siguiente pregunta: "¿Qué es lo que está haciendo el usuario?". Por las dudas, el *usuario* viene a ser *¡usted!*

Algunas observaciones antes de terminar:

1) Hay un video *extraordinario* en https://www.youtube.com/watch?v=NpN9NzO4Mo8, publicado el 13 de diciembre del año 2016, que dura 21 minutos y 29 segundos (es *corto* como película, es *largo* como video). Lo filmó un director holandés muy joven, Anthony van der Meer, quien además de haberlo producido, editado y filmado, es muy versado en cuestiones de tecnología de telefonía celular.

Usted sabe que su teléfono tiene una aplicación que le *permitiría* (en teoría) rastrearlo, si es que alguien se lo robara (o si lo perdiera, para no ser tan dramático). Lo que hizo Van der Meer es casi *invitar* a alguien para que le robara su teléfono celular, al que había preparado especialmente para rastrearlo y ver qué sucedía. Por supuesto, se trata de un caso particular del que es *imposible* extrapolar nada serio. Sin embargo, lo que más me interesó es compartir con usted lo que es *posible* que suceda. Los teléfonos celulares no solo se roban para desarmarlos y luego vender las partes (que sería el equivalente de lo que sucedía —o aún sucede— con los autos). La parte más importante está en *otro lugar*.

2) Usted debe recordar a Edward Snowden. Creo que todavía está en Rusia después de haber denunciado lo que hacía una agencia del gobierno norteamericano espiando a sus propios ciudadanos. Snowden reveló la existencia de un programa que se llama Optic Nerves (algo así como 'nervios ópticos') que permitía (o permite) recoger fotos de los usuarios de Yahoo cada

cinco minutos. De los videos que el cliente tenía con alguna otra persona, Optic Nerves se guardaba algunas fotos. De acuerdo con lo que informó el diario inglés *The Guardian* (Gran Bretaña como Estados Unidos comparten —o al menos es lo que dicen públicamente— sus bases de datos), entre un 3 y un 11% de esas imágenes correspondían a fotos de '*undesirable nudity*' ('desnudez indeseable').

3) Mucho se ha discutido sobre las 'entradas por la puerta de atrás' que todos los gobiernos se reservan sobre los teléfonos celulares. Están incorporadas directamente a nuestros aparatos ante nuestra ignorancia supina (al menos, de la mayoría de nosotros). Las agencias que tienen acceso a esas entradas pueden incorporarse (sin que usted lo advierta) a sus conversaciones telefónicas, videos, mensajes, fotos, etc.

4) Por último, y aunque parezca una estupidez, ¡no le dé su contraseña a nadie!, ni siquiera cuando se la pidan en forma *amable* y usted crea que proviene de la compañía que le ofrece el servicio. Esa respuesta tiene que ser taxativa, es siempre "¡NO!". Ninguna compañía pide las contraseñas; por lo tanto, si alguien se la pide, créame, quiere algo más, pero no se lo puede decir.

Final

Llegó el momento de otorgarle —como corresponde— *todo* el crédito de este artículo al periodista inglés Dylan Curran[5]. Su

5. https://www.theguardian.com/commentisfree/2018/apr/06/phone-camera-microphone-spying?utm_source=pocket&utm_medium=email&utm_campaign=pockethits

publicación fue la que me permitió acceder a todo lo que escribí acá, videos incluidos. Y como dice él: *"It's only paranoia, until it's too late"* ("Es solo paranoia, hasta que es demasiado tarde"). Su idea es *exactamente* la misma que la mía: advertir, señalar, invitar a pensar, a tomar decisiones por su cuenta y a 'repensar' cada vez que interactúa con su teléfono.

Más de cincuenta años atrás en la Argentina se reproducía una serie en blanco y negro protagonizada por Raymond Burr: *Perry Mason*. El fiscal, después de interrogar a cada testigo, mientras iba caminando hacia su asiento miraba a la cara al abogado defensor y decía: "¡Su turno, Mr. Mason!". Es decir, ahora la pelota está en su campo: ¿qué va a hacer? Creo que la pregunta quedará abierta, al menos por ahora.

Espías (Segunda parte)

Si le interesó el tema de los espías, le sugiero que me siga con esta hoja de ruta. Úsela como una guía, ya que es *mi* hoja de ruta. Estoy seguro de que usted tiene una propia. Acá voy.

- https://www.google.com/maps

En el Historial de este sitio se puede acceder a Timeline, donde queda registrada la actividad diaria en términos geográficos: todos los lugares en los que usted estuvo, si fue caminando, en avión, en auto, en autobús. Además, el tiempo que permaneció en cada lugar. Al finalizar, hay una forma de recolectar toda la información diaria, de manera tal que usted pueda tener una lista con la frecuencia con la que usted visita cada sitio, y el tiempo que allí permanece. Naturalmente, el lugar en donde uno duerme (por poner un ejemplo) resulta ser un sitio de los más utilizados y donde permanece la mayor cantidad de tiempo. Lo mismo sucede con el trabajo, si es que usted tiene uno fijo o le dedica una buena parte de su día, ya sea una oficina, una fábrica o un colegio, escuela o universidad. La diferencia es fácilmente observable cuando se trata de los fines de semana, en donde la rutina cambia.

• https://myactivity.google.com/myactivity

En este sitio está registrada *toda* su actividad en internet, tanto las páginas que usted visitó como los correos electrónicos que usted recibió y/o envió. Si me permite agregar algo, “mete miedo”. En el título de la página dice que usted es la *única* persona que puede visitar estos datos. Puede que sea cierto, pero si yo soy el único que puedo visitar esta página, ¿cómo sé yo (o usted) que no hay otras personas que *también* tienen acceso a la misma información que se almacena allí?

Algo más: aparecen también listadas *todas las apps* que utilizó, ya sea WhatsApp, ESPN, Snapchat, Instagram, Twitter, los diarios que lee, las que usa para averiguar el pronóstico, los lugares que googleó…, ¿hace falta que siga? Sí, una cosa más: en mi teléfono celular, yo puedo ‘dictar’ una frase para que, convertida a texto, la pueda enviar. En todo caso, permítame escribir que me impactó escuchar *todo* lo que fui grabando en el tiempo (y que luego fue traducido). ¿Quiere fijarse usted?

• https://myaccount.google.com/security

Esta página le permite establecer los niveles de ‘seguridad’ que usted quiere, y con los que le pide a Google que lo proteja. Aparecen también *todas* las plataformas que usted usa, es decir, el/los teléfono/s celular/es, la/s computadora/s, la/s laptop/s y la/s tableta/s que utiliza. Están *todos*. Más aún: aparecen las fechas en los que usted las usó por última vez (y las primeras, claro está).

• https://www.youtube.com/feed/history

En este sitio usted encontrará *todas* las veces que utilizó los servicios de YouTube. Está *todo* su historial. Como yo lo uso poco, aparecieron muy pocos ejemplos, pero mi amiga Érica, quien estaba conmigo cuando ‘jugábamos’ para ver qué encontrábamos, se sorprendió por la *enorme* (y exhaustiva) lista de videos que ella tenía registrados en su historial. Una vez más, *mi* experiencia no le va a servir. Lo mejor que puedo hacer, es proponerle que usted misma/o lo intente por su lado. Créame: se va a sorprender.

• https://support.google.com/accounts/answer/3024190?hl=es

Este sitio es también impactante. Google le ofrece la alternativa de que usted misma/o recupere *todos* los datos que Google tiene guardado sobre usted: *¡todos!* Naturalmente, si ha utilizado mucho los servicios de este buscador, la memoria que va a necesitar para recuperar todo puede llegar a ser importante. Asegúrese de tener suficiente espacio libre en su disco duro o procúrese un pendrive (o un lugar equivalente) en donde pueda almacenar muchos gigabytes de memoria. Igualmente, es increíble *verse reflejado a uno mismo* en la cantidad de datos que uno ha compartido en el último tiempo: ¡impactante! Si puedo sugerirle algo una vez más, este es un lugar que *no debería perderse*. Eso sí: tómese su tiempo. Lo va a necesitar. Aparecen todos los sitios que usted visitó, sus correos electrónicos, sus contactos, sus videos en YouTube… e incluso las fotos que usted tomó con su teléfono. No sé si me entiende, ¡las fotos! Parece mentira pero no, están allí, hasta las que usted descartó o tiró a la basura. Y por supuesto, también las fotos que recibió. Su calendario, los libros que compró, los grupos a los cuales pertenece, los números de teléfonos de los contactos que o bien tiene hoy o que usted tuvo en algún momento, la cantidad de pasos que fue dando día por día… ¿Sigo?

Acá tengo que hacer una pausa para una observación. Facebook ofrece los mismos servicios que acabo de describir para Google. El problema está en que como yo no uso Facebook, no tengo cuenta con ellos, no puedo *revisarlos*. Pero por lo que me mostró Érica, están incluidos *todos* los mensajes y archivos que envió (o recibió), todos los contactos que están en su teléfono celular, todos los mensajes de audio que usted envió (o recibió), todas las veces que usted se conectó en su cuenta de Facebook, desde dónde lo hizo, el tiempo que estuvo visitando su cuenta y desde qué aparato lo hizo. De la misma forma que Google, Facebook sabe todos y cada uno de los pasos que usted dio en la última década.

Un dato más: Facebook guarda *todas las aplicaciones* que usted utilizó mientras estuvo conectada/o con su cuenta, de manera tal que puede conjeturar cuán interesada/o usted está en cuestiones políticas o si lo que más le atrae es el diseño gráfico. Sabe, además, si estuvo o es soltera/o, o bien si está interesada/o en cualquier servicio que coopere para que usted pueda encontrar pareja.

Por último, al menos en este primer intento de advertirle lo que sucede, el rastrillaje que *ellos* (y usted) pueden hacer sobre su vida en la última década, incluye las aplicaciones que usted instaló (y desinstaló) durante todo este tiempo, las razones por las cuales las usó (o usa), tiene acceso a su cámara web y su micrófono, y como dije antes, sus contactos, correos electrónicos, calendario, historial de *todos* sus llamados (entrantes y salientes), mensajes de texto enviados/recibidos, archivos que 'bajó' por internet (incluyendo fotos, videos, audios, música), las estaciones de radio que escuchó (o escucha) y, por supuesto, *todas* las búsquedas que usted hizo a lo largo de estos últimos diez años.

Si uno pensara que cada vez —sí, ¡cada vez!— que uno se conecta con cualquiera de nuestros aparatos (computadoras, laptops, tabletas, teléfonos celulares, etc.) está engrosando la información que uno entrega sobre su privacidad, es posible que no lo haga, ¿o sí? Y lo planteo de esta forma porque, aunque uno quisiera evitar dejar estos rastros desde hoy, sucederían algunos eventos que me gustaría compartir con usted.

Por un lado, ¿está segura/o de que usted podría vivir sin estar conectada/o? Por otro, si Google (por poner un ejemplo) sabe en qué lugares usted ha pasado la mayor parte de su tiempo, dónde durmió, dónde cenó, dónde almorzó, a qué hora puso su despertador, dónde pasa sus fines de semana, qué música escucha, a qué hora se acuesta, qué medicamentos toma, qué bebidas consume, etc., ¿usted va a cambiar todo *bruscamente*? Es decir, no solo debería *cortar* todo contacto a partir de hoy, sino que además tendría que cambiar de vida, de identidad, porque con los datos que hemos ido dejando hasta este momento, ¿no cree que Google podría rastrearla/o y encontrarla/o sin necesidad de saber *exactamente* dónde se encuentra?

Cuando uno cree que todo es y ha sido gratis, ha cometido (*hemos* cometido) un error: el producto somos nosotros. Más aún: yo creo que saben más de nosotros que nosotros mismos.

Al igual que usted, yo tengo múltiples preguntas, pero —creo— que las más importantes son: ¿Qué podrían hacer con toda esta información? ¿Qué tipo de influencia tienen sobre nosotros al saber todos estos datos? ¿Qué pueden *predecir*? O mejor aún: ¿Cómo los han usado *ya*? ¿Qué hemos hecho nosotros hasta acá, creyendo que teníamos la libertad de elegir, sin saber que desde algún otro lugar, estábamos *siendo elegidos* por otros?

¿Cuán peligroso es esto? ¿En manos de quiénes está toda esta información? Google y Facebook dicen que solamente nosotros tenemos acceso… ¿Seguro? ¿Y Cambridge Analítica[6] de dónde

6. Cambridge Analítica es una compañía inglesa que se hizo famosa por haber utilizado *inapropiadamente* material que extrajo de las usuarios de Fa-

salió? Si pudo tener semejante influencia en las elecciones de un país, y nada menos que Estados Unidos, ¿qué nos queda a nosotros?

Y si uno, por la edad que tiene, decide que ya no hay nada por hacer y que no hay vuelta atrás… ¿cómo proteger a los niños? ¿Usted qué piensa?

---

cebook (¡algo así como 87 millones!) durante la elección presidencial en Estados Unidos y favorecer la candidatura de Donald Trump.

La población de Francia en 1783

Quiero empezar haciendo referencia a un artículo que escribí hace casi quince años: "¿Cómo estimar el número de peces en una laguna?"[7].

Uno de los mayores déficits que tienen nuestros sistemas educativos, cuando se habla de matemática al menos, es que no se nos enseña a *estimar*. Sí. A *estimar*.

Eso sirve, en principio, para aprender a desarrollar el sentido común. ¿Cuántas manzanas tiene una ciudad? ¿Cuántas hojas puede tener un árbol? ¿Cuántos días vive en promedio una persona? ¿Cuántos ladrillos hacen falta para construir un edificio? ¿Cuántas personas hay en una manifestación? ¿Cuántas películas uno vio en su vida? ¿Cuántos árboles hay en una cuadra? ¿Y en un parque?

Quiero empezar con un problema que es muy específico pero usted verá, si sigue leyendo, que tiene (y tuvo) aplicaciones totalmente inesperadas. Acompáñeme por acá.

Suponga que usted está cerca de una laguna. En general, uno suele ver gente pescando en una laguna y una pregunta razo-

7. "¿Cómo estimar el número de peces en una laguna?". La primera parte del texto que figura en este capítulo apareció con ese nombre en la página 132 de mi libro *Matemática… ¿estás ahí?*, Siglo XXI Editores, Buenos Aires, 2005.

nable sería tratar de estimar el número de peces que viven allí. ¿Cómo hacer? ¿Cómo elaborar una estrategia para hacerlo?

Una vez más, me apuro a escribir que *estimar* no es *contar*. Se trata de poder adquirir una *idea* de lo que hay. Por ejemplo, uno podría conjeturar que en la laguna hay mil peces o que hay millones de peces. Obviamente, no es lo mismo. Pero ¿cómo hacer para aproximarse a la solución?

Aquí es donde quiero hacer una reflexión junto a usted. Supongamos que uno consigue una red que pide prestada a unos pescadores. Con esa red, nos proponemos atrapar mil peces, y cuando escribo *atrapar*, quiero que los capturemos pero no quiero *matarlos*. La idea será devolverlos al agua tan rápido como nos sea posible, pero antes los vamos a *pintar con un color y pigmento* de manera tal que no se borre con el agua. Naturalmente, cualquier procedimiento que preserve la marca será equivalente. Para fijar las ideas, digamos que logramos ponerles a todos una marca de color *amarillo*.

Los devolvemos al agua y esperamos un tiempo razonable. Usted se preguntará: ¿qué quiere decir *razonable*? Bueno, razonable implicará que les daremos suficiente tiempo como para que vuelvan a mezclarse con todos los peces que quedaron *sin pintar*, o sea, con el resto de los que habitan la laguna.

Una vez que estamos seguros, volvemos a usar el mismo método anterior (con la red, por ejemplo) y capturamos *mil peces* otra vez. Queda claro que algunos de los peces que obtenemos ahora estarán pintados y otros no. Supongamos, siempre a los efectos de hacer las cuentas más fáciles, que entre los mil que acabamos de pescar ahora, aparecen solo *diez* pintados de amarillo.

De este hecho, uno podría inferir lo siguiente: cada mil peces que viven en la laguna hay *diez* que están pintados de amarillo, es decir, uno de cada cien. Si bien no sabemos cuántos peces hay en la laguna, sabemos que el *uno* por ciento está pintado de amarillo. Como en total hay *mil* amarillos, ¿cuántos peces tendría que haber para que el *uno* por ciento de ese total sea *mil*? Creo que no se le escapa que esto es —ni más ni menos— lo que en el colegio llamábamos 'regla de tres simple' o 'extrapolación lineal'. La respuesta entonces es: "Uno puede estimar que en la laguna en total hay aproximadamente cien mil peces" (fíjese que *mil*, es el *uno por ciento de cien mil*, tal como era esperable).

Este método obviamente *no es exacto* (ni mucho menos), pero si bien no provee una certeza ofrece una *idea*, una estimación. Ante la imposibilidad de *contar* todos los peces que hay, es preferible tener un *número* con el que uno se pueda sentir cómodo y, justamente, este método permite encontrarlo.

Ahora bien: ¿por qué incluí esta forma de estimar que incluso parece *tan primitiva*? Este método, aunque parezca poco creíble, fue utilizado por uno de los mejores matemáticos de la historia: Pierre-Simon Laplace[8].

Las contribuciones de Laplace son realmente extraordinarias, no solo en matemática —en particular en el área de probabilidades y la popularización del famoso teorema de Bayes— sino también en astronomía, física y en aplicaciones que parecían imposibles en el momento que él las propuso. Pero quiero aprovechar el ejemplo anterior, el de la estimación de cuántos peces hay una laguna, para mostrar lo que hizo Laplace para estimar *¡la población de Francia en 1783!*

8. Las ideas (y los datos) que aparecen sobre la aplicación de esta metodología usada por Pierre-Simon Laplace le pertenecen a Jaime Amorós, y fueron publicados en un artículo de la Royal Statistical Society el 16 de julio de 2014. El pdf (en inglés) se puede encontrar en https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1740-9713.2014.00754.x

Obviamente, el método que usamos hoy (censar) era impracticable en ese momento del siglo XVIII. El procedimiento que describí antes se llama 'captura-recaptura'. Es muy sencillo, pero requiere de muestras suficientemente grandes y elegidas *al azar* (que es un dato *no menor*). Es decir, importa *mucho* el tamaño de la muestra y la aleatoriedad. En ese caso, los resultados que se obtienen son verdaderamente notables.

En el caso de la población de Francia, fue necesario tomar dos conjuntos de personas, una después de la otra, teniendo cuidado de 'marcar' a los integrantes de la primera muestra de manera tal de que sean fácilmente reconocibles o distinguibles dentro del grupo que termine integrando la segunda muestra. Por otro lado, usado de esta forma tan sencilla, es necesario suponer que la población que uno quiere estimar no se modificará sustancialmente en el tiempo que transcurra entre la toma de la primera y la segunda muestra. Por otro lado, aunque no lo haya escrito explícitamente, es imprescindible que las personas elegidas tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas en cualquiera de las dos muestras.

Lo que hizo Laplace fue lo siguiente. ¿Cómo elegir y después *marcar* a las personas que formarían parte de la primera muestra? En ese momento en Francia, si bien no existían los censos, cada comunidad/pueblo registraba el número de bebés que nacían cada año. Justamente ellos (los bebés) fueron los integrantes de la primera muestra. Para mejorar la precisión, Laplace promedió el número de nacimientos que se produjeron en Francia durante los dos años que precedieron a la publicación (1783).

El dato que utilizó Laplace fue el siguiente: 973.054,5 bebés. Sí, aunque parezca ridículo, a los efectos de hacer las cuentas con la mayor precisión posible, incluyó al *medio* bebé porque eso fue lo que le dio el promedio. Para poder encontrar la población total necesitaba estimar la proporción que había entre los bebés recién nacidos y la población en general, y esa proporción es la que daría origen a la segunda muestra que necesitaba.

Si bien no todas las comunidades o poblaciones tenían los datos que él requería, había 'intendentes' (por llamarlos de alguna manera) que no solo registraban las poblaciones de cada uno de sus 'condados', sino que también anotaban los nacimientos y las *muertes* que se habían producido en ese año particular. ¡Y ese era el dato que Laplace necesitaba! Esa era la proporción que estaba buscando. Con la colaboración de varias personas, logró juntar los datos de todas esas comunidades. Promedió las proporciones entre la población total y los nacimientos tratando de minimizar los errores que se pudieran producir. No los eliminaba, ciertamente, pero los optimizaba, teniendo en cuenta que diferentes regiones producían números que no parecían 'aceptables', algunos incluso de un año a otro. Pero lo que me importa señalar acá, es que el número al que llegó Laplace fue el siguiente: *¡un nacimiento por cada 26 personas!* En consecuencia, una población con 52 personas tendría (en promedio) dos nacimientos por año, y una de comunidad de 104 personas, tendría *cuatro* nacimientos anuales. Creo que la idea está clara.

En este punto, Laplace tuvo que aceptar la misma suposición que nosotros en el caso de los peces en la laguna: la población no cambiaría sustancialmente entre la extracción de la primera y la segunda muestra, asumiendo que los nacimientos y muertes serían equivalentes, y lo mismo con respecto a las proporciones. Tuvo que aceptar o incluir algo más entre sus hipótesis (ciertamente esto ya no es ni era verificable): que los números de nacimientos y muertes se mantendrían constantes a lo largo de las diferentes regiones francesas. Claramente, de todas las suposiciones que tuvo que hacer, esta fue la más 'opinable' y de difícil comprobación, pero necesitó usarla porque, si no, no hubiera podido llegar a ninguna conclusión.

A partir de acá, el resto es sencillo. Le alcanzó con multiplicar 973.045,5 por 26 y eso le dio el tamaño de la población que estaba buscando. El número al que llegó: 25.299.417 habitantes.

No crea que se me escapa que hay múltiples 'concesiones' y acuerdos que Laplace tuvo que hacer en el transcurso de la estimación; lo mismo sucede en el caso de los peces en la laguna. Claramente, uno podría usar este método de 'captura-recaptura' para estimar el número de ballenas en una región específica o evaluar la cantidad de palomas en la ciudad de Montevideo. O determinar el número de personas que consumen algún tipo de droga (cocaína, por ejemplo), o de personas diabéticas en un determinado país.

Los métodos que se usan hoy son mucho más sofisticados y las estimaciones, mucho más eficientes; pero, conceptualmente, todas se basan en las ideas expuestas en este capítulo. En definitiva, el problema reside en la recolección de los datos y no en la sofisticación de la matemática necesaria. Aprender a usar una 'regla de tres simple' o 'extrapolar linealmente' no deja de ser algo que uno aprende en la escuela primaria, ¿no es así?

La historia de Sofia Kovalévskaya

Este es un momento diferente en la historia de la humanidad. En todas partes del planeta, hay múltiples manifestaciones en defensa de los derechos de la mujer. No importa el ángulo, *siempre* hay alguna historia para representarlo. No me refiero solo a los abusos sexuales, sino a los abusos ‘en general’, a la minimización y denigración/segregación de la mujer en *todos los aspectos posibles*.

Como un aparte, me interesa señalar que mi madre, inmigrante polaca, escapando de lo que terminaría con la vida de *toda* su familia (salvo sus padres, hermano y hermana), recaló en la Argentina en 1934. Su padre había viajado siete años antes, en 1927. Solo. Llegó a Buenos Aires pero viajó al Chaco, más precisamente a Villa Ángela. Y desde ese lugar, intentó juntar el dinero suficiente para poder *traer* a toda su familia y salvarla del nazismo. Lo logró a principios de 1934: le alcanzó para enviar el dinero para el viaje de su mujer y de sus tres hijos, a quienes no había visto por ese tiempo: ¡siete años! El periplo de mi madre y su familia directa comenzó en su pueblo —Berezhno, en ese momento era Polonia, pero a lo largo del tiempo le ‘perteneció’ a diferentes países— cuando subieron a un tren hacia Varsovia (que *era* la capital de Polonia), y luego siguieron también en tren a París hasta llegar a Cherburgo. *Ese* era el puerto. Desde allí, tomaron un barco inglés de nombre *Alcántara*. Viajaron en tercera clase, y mi madre me recordaba que le habían regalado un libro particular que conservó toda la vida: un ejemplar de *La cabaña del tío Tom*, con dedicatoria incluida. Ese libro, que todavía conservamos, fue su único contacto con ese viaje.

Aunque no esté ligado específicamente con la historia que quiero contar acá, hubo dos momentos particulares que quiero compartir. El primero sucedió en Brasil. En una de las escalas, mi madre me recordaba que ni bien llegaron a Río de Janeiro una multitud se acercó al puerto. No entendían nada. ¿Qué podría pasar para que hubiera *tanta gente congregada* para esperar un barco? Lo que ella supo después es que en ese mismo buque, en el que ellos habían pasado esos 21 días, viajaba desde Europa Getúlio Vargas, quien en ese momento era el presidente brasileño. Eso respondía una de las preguntas.

Después mi madre, con *su propia* madre y dos hermanos, fueron a Villa Ángela, en el Chaco, para encontrarse con su padre. Pero se produciría un drama inesperado. Después de estar *siete años sin ver a su familia*, siete semanas después mi abuelo materno se enfermó de neumonía y ¡se murió! Sin que ninguno de ellos hablara castellano, recién emigrados, y sin que ninguno de ellos tuviera profesión alguna, se encontraron en una situación *desesperante*.

Se volvieron a la Capital para instalarse en el barrio de Villa Crespo, donde había la mayor concentración de emigrantes judíos del país. La idea de mi abuela materna era *volver* a Polonia. Mi madre se *plantó* en una reunión familiar y el diálogo tuvo características de este tipo: “Ustedes vuelvan si quieren. Yo no me voy a ninguna parte. Yo me quedo acá”. Y se quedaron.

Gracias a esa *decisión* que mi madre tuvo la valentía de enfrentar, yo puedo seguir escribiendo y esta parte de mi familia existe. El resto lo perdimos en la guerra.

Pero, para completar esta historia tan personal (ignoro por qué estoy escribiendo tanto sobre ella), después de algunos meses y cuando aún el proceso de adaptación estaba en un momento crítico, volvieron a enfrentare a una *segunda* manifestación, increíblemente multitudinaria.

Columnas de personas que se contaban por *miles* comenzaron a congregarse en la avenida Corrientes. Para aquellos que conocen la Capital Federal (y si no, no importa) el barrio de Villa Crespo está muy cerca del mayor cementerio que tiene la Argentina: La Chacarita.

Esta nueva manifestación se originó en algo totalmente diferente. No había presidente ni figura política que la motivara. No. El 24 de junio de 1935, en un accidente aéreo moría Carlos Gardel. Más de ocho meses después, recién el 5 de febrero de 1936, luego de *infinitos trámites burocráticos*, transportado 'a pie' por esa misma multitud, un miércoles lluvioso y con gente llorando y entonando las canciones más famosas, enterraron a Gardel.

Esos dos episodios marcaron a mi madre para siempre. Pero ella también supo que —por razones que se me escapan— ella no quería vivir 'a la sombra' de un hombre, sintiéndose menos. En todo caso, siempre quedó claro en mi casa que mis padres no solo formaban un matrimonio, sino que eran pares, amigos, y defendían intereses comunes.

Mi madre me enseñó a manejar, me enseñó música, me llevó a estudiar *patinaje sobre hielo* (aunque no nieva en Buenos Aires) y si bien no pudo terminar sus estudios universitarios (mi padre tampoco), fue tenedora de libros y clara defensora de los intereses de las mujeres. Me honra saber que mi hermana y yo somos hijos de nuestros padres, fuertemente adelantados a su época. Para no mencionar que los dos venían de procedencias *muy diferentes*: mi padre, de una familia italiana católica (tanto que él fue monaguillo durante un tiempo), y mi madre, como queda dicho, judía polaca. Pero lo extraordinario es que ambos fueron claramente *ateos*, *comunistas* y defensores de los intereses de los trabajadores. La educación que nos dieron no solo nos enorgullece a nosotros, sino que tendría que ser la *norma* y no la *excepción* de la que todo niño, en cualquier parte del mundo, debería tener garantizada.

Para hablar de Sofia Kovalévskaya necesité recorrer mi propia historia familiar: para que usted comprenda que las situaciones como las que voy a describir, más allá de parecer una ‘anécdota’, tienen una profunda importancia personal, me ‘tocan’ fuertemente.

Sofia Kovalévskaya, también conocida como Sonia Kovalévskaya, no solo fue una *gran matemática* sino además se destacó como escritora y defensora de los intereses de las mujeres en el siglo XIX. Más aún: Kovalévskaya terminó siendo la *primera mujer matemática que ofreció Rusia* y la también primera que puso en duda lo que hasta ese momento era el sentimiento común (no solo allí sino en toda Europa): “La mujer es *inferior* y no está en condiciones de competir con el hombre en el ámbito científico”. Tan brutal como suena.

Su padre era un general de artillería y su madre también era una mujer muy bien educada y de una cultura que describían como asombrosa, pero *hasta ahí*. Lo que asimismo queda claro es que de alguna forma estaban conectados con la nobleza rusa a tal punto que entre los que frecuentaban su círculo de amigos estaba nada menos que Fiódor Dostoyevski.

Hoy todo es más fácil. En aquel momento, hubo mujeres (como Sophie Germain[9]) que debieron esconder su condición

---

9. https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-64246-2006-03-14.html

de tales para poder ser siquiera *consideradas* o que *alguien* les prestara atención. Me cuesta trabajo aceptar (pero evidentemente es un problema mío) que lo que se haya juzgado no es el producido científico sino la *autoría*. Difícil por un lado, y *dramático* por el otro. Pero me desvié.

Sofia nació en el año 1850. Tenía dos hermanas (una mayor y otra menor): esa condición, la de ser *la hija del medio*, le hizo perder sistemáticamente frente a la fascinación que producía en su entorno el encanto de su hermana mayor (Anya) y la gracia que tenía la menor (Fedya). En lugar de ser criada por sus padres, a Sofia le asignaron una *gobernanta* (¿se seguirá diciendo así?).

Su exposición a la matemática comenzó desde muy joven, fíjese de qué forma tan curiosa. Su padre tenía empapeladas las paredes de la habitación de Sofia con escritos de charlas y clases que había dado Mijaíl Ostrogradski, pero no eran notas sobre poesía, literatura o siquiera historia. No. Eran charlas sobre análisis diferencial e integral. Su tío Pyotr fue quien comenzó a estimularla: lo que ella leía en las paredes cuando tenía ¡11 años! la invitaba a *tratar de entender*.

La seducción que la matemática comenzó a tener en la vida de Sofia, la hizo escribir: “Siento tal atracción por la matemática, es tan intenso, que ya no me interesa nada más de todo lo que tengo o tendría que estudiar”.

Para que esta historia tenga sentido, hubo alguien que comenzó a oponerse fuertemente a esta inclinación de Sofia; tal como usted se imagina, fue su propio padre. A partir de ese momento le negó toda ayuda y cooperación externa para que pudiera acceder a más matemática, y la única forma en que ella pudo continuar, fue leyendo un libro de *álgebra* que su propio tío Pyotr logró ‘contrabandear’. Sofia solamente podía leerlo cuando el resto de la casa… *dormía*. Las discusiones entre el tío y el padre llegaron a provocar de serios conflictos familiares. El padre finalmente cedió pero puso como condición que tenía que terminar todas las materias del colegio secundario. A pesar de su inclinación por la matemática, Sofia sabía que el único camino que le quedaba era aceptar las condiciones impuestas.

Naturalmente, no sería sencillo. No podía estudiar matemática en alguna universidad en el lugar donde vivía. Las universidades más cercanas que *podrían* (en potencial, 'podrían') darle una chance a una mujer estaban en Suiza, y una mujer joven y encima *soltera* no sería aceptada, sin siquiera importar su capacidad. Esas eran las normas.

Como en una película, a Sofia no le quedó otra alternativa que buscar *alguien con quien casarse que aceptara sus condiciones.* Pero lo consiguió, se casó con Vladimir Kovalévsky (de allí su apellido, Kovalévskaya) en septiembre de 1868. Ambos reconocieron, y en forma no necesariamente privada, que el matrimonio había sido ¡por conveniencia!

Se quedaron en San Petersburgo durante un tiempo, pero al final viajaron a Heidelberg, donde Sofia pudo acceder a lo que buscaba, una educación superior que cualquier hombre podría conseguir: yendo a la universidad. Estando en Heidelberg, Sofia tuvo una idea que la ayudaría *para siempre*: su objetivo (y su obsesión) pasó a ser contactarse con Karl Weierstrass, en la Universidad de Berlín.

Weierstrass era considerado uno de los mejores matemáticos del mundo. Por supuesto, cuando finalmente supo de la existencia de Sofia, víctima él también del entorno de la época, no la tomó seriamente. Pero claro: Weierstrass era un científico de nota, y la *mejor manera de convencerlo* no era hablándole ni de mujeres ni de hombres. Weierstrass quiso ver algún trabajo de Sofía. Y eso fue suficiente. A partir de allí advirtió del "genio" (sus propias palabras) con el que se había tropezado. La universidad seguía sin darle autorización para contratar o incorporar a una mujer, pero a Weierstrass eso ya no le interesaba más: Sofía había llegado para quedarse. La tomó como alumna personal y le enseñó y la dirigió en todo lo que ella necesitaba *saber* para poder avanzar.

En palabras de ella: "Esos estudios tuvieron la más profunda influencia en toda mi carrera en matemática. Determinaron final e irrevocablemente la dirección que tomaría mi carrera científica. Todo mi trabajo está hecho como consecuencia de la guía de Weierstrass".

Al finalizar los cuatro años que estuvieron juntos, Sofia había producido tres trabajos originales que hubieran sido más que suficientes para garantizarle el título que ella necesitaba para 'ingresar' al mundo. El primero de ellos, "On the Theory of Partial Differential Equations" (Sobre la teoría de ecuaciones a derivadas parciales), fue incluso publicado por la revista *Crelle*, un honor *tremendo* para un/a matemático/a desconocido/a.

Pero recién en julio de 1874, Sofia Kovalévskaya consiguió el título de doctora que le entregó la Universidad de Göttingen. Aunque sea difícil de creer, incluso con *ese título particular* que hubiera sido considerado como la mayor distinción posible, y aun con la tutoría de Weierstrass, ¡Sofía no podía conseguir trabajo como matemática!

La historia personal es increíblemente dramática porque, junto a Vladimir (su marido), ahora *enamorados*, volvieron y tuvieron una hija. Sofia dejó la matemática por un tiempo y se dedicó a escribir. Sí, a escribir literatura. Aun así, no podía encontrar trabajo como matemática[10]. En forma inesperada y acosado por las deudas, Vladimir se suicidó.

Recién en 1883, Sofia tuvo su momento de 'suerte': a través de un exalumno de Weierstrass, Gosta Mittag-Leffler, consiguió una posición en Suecia, en la Universidad de Estocolmo. Volvió a casarse, esta vez con Maxim Kovalévsky[11], pero su marido quería que dejara la matemática y se dedicara *solamente a él*. No creo que haga falta que escriba lo que pasó: le dijo que no. Se siguieron viendo, en forma esporádica, pero para Sofía ya no habría vuelta atrás.

Joven aún, el 10 de febrero de 1891, con 41 años recién cumplidos, víctima de severos episodios de depresión y neumonía, sucedió lo inexorable: se murió.

Hoy, cuando ya nada importa, cuando Sofia no vive para experimentarlo, el presidente de la Academia de Ciencias le entregó el premio máximo al cual un científico pueda aspirar. Ciertamente, llegó tarde. La historia que traté de resumir en estos párrafos pretende honrar de alguna forma a todas las pioneras que sacrificaron sus vidas para que hoy, aún hoy, estemos luchando para que los derechos sean igualitarios. Debería *avergonzarnos* que todavía tenga que librarse *este tipo de lucha*.

Salud, Sofia. No fue en vano.

---

10. Una anécdota: en un momento determinado, Sofia recibió finalmente una oferta de trabajo. Le propusieron ser maestra de aritmética en un curso para niñas en una escuela primaria. La declinó con sarcasmo: "Lamentablemente, una de mis debilidades son las tablas de multiplicar".

11. Maxim estaba relacionado con su primer marido. Hay discrepancias en las diferentes biografías sobre Kovalévskaya, pero la teoría más aceptada es que Maxim era primo 'segundo' de Vladimir. Tampoco queda claro si Maxim y Sofia se casaron formalmente, pero creo que a los efectos de esta historia es poco relevante.

¿Por qué sobrevenden los vuelos las compañías aéreas?

No hace falta que busque muchos ejemplos, pero es muy posible que usted (como yo) hayamos sido víctimas de vuelos 'sobrevendidos'. Si bien uno cree que solamente afecta a quienes viajamos en avión, esto sucede también en consultorios, hospitales, banco…, es decir, en lugares en donde hemos hecho una 'cita' que pretendemos honrar.

Por supuesto, hay muchísimos factores que cooperan para que esto suceda (o no). Ahora bien, ¿cuál es la *lógica* subyacente? Naturalmente, la primera (y quizás la única importante) es —para seguir con el ejemplo de una compañía aérea— *no perder el asiento*: un asiento vacío significa una pérdida de dinero. Al mismo tiempo, uno podría preguntarse: "Pero ¿de qué pérdida de dinero me habla, si el pasajero que se pierde el vuelo termina pagando por el pasaje igual, lo use o no lo use?".

Este cuestionamiento es *parcialmente* cierto, porque la compañía tiene otra manera de pensar. No solo que le va a cobrar el dinero al pasajero que no viajó, sino que pretende aprovechar ese mismo asiento para vendérselo a otra persona y, de esa forma, vender *dos* veces el mismo producto. Para poder hacerlo, para poder *vender* dos veces lo mismo, es necesario que *de alguna forma*, la compañía pueda *estimar* cuál es la probabilidad de que haya pasajeros que no viajen. Y a eso me quiero referir. Es una forma de utilizar la matemática en beneficio del más poderoso y en detrimento nuestro, el consumidor final, el pasajero.

En otra época (digamos, por ejemplo, veinte años), uno siempre tenía la alternativa de utilizar ese mismo pasaje en otro vuelo… *sin penalidad*. Es decir, si uno sencillamente no podía (o no quería) tomar ese vuelo, llamaba a la compañía y le avisaba que quería posponerlo o bien seguía conservando el cupón de ese tramo y lo usaba cuando había lugar. Era algo así como tener un pasaje 'abierto'. Eso es impensable hoy.

Pero quiero hablar específicamente de algunos cálculos o estimaciones que son de dominio público entre las compañías que venden los pasajes. Nadie tiene bases de datos más detallados que ellas, y ninguno de nosotros tiene acceso a las conclusiones que puedan sacar.

De hecho, el precio de los pasajes (como usted habrá verificado) varía aún dentro del día; y ni hablar si usted quisiera tener la posibilidad de llevar una pequeña valija que pese un gramo más de lo permitido, o si tuviera ganas de estar 'cerca' de una salida de emergencia, de un baño, de una ventanilla, etc. No. Me refiero al precio del mismo lugar dentro del mismo avión que sale a la misma hora. Hay sitios de internet[12] que ayudan al pasajero (a usted, a mí) a estimar lo que ellos *predicen* que sucederá con ese asiento o pasaje. Si le conviene esperar o si le conviene comprarlo ni bien pueda. Pero esa es *otra historia*, no menor, pero arranca hacia otro lado.

Volvamos a la compañía aérea que tiene formas de *predecir* cuántas personas *no van a presentarse para un determinado vuelo*.

12. https://www.kayak.com/, http://www.fairfly.com/, http://www.hopper.com/

Piense en la última frase: ¿se da cuenta del *poder* que eso representa? Tener forma de *predecir* cuántos asientos libres va a haber.

Claro, esto es una predicción y, como tal, es *falible*. De todas formas, el último dato que tengo delante de mí dice que, en Estados Unidos solamente, más de 50 mil personas se quedaron sin viajar durante el año 2017 porque el vuelo que debían abordar estuvo sobrevendido. En realidad, debería decir que más de 50 mil personas no pudieron viajar en el vuelo que tenían previsto como consecuencia de la *sobreventa*.

El negocio funciona así. Antes de hacer los cálculos, algunas observaciones. Supongamos que de acuerdo con las estimaciones que tienen las empresas, la probabilidad de que haya un cierto número de *ausentes* es de 0,05 (o sea, un 5%). ¿Qué hacer?

a) Si, a pesar de tener esos datos, decidieran *no venderlos*, se pierden el dinero extra.
b) Si los venden y los pasajeros se presentan todos, la compañía deberá *compensar* a quienes tiene que pedirles que no viajen (hoteles, comida, re-ruteo y, por supuesto, el fastidio *enorme* y desprestigio para la compañía, aunque esto último es relativo, teniendo en cuenta que el mercado es un oligopolio, concentrado en un grupo muy pequeño en donde todos hacen lo mismo…).

Tomemos un vuelo cualquiera que va desde A hasta B, a las ocho de la mañana. Me importa *mucho ahora* enfatizar este hecho. Las compañías aéreas tienen los datos de qué fue lo que sucedió con ese vuelo durante —digamos— los últimos diez años. Estos datos incluyen cuántas veces salió en horario, cuántas veces salió tarde, promedios de las demoras, qué pasó con el avión que debía llegar ese día o la noche anterior y no llegó, cuántos pasajeros compraron boletos, en qué categoría, cuántos se presentaron a horario, cuántos faltaron, cuántas veces los sobrevendieron, qué costo tuvo para ellas haber tenido que compensar a quienes no pudieron viajar, qué alternativas hay con otras compañías que ofrecen la misma ruta, etc. Y podría seguir, pero quiero hacer hincapié en una cosa importante: ellos saben lo que hizo *usted*. Sí, usted. Es decir, en el mismo momento que uno entró en el sistema, *su* historia está registrada para siempre, no importa si voló *una sola vez en su vida* o si lo hace todos los días. A esta altura, usted debe saber muy bien que, cuando le ofrecen los puntos que está acumulando a lo largo del tiempo para poder viajar 'gratis' o 'subir de categoría', todo eso que usted cree que son beneficios (y de hecho, en algún sentido… lo son), todo eso tiene un precio: *¡su información!* Uno entrega ahora los datos personales (correo electrónico, tarjeta de crédito, dirección postal, sitios a los que concurre, restaurantes en los que cena, gustos en las comidas, lugares en donde veranea, cuánto tiempo lo hace (eso *si* veranea), y toda la parafernalia de datos adicionales que usted (y yo) no advertimos. Su número de teléfono está ligado a esa misma cuenta, y las imbricaciones que tiene son fenomenales. Sí, claro, usted viajará en una categoría mejor, o viajará con 'los puntos', pero también sepa que en el proceso entregó una información que nunca más podrá recuperar. Volviendo al ejemplo del vuelo sobrevendido, es como si ellos *supieran* si usted llega siempre a horario (tres horas antes al aeropuerto) o si llega sobre la hora… ¡o no llega! O en todo caso, si usted prefiere, ellos saben cuántas veces usted no llegó. Y si se quedó en un hotel en el aeropuerto, o si alquiló un auto, qué auto fue y durante cuánto tiempo lo tuvo.

Como usted advierte, yo podría seguir con la lista hasta abrumarla/o, tanto como me abrumó a mí. La tecnología actual permite saber *con quién usted habla por teléfono* (me refiero a las conexiones entre pares de números telefónicos), la duración de esas llamadas, el sexo de los participantes, las edades, si es una llamada entrante o saliente, si la comunicación es al exterior o dentro del país, y naturalmente, estos datos pueden/podrían ser usados para determinar su poder adquisitivo, si usted es (o no) merecedor de un crédito bancario que podría necesitar y/o pedir, etc. Acá, prefiero parar. Quiero volver (y no puedo) al pasaje sobrevendido.

Voy a reproducir entonces el ejemplo que tengo delante de mí, de un vuelo que une Nueva York con Londres. Esta compañía *sabe* que la probabilidad[13] de que cada pasajero se presente a tiempo es de un 90%. Para hacer las cuentas más fáciles, voy a suponer que cada pasajera/o viaja sola/o, sin familia. Son todos asientos vendidos en forma individual. En esencia, no cambia mucho, pero quiero aclararlo para no tener que recurrir a este argumento en el medio del planteo.

Supongamos ahora que el avión tiene 180 asientos en total. Si la compañía hubiera vendido *todos* los asientos, de acuerdo con la probabilidad de 'presencia' que han estimado (90%), en el momento del despegue habrá 162 pasajeros.

---

13. La probabilidad de que un acontecimiento 'suceda' es un número *real* que varía entre cero y uno. La probabilidad es *cero* si es *imposible* que el acontecimiento pase, y *uno* si es *seguro* que suceda. La probabilidad se calcula dividiendo los *casos favorables* por los *casos posibles*. Para no tener que hablar de este tipo de números, voy a hacer una suerte de 'abuso de lenguaje': usaré el método más conocido, los porcentajes. Por ejemplo, en lugar de asegurar que la probabilidad de que un pasajero se presente a tiempo es de 0,9, voy a decir que se estima en un 90%. Si la probabilidad es de 0,25, voy a decir que se estima en un 25%. Permítame esa licencia en todo lo que vea escrito acá. Gracias.

Por supuesto, como el método y la predicción son ciertamente falibles, bien podría suceder que haya más (o menos). Ahora, pasemos al *dinero involucrado*.

La compañía gana dinero por cada pasajero que logra viajar y pierde dinero por cada uno que se queda en tierra (porque el ticket fue vendido más de una vez). Para fijar las ideas, una vez más, supongamos que cada pasaje sale *250 dólares* (si el pasajero viaja) y el *costo* para la compañía es de *800 dólares* si un pasajero se queda abajo.

En este caso, las cuentas son sencillas.

a) Si la compañía vende *todos* los asientos —los 180 asientos a 250 dólares—, el resultado es: 180 × 250 = 45.000 dólares.
b) Si la compañía vende 15 pasajes más y justamente hay 15 personas con pasaje que *no se presentan*, entonces hay que calcular 15 × 250 = 3.750 dólares. Sumando los 45.000 originales a estos 3.750, la compañía recibiría 48.750 dólares en total. Este sería un escenario *muy favorable* para la empresa.
c) Ahora, miremos el caso contrario. Supongamos que *todos* los pasajeros (los 180) se presentan al vuelo. Pero no solo ellos, sino también los 15 'extra' a quienes les vendieron pasajes que ya estaban vendidos. Como estimamos que el *costo extra* que tendría la compañía aérea es de 800 dólares por pasajero que *no viaja a pesar de tener su boleto*, la cuenta ahora es esta: 15 × 800 = 12.000. Si a los 45.000 dólares totales que recibían le restamos estos 12.000 (todas las penalidades), el resultado es que a la compañía ingresarán por ese vuelo particular: 48.750 – 12.000 = 36.750 (fíjese que usé el número 48.750 porque la compañía recibió ese dinero al vender 195 tickets en lugar de 180). Más aún: si hubieran vendido nada más que la capacidad que tiene el avión (los 180 lugares), a

250 dólares cada uno, ese vuelo particular viajaría ‘a pérdida’: en lugar de 45.000 recibirá 36.750.

A este punto quería llegar (y le pido que preste atención a los datos que siguen).

No se trata solamente del dinero que ganaría o perdería en este caso particular. Lo verdaderamente importa es saber *¿cuán probable es que pase?* Es decir, con los datos que ellos tienen, ¿cuál es la probabilidad de que esto ‘les’ pase?

Para contestar esta pregunta, una vez más podemos emplear el ‘modelo’ que usan las compañías (la distribución binomial[14]). En este caso, la probabilidad de que haya *exactamente* 195 pasajeros que pretendan subirse al avión es ‘casi’ nula. Para ser más precisos, el número que ellos tienen es 0,00000019%.

Para poner *otro* ejemplo, la probabilidad de que haya *exactamente 184 pasajeros* que quieran volar está estimada en 1,11%[15].

Ahora, viene el final a toda orquesta, en donde todos los instrumentos están afinados y los vamos a usar.

---

14. La distribución binomial o *gaussiana* es la que usted debe haber visto muchas veces: cuando uno la *dibuja* aparece una curva en forma de campana, por eso se la suele llamar también ‘La campana de Gauss’. Por ejemplo, si usted quisiera mostrar en un gráfico cómo es la distribución de las *alturas de una determinada población* (piense en la altura de las personas que viven en *su* ciudad). Supongamos que la estatura de la mayoría de los *hombres* está cerca de 1,75 m. Un número similar de hombres serán un poco más bajos y un poco más altos que esos 175 centímetros. En los ‘extremos’, habrá muy pocos que serán *mucho más altos* o *mucho más bajos*.

15. En la charla TED-Ed que encontrará en https://www.youtube.com/watch?v=ZFNstNKgEDI, Nina Klietsch explica muchísimo mejor que yo todo lo que sucede con la sobreventa de los pasajes. Le recomiendo que la vea si tiene tiempo.

Voy a multiplicar la probabilidad de que suceda *cada caso* por el dinero 'a favor' o 'en contra' que esto le significa a la compañía. Es decir, voy a calcular cada probabilidad por separado y después sumar. ¿Qué quiero decir? Fíjese en estas cuentas.

Supongamos que venga exactamente *un* pasajero de los 15 sobrevendidos. En ese caso, mi base de datos me dice cuál es el valor P(181), que es el que mide que haya *exactamente* 181 pasajeros en el momento del vuelo. Pero claro, si viene *uno solo más*, eso les va a costar 800 dólares por las penalidades involucradas. En resumen, el número que quiero calcular para *un solo pasajero* es:

$$P(181) \times 1 \times 800$$

¿Y si vienen *exactamente dos* más de los 180? En ese caso, el número debería ser:

$$P(182) \times 2 \times 800$$

Y así incrementando en uno por vez hasta llegar a 15.

$$P(183) \times 3 \times 800$$
$$P(184) \times 4 \times 800$$
$$P(185) \times 5 \times 800$$
$$P(186) \times 6 \times 800$$
$$P(187) \times 7 \times 800$$
$$P(188) \times 8 \times 800$$
$$P(189) \times 9 \times 800$$
$$P(190) \times 10 \times 800$$
$$P(191) \times 11 \times 800$$
$$P(192) \times 12 \times 800$$

$$P(193) \times 13 \times 800$$
$$P(194) \times 14 \times 800$$
$$P(195) \times 15 \times 800$$

Fíjese que, por ejemplo, P(192) mide la probabilidad que la compañía tiene en su poder de que en el momento del vuelo se presenten exactamente 192 pasajeros. Cuando uno ha sumado *todos* estos números, deberá *restarlo* de los $195 \times 250 = 48.750$, que es el dinero que la compañía habrá recibido luego de haber vendido los 195 tickets (15 más de los que debía). Este resultado es la *ganancia esperable*.

Si uno repite este cálculo varias veces teniendo en cuenta la cantidad de tickets 'extra' que la compañía vendió, puede encontrar *cuál* de todos estos números es el que más le conviene. O sea, analizando los datos que obtiene en cada caso, *cuál es el número de pasajes 'extra' que les conviene vender para garantizarse que es* <u>*esperable*</u> que no solo no pierdan dinero, sino que *ganen más que si vendieran solo los 180 lugares disponibles.*

Para el vuelo en el que me basé, el número que obtuvo la compañía es 198. Sí, 198. Es decir, les conviene sobrevender el vuelo ofreciendo 18 pasajes más de los que podrían acomodar. De esa forma, es muy *probable* que la compañía obtenga 48.774 dólares, o sea casi 4.000 dólares más que si no hubieran agregado ningún pasaje.

Por supuesto, esto es *nada más que un solo vuelo*. Ahora haga la cuenta de los millones de vuelos por compañía por año y el resultado es *escalofriante*. Yo reduje todo a una forma muy sencilla, minimizando la cantidad de factores que intervienen y que no consideré, adrede. Por ejemplo, vuelos en conexión, variaciones en la meteorología, desperfectos técnicos, tránsito vehicular que afecta la llegada hacia y desde los aeropuertos, dificultades horarias… en fin, hay un número muchísimo más grande de ingredientes que los *modelos matemáticos* que usan las compañías aéreas incluyen y son mucho más precisos que los que yo esbocé acá. Fue solamente para darle una *idea*.

No me quiero meter en las cuestiones éticas por razones obvias: ¿cómo van a vender dos veces el mismo producto? Claro, esto sería razonable si uno *está seguro* de que quien tiene que 'venir a buscar el producto' efectivamente viene. Es decir, si usted sabe que el 100% de los pasajeros va a venir.

En cambio, si usted supiera en un 98% o en un 95% o en un 90% que van a venir, ¿lo vende de nuevo o no? ¿Y si supiera que para algunos vuelos en particular esa cifra *roza* el 75%? O sea, si usted supiera que *uno* de cada *cuatro* pasajeros no va a venir… Puesto de otra forma, si usted fuera la/el responsable de dirigir la compañía aérea, ¿viajaría con esos asientos vacíos una y otra vez? ¿O los vendería dos veces?

Cuando uno se *enoja* (y con razón) porque no quiere *no viajar*, debería contemplar que las personas que trabajan en los aeropuertos tienen esta información tanto como usted. Peor aun: usted (y yo) sabemos si nos afecta a nosotros, en el caso personal/individual. Ellos saben *muy de antemano* lo que puede pasar y, por eso, están en condiciones no solo de *lidiar* con nuestro fastidio, sino también de saber qué ofrecer, qué subastar y, sobre todo, a quién.

No quiero terminar sin ampliar (aunque sea muy poco) la información sobre este punto. Hay compañías que, *sabiendo* que sobrevendieron un vuelo, les preguntan a los pasajeros ni bien se presentan en el mostrador del aeropuerto: "¿Por cuánto dinero estaría usted dispuesto a entregar su asiento?". Es decir, uno comienza a participar en una suerte de *subasta* compitiendo con otros pasajeros. Esos 800 dólares de los que hablé al principio se transformen en irrelevantes, porque uno entraría en *colisión* con sus compañeras/os de viaje. Nos podríamos poner de acuerdo los pasajeros también en no entregar nada por menos de 1000 dólares (por poner un número), pero ¿quién quiere ir al aeropuerto a *trabajar*? Y encima, ¡a trabajar para ellos!

Buen viaje.

Espectacular problema de atletismo

El problema que sigue me pareció espectacular. Lo he visto en varios lugares, pero me gustaría darle el crédito (a pesar de que no sé si fue él quien lo originó) al matemático británico Nigel Coldwell.

Cuando uno se sitúa frente al problema por primera vez, tiene ganas de decir: "¿En serio me hacés esa pregunta?". Vea usted lo que piensa.

Hace unos meses se efectuó una competencia de atletismo con una curiosidad: solamente participaron *tres mujeres*: Alicia (a la que voy a llamar A), Beatriz (B) y Carmen (C). Ellas (y nada más que ellas) intervinieron en todas las disciplinas, no participó ningún otro atleta.

Los puntos que se obtenían en cada uno de los tres puestos era la misma cantidad: x por salir primera, y por salir segunda y z por salir tercera. Los tres números (x, y, z) son naturales (mayores o iguales que 1), y obviamente se cumple también:

$$x > y > z$$

Es decir, como es esperable, la atleta que salía primera en cada prueba obtenía más puntos (x) que la que salía segunda (y);

lo mismo sucedía entre la que salía segunda (y puntos) y la que salía tercera (z puntos).

Una vez finalizadas todas las competencias, estos son los datos que se obtuvieron:

A obtuvo 22 puntos en total.
B ganó los 100 metros llanos y en total obtuvo 9 puntos.
C también terminó con 9 puntos.

Ahora sí, la pregunta: ¿Quién salió segunda en salto en alto?

¿Vio? Parece *mentira* que uno pueda *deducir* la respuesta, ¿no le parece? Bueno, es lo que me pareció a mí. Quizás a usted no. En cualquier caso, la dejo planteada y usted dirá cuántas ganas tiene de dedicarle un rato para pensar.

Antes que se pregunte si no faltan datos, créame que no, no falta ninguno, ni siquiera *el número de pruebas* en las que compitieron. Nada. Está todo bien así. Ahora... ahora le toca a usted.

Solución

Lo notable es que uno pueda encontrar la respuesta sin saber dos pares de datos esenciales: ¿en cuántas competencias participaron? y ¿cuáles son los valores de x, y, z?

Pensemos juntos. Yo no pude encontrar una manera de resolverlo que involucrara escribir algunas igualdades (o ecuaciones) y hacer operaciones algebraicas. En todo caso, tuve que hacer 'arremangarme' y analizar caso por caso. Acompáñeme por acá.

Como A obtuvo 22 puntos, y B y C obtuvieron 9, eso significa que *en total* se repartieron 40 puntos. No sabemos en cuántas disciplinas compitieron, por lo que voy a llamar *N* a ese número. Eso significa que:

$$N \times (x + y + z) = 40 \qquad (1)$$

¿Por qué? En cada competencia se repartían (x + y + z) puntos y, por otro lado, para llegar a los 40 puntos, necesitamos multiplicar ese número por la cantidad de disciplinas. Ahora, llegó el momento de 'arremangarse'.

¿De cuántas formas se puede descomponer el número 40 como producto de números naturales? 40 se puede obtener así:

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \qquad (2)$$

Fíjese en la igualdad (1). Agrupemos los factores que aparecen en la igualdad (2) de todas las posibles formas.

$$\begin{aligned} 40 &= 2 \times 20 \\ 40 &= 4 \times 10 \\ 40 &= 8 \times 5 \\ 40 &= 5 \times 8 \\ 40 &= 10 \times 4 \\ 40 &= 20 \times 2 \end{aligned} \qquad (3)$$

(Si bien hay varias descomposiciones iguales, estoy suponiendo por un momento que N es el primer factor).

Si el segundo factor de cada igualdad es (x + y + z), esto significa que este número puede tomar los siguientes valores:

20, 10, 5, 8, 4, 2

(Fíjese en el segundo factor de cada una de las igualdades de (3)).

Por otro lado, los mismos números (2, 4, 5, 8, 10, 20) son los posibles valores para N.

Piense que como $x > y > z$, el valor *más chico* que puede tomar z es $z = 1$. Por lo tanto, esto obliga a que el valor más chico de $y = 2$ y el de $x = 3$. O sea, sumando estos valores, el número *mínimo* de $(x + y + z)$ es 6. Esto permite descartar de inmediato que

$$(x + y + z) = 2$$
$$(x + y + z) = 4$$
$$(x + y + z) = 5$$

Estos tres valores son imposibles para $(x + y + z)$. Quedan entonces tres valores posibles: 8, 10 y 20. Vamos *descartando* algunos casos.

a) $(x + y + z) = 20$

Esto significa que entre los tres primeros puestos, obtuvieron 20 puntos. ¿De cuántas formas se puede descomponer 20 en tres números positivos en forma *estrictamente decreciente*? Veamos.

$$20 = 17 + 2 + 1$$
$$20 = 16 + 3 + 1$$
$$20 = 15 + 4 + 1$$
$$20 = 14 + 5 + 1$$
$$20 = 13 + 6 + 1$$
$$20 = 12 + 7 + 1$$
$$20 = 11 + 8 + 1$$
$$20 = 10 + 9 + 1$$
$$20 = 15 + 3 + 2$$
$$20 = 14 + 4 + 2$$

$$
\begin{gathered}
20 = 13 + 5 + 2\\
20 = 12 + 6 + 2\\
20 = 11 + 7 + 2\\
20 = 10 + 8 + 2\\
20 = 13 + 4 + 3\\
20 = 12 + 5 + 3\\
20 = 11 + 6 + 3\\
20 = 10 + 7 + 3\\
20 = 9 + 8 + 3\\
20 = 11 + 5 + 4\\
20 = 10 + 6 + 4\\
20 = 9 + 7 + 4\\
20 = 9 + 6 + 5\\
20 = 8 + 7 + 5
\end{gathered}
$$

Ahora bien: estas son *todas* las posibles distribuciones de puntajes en los tres primeros puestos, *si la suma de los puntos repartidos fue 20.*

Fíjese algo muy curioso. Observe nuevamente la lista de las descomposiciones del número 20. Le recuerdo que B, por un lado *ganó* una de las competencias (lo que significa que —al menos— ganó 8 puntos) y, por otro lado, obtuvo 9 puntos… *¡en total!* Entonces, es imposible que esa haya sido la distribución: si ganó como mínimo 9 puntos (que es la última descomposición que figura en la lista), en la otra competencia tuvo que haber obtenido 7 puntos o 5 puntos. Luego, siempre *se pasó* de 9 puntos.

Moraleja: la distribución de puntos entre los tres primeros puestos ¡no pudo ser de 20 puntos!

b) $(x + y + z) = 10$ y entonces $N = 4$

Hagamos el mismo análisis que en el caso anterior. ¿De qué maneras podemos descomponer 10?

$$10 = 7 + 2 + 1$$
$$10 = 6 + 3 + 1$$
$$10 = 5 + 4 + 1$$
$$10 = 5 + 3 + 2$$

Y no hay más. Vayamos —como antes— caso por caso:

- Si $x = 7$, como B ganó una competencia, con ese triunfo ya tendría 7 puntos. Si sumamos el resultado de B en las otras tres disciplinas (tuvo que haber sumado 1 punto en cada una), llegaría a 10. Luego, este caso no puede ser.
- Si $x = 6$, como B ganó una competencia, puede ser que haya obtenido 1 punto en las otras 3 hasta llegar a 9. Pero en ese caso, ¿cómo hizo A para conseguir 22 puntos? Fíjese que, aunque hubiera ganado las otras tres competencias, sumaría 18 puntos, y en la disciplina que ganó B no pudo sumar más que 3 (ya que la distribución es 6, 3 y 1 para los primeros tres puestos). Conclusión, esta situación *tampoco* pudo darse.
- Vayamos al caso $(5 + 4 + 1)$. Si B ganó una competencia, sumó 5 puntos, pero si salió segunda en otra, ya llegó a los 9 puntos y todavía faltan contar dos competencias. Luego, ese caso no fue.
- Si es el caso $(5 + 3 + 2)$, entonces obtuvo 5 puntos la vez que ganó. Aunque haya salido tercera en las otras tres, sumaría 6 puntos a los 5 de la que ganó, hasta llegar a los 11 puntos. No puede ser.
- Listo. Hemos eliminado el caso en que $(x + y + z) = 10$ y $N = 4$.

c) $(x + y + z) = 8$ y entonces $N = 5$

Esta es la única posibilidad que queda. Es decir, la suma de los puntos que se otorgaron en cada disciplina es 8 y la cantidad de disciplinas en las que compitieron es 5. Analicemos qué pudo haber pasado en este caso. Para hacerlo, estudiemos las formas en las que podemos descomponer el número 8 (sumas de tres números positivos, en forma estrictamente decreciente).

$$8 = 4 + 3 + 1$$
$$8 = 5 + 2 + 1$$

¿Por qué no hay más? Si la tercera obtiene 1 punto y ya descartamos los casos en que la segunda obtiene 2 o 3 puntos, entonces la única alternativa que queda, es considerar que la tercera sacó 1 y la segunda sacó 4. Pero como la suma tiene que dar 8, y ya entre la segunda y la tercera sumaron 5, ¡la primera sacaría menos puntos que la segunda! Listo.

Por otro lado, si empezáramos suponiendo que la tercera saca 2 puntos, entonces la segunda debería sacar (como mínimo) 3. Entre la segunda y tercera obtendrían 5 puntos, es decir, ya no queda 'lugar' para que la que salió primera saque más puntos que la que llegó segunda.

Moraleja: los *únicos* dos casos para analizar son:

- 8 = 4 + 3 + 1. ¿Pudo haberse dado esta situación? Como A obtuvo (en total) 22 puntos, aun ganando las cinco competencias llegaría a 20 puntos. Luego, esta situación *no pudo haberse dado*. Y así llegamos a…
- 8 = 5 + 2 + 1. Ya sabemos que B ganó una competencia. Luego, tiene 5 puntos. ¿Qué tuvo que haber pasado en las otras cuatro disciplinas? B tuvo que haber salido tercera en todas ellas. De esa forma, sumaría los 9 puntos. Acá me quiero detener un instante. Fíjese que, al suponer que B

ganó una competencia y salió tercera en las otras cuatro, nos quedan por distribuir los puntos obtenidos en cuatro primeros puestos y cuatro segundos puestos y un solo tercer puesto (¿me siguió? Verifique los cálculos por su cuenta. No acepte lo que yo escribí sin estar convencida/o). Pensemos juntos entonces. Si C hubiera ganado *alguna* de las cuatro competencias restantes, ya tendría 5 puntos, pero como obtuvo 9 puntos en total, ¡no hay manera de que los consiga porque todos los terceros puestos —salvo uno— están tomados por B! Luego, C no pudo haber ganado ninguna competencia. La *única* alternativa es que hubiera salido segunda en cuatro competencias, y haya obtenido el tercer puesto en la disciplina que ganó B. De esa forma, obtiene los 9 puntos que era uno de los datos del problema. Y *finalmente* los lugares que quedan libres (cuatro primeros puestos y un segundo puesto) le otorgan a A los 22 puntos que consiguió. ¡Esta es la solución del problema!

> A ganó cuatro competencias y obtuvo un segundo puesto: total 22 puntos
> B ganó una competencia y salió tercera en las otras cuatro: total 9 puntos
> C salió segunda en cuatro competencias y tercera en la que ganó B: total 9 puntos.

Lo notable es que esto permite contestar la pregunta original: ¡Carmen (C) fue la persona que salió segunda en la competencia en salto en alto!

De esta forma, con una cantidad de información *mínima*, hemos encontrado la respuesta a una situación que —de entrada— parecía imposible.

Algo más. Este tipo de problemas, en donde *todo* lo que uno tiene que hacer es simplemente *pensar*, invitan a sacar una conclusión: la notable potencia del cerebro para analizar situaciones múltiples y encontrar respuestas a preguntas que parecen inaccesibles. Ojalá que usted lo haya disfrutado al leerlo/resolverlo, tanto como yo al plantearlo (y escribir la solución también).

Conocimiento público y compartido

Julian Havil es un matemático inglés reconocido mundialmente por su tarea en la difusión de la matemática. Nació en 1952 y desarrolla la mayor parte de su trabajo, justamente, en las islas británicas. Hace diez años, más precisamente a mediados de 2008, publicó uno de sus libros más famosos, con un título impactante: *Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums* (¿Imposible? Soluciones sorprendentes a dilemas antiintuitivos[16]). Es un trabajo atrapante con múltiples historias del mundo de la matemática y de su relación con la vida cotidiana.

¿Por qué citarlo de él y a uno de sus libros acá? Es que una vez que lo escuché hablar de una historia de uno de los capítulos, pensé inmediatamente: "Tengo que contar esta historia en español".

Y acá voy. Créame que es la conceptualización de datos muy interesantes y que invitan a la reflexión.

16. La traducción es mía. No sé si el libro está publicado en español y no estoy seguro si la palabra 'conundrum' se interpreta como dilema, problema, dificultad, etc. En cualquier caso, espero darle una idea de lo que Havil quiso expresar en el título.

La diferencia entre conocimiento mutuo y conocimiento común

Me cuesta trabajo decidir si en castellano este tipo de distinción es la misma que uno haría en inglés. De hecho, ni siquiera sé si estoy muy de acuerdo con la diferencia que Havil propone en su idioma, pero eso es totalmente irrelevante.

Tomemos un ejemplo que nos sea más familiar a nosotros. La capital de Uruguay es Montevideo. Esto es de público conocimiento, que sería el equivalente de lo que Havil llama 'conocimiento mutuo'. Creo que 'público conocimiento', para nosotros, suena más razonable.

Dicho esto, el hecho que sea público y gratuitamente accesible a todo el mundo no lo hace 'forzoso' ni 'obligatorio'. El conocimiento está 'ahí'. Si usted lo tiene o no, no me afecta a mí.

Sin embargo, también es de 'público conocimiento' que, cuando estamos manejando o caminando, un semáforo con la luz roja encendida indica que el paso está prohibido. En cambio, si estuviera iluminada la luz 'verde', el paso está permitido.

Esto *también* es de 'público conocimiento', pero hay una *enorme diferencia*: ya no es lo mismo que usted lo sepa o no lo sepa. A mí me interesa *muchísimo* no solo que esa información esté allí para que todo el mundo la 'aprehenda', sino también es muy importante que usted *sí* esté al tanto de la misma. Aún más: yo *necesito* que usted lo sepa, que usted *tenga esa información*. Tanto es así que para que conducir un vehículo cualquiera, usted tiene que superar un examen en donde le preguntarán (entre múltiples cosas) si *sabe* que no puede cruzar cuando la luz está roja pero sí puede hacerlo si está verde. Incluso como peatones, es decir, aun cuando no estemos conduciendo ninguno (o alguno) de los dos, es importante para ambos que sepamos que el otro tiene ese conocimiento.

Créame: el último párrafo es determinante para todo lo que sigue, porque contiene la *esencia* de lo que estoy tratando de proponer. Por eso, antes de avanzar le pido que se detenga un instante y piense si está de acuerdo en que hay una *profunda diferencia* entre esos dos saberes ("Montevideo es la capital de Uruguay" y "luz roja encendida, detenerse; luz verde encendida, pasar") son iguales en cuanto al acceso, pero representan algo muy diferente en términos del conocimiento.

Esa diferencia es la que quiero marcar (en realidad, lo hizo Havil en su artículo). ¿Cómo llamarlos y/o distinguirlos en español? A uno lo voy a llamar 'conocimiento público' o de 'público conocimiento' (el dato de la capital uruguaya); al *otro*, 'conocimiento compartido'.

Me permito hacer un agregado más: el 'conocimiento compartido' empieza siendo público, mientras que el 'conocimiento público' no tiene por qué ser compartido. Aun corriendo el riesgo de *repetirme* (y si usted así lo considera, saltee el siguiente párrafo), en esencia, la diferencia radica en este sumario:

> Hay un cierto tipo de conocimiento que es accesible a todo el mundo. A mí no me afecta en absoluto si una persona tiene o no tiene una parte de ese conocimiento, es el que llamé 'público'; en cambio, hay otra parte del 'conocimiento público' que a mí *sí* me interesa saber que usted tiene (y recíprocamente), es el que llamé 'conocimiento compartido'.

¿Cómo hacer para convertir un conocimiento público en un conocimiento compartido? Por ejemplo, podríamos reunir en una habitación a un grupo de personas y que uno dijera: "La capital de Uruguay es Montevideo". ¡Listo! A partir de ese momento, *todos* los presentes pasamos a tener un conocimiento 'compartido'. Ninguno podrá decir que *no sabía* que eso era cierto. Pero no solo *todos* los allí reunidos tendríamos la información, sino que —esto es muy importante— a partir de ese momento *todos sabemos que todos tenemos esa información*: ha pasado a ser un conocimiento público, sí, pero además es compartido.

Hay muchísima literatura escrita al respecto. De hecho, yo mismo escribí en varios sitios de divulgación sobre este tipo de episodios. Entre las múltiples variantes hay dos casos particulares: 'El reino de Josefina'[17] y 'La isla de los Ojos Celestes'[18].

Quiero aprovechar para presentar *otro* problema de las mismas características y proponerle que lo pensemos juntos. Se trata del caso particular que presentó Julian Havil en su libro y creo que es interesante por sus propios méritos, un ejercicio extraordinario para pensar: es entretenido, atractivo, no es trivial, no presupone que usted tenga ningún conocimiento previo, *salvo* una buena predisposición y ganas de agregar(se) una herramienta más a su caja 'intelectual'. ¿No debería ser suficiente incentivo? Al menos para mí lo fue. Espero seducirla/o a usted también. Sígame por acá.

Supongamos que en una habitación hay 500 personas (el número es arbitrario, podrían ser 50 o 1000, es irrelevante). Solo elijo un número para fijar las ideas. Están todos en un salón enorme o, si usted prefiere, en el patio de un colegio, donde los alumnos pasan habitualmente sus recreos.

Supongamos también que yo voy a repartir *sombreros*. Esos sombreros podrán ser de dos colores diferentes, únicamente rojos o azules.

---

17. Paenza, Adrián, *La matemática del futuro*, Buenos Aires, Sudamericana, 2017, página 80.

18. Paenza, Adrián, *¿Cómo… esto* también *es matemática?*, Buenos Aires, Sudamericana, 2011, página 265.

Como suele pasar en este tipo de problemas, podrá ver el color de los sombreros de *todas* las personas ¡salvo el suyo! O sea, usted ve 499 de los 500 sombreros, y lo mismo les sucede a los demás. Algo más: ¡todos ustedes son *lógicos* perfectos! Es decir, en el momento en que se trata de deducir algo, son capaces de sacar las conclusiones correctas: si tienen los datos suficientes, sabrán *deducir* lo que corresponde.

Sigo. Sin ningún tipo de anuncio, yo le *pongo* un sombrero a cada uno, pero elijo *exactamente 15 sombreros rojos*. Es importante este dato: a partir de ese momento, ustedes verán que algunos son rojos y otros azules. De hecho, las personas que tengan puesto un sombrero azul podrán *contar* y ver que hay 15 rojos, pero no sabrán si *en total* hay 15 o 16 (el de ellos también podría ser rojo, no lo saben). Por otro lado, los que tengan puesto un sombrero rojo, no sabrán si en total hay 14 o 15.

Ahora supongamos que ya están repartidos todos los sombreros. Todo el mundo se sienta, mirándose unos a otros. No lo escribí antes pero me apuro a hacerlo ahora: ¡no hay comunicación posible! Nadie usa ningún tipo de truco o artilugio para *indicarle a otra persona qué color de sombrero tiene*. Si bien todo el mundo mira, todos participan del 'juego' en forma genuina.

Por último, yo les advierto a todos que en el salón hay un reloj muy grande, que todos pueden ver. Ese reloj marca los minutos y también las horas. Cada 60 minutos (en el momento en que cambia el número de la hora), el reloj hace sonar una campana que es 'audible' para todas las personas que están allí reunidas.

Con todos estos datos, llega un *paso importante*: les pido que, en el momento en que alguno pueda *deducir* (y me importa enfatizar esta palabra <u>*deducir*</u>) que tiene puesto un sombrero rojo, espere hasta el momento en que suena la alarma que indica el cambio de hora, se levante y se vaya de la habitación. Puesto de otra forma: ¡se trata de 'deducir' y no de 'adivinar'!

Una vez hecha esa precisión, todo el grupo seguirá sentado, mirándose entre ellos o lo que quieran hacer, aunque *sí* deberán estar atentos al sonido del reloj una vez por hora.

El momento del 'cambio'

De pronto, una persona (que no forma parte del grupo y que, en principio, no participaba de juego) entra en el recinto, ve los sombreros que todos tienen puestos y dice: "Al menos *uno de ustedes* tiene puesto un sombrero rojo".

A esta altura, usted (sí, usted) debe estar pensando: "¿Y? ¿Qué novedad es esa? Todos los que estamos acá vemos que hay 'por lo menos' un sombrero rojo. ¿Qué importancia tendrá que venga alguien de afuera y lo señale?". Bueno, aunque no lo parezca tiene *muchísima importancia*, a tal punto, que cambia el tenor de juego.

De hecho, estoy tentado de preguntarle: "Si no hubiera entrado esta persona y no hubiera hecho esa afirmación, ¿habría alguna forma de que alguien pudiera descubrir que tiene puesto un sombrero rojo?". Lo dejo por ahora con la pregunta, pero le propongo que al terminar el texto se plantee cómo se puede contestar la pregunta. Mientras tanto, sigo.

Ahora quiero mostrarle que desde que este visitante dijo lo que dijo, cuando el reloj haya marcado la hora *exactamente 15 veces*, las 15 personas que tienen puesto el sombrero rojo se levantarán y saldrán del salón. Raro, ¿no? Sin embargo, la afirmación del visitante permite cambiar todo y logra que los *lógicos* que están en el salón con un sombrero rojo se levanten y se vayan una vea que la alarma sonó 15 veces, o sea, 15 horas después. ¿Por qué?

Por supuesto, lo más interesante sería que usted me abandone acá y se quede pensando por 'las suyas', pero yo voy a completar el texto. Lo hago con la idea de que tenga 'a mano' una respuesta, pero créame, *¡sería tan valioso que usted se ocupara por su cuenta!*

Le propongo lo siguiente. Reduzcamos el problema a que haya *nada más que* un solo sombrero rojo. Voy a llamar A a la persona que lo tiene puesto. ¿Qué cree usted que pasará cuando el reloj marque la *primera hora* desde que el visitante hizo el anuncio de que había visto —por lo menos— un sombrero rojo?

Hasta el momento que fue hecho el anuncio, A no tenía idea de que su color era rojo. Nadie podía comunicárselo. Como A veía *solamente* sombreros azules, cuando el visitante dijo que había por lo menos un sombrero rojo, A dedujo que quien lo estaba usando ¡era él mismo! Justamente entonces, cuando el reloj anuncia la hora, se levanta y se va. Listo. Problema concluido. Si en el salón hay *solamente un sombrero rojo*, cuando suena la campana de la primera hora, el que lo está usando, se levanta y se va.

¿Y si hay exactamente dos personas que tienen sombreros rojos? Llamémoslos A y B. ¿Qué pasaría en este caso? (¿No quiere pensar usted?)

Pongámonos en el *lugar* de alguno de los dos. Tomemos A. Cuando el visitante hizo el anuncio, el único sombrero rojo que veía A era el que usaba B (y al revés, el único sombrero rojo que veía B era el que tenía puesto A). ¿Cuál es la diferencia? Desde el punto de vista de A, cuando el reloj marca la hora, A está esperando que B se levante y se vaya porque, en principio, él supone que B es el único sombrero rojo que hay. Pero B, que *supuestamente* está viendo todos sombreros azules y, por lo tanto, al sonar el reloj debería irse, *¡no se va!* Y lo mismo sucede al revés: B espera que A se vaya al sonar el reloj, porque 'desde sus ojos' B supone que A está viendo solamente sombreros azules y, en consecuencia, él debería ser el único que tiene un sombrero rojo. Cuando suena la alarma, A debería levantarse e irse, pero… *¡tampoco se fue!*

¿Qué indica eso? Que al sonar la alarma la segunda vez (pasadas dos horas), ¡los dos tienen que levantarse e irse! ¿Por qué? Es que al dato de que cada uno está viendo que el otro tiene un sombrero rojo, ahora se agregó otro *muy importante*: ¡ninguno de los dos se levantó y se fue como debió haber pasado si había un solo sombrero rojo! El nuevo dato es una fuerte indicación: cuando suene la alarma a la segunda hora… ¡levantate y andate porque vos también tenés un sombrero rojo!

Y efectivamente así es. Con dos sombreros rojos, pasadas las dos horas, las dos personas que tienen sombreros rojos se levantan y se van.

¿Y si hay *tres personas* que tienen sombreros rojos? Entonces, ¿qué pasa allí?

Voy a llamar A , B y C a las tres personas que tienen los sombreros rojos. Por supuesto, le voy a proponer no solo que usted me acompañe a reflexionar en este caso, sino que voy a *usar explícitamente* lo que dedujimos recién cuando había *dos* sombreros rojos nada más. Todas las personas que están en el salón, *saben perfectamente* que si hubiera dos sombreros rojos nada más, ¡cuando la alarma suene dos veces, los dos tienen que levantarse e irse! Si no lo hicieron, es porque hay ‘algo’ más que no estaba incluido antes. Ese ‘algo’ es que tiene que haber *más sombreros rojos*. ¿Cuántos más?

Las personas que tienen puestos sombreros azules están *viendo* que hay tres rojos. Ellos saben perfectamente lo que sucede. Pero ahora A, B y C, que por un tiempo ven nada más que *dos* sombreros rojos, esperan que esas dos personas se vayan luego de que la alarma haya sonado dos veces. Si no se fueron, es porque hay alguien más que está usando uno rojo, y si ellos *no ven más que dos*, eso indica que son *ellos mismos* los que tienen el nuevo sombrero rojo. ¿Qué hacer entonces? Ni bien la alarma suena por tercera vez, los tres (A, B y C) se levantan y se van.

Y acá quiero parar. Como usted advierte, lo mismo podría hacer si hubiera cuatro, cinco, seis y hasta quince sombreros rojos (el número de sombreros de ese color que incluí al principio). Pero lo importante de esta idea es que al sonar la alarma 15 veces, los 15 que tienen sombreros rojos se levantarán y se irán de la habitación.

¿No es extraordinario este hecho? Justamente, la diferencia a la que me refería antes es que mientras el visitante no dijo lo que dijo, nadie tenía manera de poder 'deducir' si tenía o no un sombrero de color rojo. Lo que parecía una información 'trivial' se transformó en decisiva. Lo que había sido un conocimiento 'público', pasó a ser un conocimiento 'compartido'. Ahora *todos* habían escuchado que había por lo menos un sombrero rojo; y no solo lo sabían ellos: cada uno de ellos sabía que *todos* compartían ese conocimiento, *todos* sabían que había por lo menos un sombrero rojo, y eso fue determinante para que terminaran saliendo del recinto los 15 sombreros rojos.

Este simple hecho es muy potente y cambió la ecuación de lo que sucedió dentro de ese salón. Si usted quiere relacionarlo con lo que escribí al comienzo en cuanto a Montevideo y el caso de los semáforos, cuando el visitante entra y dice lo que dijo respecto a que él veía por lo menos un sombrero rojo, terminó operando como si se hubieran reunido todas las personas en el salón y alguien les dijo que Montevideo es la capital de Uruguay. Ahora, no solo *todos* se enteraron del hecho, sino que también supieron que *todas* las personas que estaban allí adentro *sabían* cuál era la capital uruguaya, es decir, todos los presentes *saben ahora que todos tienen esa misma información.*

El conocimiento 'público' pasó a ser conocimiento 'compartido' y, como vimos, hay una *enorme* diferencia entre uno y otro.

Enteros consecutivos

Ahora, para hacer justicia con el trabajo notable de Julian Havil, voy a incluir aunque sea brevemente el ejemplo de los dos enteros consecutivos. Si necesita dedicarle un rato, créame que, una vez más, vale la pena.

Supongamos que hay dos personas A y B a quienes les voy a dar un número entero positivo (o sea, elegido entre los números 1, 2, 3, 4, 5, 6…). Los llamo y les digo un número al oído. A escucha su número pero no sabe qué le dije a B, y viceversa: B escucha su número pero no sabe lo que le dije a A. Pero hay un dato más: a A le cuento que el número que le digo a B es *consecutivo* del que le dije a él, y al revés, a B le informo que el número que le dije a A es *consecutivo* del que le dije a él. Por ejemplo, si a A le dije el número 7, A sabe que B tiene o bien el 6 o el 8. Por supuesto, lo mismo vale para el caso de B.

Como en el ejemplo de los sombreros, supongamos que A y B están en una habitación donde hay un reloj —que ambos pueden ver— que hace sonar una alarma a cada hora. Asimismo, el juego es *honesto*, ninguno de los dos hace ningún tipo de seña o se comunica con el otro. Eso sí: ambos están instruidos de manera tal que si por alguna razón pueden ‘deducir’ el número que tiene la otra persona, inmediatamente después de sonar la alarma, deben levantarse, decir en voz alta el número del otro e irse.

En estos términos, como dice Havil, podrían estar sentados en la habitación el resto de sus vidas sin *deducir* qué número tiene la otra persona. El reloj va a seguir sonando una vez por hora y ninguno de los dos puede decir nada. Si uno de ellos tuviera —por ejemplo— el número 7, ¿cómo haría para deducir que el otro tiene 6 u 8? Parece imposible, ¿no es así? Sin embargo, no es *tan* así.

Le propongo lo siguiente y verá cómo podemos hacer. Por un instante, un caso muy fácil. Supongamos que yo le dije a A que tiene el número 1. Si ese fuera el caso, usted se da cuenta de que ni bien suene la alarma, A *sabe* que B tiene el número 2. Esto sucede porque los números entre los que yo debía elegir *empezaban en el número 1*. Este es el *único* caso en donde hay *un solo consecutivo*. Como no puede ser cero, tiene que ser dos. ¡Listo! A espera que suene la alarma, dice que él sabe que B tiene el número 2, se levanta y se va.

Ya sé, ya sé, es un caso *muy muy particular*, por supuesto. Pero permítame dar un paso más y verá *todo* lo que se puede avanzar a partir de este instante.

¿Y si yo le dijera a A el número 2? ¿Qué pasaría en ese momento? Si A escuchó el número 2, no sabe si B tiene el 1 o el 3. ¿No habrá *algo* más para decir? (¿quiere seguir usted?).

A escuchó el número 2 y, por el momento, cuando el reloj suene por primera vez, no sabe si B tiene el 1 o el 3. Pero si cuando la alarma suena y B no se levanta y anuncia que A tiene el 2 y se va, ¡es porque B no tiene el número 1! Si lo tuviera, tendría que irse al sonido de la primera alarma. ¡Si no se fue, es porque B tiene el tres y no puede saber! Y eso es todo lo que le hace falta saber a A. Cuando suena la alarma por segunda vez, A se levanta, dice: "B tiene el número 3", y se va.

Moraleja: si A escuchó el número 1 o el número 2, podrá levantarse luego del primer sonido de la campana (si tiene el 1) o luego del segundo (si escuchó el 2).

¿Y ahora? ¿Qué pasaría si yo le digo a A el número 3? Una vez más, a esta altura, A no puede saber si B tiene el 2 o el 4. A no puede avanzar, pero *sí* puede observar la conducta de B. Para eso necesita que pase un poco de tiempo.

Mientras tanto, A sigue pensando: "Yo tengo el 3. B podría tener el 2 o el 4. Me voy a poner en el lugar de B y voy a ver lo que haría él. Si B tuviera el 2, B esperaría mi reacción cuando se escuche la alarma por primera vez. Si él tiene el 2 y yo tuviera el 1, al sonido de la alarma yo me tendría que haber levantado, decir que B tiene el 2, y me tendría que haber ido. Sin embargo, B advierte que no me fui. Luego, deduce que yo *¡no puedo tener el 1!*".

Y acá importa elaborar un poquito más. Si B tuviera el 2, como A no se levantó y se fue, B debió haber deducido que A tenía el 3. En ese caso, al sonido de la alarma la siguiente vez, B debió haberse levantado, dicho que él sabía que A tenía el 3, e irse. Pero ¡B no se fue! Luego, se deduce que B ¡no tiene el 2! A partir de acá, el caso está virtualmente concluido. A sabe que tiene el 3, dedujo que B no tiene el 2 y, ni bien pueda, se levantará, dirá "B tiene el cuatro", y se irá.

Como se ve, este es un *juego* que requiere de mucha paciencia y de aguda observación, pero al mismo tiempo, una vez hechas las deducciones anteriores, es inexorable que en algún momento uno de los dos podrá deducir qué número tiene el otro. Usted advierte que, con paciencia y tiempo, este camino conduce a la solución, sean cuales fueren los números que escucharon ambos. Llevará tiempo, por supuesto, y hay que contar con que ambos son lógicos perfectos y anotan todo lo que va sucediendo, pero al final uno de los dos deberá concluir el número del otro.

Una vez más, *todo* el crédito de los ejemplos y la definición de conocimiento 'público' y 'compartido' le corresponde a Julian Havil, que fue quien las exhibió no solo en su libro sino también en varias conferencias a lo largo del mundo. La literatura es muy vasta y todo lo que pretendo acá es compartir con el mundo de habla hispana lo que Havil puso en evidencia hace más de una década. Ojalá que usted haya podido disfrutarlo tanto como yo.

El futuro

El futuro ya no es como era. Antes tardaba mucho en llegar. Cada cambio llevaba años, décadas. Venía tan anunciado que ya 'casi' no tenía gracia. Sabíamos de qué se trataba porque lo estábamos esperando. La historia está plagada de huecos temporales en los cuales, virtualmente, 'no había novedades'.

Pero con el paso del tiempo, ese mismo futuro ha mejorado y, en estos días, casi no da respiro para imaginarlo siquiera. Llega a borbotones e invade por todos lados. Justamente, esta cualidad temporal le permitió recuperar una capacidad que había perdido: sorprender.

¿Cuál fue el último *gran* invento o innovación? Es difícil ponerse de acuerdo, pero hay factores que inexorablemente *tienen* que formar parte de la ecuación. Internet, la telefonía celular, las redes sociales, la biogenética, la criptografía, los autos que no requieren conducción… Usted incluya (o excluya) lo que le parezca pertinente.

Ahora bien: ¿qué podría suceder hoy que fuera igual de *revolucionario*, que genere un cambio tan radical como el que produjo la irrupción de internet? Estas preguntas son más difíciles de contestar sin invadir el terreno de la ciencia ficción. De hecho, yo podría incluir mis propias fantasías pero prefiero dejar la respuesta en pausa porque no sabría bien qué escribir.

Con todo, hace muy poco tiempo se produjo un episodio que

—creo— no tuvo la publicidad que debió en función del cambio *brutal* que podría producir. Acompáñeme por acá y téngame un poco de paciencia en el recorrido.

Los grandes gigantes de la tecnología —piense en Apple, Google, Amazon, Samsung, Facebook, por ejemplo— ofrecen conferencias de prensa para anunciar sus nuevos productos. Son tan frecuentes y la información que van a comunicar ya se ha filtrado por tantos medios, que rara vez presentan algo que sorprenda o produzca un gran impacto.

Sin embargo el 4 de octubre del año 2017, en San Francisco, sucedió algo diferente. Brian Rakowski, en representación de Google, anunció, entre otros productos, dos que me llamaron la atención, cada uno por una razón bien diferente.

El primero fue la aparición de una nueva versión del teléfono celular que Google fabrica de punta a punta: el Pixel 2. Es un mensaje claro para Apple: Google ahora fabrica *sus propios teléfonos celulares de punta a punta*. Hace un año que está en plaza el Pixel 1. Google se subió al ring para disputarle a Apple el mercado de la telefonía celular y no piensa bajarse. De hecho, fue Steve Jobs quien revolucionó al mundo con la introducción del primer iPhone hace poco más de una década. Ahora Google con su Pixel 2 competirá no solo con el iPhone 8 (que fue presentado hace muy poco); sobre todo, discutirá con Apple quién se queda con el precio mayor. Apple utilizará su nueva gran *joya*, el iPhone X, y Google... veremos lo que hace Google.

El iPhone X —que saldrá al mercado en diciembre— tendrá como precio *¡mil dólares!* (en su versión más básica). Será el teléfono celular más caro de la historia. Por supuesto, para no fracasar tendrá que ser *muchísimo mejor* que todos sus predecesores. Será la única manera de justificar el desembolso de tanto dinero. Pero hasta acá quería llegar: me imagino que usted intuye (o sabe) que la aparición del Pixel 2 o del iPhone X no es el motivo por el que estoy escribiendo este artículo. ¡No, ni de cerca! El énfasis lo quiero poner en otro lugar. Es lo que llega ahora y le pido que 'se ajuste el cinturón'.

El segundo anuncio de Rakowski fueron los Pixel Buds. ¿Qué son? A simple vista, parecen dos auriculares como los que hay en el mercado. Son *inalámbricos* y usan el sistema Bluetooth para comunicarse con la 'base': su teléfono celular. Entre ellos están conectados por un cable que —de acuerdo con lo que vi— uno se pone por detrás de la cabeza. La diferencia *extraordinaria* es que los auriculares aprovechan la potencia de una aplicación patentada por Google (Google Assistant) que reside en el teléfono celular para ¡traducir! Sí, traducir en simultáneo, en tiempo real.

Funcionan así: suponga que usted se encuentra con una joven inglesa. Ella no habla una palabra de español y usted no habla una palabra de inglés. Usted tiene ubicado los Pixel Buds en sus oídos y aprieta el botón externo que está en el auricular derecho. Allí dice (en español): "Google, necesito ayuda en inglés". A partir de ese momento, el Google Assistant activa la aplicación que permite traducir del español al inglés (y viceversa). Con el teléfono en la mano y mientras sigue presionando ese botón, usted dice (por ejemplo): "Hola, Ingrid. ¿Cómo le va? ¿Cuánto tiempo hace que está acá, esperándome?". Mientras tanto Ingrid, que hasta ese momento no había entendido lo que usted dijo, escucha una voz desde el teléfono que dice: "Hi, Ingrid. How are you? How long have you been here, waiting?". Ingrid ahora le habla al teléfono, en inglés: "No, I got here just five minutes ago. No worries!". Cuando ella terminó sus frases, usted escucha en sus auriculares: "No, llegué acá hace cinco minutos. ¡No se preocupe!".

Acá, una pausa. No sé cuánto le impacta a usted que este diálogo se pueda producir en tiempo *real*, es decir, mientras está sucediendo, pero yo estoy convencido de que esta posibilidad tendrá consecuencias inmediatas y muy profundas.

El presente… más que el futuro

Google ya tiene una lista de espera, abierta ese mismo día (4 de octubre), y el público tendrá los Pixel Buds en sus manos a mediados de noviembre. Comparado con el precio de los competidores, los 159 dólares que cuesta el par no parece que vaya a ser un impedimento, pero este no es una propaganda de Google. Google *no me paga nada por esto*, ni a mí ni a Penguin Random House (que publica esta serie de libros). Lo que sí sucede es que, en este caso, el futuro llegó desde otro lugar y —creo— va a producir un impacto muy profundo. Hasta el momento, la compañía anuncia que usando los Pixel Buds y el Google Assistant en el teléfono celular, se podrán hacer traducciones simultáneas entre 40 idiomas. Por supuesto, inglés, español, francés, alemán, italiano, portugués, japonés, ruso y mandarín están en la lista, por lo que en principio, Google se garantiza una *amplia cobertura mundial*.

Más allá de compartir la información, algunas reflexiones.

Así como internet nos conectó de una forma inesperada, los Pixel Buds abren otro tipo de puertas. Usted advierte que podría llegar a Seúl, en Corea del Sur, o a Perth, en la costa oeste australiana, o a Liubliana, la capital de Eslovenia, y sin necesidad de hablar ni coreano, ni inglés ni esloveno, usted estará en condiciones de poder entablar una conversación que exceda el marco de preguntar por el lugar donde está el baño, un hotel, la hora o cómo llegar a una estación de trenes.

Por otro lado, más allá de la voluntad de aprender un idioma como curiosidad o por gusto particular, el lenguaje no será más un impedimento. Si me permite exagerar (y equivocarme al hacerlo), se acerca el final de las clases prolongadísimas de inglés en los colegios para terminar aprendiendo muy poco. Creo que no se le escapa que cuando uno se encuentra con un angloparlante, salvo las obviedades, ninguno de los dos puede avanzar en nada 'serio' basado en lo que aprendió tanto en la educación primaria como secundaria. Por supuesto, esta situación no la vivimos solamente nosotros, sino que les sucede a 'ellos' también, y en el 'ellos' incluyo al resto del mundo.

Para 'ellos' aprender español conlleva, por ejemplo, alcanzar a descifrar por qué los sustantivos tienen género. ¿Por qué una pierna es femenina y un ojo es masculino? Eso los vuelve locos. Creo que no hace falta que cuente cuáles son los problemas que tenemos nosotros cuando intentamos aprender inglés, alemán o francés. ¿Hizo la prueba alguna vez entender algún idioma que tenga un 'alfabeto' diferente del nuestro, como el griego, ruso o mandarín?

Las conjeturas y fantasías son ilimitadas, y cada uno de nosotros elegirá qué camino tomar y de qué forma lo utilizará. Esta es solo la primera versión, la primera irrupción de una tecnología que muestra la potencia de lo que somos capaces de hacer, cuando justamente usamos esta tecnología para hacer el 'bien'.

Por último, una locura total, pero la quiero compartir. Lo voy a escribir porque se me acaba de ocurrir mientras pensaba en ejemplos para esta nota: ¿podremos algún día comunicarnos con algún animal? Más allá de 'hacernos entender', estoy pensando en una verdadera interacción. ¿Cómo pensará un animal? Si ellos pudieran hablar, ¿disputarían lo que nosotros 'creemos' que nos están diciendo? ¿Será verdaderamente inalcanzable?

Es posible. Mientras tanto, algunos aportes de la ciencia ficción requieren una revisión inmediata, y hasta podríamos empezar por sacarle la palabra 'ficción' a alguno de los objetos de esa categoría.

Continuará…

Romance

Quiero hacerle una propuesta provocadora. No sé qué edad tiene usted y, por lo tanto, no sé bien a quién le estoy escribiendo, pero no debería tener importancia. Un poquito de historia…

En algún momento que podría ubicar en la última década o quince años atrás (no creo que más), se produjo una irrupción masiva de las tecnologías digitales. No me refiero solamente a los teléfonos celulares, sino también a las computadoras personales, netbooks, laptops, relojes con acceso a internet, PlayStations, tabletas, etc. De todas formas, fíjese que no quiero poner el dedo en el instante en el que 'debutaron', sino cuando se hicieron masivas, cuando casi todo el mundo tiene acceso a alguna de ellas o bien le resulta familiar cuando alguien las menciona. El mejor ejemplo que se me ocurre es el de un televisor o un teléfono: nadie necesita explicar lo que es, todo el mundo entiende.

Desde que eso sucedió, la gente de mi generación (nacidos en la mitad del siglo pasado), e incluso de la que me sigue, se 'queja' sobre el efecto que produjo en la juventud, en los adolescentes e incluso con los niños. Es muy frecuente escuchar que ahora viven más aislados, que cada una/o presta atención a 'su propio universo', que se van perdiendo las relaciones interpersonales, que este tipo de tecnología tiende al aislamiento, a la soledad.

Por supuesto, esto viene también con otra 'queja' incluida, que encubre el 'todo tiempo pasado fue mejor'.

Yo tengo una visión distinta y no necesariamente aspiro a que la comparta. Solo quiero ofrecer algunos datos para que las conclusiones sean más educadas. Un ejemplo que me resulta muy útil es el del teléfono. Creo que puedo suponer que la aparición del teléfono no generó que la gente se encontrara menos o se aislara más. En todo caso, sirvió para planificar mejor las citas y acercó a aquellos que estaban distantes geográficamente. Sin embargo, los registros de la época muestran el mismo tipo de preocupación de la sociedad: la gente ahora hablará por el 'aparatito' negro y ya no necesitará visitarse, ni verse en persona. ¿Le suena parecido?

En ese contexto, con una escenografía que invita a la añoranza, todo lo que sucede ahora *tiene* que ser peor: no cabe otra alternativa. Antes, *nosotros* éramos mejores, más generosos, más solidarios…, ¿seguro? En todo caso, lo que acepto sin ninguna duda es que *nosotros* éramos más jóvenes, nada más que eso. O mejor dicho, sí, algo más: ¿cómo sabemos que nosotros habríamos hecho algo diferente si hubiéramos estado expuestos a la parafernalia de opciones que existen hoy? Jugábamos con las opciones que teníamos, pero no se nos ofrecía la variedad actual. Para poder deducir que 'éramos mejores', 'más solidarios' o 'que no hubiéramos hecho lo que los jóvenes hacen hoy', ante las mismas alternativas actuales, deberíamos haberlas desechado. En ese caso sí, aceptaría que 'éramos distintos'.

Pero lo que escucho de parte de quienes me 'atacan' es que yo me niego a ver la realidad, que estamos generando jóvenes aisladas/os, solitarias/os, ensimismadas/os, ausentes, recluidas/os en su propia fiesta interna, poco solidarias/os, sin ganas de prestarle atención al entorno y sin contactos con el mundo exterior. ¿Exagero? Puede ser, pero reconózcame que lo que acabo de escribir se asemeja bastante a lo que usted también piensa o escucha, con distintas tonalidades, pero apuntando en esa dirección.

Lo concreto es que personas como yo, que ponemos en duda esta descripción de la sociedad actual, terminamos en discusiones de café con final incierto, abierto. ¿Cómo tener razón? ¿Quién haría de juez? ¿Cómo comparar épocas? Pareciera que no hay manera de corroborar nada. En el mejor de los casos, son opiniones contrapuestas, y una abrumadora mayoría de la gente de mi generación (y de la que nos siguió) piensa diferente de lo que pienso yo.

A este punto quería llegar, ¡tengo malas noticias para ustedes! (si es que usted está incluido entre 'los ustedes').

El 2 de octubre de 2017, Josué Ortega y Philipp Hergovich[19], publicaron un artículo que analiza algunos comportamientos sociales sorprendentes. Lea los siguientes párrafos, extraídos del trabajo, y fíjese lo que piensa usted.

> Las conexiones más importantes que tenemos no son las que provienen de nuestros amigos más cercanos sino de a través de 'conocidos': gente que no está necesariamente muy cerca de nosotros, ni física ni emocionalmente, pero que nos ayudan a relacionarnos con grupos que de otra manera nos serían inaccesibles. Por ejemplo, es mucho más probable que obtengamos una oferta de trabajo

19. "The Strength of Absent Ties: Social Integration via Online Dating". Como no puedo hacer una traducción literal del título, lo voy a explicar así: "Cuando no hay lazos previos, las redes sociales son las que cooperan para establecer relaciones". El artículo está firmado por Josué Ortega, de la Universidad de Essex, en Inglaterra, y Philipp Hergovich, de la Universidad de Viena, en Austria. Ambos son doctores en Economía. Puede encontrarlo en https://arxiv.org/pdf/1709.10478.pdf.

> por parte de un conocido que de un amigo. Esos lazos, que parecen débiles, sirven de puentes para establecer relaciones con otros grupos que están más alejados de nuestros intereses y nos conectan con la comunidad global. [...]
>
> Antes, nos casábamos con gente con la que teníamos algún tipo de conexión: amigos de amigos, compañeras/os de colegio, vecinos. Como en general estábamos conectados con gente similar a nosotros mismos, era mucho más probable, por ejemplo, que nos casáramos con gente de nuestra misma raza o nuestra misma religión o misma nacionalidad.

Y a este punto quería legar: "Sin embargo, internet fue cambiando estos patrones: gente que se conoce por esta vía solía estar —en principio— totalmente desconectada". "Dado que en la actualidad ¡una tercera parte de los casamientos modernos empiezan usando internet o las redes sociales!", los autores comenzaron a investigar en forma teórica, usando grafos al azar y teorías de apareamiento, los efectos que producen estos nuevos lazos en la diversidad que es posible encontrar en las sociedades más modernas. "Hemos encontrado —siguen Ortega y Hergovich— que cuando una sociedad se beneficia de *la inexistencia* de lazos previos, la integración social ocurre muchísimo más rápido".

Después, citan un trabajo de Rosenfeld y Thomas, que exhibe una lista de cómo encontraron los norteamericanos sus parejas en los últimos ¡cien años! En los primeros lugares aparecen (por orden de relevancia): a través de amigos comunes, en bares, en el trabajo, en establecimientos educativos, en la iglesia, a través de familiares o porque terminaron siendo vecinos.

Pero en los últimos veinte años, internet dio vuelta al mundo como una media, *aun* en la forma en la que encontramos nuestras parejas. Ahora, los encuentros se producen entre dos personas *completamente extrañas*, sin ningún lazo previo ni intercambio social (tradicional). De hecho, documentan cómo los encuentros iniciados en internet se han convertido en la segunda forma más popular de encontrar pareja para los norteamericanos.

Imagine usted lo que eran las 'redes sociales' *antes* que apareciera internet. Imagine que cada persona es *un punto* en un mapa enorme y que usted va a trazar un segmento que une dos puntos si esas dos personas se conocen. Piense que con este 'modelo', si usted tiene una amiga, habrá un segmento que los conecta, pero si su amiga tiene una amiga que usted no conoce, *no hay segmento* que lo una a usted con la amiga de su amiga pero sí uno que las conecta a ellas. Y así siguiendo.

Depende de qué le interese estudiar, uno podría hacer hincapié en el sexo, o la edad o la geografía.

En matemática, lo que acabo de describir en forma muy rudimentaria se llama un 'grafo': puntos distribuidos en algún lugar y segmentos que conectan algunos puntos con otros. Esos puntos pueden representar (como en este caso) personas, y los segmentos indican alguna relación entre esos puntos (en este caso, que dos personas 'se conozcan'). Pero los puntos podrían representar ciudades y la existencia de un segmento indicaría que hay una ruta que las une. Como usted advierte, este tipo de modelo permite prescindir de todo lo que puede 'hacer ruido' y concentrarse en lo que a uno le interesa estudiar.

Ahora bien, hace veinte años, es fácil imaginarse que los puntos estaban cerca —geográficamente hablando— y, por lo tanto, los segmentos tampoco iban muy lejos. Si bien existían los teléfonos, me parece muy poco probable que una persona decidiera marcar un número desconocido para conectarse con un extraño buscando establecer algún tipo de diálogo. Claramente, la irrupción de internet modificó todos estos paradigmas. Uno sigue estando fuertemente conectado con un pequeño grupo de familiares, amigos o vecinos, pero emergieron puntos en el grafo que están mucho más separados, distantes, y con quienes virtualmente no teníamos ningún tipo de conexión previa. Eso se refleja en el estudio de Ortega y Hergovich, y se lo debemos a la aparición de conexiones vía internet y, por supuesto, a múltiples aplicaciones que han surgido en el último tiempo y que sirven justamente para encontrar pareja.

La vida cambió tanto que, en este caso, las personas que se conectan por internet suelen ser totalmente extrañas. “Cuando la gente se conecta de esta forma, se establecen lazos que antes eran completamente inexistentes. No había posibilidades de vincularse con otros subgrupos”.

Como escribí al principio, no quiero convencerla/o de que mi opinión es correcta, solo que las nuevas evidencias indican que ahora, con el advenimiento de las tecnologías digitales, y mucho más allá de todas las objeciones que comprendo y comparto, también hay un costado muy positivo, no menor. Gente que en otro momento hubiera terminado su vida en soledad, encontró compañía para siempre y, aunque sea nada más que por eso, uno dejó de depender de la ‘amiga de la amiga’ para llegar a lugares claramente inaccesibles. Negarlo es negar la realidad.

Subnota

Si se observa bien la Figura 1, una tercera parte de las personas de distinto sexo encuentra pareja usando internet, mientras entre las parejas homosexuales casi el 70% se conocieron ‘online’.

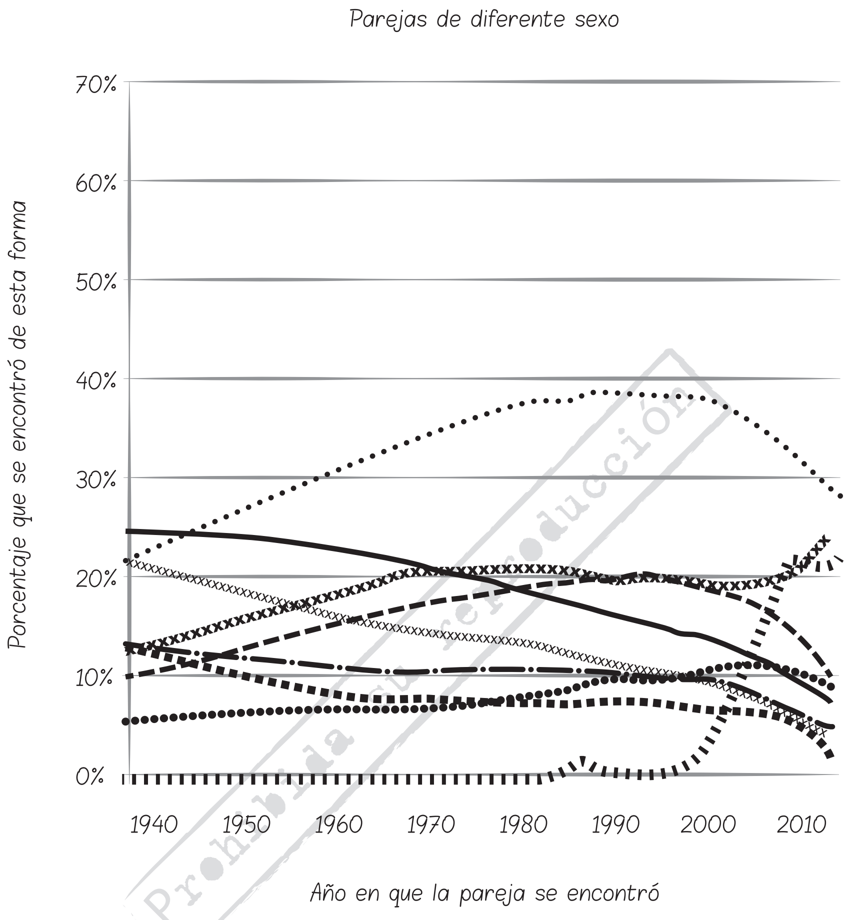
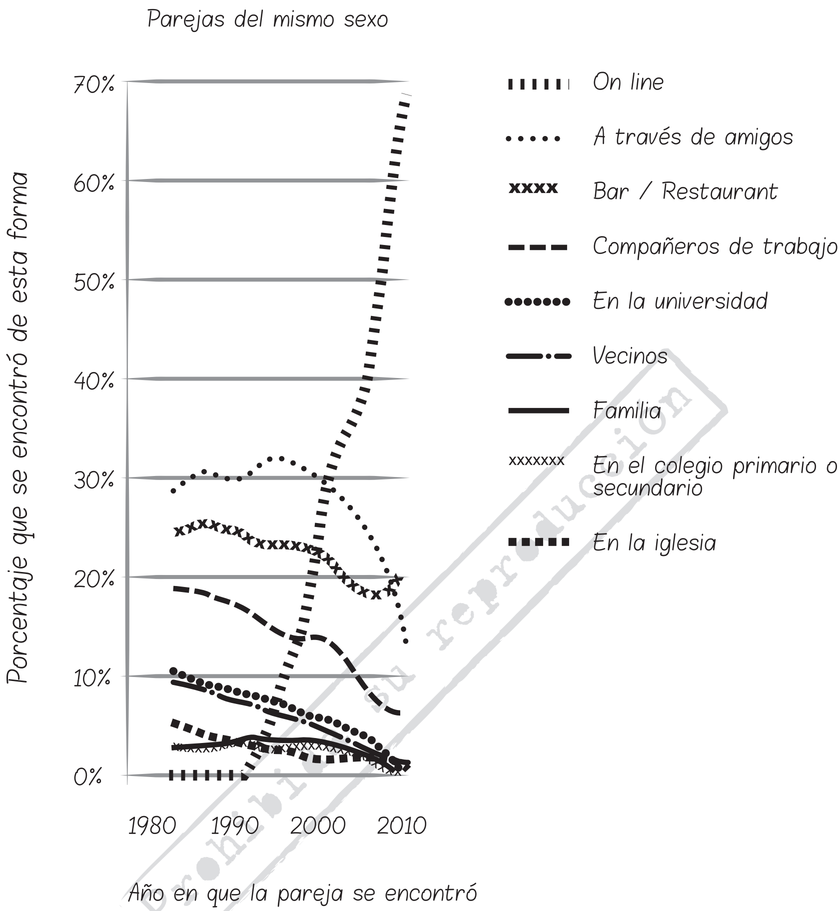


Figura 1: Cómo encontramos nuestras parejas en las últimas décadas


Parejas del mismo sexo
Porcentaje que se encontró de esta forma
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1980
1990
2000
2010
Año en que la pareja se encontró
On line
A través de amigos
xxxx
Bar / Restaurant
Compañeros de trabajo
En la universidad
Vecinos
Familia
xxxxxxx
En el colegio primario o secundario
En la iglesia

Abundancia de potencias de ocho

Corría octubre del año 2016. Recibí en ese momento un mail de Carlos Sarraute. Estábamos a punto de vernos en el mismo bar, en Buenos Aires, para mantener el mismo diálogo que lleva tantos años. Nos vemos poco en persona, pero siempre es refrescante encontrarme con él. Su pasión por ofrecer su conocimiento en bien de la sociedad es verdaderamente sobrecogedora. Basta ver la relación que tiene con sus hijos (León y Leia) para poder entender todo lo que a Carlos le pasa 'por adentro'. El respeto con el que los trata a ambos (ahora de 10 y 8 años respectivamente, y 'ahora' es junio de 2018), y la dedicación que pone para 'educarlos' en el sentido *más amplio* de la palabra. Así como lo hicieron 'mis viejos' conmigo, Carlos lo hace *con sus propios hijos*, de la misma forma, con la misma entrega. Pero para variar, me desvié.

En el mail, Carlos me contaba que a la salida del colegio, en el lugar en donde suelen encontrarse los padres que esperan a sus hijos, el padre de un amiguito de León le hizo una pregunta muy particular: "Vos, que sos matemático, ¿escuchaste hablar del Telar de la Abundancia? ¿O de la Flor de la Abundancia?". Carlos contestó que sí, pero cuando me preguntó a mí (en el mail), yo le dije que no, que no sabía nada. Entonces, me escribió un texto que quiero compartir con ustedes, y que 'le viene muy bien a este libro'.

Lo que sigue es una versión *abreviada*, pero tal como él la definió, es típica de un problema que se puede abordar en términos de la Teoría de Juegos.

Justamente acá en donde la matemática ayuda a 'modelar' y a 'entender' qué decisión conviene tomar. Sígame por acá.

- El Telar o la Flor de la Abundancia es un juego.
- Si una persona quiere *incorporarse al juego*, tiene que depositar una suma fija, digamos *mil dólares* (pero cualquier cifra funciona).
- Después, esa misma persona tiene que conseguir que otras *ocho* también ingresen en el juego.
- Si los consigue, recibe 8.000 dólares (1.000 dólares por cada persona que entró).
- Si no lo logra, pierde el dinero que aportó para entrar, o sea, los mil dólares originales.

Supongamos también que el juego funciona por rondas. En la *primera ronda*, que es el *inicio* del juego, el participante que puso los mil dólares consigue las *otras ocho personas* que también ponen mil dólares cada uno.

En la *segunda ronda*, cada una de esas ocho personas tiene que conseguir ocho más. Como usted advierte, al finalizar esta ronda ya hay $8 \times 8 = 64$ personas que participan del juego.

En la *tercera ronda*, cada una de las 64 anteriores consigue ocho más, por lo que en total, hay:

$$(8 \times 8) \times 8 = 64 \times 8 = 512 \text{ personas}$$

Ahora, voy a seguir haciendo las cuentas ronda por ronda. Todo lo que hay que hacer es ir multiplicando por ocho el número de personas que había en la ronda anterior. En resumen:

En la ronda 4, ingresan $8^3 \times 8 = 8^4 = 4.096$ personas.
En la ronda 5, ingresan $8^5 = 32.768$ personas.
En la ronda 6, ingresan $8^6 = 262.144$ personas.
En la ronda 7, ingresan $8^7 = 2.097.152$ personas.

Aquí paro. Una vez más, es fácil detectar que el número de personas ¡crece muy rápidamente! Es lo que se llama (y estoy seguro de que usted escucha muy a menudo) ¡crecimiento *exponencial*!

Si usted hace las cuentas verá que en la ronda número 7, uno necesita que ingresen más de 2 millones de personas. Como cada uno de ellos tiene que aportar mil dólares, la inversión total (para que siga el juego) debería superar los 2 mil millones de dólares. Un número impresionante.

Si usted quiere pensar el juego en términos de la población en la Argentina, el juego terminaría antes de la séptima ronda, y si uno analiza la población de la Tierra, no hay manera de que el juego llegue a la ronda número ¡once!

¿Cuál es la conclusión, entonces? Al menos hasta acá, uno deduce que el juego… ¡termina en pocas rondas! Ahora, analicemos cuál es la situación en el momento en que no se puede jugar más.

Si hemos llegado hasta la *séptima ronda*, eso significa que hay un grupo de jugadores que *ganaron dinero*. Pero también debe haber habido un grupo muy significativo de personas que *perdieron dinero*. ¿Cuántos son en cada caso?

En principio, si llegamos hasta la ronda 7, todos los que jugaron en las rondas anteriores ¡tuvieron que haber ganado! Si no, es imposible haber pasado de ronda. Calculemos primero *cuántos ganaron*: todas las personas que participaron desde la primera hasta la sexta ronda. ¿Cuántos son? ¿Y cuánto dinero consiguieron en total?

El juego empezó en lo que podríamos llamar la *ronda cero*, cuando apareció la primera persona que —supongamos— *organiza* el juego, la que *impuso las reglas*.

La primera ronda propiamente dicha tuvo 8 jugadores. La segunda, $8 \times 8 = 8^2 = 64$. La tercera, $64 \times 8 = 8^3 = 512$. La cuarta, $512 \times 8 = 8^4 = 4.096$. La quinta, $4.096 \times 8 = 8^5 = 32.768$, y la sexta, $32.768 \times 8 = 8^6 = 262.144$ personas.

¿Sumamos?

$$1 + 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + 8^6 = 299.593 \text{ personas}$$

Ahora bien, ¿cuántos *perdedores* hay? ¿Cómo hacer para estimarlos? El juego llegó hasta la ronda siete y desde allí no pudo seguir, eso significa que *todos* los que llegaron hasta allí… *¡son perdedores!* Es decir, todos los que ingresaron en la última ronda (la séptima) ¡perdieron! Supongo que usted se estará preguntando ¿cuántos son?

Vea, son muchísimos: 2.097.152 personas. En total, entre ganadores y perdedores hay (299.593 + 2.097.152) = 2.396.745.

¿Cómo hacer entonces para calcular la *probabilidad* de ganar[20]? En este caso, hay que *dividir*

$$299.593 \,/\, 2.396.754 = \boxed{\mathbf{0{,}124999}}$$

Es decir, alrededor de 0,125, ya que se trata de una aproximación. Puesto en términos de *personas*, como 1/8 = 0,125, esta

20. A esta altura del libro, supongo que no debería escribir esto porque utilicé la definición de probabilidad reiteradamente pero, lo hago igual: “Hay que *dividir* el número de ganadores por el número total de participantes (así como cuando uno quiere saber cuál es la probabilidad de sacar un número *par* en la ruleta, divide 18 —que es el total de números pares— por 37, que es el número total de números posibles)”.

probabilidad nos dice que *¡una de cada ocho personas gana, pero también que siete de cada ocho personas pierden!*

Para terminar, le propongo hacer algunas *cuentas más redondas*, para que no se olvide de los números ni de los porcentajes ¡antes que decida que *no le conviene jugar*! (salvo que le sobre el dinero y no sepa qué hacer con él).

Supongamos que cuando el juego termina, ingresaron en total 800.000 personas (para elegir números *redondos*, aunque igualmente es un número demasiado grande). Estas personas tuvieron que haber invertido 800 millones de dólares. De esas 800.000 personas, solamente ganaron 100.000, que se llevaron justamente esos 800 millones de dólares. Por el otro lado, quedan 700.000 personas que perdieron lo que pusieron, o sea, los mil dólares que invirtió cada uno ¡se esfumaron! Puesto en términos de porcentajes, el 12,5% de las personas ganó y el 87,5% de las personas perdió.

Moraleja

En Teoría de Juegos, este tipo de problemas se llaman 'Juegos de suma cero'. ¿Por qué? En el camino del juego *no se genera dinero nuevo*. El dinero de los que ganaron es el dinero de los que perdieron. Solo cambió de manos. La suma total de las ganancias tiene que ser igual a la suma total de las pérdidas.

Para terminar, lo definimos como un juego de suma cero, donde una persona apuesta mil dólares con un 12,5% de chances de ganar (ocho veces lo que apostó), y un 87,5% de chances de perder los mil dólares que invirtió.

No queda claro si quienes presentaron el juego, lo hicieron con claridad. Si los números y los cálculos estuvieron hechos en forma prístina, nadie podría hablar de *estafa*. Cuando usted entra en el casino, o cuando juega a la ruleta, sabe bien claramente cuántos números participan y qué es lo que está haciendo cuando elige *uno* de ellos. Además, usted tiene claro *qué tiene que pasar para que gane o qué tiene que pasar para que pierda*. Y también sabe que si sale *cero* (o doble cero en algunos casinos) todos los que jugaron ‘a chance’ pierden seguro. ¡Esas son reglas claras!

En el Telar de la Abundancia, esto no solo no fue así, sino que, muy por el contrario, los cálculos correspondientes nunca estuvieron claros. Quien participó, lo hizo ignorando cuáles eran o fueron sus posibilidades reales de éxito. En algún sentido, fue una verdadera estafa.

Final

Un agregado de Carlos Sarraute que me parece *muy importante*, mucho más importante que el artículo propiamente dicho:

> Pero podemos hilar más fino, y decir algo más sobre quiénes son los ganadores y los perdedores de este juego, tratando de entender la dinámica del crecimiento o difusión del juego. Dado que uno ingresa al juego por invitación, esa dinámica va a ser social.
>
> Aquí nos va servir tomar como modelo matemático (nuevamente, porque el modelo es más simple que el fenómeno real y ayuda a entenderlo) el de *difusión de información* o de una *enfermedad en una red social*.
>
> Supongamos que dentro de la población de Argentina, hay gente susceptible de entrar al juego (vulnerable en términos epidemiológicos), llamémoslo ‘el grupo V’.
>
> Obviamente hay gente que no es vulnerable, simplemente porque o bien no tiene los mil dólares para poder ingresar o porque este tipo de juego va en contra de sus principios o por cualquier otro motivo.

El grupo V es un grupo finito y acotado. Podemos pensarlo como un grafo[21] conexo, donde cada nodo es una persona y los vínculos entre nodos son vínculos sociales (ser amigos, conocidos, familiares, etc.).

El proceso de contagio empieza con un nodo, y luego se difunde a *ocho* vecinos de ese nodo, y luego a vecinos de vecinos, y así sigue su difusión por el grafo (acá llamamos 'contagio' al hecho de ingresar al juego).

Después de un tiempo, todos los nodos de V se contagiaron, y el proceso termina. Como ya calculamos, al terminar el proceso queda también definido quiénes pertenecen al 12,5% de 'ganadores' y quienes al 87,5% de 'perdedores'.

Lo que sigue son reflexiones mías sobre el proceso, basadas en lo que sé de procesos de difusión en grafos.

¿Quiénes son los ganadores?

- En primer lugar, los que ingresan primero al juego. El orden de llegada es fundamental.
- Otro factor (que de hecho influye muchísimo en la dinámica de contagio) es la centralidad de los nodos. Los nodos más centrales son los nodos que tienen más contactos (un grado más alto en términos de grafos) y cuyos contactos a su vez también tienen grado alto.
- Dicho en otras palabras, son las personas que tienen muchos amigos y conocidos, y cuyos amigos también tienen muchos amigos.
- Los nodos más centrales tienen mayor probabilidad de ser contagiados antes. Y en esta enfermedad eso es bueno, dado que los que se contagian antes tiene más chances de ganar.

21. En matemática, un grafo es un conjunto de vértices a los que también se llama 'nodos', que están unidos por segmentos (llamadas 'aristas') que permiten representar relaciones 'binarias' entre los vértices.

- También importa la capacidad de convencer a otros. Alguien con capacidad de persuasión (mediante mensajes de WhatsApp, por ejemplo, o en reuniones tomando mate, o en la técnica de influencia social que quiera usar) va a lograr más rápidamente convencer a otros ocho y posicionarse en el grupo ganador. Pensando en la dinámica de contagio, es como una carrera por llegar primero a las personas vulnerables y contagiarlas.
- En este juego otro factor que influye es el nivel socioeconómico. La decisión de apostar mil dólares es más fácil de tomar para alguien que tiene mucha plata que para alguien de bajos recursos. Por lo tanto, la difusión va a ser más rápida para nodos que tienen amigos/contactos de nivel socioeconómico alto (y de nuevo, esa velocidad influye directamente en las chances de ganar).

Por contraposición, ¿quiénes pierden?

- Las personas que entran al juego más tarde.
- Las personas con menos contactos. Por ejemplo, si alguien ingresa al juego y luego se da cuenta de que no tiene ocho conocidos susceptibles de entrar, directamente perdió.
- Las personas con menos capacidad de persuasión.
- Las personas de nivel socioeconómico más bajo, que van a tener mayor dificultad para encontrar ocho conocidos susceptibles de apostar.

El resultado final del juego es que la plata cambia de manos. La dinámica de difusión del juego hace que, en promedio, la plata se transfiera desde personas con menos recursos (económicos, cantidad de contactos, capacidad de influencia) hacia personas con mayores recursos.

Como fenómeno social, es muy interesante, y creo que muestra el valor del 'capital social' de las personas: para gente con muchos contactos y capacidad de influenciar sus contactos, la probabilidad de ganar el juego es mucho más alta.

Y creo que ahí está la 'magia' y el atractivo del Telar de la Abundancia. Para alguien con mucha influencia social, se puede ganar 7.000 dólares (o el monto que esté en juego) con poco esfuerzo. ¡Y eso es algo muy poderoso!

Pero un momento: ¡falta un último aspecto, y es la cuestión ética!

La invitación para ingresar al Telar de la Abundancia viene planteada en términos de 'empoderamiento femenino', 'mujeres que confían y se ayudan', 'ayudar a otras a cumplir sus sueños'. Un ejemplo de mensaje de invitación: 'Confía, da y libérate, mujer' (http://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-308003-2016-08-29.html).

Un primer punto que se esconde en todo el proceso de captación es el hecho de que el 87,5% de las mujeres que ingresan al Telar de la Abundancia van a perder su dinero. Para esconderlo, se necesita toda una serie de mentiras y llamados a 'confiar' y 'confiar'. Acá está la estafa.

El segundo punto, y que me da más bronca, es todo el abuso del discurso feminista y el llamado a la solidaridad femenina, cuando en realidad el resultado del Telar es la transferencia de plata desde la periferia del grafo hacia el centro del grafo (que son las mujeres con más recursos, más conectadas y con mayor capacidad de influenciar a otras). Donde las que ganan terminan abusando de la confianza de las que pierden (y se quedan con su plata…).

En fin, si tienen conocid@s que están dudando si entrar o no en este juego, por favor, ¡explíquenles el tema de las potencias de ocho!

Humor

El que sigue me pareció un chiste excelente. Sí, ya sé, cuando uno *anticipa* que un chiste (o una película, libro o cualquier cosa equivalente) será *excelente*, usted sabe lo que va a pasar: ¡solo me parece excelente a mí! Pensará (y no la/lo culpo): "¿*Esto* le pareció excelente?".

Pues sí, me pareció *muy* bueno. Acá, los pasos a seguir:

1) Piense un número cualquiera entre 0 y 20.
2) Súmele 32.
3) Multiplíquelo por 2.
4) Réstele 1.
5) Ahora, cierre los ojos. Qué oscuro que parece todo, ¿no?

Messi y Ronaldo

Los dos tratan de evitarse, pero hay momentos en los que no pueden, ya sea porque están en una misma cancha (el Camp Nou en Barcelona, o el Allianz Stadium, donde la Juventus juega sus partidos de 'local') o porque son candidatos a recibir el trofeo anual que se otorga al Mejor Jugador del Mundo. Pero más allá de circunstancias de este tipo, han coincidido muy poco geográfica y temporalmente.

Sin embargo, hace unos días se encontraron. Y allí se produjo la siguiente situación que no ha tenido la trascendencia que merecía.

A cada uno le dieron un juego de cinco cartas numeradas del 1 al 5. Les vendaron los ojos y les pidieron que seleccionaran una cualquiera de las cinco que tenían en la mano y las pusieran arriba de una mesa.

La persona que estaba con ellos hizo la *suma* de los dos números y se la comunicó únicamente a Messi. Después, *multiplicó* los números y le dijo el resultado solamente a Ronaldo.

El señor guardó las dos cartas en un bolsillo evitando que los jugadores pudieran verlas y les pidió también que le entregaran las cuatro que le quedaban a cada uno y las escondió en un cajón.

Allí fue donde se produjo el siguiente diálogo:

Ronaldo: Con el número que escuché yo, no puedo saber cuáles son las dos cartas.

Messi: ¡Ah, qué curioso! Si vos no podés deducirlos, entonces yo *sí* sé cuáles fueron los dos números de las cartas que elegimos.

Ronaldo: Tú sabrás, pero yo sigo sin saber cuáles son.

Messi: Dejame que te ayude: el número que me dijeron a mí es mayor que el que te dijeron a vos.

Ronaldo: Gracias. Ahora yo *también* sé cuáles fueron los números.

Pregunta: ¿qué números eligieron? Fíjese que no le pido que diga qué carta eligió cada uno, sino que solo importa saber qué números aparecieron arriba de la mesa.

Ahora le toca a usted.

Le propongo que siga mi argumento, pero en realidad, a medida que va leyendo, si detecta un posible camino, abandone la lectura y siga usted por su cuenta. Ya verá por qué escribo estas líneas.

Tanto Messi como Ronaldo tuvieron que elegir un número entre 1 y 5. Quiero escribir cuáles pudieron haber sido las posibles sumas y los posibles productos de los dos números.

Primero, analicemos las posibles *sumas*. ¿Qué números pudo haber escuchado Messi? Debió ser *uno* de estos números:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

¿Por qué? ¿Por qué no pudo haber escuchado el número 1? Como cada uno tuvo que haber aportado un número estrictamente positivo a la suma y el más chico que tenían era justamente 1, la suma de los dos no puede ser más chica que 2. Con el mismo argumento es fácil convencerse de que el *máximo* número que pudo haber escuchado Messi es 10, ya que los dos más grandes que tenía cada uno eran 5.

Los demás números posibles (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) son combinaciones que me imagino que usted puede deducir por su lado.

Ahora, acompáñeme con los posibles *productos*. Fíjese si está de acuerdo conmigo. Los números 1, 2, 3, 4, 5 se pueden obtener fácilmente. El 6 aparece como producto de 2 y 3. Pero acá quiero detenerme un instante y preguntarle: ¿se puede obtener el 7?

La respuesta es *no*, no se puede. Sin embargo, sí hay formas de obtener 8, 9, 10. ¿Y el 11? ¿Se puede? No, tampoco. ¿Y el 12? Sí: 3×4.

Sigo: no se pueden obtener 13 ni 14, pero sí 15 (3×5) y 16 (4×4). Luego no se pueden 17, 18, 19, pero sí 20 (4×5). ¿Cuál sigue? (¿no quiere pensar usted por su lado?). El último, el único que falta es el 25, ya que $25 = 5 \times 5$, o sea, si los dos eligieron el número más grande que tenían en las cartas.

En resumen, los posibles productos son:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25.$$

¿Cómo seguir ahora? Piense que Ronaldo empezó el diálogo diciendo que él *no podía saber*. ¿Qué tuvo que haber pasado para que él *no pudiera* deducir los números?

Fíjese que si Ronaldo hubiera escuchado (por ejemplo) el número 1, él habría sabido instantáneamente que los dos habían elegido el 1. Si hubiera escuchado el 20, que los números fueron 4 y 5. Pero dijo que *no podía saber*. ¿Qué tuvo que haber pasado entonces? El portugués tuvo que haber escuchado algún número que se puede obtener de varias formas, algo que no sucede ni con el 1 ni con el 20.

¿Cuáles son esos números? Vayamos analizando uno por uno.

$$1 = 1 \times 1$$
$$2 = 1 \times 2$$
$$3 = 1 \times 3$$
$$4 = 2 \times 2 \text{ y } 1 \times 4$$

Y acá me quiero detener un momento. Si Ronaldo hubiera escuchado 1, 2 ó 3, él sabría qué números había arriba de la mesa. Si escuchó 4, no, porque podrían ser (2 y 2) o (1 y 4).

Sigamos.

$$5 = 1 \times 5$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$8 = 2 \times 4$$
$$9 = 3 \times 3$$
$$10 = 2 \times 5$$
$$12 = 3 \times 4$$
$$15 = 3 \times 5$$
$$16 = 4 \times 4$$
$$25 = 5 \times 5$$

Es decir, ¡el único número que pudo haber escuchado Ronaldo fue el 4! Con cualquier otro, habría podido deducir cuáles fueron los que aparecían arriba de la mesa. ¿Qué pasó después?

Cuando Ronaldo dijo que él no podía saber, Messi supo que Ronaldo escuchó un 4, y que los números que pudieron haber salido eran (2 y 2) o (1 y 4).

Pero me imagino que usted debe estar pensando: ¡todavía no usamos el dato que le dieron a Messi! Cuando él dice en su primera observación: "Ah, si vos no sabés entonces yo *sí* sé", es porque no solo dedujo que Ronaldo escuchó 4, sino que con el número que escuchó (Messi), él podía decidir lo que Ronaldo no podía. Si él había escuchado 4, es porque los dos habían elegido un 2, pero si él escuchó 5, es porque los números tuvieron que haber sido (1 y 4). En cualquiera de los dos casos Messi puede deducir cuáles fueron los números.

Hasta acá, se entiende perfectamente por qué Messi dijo que él podía deducir cuáles eran los dos números. Como Ronaldo dice que él todavía no sabe, Messi le ofrece su ayuda: "El número que me dijeron a mí es mayor que el que te dijeron a vos". Como Ronaldo sabe que Messi solo pudo haber escuchado 4 o 5, y Messi le dice que el número de él es más grande, eso termina por definir la situación y le indica a Ronaldo que los números fueron 1 y 4, y por eso Messi escuchó un número mayor que él.

Es decir, en ese momento, los dos saben lo que pasó: uno de los dos eligió el 1 y el otro, el 4. No sabemos cuál aportó cada uno, pero sí que los números *tuvieron que haber sido esos dos*.

Listo. El problema concluye acá. Pero me interesa hacer una última observación (aunque me imagino que no se le escapa, igualmente quiero escribirla). El diálogo que figura en este texto es ficticio: es un invento mío. Al menos, hasta donde yo sé. Lo más importante es que el problema no solo no es ficticio sino que fue incluido en un examen para niñas/os menores de 11 años en una prueba de calificación que se hizo en Singapur. Pero de ese tema prefiero ocuparme en otro momento.

A partir de ahora, termina la cadena nacional. Cada una de las emisoras continúa con sus respectivos programas.

Mientes, mientes

Tengo un amigo norteamericano, Gordon Fernstron, que 'vive' proponiéndome problemas de lógica. Es una usina generadora de situaciones para pensar. Me abruma su capacidad creativa. Siento un *compromiso moral* con él: si publicara *todos* los desafíos lógicos que me sugiere, debería escribir un libro que solamente contemplara problemas de ese tipo.

De todas formas, quiero hacer un poco de justicia y exhibir alguno de ellos. Acá va. Es un problema muy sencillo pero muy entretenido para pensar.

Suponga que hay una persona, que voy a llamar Deborah, que miente los lunes, miércoles y viernes, pero dice la verdad los restantes días de la semana.

Un día, me encuentro con ella por la calle y tenemos la siguiente conversación:

—Hola, Deborah —le digo—. ¿Qué día es hoy?

—Viernes —me responde ella.

—¿Y mañana? ¿Qué día va a ser?

—Martes.

¿Qué día de la semana tuvimos el diálogo? ¿Se puede deducir? O mejor dicho, ¿puede deducirlo usted?

Respuesta

Por supuesto, hay muchísimas formas de abordar el problema. Voy a proponer acá *una* de ellas. Le sugiero que analicemos juntos qué día de la semana se pudo haber producido el diálogo, recorriendo día por día exhaustivamente y fijándonos si la conversación contradice alguna de las hipótesis.

1) ¿Pudo haber sido un sábado? No, porque los sábados ella tiene que decir la verdad. Entonces, la primera pregunta no la pudo haber contestado diciendo que era viernes: debió haber dicho *sábado*. Luego, queda descartado que fuera un sábado.
2) ¿Pudo haber sido un domingo? Tampoco, porque los domingos ella *también* tiene que decir la verdad. Luego, no pudo haberme contestado viernes. Descartado el domingo.
3) ¿Pudo haber sido un lunes? Como ella *miente* los lunes, al decirme *viernes* estaría cumpliendo con las hipótesis del problema: me está mintiendo. Pero el problema surgiría con la segunda respuesta. Cuando yo le pregunto ¿qué día va a ser mañana?, si fuera un día lunes cuando le hago la pregunta, ella no puede contestar que es martes, porque debería mentir. Al haber contestado *martes*, me estaría diciendo la verdad. Esto permite descartar al día lunes.
4) ¿Pudo haber sido un martes? No, porque ella, los martes tiene que decir la verdad. Entonces, si contestó *viernes*, estaría mintiendo. Descartado el martes también.
5) ¿Pudo haber sido un miércoles? Los miércoles ella tiene que mentir. Luego, al haberme contestado que el día de hoy es martes, estaría mintiendo y eso estaría bien. Veamos qué aporta la segunda respuesta. Cuando yo le pregunto:

"¿Qué día va a ser mañana?", ella lo que *seguro no puede contestar es jueves*, porque entonces me estaría diciendo la verdad. Como contestó martes, esto significa que cumple con las hipótesis. Moraleja: ¡la conversación pudo haber tenido lugar un día miércoles!

Sigamos ahora analizando los dos días que faltan, jueves y viernes.

6) ¿Pudo haber sido un jueves? No, porque ese día ella tiene que decir la verdad, y por lo tanto no me pudo haber contestado viernes. Descartado el jueves.
7) Por último, ¿pudo haber sido un viernes? Estos días ella miente: luego, al contestarme *viernes* a la primera pregunta, estaría diciendo la verdad. Luego, queda descartada la posibilidad de que el diálogo lo hubiéramos mantenido un viernes.

La conversación tuvo lugar un día miércoles, ya que de haber ocurrido *cualquier otro día de la semana*, estaría contradiciendo alguna de las hipótesis que planteamos originalmente.

Trilogía: la Dama y el Tigre

Los siguientes tres problemas son similares. Tienen —casi— las mismas reglas. Permítase pensarlos sin apuro. Es decir, si no tiene tiempo ahora, guarde los enunciados y entreténgase con ellos en algún futuro no necesariamente inmediato. De hecho, la idea de aprender a coexistir con un problema en la cabeza es algo fascinante. En el camino, sirve también para ver cuán capaz es usted de frustrarse y aceptar no tener todo 'ya y ahora', y tolerar no ofrecerse una 'gratificación inmediata'. Estoy fuertemente convencido de que aprender a frustrarse es una manera de exhibir madurez.

Obviamente, es muy poco probable (para no escribir *imposible*) que usted se enfrente con ninguna de las tres situaciones que voy a plantear. Sin embargo, no va a 'lastimarla/o' adquirir herramientas intelectuales que permitan enfrentar la vida cotidiana. En fin, es 'mi' idea. Usted decide. Acá van.

Los tres problemas tienen una parte común en el planteo y es lo que quiero detallar primero.

Hay un preso (al que voy a llamar Alexis) que quiere recuperar su libertad. En el tiempo que lleva en prisión, se dedicó a entrenarse en *lógica*. El director de la cárcel le ofrece la siguiente alternativa. Lo pondrá delante de dos puertas, cada una de ellas conduce a una habitación distinta que no están interconectadas. En cada habitación puede haber o bien una dama o bien un tigre pero *no pueden estar vacías*.

Eso sí: podría pasar que hubiera una dama en cada una o un tigre en cada una, o una dama en una y un tigre en la otra, cubriendo así todas las posibilidades.

Pero hay más: en cada una de las puertas hay pegado un cartel que contiene una frase.

La trilogía de problemas consiste en variar el contenido de las frases y lo que el director le dice sobre la veracidad (o falsedad) de cada una de ellas. El objetivo de Alexis es determinar cuál de las dos puertas seleccionar, optando —cuando le sea posible— quedarse con una de las damas, si es que la hay, y de esa forma ganarse el camino a la libertad. Si en cada una de las habitaciones hubiera un tigre, entonces Alexis podrá decir que no quiere abrir ninguna puerta. Si puede fundamentar esta decisión, *también ganaría su libertad*. Acá voy.

Primer caso

Cartel en la puerta 1: "En esta habitación hay una dama y en la otra habitación hay un tigre".

Cartel en la puerta 2: "En una de las habitaciones hay una dama y en una de las habitaciones hay un tigre".

El director de la cárcel le dice a Alexis que *solamente* <u>*una*</u> de las frases es cierta y la otra es falsa.

¿Qué puerta tendría que abrir Alexis?

Le sugiero que lo piense usted y, eventualmente, me siga en la solución que voy a escribir a continuación.

Solución del primer caso

Alexis sabe que uno de los dos carteles dice la verdad. Supongamos que fuera el primero. Alexis sabría no solo *dónde* hay una dama sino que *¡hay una dama en una de las habitaciones!*

Lo curioso es que si esto es cierto, entonces el *otro cartel*, el que aparece pegado en la puerta 2, tiene que resultar cierto también. ¿Por qué? Es que al ser verdadera la frase 1, Alexis deduce que no hay ni dos damas ni dos tigres. Pero eso es justamente lo que dice la frase 2, ¡que debería ser falsa! Luego, suponer que la frase 1 es verdadera implica que la segunda también, y eso contradice las reglas. En consecuencia, la frase 1 no puede ser cierta, y esto obliga a que la segunda lo sea. Si la segunda es cierta, eso permite deducir que hay una dama y un tigre en cada una de las habitaciones. Como la frase 1 *tiene que ser falsa* entonces la dama no puede estar en la primera habitación y, por lo tanto, la dama está en la segunda. Y listo. Eso resuelve el problema en este caso.

Segundo caso

Cartel en la puerta 1: “Al menos una de las dos habitaciones contiene una dama”.

Cartel en la puerta 2: “En la otra habitación hay un tigre”.

Ahora el director de la cárcel le dice a Alexis: “Las frases que aparecen pegadas en las dos puertas son o bien las dos verdaderas o bien las dos falsas”.

Con estos datos nuevos, ¿qué habitación tiene que elegir Alexis? ¿Qué le sugeriría usted que haga?

Solución del segundo caso

Supongamos que la frase 2 fuera falsa. Eso quiere decir que en la habitación uno hay una dama, y esto hace que la frase de la puerta 1 sea verdadera. O sea, no puede ser que sean ambas frases sean falsas, ¡porque si la frase 2 es falsa, la 1 es verdadera!

En consecuencia, las dos frases *tienen que ser verdaderas*.

Moraleja: en la habitación uno hay un tigre y en la dos hay una dama.

Tercer caso

Cartel en la puerta 1: "O bien hay un tigre en esta habitación o una dama en la otra".

Cartel en la puerta 2: "En la otra habitación hay una dama".

Como en el segundo caso, o bien las dos frases verdaderas o bien las dos son falsas. Y una observación *extra* que no siempre es tenida en cuenta: fíjese que la frase 1 dice que o bien hay un tigre en la habitación 1 o una dama en la habitación 2, pero uno tiene que entender que puede que las dos afirmaciones sean ciertas al mismo tiempo; es decir, ¡no son excluyentes!

Ahora voy a cambiar las preguntas: a) ¿La primera habitación contiene una dama o un tigre?; y b) ¿Qué hay en la segunda habitación?

Solución del tercer caso

Supongamos que las dos frases son falsas. Para que la frase 1 sea falsa, tiene que ocurrir que las dos posibilidades que se afirman allí sean falsas. O sea, no hay un tigre en la habitación 1 (tiene que haber una dama) ni puede haber una dama en la habitación 2 (tiene que haber un tigre).

O sea, de la falsedad de la frase 1 se deduce:

Habitación 1: dama
Habitación 2: tigre

Como estamos suponiendo que ambas frases son falsas, del hecho de que la frase 2 *también sea falsa* deducimos que en la habitación 1 tiene que haber un tigre.

Pero esto no puede ser posible, porque recién vimos que en la habitación 1 debe haber una dama.

La moraleja es que *no pueden ser ambas frases falsas*.

Veamos ahora qué se deduce si ambas frases son verdaderas. Del hecho de que la frase 2 sea verdadera, se deduce que en la habitación 1 tiene que haber una dama. Pero como estamos suponiendo que la frase 1 *también* es cierta y ya habríamos deducido que hay una dama en la habitación 1, entonces tiene que ser cierto que en la habitación dos *también* debe haber una dama.

En consecuencia, en este caso particular, descubrimos que hay una dama en cada una de las dos habitaciones (y no hay tigres).

Conclusión

No creo que uno tenga que enfrentarse en la vida con ninguno de estos problemas, ni damas, ni tigres, ni puertas con carteles ni nada. Pero *sí* estoy convencido de que imaginar distintos escenarios posibles respetando 'las reglas del juego' *sí* resulta útil e importante. De hecho, vivimos (o debiéramos vivir) optando ante distintas posibilidades todo el tiempo, ¿no?

Letras por números: *dos* más *dos* es igual a *tres*

Tenemos una suma extraña, que no parece ser cierta:

$$\begin{array}{r} \text{DOS} \\ +\ \text{DOS} \\ \hline \text{TRES} \end{array}$$

El problema que sigue pretende *encontrarle* un sentido a esta suma. Para hacerlo, le propongo que reemplace cada una de las letras por algún dígito, teniendo cuidado de que cada vez que aparezca esa letra, el dígito que usted le asignó sea el mismo. Por otro lado, también importa que no haya dos letras distintas a las que les corresponda el mismo dígito. Dicho esto, pensemos juntos cómo encontrar esa asignación, de manera tal que, al reemplazar las letras por los dígitos que usted eligió, se obtenga una suma que sea correcta.

- La letra S aparece repetida, y al sumarla (o multiplicarla por 2) el dígito que queda también termina en S. S no puede ser un impar (S + S es un número par) y si probamos no puede ser 2 (2 + 2 = 4), 4 (4 + 4 = 8), 6 (6 + 6 = 12) ni 8 (8 + 8 = 16). La única opción es S = 0, ya que 0 + 0 = 0.

- Como el número ‘TRES’ tiene cuatro cifras, la primera debe ser 1, ya que dos números menores o iguales a 999 no puede sumar 2000 ni un número mayor.
- Tenemos entonces T = 1.
- Esto nos dice además que ‘D’ es mayor a 5. No puede ser 5, ya que 5 + 5 = 10, y si arrastramos 1 al sumar las letras ‘O’, ‘TR’ daría 10 u 11, y como la T = 1 y la S=0, no puede ser.

Probemos ahora si hay alguna solución para D = 6, ya que queremos encontrar la solución usando el dígito más chico. Empiezo probando con valores para la letra ‘O’. Como ya usamos los números 0 y 1, empiezo con el ‘O’ = 2. Pero si la letra ‘O’ = 2, en ese caso se tendría 620 + 620 (DOS + DOS) = 1240 (TRES), lo que es una contradicción porque resultaría que R sería ***también*** igual a 2. Este caso lo podemos descartar.

Si ‘O’ = 3, tenemos 630 + 630 = 1260, que *tampoco* puede ser porque resultaría que estoy repitiendo D = E = 6.

Analicemos el caso ‘O’ = 4. Tenemos: 640 + 640 = 1280. ¿Qué sucede ahora? (¿quiere pensar usted por su cuenta?)… Sigo yo.

Este caso no ofrece ninguna contradicción. Por lo tanto, la *solución* al problema es:

DOS + DOS = TRES … 640 + 640 = 1280,
donde S = 0, T = 1, R = 2, O = 4, D = 6 y E = 8.

Alumnos sinceros y mentirosos (Primera parte)

Alrededor de la mesa circular están sentados los cuatro chicos más lieros. Se acerca un preceptor compinche y les dice: "Yo sé que algunos de ustedes o bien *siempre* dicen la verdad o bien *siempre* mienten. Díganme, ¿quién de ustedes es mentiroso?". Los cuatro chicos señalan simultáneamente al que tiene a su derecha. ¿Cuántos son mentirosos?

Como siempre, le sugiero que no lea *inmediatamente* lo que dice a continuación. Dedíquele aunque sea un minuto para pensar.

Respuesta: Dos, alternados, pero no sabemos cuáles. ¿Por qué?

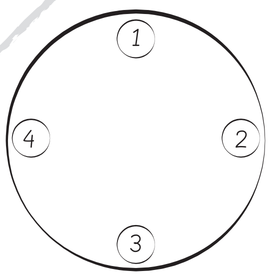


Figura 1

Los números que aparecen en la Figura 1 son los cuatro alumnos. Elija el número 1. Como usted se dará cuenta inmediatamente, es irrelevante el número con el que empezamos.

¿Qué posibilidades hay para el número 1? Que *sea* o *no sea* mentiroso.

a) Si el número 1 *es mentiroso*, al acusar de mentiroso con el dedo al número 2, eso significa que el número 2 *no es mentiroso*. Luego, cuando el 2 apunta con el dedo acusando de mentiroso al número 3, es porque el número 3 *es mentiroso*. Hasta acá, habríamos encontrado dos alumnos que son mentirosos: el 1 y el 3. Ahora, cuando el 3 apunta al 4 acusándolo de mentiroso, esto implica que el 4 *no lo es*. Conclusión: *suponiendo* que el número 1 es mentiroso, deducimos que el 2 y el 4 *no son mentirosos* mientras que el 1 y el 3 *sí lo son*.
b) Ahora voy a suponer que el número 1 *no es mentiroso*. Como hicimos en el caso anterior (y le propongo que lo haga usted por su cuenta), se deduce que el 2 *es mentiroso*, el 3 no lo es y el 4 *sí es mentiroso*. Una vez más, como conclusión: el 1 y el 3 no son mentirosos mientras que el 2 y el 4, sí lo son.

Moraleja

Empezando con cualquier alumno, el resultado es el mismo: hay dos que mienten (que aparecen en forma alternada) y dos que no (los dos restantes). El único problema es que *no sabemos cuáles son*.

Alumnos sinceros y mentirosos (Segunda parte)

Esos dos amigos siempre andan juntos. Cada uno es o bien sincero o bien mentiroso. Me encuentro con uno de ellos y me dice: “Al menos uno de nosotros es mentiroso”. ¿Qué es cada uno de ellos: sincero o mentiroso?

Es decir, ¿el amigo con el que hablé es sincero o mentiroso? ¿Y con el que *no* hablé?

Ahora le toca a usted.

Una idea para pensar

Mi conclusión es que hablé con un *sincero* y un *mentiroso*. ¿Por qué?

Si con el que hablé *no es sincero*, sería falsa su afirmación de “al menos uno de los dos es mentiroso”. ¿Qué quiere decir esto, si quien lo dijo *es mentiroso*? (¿Quiere pensar usted?). Sigo yo.

Si es *falso* que “al menos uno de los dos es mentiroso”, entonces eso significa que *los dos son sinceros*. Pero como estoy suponiendo que con la persona que hablé *no es sincera*, allí ya hay una contradicción. Moraleja: la persona con la que hablé, *es sincera*.

Por lo tanto, como él me dijo que entre los dos, hay *por lo menos uno* que es mentiroso, y él *no puede serlo*, eso fuerza a que el otro (con el que *no hablé*) sea ‘el’ mentiroso. ¡Y listo!

Un ‘problemita’ de Juan Pablo Pinasco

Juan Pablo Pinasco me alcanzó un dado, pero no es un dado *convencional* en donde las caras están numeradas del 1 al 6 y dispuestas de manera tal que las caras *opuestas* suman *siete*. ¿Se fijó usted en ese detalle? Me sorprendí el otro día cuando en una charla con un grupo de amigos, varios me dijeron que nunca prestaron atención a este hecho. No importa, sigo.

Juan Pablo me ofreció un dado con seis caras *no convencional*[22], pero me dijo que si bien no estaban numeradas de la forma usual, *seguía* siendo válido que las caras opuestas sumaban *un mismo número*. Sin dejármelo ver, apoyó el dado en la mesa, y las cinco caras que yo podía observar tenían estos números: 8, 15, 17, 24 y 28.

Allí fue donde me preguntó: ¿qué número tiene la cara que falta?

¿Usted qué piensa? ¿Qué número falta?

Respuesta

Por supuesto, leer la respuesta que sigue es privarse de un rato de entretenimiento.

22. Cuando escribí *no convencional* pensé en un dado que tuviera *números distintos* de los habituales (del 1 al 6).

El número que falta es el *cuatro*. ¿Por qué? Es que *apareo* los números (y por ende las caras opuestas) de esta forma:

$$17 + 15 = 32$$
$$24 + 8 = 32$$

Es decir, apareo los números de manera tal que 'de a dos' sumen 32. El *único* número que no tiene *compañero*, o la única *cara* que no tiene *compañera*, es la del número 28. Luego, tendría que responder esta pregunta[23]: ¿cuál será el número x de manera tal que $(28 + x) = 32$? Esto claramente nos lleva a deducir que $x = 4$.

23. Le propongo que haga *todas* las combinaciones posibles de esos cinco números (tomados de a dos) y verá que la única respuesta es la que usted está a *punto* de leer.

¿Habremos encontrado una *fórmula* para generar números primos?

A través de todos estos años, cada vez que tengo oportunidad, me ocupo en 'enfatizar' que hay algunas (pocas) cosas que se saben sobre los números primos, pero muchísimas más las que aún se ignoran. Por supuesto, *todas* son motivo de estudio, de análisis e incluso de *juegos*. Los problemas 'abiertos', o sea, aquellos cuya solución se ignora, son muchísimos y, en general, suelen ser sencillos de presentar, pero *¡muy difíciles de resolver!*

Euclides demostró hace más de 2.200 años que hay *infinitos primos*. Y la demostración no es muy complicada tampoco. Si bien se sabe que hay infinitos, no se conoce la *distribución*. Por ejemplo, uno sabe que, cada dos números, uno es impar (o par). Aunque sea un ejemplo muy sencillo, uno *no solo sabe* que hay infinitos números pares, sino que *también sabe* dónde están, cómo encontrarlos. En cambio, con los números primos eso es imposible (hasta hoy). Sabemos que hay infinitos, pero desconocemos la distribución. De hecho, si usted encuentra uno, no sabe cuánto más tiene que avanzar hasta encontrar el siguiente.

Por otro lado, mire qué problema se puede contestar y de forma bastante sencilla. ¿Existirán mil números seguidos (enteros positivos) de manera tal que *ninguno de los mil* sea un número primo?

La respuesta es sí, existen. Más aún: si usted me preguntara si hay *un millón* de números enteros consecutivos tal que *ninguno de ellos* sea un número primo, la respuesta sería la misma: ¡Sí, hay un millón de números enteros positivos de manera tal que ninguno es un número primo!

Y lo mismo se puede afirmar respecto a *segmentos de números enteros de cualquier longitud*. ¿Qué quiere decir esto? Que si usted se pregunta: ¿habrá cien mil millones de números seguidos de manera tal que ninguno sea primo?, la respuesta *también será que sí*. ¡Siempre! Y eso, a pesar que sean *infinitos*.

Pero hay *otro hecho* que es muy interesante. No solo no se sabe cómo están distribuidos, sino que además, ¡no se conoce ninguna fórmula que provea números primos!

Supongamos que uno se resigna (por ahora) a no saber cómo están distribuidos, ¿no habrá una *fórmula* que me permita *siempre* conseguir al menos algunos de esos infinitos números? Y la respuesta a esta pregunta es ¡no, no existe ninguna fórmula que provea primos!

Hace unos días, Alicia Dickenstein, me mandó una lista que empezaba así:

1) El número 31 es primo (verifíquelo usted y verá).
2) El número 331 es primo.
3) El número 3.331 es primo.
4) El número 33.331 es primo.
5) El número 333.331 es primo.
6) El número 3.333.331 es primo.
7) El número 33.333.331 es primo.

Acá, una pausa. Ante esta ‘evidencia’, uno está (o *podría* estar) tentado de deducir: ¡hemos encontrado una fórmula que ‘produce' números primos! ¡No los dará todos, pero al menos tendremos infinitos primos si la seguimos usando! Si esto fuera así, entonces a medida que uno va agregando números 'tres' al principio, y deja el número 'uno' al final, los números que va obteniendo deberían ser todos primos. ¡Esa sería la fórmula! Sin embargo, muy rápidamente, sucede lo que no querríamos que pase:

El número 333.333.331 *no es primo* porque

$$333.333.331 = 17 \times 19.607.843$$

¡Una verdadera lástima, pero así es la vida!

¿Quién tiene la probabilidad mayor de elegir un número ganador?

En múltiples situaciones de la vida cotidiana, uno necesita tomar una decisión y se siente incómodo porque, o bien no tiene todos los datos que necesitaría o bien los tiene pero no carece del *tiempo* suficiente para poder evaluarlos.

Llegado a ese punto, no hay más alternativa que sentirse 'forzado' a sacar conclusiones basándose en la *intuición*. Por supuesto, no hay ningún problema en hacerlo, pero ¿cómo hacemos para saber que intuimos en forma acertada? O en todo caso, ¿cómo hace uno para *confiar* en su intuición? ¿Funcionará bien? ¿En qué casos sí y en qué casos no?

El ejemplo que sigue le servirá para *testearse* sin necesidad de que haya nadie que la/lo observe. Es usted y su soledad. El problema es sencillo y lo que le propongo es que trate de sacar su conclusión en dos etapas:

1) Piense qué es lo que le 'parece' que pasa y 'arriesgue' una respuesta basándose exclusivamente en su intuición.
2) Después, intente resolver el problema por su cuenta y compare ambos resultados: lo que intuyó y lo que pasa en realidad.

Ahora sí, este es el problema.

Supongamos que en una bolsa A están escritos, en papeles diferentes, los primeros cinco números naturales 1, 2, 3, 4, 5.

Por otro lado, hay otra bolsa B que contiene diez papeles diferentes en donde figuran los diez primeros números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ahora, suponga que usted está frente a dos personas: por conveniencia, los voy a llamar Laura y Daniel. Cada uno deberá hacer lo siguiente:

> Laura elige (sin mirar) dos números distintos de la bolsa A y los *suma*.
> Daniel elige (también sin mirar) un solo número de la bolsa B.

Pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que el número que eligió Daniel sea *mayor* que la *suma* de los dos números que eligió Laura?

¿Qué es lo que le indica *su* intuición? No se preocupe por el resultado final, simplemente evalúe lo que le parece que pasa. ¿Qué será más probable? ¿Que Daniel haya elegido un número más grande que la suma de los dos que eligió Laura o no?

Ahora le toca a usted.

Ideas para encontrar la respuesta

No sé qué fue lo que intuyó usted, pero quiero acercarle algunas ideas para pensar.

En principio, voy a escribir una lista de los posibles resultados que pudo haber obtenido Laura después de haber sacado los dos números de la bolsa A. Eso va a depender de qué par de números haya elegido. Acá están todos los posibles pares (y sus sumas):

$$
\begin{aligned}
1 + 2 &= 3\\
1 + 3 &= 4\\
1 + 4 &= 5\\
1 + 5 &= 6\\
2 + 3 &= 5\\
2 + 4 &= 6\\
2 + 5 &= 7\\
3 + 4 &= 7\\
3 + 5 &= 8\\
4 + 5 &= 9
\end{aligned}
$$

En total entonces hay *diez* posibles sumas. Le pido que preste atención a un detalle: si bien hay una única forma en la que Laura pudo haber elegido números que sumaran 3, 4, 8 o 9, hay dos formas de obtener *cinco*, con los pares (1, 4) o (2, 3); también hay dos formas de obtener una suma *seis*, con los pares (2, 4) o (1, 5); y, por último, hay dos formas de obtener *siete*, con los pares (2, 5) o (3, 4).

¿Por qué separo este hecho? Por ejemplo, si Daniel elige el número 8, hay *únicamente* dos pares que Laura hubiera podido elegir para que él no gane (¿quiere pensarlos usted?). Fíjese que la *única forma* de que *no* gane Daniel es que Laura haya elegido el par (4, 5) —con el que gana ella— o con el par (3, 5) —habría empate—.

A partir de este pinto, le voy a proponer dos formas de abordar el problema: una manual, simplemente contando e inspeccionando; la otra, usando un ‘poquito’ nada más de la Teoría de Probabilidades. Usted elija la suya. Si no, revise las que le ofrezco a continuación y vea si la/lo satisface alguna más que otra.

Primera forma

	Laura	1,2=3	1,3=4	1,4=5	1,5=6	2,3=5	2,4=6	2,5=7	3,4=7	3,5=8	4,5=9	
Daniel												
10		o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	10
9		o	o	o	o	o	o	o	o	o		9
8		o	o	o	o	o	o	o	o			8
7		o	o	o	o	o	o					6
6		o	o	o		o						4
5		o	o									2
4		o										1
3												
2												
1												40
		7	6	5	4	5	4	3	3	2	1	40

Figura 1

Luego de mirar la Figura 1, la deducción es inmediata: Daniel gana en el 40% de los casos, solamente. Una pregunta: antes de hacer este análisis, ¿a usted no le parecía que Daniel tendría más que un 40% de posibilidades?

Segunda forma

Ahora bien, antes de avanzar tengo una pregunta para hacerle: ¿cuál es la probabilidad que Daniel elija *cualquier* número de los diez que hay en la bolsa B?

Evidentemente no hay ningún número 'privilegiado', *todos* tienen la misma probabilidad de salir (o de ser elegidos). Moraleja: la probabilidad de que Daniel elija *cualquier número* es 1/10.

Ahora analicemos juntos qué sucedería con cada elección posible de Daniel.

a) Si Daniel elige el número 10, *gana seguro*.

b) Si eligiera el número *nueve*, no le garantiza que va a ganar, porque Laura pudo haber elegido el par (4, 5). Es decir, como Laura tiene diez posibles pares para elegir, *únicamente* si eligiera el (4, 5), Daniel no le ganaría. Si Laura eligiera cualquier otro de los nueve pares restantes, ganaría Daniel. O sea, Daniel *gana en nueve de las diez posibles elecciones* de Laura.

c) Si Daniel eligiera el número *ocho*, ¿en cuántos casos ganaría? Tiene que garantizarse que Laura no haya elegido los pares (4, 5) o (3, 5). O sea, *Daniel no gana en ocho* de las *posibles elecciones* de Laura.

d) Si Daniel eligiera el número *siete*, ¿qué le parece a usted que pasaría? ¿En qué casos estaría seguro de ganar? Fíjese que Daniel no ganaría si Laura eligiera alguno de estos cuatro pares: (4, 5) o (3, 5) o (2, 5) o (3, 4). Ahora, *Daniel gana en las otras seis posibles elecciones* de Laura.

e) ¿Y si Daniel extrajera el *seis*? ¿Qué pares tendría que haber elegido Laura para que Daniel ganara igual? Fíjese que si Laura tuviera en la mano alguno de los pares del caso anterior (4, 5) o (3, 5) o (2, 5) o (3, 4), ahora habría que agregar (2, 4) y (1, 5). Si Laura hubiera extraído cualquiera de estos seis pares, Daniel no ganaría. Luego, *Daniel tiene únicamente cuatro casos a favor*.

f) Voy más rápido. Si Daniel eligiera el número *cinco*, ¿qué pasaría? Daniel ganaría *únicamente* si Laura eligió estos dos pares: (1, 2) o (1, 3). En cualquier otra circunstancia, o bien gana Laura o empatan.

g) Si Daniel eligiera el número *cuatro*, solamente *ganaría en un caso*: cuando Laura optara por el par (1, 2).

h) Finalmente, si Daniel eligiera el número *tres*, no podría ganar nunca ya que el número mínimo que Laura podría sumar es *tres*. Asimismo, si Daniel eligiera el dos o el uno: *¡no puede ganar nunca!*

¿Cómo terminamos de contestar el problema? Ahora necesitamos 'juntar' todos los datos y ver qué deducimos. Para eso voy a hacer lo siguiente. Como escribí antes, la probabilidad de que Daniel elija cualquier número es siempre la misma: 1/10, pero con cada número que elija, la probabilidad de ganar es diferente, porque depende de lo que eligió Laura.

Quiero convencerla/o primero de cómo se pueden calcular estas probabilidades. Para eso, voy a ir sumando las probabilidades parciales dependiendo del número que haya elegido Daniel.

1) Si Daniel elige el 10, gana seguro. Pero hay 1/10 de probabilidad de que elija el 10. Entonces, **1/10** es el primer número que hay que incluir en la suma.
2) Si Daniel elige el 9, gana con 9 de los 10 pares que puede elegir Laura. Entonces, tiene 1/10 de probabilidad de elegir el 9 *multiplicado* por la probabilidad de que Laura haya elegido uno de esos 9 pares. Conclusión: en este caso la probabilidad es **1/10 × 9/10**.
3) Si Daniel elige el 8, gana con 8 de los 10 pares que puede elegir Laura. Entonces, como antes, tiene 1/10 de probabilidad de elegir 8 *multiplicado* por la probabilidad de que Laura haya elegido uno de esos 8 pares. Conclusión: en este caso, la probabilidad es **1/10 × 8/10**.
4) Si Daniel elige el 7, gana con 6 de los 10 pares que puede elegir Laura. Entonces, como antes, tiene 1/10 de probabilidad de elegir 7 *multiplicado* por la probabilidad de que Laura haya elegido uno de esos 6 pares. Conclusión: en este caso, la probabilidad es **1/10 × 6/10**.

5) Ahora avanzo un poco más rápido. Si Daniel eligió el 6, gana con 4 de los 10 pares, y la probabilidad entonces es $\mathbf{1/10 \times 4/10}$.
6) Si Daniel eligió el 5, gana con 2 de los pares de Laura únicamente. Luego, la probabilidad es $\mathbf{1/10 \times 2/10}$.
7) Si eligió el 4, gana solamente con 1 par elegido por Laura: (1, 2). Luego, la probabilidad es $\mathbf{1/10 \times 1/10}$.

¡Y listo! Porque en cualquier otro caso, con los otros tres números que hubiera podido elegir Daniel (3, 2, 1), no podría ganar. Luego, en esos casos, la probabilidad es *nula*.

Sumando todo, obtenemos:

$$1/10 + 1/10 \times 9/10 + 1/10 \times 8/10 + 1/10 \times 6/10 + 1/10 \times 4/10 + 1/10 \times 2/10 + 1/10 \times 1/10 = 1/10 \times (1 + 9/10 + 8/10 + 6/10 + 4/10 + 2/10 + 1/10) = 1/10 \times (10 + 9 + 8 + 6 + 4 + 2 + 1) / 10 = 4/10$$

En consecuencia hemos descubierto que Daniel tiene 4/10 de probabilidad de ganarle a Laura, o sea, un 40% de posibilidades. Parecían más, ¿no es así?

Como escribí antes, no sé (ni puedo saber) qué fue lo que intuyó usted. Lo que sí puedo decirle es que yo creí que Daniel tenía más posibilidades que Laura y, sin embargo, ¡no es así!

Pero, como todo lo que tiene que ver con la matemática, ¡la propia intuición se 'entrena'! Lo que hoy parece antiintuitivo o *no esperable* después se va incorporando como algo totalmente natural.

La paradoja de Braess

Lo que sigue es una historia real. Sucedió en varias partes del mundo casi al mismo tiempo y, sobre todo, con la aparición de las diferentes redes de autopistas que conectaban no solo países sino también continentes. Por supuesto, mucho tuvo que ver la Segunda Guerra Mundial, pero esa es otra historia.

Para ofrecer un contexto razonable, voy a empezar con un ejemplo. Si yo le preguntara en qué lugar del mundo se produce anualmente la mayor concentración de personas, creo que entre los tres primeros sitios estará Times Square, en Nueva York. Es fácil transportarse imaginariamente a cualquier escena nocturna que haya vivido en una película, en fotos o como testigo presencial, de la intersección de la calle 42 y Broadway. En realidad, es la intersección de dos avenidas, ya que la 42 es esencialmente una avenida. Pero lo que me interesa es pulsarle una cuerda interna y sugerirle que piense en cualquier escena nocturna en donde los carteles luminosos transforman la noche en día.

Como es natural, por ese sitio no solo hay personas que caminan y turistas que se juntan para sacar fotos, sino que también hay tránsito vehicular. No hace falta que escriba (pero igual lo hago) que así como hay una enorme presión peatonal, hay un enorme flujo de tránsito. Ahora bien: ¿qué pasaría si por alguna razón esa avenida/calle, la 42, tuviera que ser bloqueada?

Aunque no estemos juntos, intuyo que la respuesta más esperable será: ¡el tránsito se convertiría en un verdadero caos! Algo así como si bloqueáramos varias cuadras de la avenida Corrientes en Buenos Aires, o el bulevar Oroño en Rosario, o la avenida Maipú en Córdoba (por poner tres ejemplos cualesquiera, pero usted elija la arteria que le resulta más cercana a su entorno): si uno clausurara o cerrara una calle de esas características, la conclusión que uno sacaría es que se generaría un caos de enormes proporciones en el tránsito.

Sin embargo, y a este punto querría llegar, ¡eso no pasó! Ni pasa. Hay tres casos muy puntuales que llamaron la atención. Uno es el que acabo de escribir sobre la calle 42 en Manhattan, otro es la calle Main en Boston y el tercero sucedió en el barrio de Islington en Londres. Cuando cada una de las tres arterias tuvo que ser temporariamente cerrada, en lugar de empeorar ¡el tránsito mejoró!

Allí aparece en escena un matemático alemán Dietrich Braess, quien en 1968 presentó una teoría que hoy es conocida como 'La paradoja de Braess'. Braess era profesor en la Universidad de Ruhr, en lo que todavía era Alemania Occidental, y su paradoja dice lo siguiente:

> El simple hecho de agregar un camino a una ruta que habitualmente ya está congestionada de tránsito no garantiza que el tránsito fluirá mejor ni que se acortarán los tiempos, sino que es posible que suceda exactamente lo contrario, y el nuevo camino solo sirva para empeorar la situación.

Si usted me acompaña y tiene la paciencia necesaria para seguir los argumentos que él expuso, verá que si bien es fuertemente antiintuitivo o, si prefiere, atenta fuertemente contra la intuición que tanto usted como yo tenemos, la explicación de Braess es muy interesante y muy pertinente.

Eso sí: yo voy a ir escribiendo un texto y simultáneamente le propongo que recorra las figuras que lo acompañan. Por otro lado, le sugiero también que haga las cuentas (aunque no es imprescindible, porque las voy a hacer yo también). Recuerde que la única manera de convencerse de que uno entiende lo que lee, es detenerse un rato y 'equivocarse', o 'mancharse las manos' o 'engrasárselas un poco'.

Acá voy.

Suponga que usted viaja todos los días desde un punto 'inicial' hasta llegar a un punto 'final'. En definitiva, solo se trata de *unir* dos puntos.

En la Figura 1, hice un pequeño esquema para graficar lo que quiero decir.

Figura 1

Ahora, pase a la Figura 2. Obsérvela y vuelva a este texto.

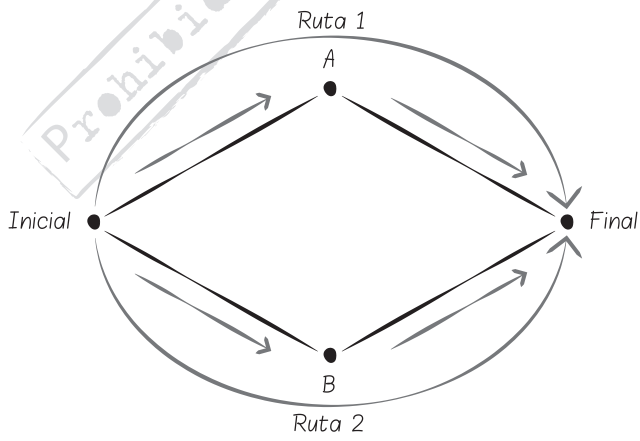


Figura 2

Como se ve, hay *dos* caminos posibles para ir desde el punto inicial hasta el punto final: tomando por la Ruta 1, que desemboca en el punto A, y después desde A hasta el punto final; o bien por el camino que va desde el punto inicial hasta B, y desde allí hasta el punto final, y que voy a llamar Ruta 2.

Los caminos tienen exactamente la misma longitud, de manera tal que elegir uno u otro debería ser totalmente indiferente. El único problema lo genera el tránsito que circula por ambas rutas. Acá es donde empiezo a necesitar de su cooperación. Voy a hacer un ejemplo que involucra a 1000 vehículos. Es decir, la idea es establecer un *modelo* que permita imaginar qué camino van (o pueden) elegir esos mil vehículos para ir desde el punto inicial hasta el punto final.

Ahora pase a la Figura 3. Cuando un auto está parado en el punto inicial —*antes* de decidir cuál de los dos caminos va a elegir—, los datos recogidos a través de las diferentes mediciones indican que si opta por el camino que lo lleva hasta A, el *tiempo* que va a tardar está medido en T/25 minutos, en donde T indica el número de vehículos que eligió ese camino. Por ejemplo, si los 1000 autos eligieran ese camino, como (1000/25) = 40, esto indicaría que los 1000 autos tardarían 40 minutos —en promedio— en hacer ese recorrido para llegar hasta A. En cambio, si en lugar de 1000 autos, solamente 500 hubieran elegido esa ruta, entonces el recorrido se puede hacer en (500/25) = 20 minutos. Como se ve, el número de autos que eligen un camino es determinante para definir el *tiempo* que va a consumir el trayecto.

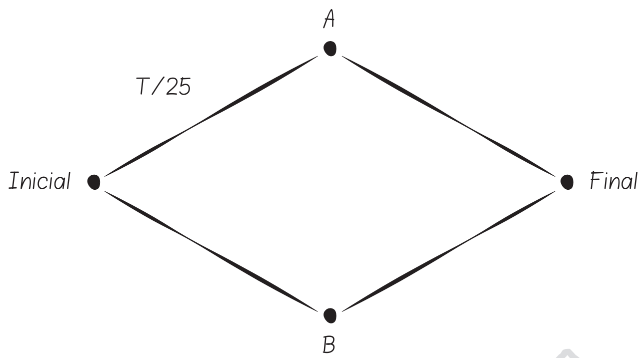


Figura 3

Una vez que uno llegó hasta A, el segundo trecho se hace por una autopista que tiene tantos carriles que el número de vehículos que la recorren no altera el tiempo. En consecuencia, el tiempo no depende más del número de autos, ya que la autopista tolera perfectamente el tránsito de 1000 vehículos sin producir ningún tipo de demora. Como se ve en la Figura 4, supongamos que ese tiempo está *fijo* y que es *exactamente* de 50 minutos.

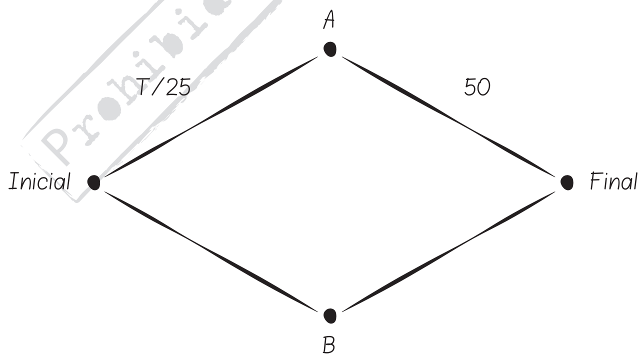


Figura 4

Resumiendo: el primer tramo lleva T/25 minutos, dependiendo de T, el número de vehículos que lo están recorriendo, y el segundo, 50 minutos independientemente de cuántos vehículos circulen.

Fíjese en la Figura 5. Ahora agregué al esquema la Ruta 2. La situación está revertida. El primer tramo, el que va desde el punto inicial hasta B, *no depende* del número de vehículos: uno tarda *siempre* 50 minutos. La dificultad aparece en la segunda parte: allí, el número de vehículos vuelve a adquirir importancia, y el tiempo para recorrerlo se estima —una vez más— en T/25 minutos, como sucedía en la ruta anterior.

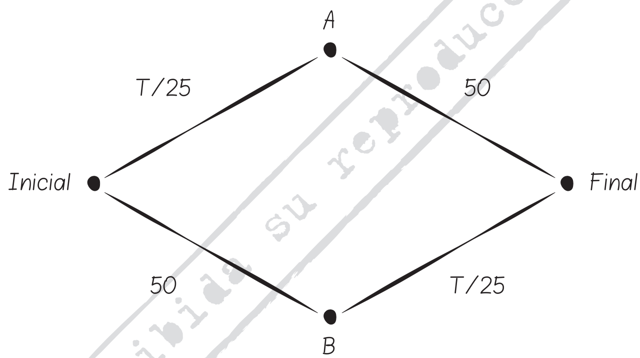


Figura 5

Justamente, la Figura 5 resume las dos situaciones: ir por el camino que pasa por A, y la otra posibilidad, elegir el tramo que pasa por B.

Ruta 1: T/25 minutos + 50 minutos
Ruta 2: 50 minutos + T/25 minutos

Detengámonos unos minutos y hagamos algunas hipótesis sobre lo que sucedería si imaginamos diferentes escenarios. Es decir, qué variaciones habría si más vehículos eligen la Ruta 1 que la Ruta 2 (y viceversa).

Supongamos, por ejemplo, que hay 600 vehículos que van por la Ruta 1 y 400 por la Ruta 2. En ese caso (Figura 6), tenemos:

Ruta 1: 600/25 + 50 = 24 + 50 = 74 minutos
Ruta 2: 50 + 400/25 = 50 + 16 = 66 minutos

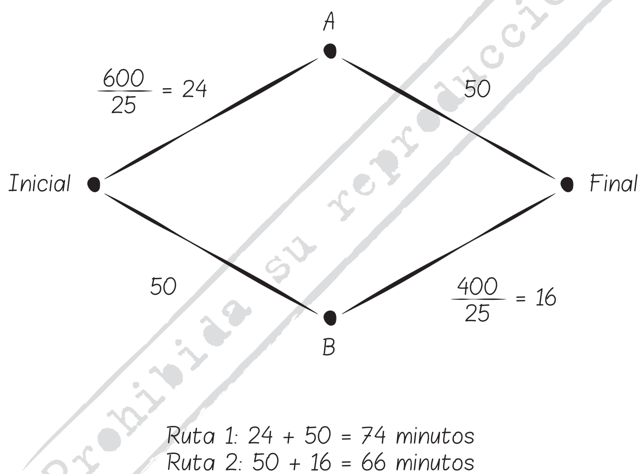


Figura 6

Naturalmente, usando la información que proveen los GPS, los vehículos que habían elegido la Ruta 1 (y tardaron 74 minutos), sabrían casi inmediatamente que los que fueron por el otro lado tardaron 66 minutos. Como usted se imagina, en poco tiempo, en pocos días, *todo* el mundo que circula por esas rutas sabría lo que sucede y, por lo tanto, también en poco tiempo llegarían a un 'punto de equilibrio'. ¿Cuál es ese punto? ¿Quiere pensar usted?

Efectivamente, en pocos días el número de autos (1000) se dividiría por mitades, y habría 500 que elegirían la Ruta 1 y los otros 500 irían por la Ruta 2 (Figura 7). Los vehículos tardarían 70 minutos por cualquiera de las dos rutas. Este es el punto de equilibrio.

Ruta 1: 500/25 + 50 = 20 + 50 = 70
Ruta 2: 50 + 500/25 = 50 + 20 = 70

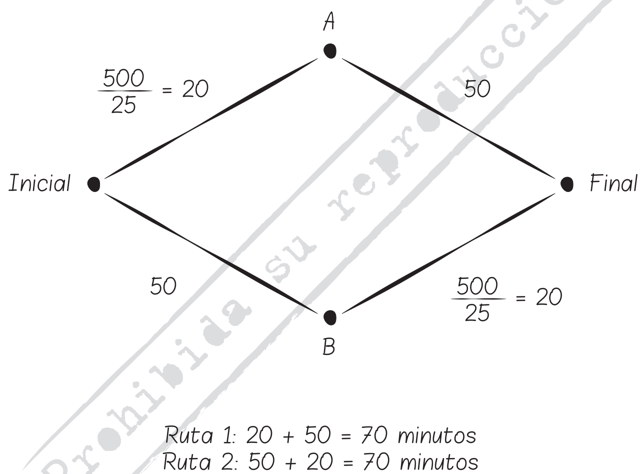


Figura 7

Hasta acá —creo— está todo claro. Sin embargo, ahora viene lo *increíblemente curioso y antiintuitivo*. Supongamos que uno construyó una ruta que uniera A con B (en ambas direcciones), es decir, un *camino* adicional que antes no existía. Eso les daría a los conductores la posibilidad de *cambiar* de la Ruta 1 a la Ruta 2 (y viceversa). Mire la Figura 8.

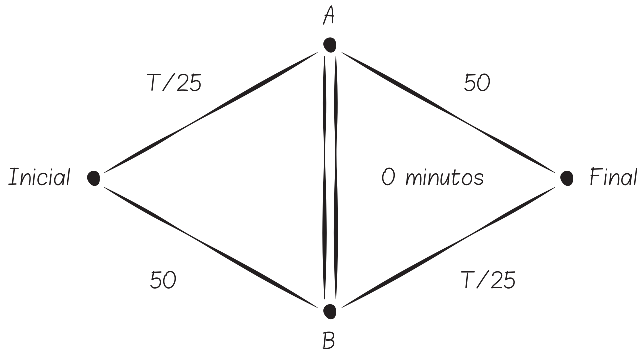


Figura 8

Para hacer las cuentas más sencillas, voy a suponer incluso que uno *no tarda nada* en recorrer ese camino. Es decir, le asigno *cero* minutos a ir desde A hasta B o viceversa. ¿Qué pasará ahora? ¿Qué incidencia tendrá la aparición de este nuevo camino? Verá que lo que sucede es algo realmente fascinante… ¡e inesperado!

Antes de leer lo que voy a escribir, haga usted algunas cuentas probando diferentes alternativas, y anote los resultados que va obteniendo. En algún sentido, le estoy proponiendo que imagine potenciales rutas, les asigne un número determinado de vehículos que hayan optado por uno u otro segmento y tome decisiones sobre qué es lo que más convendría hacer en cada caso. Cuando usted haya analizado lo que considera suficientes casos o conjeturas, le propongo que nos embarquemos juntos en algunas 'especulaciones'.

Sigo yo. Supongamos que usted se para en el punto inicial y, a diferencia de lo que sucedía antes, tendrá a su disposición el camino que une A con B. Imaginemos que los 1000 vehículos decidieran ir por el segmento que une el punto inicial con A. En ese caso, resulta 1000/25 = 40 minutos.

Si ese mismo conductor se fija en lo que sucedería si elige el camino que une el punto inicial con B, descubriría inmediatamente que eso le insumiría *seguro* 50 minutos. Es decir, aun en el *peor de los casos*, en el que los 1000 vehículos eligen el camino que los lleva hasta A primero, conviene elegirlo porque con ese trayecto uno tarda 10 minutos menos.

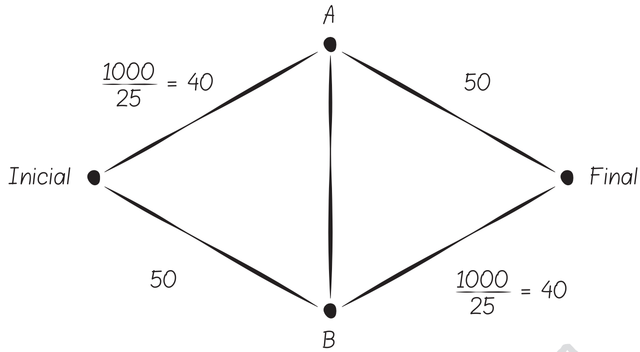
O sea, yendo por la Ruta 1, aun con los 1000 vehículos que une el punto inicial con A, insumiría T/25 = 1000/25 = 40 minutos. Por otro lado, usando la Ruta 2, la que une el punto inicial con B, *seguro* que uno tarda 50 minutos. No hace falta ser muy perspicaz para determinar que la mayoría (o todos) de los conductores optarían por la Ruta 1.

Ahora bien: cuando llegue al punto A, ya tardó 40 minutos (en el peor de los casos, es decir, si todos los vehículos optaron por ese camino). Si algunos optaron por ir hasta B, naturalmente se reduciría el tiempo invertido.

Cuando un conductor llegó hasta A habiendo tardado *como máximo* 40 minutos, ¿qué puede hacer? Tiene dos alternativas.

a) Si sigue por la Ruta 1 completa, tendrá que agregar a esos 40 minutos (como máximo), los 50 minutos que le faltan para llegar al punto final. Luego, como 40 + 50 = 90, su tiempo usando completamente la Ruta 1, le insumiría, en el peor de los casos, 90 minutos.

b) Si en cambio usa la ‘nueva’ ruta y viaja desde A hasta B (sin consumir ningún tiempo), y luego sigue desde B hasta el punto final, tendrá que agregar a los 40 minutos, otros 1000/25 = 40 minutos más. Moraleja: al cambiar a B y recorrer lo que le falta, tendrá que sumar 40 + 40 = 80 minutos.



Ruta 1 completa: 40 + 50 = 90 minutos
(Inicial-A) + AB + (B-Final) = 40 + 40 = 80 minutos

Figura 9

Acá, tengo una pregunta para hacerle: ¿qué conclusión saca usted? Si va por la Ruta 1 completa, tarda 90 minutos. Si en la mitad del camino va desde A hasta B, tarda 80 minutos. Pero lo extraordinario, es que cuando el camino desde A hasta B *no existía*, el tiempo que tardaba era de ¡70 minutos! Es decir, en cualquiera de los dos casos, ¡tardaría más tiempo que si no existiera el camino intermedio!

¿Entonces? ¿No estábamos tentados de pensar que al haber abierto un nuevo camino y una nueva alternativa, el tiempo se reduciría?

Bueno, la paradoja de Braess intenta *demostrar* lo contrario. Cuando ese camino entre A y B no existía, los vehículos tardaban (en promedio) menos tiempo que aprovechando de la existencia de ese nuevo segmento.

Esto es lo que quería compartir con usted. Hay muchísima literatura escrita sobre el tema y aún hoy es ciertamente controversial, pero los números están allí y los ejemplos de las tres ciudades fueron nada más que *disparadores*.

Un matemático ahí, por favor (Primera parte)

Primer caso

En 1998, el Emnid Institut[24] realizó una encuesta en toda Alemania. Los resultados aparecieron en la revista *Süddeutsche Zeitung Magazin*, en la edición del jueves 31 de diciembre de ese año.

El objetivo de la compulsa era describir cuán familiarizados estaban los alemanes con conceptos matemáticos básicos. Una de las preguntas era muy simple: “Al medir cantidades/números, ¿qué es lo que usted cree que significa seleccionar ‘un 40%’?”.

Las opciones eran estas:

a) un cuarto del total
b) cuatro de diez
c) cada 40 personas

Los resultados fueron sorprendentes (no deje de pensar qué es lo que cree usted que significa antes de leer lo que sigue): una

24. El Emnid Institut en Bielefeld y el Allensbach Institut son las dos encuestadoras alemanas de mayor prestigio.

tercera parte de los que respondieron la encuesta eligieron o bien (a) o bien (c). De nuevo: ¡una tercera parte![25]

Segundo caso

Este episodio se hizo muy popular en Estados Unidos al principio de este siglo, luego de que apareciera en el libro *El hombre anumérico* (*Innumeracy*[26], en el original) que escribió John Allen Paulos, un excelente matemático y mejor divulgador. La primera edición apareció en agosto de 2001 y se transformó casi automáticamente en uno de los más impensados *bestsellers*, sobre todo para un trabajo de divulgación de la ciencia en general, y de la matemática en particular. El libro le permitió a Paulos convertirse en una celebridad insólita, a tal punto que las más importantes cadenas de televisión se disputaban su participación en los programas nocturnos de mayor audiencia. Pero, para variar, me desvié. El libro es muy recomendable y es allí donde Paulos cuenta una historia que si bien es graciosa, tiene un costado patético. Fíjese que opina usted.

Un canal de cable tenía su noticiero habitual tres veces por día: mañana, mediodía y noche. En cada una de las ediciones, había un meteorólogo para dar los datos del tiempo y ofrecer el pronóstico, algo habitual en todas partes del mundo.

Una noche, cuando estaban a punto de salir al aire, el meteo-

25. La respuesta correcta es (b), ya que un 40 por ciento significa 40 de cada 100, o sea, cuatro de cada diez.

26. No sé cómo hacer la traducción literal de la palabra ‘innumeracy’. En realidad, no creo que exista pero para dar una idea de lo que significa conceptualmente, sería el equivalente de una persona ‘analfabeta’ pero en ‘números’ o ‘estadísticas’, pero no sé si me siento cómodo aún con esa idea.

rólogo tuvo una emergencia que le impediría participar del programa. Antes de salir apurado, teniendo en cuenta que era viernes por la noche y la ansiedad por saber qué sucedería con el tiempo tanto el sábado como el domingo, el profesional escribió los datos en un papel y se los dejó al conductor para que los leyera.

Llegado el momento, el conductor explicó a su audiencia las razones por las que sería él y no Ariel (el profesional específico del área) quien habría de hablar del tiempo, tomó entonces el escrito que le había dejado y lo leyó frente a la cámara:

> En este papel que me dejó Ariel, él me informa que las chances de lluvia para mañana sábado son del 50% y lo mismo para el domingo, en donde también habrá un 50% de posibilidades de lluvia.

Allí hizo una pausa, se envalentonó y agregó algo que *no estaba escrito* pero que a él le pareció pertinente *decir*:

> Como ven, la probabilidad de que llueva en el fin de semana es de un 100%.

Telón y fuera.

Quizás ahora se entienda un poco mejor lo que significa 'innumeracy', palabra que debe haber acuñado el propio Paulos.

Tercer caso

Este ejemplo es más *delicado* y entraña un peligro que le resultará obvio de deducir ni bien termine de leerlo. La idea está extractada de un caso presentado por Gerd Gigerenzer, un investigador del Instituto Max Planck, en Alemania. Voy a tratar de ser lo más justo en mi traducción, al menos conceptualmente, de manera tal que no se pierda nada el valioso aporte que hizo Gigerenzer. Acá va.

Una mujer (a la que voy a llamar Ana) acaba de cumplir 40 años. Su ginecóloga le recomienda que se haga una mamografía. Si bien Ana no tiene ningún antecedente familiar sobre cáncer de mama, la práctica habitual indica que *es el momento para hacerla*. Se presenta en el hospital, le realizan el estudio y unos días más tarde recibe la noticia devastadora: el resultado es *positivo*.

Ahora bien, ¿qué significa que sea positivo? Ana está confundida, porque no sabe (ni tiene *por qué* saber) lo que significa que el examen haya resultado positivo. ¿Significa acaso que hay un ciento por ciento de certeza de que ella tiene cáncer de mama? ¿O hay algún resquicio, alguna alternativa? ¿Qué interpretan los médicos con este resultado? ¿Depende del test? ¿Será posible que no sea en un ciento por ciento de los casos y sea en un 99%, en un 95% o en un 90%? ¿Quién explica? ¿Dónde leer? ¿Con quién hablar? En definitiva, ¿cuál es el porcentaje de certeza que se desprende de la palabra *positivo*?

Acá es donde yo le voy a proponer dos maneras de buscar la respuesta y le pido que usted, en forma genuina y simplemente *pensando* en lo que va a leer, trate de encontrar la respuesta. Si en algún momento es usted quien se siente *confundida/o*, no se preocupe: siga adelante. Continúe leyendo. Créame que vale la pena.

Una forma es esta:

> La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga cáncer de mama es alrededor de uno por ciento[27]. Si efectivamente *tuviera*

27. Obviamente yo no soy médico, pero la bibliografía que consulté al respecto habla de un 0,8 por ciento. De todas formas, por favor, ¡no se guíe

cáncer de mama, las chances de que la mamografía resultara positiva serían de un 90%. Por otro lado, si la paciente *no tiene* cáncer de mama, las posibilidades de que la mamografía sea positiva igualmente es de un 9%.

Ahora, con estos datos que usted acaba de leer, llega la *gran* pregunta: "Si Ana tiene en sus manos una mamografía con resultado positivo, ¿cuáles son las chances de que efectivamente tenga cáncer de mama?".

Antes de avanzar, como siempre, le sugiero que usted —sí, me refiero a usted— piense por su cuenta. Yo voy a escribir la respuesta a continuación.

De acuerdo con lo que 'suele' pasar, una buena parte de las personas a las que se les plantea el problema contestan: "Como la mujer tiene una mamografía positiva, la probabilidad de que tenga cáncer de mama es de aproximadamente un 90%".

Ahora quiero presentar la situación, la *misma* situación, pero con un texto diferente y piense qué contestaría usted. Quizás su respuesta sea la misma, pero tómese tiempo para reflexionar.

Piense en un grupo de 100 mujeres de alrededor de 40 años. Es *muy posible* que *una* de ellas tenga cáncer de mama y muy probablemente (si todas se hicieran una mamografía), ella tendría un resultado positivo. De todas formas, de las 99 que *no tienen* cáncer de mama, habrá *nueve* que igualmente tendrán resultado positivo. Por lo tanto, si las 100 mujeres se hicieran una mamografía, habrá *en total* 10 que tendrán resultado positivo. Pero eso no es lo que

---

por mis números o mis datos! Piense que este es solamente un artículo de divulgación con todas las imprecisiones, inexactitudes e incluso 'burradas' que suele tener el autor (yo).

> importa, sino la *otra pregunta*: ¿Cuántas de las que dieron positivo tendrán cáncer de mama?

Creo que se entiende que si uno plantea el problema de esta forma, es *muy fácil* determinar que *solamente una de las diez* con resultado positivo tendrá cáncer de mama. Por lo tanto, la conclusión es que las chances son del ¡10%! y no del 90% como parecía al principio.

Por supuesto, tener un resultado positivo en una mamografía no pone contento a nadie, pero en vista de lo que significa en términos específicos, la *abrumadora mayoría* de las mujeres que, como Ana, obtienen un 'positivo', *en realidad no tienen cáncer de mama*.

La lista de ejemplos que podría agregar acá es muy frondosa. No todos los casos son equivalentes. Algunos son entre graciosos y patéticos. Otros, ciertamente muy peligrosos, dependiendo de quiénes son los profesionales que hacen las evaluaciones. Puede que llueva y uno esté sin paraguas, no pasa nada: al final, uno se seca. Pero la angustia que puede generar un episodio de 'analfabetismo estadístico' obliga a contratar profesionales (matemáticos, estadísticos) que sean capaces de 'leer los datos' como corresponde y sacar las conclusiones adecuadas. Una vez más, lo digo por las instituciones hospitalarias o de salud de todo el país, en donde las consecuencias de las inferencias equivocadas pueden conducir a tratamientos inadecuados, a la administración de drogas innecesarias o al tormento y tortura psicológica totalmente evitables.

Un matemático ahí, por favor (Segunda parte)

Supongamos que en un diario aparece una noticia que dice que hombres con el colesterol 'alto' tienen un 50% más de posibilidades de sufrir un ataque cardíaco. Está claro que un incremento del 50% es un número escalofriante. Es obvio que 'algo' hay que hacer, pero ¡un momentito! ¿Un incremento de un 50% con respecto a cuánto? ¿Cómo es la medición?

Fíjese entonces lo que puede/pudo haber pasado. Suponga que uno toma una muestra de 100 hombres que ya cumplieron 50 años y que *no* tengan el colesterol alto. De acuerdo con los estudios más recientes (febrero de 2017), se espera que *cuatro* de ellos sufran un infarto en los siguientes diez años de sus vidas; si uno reuniera otro grupo de 100 hombres también mayores de 50 años pero que *tengan* el colesterol alto, se espera que *seis* de ellos tengan un ataque cardíaco en los siguientes diez años de su vida.

Acá se entiende bien lo que significa un incremento del 50%: pasar de *cuatro* a *seis* es exactamente eso, un aumento de un 50% de los casos, lo cual es un incremento *brutal* si uno se basa en el número *cuatro* desde el cual uno hace el análisis del incremento. Es decir, es un incremento *relativo*. Importa *muchísimo* entonces especificar cuáles son los números iniciales sobre los que uno va a juzgar el crecimiento.

Ahora miremos los datos desde otro lugar. Situémonos en el grupo de los hombres que no se espera que tengan un ataque cardíaco en los próximos diez años. De los 96 que había en el primer grupo, pasa a 94 en el segundo, o sea, se reduce en *dos*, lo que significa alrededor de un 2%.

Planteado así, ¿qué percepción tiene usted? Lo que se advierte es que el *beneficio* de tener el colesterol dentro de los parámetros ‘normales’ no parece ser *tan* relevante, no parece que tener el colesterol alto signifique un problema *tan* serio.

Llegado a este punto, me interesa sacar una conclusión junto con usted. El *riesgo absoluto* se mide así: de los 100 hombres que se evalúan, solamente *dos* más tienen un riesgo de ataque cardíaco si su colesterol es alto, o sea un 2%.

Ahora *sí* se ve claro que cuando uno habla de *riesgo absoluto*, no hay lugar para ‘jugar’ con los números[28].

28. Por supuesto, este es un análisis desde el punto de vista matemático. De *ninguna* manera pretendo decir que tener el colesterol alto es *bueno* o no es *relevante*. Solo quiero enfatizar que el aumento en un 2% no ‘parece’ tan significativo como el que se deduce del aumento en un 50%, que se ilustra al principio del texto.

Problemas de una competencia para niños

A fines del año 2017, en una competencia de matemática *para niños* (*sic*), aparecieron varios problemas que me parecieron muy interesantes. Como siempre, *dudo* de que fueran para niños; en todo caso, me gustaría seguir sintiéndome un niño, lo mismo le propongo a usted.

Voy a extraer dos de los problemas que a mí me parecieron *preciosos*. Acá van.

1) En una chacra, hay 100 pollitos sentados formando un círculo. Súbitamente, cada uno de ellos elige al azar a alguno de los dos que tiene sentado a ambos costados y le *pega un picotazo*. Si usted tuviera que ofrecer una estimación, ¿cuál es el número de pollitos que no recibirán ninguna agresión?
2) Un amigo me trajo una cantidad de números enteros consecutivos (pueden ser negativos, cero o positivos). El *menor* de todos es (-32). La *suma* de todos es 67. ¿Puede decir *cuántos* números me trajo mi amigo? ¿Cuántos resultados posibles puede encontrar?

Respuestas

1) Para cada pollito hay cuatro posibilidades:

a. Recibir un picotazo del pollito que tiene a la izquierda.
b. Recibir un picotazo del pollito que tiene a la derecha.
c. Recibir un picotazo de cada uno de los dos que tiene a los costados.
d. No recibir nada.

Las cuatro posibilidades son *igualmente* probables[29], lo que permite deducir que la probabilidad de no recibir nada es una de cada cuatro para cada pollito. Como en total hay 100 pollitos en el círculo, podemos esperar que ¼ x 100 = 25 no reciban ninguna agresión. Luego, la respuesta correcta es 25.

2) Fíjese que el número más chico es (-32). Para que la suma total sea 67 y los números son *consecutivos*, lo primero que hay que hacer es *compensar* todos los números *negativos* que aparezcan. Como el *más chico* de todos los números es (-32), esto significa que también tiene que estar el (-31), (-30), …, (-3), (-2), (-1). Pero acá no puedo terminar, porque si sumara todos estos números obtendría un número *negativo*. Para *compensar todos los negativos*, necesito agregar —por lo menos— todos los positivos: 1, 2, 3, 4, …, 30, 31, 32. ¿Será suficiente? No, porque

29. Carlos D'Andrea me dice que *para él* los eventos *no son independientes*: la probabilidad de que los pollitos 1 y 3 reciban dos picotazos es *cero*, porque el pollito número 2 solo puede 'picar' a uno solo de ellos. En cambio yo sigo pensando que eso no altera la probabilidad porque lo mismo sucede *con todos* los pollitos. ¿Quién de los dos tiene razón? Usted —sí, usted—, ¿qué piensa?

si yo sumara *todos* los que escribí antes, me daría *cero*. Todavía faltarían agregar algunos números más hasta llegar a 67. Como habíamos llegado hasta el 32, los dos siguientes (33, 34) *tienen* que estar también y, justamente, la *suma* de (33 + 34) = 67.

Sé lo que está pensando, pero deme tiempo para escribirlo. Si yo quisiera saber cuántos números utilicé, debería incluir los 32 que van desde el (-1) hasta el (-32), y agregar los 32 que van desde el (+1) hasta el (+32). Esto daría 64 números. Me faltan agregar el 33 y 34, y llegaríamos a 66 números. Pero… ¡falta un número! (¿Cuál es? ¿Quiere pensar usted?).

El número que falta es el cero, porque *no puedo saltar* del (-1) al (+1) sin pasar por el cero. Luego, en total, no hay 66 números, sino 67. ¡Y esa es la respuesta correcta! En total, hay 67 números.

Suma y ‘otro’ número

Suponga que yo ‘pienso’ dos números cualesquiera que voy a llamar A y B. Por ahora, mantengo los números en secreto. Junto a mí, hay dos amigos.

A uno de ellos le digo el número A y al otro, el número B. Lo hago sin que ninguno pueda escuchar lo que le digo al otro. Después, *en voz alta*, yo digo dos números. Uno corresponde a la *suma* de los números (A + B), y el otro es un número al azar, *cualquiera*[30].

Con estos datos, cada uno de mis amigos tiene que tratar de deducir el número del otro. La idea es que no traten de ‘adivinar’, el objetivo es ‘deducirlos’, o sea, hacer un razonamiento que les permita asegurar cuál es el número del otro.

Un ejemplo sencillo sería el siguiente. Supongamos que A = 15 y que los dos números que yo digo en voz alta son: 17 y 25. Empiezo con A (o mi amigo A, aunque estoy ‘confundiendo’ el nombre de mi amigo con el número que escuchó; por ahora, supongamos que ambos —el número y mi amigo— se llaman A). Sigo.

Empiezo preguntándole a mi amigo A (a quien yo le había di-

30. El orden en el que digo los dos números también es al azar.

cho '15'). Él me escucha decir: 17 y 25. "¿Podés decidir?". La respuesta que obtengo es: "No sé, no puedo decidir". Es que A, con los datos que tiene hasta acá, no puede saber si B tiene el número 2 o el número 10. Entonces, como no hay *ninguna razón* para decidir cuál de los dos le dije a B, él tiene que decirme: "No sé".

Inmediatamente después le pregunto a B, y él también dice: "No sé".

Ahora llega la parte *interesante* del problema. Cuando yo miro a mi amigo A para ver si ahora tiene *algo* más para decir, él se detiene un instante y afirma: "Sí, ahora yo ya sé: el número que le dijiste a B fue 10". Pregunta: ¿cómo hizo para saber?

Ahora le toca a usted.

Idea para pensar

En principio, uno está tentado en suponer que escuchar a alguien decir "no sé", no aporta nada nuevo, o no aporta información nueva. Sin embargo, los dos "no sé" *consecutivos* van *acotando* las posibilidades hasta que queda solamente una. Antes que yo escriba la solución, ¿no tiene ganas de pensar usted por su cuenta?

Solución

A sabe que yo le dije 15. Después me escucha decir: 17 y 25 (antes de avanzar, mi declaración "17 y 25" significa que la suma de los dos números es o bien 17 o bien 25). Como escribí antes, cuando yo le pregunto a A si él puede saber cuál es el número de B, obviamente, no puede. Es que B podría tener o bien el 2 o el 10. Como no puede decidir, me dice: "No sé". Pero fíjese que ahora A *sabe* que B tiene alguno de estos dos números: 2 o 10. Como no sabe cuál, tuvo que pasar y decir: "No sé".

Es el turno de B. Recién vimos que, 'mirado' desde A, B solamente puede tener 2 o 10. Ahora situémonos en B. Es decir, suponga que ahora *usted* es B. De acuerdo con lo que sabemos de la primera parte, B *debe* tener o bien 2 o bien 10.

Supongamos que B tuviera el número 2. Al haber escuchado que dije 17 y 25, él concluiría que A tiene 15 o 23. Pero B pensaría: ¡un momento! Si A tuviera 23, cuando me escuchó a mí decir 17 y 25, ¡A sabría que yo (B) tengo 2! ¿Por qué? Si A tuviera 23 y si uno de los dos números que me escucha a mí (17 y 25) corresponde a la suma, está claro que 17 no puede ser: si no, B tendría que tener un *número negativo*!

Luego A debería haber deducido que la *suma* de los dos números *tuvo* que haber sido 25 y, por lo tanto, en el momento en que A tuvo la oportunidad de hablar, él habría sabido que B tenía el número 2. O sea, en lugar de "no sé", tendría que haber dicho: "Sí, yo sé: B tiene el número 2".

Sigamos. Si A tuviera el número 23, él sabría que B tiene el número 2 y habría podido contestar la pregunta que yo hice antes. Como no lo hizo, la conclusión es que A... ¡no tiene 23! ¡A debe tener 15! Pero como B *no llegó a esa conclusión* —no dijo "A tiene 15"—, esto *únicamente* pudo haber pasado si B no tiene 2.

Luego, como B dice "no sé", y pasa el turno otra vez, entonces ahora sí, A *retoma el control* de la situación y dice: "¡B debe tener 10!". Y esa es la respuesta correcta.

Como se ve, este tipo de argumentos 'lógicos' permite hacer deducciones que, de otra forma, parecen imposibles.

Nueva versión del problema de Einstein

El problema que quiero presentar acá tiene múltiples versiones y se ha hecho muy popular a lo largo de los años porque *alguien* sugirió que Einstein dijo que solamente un porcentaje muy pequeño de la población (no sé bien si dijo el 1% o el 2%) lo podría resolver.

Naturalmente, es una afirmación *temeraria* y no hace falta que enfatice demasiado que me parece absolutamente *falsa*. No me refiero siquiera a si el número es pequeño o no, pero ¿cómo habríamos de saber si siquiera tiene sentido la pregunta? ¿Quién pudo haber verificado si solamente una o dos personas de cada cien pueden (o no) resolverlo? En fin, intuyo que es un intento de *promocionar* el problema (lo cual no estaría mal), pero creo que se podrían buscar algunas otras formas para invitar a pensar que no necesiten de apelar a golpes bajos y falsedades tan obvias.

Bueno, suficiente. Acá va el problema, verá que tiene un atractivo particular intentar resolverlo. No se preocupe tanto por el resultado final, imagine que la idea es tratar de disfrutar del trayecto.

Suponga que cinco de los integrantes de la selección argentina de básquet de la Generación Dorada se propusieron pasar sus vacaciones en Monte Hermoso, en la provincia de Buenos Aires, cerca de Bahía Blanca —la capital del básquet argentino—, donde nacieron Pepe Sánchez y Manu Ginóbili.

Justamente, la idea es imaginar que hay un complejo que tiene cinco casas y que están dispuestas una al lado de la otra. Las familias se ponen de acuerdo en hacer una reserva común. Estos son los datos relevantes.

Voy a ofrecerle una lista de 15 datos que involucran el color de las cinco casas (todas están pintadas de diferentes colores), las mascotas que tiene cada uno, el tipo de bebida más frecuentemente consumido en cada una de las familias y el tipo de auto que cada uno maneja y tiene guardado en su garaje.

Le propongo que se siente con un poco de paciencia (y por supuesto, con algo para escribir) y trate de distribuir los datos que le ofrezco y que deberían llevarla/o a la solución, que me importa aclarar… ¡es única!

Usted verá que lo único que no está explícito es *quién es dueño de un perro labrador*, y el problema consiste justamente en eso: usando su capacidad para razonar, determinar quién de los cinco es el dueño de este perro. Acá voy.

En principio, hago un resumen de todo lo necesario y después escribo los datos conocidos.

- Los nombres de los cinco jugadores: Scola, Prigioni, Pepe Sánchez, Nocioni y Ginóbili.
- Los colores de las casas: azul, rojo, amarillo, verde y negro,
- Las cinco mascotas: perro labrador, tortuga, ardilla, gatos siameses y canario.
- Las cinco marcas de auto: Tesla, Ferrari, Lamborghini, Porsche y Rolls-Royce.
- Las cinco bebidas preferidas por cada familia: agua, café con leche, café instantáneo, mate y chocolate caliente.

Ahora sí, acá van los 15 datos. Esto es lo que se sabe.

1) Scola vive en la casa roja.
2) Nocioni tiene gatos siameses.
3) Prigioni toma café con leche.
4) La casa verde está a la izquierda de la casa amarilla.
5) El dueño de la casa verde toma chocolate caliente.
6) El dueño de la Ferrari tiene una ardilla.
7) El dueño de la casa azul maneja un Tesla.
8) La persona que vive en la casa del medio toma café instantáneo.
9) Pepe Sánchez vive en la primera casa.
10) El dueño del Lamborghini vive al lado de la casa cuyo dueño tiene un canario.
11) La persona que tiene una tortuga vive al lado de quien maneja el Tesla.
12) El dueño del Rolls-Royce toma mate.
13) Ginóbili maneja un Porsche.
14) Pepe Sánchez vive al lado de la casa negra.
15) El dueño del Lamborghini tiene como vecino a quien únicamente toma agua.

Ahora bien, esta es la pregunta que hay que contestar: ¿quién es el dueño del perro labrador? Ah, y como escribí antes, la solución es *única*. Es decir, con los datos que figuran, hay una *única* manera de distribuirlos que permita identificar al dueño del labrador. Ahora le toca a usted.

Solución

Le propongo lo siguiente. Voy a escribir una 'grilla' de 5 × 5, en donde cada columna corresponde una de las casas, y la voy a ir completando (aspiro que junto a usted) a medida que vamos usando los datos. Cuando esté en blanco, la grilla aparecerá así.

	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

Figura 1

Por el dato (9), sabemos que Pepe Sánchez vive en la primera casa y allí voy a poner a la primera persona en la primera fila y primera columna.

Por el dato (8), sabemos que la persona que vive en la casa del medio toma café instantáneo. En la grilla entonces, tercera fila y tercera columna, aparecerá café instantáneo.

Por el dato (14), sabemos también que Pepe Sánchez vive *al lado* de la casa negra. Como él vive en la primera casa, eso inexorablemente marca que la segunda casa es de color negro. Aprovecho para juntar todo en la Figura 2.

	1	2	3	4	5
A	Pepe Sánchez				
B		Negro			
C			Café instantáneo		
D					
E					

Figura 2

Por el dato (4), la casa verde está a la izquierda de la casa amarilla pero, además, el dueño de la casa amarilla toma chocolate caliente. Ahora tenemos varios datos *separados* pero *conectados*.

Fíjese lo siguiente: no puedo poner la casa verde en el lugar 1B porque debería poner *amarillo* en 2B (y allí está la casa negra). Entonces, la casa verde puede ir en 3B, 4B o 5B. Pero no puedo usar el lugar 5B porque si no, ¿dónde pondría a la casa amarilla? Esto reduce todo a dos opciones: la casa verde va en 3B o en 4B. Ahora bien, no puedo colocar la casa verde en 3B, porque el dato (5) nos indica que en esa casa se toma chocolate caliente y allí ya sabemos que se toma café instantáneo[31]. En resumen, la casa verde tiene que estar en 4B y, en consecuencia, la casa amarilla está en 5B. Una cosa más, muy breve: usando el dato (5), puedo poner que en la casa amarilla se toma chocolate caliente.

Resumiendo, observe nuestro avance en la Figura 3.

	1	2	3	4	5
A	Pepe Sánchez				
B		Negro		Verde	Amarillo
C			Café instantáneo	Chocolate caliente	
D					
E					

Figura 3

Por el dato (1), Scola vive en la casa roja. En principio, parecería que hay dos posibilidades para ubicarla, ya que hay dos lugares vacíos en la grilla: 1B y 3B. Pero en la primera no puede

31. Carlos D'Andrea me hizo una observación *impagable*: "Esto que decís es cierto si uno asume que no se pueden beber las *dos* bebidas en esa casa, como pasaría en cualquier hogar normal, de los que vemos en la vida cotidiana, y no en las que proponemos en los problemas de matemática". ¡Cuánta razón! Perdón, entonces.

ir Scola porque allí vive Pepe Sánchez. Conclusión, Scola va en 3A y la casa roja en 3B.

Como dato adicional, ya ubicamos cuatro de los cinco colores de casas. El único que queda libre es 1B: allí va la casa azul.

Por el dato (7), el dueño de la casa azul maneja un Tesla. Luego 1D será Tesla.

Por el dato (11), la persona que tiene una tortuga vive al lado de quien maneja el Tesla. Luego, como 1D es Tesla, esto indica que la tortuga irá en 2E.

La grilla queda así (por ahora):

	1	2	3	4	5
A	Pepe Sánchez		Scola		
B	Azul	Negro	Rojo	Verde	Amarillo
C			Café instantáneo	Chocolate caliente	
D	Tesla				
E		Tortuga			

Figura 4

A esta altura, me interesa detenerme un instante y preguntarle: ¿no le parece que usted podría completar todo lo que falta usando el mismo tipo de argumentos? Estoy tentado en *afirmar* que sí, pero le dejo a usted la oportunidad de decidir por su cuenta. Sigo.

Ahora creo que llega el momento más interesante porque hay que juntar muchos datos simultáneamente. Acompáñeme por acá, quiero usar estos *cuatro* datos simultáneamente:

- Por (12) quien maneja un Rolls-Royce, toma *mate* (¡mirá vos!).
- Por (3), Prigioni toma café con leche.
- Por (13), Ginóbili maneja un Porsche.
- Por (2), Nocioni tiene gatos siameses.

¿Cómo proceder con estos datos? Por un lado, ¿quién es el que toma mate? No puede ser Pepe Sánchez, porque sabemos que él maneja un Tesla. No pueden ser 3C ni 4C porque las bebidas allí están decididas (café instantáneo en 3C y chocolate caliente en 4C). Quedan dos posibilidades entonces: 2C y 5C. Pero no puede ser Ginóbili porque él maneja un Porsche. Tampoco pueden ser ni Prigioni ni Scola porque ellos toman café con leche y café instantáneo. Entonces, ¡tiene que ser Nocioni! Perfecto, pero ¿dónde vive Nocioni?

Por el punto (2), Nocioni tiene gatos siameses, por lo tanto, no puede vivir en la segunda casa porque quien vive allí tiene una tortuga. Como toma mate, no puede vivir en la casa 4 tampoco (allí se toma chocolate caliente). Luego, esto determina que Nocioni vive en la casa 5, en 5A.

De esto también se deduce que en la misma casa se toma mate (en 5C), allí también va el Rolls-Royce (en 5D) y los gatos siameses (5E).

A esta altura, la grilla está así:

	1	2	3	4	5
A	Pepe Sánchez		Scola		Nocioni
B	Azul	Negro	Rojo	Verde	Amarillo
C			Café instantáneo	Chocolate caliente	
D	Tesla				Rolls Royce
E		Tortuga			Gatos siameses

Figura 5

Falta muy poco ahora y quedan pocas casillas vacías. ¿No quiere terminar usted?

Pregunta: ¿dónde vive Prigioni? Si usted mira la grilla verá que tiene dos posibilidades: en la segunda o cuarta casa. Pero no puede ser en la cuarta: por el punto (3), Prigioni toma café con leche y en la cuarta casa se toma chocolate caliente. Conclusión:

Prigioni vive en la casa 2, en 2A y, por otro lado, como Prigioni toma café con leche, esto implica que esta bebida tiene que ir en 2C.

Al llegar acá, uno detecta que hay una única casa libre para que viva Ginóbili: la cuarta (en 4A), y como por (13) Ginóbili maneja un Porsche, resulta que el Porsche va en el lugar 4D.

Ahora, por (15) sabemos que el dueño del Lamborghini tiene como vecino a quien toma agua, y como queda un último lugar para ubicar bebidas, la única alternativa que es el agua vaya en el lugar 1C. Además, puedo ubicar al Lamborghini en 2D.

Por (6) el dueño de la Ferrari tiene una ardilla. El único lugar vacío para poner la Ferrari es 3D y, por lo tanto, la ardilla va en el lugar 3E.

Ahora sí, estamos *a un instante* de completar la grilla y contestar la pregunta: por (10) el dueño del Lamborghini vive al lado de la casa cuyo dueño tiene un canario. ¿Se quiere fijar? Si lo hace, descubrirá que el canario *tiene* que vivir en la casa 1 (y ubicarlo en 1E).

Llegado este punto, presento la grilla prefinal (Figura 5) y usted ya estará en condiciones de contestar la pregunta inicial: ¿quién es el dueño del perro labrador?

	1	2	3	4	5
A	Pepe Sánchez	Prigioni	Scola	Ginóbili	Nocioni
B	Azul	Negro	Rojo	Verde	Amarillo
C	Agua		Café instantáneo	Chocolate caliente	
D	Tesla	Lamborghini	Ferrari	Porsche	Rolls Royce
E	Canario	Tortuga	Ardilla		Gatos siameses

Figura 6

¡La respuesta es que el perro labrador vive en la casa de Ginóbili! Y listo. ¿No es interesante que se pueda deducir todo esto simplemente siguiendo el rastro de los datos?

Recreo aritmético

Primero, elija un número de cinco dígitos (lo voy a llamar x = abcde), de manera tal que si usted le *agrega* el dígito ‘1’ al final del número (y lo transforma en abcde1), este número sea *tres veces mayor* que si le agregamos un ‘1’ al principio de número x. O sea, el número abcde1 = 3 x (1abcde). ¿Existe este número *x*? O mejor dicho, ¿existen números de cinco dígitos que cumplan con esta propiedad? Si los hay, ¿cuántos son? ¿Quiere pensar por su cuenta? Le dije, es solamente un recreo…

Un par de formas de pensarlo (y resolverlo)

1) Uno podría hacer lo siguiente. Tomar el número x = abcde y plantearse la siguiente igualdad que tiene que cumplir al *agregarle* un ‘1’ al principio y al final respecto a que el primero se transforma en un número *tres veces mayor* que el otro. Fíjese si está de acuerdo conmigo.

La igualdad que tendría que cumplirse es la siguiente:

$$3 * (100.000 + x) = (10 * x) + 1 \qquad (o)$$

¿Me sigue? Me explico.

El número (100.000 + x) equivale a agregarle el número 1 al principio. En todo caso, (100.000 + x) = (100.000 + abcde) = 1abcde.

Por otro lado, si multiplico al número x por 10 (como se ve en la segunda parte de la igualdad (o)), obtengo el número abcde0 (con un cero al final porque lo multipliqué por 10). Como *quiero* que termine en 1, lo que hago es justamente eso: *sumarle 1*. Luego, la igualdad (o) representa lo que *queremos* que suceda.

Ahora bien, volvamos a la igualdad (o). A la izquierda, resulta: (300.000 + 3x) mientras que a la derecha, tenemos (10x) + 1.

Cuando los igualo, trato de 'despejar' la x y resulta:

$$300.000 + 3x = 10\,x + 1$$

Paso el '1' restando a la izquierda, y las 3x del término de la izquierda aparecen *restando* en el término de la derecha. Ahora, necesitamos que se verifique esta nueva igualdad:

$$299.999 = 7x$$
$$(299.999)/7 = x$$
$$42.857 = x$$

Y esto resuelve el problema: el número x que estábamos buscando *no solo existe* (es 42.857), sino que además *¡es único!* ¿Por qué es *único*? Es que lo fuimos 'construyendo' paso por paso. En el camino descubrimos que hay una única forma de lograr que la igualdad se cumpla, y listo.

2) Hay —seguramente— muchas otras maneras de abordar este problema. Quiero plantear una más, que es un poco más

trabajosa, pero que esencialmente hace lo mismo que la anterior. Veamos.

Queremos que se verifique $3 \times (1abcde) = abcde1$.

Luego, el número $3e$ (que aparecerá cuando multiplique el término de la izquierda), tendrá que terminar en '1' (como se ve a la derecha). ¿Cuál podría ser 'e'? Si usted hace las cuentas[32], verá que la *única* alternativa que le queda a 'e', es ser el número 7 (ya que $3 \times 7 = 21$). Luego, descubriríamos que $e = 7$, pero además *¡me llevo 2!* Porque al multiplicar $3 \times 7 = 21$. Por supuesto, cumplirá la primera parte (terminar en 1) pero, al mismo tiempo, necesito agregar *dos* cuando siga multiplicando.

Tenemos esta igualdad: $3 \times (1abcd7) = abcd71$.

Entonces, al multiplicar a la izquierda, voy a tener $(3 \times d)$, pero este número no tiene que ser igual a 7, sino que tiene que ser igual a 5 (justamente, porque me llevaba '2'). Luego, ¿qué número tendré que poner como 'd'? Para que termine en 5, el número 'd' tendrá que ser $d = 5$. En ese caso, voy a tener:

$$3 \times (1abc57) = abc571$$

Como antes, ahora me voy a 'llevar' *uno*, que surgirá de $3 \times 5 = 15$. Por un lado, uso el '5' a quien le sumo los '2' que 'me llevaba' del paso anterior, pero al mismo tiempo necesito *no* olvidarme de que me 'llevo' *uno*. Ahora voy un poco más rápido porque creo que se entiende la idea. Y obtengo estos resultados (y le pido que los verifique por su cuenta):

---

32. En este caso, 'hacer las cuentas' significa multiplicar por 3 (o pensar en la tabla del 3) y fijarse que el único que termina en '1', es 21 (cuando uno calcula: $3 \times 7 = 21$). Los primeros 10 múltiplos de 3 son 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. El único que termina en '1' es 21.

$$3 \times (1ab857) = ab8571$$
$$3 \times (1a2857) = a28571$$
$$3 \times (142857) = 428571$$

De esta forma hemos *redescubierto* que lo que hicimos en la primera parte estaba bien. Por lo tanto, el *único número de cinco dígitos que cumple con la igualdad (o)* es

$$x = 42.857$$

Apéndice

Este número 42.857 tiene algunas *otras* particularidades que le propongo investigar 'por las suyas' (si es que este tipo de problemas le interesan). Por ejemplo: fíjese lo que sucede si usted toma el número 142.857 y lo va multiplicando por 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

$$142.857 \times 1 = 142.857$$
$$142.857 \times 2 = 285.714$$
$$142.857 \times 3 = 428.571$$
$$142.857 \times 4 = 571.428$$
$$142.857 \times 5 = 714.285$$
$$142.857 \times 6 = 857.142$$
$$142.857 \times 7 = 999.999$$

Lo notable es que los dígitos se van repitiendo en forma cíclica hasta llegar al 7. Allí, al multiplicar 142.857 por 7, se obtienen *todos* '9'.

Por supuesto, no puedo terminar acá. Le propongo que haga los siguientes cálculos. Son breves. Creo que sin que yo agregue ninguna otra cuenta, usted ya estará preparado —si llegó hasta este punto— para 'intuir' lo que tiene que suceder. ¿Qué es lo que cree que debería pasar?

Calcule: 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7…

¿Qué le parece que obtendrá? ¿Algunas otras ideas?

Huevos

Suponga que en una caja hay huevos de plástico. Están pintados de dos colores diferentes: rojo y azul. Algunos de ellos contienen perlas. Otros están vacíos. No es difícil imaginarse que la idea es tratar de ‘encontrar’ cuáles son los que tienen las perlas, minimizando el esfuerzo y, sobre todo, tratando de evitar una inspección ocular individual, por el tiempo que insumiría más el costo. Dicho esto, los datos son los siguientes.

1) Se sabe que el 40% del total de huevos tienen perlas. Por lo tanto, el 60% restante no tienen contenido. Desde afuera, son indistinguibles.
2) El 30% de los que contienen perlas están pintados de azul.
3) Por otro lado, el 10% de los que no contienen nada *también* están pintados de azul.

Esto es *todo* lo que se sabe. Ahora sí, la pregunta: “si usted mete la mano en la caja y retira un huevo azul, ¿qué probabilidad hay que contenga una perla?”.

Como siempre, mi propuesta es sugerirle que piense usted por su lado. Nadie la/lo está mirando, nadie la/lo juzga, está usted con usted, nadie más. Nadie es ni mejor ni peor porque pueda encontrar una respuesta (correcta). En todo caso, sirve para *entrenarse a pensar*, es un ‘desafío intelectual’. ¿No le dan ganas de imaginar o escribir o diseñar una estrategia que le permita ‘explicar’ una respuesta?

Es decir: uno puede intentar ‘adivinar’ y después mirar lo que está escrito a continuación. Otra alternativa es no intentar nada y leer directamente. Debe haber múltiples variantes intermedias también, pero ¿usted se pondría a resolver un crucigrama que, en lugar planear las definiciones de las palabras que debe poner en la cuadrícula, mostrara *directamente* las palabras que usted necesita? O de otra forma: ¿usted iría al cine para ver una película de detectives que le explicara quién es el culpable y/o el asesino en las primeras escenas? Lo mejor que uno puede hacer —se me ocurre—, si es que intenta ‘entretenerse’, es hacerlo en soledad y eventualmente después *pelearse* contra la solución si no coincide con la que usted encontró. ¡Ah, una cosa más! ¿Cómo sabemos que su respuesta no es mejor que la que aparece a continuación? ¿Y si el texto que sigue estuviera equivocado? ¿Quién garantiza *infalibilidad*? Bueno, creo que se entiende. Acá voy.

En lugar de usar *porcentajes*, voy a proponerle que pensemos el problema como si en la caja hubiera (en total) 100 huevos. Ahora traduzcamos los datos. (Fíjese lo que escribí antes y verá que son los mismos datos escritos de otra manera). Se sabe que:

1) 40 de los 100 huevos *contienen perlas*. Por lo tanto, 60 huevos están vacíos.
2) De los 40 huevos que *contienen perlas*, 30% están pintados de azul.
3) De los huevos que *no tienen contenido*, 10 también están pintados de azul.

La pregunta sigue siendo la misma: "si usted mete la mano en la caja y retira un huevo azul, ¿qué probabilidad hay de que contenga una perla?".

Quizás podamos abordar el problema de manera más directa. Fíjese si está de acuerdo con las conclusiones que voy a ir anotando.

1) Hay 100 huevos. De los 100, 40 contienen perlas y 60 están vacíos.
2) Entre los 40 que contienen perlas, hay 12 que son azules (el 30%).
3) Esto significa que los 28 restantes (que también tienen perlas) son rojos.
4) Se sabe que de los 60 huevos vacíos el 10% (o sea 6) son azules.
5) Luego, el 90% restante (los otros 54 huevos) están pintados de rojo.

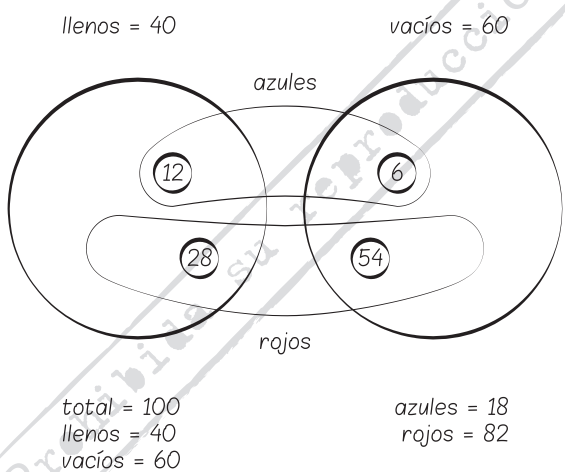
Con este análisis, sumemos para saber cuántos rojos y azules hay (le pido que usted haga las cuentas hasta convencerse de que lo que va a leer es correcto):

Huevos azules: 12 + 6 = 18
Huevos rojos: 28 + 54 = 82

Si se fija en el punto (2), descubrirá que hay en total 12 azules que contienen perlas. ¿No le parece que ahora está en condiciones de contestar la pregunta? Porque si mete la mano en la caja y saca un huevo azul (tendrá que ser uno de los 18), ahora sabemos que entre esos 18 hay 12 que tienen una perla. Moraleja: 12/18 = 2/3. Dos de cada tres huevos azules ¡contienen una perla! Y esa es la respuesta que buscábamos.

Si en lugar de haber reducido todo a 100 huevos hubiéramos seguido con los porcentajes y/o probabilidades, descubriríamos que si usted metiera la mano en la caja y retirara un huevo azul, habría 0,667 = (aprox.) 2/3 de posibilidades que el huevo *no esté vacío*.

Para terminar: este problema se puede abordar de múltiples maneras. Yo elegí un camino. Usted pudo muy bien haber elegido otro. Lo que importa es que aunque parezca antiintuitivo, el resultado es que *dos terceras partes* de los huevos azules contienen perlas. ¡Y listo!



Veneno

Este problema está girando en las redes sociales desde hace mucho tiempo. Supuestamente, apareció entre una serie de preguntas que tuvieron que contestar aspirantes a trabajar en Google. Más allá de que sea cierto, el problema es precioso y vale la pena invertir tiempo para pensarlo.

Es muy diferente de lo que uno está acostumbrado a pensar. No se trata de encontrar 'la' solución, sino de pensar una estrategia conducente. ¿Cuántas oportunidades tiene usted de *pensar* sin presión y solamente por placer? ¿Y si se le ocurre alguna idea que nunca había tenido antes? ¿Se va a robar usted misma/o de esa oportunidad? Sígame por acá.

Arriba de una mesa hay ocho frascos iguales. Todos contienen un líquido inocuo (que podría ser agua), salvo uno que contiene veneno para ratas. Se sabe además que si una rata consume ese veneno, se muere exactamente en diez minutos desde que lo probó. Como usted se imagina, el objetivo es tratar de encontrar cuál es el frasco con el veneno. Una manera posible sería pedir que le den una rata, elegir un frasco y darle a beber el contenido al animal. Espera entonces diez minutos. Si no se muere, pasa al segundo frasco. Siguiendo con esta idea, seguro va a encontrar cuál es el que contiene el veneno. Pero si yo le dijera que usted tiene *exactamente diez minutos* para determinarlo, esa estrategia no serviría.

Hagamos eso entonces. Tiene ahora diez minutos para encontrar ese frasco. Con esta restricción, usted advierte que con una sola rata no le va a alcanzar. En cambio, fíjese que si usted pidiera *ocho ratas* bastará con asignarle a cada rata uno de los frascos, darle el líquido que contiene para que lo beba y esperar los diez minutos. Seguro que una de las ratas se tiene que morir. El frasco del cual tomó será el indicador que buscamos.

Hasta acá quería llegar. Evidentemente con ocho ratas el problema tiene solución. ¿Se podrá encontrar el frasco que contiene el veneno con *menos* ratas?

La respuesta es sí, se puede. Más aún, el objetivo es determinar cuál es el *número mínimo* de ratas necesarias para detectar cuál es el frasco con el veneno.

Antes de cederle el turno, permítame que le haga una sugerencia más: empiece con menos frascos. Suponga que tiene cuatro frascos en lugar de ocho. Fíjese si puede encontrar cuál es el que tiene el veneno con menos de cuatro ratas y después vea si este ejemplo le permite 'imaginar' qué hacer si tiene ocho frascos, como en el enunciado original. Ahora sí, su turno.

Ideas

Para empezar, quiero contarle lo que me fue pasando a mí, y en el camino proponerle que si usted cree que alguna idea puede servirle, detenga inmediatamente la lectura y fíjese si puede seguir por su cuenta.

Suponga que tenemos cuatro frascos en lugar de ocho. Por supuesto, cuatro ratas alcanzan, pero la idea es encontrar el veneno usando menos roedores. ¿Se podrá con tres?

Le propongo lo siguiente. Numere los cuatro frascos: 1, 2, 3, 4. Separe el frasco número 4 y por ahora no lo toque. A cada una de las tres ratas, le da para que beban el líquido de los frascos 1, 2 y 3 respectivamente, y espere los 10 minutos. Si pasado ese tiempo se muere alguna de las ratas, eso le servirá para identificar cuál es el que contiene el veneno. Por otro lado, si pasado ese tiempo todas las ratas siguen vivas, eso significa que el veneno está en el frasco que usted se guardó, ¡el número 4! Es decir, con tres ratas *hay* una estrategia posible.

Ahora bien: ¿se podrá con dos? ¿No quiere pensar usted por su cuenta? Sigo.

Voy a llamar A y B a las dos ratas.

A la rata A, le doy para que beba de los frascos 1 y 3.
A la rata B, le doy para que beba de los frascos 2 y 3.

Ahora espero los diez minutos. ¿Qué puede pasar?

Si pasado el tiempo *no se muere ninguna rata*, el veneno no está en los frascos 1, 2 y 3 (ya que entre las dos ratas consumieron de esos tres frascos). ¿Qué se deduce entonces? Tal como usted advierte, eso significa que el veneno está en el frasco del cual no bebieron, ¡el número 4!

Si se muere la rata A solamente, eso significa que el veneno está en el frasco 1. ¿Por qué? Si bien la rata A tomó de los frascos 1 y 3, si el veneno hubiera estado en el frasco 3, entonces la rata B también se habría muerto. Como no es así, si se murió solamente A, ¡el veneno está en el frasco 1!

Si la que se muere es *solamente* la rata B, por el mismo argumento, el veneno está en el frasco 2 (ya que si estuviera en el 3, también habría muerto la rata A). Por último, si se mueren las *dos* ratas, es porque el veneno está en el frasco 3 ya que fue el único del que tomaron las dos. Y esto cubre todos los casos. Con cuatro frascos fueron suficientes dos ratas.

Antes de avanzar, permítame extraer otra conclusión que va a servir cuando tengamos más frascos. El 'argumento' central de lo que hice con cuatro frascos es que analicé *todos* los posibles casos de muerte de las dos ratas. Es decir, son cuatro casos potenciales: que no se muera ninguna, que se muera la rata A solamente, que se muera la rata B solamente y que se mueran las dos. En cada uno de estos casos, queda *unívocamente determinado el frasco*.

¿Y con ocho frascos? ¿Cómo utilizar las mismas ideas? ¿Cuáles son los casos posibles con tres ratas? Llamémoslas A, B y C.

1) no se muere ninguna
2) se muere solo A
3) se muere solo B
4) se muere solo C
5) se mueren A y B
6) se mueren A y C
7) se mueren B y C
8) se mueren A, B y C

(*)

¿Qué se deduce de esto? ¡Son justo ocho casos! Quiere decir que alcanzan tres ratas. ¿Por qué? Si distribuyo adecuadamente los líquidos de cada frasco y le doy una mezcla diferente a cada rata, todo lo que tengo que hacer es esperar que pasen los diez minutos. Dependiendo de qué ratas se mueran, voy a poder determinar *exactamente* cuál es el frasco que contiene el veneno[33].

33. Lo que estoy haciendo es asociar cada frasco con una de las posibles

Fíjese ahora en lo que escribí en (*). Cuando tenga los ocho frascos, debo utilizar esta estrategia:

A la rata A, le doy líquido de los frascos 2, 5, 6 y 8
A la rata B, le doy líquido de los frascos 3, 5, 7 y 8
A la rata C, le doy líquido de los frascos 4, 6, 7 y 8.

Listo. Con esa distribución, voy a poder identificar exactamente cuál es el frasco que tiene el veneno. ¿Por qué? Por ejemplo, si se murieron las ratas A y C, voy hasta (*) y me fijo de qué frasco tomaron ellas dos nada más. La respuesta es el frasco 6, y eso identifica el veneno. Si se murieron las tres, el veneno está en el frasco 8. Si murió solamente C, el 'frasco de la muerte' es el 4. Como usted advierte, con esta idea se resuelven todos los casos posibles.

Moraleja

Podría sacar varias. Para cuatro frascos (o menos), alcanzan dos ratas; para ocho frascos (o menos), bastan tres roedores; para 16 frascos (o menos), verá que alcanzan cuatro; para 32 frascos (o menos), alcanzan cinco, etc. ¿Qué relación hay entre todos estos números? Son todas potencias de 2. En el caso de cuatro frascos, como $4 = 2^2$, hacen falta dos ratas. Como $8 = 2^3$, hacen falta 3 ratas. En el caso de 16 frascos, $16 = 2^4$, hacen falta 4 ratas. En general, para cualquier número n, si uno tiene 2^n (o menos frascos), alcanzan n ratas[34].

---

variantes de muertes de las ratas. A cada situación posible le asigno un número de frasco. Cuando pasen los diez minutos, me fijo qué ratas se murieron y esa variante indicará cuál es el frasco que contiene el veneno.

34. Como usted advierte, lo que yo probé acá es que si uno tiene 2^n frascos,

Una conclusión más. No importa si usted llegó a la solución o no, créame. ¡El camino es lo único que interesa! El esfuerzo de haber intentado, de 'saber' (o intuir) que se podría con menos, le reveló una ruta que usted, muy posiblemente, nunca había usado antes. ¿Cómo sabe ahora que esta misma ruta no le servirá más adelante, aunque sea para decidir que es inconducente y no vale la pena recorrerla?

Es la matemática más pura y extremadamente bella y está allí, al alcance de todos.

entonces n ratas son *suficientes* para resolver el problema. Pero lo que no hice (y creo que no sabría cómo hacer) es demostrar que n es el *mínimo* número necesario para encontrar dónde está el veneno. Es decir: si uno tiene 2^n frascos, ¿se podrá descubrir cuál tiene el veneno con *menos* de n ratas?

Números conectados (o aritmética modular)

Suponga que tiene *todos* los números naturales, es decir: 1, 2, 3, 4, 5, etc., y que están conectados siguiendo el *esquema* que aparece en la Figura 1:

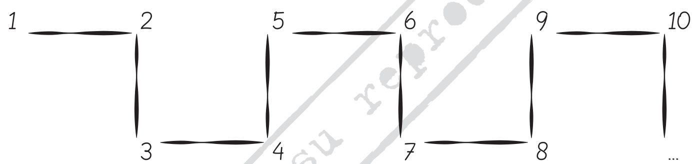
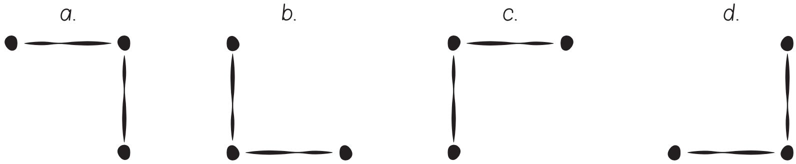


Figura 1

Como usted se da cuenta, en algún momento tendrán que aparecer en la lista: 121-122-123, y más adelante 235-236-237.

Mirando la Figura 1, ¿hay alguna forma de 'deducir' cuál va a ser la distribución de estos números? Es decir, ¿cuál o cuáles estarán conectados en forma horizontal y cuáles en forma vertical? Por supuesto, podríamos hacer el dibujo y contestar la pregunta cuando llegáramos a los números indicados, pero la idea es poder 'deducir' algún método que permita asegurar cuál será la ubicación sin tener que apelar a lo que podríamos llamar 'fuerza bruta'. ¿Usted qué piensa?

¿Cuál de las cuatro figuras se forman?



Solución

Lo que uno puede hacer es analizar el *patrón* en el que se repiten los números. Fíjese que, comenzando con el número 1, se puede sacar la siguiente conclusión:

1 ⟶ derecha; 2 ⟶ abajo; 3 ⟶ derecha; 4 ⟶ arriba

Como esto se replica 'cíclicamente', o sea, este patrón se repite indefinidamente, uno puede deducir que el cuarto número *tiene* que ser un múltiplo de 4.

Ahora, para contestar la primera parte de la pregunta, fijémonos si hay algún múltiplo de 4 entre los números 121, 122 y 123. Está claro que no, pero fíjese que 120 *sí* es múltiplo de 4, y desde allí se sube (en este caso al 121) y comienza una nueva vuelta. Uno puede deducir inmediatamente en qué orden están distribuidos los números:

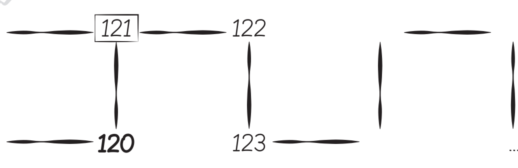


Figura 2

En la Figura 2 se ve claramente que, como 120 es el múltiplo de 4, allí es donde comienza un nuevo ciclo de cuatro números. Luego, aparece clara la relación que hay entre el 121-122-123.

Dicho esto: ¿no le parece que usted está en condiciones de contestar la segunda parte de la pregunta?

Sigo yo: hay que 'encontrar' la distribución de 235-236-237. De estos tres números, 236 es múltiplo de 4 ($59 \times 4 = 236$). Luego, la configuración de estos tres números *tiene* que ser la siguiente:

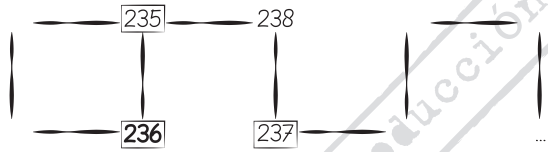


Figura 3

Moraleja

121-122-123 se relacionan como aparece en la Figura 2, mientras que 235-236-237, están conectados como indica la Figura 3. Y listo.

Con esos datos no se puede… ¿seguro?

Este es un problema precioso, original (y, por supuesto, no es mío). La primera vez que lo vi fue en un blog del prestigiosísimo matemático inglés James Propp.

Eso sí, como suelo escribir reiteradamente (y no me arrepiento para nada), le propongo que no se 'entregue' y acepte que el problema *tiene solución*. Solo requiere de *mucha* paciencia (quizás a usted no, pero a mí sí me hizo falta mucha para *no aceptar que se podía* hacer algo para encontrar la respuesta).

Ahora sí, el problema. Suponga que piensa *tres números enteros positivos o nulos* (x, y, z) y me dice que me dará la oportunidad de hacerle solamente *dos preguntas* para tratar de averiguarlos.

1) Usted me permite que yo elija por mi lado tres números (enteros positivos) A, B y C, de manera tal que usted tenga que contestarme cuál es el valor de esta suma:

$$Ax + By + Cz$$

Una vez que usted me haya contestado esa pregunta, entonces me permitirá hacerle otra.

2) Yo tendré que *volver a elegir* otros tres números enteros positivos o nulos, que voy a llamar D, E y F, y usted tendrá que contestarme ahora el valor de esta *nueva* suma:

$$Dx + Ey + Fz$$

Con estos datos, ¿hay alguna manera de establecer una 'estrategia' de elección de manera tal que cuando usted me conteste las dos preguntas yo pueda 'deducir' cuáles son los números x, y, z que usted había elegido originalmente?

Antes de dejarle el tiempo necesario para pensar la respuesta, y a diferencia de lo que me suele pasar —prefiero no incidir en su opinión preguntándole si cree que *siempre* se puede encontrar la solución—, voy a agregar: "Aunque no parezca, *siempre* se puede". Es decir, *siempre se pueden encontrar* A, *B*, *C*, *D*, *E y F*, de manera tal que, contestando las dos preguntas que escribí antes, usted podrá deducir cuáles son x, y, z. ¿No es notable que sea cierto?

Ahora sí, le toca a usted.

Una potencial solución

Voy a poner un ejemplo, solo porque a mí me ayudó muchísimo para *entender* cómo resolver el caso general. Suponga que los números que usted eligió son 13, 29 y 11.

En ese caso, yo voy a elegir A = B = C = 1. Es decir, cuando usted me conteste la pregunta sobre cuál es el valor de la *suma*

$$1 \times 13 + 1 \times 29 + 1 \times 11 = 53,$$

lo que usted habrá hecho es decirme cuánto suman los tres números que eligió. En este caso, 53.

En este punto, voy a elegir una potencia de 10 (sí, de 10) que sea *mayor estricto que* 53. Será 100, pero como usted verá[35], cualquiera mayor que 100 también servirá.

Ahora, voy a elegir mis números D, E y F así:

$$D = 100^2 = 10.000 \qquad E = 100^1 \qquad F = 1$$

Le voy a hacer la pregunta que usted me *permite* hacer. ¿Cuánto suma la siguiente operación?

$$10.000 \times x + 100 \times y + 1 \times z$$

¿Quiere fijarse lo que sucede? Recuerde que los números que usted había elegido habían sido 13, 29 y 11. Entonces, me tiene que ofrecer como resultado a la segunda pregunta: ¿cuál es el resultado de la siguiente la suma?

$$\begin{gathered} 10.000 \times 13 + 100 \times 29 + 1 \times 11 = \\ 130.000 + 2900 + 11 = 132.911 \end{gathered}$$

¿Se da cuenta de lo que ha pasado? Los tres números que usted había elegido (13, 29 y 11) aparecen *explícitamente* en la segunda respuesta. ¡Y listo! ¿No es extraordinario?

Para terminar, le propongo ahora que se fije qué pasaría si en lugar de haber elegido 100 (como potencia de 10), hubiera

35. La idea es que, al haber *sumado* los tres números, ahora ya sabemos cuántos dígitos tienen. Ese es un dato importante para después elegir la potencia de 10.

elegido 1000 (u otra mayor). En todo caso, creo que la parte *más* interesante para explorar es la siguiente: "¿por qué funciona?".

Apéndice

No puedo resistir escribir lo que pasaría si en lugar de elegir 100, hubiéramos elegido n = 1.000 (= 10^3).

De acuerdo con lo que escribí antes, los números D, E y F deberían ser:

$$D = n^2,\ E = n,\ F = 1$$

Cuando elegí n = 100 (o sea, n = 10^2), resultaban D = 10.000, E = 100, F = 1, pero ahora, cuando n = 1.000 = 10^3, D, E y F cambian. Obtenemos estos otros tres:

$$n^2 \times 13 + n \text{ x } 29 + 1 \times 11 =$$

$$= (1.000.000 \times 13) + (1.000 \times 29) + (1 \times 11) =$$
$$= 13.000.000 + 29.000 + 11 = 13.029.011.$$

Es decir, en este caso, *aparecen* también los tres números que quería encontrar (13, 29 y 11). La ventaja que tuvo haber elegido n = 100 = 10^2 es que sirvió para que aparecieran los *tres* separados, pero a los efectos prácticos de 'descubrir' los tres números, cualquier elección de una potencia de 10 mayor que 100, sirve igual.

Teorema de Bayes para saber quién gana si llueve

Suponga que usted está interesado en apostar dinero en carreras de caballos, pero hay una sola especialidad que lo atrae: cuando solamente corren dos caballos, uno contra otro.

Justamente este es un caso que quiero que analicemos juntos (usted y yo). Supongamos que hay dos caballos que voy a llamar Dragon y Franco (para abreviar, D y F). Hasta acá, se sabe que corrieron 12 veces, uno contra otro. Los resultados fueron los siguientes:

D ganó 5 veces
F ganó 7 veces

Si corrieran de nuevo y usted tuviera que apostar, lo único que podría usar como referencia es lo que sucedió en esas 12 carreras. Por lo tanto, la probabilidad de que gane D es 5/12 = 0,41 (como aproximación, solamente considero los primeros dos decimales). Y la probabilidad de que gane F es 7/12 = 0,58.

Todo bien, ¿no? Sin embargo, voy a aportar un nuevo factor al cálculo. De las cinco veces que ganó D, en tres de ellas llovió antes de la carrera[36]. Por otro lado, llovió solamente una vez cuando D perdió.

Moraleja (parcial): parece que a D le va mejor cuando llueve *antes* de la carrera.

Lo interesante es que justo el día en el que usted está en el hipódromo y está a punto de apostar… ¡está lloviendo!

Pregunta entonces: ¿cómo afecta su decisión? ¿El hecho de que esté lloviendo lo 'fuerza' a cambiar?

Analicemos dos escenarios:

a) Si usted *ignorara* la información acerca del tiempo y usara solamente lo que sabe de las 12 carreras entre ellos medidas en triunfos y derrotas, debería apostar por F (ya que la probabilidad de ganar es 7/12 = 0,58).
b) Si usted usara *únicamente* la información del tiempo (e ignorara lo que pasó en general en el total de las carreras), debería optar por D. ¿Por qué? Porque de las cinco carreras en las que ganó D, en tres de ellas estuvo lloviendo. En ese caso, usted podría estimar la probabilidad de que gane D en 3/5 = 0,6 (o sea, el 60%). Sin embargo, si procediera de esta forma, usted estaría *ignorando* un hecho crucial: en total, D ganó *menos carreras* que F.

El objetivo entonces es tratar de 'combinar' estas dos partes de la información y encontrar cuál es la probabilidad de que D gane la carrera *incluyendo* todo lo que se sabe.

36. Cada vez que escriba que llovió o había llovido, hay que entender que llovió inmediatamente *antes* de la carrera o llovía *durante* el desarrollo, que de todas formas, teniendo en cuenta la longitud de la pista, podemos suponer que 'a lo sumo' se trató de una lluvia de dos minutos.

Análisis un poco más fino

Examinemos juntos cuatro posibles situaciones:

1) D gana cuando llueve.
2) D gana cuando *no* llueve.
3) D pierde cuando llueve.
4) D pierde cuando *no* llueve.

Con los datos que tenemos, sabemos que de las cinco veces que ganó D, en tres había llovido antes (o durante). También estamos al tanto de que solamente una de las veces que perdió había llovido antes (o durante). Esto significa que debió haber ganado dos veces en un día soleado (o sin lluvia).

Como en total hubo 12 carreras, el número de carreras en las que perdió en un día soleado fueron: 12 – (3 + 1 + 2) = 6.

Ahora, voy a resumir todo en una tabla:

	Día lluvioso	Día soleado
D ganó	3	2
D perdió	1	6

El problema que queremos resolver, o si usted prefiere, la *pregunta* que queremos contestar, es la siguiente: "¿Cuál es la probabilidad de que D gane la carrera que se está por correr, *sabiendo que llueve*?".

Acá quiero hacer una breve pausa, pero *muy importante*. Le pido por favor que lea lo que sigue y detecte que las dos frases que voy a escribir *no miden la misma probabilidad*:

1) La probabilidad de que D gane *sabiendo que llueve*

no es lo mismo que

2) la probabilidad de que *haya llovido* cuando D ganó la carrera.

De hecho, ya calculamos esta última probabilidad y sabemos que resulta ser 0,6 (el dato que tenemos dice que, de las cinco veces que ganó D, llovió en tres). Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que D gane la carrera que sigue habida cuenta de que está lloviendo?

Para calcular una probabilidad, hay que dividir el *número de veces que 'algo' sucedió* por *el número de veces que ese mismo 'algo' pudo haber sucedido.* Sabemos que D ganó en tres oportunidades cuando había llovido, pero en total hubo cuatro días con hubo lluvia. Por lo tanto, la probabilidad de que D gane la carrera, sabiendo que está lloviendo, es ¾, o sea, 0,75 (si usted prefiere, 75%).

Más importante aún es deducir que es *mucho más probable que D gane la carrera*, aunque en total F haya ganado la mayoría de las veces que enfrentó a D mano a mano.

Como resumen, esta información es muy relevante: si usted está por apostar dinero, como está lloviendo, apueste por D. Si no lloviera, apueste por F.

El teorema de Bayes no es más que una generalización del procedimiento que describí en este capítulo, ya que se trata de determinar la probabilidad de que un evento suceda cuando hay un elemento extra o particular, o trozos de evidencia que *importan* si uno está por calcular esa probabilidad, o mejor dicho, que *afectan* esa probabilidad. En el caso anterior, no sería lo mismo calcular la probabilidad de que D gane la carrera, si uno no agregara la información de que está lloviendo. Ese dato termina siendo decisivo si uno mira lo que sucedió en el pasado cuando ambos se enfrentaron.

El teorema se resume en esta fórmula:

$$P(A|B) = P(B|A) \times P(A) / P(B) \qquad (*)$$

Cuando escribo $P(A|B)$, usted debería leer: la probabilidad de que suceda A habida cuenta de que ya sabemos que sucedió B. O dicho de otra forma, es la probabilidad de que suceda A cuando *se sabe* que B ya sucedió.

En el ejemplo de la carrera de caballos (D y F), en un 'mano a mano', voy a interpretar como el evento A que 'D gana la carrera', mientras que B es la evidencia de que está lloviendo.

El problema que queremos resolver (o la probabilidad que queremos calcular) es $P(A|B)$.

Por otro lado, $P(B|A)$ es 3/5, o sea 0,6, que corresponde a decir que sabiendo que D ganó (a la que llamé premisa A), *¿cuál es la probabilidad de que hubiera llovido?* (por eso resulta ser 3/5).

Además, $P(A)$ es la probabilidad de que D gane la carrera (independientemente del tiempo). En este caso, como corrieron 12 veces y D ganó nada más que en cinco, entonces $P(A) = 5/12 = 0{,}41$.

Finalmente, ¿cómo interpretar $P(B)$? Esto significa estimar la probabilidad de que llueva (o haya llovido), independientemente del resultado de la carrera entre ambos. En este caso, $P(B) = 4/12 = 0{,}33$, ya que sabemos que llovió en cuatro días de los 12 en los que se corrieron carreras.

Ahora tenemos todos los datos que necesitamos para usar la fórmula (*) del Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = P(B|A) \times P(A) / P(B) = (0{,}6) \times (0{,}41) / (0{,}33) = 0{,}75$$

Si usted se fija lo escribí antes, verá que la respuesta que obtuvimos es la misma que a la que hubiéramos llegado usando los datos que figuran en la Tabla 1. Esta tabla cuenta los triunfos de D en los días en los que llueve y en los que no.

La idea de usar el Teorema de Bayes es hacer el cálculo para estimar cualquier probabilidad, usando las probabilidades que conocemos y no los números que aparecen al *contar* la cantidad de veces que sucedió un evento. Esto es muy bueno porque en la práctica uno nunca (por no decir 'casi nunca') tenemos esos datos, pero *sí* podemos calcular la probabilidad de que ciertos eventos sucedan (o no).

Pero claro, si podemos *contar* (como hicimos en este ejemplo), entonces el Teorema de Bayes no aporta nada nuevo, nada que no hubiéramos podido obtener haciendo las cuentas.

¿Cómo se demuestra y/o entiende el Teorema de Bayes?
¿De dónde sale la fórmula?

Ahora quiero encontrar la fórmula (*) que resume el Teorema de Bayes, y mostrar que se puede obtener a partir de contar casos, tanto los favorables como los posibles.

Volvamos a las carreras de caballos entre D y F. Lo que queríamos hacer es calcular la probabilidad de que D gane la carrera, *sabiendo* que llueve. Esta probabilidad así:

$$P(L|G)$$

Entonces, P(L|G) es solamente una *probabilidad* que puede ser calculada dividiendo el número de veces que D ganó en un día lluvioso por el número de veces que D ganó *en total*.

Puesto en *símbolos*, lo podría expresar así:

P(L|G) = N(D ganó y además llovía) / N(ganó)[37] (**)

Esto sería lo que uno haría *siempre* si quiere calcular la probabilidad de que un evento suceda: *número* de veces que D ganó y además llovía, dividido por el número de veces que ganó *en total*. O sea,

N(D ganó y además llovía) = número de veces que D ganó y además llovía,

y

N(ganó) = número de veces que D ganó.

Si ahora dividimos el numerador y denominador de (**) por N, donde N es el número de carreras que corrieron en total, obtenemos:

P(llovía|D ganó) = ([N(D ganó y además llovía)]/N) / (N(ganó)/N).

Pero justamente al dividir por N, lo que estamos haciendo es calcular tanto en el numerador como en el denominador, la *probabilidad* de que cada evento suceda (porque lo estamos dividiendo por el número total de casos posibles). En consecuencia,

37. Cuando escribo *N(D ganó y además llovía)* es una manera de 'escribir' el **número** de veces que D ganó y además llovía, mientras que *N(ganó)* es la manera que elijo para escribir el **número** de veces que ganó D.

puedo *reemplazar* (tanto en el numerador como en el denominador):

$$P(\text{llovía}|\text{D ganó}) = P(\text{D ganó y además llovía}) \,/\, P(\text{ganó})$$

$$\boxed{\mathbf{P(\text{llovía}|\text{D ganó}) \times P(\text{ganó}) = P(\text{D ganó y además llovía})}}$$

En realidad, no hemos demostrado nada acá. Todo lo que hicimos fue conmutar[38] los símbolos 'D ganó' por 'llovía'.

Si ahora hacemos lo mismo, *antes* de conmutar esos símbolos, se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{P(\text{D ganó}|\text{llovía}) \times P(\text{llovía}) = P(\text{D ganó y además llovía})}}$$

Juntando todo lo que figura en las dos ecuaciones 'enmarcadas', se tiene:

$$\boxed{\mathbf{P(\text{D ganó}|\text{llovía}) = P(\text{llovía}|\text{D ganó}) \times P(\text{D ganó}) / P(\text{llovía})}}$$

Esta última igualdad es, justamente, el Teorema de Bayes (en este caso):

$$P(\text{D ganó}|\text{llovía}) = P(\text{llovía}|\text{D ganó}) \times P(\text{D ganó}) \,/\, P(\text{llovía}) =$$

$$= \{(3/5) \times (5/12)\} \,/\, (4/12) = (3 \times 5 \times 12)/(5 \times 12 \times 4) = 3/4 = \boxed{0{,}75}$$

38. 'Conmutar', en este caso, significa intercambiar los lugares: en donde figura 'D ganó' poner 'llovía' y lo mismo en el otro sentido; es decir, en donde figuraba 'llovía' ahora aparece 'D ganó'. Verifíquelo usted.

Mínimo de los máximos y máximo de los mínimos

Este es un problema precioso porque invita a reflexionar sobre una situación que podría suceder en la vida real. De hecho, la/lo prepararía para pensar qué decisión tomar.

Supongamos que uno está frente a un tablero (como si fuera de ajedrez), pero en lugar de ser de 8 × 8, es de 5 × 5.

Voy a distribuir los primeros 25 números en forma aleatoria. Es decir, el tablero podría ser este (tómelo como un ejemplo, usted prepare el que quiera).

7	12	24	4	13
1	16	11	23	15
4	8	2	19	21
18	14	6	25	9
3	10	17	22	20

Como usted ve, yo puse los 25 primeros naturales de cualquier forma.

Le propongo que ahora iniciemos una suerte de ‘juego’. Observe la distribución de los números y elija una *fila* cualquiera. Yo voy a hacer lo mismo, pero en lugar de una fila, voy a elegir una *columna* cualquiera.

Ahora nos vamos a fijar en la 'casilla' que resulta de la intersección de la fila que usted eligió y la columna que elegí yo. La idea es que yo le pague a usted el número que figura en esa 'casilla'.

No hace falta que diga demasiado más: su idea es tratar de conseguir *maximizar* ese número (de manera tal que yo le pague la mayor cantidad de dinero posible) y, a la vez, yo voy a tratar de hacer lo contrario: *minimizar* mis pérdidas. ¿Qué estrategia usar? Es decir, ¿cómo diseñar una estrategia que le permita a usted obtener el mayor beneficio y a mí la menor pérdida?

Acá es donde interviene (o debería intervenir) la matemática, aunque no lo piense en términos de 'números' (que sería y es lo más habitual dentro de la sociedad en la que vivimos). Piense que la matemática será la que le dará una buena idea sobre qué tipo de *estrategia* diseñar para tratar de *mejorarnos las posibilidades de los dos.* ¿Qué hacer? ¿Quiere pensar?

Algunas ideas

Como siempre, más allá de resolver este ejemplo en particular, la idea debería ser construir una estrategia que sea *extrapolable* a casos generales, en los cuales la 'grilla' sea no solo de 5 × 5, sino de (n × n), para cualquier número *n*. Incluso, para después preguntarse si es necesario que sea una grilla cuadrada, y si pudiéramos ampliarla a grillas de forma (n × m), en donde n y m no tengan por qué ser el mismo número. Pero, bueno, me adelanté.

Le propongo lo siguiente: usted elija de *cada* fila el número *más chico*. O sea, vaya recorriendo fila por fila y marque cuál es el menor de todos los números que allí figuran. Yo lo marco acá:

7	12	24	**4**	13
1	16	11	23	15
4	8	**2**	19	21
18	14	**6**	25	9
3	**3**	17	22	20

La lista entonces es 4, 1, 2, 6, 3. De estos cinco números, quedémonos con el *más grande*, o sea, con el 6. Lo voy a llamar X.

Este número X = 6 es el más grande de los *más chicos* de cada fila. Por otro lado, el 6 está ubicado en la fila 4. De esa forma, usted se garantiza (si elige esa fila), que cualquiera sea la columna que yo vaya a elegir, *como mínimo* usted va a cobrar 6 (si no más, pero *por lo menos* 6). O sea, de todos los posibles números pequeños que hay en la grilla, usted se va a garantizar que recibirá el *mayor* si elige la fila 4.

Ahora me toca a mí. Yo voy a tratar de hacer lo contrario. Voy a elegir de todas las columnas el número más grande. Fíjese cómo queda el cuadrado ahora:

7	12	**24**	4	13
1	**16**	11	23	15
4	8	2	19	**21**
18	14	6	**25**	9
3	3	17	22	20

Yo quiero elegir Y, que será el *más chico* de los cinco números elegidos (18, 16, 24, 25, 21). En este caso, Y = 16, y aparece en la segunda columna. ¿Por qué? Yo voy a elegir la segunda columna porque, más allá de fila elija usted, *como mucho* voy a tener que pagarle 16. En algún sentido, estoy *minimizando* mi daño y, por otro lado, *cuantificándolo*. Pase lo que pase, elija lo que usted elija, yo sé que *a lo sumo* voy a tener que pagarle 16 (si no menos).

Llega el momento de tomar la decisión final. Usted elige su fila (la número 4) y yo elijo mi columna (la número 2): el número que figura en la casilla que está en la 'intersección' de ambas es 14. Es decir, hemos descubierto que X < Y.

Los dos nos quedamos contentos: usted consiguió que yo le pagara más que 6 (de hecho le tendré que pagar 14), y yo logré pagarle *menos* que 16. Naturalmente, la pregunta es: ¿será siempre verdad que X < Y?

En realidad, la respuesta es sí, aunque podrían ser iguales, en el caso extremo. ¿Cómo comprobarlo? ¿Quiere pensar usted?

La idea —creo— es conductora a la respuesta. Para poder 'determinar X', vamos a elegir primero un número de cada fila que sea el *más chico* de todos los números que figuran allí, en esa fila. Ahora, piense que cada uno de esos cinco números es el *más chico* de esa fila y que cuando termine eligiendo X es porque de esos cinco, me quedé con el *más grande.* Sí, el *más grande* de los más chicos, esa es una cualidad que nunca se pierde. Mientras tanto, yo voy eligiendo el *más grande* de cada columna. En particular, cada uno de esos numeritos no solo es el más grande de la columna, sino que, como está en alguna de las filas, es *mayor* que el numerito de esa fila que usted tuvo que considerar. Por ejemplo, si en la columna uno usted eligió un número cualquiera (digamos el 18, siguiendo el ejemplo anterior), es porque el 18 no solo es el mayor de la columna uno, sino que también pertenece a la cuarta fila. De esa cuarta fila, el número 18 ¡no puede ser el menor! (en particular, no puede ser el menor porque si no, lo hubiera seleccionado usted mientras elegía números). Y como los números no aparecen repetidos, el 18 *no puede ser el menor de la cuarta fila* (si usted mira, verá que lo que digo es cierto).

Es decir, finalmente lo que sucede es que el 18 es *mayor* que el número que usted eligió de la cuarta fila (el 6).

Si me siguió en este ejemplo particular (y le propondría que no avance si no puede generarse sus *propios argumentos*), verá que el resto es sencillo. Aun el más grande de los pequeños es inexorablemente menor que el más chico de los suyos. O sea, uno comprueba que $X < Y$, como queríamos ver.

Final

Supongo que a esta altura usted convendrá conmigo que si en lugar de haber sido un cuadrado de 5×5, yo hubiera elegido cualquier cuadrado de $n \times n$, el argumento habría sido idéntico. Más aún: cuadrado o rectangular, volvería a suceder lo mismo. Y ese es el final.

Cuadrado de la suma y diferencia de cuadrados

En la escuela aprendemos muchas fórmulas algebraicas que uno no entiende muy bien de dónde vienen (ni para qué sirven). Eso hace que muchas veces uno las recuerde como si estuviera manipulando letras y, por supuesto, las olvide ‘casi’ inmediatamente.

Quiero aprovechar esta oportunidad para que deduzcamos juntos algunas en forma gráfica, algo así como descubrirlas *simplemente mirando dibujos*. Acompáñeme por acá.

1) La primera es el desarrollo del famoso ‘binomio cuadrado perfecto’. Estoy casi seguro de que usted habrá escuchado hablar de él. ¿Qué quiere decir esto?

Suponga que usted tiene dos números cualesquiera, que voy a llamar A y B. Con estos dos números puedo construir (por ejemplo) dos cuadrados y un rectángulo.

Un cuadrado tiene lado A.

Otro cuadrado tiene lado B.

El rectángulo tiene dos lados iguales a A y dos lados iguales a B.

Como usted sabe, es fácil calcular las áreas de estos cuadrados y del rectángulo. El primer cuadrado tiene área igual a $A \times A = A^2$, el segundo cuadrado tiene área $B \times B = B^2$ y, por último, el rectángulo tiene superficie $A \times B$.

Ahora, sígame por acá porque voy a construir un *nuevo* cuadrado. Este *nuevo cuadrado* tendrá como lado la suma de los dos números A y B, es decir, cada lado de este cuadrado mide (A+B).

Fíjese en la Figura 1, voy a obtener el 'lado' del cuadrado *sumando* A *más* B.

Supongamos que ahora quiero calcular el 'área' o la 'superficie' de este nuevo cuadrado. Uno tendría la *tentación* de calcular: $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. Pero si observa la Figura 1 otra vez, verá que esta igualdad *¡es falsa!*

Antes que yo escriba la fórmula, ¿no tiene ganas de deducir usted cuánto resulta el área de este nuevo cuadrado? Sigo yo:

$$(A + B)^2 = A^2 + A \times B + B \times A + B^2,$$

o lo que es lo mismo:

$$A^2 + 2AB + B^2$$

Esta última *sí* es la fórmula que uno aprendió *casi* de memoria:

"El cuadrado de la suma es el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo":

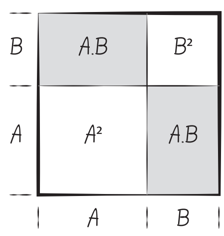


Figura 1

2) Ahora le propongo que pensemos juntos *cómo interpretar gráficamente* otra de las fórmulas algebraicas con la que nos 'taladraron' el cerebro cuando éramos jóvenes. Es la que se conoce con el nombre de 'Diferencia de cuadrados'.

Como antes, tomemos dos números positivos: C y D. Quiero calcular *gráficamente* $C^2 - D^2$.

Le propongo entonces que hagamos lo siguiente. Por un lado, dibujemos el cuadrado que tiene lado C y fijémonos en el área: C^2. Por otro lado, como D es *más chico* que C, dibujemos el cuadrado que tiene a D por lado. La superficie de este cuadrado se calcula así: D^2

Ahora bien: nuestro objetivo es calcular $C^2 - D^2$.

Fíjese en la Figura 2. Dentro del cuadrado de lado C, *recorté* el cuadrado que tiene lado D. Advertirá que quedaron dos rectángulos: 1 y 2. ¿Quiere deducir usted los lados de cada uno de estos rectángulos? Sigo yo.

El rectángulo 1 tiene dos lados iguales a D (los verticales) y los dos horizontales miden (C – D). Por otro lado, el rectángulo 2 tiene dos lados iguales a (C – D) (los dos verticales) y dos lados (los horizontales) iguales a C.

Ahora, separo el rectángulo 1 y lo 'paro' para poder adjuntarlo al rectángulo 2 (fíjese en la Figura 3).

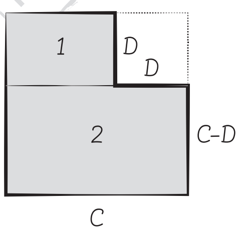


Figura 2

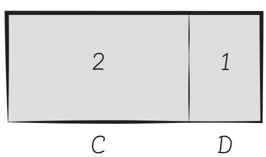


Figura 3

En la Figura 2, ya dedujimos que el área sombreada corresponde a $C^2 - D^2$. Por otro lado, calculemos el área del rectángulo que aparece en la Figura 3 (que tiene que ser igual a $C^2 - D^2$).

El rectángulo que aparece en la Figura 3 tiene dos lados (los verticales) iguales a $(C - D)$ y los dos horizontales, son iguales a $(C + D)$.

¿Cómo se calcula el área de este rectángulo? Multiplicando 'lado' por 'lado'. En consecuencia, se obtiene

$$(C + D) \times (C - D).$$

De esta forma, acabamos de 'deducir' que

$$C^2 - D^2 = (C + D) \times (C - D)$$

¡Y listo! Con estas tres figuras hemos logrado *convencernos* (al menos eso espero) de cuáles son las fórmulas que permiten calcular el 'cuadrado de la suma' y 'la diferencia de cuadrados'.

¿No resultó bonita esta demostración?

¿Puedo pedirle un favor?

¡Peligro! Si usted mira a continuación, en esta misma página, aparecen muchos números, dibujos y letras ‘x’. Sobre todo estas letras ‘x’, que son *tremendas*. Están asociadas con los peores recuerdos de niños, ¿no es así? Pero quédese tranquila/o, no sufra. Son inofensivas. ¡No hacen nada! Estuve hablando con ellas y me explicaron que, como no les di tiempo a disfrazarse de nada, tienen que presentarse así, como son… Yo sé que la tentación es abandonar acá, pero con su permiso, quisiera pedirle un favor. ¿Puedo?

Hace unos pocos días, en una ‘discusión’ que teníamos sobre difusión de la matemática, algunos colegas me dijeron que si yo pensaba en presentar un problema como este, necesitaba *ponerle una etiqueta, un nombre*. Este nombre, justamente, serviría —de acuerdo con ellos— de marco para que quien lo lea *sepa qué herramientas podría usar para abordarlo*. Si no —sostienen—, virtualmente nadie lo podría resolver. Yo me resistí. Me resistí porque no solo creo que es innecesario, sino que además cometería el mismo error en el que muchas veces caemos docentes y alumnos. Los docentes, explicando el *problema ‘tipo’*, y por supuesto los alumnos, reclamando al docente que les muestre un *problema ‘tipo’*. Bueno, no, no hay ‘problema tipo’ porque sencillamente en la vida no hay *problemas ‘tipo’*. Lo que sí hay son problemas… *a secas*.

Por eso necesito pedirle un favor: contar con su ayuda. Exige un mínimo esfuerzo de concentración. Pero es divertido y entretenido. Sí, (le) hará falta tiempo para pensarlo. Si no lo tiene ahora, guárdelo para otro momento, pero no abandone sin darse al menos *una* oportunidad para ver de qué se trata. Acá voy.

En un club hay 28 socios. El presidente quiere decidir qué hacer con un salón que pueden ocupar los sábados por la noche. Como el grupo es muy variado, hay algunos que quieren ver una película, otros prefieren jugar a los dados y hay un grupo que optaría por jugar a las cartas.

El presidente prepara tres hojas en donde cada socio puede inscribir su nombre: C (por cartas), D (por dados) y P (por películas) son los nombres de las listas. Cada socio puede anotarse en más de una lista, incluso en las tres.

El resultado que obtuvo fue el siguiente:

14 inscriptos para jugar a las cartas.
19 inscriptos para jugar a los dados.
16 inscriptos para ver una película.

Mirando los nombres que figuraban en estas tres listas, descubrió que había varias personas que estaban en dos de las tres:

13 socios aparecían en las listas de cartas y dados.
7 socios en las listas de dados y película.
5 socios estaban en las listas de película y cartas.

Si usted fuera el presidente del club y recibiera estos datos, ¿estaría en condiciones de contestar si hay socios que se inscribieron en las *tres* listas? ¿Alcanza con la información de la encuesta?

Ahora le toca a usted. Le sugiero que no trate de 'acordarse' de nada de lo que alguna vez estudió. ¡No hace falta recordar nada! Todo lo que hace falta es pensar. Nada más. Nada menos.

Por supuesto, hay muchísimas formas de abordar este problema, pero quisiera establecer una suerte de 'hoja de ruta' avanzando con la ayuda de algunas figuras. Acompáñeme por acá.

Cada socio inscribió su nombre *por lo menos* en una de las tres listas: C, D y P, dependiendo de si prefería jugar a las cartas, a los dados o ver una película, respectivamente.

Llega el momento en hacer algunos *dibujitos*. Es decir, voy a *modelar* el problema para que sea más fácil de imaginar. En lugar de hacer tres listas, hice tres círculos y en lugar de poner los nombres de los socios, puse 'puntitos' (Figura 1). Como el objetivo es determinar cuántos nombres figuran en las *tres* listas, la idea es *superponer* los círculos (Figura 2) y contar *cuántos* puntitos están en los tres, en el lugar en dónde puse a la famosa letra 'x' (Figura 3).

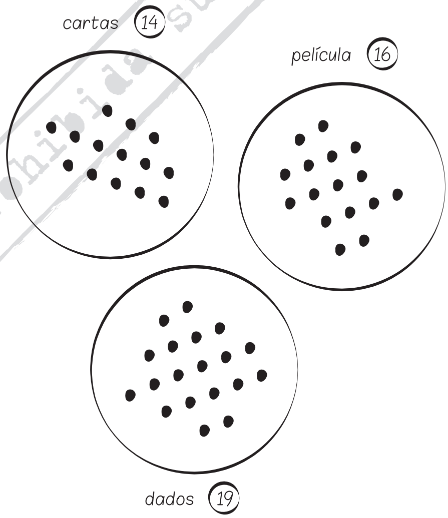


Figura 1

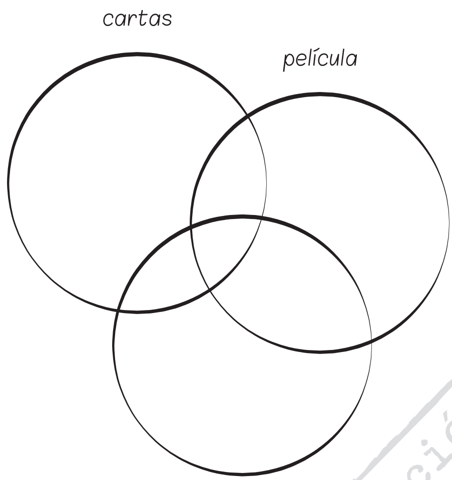


Figura 2

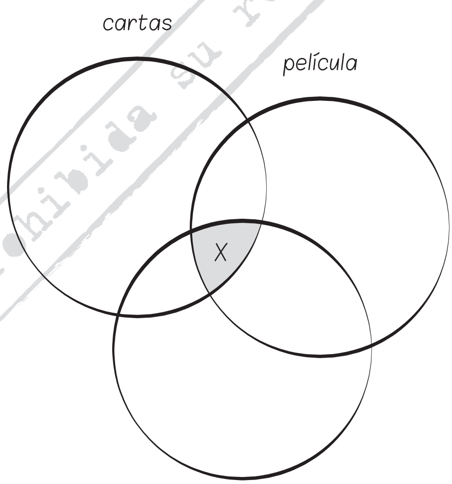


Figura 3

Si hiciera *chocar* o *superponer* los círculos de a dos, tendría la figura 4. Estos ‘cruces’ muestran la cantidad de personas que aparecen en las listas C y P, P y D y también D y C.

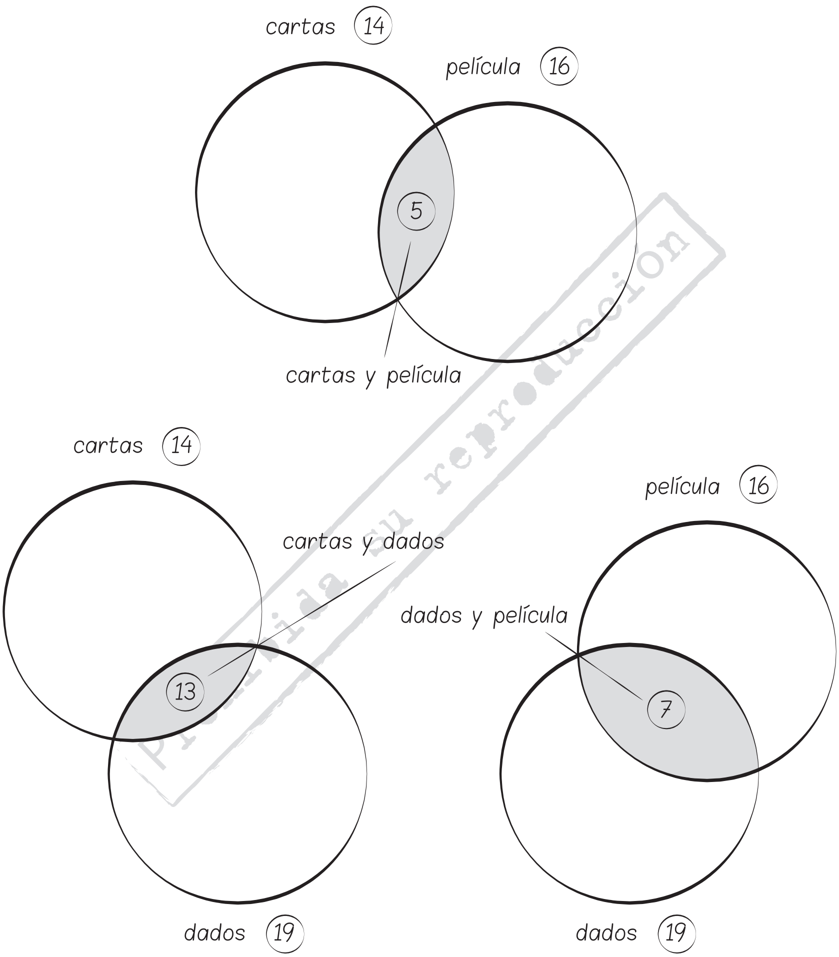


Figura 4

Después de juntar toda la información queda la figura 5. A esta altura tengo miedo de que esto se esté transformando en una *sopa de letras* y usted termine huyendo despavorida/o. ¡No se retire aún! Hasta acá, *todo lo que hice fue reescribir lo que ya sabíamos*, solo que lo puse en una forma más 'gráfica'.

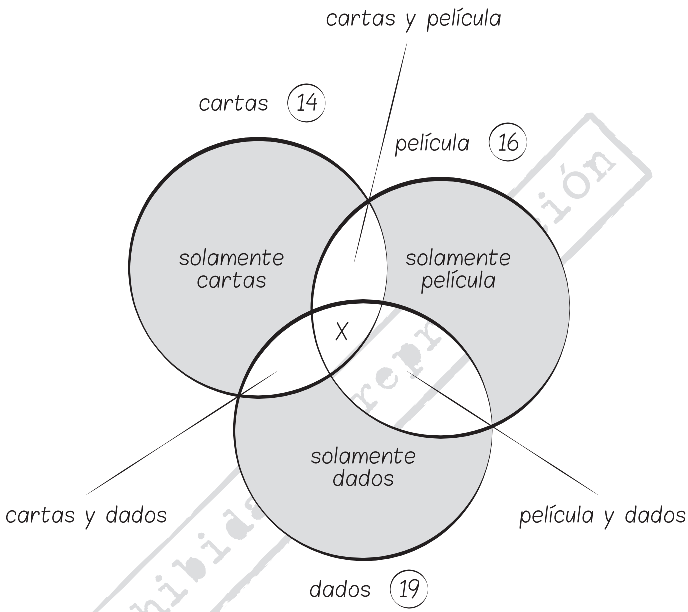


Figura 5

Como escribí antes, el objetivo es *determinar* cuántos puntitos 'viven' en el sector en donde figura 'x'. Vuelva a mirar la Figura 5. ¿Ve los *siete sectores* que aparecen marcados? Son estos:

Sector 1: Solamente Cartas
Sector 2: Cartas y Dados
Sector 3: Cartas y Película
Sector 4: Solamente Película

Sector 5: Película y Dados

Sector 6: Solamente Dados

Sector 7: x. *Este es el sector* que queremos determinar cuántos puntos tiene.

Todos ellos aparecen representados en la Figura 6. Empecemos a contar cuántos puntitos tiene cada uno.

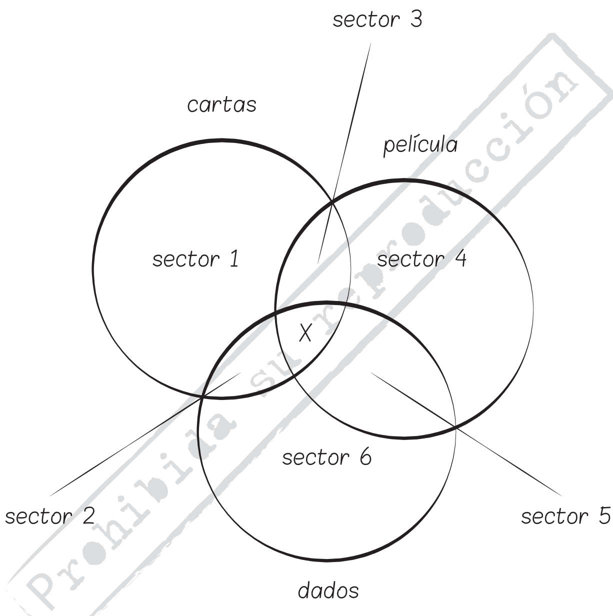


Figura 6

Empiezo con el sector 2. ¿Qué personas aparecen allí? (intente usted, por favor, y verá por qué le hago la pregunta en este lugar). Allí están los 13 socios que se anotaron en las listas C y D… ¡pero que *no* quieren ver una película! O sea, de los 13 nombres que aparecen, *¡hay que restar x!* ¿Por qué? Porque yo quiero contar los que figuran *exclusivamente* en las dos listas (C y D), pero *no* a los que también están en P. ¿Cómo hago para sacarlos? ¡Hay que restar x!

Por lo tanto, el sector 2 consiste de (13 – x) personas.

Con la misma idea, el sector 3 está formado por las personas que se anotaron en C y P… ¡pero *no* en D! Para contarlos, me fijo otra vez en los resultados de la encuesta: allí dice que hay 5 socios que se anotaron en C y P, pero como yo quiero *excluir* los que están en P también, tengo que volver a restar x.

Moraleja: el sector 3 consiste de (5 – x) nombres.

De igual forma, contemos los socios que figuran en el sector 5. En la encuesta hay 7 personas en las listas D y P, pero como quiero *eliminar* a los que también figuran en C, vuelvo a restar x.

Nueva moraleja: el sector 5, consiste de (7 – x) socios.

Todo esto aparece resumido en la Figura 7.

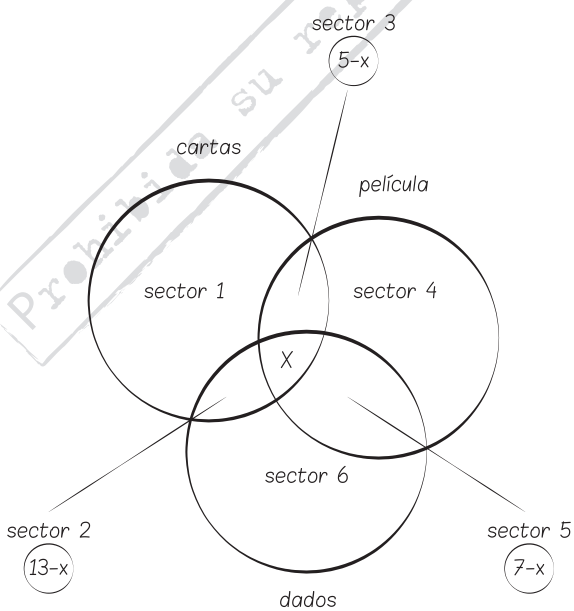


Figura 7

¿Y ahora? Falta muy poco. Nos queda evaluar cuántos socios hay en los sectores 1, 4 y 6. Estos corresponden a personas que están en *¡una sola lista y nada más!*

Empecemos por el sector 1. Fíjese en la Figura 8. En total, en el círculo C (los que quieren jugar a las cartas) hay 14 personas. Lo que yo quiero hacer es eliminar a todos los que están en el área sombreada. El resultado va a ser exactamente las personas que *solo* quieren jugar a las cartas y que componen el sector 1. Entonces, sumo:

$$(13 - x) + x + (5 - x) = 18 - x$$

Esto mide el área sombreada. Los socios que están en el sector 1 entonces se calculan *restando*

$$14 - (18 - x) = \boxed{x - 4}$$

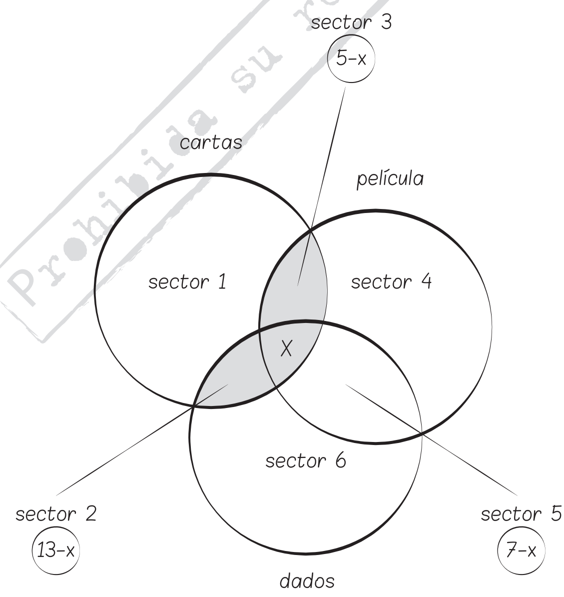


Figura 8

Para calcular el número que figura en el sector 4, hay que restarle a los 16 que están en P, la nueva área sombreada (Figura 9). El área sombreada se obtiene sumando:

$$(5 - x) + x + (7 - x) = 12 - x.$$

Entonces, el sector 4 entonces se calcula así:

$$16 - (12 - x) = \boxed{4 + x}$$

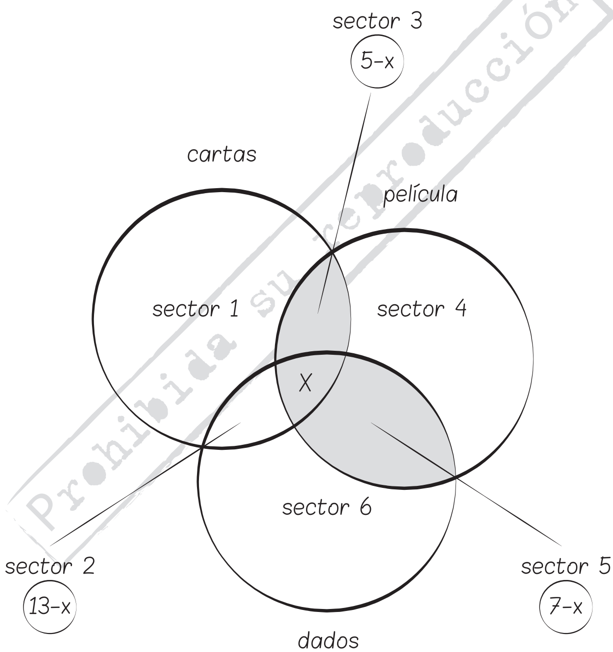


Figura 9

Por último, el sector 6 se obtiene restando los que aparecen en el área sombreada de la Figura 10 a los 19 que aparecieron en la encuesta. El área que hay que restar se obtiene sumando:

$$(13 - x) + x + (7 - x) = 20 - x$$

En consecuencia, el sector 6 se calcula así:

$$19 - (20 - x) = \boxed{x - 1}$$

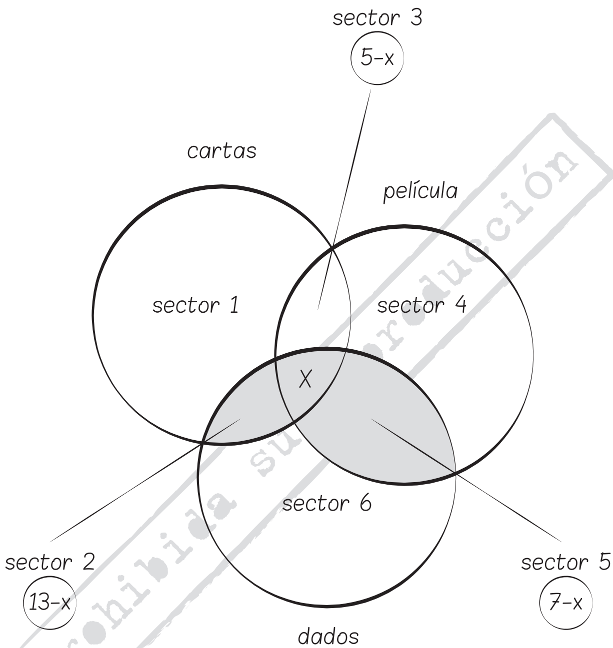


Figura 10

Estamos llegando al *último paso*. Mire la Figura 11. Allí están *todos* los datos que necesitamos.

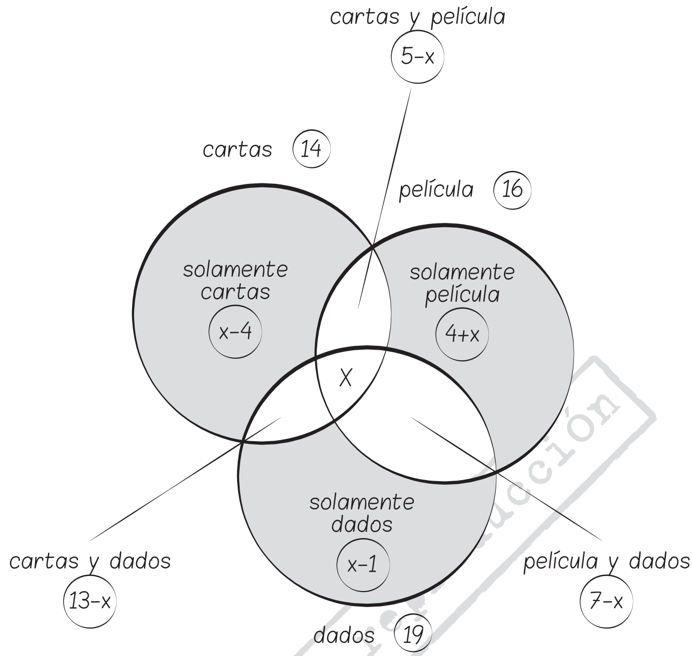


Figura 11

Este es el desglose, sector por sector:

Sector 1: (x – 4)
Sector 2: (13 – x)
Sector 3: (5 – x)
Sector 4: (4 + x)
Sector 5: (7 – x)
Sector 6: (x – 1)
Sector 7: x

Sumemos.

$$(x-4)+(13-x)+(5-x)+(4+x)+(7-x)+(x-1)+x=$$
$$\boxed{24+x=28}$$

¿Por qué puse 28? Es que *este* es el dato que no usamos… *¡hasta acá!* El número de socios que se inscribieron es 28. Luego, ¡ahora puedo despejar la 'x'!

El resultado que responde el problema es ¡4! Como

$$(24+x)=28,$$

esto obliga a que

$$\boxed{x=4}$$

Reflexión final

El camino parece largo, quizás lo sea, pero estoy hiperconvencido de que cualquier persona racional puede seguir *toda la argumentación* y más aún, ¡deducirla por su cuenta! ¿Tendremos la paciencia suficiente para encarar una tarea de este tipo cuando parece *no haber ningún incentivo que encienda los motores de nuestra curiosidad*? Muy probablemente no, pero a mí me queda la satisfacción de saber que en alguna parte, leyendo este libro, hay *al menos una persona* que hizo el esfuerzo indispensable para contestar la pregunta.

¡Ah! La etiqueta que mis colegas querían que pusiera es que estos *problemas 'tipo'* se resuelven —en general— usando algunas herramientas que provee la Teoría de Conjuntos, y muy en particular, los diagramas de Venn. ¿Qué son? ¡Por ahora se lo debo! Creo que es mucho más divertido así.

Cumpleaños (una historia maravillosa)

El programa de radio más popular de Singapur se emite todas las mañanas y su título *no es* muy original: *¡Hola, Singapur!* En el año 2015, el conductor, Kenneth Kong, puso en su cuenta de Facebook un problema que se viralizó de inmediato. La idea era plantear un problema de lógica que —supuestamente— iba dirigido a alumnos de quinto grado. Bueno, no solo fue para ellos, sino virtualmente todo el mundo, y cuando digo *todo el mundo* me refiero a que *¡todo el mundo!* intentó resolverlo con variado éxito. Pero más allá de encontrar o no la solución, lo que quedó claro es que el alcance fue muchísimo mayor que el que él mismo había imaginado.

Diferentes versiones del problema aparecieron en la mayoría de los diarios del mundo, se reprodujo en diferentes programas de radio y televisión, ni hablar en las redes sociales e internet. También, para no ser menos, hubo múltiples variantes en la Argentina. Yo mismo escribí sobre él en el libro *Detectives*, que publicó Sudamericana en 2015, y apareció en una de las contratapas de *Página/12*[39].

En el año 2017, emergió *otra versión*, un poco más sofisticada,

39. http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-270871-2015-04-19.html

pero en definitiva utiliza las mismas ideas que el original. Dice así:

Tres amigos (Andrea, Beatriz y Carlos) estaban jugando al tenis en un club y como necesitaban una cuarta persona para poder jugar partidos de dobles, la incorporaron a Delia. Después se hicieron amigos y, naturalmente, cuando habían pasado dos días, quisieron averiguar su cumpleaños. No solo eso, querían saber la *fecha exacta*: día, mes y año.

Como a los cuatro le interesaban los problemas de *lógica*, Delia les pasó una lista de 20 *potenciales* fechas, que incluía la fecha de su cumpleaños. Esta fue la lista que les entregó a los tres:

17 Feb 2001	16 Mar 2002	13 Ene 2003	19 Ene 2004
13 Mar 2001	15 Abr 2002	16 Feb 2003	18 Feb 2004
13 Abr 2001	14 May 2002	14 Mar 2003	19 May 2004
15 May 2001	12 Jun 2002	11 Abr 2003	14 Jul 2004
17 Jun 2001	16 Ago 2002	16 Jul 2003	18 Ago 2004

Fíjese lo que pasó después. En lugar de permitir que los tres trataran de conjeturar la fecha de su cumpleaños, le dio un dato a cada uno:

a) A Andrea le dijo el mes en el que había nacido.
b) A Beatriz le dijo el día.
c) A Carlos le dijo el año.

Una vez que los tres escucharon el dato que les pasó Delia, se produjo el siguiente diálogo en el grupo (y le pido que le preste atención, porque *leyéndolo* usted podrá extraer *toda* la información que necesita para deducir la fecha del cumpleaños de Delia).

Andrea: Yo no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Beatriz tampoco la sabe.

Beatriz: Yo todavía no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Carlos todavía no la puede saber.

Carlos: Yo todavía no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Andrea todavía no la sabe.

Andrea: Entones *ahora* yo sé cuál es la fecha en la que nació Delia.

Beatriz: Entonces yo *también* la sé ahora.

Carlos: Y yo *también* la sé ahora.

Pregunta: ¿cuál fue la fecha en la que nació Delia?

Solución

Como escribí antes, la *lógica* y las *ideas* que se requieren para resolver o encarar el problema original siguen siendo las mismas que se pueden/podrían utilizar ahora. Cada frase ofrece una clave para poder eliminar alguna(s) fecha(s) de las que aparecen en la lista. Veamos. Voy a avanzar frase por frase.

Andrea: Yo no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Beatriz tampoco la sabe.

Como Andrea solamente escuchó el *mes* tal como se lo dijo Delia al oído, está claro que ella no puede saber únicamente con ese dato. Pero ¿por qué habría de decir Andrea que ella *también sabe* que Beatriz no la puede deducir si ella no sabe qué número (de día) Delia le dijo a Beatriz?

Si usted se fija en la lista, verá que los números 11 y 12 son los únicos que aparecen *una sola vez.* Si Delia le hubiera dicho a Beatriz 11 o 12, ella sabría inmediatamente la fecha del nacimiento de Delia. Para que Andrea haya dicho que ella sabe que Beatriz *no sabe*, Andrea está segura de que Delia no le dijo esos números a Beatriz. ¿Y cómo puede estar segura? Fíjese que el número 11 aparece en la fecha 11 de abril de 2003 y el número 12 aparece en el 12 de junio de 2002. Para que Andrea haya dicho que ella sabe que Beatriz no sabe, el *mes* que Delia le dijo ¡no es ni abril ni junio!

Pero ¿qué más se puede hacer con estos datos? No solo se pueden tachar las fechas 11 Abr 2003 y 12 Jun 2002, sino que todas las que contengan abril o junio *también se pueden excluir*. En total, excluiremos (verifíquelo usted) *cinco* de las fechas de la tabla. Hagamos eso para reducir la tabla, que ahora quedará así:

17 Feb 2001	16 Mar 2002	13 Ene 2003	19 Ene 2004
13 Mar 2001	~~15 Abr 2002~~	16 Feb 2003	18 Feb 2004
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	14 Mar 2003	19 May 2004
15 May 2001	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	14 Jul 2004
~~17 Jun 2001~~	16 Ago 2002	16 Jul 2003	18 Ago 2004

Ahora, vayamos a la segunda frase del diálogo, la que pronunció **Beatriz: Yo todavía no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Carlos todavía no la puede saber**. ¿Quiere pensar usted qué consecuencias tiene esta frase y por qué la tuvo que haber dicho Beatriz? Sigo yo.

Todo lo que escuchó Beatriz (por parte de Delia) fue un número. Si ese número apareciera *una sola vez*, Beatriz podría deducir la fecha. Pero como ella dice que *aún* no puede saber, el número que escuchó *¡aparece más de una vez!*

Vayamos a la lista y excluyamos las fechas que contienen un número que aparece ¡una sola vez! Hagámoslo juntos: el 17 aparece una sola vez (podremos tachar 17 Feb 2001) y el 15 aparece una sola vez (podremos tachar 15 May 2001). Los demás aparecen *por lo menos dos veces*. Luego, solamente podemos tachar 17 Feb 2001 y 15 May 2001. La lista ahora queda así:

~~17 Feb 2001~~	16 Mar 2002	13 Ene 2003	19 Ene 2004
13 Mar 2001	~~15 Abr 2002~~	16 Feb 2003	18 Feb 2004
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	14 Mar 2003	19 May 2004
~~15 May 2001~~	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	14 Jul 2004
~~17 Jun 2001~~	16 Ago 2002	16 Jul 2003	18 Ago 2004

Pero todavía no hemos usado la segunda parte de la frase de Beatriz. Ella dijo, además, que sabe que Carlos no sabe la fecha. ¿Por qué pudo hacer Beatriz esa afirmación sobre Carlos? Beatriz sabe que Carlos *sabe el año*. ¿Cuál sería (mirando como ha quedado la lista) el *único año* que aparece una sola vez y que le daría a Carlos la información que falta? El año 2001. ¿Y cómo puede saber Beatriz que Carlos *no escuchó* el año 2001? El día que escuchó Beatriz ¡no es el 13! Si ella hubiera escuchado 13, *podría* ser que Carlos tuviera el año 2001, pero si Beatriz *no escuchó el día 13*, ella puede afirmar que *sabe* que Carlos no sabe la fecha.

¿Cuál es la *moraleja*? De esto podemos deducir entonces que el día que Beatriz escuchó no es el número 13 y, por lo tanto, podemos tachar todas las fechas que contengan un día 13: 13 Mar 2001 y 13 Ene 2003. La lista ahora queda así:

~~17 Feb 2001~~	16 Mar 2002	~~13 Ene 2003~~	19 Ene 2004
~~13 Mar 2001~~	~~15 Abr 2002~~	16 Feb 2003	18 Feb 2004
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	14 Mar 2003	19 May 2004
~~15 May 2001~~	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	14 Jul 2004
~~17 Jun 2001~~	16 Ago 2002	16 Jul 2003	18 Ago 2004

Ahora pasemos a la tercera frase del diálogo, la que pronunció **Carlos: Yo todavía no sé cuándo nació Delia, pero lo que *sí* sé es que Andrea todavía no la sabe**. (¿Quiere seguir por su cuenta? ¿Por qué no? El camino —creo— está claro. Lo que yo estoy haciendo, paso por paso, es eliminar *potenciales fechas* aprovechando lo que pueda deducir de cada una de las frases). Sigo.

Del hecho que Carlos dijera que él no sabe cuál es la fecha, no podemos deducir nada nuevo, al menos, *no de esa parte* de su frase. Pero también dijo que él sabe que Andrea sigue sin saber. Carlos escuchó nada más que el año. ¿Cómo podría afirmar él que Andrea no sabe? Le recuerdo que Andrea solamente escuchó el mes. De las 11 fechas que quedan, ¿qué tendría que pasar para que Andrea no pudiera saber? Eso sucede si Andrea no escuchó un mes del cual hay uno solo entre las 11 fechas restantes. ¿Hay alguno? Verá que el *único* mes que aparece una sola vez es enero, y para que Carlos hubiera dicho eso, él no escuchó el año 2004.

Este dato entonces, permite que tachemos todas las fechas que contengan el año 2004. Mire la última columna: ¡puedo tachar las cinco fechas que aparecen allí! La tabla queda así:

~~17 Feb 2001~~	16 Mar 2002	~~13 Ene 2003~~	~~19 Ene 2004~~
~~13 Mar 2001~~	~~15 Abr 2002~~	16 Feb 2003	~~18 Feb 2004~~
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	14 Mar 2003	~~19 May 2004~~
~~15 May 2001~~	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	~~14 Jul 2004~~
~~17 Jun 2001~~	16 Ago 2002	16 Jul 2003	~~18 Ago 2004~~

Como usted advierte, ahora nos quedan nada más que *seis* fechas posibles. Volvamos al diálogo.

Ahora **Andrea** dice: **Entonces *ahora* yo sé cuál es la fecha en la que nació Delia**. ¿Qué pudo haber pasado para que ella dijera eso? Andrea escuchó nada más que el *mes*. Para que haya podido decir que ella ahora sabe la fecha, entre las seis fechas que quedan, el mes que ella escuchó apareció *una sola vez*.

Mire usted la lista con las seis fechas y fíjese qué deduce. Todos los meses aparecen una sola vez… ¡salvo marzo! Luego, si Andrea dijo que ahora sabe la fecha, el *mes* que ella escuchó no es marzo. Podemos eliminar 16 Mar 2002 y 14 Mar 2003. Quedan nada más que estas cuatro posibilidades:

~~17 Feb 2001~~	~~16 Mar 2002~~	~~13 Ene 2003~~	~~19 Ene 2004~~
~~13 Mar 2001~~	~~15 Abr 2002~~	16 Feb 2003	~~18 Feb 2004~~
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	~~14 Mar 2003~~	~~19 May 2004~~
~~15 May 2001~~	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	~~14 Jul 2004~~
~~17 Jun 2001~~	16 Ago 2002	16 Jul 2003	~~18 Ago 2004~~

La quinta frase del diálogo la ofreció **Beatriz** cuando dijo: **Entonces yo *también* la sé ahora**. Para que ella hubiera podido decir eso, sabiendo que solamente escuchó el *día*, el número que ella escuchó debe aparecer una sola vez. ¿Cuál es? El número 14. Por lo tanto, ¡la fecha del cumpleaños de Delia es el 14 de mayo del año 2002!

~~17 Feb 2001~~	~~16 Mar 2002~~	~~13 Ene 2003~~	~~19 Ene 2004~~
~~13 Mar 2001~~	~~15 Abr 2002~~	~~16 Feb 2003~~	~~18 Feb 2004~~
~~13 Abr 2001~~	14 May 2002	~~14 Mar 2003~~	~~19 May 2004~~
~~15 May 2001~~	~~12 Jun 2002~~	~~11 Abr 2003~~	~~14 Jul 2004~~
~~17 Jun 2001~~	~~16 Ago 2002~~	~~16 Jul 2003~~	~~18 Ago 2004~~

De esa forma, de las cuatro fechas posibles, podemos tachar 16 Ago 2002, 16 Feb 2003 y 16 Jul 2003. Para terminar, cuando **Carlos** dice **Y yo *<u>también</u>* la sé ahora**, la *única alternativa* es ¡14 de mayo del 2002!

¡Y listo! Con este análisis, frase por frase, afirmación por afirmación, hemos eliminado 19 de las 20 fechas y pudimos concluir qué día, qué mes y qué año nació Delia.

Continuará…

Un problema extraordinario de John Conway[40]

Lo relata Tanya Khovanova. Dedíquele un rato y verá cuán interesante, entretenido y valioso es este problema. Es un verdadero desafío. Le cuento.

Con el título de “Gemas y curiosidades en la matemática”, Tanya Khovanova cuenta en una columna del año 2009 un problema que le envió John Conway. Cuando lo leí no logré entender por qué habría de tener Tanya semejante excitación. Sí, el problema parecía de enunciado sencillo e interesante para pensar, pero de ahí a decir (la cito textualmente): “Esta columna es un lugar en el que encontrará esas pequeñas grageas o gemas de la matemática, que son ‘contagiosas’, que viajan de persona a persona en la comunidad, porque son tan elegantes, sorprendentes o atrapantes que uno siente la ‘urgencia’ de comunicarlas”.

Claro, con ese preámbulo, me quedé atrapado y empecé a leer el texto con el problema. Dice así.

> Ayer por la noche, venía en un ómnibus sentado detrás de dos hechiceros. Esta fue parte de la conversación que escuché:

40. Pitici, Mircea (ed.), *The Best Writing on Mathematics*, 2014. Disponible en estos dos sitios: https://docslide.com.br/documents/conwayas-wizards.html y https://vdocuments.site/conwayas-wizards.html.

A: Yo tengo varios hijos. Si sumo las edades, obtengo el número de este colectivo. En cambio, si las multiplico, ¡obtengo mi edad!

B: ¡Qué interesante! Quizás si usted me dijera cuántos años tiene y cuántos hijos tiene, yo podría deducir las edades de cada uno. ¿Qué piensa usted?

A: No, vea... aunque yo le dijera mi edad y la cantidad de hijos que tengo, no sería suficiente para que usted pueda deducir las edades de cada uno.

B: ¡Ajá! Sin embargo, con lo que me acaba de decir, yo ahora *sí* sé qué edad tiene usted.

Ahora bien: con todos estos datos que escribí, ¿cuál es el número del colectivo? ¿Se puede deducir?

La reacción inicial de Tanya fue de sorpresa. Ella sostiene que este problema no ha tenido el reconocimiento que debiera, que es muchísimo más interesante de lo que parece. Y agrega: "Cuando alguien dice que lo resolvió, no me queda tan claro que así sea, o en todo caso, no sé si lo han resuelto por completo. Es por eso que no me sorprendió la cara 'sospechosa' de Conway justo el día siguiente que me lo había enviado. ¡Ahí mismo yo le dije el número del colectivo!".

Y para seguir con la notación que usó ella, voy a llamar así:

a = edad de A, uno de los hechiceros,
b = número que lleva el colectivo.
c = número de hijos que tiene A.

Analicemos algunos casos particulares. Está claro que la solución (si la hay) no se me va a ocurrir sin hacer algunos intentos, probando y sobre todo… ¡errando!

El recorrido

Voy a empezar con un ejemplo. Voy a suponer que 5 es el número del colectivo, o sea, $b = 5$. Recuerde que esto es una suposición. Quiero ver si somos capaces de intuir o descubrir por dónde ‘entrarle’ al problema para buscarle la solución.

Si b = 5, esto significa que la *suma de las edades* de los hijos de A tiene que resultar 5. ¿Cuáles podrían ser estas edades y cómo dependerá del número de chicos que tenga A? ¿Por qué pregunto esto? Acompáñeme por acá y fíjese en estos diferentes casos.

Voy a escribir la lista de todas las edades que podrían tener los hijos de A[41] y, de acuerdo con el caso, la *edad* que tendría A y el número de hijos.

a) 1, 1, 1, 1 y 1. Si así fuera, A tendría 5 hijos todos de 1 año. La suma de las edades (que resulta 5) sería el número del colectivo (b), el producto resulta 1 (ya que es el número 1 multiplicado por sí mismo 5 veces), por lo que a = 1. Por último, c = 5, porque es el número de hijos que tiene A.
b) 1, 1, 1 y 2. Es decir, A tiene 4 hijos, tres de un año y uno de dos. La edad del hechicero A se obtiene multiplicando las cuatro edades: $1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$, lo que indica que a = 2 (edad del hechicero). Por último, c = 4 (el número de hijos que tiene A).
c) 1, 1 y 3. En este caso, el hechicero tiene 3 hijos: dos de un año y uno de 3. En este caso, a = 3 (edad del hechicero), y c = 3 (número de hijos).

41. A los efectos de la discusión, estoy *minimizando* (o directamente *ignorando*) el hecho de que nadie puede tener hijos a los 5 años y mucho menos que padres e hijos tengan la misma edad. Por eso le propongo que me conceda esa licencia y avancemos.

d) 1, 2 y 2. En este caso, A tiene otra vez 3 hijos, pero ahora uno de un año y dos de 2 años. En consecuencia, a = 4 (la edad del hechicero) y c = 3 (número de hijos).
e) 1 y 4. Ahora A tiene dos hijos de uno y cuatro años, respectivamente. Luego, a = 4 (multiplicando las dos edades) y c = 2 (número de hijos).
f) Por último, 5. Es decir, A tiene un solo hijo de 5 años, y por lo tanto él (A) tiene 5 años también (ya que hay un solo número para multiplicar, el 5). Se tiene a = 5 y c = 1 (número de hijos).

Aquí englobamos todos los posibles casos en los que el *número del colectivo es* 5. Fíjese que en los que la edad del hechicero (a) fuera 1, 2, 3 o 5 años, conociendo *nada más que esa edad* podríamos deducir cuántos hijos tiene y qué edades. El único caso en el que no podríamos decidir es si a = 4, porque allí aparecerían los dos ejemplos que figuran en la lista con las letras (d) y (e).

Moraleja: *salvo* en el caso a = 4, en todos los demás ¡sí podríamos deducir lo que queremos! Es decir, la edad del hechicero y el número de hijos que tiene sirve para determinar *unívocamente* cuáles son sus edades[42].

En consecuencia, cuando el hechicero contestó (y verifíquelo usted mismo): “No, vea... aunque yo le dijera mi edad y la cantidad de hijos que tengo, no sería suficiente para que usted pueda deducir las edades de cada uno”, estaba equivocado… ¡salvo que a = 4! Luego, el número del colectivo no puede ser 5. Más aún: si usted hace la misma reflexión para los números *menores* que 5 (1, 2, 3, 4), verá que ninguno de esos cuatro puede ser el número

42. Estoy asumiendo que no hay *hijos que tengan cero años* (el apunte me lo hizo Carlos D’Andrea, y tiene razón).

del colectivo. ¡El colectivo tendrá que llevar un número *mayor* que 5!

De acuerdo, pero ¿cuánto mayor? ¿Cómo lo descubrimos?

Una manera de (intentar) resolver el problema, es *probar* uno por uno *todos* los números a partir del 5. Seguiríamos con el 6, 7, etc., hasta encontrar (si existe) algún número que pudiera llevar el colectivo de manera tal que, conociendo *nada más* que ese 'numerito', dedujéramos *todos* los datos que nos faltan. ¿Se podrá?

Por supuesto, aunque no lo haya escrito explícitamente, siéntase libre de detener su lectura y avanzar usted por su cuenta. Yo elegí el número 5 como potencial número del colectivo, y a partir de allí saqué algunas conclusiones, pero usted elija el camino que prefiera.

Por un momento, en lugar de ir probando de a uno, voy a elegir otra idea. Voy a analizar lo que sucedería si el número del ómnibus fuera el 21. Pensemos juntos.

¿Qué quiere decir que el número sea 21? Que las *edades* de los hijos de A (sumadas) llegan a 21. ¿De cuántas formas puede suceder esto? Es decir, ¿de cuántas formas se puede sumar 21 con varios números positivos?

Por ejemplo, podría suceder que el hechicero A tuviera 96 años. ¿Cómo? Sí, fíjese que si A tuviera tres hijos, cuyas edades fueran: 1, 8 y 12, la suma de las edades da 21 (que es el número del colectivo) y el producto ($1 \times 8 \times 12 = 96$) es la edad de A. ¿Habrá alguna otra combinación de número de hijos y edades?

La respuesta es sí, hay otra forma. A podría tener tres hijos, pero cuyas edades fueran 2, 3 y 16. La pregunta muy importante acá es la siguiente: con estos datos, ¿puede deducir B que la edad de A es 96?

Curiosamente, la respuesta ahora es no, no puede. ¿Por qué?

B podría deducir que A tiene 240 años y tiene además tres hijos de 4, 5 y 12, o si no, tres hijos de 3, 8 y 10. Luego, el número 21 no puede ser el número del ómnibus, ya que B no podría deducir la edad A: no sabría, por ejemplo, si es 96 o 240.

¿Y si pruebo aumentando de a uno? Si en lugar de pensar que el número de colectivo es 21, ahora fuera 22. ¿Qué pasaría?

En este punto le pido que me preste atención, porque en lugar de seguir haciendo más cálculos, quiero proponerle que hagamos 'algo' que nos va a servir para descartar muchísimos casos, todos al mismo tiempo.

Tenga presente lo que recién hicimos para 21. Ahora pasemos a 22 (número del colectivo). La edad de A (del hechicero) sería *ambigua* una vez más. ¿Por qué?

a) Por un lado, podría ser que A tuviera 96 años con cuatro chicos: 1, 1, 8 y 12. Por otro, podría también tener 96 años, también con cuatro chicos, pero de 1, 2, 3 y 16.
b) Si no, podríamos pensar que A tiene 240 años con cuatro niños[43] de 1, 4, 5 y 12, o de 1, 3, 8 y 10.

43. Quiero enfatizar los números que aparecen tanto en el caso 21 como en el 22. Comparemos. En el caso 21, el hechicero A podría tener 96 años, 3 hijos, edades 1, 8 y 12 o 2, 3 y 16. Por un instante, en el caso 22, el hechicero A podría tener también 96 años, con 4 hijos, edades 1, 1, 8, 12 ó 1, 2, 3 y 16. Mire las 'tiras' de números y advertirá que a las tres edades (1, 8 y 12) del caso 21 aparecen (1, 1, 8, 12) y a la 'tira' (2, 3, 16) le agregamos (1, 2, 3, 16). Es decir, son *esencialmente* iguales, con la diferencia de agregar *un hijo más* y, por lo tanto, *un año más de edad para el hechicero* A. Lo mismo sucede comparando los casos 21 y 22, cuando el hechicero A podría tener ahora 240 años. En el caso 21, tendría 3 hijos con edades 4, 5, 12 ó 3, 8,10, y en el caso 22, tendría 4 hijos con edades 1, 4, 5, 12 ó 1, 3, 8, 10, y todo sigue como antes.

¿Se da cuenta de lo que acabo de hacer? Incrementé en *uno* el número del colectivo (de 21 a 22).

Por otro lado, puedo aumentar el número de chicos en uno. Como el nuevo niño tiene *un* año, no agrega *nada* al producto, por lo que *no modifica la edad del hechicero* respecto del caso anterior (cuando el número del colectivo era 21 y no 22). Pero ahora hay un niño más, la suma de las edades se incrementa en *uno*, pero ¡el producto permanece constante!

En consecuencia —y esto era a lo que quería llegar—, si el ómnibus con número ‘b’ mostraba la ambigüedad para determinar la edad de A (antes eran 96 ó 240 años), *¡exactamente lo mismo sucederá con el ómnibus (b+1)!*

Es decir, lo que *impedía* que ‘b’ fuera el número del colectivo (por la ambigüedad que generaba), se traslada al caso (b+1), y lo notable entonces es que, lo que no servía para ‘b’, ahora no sirve tampoco para (b+1). Si el colectivo con número ‘b’ tenía dos posibilidades para la edad de A, esas mismas edades servirán para el caso en el que el colectivo tenga número (b+1). Por eso no hay que chequear nada más desde el 21 en adelante. Creo que ahora usted advierte lo que pasa: como no servía 21, entonces no solo no sirve 22, sino que con este argumento puedo concluir que no sirve para ningún número *mayor* que 21.

Lo extraordinario es que ahora el problema se ha transformado en una búsqueda *finita*. Todo lo que hay que hacer es verificar si el problema tiene respuesta cuando el número del colectivo es, por un lado, *mayor que* 5, y por el otro, *menor que 21*.

Le sugiero que usted se entretenga el tiempo que quiera hasta llegar a la conclusión final. Yo, mientras tanto, me apuro y le propongo la solución: el número del colectivo tiene que ser 12. Y de acá se deduce que la única edad para la cual el número del colectivo y el número de hijos *no define las edades de los* *niños* es 48. Las edades de los niños tienen que ser: 2, 2, 2, y 6 ó 1, 3, 4 y 4.

Apéndice

Para completar *todo*, hace falta analizar dos situaciones.

a) Verificar que si el número del colectivo es *menor* que 12, entonces eso le va a impedir al hechicero A poder contestar que NO a la primera pregunta
b) Verificar que si el número del colectivo es *mayor* que 12, entonces eso impide determinar la edad del hechicero A en forma *unívoca*.

Le propongo que usted se ocupe de la parte (a).

Respecto de la parte (b), veamos —juntos— lo que sucedería si el número del colectivo fuera 13 (o mayor). Reproduzcamos el diálogo entre ambos, el que figura al principio de este capítulo, pero suponiendo que:

i. El número en el colectivo es 13.
ii. El hechicero A tiene 48 años.
iii. El hechicero A tiene cinco hijos.

En esta situación, los hijos de A podrían tener estas cinco edades:

1, 2, 2, 2, y 6

o podrían también ser cinco, pero con estas edades:

1, 1, 3, 4 y 4

Por otro lado, el mismo diálogo pudo haberse dado pero ahora con esta variación:

i. El número en el colectivo es 13.
ii. El hechicero A tiene 36 años.
iii. El hechicero A tiene tres hijos.

En esta situación, los hijos de A podrían tener estas tres edades:

2, 2, y 9

o podrían también ser cinco, pero con estas edades:

1, 6 y 6

Como se ve, una vez más, A tendría derecho a contestar lo que contestó. La moraleja es que si 13 es el número del colectivo (o mayor que 13) entonces B no tiene suficientes datos para deducir la edad de A. ¡Y listo!

Viaje de egresados

Quiero sugerirle un problema para pensar. ¡Espere! ¡Dije 'pensar'! ¿Va a abandonar antes de haber hecho —al menos— el intento de leer de qué se trata? Tengo la tentación de escribir: sexo, droga, fútbol, Trump, Brexit, Messi… Pero no, le propongo algo que no requiere de ninguna otra cosa más que el 'esfuerzo' de entender qué es lo que hay que resolver. Se trata de elaborar una estrategia. Eso, una estrategia. Para eso deberíamos ser *buenos* todos, ¿no es así? Concédame entonces dos minutos. Lea los párrafos que siguen y, si no le interesa, olvídese de todo. Igualmente, este texto se autodestruirá en cinco minutos…

Suponga que usted está a cargo de un contingente de cien jóvenes que fueron a Bariloche en viaje de egresados. Van a pasar tres semanas juntos y lograron alojarse todos en un mismo hotel. Cada uno tiene su propia habitación. Una de las razones por las que los padres lo convencieron para que fuera, son sus condiciones para entender a personas de generaciones posteriores a la suya. Además le reconocen creatividad para buscar formas de entretenimiento didácticas, atractivas y que estimulen el trabajo colectivo.

En el hotel, aparte de las habitaciones que ocupan usted y los estudiantes, hay una pieza vacía porque la están pintando. Como usted quería verificar que la podía usar, consiguió la aprobación del gerente y vio que dentro de la habitación solo hay una lamparita que cuelga del techo (y que se activa con un interruptor que está en la pared).

La primera mañana que pasan juntos, mientras están desayunando, usted toma un micrófono y les cuenta el problema a los estudiantes:

> Buen día. Tengo algo para proponerles. Como ustedes pueden ver, en este momento son las nueve de la mañana. Aproximadamente en una hora, les voy a pedir que vuelvan a sus respectivas habitaciones y se queden allí sin establecer ningún contacto con el exterior. En el momento en el que todos estén adentro, yo voy a iniciar el siguiente proceso:
>
> Voy a elegir un número cualquiera (que no les voy a decir) y voy a pasar *por todas* las habitaciones ese número de veces en forma aleatoria. Ustedes se estarán preguntando: "¿Y nosotros qué hacemos o qué tenemos que hacer?". Ténganme un poco de paciencia y ya verán.
>
> Cuando yo entre en una habitación, le voy a pedir a quien la ocupe que me acompañe a la habitación que está vacía. Voy a cerrar la puerta y la/lo voy a dejar en soledad por *un minuto*. En ese lapso, quien esté adentro podrá encender la luz si está apagada, apagarla si está encendida, o no hacer nada y dejar todo en las mismas condiciones que cuando entró. Cuando se haya cumplido el minuto exactamente, voy a abrir la puerta y la/lo voy a acompañar nuevamente a su habitación.
>
> Ningún otro estudiante podrá ver lo que sucede afuera salvo la persona que venga conmigo a la pieza vacía. En todo caso, lo que quiero enfatizar es que el resto de ustedes ignorará *todo lo que pasa afuera*.
>
> Podría suceder que en algún momento de este proceso, *alguno* de ustedes tenga manera de saber que *todos* (me refiero a los 100),

> ya entraron en la habitación vacía al menos una vez. En ese caso, la/el alumna/o interrumpirá el proceso y me dirá: "¡Yo estoy segura/o de que ya entramos todos *por lo menos una vez*!".
>
> Cuando yo haya pasado por las habitaciones el número de veces que había elegido al principio, si ninguno de ustedes detuvo el proceso, voy a repetirlo. Es decir, voy a volver a elegir otro número que no les voy a comunicar y a pasar por *todas las habitaciones* ese número de veces. El orden por el que pase por ellas será —una vez más— un número que voy a elegir al azar. Igual que antes: si al terminar esta parte del proceso ninguno de ustedes me detuvo, lo voy a repetir. Y así voy a seguir tantas veces como haga falta.
>
> Antes de empezar, quiero dejarlos solos por una hora (digamos hasta las diez y cuarto) de manera tal que puedan pensar una estrategia que les permita determinar *con certeza* cuando *todos* hayan visitado la habitación vacía por lo menos una vez.
>
> No lo dije hasta acá, pero en el momento de comenzar el proceso, la luz en la habitación que están pintando, está *apagada*.

No sé si hace falta que lo escriba, pero el problema no tiene trampa, no hay 'nada' dentro de la habitación que permita hacer 'marcas' que los otros puedan ver, ni algo equivalente. No. Se trata de un planteo genuino, honesto y que pretende motivarla/o para que sea usted quien piense qué se podría hacer.

Algo más: "La probabilidad de que usted se encuentre con un problema parecido al que describí es virtualmente nula. No tengo dudas. Pero al mismo tiempo, ¿cuántas oportunidades tiene en su vida cotidiana de tropezarse con algo que le permita elaborar una estrategia que sirva para resolver una situación impensada, sin que nadie la/lo juzgue, cuando no la/lo mira nadie, cuando no tiene que 'rendir examen' frente a nadie, ni exhibir su potencia 'ante nadie'? Posiblemente sean muy pocas también. Además, no hay apuro, no hay reloj, no hay horario de entrega ni restricciones de ningún tipo. Es *un entretenimiento gratuito* que eventualmente podrá hacerla/lo sentir bien, aunque más no sea porque lo va a intentar.

Ahora sí, le toca a usted. Y si no, abandone acá.

Una estrategia posible

Voy a proponer una forma de resolver el problema planteado, pero quiero enfatizar la palabra 'una'. Estoy seguro de que debe haber muchísimas otras.

En todo caso, la estrategia que voy a describir fue el resultado de múltiples intercambios de correos electrónicos y comunicaciones telefónicas con Carlos D'Andrea y Juan Sabia. Siéntase en libertad de pensar el problema por su lado, en soledad o la compañía de otras personas. Es un problema precioso que requiere, sobre todas las cosas, ganas de *crear*. Ahora sí, acá voy.

Los estudiantes podrían hacer lo siguiente: elegir a uno de ellos, a quien voy a llamar Pérez, y ejecutar el plan que escribo a continuación.

Cuando uno de ellos (que no sea Pérez) entra en la habitación *por primera vez* hace lo siguiente: si encuentra la luz apagada, la enciende. Si no, no hace nada. Es decir, si al entrar la luz ya estaba encendida, espera que pase el minuto y que lo vengan a buscar. Por otro lado, si ya entró alguna otra vez en la habitación y *ya encendió la luz alguna otra vez*, entonces tampoco hace nada. De esta forma, se garantiza que cada estudiante enciende la luz de la habitación vacía ¡una sola vez!

Para Pérez hay un procedimiento distinto. Él va a llevar una cuenta que empieza en cero y que va aumentando de a uno por vez hasta llegar a 99. ¿De qué forma? Cada vez que entra y encuentra la lámpara encendida, suma *uno* al número que llevaba hasta entonces y *apaga* la luz. Si en cambio, encuentra la luz apagada, la deja así y espera que pase el minuto pensando en cómo pudo ser que Trump sea presidente de Estados Unidos o qué le pasó a Argentina en el mundial de Rusia.

En el momento en que la cuenta que lleva Pérez llega a 99, está en condiciones de interrumpir el proceso y afirmar que *todos* entraron al menos una vez en la pieza que están pintando. ¿Por qué? ¿Quiere pensar usted antes de leer lo que sigue?

Es que cada uno de los estudiantes enciende la lámpara *una sola vez*. Puede que haya entrado en la habitación varias veces antes, pero cada vez que lo hizo, se encontró con la luz encendida (y por lo tanto, las reglas le indican que no tiene nada que hacer) o bien encuentra la luz apagada pero ya la había prendido alguna vez anterior. Moraleja: cada estudiante enciende la luz ¡una sola vez!

Cuando Pérez llegó con su cuenta a 99, él sabe entonces que eso pasó porque ya entraron *todos* los estudiantes al menos una vez. Como obviamente él se encuentra dentro de la habitación, está en condiciones de llamar al instructor y avisarle que la estrategia funcionó. ¡Y listo![44]

---

44. Algunas observaciones: a) Pérez es el único que —de acuerdo con las reglas— puede apagar la luz; b) Si piensa cómo funciona la estrategia, usted tiene la certeza de que en algún momento —después que el instructor eligió 100 números como máximo— Pérez tuvo que haber apagado la luz 99 veces y entonces, está en condiciones de decir que ya entraron todos por lo menos una vez. La primera vez, uno se asegura que Pérez pasa una vez por lo menos para apagar la luz si está encendida. Después, puede que la encuentre apagada muchas veces, pero seguro que como el instructor sigue pasando, en algún momento va a llegar algún estudiante que prenderá la luz y Pérez la apagará la próxima vez que entre. De esta forma, uno se asegura que a lo sumo en muuuuuuuuchas (con muchas 'u') pasadas, Pérez apagará la luz 99 veces y, en ese momento, él sabrá que ya pasaron todos.

Final

Antes escribí que es muy poco probable que una persona 'normal' se encuentre con un problema de este tipo en su vida cotidiana. Sin embargo, un problema equivalente (con prisioneros, celdas, ejecuciones, etc.) apareció entre los que pedía Microsoft para aspirantes a trabajar en la compañía que fundó Bill Gates.

¿Tiene alguna importancia? No creo, pero como es un dato de la vida real, quería compartirlo con usted también. ¿Querrá decir que la persona que encontró la estrategia (o *una* estrategia) es mejor? ¡No! Solamente que se le ocurrió una forma de resolver este problema.

En todo caso, lo *único* que a mí me importa, es aprovechar nuestra capacidad para pensar y, en el camino, pasar un buen rato. Ah, y como hace mucho que no lo escribo lo hago acá: ¡esto es hacer matemática también[45]!

45. Sobre este problema se conocen múltiples versiones. La diferencia se establece en la forma en la que el instructor del grupo pasará por las habitaciones. Yo elegí una de muchas para publicar en este libro, pero si le interesa el tema, hay variantes esencialmente *probabilísticas* que son muy interesantes. En estos casos, el tiempo que le llevaría pasar por todas las piezas es variable y quizás no le alcancen las tres semanas de vacaciones que se tomaron. De todas formas, la solución (o estrategia) que eligieron los alumnos sigue siendo válida para poder garantizar la respuesta.

¿Cómo hacen los 100 presos para salir en libertad?

Quiero compartir con usted una historia. En octubre del año 2016, Martín Sombra, un matemático argentino, brillante profesor de la universidad de Barcelona, un gran entusiasta y magnífica persona, me envió un correo electrónico en donde me sugería un problema. Si bien es cierto que ya me lo había cruzado, Martín me propuso que viera una charla Ted[46] especialmente dedicada a la educación, en donde se ofrecía una versión 'ilustrada' que resultaba muy atractiva.

Justamente ahora, aprovechando la sugerencia de Martín, quiero escribir sobre el problema que allí se plantea y verá que, si me acompaña hasta el final, le resultará tan fascinante como a mí. Eso sí, no digo que sea imposible, pero intentar encontrar la solución *sin usar alguna de las herramientas que provee la matemática* me parece muy difícil. Pero no me quiero adelantar.

Si bien se conocen muchas variantes, la versión original fue planteada por el científico danés Peter Bro Miltersen en el año 2003. Miltersen lo formuló de la siguiente manera:

> El director de una prisión quiere ofrecerles a 100 presos una oportunidad de quedar en libertad. Los reclusos están numerados

46. https://www.youtube.com/watch?v=vIdStMTgNl0&feature=youtu.be

del 1 al 100. Dentro de una habitación, hay 100 cajones que tienen una etiqueta con números que van del 1 al 100 justamente. El director de la prisión toma 100 papeles y los numera del 1 al 100. Pero en lugar de distribuirlos en forma ordenada, los pone al azar; es decir pone cada papel numerado en cualquier cajón sin necesidad de que los números (del papel y el cajón) sean iguales. Y aquí llega el punto clave.

Inmediatamente después, reúne a los 100 presos y les dice que cada uno podrá entrar en la habitación y tendrá que encontrar el cajón en donde se encuentra su propio número. Como el director sabe que la probabilidad de encontrar el cajón que contenga el número correspondiente es muy baja, les ofrece una alternativa: cada uno podrá abrir hasta 50 cajones. Si en alguno de ellos encuentra su número, listo. Cierra el cajón y sale sin modificar nada. Deja todo como lo encontró. Las cámaras que están ubicadas en la habitación registrarán lo que sucedió y sabrán si el preso encontró (o no), al abrir a lo sumo 50 cajones, su propio número.

Después de haber entrado en la habitación los 100 presos, si *todos* encontraron su número, entonces quedarán *todos* en libertad. Pero bastará con que uno no lo haya logrado, para que el ofrecimiento del director ya no tenga más validez, y cada uno tendrá que cumplir con la condena que tienen establecida.

Los presos pueden debatir *previamente* alguna estrategia que les parezca adecuada, pero una vez que el primero entra en la habitación, ya no habrá más posibilidades de comunicarse entre ellos.

Pregunta: ¿puede usted elaborar alguna estrategia que les permita tener una 'buena' probabilidad de que todos encuentren su número en el cajón?

Aquí, entonces, una pausa.

Por supuesto siéntase libre de pensar por su cuenta sin necesidad de seguir leyendo lo que escribiré a continuación.

Como usted advierte, el problema parece 'casi' imposible de solucionar. ¿Por qué? Supongamos que la primera persona entra en la habitación y abriendo un máximo de 50 cajones encuentra su número. Todo bien, pero después debe entrar el segundo preso y también abriendo un máximo de 50 cajones otra vez, debe encontrar el suyo. Y esto no será suficiente para que queden en libertad ni siquiera ellos dos, ¡lo mismo tiene que suceder con los 100 presos!

Estaba por escribir que uno *tiene* que buscar una estrategia, pero aun así ¿cómo hacer? Es por eso que quiero hacerle una propuesta. En unos pocos renglones voy a escribir algo de matemática que requiere que usted me preste un poco más de atención; verá que después habrá una buena recompensa 'intelectual'.

Es decir, si usted lee lo que sigue, lo entiende y puede 'jugar' con esto, créame que se sentirá mejor, habrá —eventualmente— inaugurado algunos caminos dentro de su cerebro que no había usado antes (salvo que ya conociera del tema con anterioridad) y quizás podamos —juntos— entender la estrategia que propuso Miltersen originalmente. Acá voy.

Voy a usar solo números naturales: 1, 2, 3, 4, etc. Si uno toma los dos primeros, 1 y 2, hay *dos* maneras de ubicarlos en orden:

12   21

Si tomo los tres primeros (1, 2, 3), hay *seis* maneras de ubicarlos en orden:

123   132   213   231   312   321

Si ahora tomamos los primeros cuatro números (1, 2, 3, 4), hay *veinticuatro* maneras de ordenarlos:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Si usted repasa lo que escribí hasta acá, verá que:

a) Con dos números, hay 2 formas de ordenarlos.
b) Con tres números, hay $3 \times 2 = 6$ formas de ordenarlos.
c) Con cuatro números, hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ formas de ordenarlos.

Si bien no voy a escribir todos los detalles (pero le sugiero fuertemente que lo haga usted), podrá concluir que con los primeros cinco números (1, 2, 3, 4, 5), hay $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ formas de ordenarlos. En general, lo mismo sucedería si usted tomara los primeros 100 o 1000 o 100.000 números. Las formas de ordenarlos se calculan multiplicando, por ejemplo:

$100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times \ldots \times 3 \times 2$ (para los primeros 100)
$1000 \times 999 \times 998 \times 997 \times 996 \times 995 \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2$ (para los primeros 1000)

Cuando uno hace este tipo de multiplicación *descendente*, empezando en el número 5, el resultado se llama *factorial de 5* y se escribe con un número cinco seguido de un signo de admiración: 5! Si usted quiere calcular de cuántas formas se pueden ordenar los primeros 52 números naturales, el resultado es 52! (*factorial de* 52) o, lo que es lo mismo, $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2$. Un número verdaderamente gigantesco[47].

47. Para más información sobre cuán grande/es es/son este/estos número/s,

Cada uno de los posibles órdenes se llama una *permutación* de esos números. Es decir, (1324) y (4213) son dos posibles permutaciones de los primeros cuatro números naturales, y lo que estuvimos calculando antes es cuántas posibles permutaciones hay entre los primeros 2, 3, 4, 5 ó 100 números naturales.

Como 'práctica', le propongo que se fije cuán rápido *crecen* estos números. Es verdaderamente sorprendente: mire lo que sucede con el número de permutaciones que se puede obtener a medida que uno aumenta la cantidad de números.

$$2! = 2$$
$$3! = 6$$
$$4! = 24$$
$$5! = 120$$
$$6! = 720$$
$$7! = 5.040$$
$$8! = 40.320$$
$$9! = 362.880$$
$$10! = 3.628.800$$

Es decir, ¡hay 3.628.800 posibles *permutaciones* de los diez primeros números naturales! Esto sí que merece signos de admiración.

Una reflexión más. Tomemos una permutación cualquiera de los primeros *seis* números naturales, digamos 263145. Hagamos de cuenta que cada número está escrito en una bolita y esta se encuentra dentro de una urna o casillero. Si yo tengo todos los casilleros ordenados, del 1 al 6, correspondería a esta 'figura':

---

le propongo que lea la página 106 de mi libro *La matemática del futuro*, Sudamericana, Buenos Aires, 2017.

1	2	3	4	5	6
2	4	3	1	6	5

O sea, en el casillero número 1 está la bolita que lleva el número 2, en la segunda casilla está la bolita que lleva el número 4 y así siguiendo. Cada permutación, entonces, es un *reordenamiento* de los seis números.

En este caso, como escribí antes, en el primer casillero está el número 2, en el segundo el número 4, en el tercero el 3, en el cuarto el número 1, en el quinto el número 6j y en el último el número 5. Pensando cada número como una bolita y cada lugar como un casillero, cada permutación es equivalente a 'redistribuir' las bolitas en los casilleros. En el ejemplo que estoy usando, la bolita que lleva el número 3 es la única que se corresponde con el casillero del mismo número, pero las otras cambian todas de lugar.

Ahora, quiero proponerle que hagamos una suerte de 'viaje' o 'recorrido'. Sí, ya sé: no me entiende. Me imagino que usted se debe estar preguntando: "¿Viaje? ¿Recorrido? ¿De qué me habla?". Verá que es muy sencillo.

Empecemos por el primer casillero. Allí encontramos el número 2. Es decir, al abrir el primer cajón, uno se encuentra con la bolita 2. Este número 2 nos indica que el próximo cajón o la próxima casilla que uno debe 'abrir' o 'revisar' es la número 2.

Allí encontramos el número 4. Eso indica que tenemos que ir hasta la casilla 4. Cuando llegamos allí, nos encontramos con el 1 que, en este caso, coincide exactamente con el lugar (o el número) del que habíamos partido. ¿Me entiende? Es decir, hemos descubierto lo que se llama un 'ciclo'. ¿Por qué? Porque empezando en el 1, pasamos al 2, después al 4 y volvemos al 1. Si lo escribiera usando unas 'flechas' para indicar el camino recorrido, sería así:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1.$$

Ahora empecemos en el 5. Encontraríamos el número 6. Pero al abrir el 6 (o 'mirar' lo que hay dentro del casillero 6), nos encontramos con el 5. ¿Qué indica esto? Que hemos encontrado otro ciclo:

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 5$$

En el caso del 3, el ciclo no sale de esa casilla: es un ciclo particular ya que consiste en un solo elemento. Este tipo de ciclo se llama 'lazo'.

Si usted hace el análisis de todas las posibilidades con esta permutación, descubre que hay *únicamente* tres ciclos:

$$(1, 2, 4), (5, 6) \text{ y } (3)$$

Como usted advierte, puse entre paréntesis los elementos del ciclo. En el primer caso, el 1 pasa al 2, el 2 al 4 y el 4 vuelve al 1. En el segundo ciclo, el 5 pasa al 6 y el 6 vuelve al 5. Por último, en el caso del ciclo que contiene al 3, uno *no sale* de ese casillero.

Otra observación: el ciclo (1, 2, 4) es igual al ciclo (4, 1, 2) y al ciclo (2, 4, 1). Es decir, son todos equivalentes porque, empezando en cualquiera de los tres casilleros, uno hace el *mismo recorrido*.

Tomemos otro ejemplo, ahora con 10 números. Voy a utilizar esta permutación:

4 3 8 2 6 5 10 1 9 7

Esto correspondería (usando los *casilleros* y las *bolitas*) a este reordenamiento:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
4 3 8 2 6 5 10 1 9 7

Busquemos los ciclos (hágalo usted también, antes de leer lo que voy a escribir). Empecemos con el 1: (1, 4, 2, 3, 8) es un ciclo posible. Fíjese que tiene *longitud cinco* (ya que involucra cinco elementos).

Por otro lado, hay tres ciclos más (¿no los quiere buscar usted para ver si está de acuerdo conmigo?)

a) (5,6) (que tiene longitud dos)
b) (7,10) (que también tiene longitud dos)
c) (9), que es un *lazo* (un ciclo de longitud uno).

Lo sé. Surgen así muchísimas preguntas. Me gustaría estar junto a usted para pensar juntos, pero voy a seleccionar algunas solo para que podamos avanzar. El tema es fascinante y se presta para dedicarle un buen rato jugando con las distintas posibilidades e intentando diferentes variantes.

Por ejemplo: en el último caso, de la permutación que elegí (4, 3, 8, 2, 6, 5, 10, 1, 9, 7) pude extraer cuatro ciclos: (1, 4, 2, 3, 8), (5, 6), (7, 10) y (9).

¿Se podrá construir una permutación que tenga un ciclo de cualquier longitud? (por supuesto, estoy sobreentendiendo que la longitud no puede ser más larga que el número de elementos de la permutación). Para ponerlo de otra forma: si estoy mirando a las posibles permutaciones de 10 elementos, ¿existen permutaciones que tengan ciclos de longitud 6, 7, 8 o incluso 9? ¿Y de longitud 10? (no pregunto sobre otras porque el ejemplo anterior ya exhibe ciclos de longitudes cinco, dos y uno).

Contesto yo alguna de las preguntas, pero le propongo que intente usted por su lado. Por caso, si uno tiene esta permutación:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 1

creo que se ve claramente que el *único* ciclo que uno puede encontrar tiene ¡longitud 10! ¿Se podrá encontrar alguna permutación que tenga un ciclo de longitud 9? Sí. Este es un ejemplo:

2 3 4 5 6 7 8 9 1 10

En este caso, el ciclo es (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1). Hay otro ciclo, de longitud *uno*: (10). Como escribí antes, todos los ciclos de longitud *uno* se llaman *lazos*, ya que como su nombre lo indica, empiezan y terminan en ellos mismos.

En realidad, uno se puede fabricar permutaciones que contengan ciclos de cualquier longitud.

Una última observación (y pregunta): si uno tiene una permutación de los primeros diez naturales, ¿puede haber dos *ciclos* que tengan longitudes *mayores* que cinco?

Piénselo usted, pero verá que esto es imposible. Como siempre, leer mi respuesta es como si la/lo estuviera engañando, ¿por qué privarse de la oportunidad de pensar si es posible o no? En todo caso, no se *robe* a usted misma/o la satisfacción de poder deducir 'algo' por su cuenta.

De hecho, no puede haber dos ciclos *distintos* de longitudes mayores que cinco cada uno, porque como en total hay 10 números, tiene que haber por lo menos *un* número que esté en los dos ciclos, y el 'recorrido' que uno debería hacer desde allí, debería ser el mismo en los dos casos. Por lo tanto, serían dos ciclos iguales. Dicho de otra forma, *cada número* forma parte de un *único ciclo*.

Ahora bien: ¿por qué escribí todo esto sobre las permutaciones y los ciclos? ¿Qué fue lo que me motivó? ¿Se acuerda del problema que planteé al principio? Para que *todos* los presos queden en libertad, *todos* tienen que encontrar su número abriendo —a lo sumo— 50 cajones. Pero bastará con que uno solo *no lo haya logrado*, para que el ofrecimiento del director ya no tenga más validez y, de esa forma, cada uno tendrá que cumplir con la condena que tiene establecida.

Los presos pueden debatir *previamente* alguna estrategia que les parezca adecuada, pero una vez que el primero entra en la habitación, ya no habrá más posibilidades de comunicarse entre ellos.

A diferencia de lo que sucedía cuando empecé esta historia, ahora tenemos la ventaja de conocer lo que son las *permutaciones*, sabemos calcular cuántas hay (dependiendo del número de objetos a permutar), lo que son los ciclos (y lazos) y conocemos *algunas* propiedades.

La pregunta que había planteado entonces era: "¿Puede usted elaborar alguna estrategia que les permita tener una 'buena' probabilidad de que todos encuentren el cajón con su número?".

Antes de avanzar, quiero hacer algunos cálculos con usted, para convencernos de cuán difícil sería lograr el objetivo *sin una estrategia*. Si cada uno entrara por su cuenta, y *al azar* abre 50 cajones, ¿cuál será la probabilidad de que los 100 encuentren su número? Calculémosla juntos.

Fíjese que al entrar el primer preso, la probabilidad que encuentre su número es ½, o lo que es lo mismo, tiene un 50% de posibilidades de encontrarlo. ¿Por qué? Es que hay 100 cajones y le está permitido abrir la *mitad*.

Hasta acá, todo bien. Pero al entrar el segundo preso, la probabilidad de que él encuentre su número es *también* ½. Luego, la probabilidad de que *los dos* encuentren sus respectivos números se calcula multiplicando las probabilidades, o sea: ½ × ½ = ¼.

Como usted imagina, cada vez que va ingresando un preso, la probabilidad se calcula agregando el factor ½ una vez más. En definitiva, la probabilidad de que *todos* encuentren su número es:

$$(1/2)^{100} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0008$$

O sea, un número muy muy muy pequeño.

Entonces, es razonable esperar que los presos se reúnan antes de entrar y piensen *alguna* estrategia. Cualquiera que encuentren o cualquier plan que decidan seguir seguramente les dará más posibilidades de salir en libertad que intentar al azar.

Aquí, otra pausa.

Ha llegado el momento en el que le pediría que piense usted alguna estrategia, no importa cuál, pero *alguna*. Le confieso que yo no tuve oportunidad de pensar nada, porque cuando conocí el problema, un poco antes que me lo enviara Martín, estaba sentado en una cafetería de la Universidad de Chicago, en donde un grupo de matemáticos estaban discutiendo ¡la solución! Como recién me había incorporado a la charla y en la mesa se hablaba justamente sobre la estrategia que había que elaborar, pregunté cuál era el problema. Lo que sucedió entonces es que conocí la solución *antes* de saber cuál era el problema. Por lo tanto, no puedo escribir acá cuán fácil o difícil me resultó. Los que *sí* puedo hacer es proponerle, como siempre, que no lea lo que sigue en forma inmediata. Tómese un tiempo para pensar. No puedo garantizar que se le va a ocurrir lo que se les ocurrió a otras personas, pero tampoco puedo decir que no. Más aún: siendo fiel a lo que pienso, creo que una persona cualquiera, ignorando el grado de dificultad de un problema, tiene muchísimas posibilidades de enfrentarlo y pensar alguna forma de resolverlo *totalmente diferente y alejada* de lo que estuvieron pensando otros. Eso, en algún sentido, le da una ventaja enorme, ya que no está *contaminado* por lo que estuvieron discutiendo otros/as, que inexorablemente lo llevan por un camino que ya ha sido recorrido.

Resumen: piense por su cuenta. Sepa que no es trivial, por lo menos no para quienes conocemos *esta* solución. Quizás usted llegue a la misma conclusión (u otra) por otro camino, ¿por qué no?

Ahora sí, me voy a dedicar a escribir la estrategia, pero lo voy a hacer en un caso más reducido. En lugar de 100 presos, voy a suponer primero que hay solo *cuatro* y que se les permite abrir dos cajones.

La estrategia consiste en lo siguiente: el número 1 entra en la habitación y se dirige al cajón que lleva el número 1. Si encontró su número, listo. Cierra el cajón y se retira.

En cambio, si no lo encontró, es porque aparece un número diferente del 1. En este caso, podría ser 2, 3 o 4. Supongamos que es el número 3. Entonces, con esa información, se dirige al cajón número 3 y lo abre. Si encontró su número, una vez más, se terminó el problema: en dos intentos, encontró el cajón con su número. Cierra el cajón y se retira. Ahora bien, si *no lo encontró*, se terminó el problema también: lamentablemente *perdieron todos*, porque estaba claro desde el principio que cada preso tenía dos chances para encontrarlo.

Para calcular la probabilidad de que *todos* (en este caso, los cuatro) encuentren su número, voy a analizar *todas* las posibilidades con las que se puede tropezar cada preso. Para eso, veamos cuáles son todas las posibles *permutaciones* de los cuatro números. Ya las escribí antes, pero las repito acá:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Estas son las 24 permutaciones posibles. Cuando un preso entre en la habitación, se enfrentará con alguna de esas 24 permutaciones. Quiero que analicemos —juntos— en qué casos encontrará su número y en cuáles no.

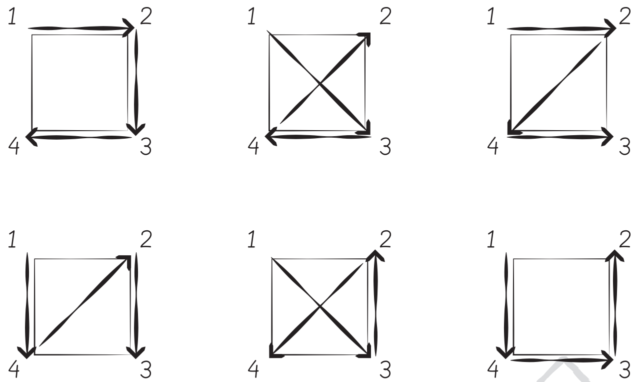
¿Se acuerda lo que hice antes con los ciclos? Lo que uno tendría que hacer es, una vez que tiene determinada la permutación que eligió el director de la cárcel, fijarse cuántos ciclos hay y, más importante aún, determinar *¡cuántos ciclos hay de longitudes 3 o 4!* ¿Por qué?

Si el preso se encuentra con un ciclo de longitud 3 o 4, ¡perdió! No va a encontrar su número. En cambio, si encuentra un ciclo de longitud 2 o 1 (un lazo), terminará encontrando su número en dos o menos pasos, que es lo que indica el problema.

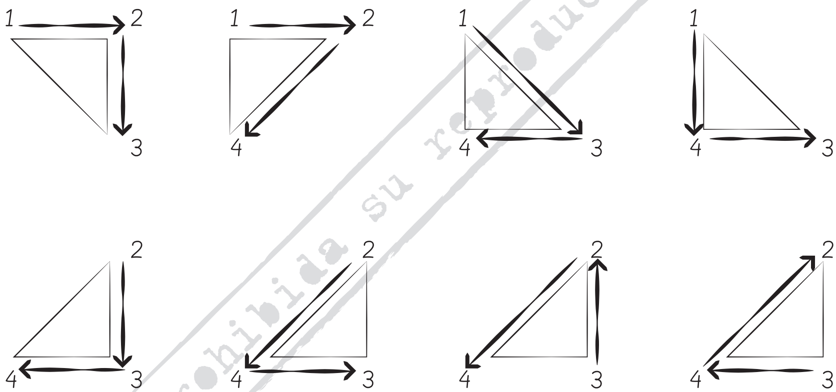
Antes de avanzar, quiero hacer una observación más: fíjese que hay ciclos que *parecen* diferentes pero que son el mismo. ¿A qué me refiero? Como ejemplo, el ciclo (1, 2, 3, 4) es el mismo que (2, 3, 4, 1). O sea, no importa en donde uno empiece, si bien parecen distintos, estos dos recorren el mismo camino y en el mismo orden. O sea, a los efectos prácticos, son 'indistinguibles'.

Busquemos juntos en qué permutaciones *fallará* —es decir, las que los llevarán al fracaso— y contemos cuántas son.

Para empezar, hay *seis* ciclos de longitud 4:



Después, hay *ocho* ciclos de longitud 3:



Por lo tanto, de las 24 posibles permutaciones, hay 14 (6 ciclos de longitud 4 y 8 ciclos de longitud 3) que les impedirían (a los presos) encontrar sus números. Si la permutación que eligió el director involucra alguno de estos ciclos, los presos no saldrán en libertad. Sin embargo, *las restantes 10 permutaciones* resultan tener ciclos de longitud a lo sumo 2 (o bien dos o bien lazos). Por lo tanto, como

$$10/24 = 0{,}41$$

los presos tendrían más de un 41% de posibilidades de encontrar sus números respectivos.

Para completar, escribo acá los 10 que serían exitosas:

(1), (2), (3), (4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) y (3,4).

En general, si el número de presos es un número *par* (digamos 2n), la probabilidad de que encuentren el número se calcula usando esta fórmula:

$$1 - (1/(n + 1) + 1/(n + 2) + 1/(n + 3) + \ldots + 1/2n)$$

Por ejemplo, en el caso de 10 presos, resulta ser n = 5.

En ese caso, el resultado es un 35%. Es decir, efectuando el proceso que describí antes, en un 35% de los casos los presos encontrarán la caja que contiene su número. Este número se obtiene haciendo:

$$1 - (1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10) = 0{,}35$$

De la misma forma, si hubiera 1.000 presos o 1.000.000, la probabilidad se acerca a un 30%.

Y aquí voy a terminar. No se me escapa que del caso n = 4 al caso general hay una distancia enorme que yo no puedo cubrir en el libro.

Hay muchísima *literatura* al respecto, y muchísimo más por decir[48], pero esa parte se la dejo a usted. Con todo, ¿no es notable

48. Le sugiero que lea esta página que publicaron los 'Gaussianos': https://

que con esta estrategia los presos puedan quedar en libertad en más de un 30% de los casos?

www.gaussianos.com/solucion-al-problema-de-los-100-presos/. En cuanto a Wikipedia, encontrará la versión en inglés con más detalles históricos en https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem.

FINAL

¿Qué pasa cuando un docente se equivoca?

Esta es una historia real. Más aún, si no lo fuera, no tendría importancia porque es *tan poderosa* y lleva en sus entrañas *tanta verdad* que su veracidad —y es curioso que esté escribiendo esto— resulta irrelevante. El mensaje es decididamente *brutal*.

Claro, después de esta introducción, me será difícil hacer justicia, ¿no es así? Intuyo que usted me está esperando para reprocharme al finalizar: "¿Esto le pareció tan 'brutal'? ¿Esto fue todo?".

Sí, permítame decirle que sí, que aun corriendo *ese* riesgo, prefiero reproducir la historia y después pensemos juntos las implicancias que tiene.

Primer acto

El 9 de agosto de 2017, en un sitio de internet que se llama Quora, estaba la narración de una joven (la voy a llamar María) que deseaba compartir una historia que ella había vivido cuando tenía 12 años. María estaba aún en la escuela primaria. Pero quería contarla para enfatizar *el impacto* que tuvo en ella lo que sucedió en ese episodio de su vida. Esto fue lo que pasó.

La maestra había planteado un problema para que los alumnos resolvieran, y les dio el tiempo suficiente para hacerlo. María, como todos sus compañeros, entregó el papel con su solución y se fue a su casa satisfecha. Estaba segura de que lo había hecho bien. Más aún: estaba muy orgullosa de la respuesta que había encontrado y del sostén lógico que había utilizado.

Al día siguiente, la maestra distribuyó las notas y en *ese* particular problema, escribió: "¡Equivocado!".

María no lo podía creer. Se quedó no solo compungida por la nota, sino le pasaba algo *mucho peor*: ¿en dónde estaba el error? ¿Qué es lo que ella podría haber pensado mal?

María estaba segura de su respuesta y no quería transar. Acá, una pausa.

Segundo acto

Durante el 'tiempo' que dure la pausa, voy a escribir el problema y después la solución de María. Si estuviera junto a usted, le pediría que antes de leer cualquier solución y/o respuesta, le dedicara un ratito siquiera para ver qué se le ocurriría. Recuerde que es un problema de escuela primaria, por lo que —obviamente— no presenta un *alto grado de sofisticación*. Eso sí, plantea una propuesta para pensar.

Un hospital está preparando una rifa para recolectar fondos. La idea es conseguir dinero suficiente para comprar un tomógrafo. Está claro que a través de la rifa exclusivamente no lo van a lograr, pero el afán de cooperar de todos ayudará para que el dinero que junten pueda considerarse significativo.

El hospital va a vender (o intentará vender) 5.500.000 rifas (todas con un número diferente). Los promotores aseguran que una de cada cuatro rifas *seguro* tiene algún premio asignado.

Dicho esto, la maestra preguntaba: "¿Cuántas rifas tendría que comprar una persona para *garantizarse* que va a ganar *por lo menos* algún premio?".

Acá es donde le pido un mínimo esfuerzo para pensar cómo contestaría usted esta pregunta. Yo sigo a continuación, pero créame que disfrutará más de la lectura si —en el camino— le dedicó algún tiempo.

Tercer acto

María había contestado que la persona que quisiera garantizarse *con seguridad algún número premiado*, necesita comprar 4.125.001 rifas: cuatro millones, ciento veinticinco mil y *una* rifas. ¿Por qué?

Este fue el argumento que la convenció: si en total hay 5.500.000 números y se sabe que una cuarta parte de ellos (uno de cada cuatro) están premiados, lo que tiene que hacer es *dividir* 5.500.000 / 4 = 1.375.000.

Es decir, del total de cinco millones y medio de números, solamente 1.375.000 tienen premio. ¿Cuál podría ser el *peor escenario* al que María podría someterse? ¿Qué es lo *peor* que le podría pasar para que no consiga ningún premio?

Justamente, como hay 1.375.000 que tienen premio, el resto (5.500.000 – 1.375.000) = 4.125.000 ¡no tienen premio!

Si María decidiera comprar 4.125.000 números, podría tener *tal mala suerte* que ninguno de ellos contenga un premio. Pero ahora… (le propongo que usted piense por su cuenta antes de seguir con mi argumento) la diferencia que advirtió María: si en lugar de comprar *nada más* que 4.125.000, ella comprara un número más, no importa cuál, *seguro* que tiene que haber alguno que tenga premio.

Una vez más, habiendo comprado 4.125.000 podría suceder que se llevara todos los *no premiados*, pero ni bien comprara uno más… ¡listo!

Fíjese que estoy hablando del *peor de todos los escenarios posibles*: al comprar tantos números, habría sido muy probable que alguno ya tuviera premio; también podría haber pasado que se llevara todos los números 'malos' (por ponerle un nombre cualquiera).

La maestra entendió distinto... y le escribió, *en rojo*: ¡Equivocado!

Cuarto acto

María estaba desolada y expectante por entender o descubrir *dónde estaba el error*. Sin embargo, ella sabía que en algún momento alguno de sus compañeros que hubiera resuelto el problema 'correctamente' (al menos según la maestra) habría de pasar al frente y resolvería el problema delante de todos. Esperó pacientemente.

La maestra eligió a una de ellas y le dijo que no hacía falta que pasara al frente, solo le pidió que dijera la respuesta. Una joven dijo (para *horror* de María): "Para garantizarse que *seguro* habría de ganar un premio, una persona tiene que comprar ¡todos los números! Es decir, debería comprar los 5.500.000 números de la rifa".

Quinto acto

María estaba en desacuerdo. Y además, no entendía dónde estaba el error de su *razonamiento*. Por supuesto: si alguien comprara *todos* los números, seguro conseguiría *al menos* un premio. De hecho, si comprara *todos* los números, se llevaría *todos* los premios. Pero esa *no era* la pregunta. La pregunta era: ¿cuántos números debería comprar una persona para garantizarse que *al menos* tendría en su poder algún número premiado?

Con temor, levantó su mano y dijo: “Yo creo que esa respuesta es equivocada”, con todos los nervios de una joven de 12 años contradiciendo a su maestra.

La maestra respondió: “Sin embargo, yo creo que *esa* es la respuesta correcta’.

María hizo un intento más: “Señorita, déjeme mostrarle lo que sucedería con *menos* números. Por ejemplo, si en lugar de ser 5.500.000 fueran nada más que 12, y supiéramos que solo una cuarta parte de ellos tienen premio, a mí me alcanzaría con comprar nada más que 10. Si tuviera mucha mala suerte y los primeros nueve que compro son todos perdedores (ya sabemos que hay *nueve* entre los doce que no tienen premio), los *tres restantes* sí tienen. No me hace falta comprarlos todos para ganar algo: me alcanza con comprar *solo uno más*”.

La maestra no se resignó tampoco y atropelló: “Esa no es la forma en la que yo te/les enseñé cómo resolver este tipo de problemas. Dejame mostrarte con otro ejemplo”.

Y ofreció esta alternativa: “Si en lugar de ser 12 números, hubiera nada más que *cuatro* números premiados, ¿cuántos números tendrías que comprar?”.

Y allí paró. María no se quería dar por vencida y replicó: “Sí, en ese caso particular, sí. Eso sucede porque cuando usted compró los tres que no tienen premio, queda *solamente uno más* por comprar. En ese caso, sí…”.

La maestra, ya exasperada, no quiso seguir con ninguna elaboración más. María se ofreció para ir al frente y dibujar algunos diagramas (los clásicos ‘diagramas de Venn’) para mostrar que tenía razón, pero no hubo caso.

"Mirá, sentate y terminemos con esta historia. Estás equivocada porque lo digo yo, y yo soy la maestra. Si volvés a abrir la boca sobre este tema, me voy a ocupar de que recibas una sanción", sentenció la maestra.

María, ahora aterrorizada, no dijo más nada. Lo único que le faltaba era tener que enfrentar a sus padres.

Sexto y último acto

María escribió este texto muchos años después del episodio. Lo hizo con un agregado que es *imperdible* (lo traduzco del inglés):

> Después de este ensayo tan increíblemente largo, quiero agradecer a esta maestra anónima, porque me ayudó a *cementar* (*sic*) mi *odio* hacia la matemática para siempre. Me llevó muchísimo tiempo poder recuperarme del profundo dolor y miseria que este episodio tuvo en mi vida, especialmente en los años de mi formación. Para ser completamente honesta, aún hoy, más de dos décadas después del episodio, decía… aún hoy siento 'algo' en mi estómago cada vez que escucho hablar de matemática, y en particular, de lo que viví como persona, abusada y torturada, para siempre.

Ahora, quisiera volver al principio. Está claro que hubo un problema muy serio. Creo que no hace falta que escriba que la solución de María *es* la correcta. Pero aun si no lo hubiera sido, lo que resulta *inaceptable* es la reacción de la persona que 'detenta el poder' en la clase.

El cuestionamiento llega también por otro lado. Por lo menos, es una pregunta que yo querría compartir con usted: ¿Cuán seguros estamos, usted y yo, de que situaciones de este tipo no son mucho más frecuentes de lo que advertimos y/o sabemos?

En el momento crítico en el que se moldean las vocaciones, donde la *duda* debería ser la ‘motora’ de todos estos momentos, la ‘guía’ de alguien que se ofrezca vulnerable… ¡aun en los casos donde *seguro* tenga razón!

Saber cuándo equivocarse, o mejor dicho, *saber equivocarse*, es algo *no menor*. Deploro autorreferenciarme, pero uno de los ‘latiguillos’ con los que *siempre* me presenté ante alumnos es que yo no quisiera dejarles la impresión de que a mí todo se me ocurre rápido, que todo me sale fácil, que todo ‘obvio’. En fin, comunicar *todo el tiempo* que es una construcción colectiva, sobre todo en tiempo, que es *prueba y error*, y sobre todo, que es *mucho más error que acierto*.

El problema reside en que yo (o los docentes en general) no exhibimos esas vulnerabilidades, y aparecemos, ante los ojos de quienes se *someten* casi por una cuestión de ‘temor reverencial’, como si fuéramos especialmente *superdotados*. Póngase por un instante en el lugar de María, o de cualquier niño, quien ve que no solo no logra entender por qué le preguntan lo que le preguntan, sino que encima el docente, al contestar de la forma en la que lo hace, terminan *domando* al alumno, lo hace sentir inferior, inadaptado, incapaz, muy por debajo del nivel mínimo que se le tolera a una personita de su edad.

Y ese, si me permite, es el detalle ‘criminal’ de esta historia: haber anulado o matado (para siempre, aunque suene exagerado) el extraordinario poder que tiene el propio error. Equivocarse hasta entender uno mismo por qué es un error es muchísimo más sano y útil para el crecimiento de quien está pensando que si ella/él hubieran entendido de entrada por qué la/el maestra/o tenían razón.

¡Ah, me olvidaba! ¡Sobre todo, debemos estimular la pregunta! Nadie debería quedarse sin entender porque siente que si vuelve a preguntar 'retrasa' al grupo. Me voy a permitir una exageración más: dejar atrás a alguien es como perder a un amigo en la penumbra y priorizar a la 'mayoría' que la está pasando bien. Aunque haya uno (o unos pocos) que no, creemos que la mayoría gana. ¡No! En este caso, estamos *forzados* a asegurarnos de que, para que haya mayoría, estén todos. Si no, hay algo que está mal.

Y por las dudas: María, tenías razón. ¡Qué lástima que no podemos volver atrás! ¿Nos darías una nueva oportunidad?

Problemas irresueltos

Como se puede imaginar, si yo tuviera (o pretendiera) que escribir una lista de *todos* los problemas irresueltos en matemática, me podría pasar la vida (no solo la mía sino la suya y la de todo el resto de la humanidad) y no terminaría. Mientras yo escribo y usted lee, hay científicos que están contestando preguntas. Por cada respuesta, por cada problema que parece 'cerrarse', se abren múltiples más de los que —quizás— no teníamos idea.

Por supuesto, no se me escapa que no todos los problemas tienen la misma relevancia. De hecho, hay problemas que llevan muchísimos años desde que fueron planteados, y tienen el atractivo 'extra' de que mucha gente muy *famosa* (dentro de la matemática), matemáticos *relevantes*, han intentado sin suerte contestar la pregunta. Por otro lado, no interprete que estoy diciéndole a usted —sí, a usted— que no lo intente: lo más probable es que algunos de estos problemas sean abordados y/o resueltos por personas con la 'temeridad' de atacarlos con ingenuidad y, de esa forma, en lugar de encontrarse con los caminos 'sin salida' que encontraron otros, terminarán haciendo algún aporte totalmente diferente, que no se le había ocurrido a nadie. Es decir, esa misma ingenuidad (si es que puedo seguir usando esa palabra) será determinante para encontrar la respuesta.

Una breve digresión. En Estados Unidos, en un lugar virtualmente *perdido* en el mapa, 'allá arriba' en el noreste, en la pequeña ciudad Peterborough, New Hampshire, un estado muy chico en población y superficie, se encuentra ubicada una institución sin fines de lucro que ha alcanzado trascendencia mundial por las razones que paso a explicar. Justamente en Peterborough está ubicado el Clay Mathematical Institute[49] (el Instituto de Matemática Clay). A comienzos de este siglo (XXI), el instituto planteó una lista con siete problemas, que es conocida con el nombre de 'Los problemas del Milenio' ('Millennium Problems').

La institución —fundada hace veinte años (en 1998)— se compromete a entregar *un millón de dólares* a cualquier persona que pueda resolver *alguno* de los problemas. Así nomás. De todas formas, me quiero apurar a escribir lo siguiente: si bien resulta obvio la implicancia económica del premio, el *prestigio* que le traería al autor lo ubicaría —casi instantáneamente— en el panteón de los matemáticos más sobresalientes de la historia. Por lo tanto, si bien la compensación monetaria obviamente no es menor, el respeto que ganaría en la historia de esta ciencia es ciertamente inigualable.

Un aspecto interesante: salvo *uno* de los problemas (que voy a contar a continuación), son todos muy difíciles de enunciar (y por lo tanto, de comprender) para una persona que sea 'no matemática'. Más aún, estoy convencido de que aun matemáticos profesionales, cuyas especialidades no son compatibles con cada problema, tendrían dificultades en entender siquiera 'cuál es el problema' o 'qué es lo que hay que demostrar y/o resolver'.

---

49. http://www.claymath.org/. Esta es la página oficial del Clay Mathematical Institute. Los problemas los puede encontrar en http://www.claymath.org/millennium-problems

Quiero volver al principio. No me voy a referir a problemas de *esas* características, sino que voy a presentar otros un poco más 'pedestres', pero el hecho que sean más accesibles para comprenderlos o entender qué es lo que hay que resolver, no los hace *menos difíciles* (ni más *fáciles*). Mi idea es compartir con usted un poco de lo que sucede en un mundo que quizás le queda más *alejado* de su vida cotidiana. Creo que vale la pena leer e informarse sobre lo que pasa 'dentro de la matemática'.

Una última cosa: aunque quizás usted (y ciertamente yo) no somos *médicos*, todos sabemos las dificultades que hay para encontrar soluciones a cierto tipo de cánceres, o de enfermedades autoinmunes, o con el Alzheimer o Parkinson, etc. Es decir, nos es más fácil *relacionarnos* con *ese* tipo de problemas 'irresueltos' que con los que hay en la matemática. Mi objetivo es poner en relieve lo que sucede con otra ciencia y que a la mayoría de la población o de las sociedades en todo el mundo le resulta totalmente *transparente*.

Ahora sí, después de *toda* esta introducción, voy a escribir alguno de ellos, los más conocidos pero de los que no se conoce la solución. Al mismo tiempo, como yo los puedo entender, estoy seguro de que usted también podrá. Es una selección totalmente *anárquica*, no tiene relación con el grado de dificultad de cada uno, ni con el tiempo que media entre que fue propuesto y el día de hoy, cuando usted está leyendo y/o el día que yo lo estoy escribiendo (octubre de 2018). Ah, y la lista no pretende ser *exhaustiva* aun dentro de la categoría de problemas más conocidos. Simplemente son problemas que tienen algún atractivo *para mí* y que, desde ese lugar, quiero compartir. Me entretuve haciendo un *rastrillaje grueso*, ojalá que usted los disfrute al leerlos (y eventualmente *pensarlos* un rato) tanto como yo al escribirlos. Acá voy.

El problema de Collatz

El primer problema tiene varios nombres. En principio, fue propuesto en el año 1937 por Lothar Collatz, pero en el camino, en más de 80 años, se lo conoce como: a) El problema (o algoritmo) de Syracuse; b) El algoritmo de Hasse; c) El problema de Kakutani; d) El problema de Ulam. Y voy a parar agregando uno más: El problema de (3n+1). Y me detengo acá, porque en el último nombre se divulga una parte del problema. Acompáñeme y verá que es *muy sencillo de entender*.

Tome una lapicera y un papel, vamos a 'generar' algunos números entre los dos. Claro, como yo no estoy allí, usted preparará su lista y yo voy a hacer la mía, pero verá que en algún momento —estoy casi seguro— vamos a llegar al mismo resultado. Le cuento qué es lo que tenemos que hacer.

Elija un número *natural* cualquiera (1, 2, 3, 4, 5, …, 70, 71, etc.), es decir, un número *entero positivo cualquiera*. Yo voy a elegir el 46. Usted elija el que quiera y hagamos juntos las cuentas (le propongo que también siga las mías). Si el número que usted eligió es un número *par*, entonces divídalo por dos. Como yo elegí el número 46, que es par, al dividirlo por dos obtengo el número 23. Empiezo a anotar la lista de números que voy a ir generando. Por ahora tengo:

46, 23

Si el número obtenido (en mi caso 23) fuera *par*, haría lo mismo: volvería a dividirlo por dos. Pero no lo es. Entonces, lo que uno hace ahora es ¡multiplicarlo por tres y sumarle uno! Es decir, como 23 es *impar*, lo multiplico por tres (y obtengo 69) y le sumo uno. Resultado: 70. Mientras tanto, ¿a usted qué le pasó? Yo agrego el número 70 a los que ya tenía:

46, 23, 70

Ahora, el número que uno obtiene con este procedimiento (multiplicándolo por tres y sumándole uno) me permite afirmar que uno llega a un número *par* (verifíquelo usted). En este punto, podemos dividir por dos (como al principio). Al dividir 70 por dos, obtenemos 35. La lista ahora es:

46, 23, 70, 35

Una vez más, como no es par, lo tengo que multiplicar por tres y sumarle uno. Resultado: ($35 \times 3 = 105$), y luego $105 + 1 = 106$, lo cual implica que mi lista ahora se compone de:

46, 23, 70, 35, 106

Y sigo: divido 106 por dos, y se tiene 53:

46, 23, 70, 35, 106, 53

Voy a continuar haciendo las mismas cuentas: dividiendo por dos cuando obtenga uno par, y multiplicándolo por tres y sumándole uno cuando resulte impar. Acá escribo mi lista y le propondría, una vez más, que usted escriba la suya:

46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Y acá, al llegar al número '1', voy a parar. ¿Qué le pasó a usted?

Por un instante, voy a escribir algunas listas más. Es decir, la que yo obtuve surgió porque el número *inicial* fue el 46 y, como usted ve, en un número de pasos *finito* llegué al 1. Estoy tentado de *asegurar* que, independientemente del número con el que empezó usted, su lista *también* llegó al número '1'. ¿Es así?

Solo para que no quede reducida al número 46, que fue el que yo elegí originalmente, agrego acá cinco listas más, empezando con cinco números diferentes.

a) **7**, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
b) **101**, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
c) **19**, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
d) **51**, 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
e) **111**, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

¿Quiere revisarlas? ¿Hay *algo* que le resulte *sospechoso*? O mejor dicho, ¿alguna alternativa saliente? Fíjese que las cinco listas terminaron en *uno*. ¿Por qué? ¿Tiene sentido *seguir*? ¿Qué pasaría si uno *intenta continuar*?

Si uno llega a 1, el próximo número es 4 (ya que $(3 \times 1 + 1) = 4$), después me quedo con la mitad y obtengo el número 2. Luego, divido por dos otra vez (porque 2 es par) y llegamos al número 1. O sea, si uno llega hasta el número 1, ya sabe que entrará en una suerte de *ciclo* y no sale más de él, no aparece ningún número nuevo (salvo el 4, el 2 y el 1). ¿Entonces?

Bueno, justamente, *¡esta es la gran pregunta!*, que termina siendo la conjetura de Collatz. Él dijo que no importa con qué número uno empiece, llevará mucho tiempo o poco, aparecerán muchos o pocos números, pero al final ¡siempre se llega al número *uno*!

Antes de terminar, una curiosidad: empiece usted con el número 27 y verá que pasa. Sí, al final va a llegar al número *uno*, pero en el camino tendrá que utilizar 111 pasos. ¡Sí, ciento once pasos!

Las computadoras han permitido avanzar muchísimo y se sabe que el resultado es cierto para números *enormes*[50], pero no importa lo que digan las computadoras y cuán grandes sean los números iniciales. Lo que *aún* no se sabe es si el resultado es *siempre cierto*. Listo. Ese es el primer problema cuya solución no se conoce… ¡aún!

La conjetura de Goldbach

Christian Goldbach fue un matemático alemán pero además abogado. Corría el año 1742. La gran *estrella* de la matemática mundial era un alemán también: Leonhard Euler. Goldbach le escribió una carta a Euler con la siguiente pregunta que él no podía contestar: "¿Es verdad que todo número *par mayor que cuatro* se puede escribir (o descomponer), como la suma de dos números primos?".

Ejemplos:

a) 8 = 3 + 5. En este caso, 8 es el número *par mayor que cuatro*, y tanto 3 como 5 son números primos. ¿No tiene ganas

---

50. Si le interesa el tema, en Wikipedia hay muchísimo para leer y por donde avanzar. Puede encontrar el enlace en https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture

de pensar usted? Fíjese que no dice que haya una *única* manera de descomponer al número par, sino que tiene que haber *por lo menos una* forma de hacerlo.

b) 10 = 5 + 5 (también se puede escribir 10 = 3 + 7)
c) 12 = 5 + 7
d) 14 = 7 + 7 = 3 + 11
e) 16 = 5 + 11 = 3 + 13
f) 18 = 7 + 11 = 5 + 13
g) 20 = 7 + 13.
h) 22 = 11 + 11
i) 24 = 11 + 13

Y así podría seguir. Hasta hoy, octubre del año 2018, se *sabe* que la conjetura de Goldbach es *cierta* para todo número par menor o igual que:

400.000.000.000.000.000

Es decir, uno tiene la *fuerte tentación* de decir que el resultado *es cierto*, que la conjetura de Goldbach se verifica, pero…. No alcanza con haber comprobado que es cierta para muchísimos números. Lo que hace falta es que alguien la demuestre para *un número par cualquiera*, y ¡eso aún no se sabe!

Primos gemelos

¿Qué es un número primo? Para no hacer acá una larga exposición sobre los números primos en general, quiero hacer un breve resumen (para lo que importa en este contexto): un número *entero positivo mayor que* <u>*uno*</u> se dice primo si tiene nada más que dos divisores: él mismo y el número 1.

Por ejemplo, el número 2 es un número primo porque tiene *exactamente* dos divisores (positivos): 1 y 2. Por la misma razón, el número 3 es primo (divisible por 3 y por 1). A partir de acá, voy a omitir al número 1, porque está claro que 1 divide a todo número. Ahora bien: el número 4, por ejemplo *no es primo*, porque no solo es divisible por él mismo, sino que también es divisible por 2. El 7 es primo pero el 15 no (15 es divisible por 3 y por 5).

La lista de los primeros números primos empieza así:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc.

Uno podría preguntarse: ¿hay infinitos primos?

Al mismo tiempo, y esto es muy curioso, la respuesta se conoce desde hace más de dos mil años: Euclides probó (en forma realmente sencilla) que sí, efectivamente hay infinitos números primos. No lo voy a demostrar acá, pero si le interesa el tema, en casi cualquier texto de aritmética universitaria es posible encontrar la prueba en los primeros capítulos.

Hay muchísimas preguntas *no contestadas* cuando uno habla de números primos, pero la que quiero presentar tiene un costado atractivo 'extra' por su parte. Sígame y verá qué interesante.

Si usted piensa un instante, se dará cuenta de que hay *un solo número primo positivo par*. Me refiero al número 2. A partir de allí, cualquier otro número *par mayor que dos* no puede ser primo, porque esencialmente, ¡será divisible por 2! (además de por sí mismo y por 1).

Dicho esto, entonces, piense conmigo lo siguiente: exceptuando el caso *muy particular* del 2 y 3, ¡no puede haber números primos consecutivos! ¿Por qué? Si usted elige dos números seguidos (o consecutivos), uno de los dos tiene que ser par y, por lo tanto, uno de los dos (o los dos) no pueden ser primos. Bien.

Ahora tomemos por ejemplo dos números primos *no consecutivos*, pero 'casi'. ¿Qué quiero decir con 'casi'? Me voy a permitir *saltearme* un número que esté entre los dos.

Por ejemplo, tomemos al 3 y al 5. Los dos son primos (en este caso, me salteé el 4). Podría hacer lo mismo con 5 y 7 (salteando el 6). O el 11 y el 13 (salteando el 12). Si quiere, podríamos irnos un poco más 'adelante' entre los números enteros positivos. Por ejemplo, (17, 19), (29, 31), (59, 61) o (71,73). A cada *par* de primos que cumplen esta característica (ser dos números primos 'casi consecutivos', salteando al número par que está en el 'medio'), se los llama 'primos gemelos'.

Al llegar acá, entonces, la pregunta: ¿hay infinitos pares de primos gemelos? Es decir, *sabemos* que hay infinitos primos (lo probó Euclides), pero *desconocemos* si hay *infinitos primos gemelos*. ¡Ese es el problema irresuelto que quería contar acá![51]

El problema del viajante de comercio

Por último, voy a agregar el *único* de los siete que figura en la lista de 'Los problemas del Milenio' de la que escribí al comien-

51. Cuando Carlos (D'Andrea) llegó a este punto en la revisión que hace de los textos que le envío, me escribió un mail (que recibí el domingo 24 de junio de 2018): "Adrián, hay un cierto 'progreso' reciente respecto del problema, pero el progreso ha llegado de una manera muy interesante. Lo que se consiguió demostrar es que hay infinitos pares de primos que difieren en un número fijo *N* (el caso particular de la conjetura es cuando N = 2), pero en un comienzo el número N estaba alrededor de los 70 millones. Hoy, mientras te escribo esto, el N ya se redujo a ¡seis! Los matemáticos que más han aportado son Yitang Zhang (que publicó su trabajo en el *Annals of Mathematics* en mayo de 2013) y James Maynard y Terence Tao". (¡Cuándo no! Este comentario me pertenece).

zo. Es uno de esos que si usted (o alguien) fuera capaz de resolver, podría agregar un millón de dólares a su cuenta bancaria.

El problema es de enunciado realmente muy sencillo y se entiende sin dificultades. Claro, eso no quiere decir que sea fácil de resolver, ni mucho menos. De hecho, verá que, si sigue leyendo, usted pondrá en duda varias veces que a alguien le puedan pagar semejante suma por resolver lo que parece ser una verdadera pavada. Sin embargo, hace más de cincuenta años que está planteado como tal (aunque si uno rastrea la historia llega hasta el principio del siglo XIX) y, hasta ahora, nadie le encontró la vuelta. Acompáñeme por acá.

Una persona tiene que recorrer un cierto número de ciudades que están interconectadas (puede ser a través de rutas por donde circulan automóviles, vías de ferrocarril o rutas aéreas). Es decir, siempre se puede ir de una hacia otra en cualquier dirección.

Además, otro dato importante es que uno *sabe* el costo de ir de una hacia otra (y viceversa). A los efectos prácticos, voy a suponer que viajar desde la ciudad A hasta la ciudad B sale lo mismo que viajar desde B hasta A.

El problema consiste en elegir una ciudad en la cual empezar el recorrido. Construir un itinerario que pase por cada una (y todas) de las ciudades una sola vez, y que termine en el mismo lugar inicial. Naturalmente, si el problema terminara allí, no sería un 'problema'. Lo que *falta* es saber cuál, de todos los posibles caminos, es el más barato.

Eso es todo. No me diga que no le dan ganas de volver para atrás y leer de nuevo, porque estoy seguro de que a esta altura usted debe dudar si entendió correctamente el enunciado. En vista de la experiencia que tengo con todos aquellos a quienes les conté el problema por primera vez, puedo 'casi' asegurar que esto es lo que le está pasando a usted:

a) *Cree* que no entendió bien el planteo, o
b) hay algo que anda mal en este mundo.

Sin embargo, está todo bien solo que la dificultad aparece escondida. Los intentos que distintas generaciones de matemáticos han hecho tratando de resolverlo han permitido múltiples avances, sobre todo en el área de optimización, pero hasta ahora, octubre de 2018, el problema general no tiene solución[52].

Yo sé que en este momento usted duda de mí, duda de usted, duda de todo. Tiene que haber algo que esté mal. Sigamos.

Hagamos algunos ejemplos sencillos, con pocas ciudades. Las voy llamar con letras. Para dos ciudades (A y B), dos caminos posibles. Empezar en A, ir a B y volver a A, o empezar en B, pasar por A y volver a B.

ABA y BAB

Lo que hay que hacer después es estudiar los precios de cada tramo y sumarlos. Por lo tanto, cada una de las dos posibles rutas implicará un costo. Uno compara, elige la más barata (aunque podrían ser las dos iguales), y se queda con esa. Listo.

Ahora, hagamos lo mismo pero con tres ciudades (A, B y C).

52. En realidad, está 'mal' que yo diga que *no tiene solución*. Solución tiene, y es muy sencilla: alcanza con *listar* todos los caminos posibles y quedarse con el más corto. El problema reside en cuánto tiempo necesita uno para poder descubrir este camino particular. Las formas conocidas hasta hoy (aun en casos *sencillos*, con un 'pequeño' número de ciudades) llevarían *siglos*. Hablando en términos un poco más 'técnicos', el objetivo es encontrar un algoritmo *polinomial*. Los que tenemos hasta aquí tienen una complejidad *exponencial*.

Si usted se fija, verá que hay seis caminos. Escribo 'en orden' las seis formas posibles de recorrerlas:

ABCA	BACB	CABC	ACBA	BCAB	CBAC

Una vez más, uno les agrega los precios de cada segmento, los suma y obtiene el resultado final de cada itinerario. Después, elige el más barato y se terminó.

Para cuatro ciudades (A, B, C y D) hay veinticuatro caminos posibles:

ABCDA	BCDAB	CABDC	DABCD
ABDCA	BCADB	CADBC	DACBD
ACBDA	BDACB	CBADC	DBACD
ACDBA	BDCAB	CBDAC	DBCAD
ADBCA	BACDB	CDABC	DCABD
ADCBA	BADCB	CDBAC	DCBAD

Supongamos ahora que en lugar de cuatro ciudades, hubiera cinco. ¿Cuántos caminos posibles habrá? (y acá estará la clave). Quiero convencerla/o de que de las 24 posibles que había con *cuatro* ciudades, ahora, para cinco, el número aumenta mucho: hay 120. Vea por qué.

¿En cuántas ciudades se puede empezar el recorrido? Respuesta: en cualquiera de las cinco (A, B, C, D y E). Una vez elegida la primera, ¿cuántas posibilidades quedan para la segunda ciudad? Respuesta: cualquiera de las cuatro restantes. O sea, nada más que para recorrer las primeras dos ciudades hay ya *veinte* posibles maneras de empezar:

AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC y ED.

¿Y ahora? ¿Cuántas posibilidades hay para la tercera ciudad? Ya elegimos dos, es decir que nos quedan tres. Luego, como ya teníamos veinte maneras de empezar, y cada una de estas puede seguir de tres formas, entonces ahora tenemos 60 formas de empezar con tres ciudades. (¿Advierte ya en dónde empieza a estar la dificultad?). Es como si estuviéramos *construyendo un árbol*, o las *ramas* de un árbol. Mientras tanto, yo sigo.

Para la cuarta ciudad a elegir, ¿cuántas posibilidades quedan? Respuesta: dos (ya que son solamente dos las ciudades que no hemos utilizado en el itinerario que hicimos). Luego, para cada una de las 60 formas que teníamos de empezar con tres ciudades, podemos continuar con dos ciudades. Moraleja: tenemos 120 itinerarios con cuatro ciudades.

Y ahora, para el final, no nos queda nada para elegir, porque de las cinco ciudades que había, ya hemos seleccionado cuatro: la quinta queda elegida por descarte. Luego: tenemos 120 itinerarios.

Si usted relee lo que escribí recién, al número 120 llegamos multiplicando los primeros cinco números naturales:

$$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Este número se conoce con el nombre 5!, pero no es que se lea con gran admiración, sino que los matemáticos llamamos a este número el ‘factorial de cinco’. En el caso que estamos analizando, el número cinco es justamente el número de ciudades.

Es fácil imaginar lo que va a pasar si en lugar de tener cinco ciudades, se tienen seis (y le propongo que lo haga). El número de caminos posibles será:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Sigo algunos pasos más.

Siete ciudades, 7! = 5040 posibles caminos
Ocho ciudades, 8! = 40.320 caminos
Nueve ciudades, 9! = 362.880 caminos
Diez ciudades, 10! = 3.628.800 caminos

Acá, paro. Como usted se da cuenta, el total de rutas posibles que habría que analizar con solo *diez ciudades* es de ¡más de tres millones seiscientos mil! Agregarle los precios de cada tramo, sumarlos y asociar cada ruta con el número que saldría recorrer las ciudades en ese orden. Después, elegir la más barata.

La primera conclusión que uno saca es que el factorial de un número aumenta muy rápidamente[53] a medida que uno va avanzando en el mundo de los números naturales. Tan rápido aumenta, que lo invito a que usted haga las cuentas para convencerse.

Imagine ahora que usted es un viajante de comercio y necesita decidir cómo hacer para recorrer —por ejemplo— las capitales de las 23 provincias argentinas, de manera tal que el costo sea el menor posible. O sea, de acuerdo con lo que vimos recién, habría que analizar el 'factorial' de 23 posibles caminos. Pero el

53. Por supuesto, cuando escribo que 'el factorial de un número aumenta muy *rápidamente*', la *rapidez* termina siendo subjetiva. La pregunta sería "¿Más rápidamente comparado con qué?". Y tendría razón en cuestionarme la frase. Pero para no extenderme mucho, apelo a su *generosidad* para entender lo que quiero decir. En todo caso, le propongo que usted se ocupe de comparar el crecimiento del factorial de un número con otro tipo de multiplicaciones o, incluso, en situaciones de crecimiento *exponencial*.

factorial de 23 (que se escribe 23!) supera los 25 mil trillones de caminos posibles. Aun a las computadoras más potentes les resulta *complicado* decidir cuál de todos los recorridos es el óptimo.

$$23! = 25.852.016.738.885.000.000.000$$

Como usted habrá advertido ya, la dificultad no está en *escribir* los caminos posibles, ni siquiera en estimar el costo. No. El problema reside en el número *descomunal* de posibilidades que hay que recorrer hasta poder elegir la ruta óptima. Si con 23 ciudades hay más de 25 mil trillones, no hace falta que le diga lo que sucedería si uno tiene 100 o 1000 ciudades.

Por lo tanto, la dificultad *no* reside en hacer las cuentas, ni siquiera en el método a emplear, ni en sumar los costos y después comparar. El problema, insalvable por ahora, es que hay que hacerlo con una cantidad descomunal de rutas que, como escribí antes, aun en los casos más sencillos parece inabordable.

Hay varios casos particulares que fueron resueltos, pero en esencia el problema está abierto.

Un último comentario: con los actuales modelos de computación, el problema no parece tener solución. Hará falta entonces, que aparezca alguna nueva idea que revolucione todo lo conocido hasta acá.

Por ahora, termino con este *brevísimo* recorrido. ¿Habré logrado interesarla/o? ¿Habré logrado motivarla/o? ¿Sabe por qué le pregunto? Es muy claro que no va a cambiar su vida leyendo y/o tratando de interpretar estos problemas, pero si uno no tenía ni idea de lo que pasa en este ‘mundo’ (el de la matemática), ¿no siente que ha mejorado un poco como *persona* sabiendo que en el mundo hay muchísima gente que piensa soluciones a problemas que nosotros no sabíamos que existían?

En todo caso, permítame decirle que a mí sí, tanto como me interesaría saber (si pudiera) en qué están pensando los científicos en el mundo, todos los días, sin importar la disciplina, el lugar, las condiciones… nada. Cuando se despiertan a la mañana y van a 'trabajar', ¿se imaginan algo mejor que tener un problema irresuelto y pensar que ese día, *ese día particular*, puede ocurrírseles algo que mejore la dirección a la que apuntaban o que les dé una idea que no tenían? ¿Qué cosa mejor le podría pasar a uno en la vida (profesional, claro está) que haber logrado contribuir en ese sentido?

Aunque no esté de acuerdo con lo que escribí (no estoy seguro de que *yo* lo esté), creo que vale la pena pensar el último párrafo.

Curiosidades en aritmética

Me quiero permitir un gusto. Desde hace tiempo que veo en distintos libros y/o sitios de internet 'bellezas' que tienen que ver con la aritmética. Igualdades que expresan una armonía tal que terminan entusiasmando al que las mira, como quien mira un *cuadro* en un museo.

Escribí varias de estas reflexiones en casa de unos amigos, porque las vi en un libro de ellos y quiero transcribirlas. A Lenny Gunsteen, mi reconocimiento por haberme facilitado los textos y haberme estimulado para que los incluyera acá.

El último aporte lo vi el 28 de diciembre de 2014, curiosamente, el Día de los Inocentes. Qué bueno que fuera justo ese día. No lo había advertido, pero acá estoy...

1) En el ejemplo que sigue, fíjese en los dígitos que lo componen y su 'reverso', o sea, el *mismo* número pero leído de derecha a izquierda. En ese caso, se verifican estas dos igualdades:

a) $8712 = 4 \times 2178$
b) $9801 = 9 \times 1089$

Aquí, tarea para el hogar: los *únicos* dos números de *cuatro* dígitos que son múltiplos *exactos* de sus reversos son 8712 y 9801.

2) A continuación, cuatro casos notables. Estos son los *únicos* cuatro números enteros positivos —mayores que uno— que son iguales *a la suma de los cubos de sus dígitos*. Fíjese:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

3) Fíjese qué curioso: el producto de $239 \times 4.649 = 1.111.111$. Como ambos números son primos (239 y 4.649), esto indica que esa es la **única** forma de descomponer el número 1.111.111 como producto de dos o más números que no involucren al número 1.

4) Por otro lado, $11 \times 73 \times 101 \times 137 = 11.111.111$. Una vez más, los números 11, 73, 101 y 137 son primos, pero ahora hay muchas más formas de escribir el número 11.111.111 como producto (¿las quiere pensar usted?). Me apuro a escribir algunas yo. Antes de avanzar, *¿cuántas formas hay/habrá?* Como hay cuatro números primos involucrados, según las diferentes formas de agruparlos vamos a obtener diferentes 'factores', todos distintos de 'uno'. Acá voy:

$$(101 \times 137) \times (11 \times 73) = 13.837 \times 803$$
$$(73 \times 137) \times (11 \times 101) = 10.001 \times 1.111$$

$$(73 \times 101) \times (11 \times 137) = 7.373 \times 1.507$$
$$11 \times (73 \times 101 \times 137) = 11 \times 1.010.101$$
$$73 \times (11 \times 101 \times 137) = 73 \times 152.207$$
$$101 \times (11 \times 73 \times 137) = 101 \times 110.011$$
$$137 \times (11 \times 73 \times 101) = 137 \times 81.103$$

5) Si uno quisiera ‘ordenar’ 12 naranjas distintas y contar de cuántas formas se puede hacer, uno *sabe*[54] que el resultado es 12! (el factorial de 12) = 479.001.600 formas de ordenarlas. Si nos llevara *un segundo* cambiar el orden, tardaríamos entonces 479.001.600 segundos, que resultan ser ¡15 años! Buena suerte.

6) Errores de ‘tipeo’

Si una persona estuviera tipeando[55] y se equivocara en la forma en la que usa los ‘exponentes’ y los signos de ‘multiplicar’, podrían producirse errores que se verían ‘compensados’. Me explico:

---

54. Se trata de calcular las *permutaciones* de doce elementos, en este caso, las doce naranjas. En la literatura de fácil acceso en internet (por ejemplo), hay múltiples maneras de *entender* lo que es una permutación y cómo calcular la cantidad de permutaciones de n elementos (el resultado es $n! = n \; x \; (n\text{-}1) \; x \; (n\text{-}2) \; x \; (n\text{-}3) \; x \ldots 3 \times 2 \times 1$). Por ejemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

55. El crédito de estos ejemplos le corresponde a la gente que escribió (y sigue escribiendo) Mathematica. Mathematica es un programa que usamos en diferentes áreas de la ciencia, muy especialmente los matemáticos, físicos, ingenieros, computadores (por poner algunos ejemplos). Fue diseñado y concebido por Stephen Wolfram. Su base de operaciones se encuentra en Champaign, muy cerca de la Universidad de Illinois. (http://mathworld.wolfram.com/PrintersErrors.html)

a) $2^5 \times 9^2 = 2.592$
b) $3^4 \times 425 = 34.425$
c) $31^2 \times 325 = 312.325$

7) El sueño de cualquier alumno (que también fue el mío alguna vez).

La idea sería poder *simplificar fracciones* de la forma más sencilla posible: 'cancelar' dígitos que aparecen en el numerador y denominador[56]. Sígame en estos ejemplos:

a) 64/16 = (simplificando el '6' en el numerador y denominador) 4/1 = 4. ¡Que es el resultado correcto!
b) 98/49 = 8/4 = 2 (aquí hice desaparecer al número '9') sin que se haya alterado el resultado.
c) 95/19 = (cancelando los '9' sigue valiendo el resultado) 5/1 = 5.
d) 65/26 = 5/2 (luego de haber eliminado al dígito '6' en el numerador y denominador), el resultado sigue siendo válido. Este hecho fue descubierto por Boas, en el año 1979.

En el programa Mathematica, que dirige Stephen Wolfram, se sostiene que estos son los únicos cuatro casos que involucran números de dos dígitos. Para los números de *hasta* tres dígitos, a continuación incluyo la lista completa de los que también verifican la 'cancelación anómala', o sea, eliminando el/los dígito/s del numerador y denominador sin que eso *altere* el resultado correcto.

56. Una vez más, estos datos los recogí de observaciones que hicieron los matemáticos que trabajan, diseñan y programan Mathematica. Fíjese en esta página web y observe lo que ellos llaman 'cancelación anómala': http://mathworld.wolfram.com/AnomalousCancellation.html

13/325 = 1/25 (eliminado el 3)
124/217 = 4/7 (eliminados el 1 y el 2)
127/762 = 1/6 (eliminando el 2 y el 7)
138/184 = 3/4
139/973 = 1/7
145/435 = 1/3
148/185 = 4/5
154/253 = 14/23
161/644 = 11/44
163/326 = 1/2
166/664 = 1/4
176/275 = 16/25
182/819 = 2/9
187/286 = 17/26
187/385 = 17/35
187/748 = 1/4
199/995 = 1/5
218/981 = 2/9
266/665 = 2/5
273/728 = 3/8
275/374 = 25/34
286/385 = 26/35
316/632 = 1/2
327/872 = 3/8
364/637 = 4/7
412/721 = 4/7
436/763 = 4/7

Educación (ayer y hoy)

Permítame una digresión. Aunque parezca una locura, creo que *esta* es la oportunidad. ¿Qué oportunidad?, estará pensando usted.

Me explico. No sé si es lo que cada uno de nosotros estaba buscando, pero es un *desafío* de la historia. Estamos viviendo un momento muy particular. Ciertamente no es el único. Alguna vez empezó a haber electricidad. Y después llegaron los teléfonos. Y aparecieron los aviones. Y el automóvil.

Algunos —yo, por ejemplo— nacimos en una época en donde *no había televisión*. Y cuando empezó, la tenían muy pocos. Era una demostración de estatus social. Pero en esa misma época, para ser considerado una persona 'alfabeta' alcanzaba con saber leer y escribir. Hoy ciertamente esas son condiciones necesarias, pero claramente *no suficientes*.

Para las personas que —como yo— estén cerca de los 70 años, hay que aprender a 'coexistir' con el miedo de *no saber*. No estábamos preparados para esto.

De hecho, cuando aparecieron las videograbadoras, las videocaseteras, pocos sabían cómo programarlas. Claro: era mucho más difícil que hoy, pero se podía. A los más jóvenes, los más niños les 'salía' natural, fácilmente. Igual que sucede hoy con los teléfonos celulares, o las apps que los 'populan'.

A nosotros nos enseñaban con tiza y pizarrón. Y papel secante. Y lapicera a fuente. No nos dejaban usar birome… ¡y no se podía tachar! ¡No se podía borrar! ¿Por qué habrá pasado eso? ¿Qué es lo que no nos querían dejar hacer? ¿Es que querían que expusiéramos nuestros *errores*? Nunca entendí lo que había detrás de esa imposición.

Y ni hablar de quienes habían nacido zurdos. Yo tenía un compañero de banco, en la escuela primaria, a quien la maestra le 'ataba el brazo en la espalda' para que no tomara la lapicera (o el lápiz) con la mano izquierda. Y si lo veía haciéndolo, ¡le pegaba con una regla! Y créame, a mí no me lo contaron: yo viví esa época. Recuerdo que pensaba en silencio: "¡Menos mal que no nací zurdo!" ¿Qué estaremos aceptando socialmente hoy que resulte equivalente a lo que, en aquella época, era que una maestra le pegara a un alumno con una regla? ¿De todo lo que vivimos hoy como natural, o al menos *aceptable*, y que dentro de 40 o 50 años, quienes nos sigan piensen ¡qué bestias!?

En la actualidad, cuando los jóvenes están ensimismados jugando a los videojuegos, aparecen las críticas feroces porque parecen aislados de todo. Y escucho: "Nosotros nos comunicábamos personalmente, generábamos relaciones interpersonales". Sí, claro, pero ¡no teníamos otra alternativa!

Permítame proponerle pensar esto: si en *nuestra época* hubiera habido videojuegos, redes sociales, internet (por poner *solo algunos ejemplos*) y nosotros hubiéramos *elegido* no usarlos para comunicarnos en tres dimensiones y en forma personal, cara a cara…entonces sí, yo diría que éramos distintos. Pero no fue así. Nosotros *no pudimos optar*. Elegíamos vivir de esa forma porque no nos quedaba otra alternativa. Entonces, no tiene sentido la comparación. Ni nosotros éramos mejores ni los jóvenes de hoy son peores. Y acá voy a filtrar una opinión personal, controversial: estoy fuertemente en desacuerdo con eso que escucho hoy, que ‘todo tiempo pasado fue mejor’: creo que este tiempo es mucho mejor, que estas generaciones son mucho mejores, los niños/jóvenes están mucho más preparados y el compromiso pasa por otro lugar. Pasa por ofrecerles a *todos* los niños las mismas posibilidades, y no aceptar que estas condiciones solo nos beneficien a unos pocos, que dependa del poder adquisitivo o de la cuenta bancaria. *Eso* es lo que tiene que cambiar.

Mi padre solía sentarse conmigo cuando venía de trabajar y me decía: “Explicame qué es lo que tienen estas canciones (las de los Beatles) que a vos te enloquecen y yo no entiendo”. Y tenía razón. No sé qué le habré contestado, pero mi ‘viejo’ me decía: “El día que a mí me parezca que lo que hacen ‘ustedes’, los jóvenes, es porque están o bien ‘locos’ o ‘alejados de la realidad’, ese día me habré vuelto ‘viejo’”.

Y creo que *eso* es lo que nos pasa a nosotros. Nos cuesta trabajo ‘aceptar las diferencias’. Ni mejor, ni peor: distintos.

Por esta razón, cada vez que doy una charla, pido que me preparen un pizarrón (o pizarrones), tiza y borrador. Así fue *siempre para mí*. Me siento más cómodo que con pizarras digitales, de colores…

Pero para entrar en el mundo digital, es necesario prepararse a ‘saberse vulnerable’, saber que uno tendrá que aprender a decir “no sé”.

Y una vez más, ¿qué problema hay en decir “no sé”? Es que nos ‘fuerza’ a aprender *junto con los alumnos*. ¿Y? ¿Es acaso una deshonra? Ahora, *otra* afirmación temeraria —y la asumo controversial—: si no queremos que la escuela desaparezca como tal (aunque creo que vamos encaminados hacia allá), necesitamos introducir la ‘educación horizontal’, en donde en aras de ‘socializar el conocimiento’, quien sabe algo, lo reparte, lo distribuye, lo participa. No importan las edades ni los grupos: “Si vos sabés algo, contalo, enseñalo”. En algún sentido, nos educamos todos simultáneamente, sin imposiciones ‘verticales’ ni principios de autoridad que valgan.

Vivimos una época de transición, cambiaron y cambian los métodos, los programas, las formas de enseñar. Justamente ese es el *gran desafío* que tenemos. Estamos ubicados en la historia en un lugar muy particular. Como escribí antes: nacimos en la era analógica y tenemos que *enseñar y/o aprender* en la era digital.

Cuando yo era niño, las dos fuentes esenciales de información y formación eran la casa y la escuela. Hoy, por supuesto que siguen existiendo, siguen estando allí, pero les han nacido fuertes ‘competencias’: internet, las redes sociales, Facebook, Twitter, Snapchat, Instagram, WhatsApp… ¿quiere seguir usted con la lista?

Así como en algún momento los autos reemplazaron a los caballos, e internet a las palomas mensajeras o al telégrafo, es totalmente inútil resistirse, es como tratar de tapar el sol con la mano. Las nuevas tecnologías, la inteligencia artificial, la forma en la que ‘hoy aprenden las computadoras’, los desafíos… están en otro lugar. Cuando aparecieron los automóviles, los tenían pocas personas, las personas poderosas. Tenían la ventaja de viajar más rápido y, encima, elegir adónde ir.

Quienes tenían dinero podían viajar, comunicarse, interrelacionarse, crear una red de personas ‘conocidas’ con las que se mejoraban mutuamente. Internet reemplazó todo eso. La cantidad de gente que tiene automóviles es mucho mayor, quienes viajan en avión también, pero todavía estamos *muy lejos* de poder afirmar que eso es ‘para todo el mundo’. En algún sentido, es como si todavía hubiera una parte ‘enorme’ de la sociedad que sigue yendo ‘a caballo’, que no tiene acceso a la mejor educación, a la mejor salud, a la mejor comunicación. Es decir, no tiene acceso al conocimiento y, por lo tanto, no tiene *poder*. Así como la distribución de la riqueza material es tan dramáticamente injusta, también lo es la riqueza *intelectual*. Ese es también el desafío del que escribí (o quise hacerlo) antes.

Pero volviendo a la educación convencional, hoy pasan otras cosas 'en simultáneo'. Algunos tienen/tenemos acceso, y otros no solo no acceden sino que ni siquiera saben que no tienen acceso, porque desconocen que determinadas cosas existen o no ven lo que sucede en otro lado. Esas mismas personas (docentes o padres de mi generación, por poner solo dos ejemplos) vivimos una vida enseñando y pensando de una determinada manera y de pronto hoy nos dicen que *esa* metodología es obsoleta, que no sirve más, que lo que nosotros aprendimos a hacer ¡ya fue! ¡Hay que enseñar de otra manera, si no, uno no puede subsistir!

Supongamos que esto fuera cierto, aunque la afirmación es demasiado categórica como para ser verdadera sin aportarle matices: entonces ¿qué hacemos con todos los docentes? ¿Quién los prepara para lo *nuevo* que se viene o que ya se vino? ¿Qué lugar ocuparán ellos/nosotros?

Al mismo tiempo, ahora mirado desde *nuestro* lado, es necesario 'reinventarnos', tolerar la herida al narcisismo que representa descubrir que los alumnos, a quienes 'supuestamente' les estamos enseñando, nos terminan enseñando a nosotros. Para enfrentar esta situación, es necesario procurarnos dosis enormes de humildad y tolerancia, no tanto hacia ellos —lo cual es una obviedad— sino *a nosotros mismos* mientras recorremos esta situación nueva.

Para terminar, o al menos para poner una pausa: todo lo que escribí acá son 'digresiones'. No sé bien a quién me dirijo, ni sé bien si estoy totalmente de acuerdo con lo que escribí. Pero no tengo ninguna duda de que hoy la educación convencional, tal como la conocimos en el siglo XX y buena parte del XXI, no tiene futuro.

Decidir qué hacer y cómo hacerlo requiere de creatividad y, sobre todo, de prueba y error. Y *más importante* todavía, es la coparticipación de los supuestos 'enseñados'. En algún momento, un profesor 'dictaba clase'. ¿Se puso alguna vez a pensar en eso? ¡Dictaba clase! El profesor hablaba y los alumnos, a quienes 'casi' no se les permitía levantar la mirada, copiaban lo que el docente les 'dictaba'.

Pasó mucha agua bajo el puente. Hoy toca mezclar y dar de nuevo. ¡Qué gran desafío y qué lástima que yo no voy a poder ver cómo va a seguir! Pero usted sí. Prepárese no solo para verlo, sino para transformarlo y producirlo.

Índice