Estrategias

La potencia de la matemática para resolver problemas de la vida cotidiana

REALIZACIÓN DE FIGURAS: DG VANINA FARÍAS

Adrián Paenza

Estrategias

La potencia de la matemática para resolver problemas de la vida cotidiana

Sudamericana

Paenza, Adrián
Estrategias / Adrián Paenza. – 1ª ed. – Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Sudamericana, 2016.
392 p. ; 22 x 15 cm. (Obras Diversas)

ISBN 978-950-07-5710-2

1. Matemática. I. Título.
CDD 510

Printed in Argentina – Impreso en la Argentina

ISBN: 978-950-07-5710-2

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723.

Esta edición de 9000 ejemplares se terminó de imprimir en Arcángel Maggio - División Libros, Lafayette 1695, Buenos Aires, en el mes de septiembre de 2016.

Penguin Random House Grupo Editorial

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Como escribí en todos los libros, todo lo que soy se lo debo a lo que ellos hicieron por mí.

A mi hermana Laura y mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Amanda, Anderson, Brenda, Dante, Diego, Ellie, Gabriel, Griffin, Jason, Landon, Luca, Lucas, Luz, María, María José, Marius, Max, Mía, Miguelito, Natalie, Nicola, Riley, Sabina, Sebastián, Ulises, Valentín, Valentina, Viviana y Whitney.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos fuentes de inspiración inagotables y los faros que me guiaron la mayor parte de mi vida.

A los tres amigos con quienes me crié: Leonardo Peskin, Miguel Davidson y Miguel Fernández.

A mis amigas Alicia Dickenstein, Ana María D'Alessio, Andrea Salvucci, Beatriz de Nava, Betty Cooper, Betty Suárez, Carmen Sessa, Cristina Serra Selva, Edy Gerber, Erica Kreiter, Etel Novacovsky, Glenda Vieites, Julie Rogers, Karina Griguol, Kim Morris, Laura Bracalenti, Many Oroño, Marcela Smetanka, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Marisa Giménez, Marisa Pombo, Marta Valdano, Martina Cortese, Mónica Muller, Nilda Rozenfeld, Nora Bar, Nora Bernardes, Norma Galetti, Patricia Breyter, Paula Aimonetto, Raquel Maccari, Teresa Krick, Teresa Reinés y Verónica Fiorito.

A mis amigos Alejandro Fabbri, Andrés Nocioni, Ariel Hassan, Baldomero Rubio Segovia, Carlos Delfino, Claudio Martínez, Craig Rogers, Cristian Czubara, David Boodey, Dennis Fugh, Don Coleman, Ernesto Tiffenberg, Fernando Pacini, Floyd Canaday, Fred Weis, Gary Crotts, Gerry Garbulsky, Hugo Soriani, Jorge Ginóbili, Jorge Valdano, Juan Ignacio Sánchez, Juan Pablo Pinasco, Julio Bruetman, Keith Morris, Kevin Bryson, Lawrence Kreiter, Lenny Gunsteen, Luis Scola, Marcos Salt, Ocar Bruno, Pablo Prigioni, Pep Guardiola, Ramón Besa, Ricardo Medina, Santiago Segurola, Víctor Hugo Marchesini y Woody González.

A mis primas Lili, Mirta y Silvia y a mi primo Josi.

A Guido y Soledad. Nunca voy a sobreponerme a la pérdida de dos personitas que vieron interrumpidas sus vidas cuando virtualmente no las habían empezado.

A la memoria de mis tías Delia, Elena y Elenita, de mi primo Ricardo, de mi tío Saúl, del inolvidable Héctor Maguregui, de Juan Denegri, Lola Bryson, Manny Kreiter y Vivian Crotts, y gratitud perenne para otro amigo entrañable: Jorge Guinzburg.

Y para el final, todo libro estará siempre dedicado a las cuatro personas que son mis guías éticos: Alberto Kornblihtt, Marcelo Bielsa, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

Esta vez voy a ser más breve. Me explico: si cada vez que aparece un nuevo libro de un cierto autor usted descubriera que una de las historias se repite una y otra vez, pensaría que *hay algo* que no está bien. Pero lo que sucede es que la *gratitud* no prescribe. Como nos pasa a todos, yo tengo personas alrededor mío que hacen posible que pueda publicar 'casi' un libro por año... ¡durante doce años consecutivos! Y por eso mi gratitud.

1) A los cinco *betatesters*: Carlos D'Andrea, Carlos Sarraute, Claudio Martínez, Juan Sabia y Manu Ginóbili. Los cinco son amigos a quienes 'torturo' una vez por año enviándoles *todos* los problemas para que los revisen, lean, critiquen, discutan... Si usted sigue leyendo, verá que los aportes de cada uno de ellos están bien documentados... y *reconocidos.*

2) A dos personas increíbles: Glenda Vieites, la editora de todos mis libros, y Claudio Martínez, el director y productor de *todos* mis programas de televisión, presentaciones en Tecnópolis, charlas, clases... No solamente valoro las condiciones profesionales de ambos, sino que vivo enamorado de lo que representan como personas. Pusieron *la vara* en un lugar tan alto que aspiro

a no tener que trabajar nunca con gente que no ofrezca esa calidez… y calidad.

3) A Ángel Larotonda, Eduardo Dubuc, Enzo Gentile, Horacio Porta, Luis Santaló, Miguel Herrera y Ricardo Noriega, por la educación matemática que me dieron.

4) A Carlos Díaz y Diego Golombek, porque sin ellos esta historia —quizás— no hubiera empezado nunca, y gracias a ellos Siglo XXI publicó los primeros cinco libros... Pero también mi gratitud a Pablo Avelluto, Javier López Llovet y Juan Ignacio Boido, porque ellos permitieron que yo haya llegado hasta acá, ya que Penguin Random House, con este, ya ha publicado *los seis libros siguientes.*

5) A Alejandro Burlaka, Ana Dusman, Ariel Arbiser, Betina Rodríguez, Carlos Sánchez, Carmen Rubio Segovia, Claudia Eiberman, Cristina López, Daniela Morel, Dolores Bosch, Elisabeth Alegre, Ezequiel Rodríguez, Fernanda Mainelli, Fernando Cukierman, Gabriel Díaz, Gabriela Jerónimo, Graciela Fernández, Hugo Álvarez, Isabel Segurola, Javier Grossman, Jorge Prim, Jorge Zilber, Laura Cukierman, Laura Dóbalo, Laura Pezzati, Leandro Caniglia, León Braunstein, Lucrecia Rampoldi, Luis Hassan, Malena Becker, Marcela Fainbrum, María del Carmen Calvo, Mariana Creo, Martín Bonavetti, Matías Graña, Montse Besa, Néstor Búcari, Noemí Wolanski, Pablo Calderón, Pablo Coll, Pablo Milrud, Raphael James, Ricardo Durán, Teresita Freidenberg, Tristán Bauer, Valeria Trevisán y Verónica Larrea, porque ***todos** tocaron* mi vida en algún momento y la hicieron mejor... sin ninguna duda.

6) A Guillermo Schavelzon y Bárbara Graham, por cómo me cuidan en *todos* mis contratos y el afecto con el que me tratan *siempre*. Y a Aldo Fernández, por ser mi otro 'ángel de la guarda', pero esta vez con El Oso Producciones y todo lo que hago en televisión.

Dejé dos observaciones para el final:

a) Mi eterna gratitud para aquellos que me moldearon como docente: mis alumnos. El otro día estuve haciendo un cálculo para tener una idea *aproximada* del número. Haciendo las cuentas en forma bien conservadora, seguro que superaron largamente los ¡veinticinco mil! Sí, leyó bien: 25.000.

No hay manera de no haber *mejorado* después de estar expuesto a ese número increíble de personas, al estímulo constante de las preguntas que me habrán hecho y a la saludable búsqueda de las respuestas. Es por eso que a ellos, a todos... ¡gracias!

b) Finalmente, a *todos* mis compañeros y amigos en los distintos lugares en los que tengo (y tuve) el privilegio de trabajar, empezando por la editorial que me cobija y protege actualmente, con las sonrisas y el afecto que portan por todos lados, y me refiero a los integrantes de Penguin Random House. Con el mismo énfasis, mi gratitud a toda la gente de *Página/12*, de la Televisión Pública, del canal Encuentro, de Paka-Paka, de Tecnópolis, de las productoras El Oso y la Brújula y de los queridos excompañeros de Editorial Siglo XXI.

Introducción

El libro que usted tiene en las manos es un libro que habla sobre matemática, pero no es un libro de texto. No pretendo aquí escribir algo estructurado con el propósito de que usted *aprenda* algo que no sabía y que debería saber. No. Este no es un libro *clásico* o *típico*, sino que lo escribo porque las historias que aquí aparecen ocuparon parte de mi tiempo en algún momento y me ayudaron a pensar en determinada dirección. No querría que este material quede reducido a unas pocas personas, sino que quiero compartirlo con la mayor cantidad de gente posible.

¿Qué va a encontrar acá si sigue leyendo? Mi idea es proponerle '*formas de pensar*', en donde yo espero ser capaz de exhibir la *potencia que tiene la matemática para resolver problemas que habitualmente tenemos en la vida cotidiana*. No hace falta que usted tenga *ningún* conocimiento previo; no hace falta que usted *recuerde nada* de lo que aprendió como alumno. No importa si usted *fue* alumno o si todavía lo *sigue siendo*. Mi apuesta es ofrecerle un costado distinto, un costado lúdico, un costado entretenido pero a la vez fuertemente ilustrativo.

Si la coordinación de los programas de educación matemática dependiera de mí, haría hincapié en lo que se conoce como '*matemática recreativa*'. Mi idea es mostrarle también a usted... sí, a usted, que usted sabe muchísimas más cosas sobre estos temas que las que usted misma (o mismo) supone o intuye. Me explico.

En el texto, hallará múltiples oportunidades para jugar, para descubrir, para pensar, para entretenerse, para disfrutar y para divertirse. Por supuesto, no se me escapa que la definición de *diversión* depende —esencialmente— de la persona a la que uno consulte.

Pero la pregunta que me quise contestar es: ¿en qué se va a diferenciar este libro de *todos* los anteriores? La respuesta es muy sencilla: cuando un autor escribe un libro de cuentos, las historias de cada capítulo no tienen por qué estar relacionadas entre sí, suelen ser *independientes*. Por otro lado, el lector tampoco aborda un libro de esas características *buscando* esa relación y no se frustra porque no la encuentra.

En los textos que siguen usted descubrirá que hay algunas ideas subyacentes que se repiten. Hay casos en los que es útil elaborar una estrategia. En otros casos, es preferible encontrar alguna *analogía* o *modelo* que lo haga más sencillo para pensar o para abordar. Y en muchos otros quise exhibir una herramienta muy poderosa que ofrece la matemática y que no siempre se hace visible. Es lo que se conoce con el nombre de 'argumentos de paridad'. Usted verá que algo tan sencillo suele tener un impacto muy profundo y permite no solo resolver problemas, sino que es posible llegar a conclusiones inesperadas en forma breve y elegante.

No sé si usted lo nota, pero me cuesta mucho 'hablar en abstracto'. A esta altura, lo que faltan son los ejemplos, los problemas, las historias.... y por eso esta es nada más que la introducción. Lo que sigue es el libro propiamente dicho.

Una última observación. Supongamos que usted leyó todo el libro, todas las historias, y que dedicó algún tiempo a pensarlas.

Si descubrió al menos *una herramienta que creyó que no tenía antes y sintió que el libro le devolvió de alguna manera el tiempo que invirtió*, ya habrá valido la pena haberlo escrito. Mi aspiración de mínima sería lograr que usted se entretenga, piense, se divierta y trace caminos que no había recorrido antes.

Yo disfruté al escribirlo. Ojalá que usted disfrute al leerlo.

Una reflexión inicial

Una advertencia. Algunos problemas que aparecen en el libro no son ‘nuevos’, sino que incluí varios de ellos en alguno de los diez libros anteriores o en algún programa de televisión o en alguna de las contratapas de *Página/12*. No sé. No importa. En todo caso, me preparé una suerte de ‘ayudamemoria’ para recordar los problemas. Me senté durante bastante tiempo, hice un cuidadoso ‘rastrillaje’ de los índices de cada libro, y cuando hubo algo que me llamó la atención, volví a leer el artículo. Me dio (y me da) muchísimo pudor hacerlo porque me cuesta mucho trabajo valorar lo que está escrito... salvo que me haya olvidado, y entonces lo lea como si fuera usted. Necesito explicarme.

Yo tengo grabados la mayoría de los programas de televisión en los que participé. Primero los fui grabando en versión VHS, en videocasetes, porque era el único formato al que se podía acceder. De hecho, cuando empecé a trabajar en televisión (el domingo 6 de febrero de 1972), ¡no existían los videotapes! Es decir, *todos los programas iban en vivo* o, en todo caso, se pasaba una película. Mi primera participación fue en un programa que se llamaba “La noche del domingo”, que conducía Pepe Peña (el padre de Fernando Peña). En aquel momento, Pepe era una persona muy conocida. No solo era periodista dedicado al deporte, sino que tenía una cultura y una preparación que estaban muy por encima de la media. Viajaba mucho, y como hablaba muy bien inglés, eso le permitía aprovechar cada visita que hacía a Inglaterra o a los Estados Unidos. De hecho, eso ya lo diferenciaba muchísimo del resto de los periodistas y le abría puertas a lugares a los que los demás no tenían acceso. Cuando Adidas se instaló en la Argentina, Pepe fue nombrado algo así como consultor especial, y la visibilidad que adquirió la empresa tan rápidamente se debió a lo que Pepe hizo (o hacía) al hablar de fútbol, primero como comentarista de José María Muñoz (en Radio Rivadavia), aunque es cierto que no duró mucho tiempo, y también como conductor del programa al que hacía referencia, "La noche del domingo", que fue una suerte de precursor de lo que muchos años después se conoció como "Fútbol de Primera". Pero, para variar, me desvié.

La televisión era en blanco y negro, y recién en 1974 aparecieron las primeras máquinas hogareñas que permitían grabar en videocasetes. De todas formas, el precio era tan prohibitivo que hubo que esperar varios años hasta que pudiera popularizarse, pero lo que me importa contar acá es que recién en 1983 yo pude empezar a grabar con consistencia mis apariciones televisivas. De hecho, Alfonsín era presidente (o estaba a punto de serlo), y yo tengo algunas grabaciones del programa que también hacíamos en Canal 9 (cuyo dueño era Alejandro Romay) y que se llamaba *Todos los goles*.

No solo guardé los videos de aquella época, sino que ahora tengo una versión digital de esos programas. No son muchos, pero mi videoteca comenzó a poblarse con el correr de los años. ¿Por qué conté toda esta historia? Porque si voy hoy y tomo cualquiera de esos programas, aunque sea unos minutos, lo miro como si lo mirara usted. ¿Qué quiero decir? Es que ahora, con el paso del tiempo, ¡no me acuerdo de lo que estaba pensando mientras lo estaba grabando! Es decir, si yo mirara un programa actual, de los que se están emitiendo estos días, no solo vería lo que sale al aire (y está a su alcance), sino que hay una cantidad de pensamientos *subyacentes* que yo fui teniendo mientras estaba hablando (o a punto de hablar): preguntas que se me fueron ocurriendo y que no hice, palabras que iba a usar y que no usé, personas que estaban dentro del estudio que aparecieron (o no) en cámara, el director, el productor, los camarógrafos, en fin... un grupo de personas y de situaciones que no se ven reflejadas en lo que finalmente termina saliendo al aire. Por lo tanto, cuando miro el producto final, yo tengo la distorsión que no puede tener ninguna otra persona, *salvo* los que participaron del mismo programa, y no sé si todos tienen la posibilidad que tengo yo de tener *todo* grabado. Además, en cada segmento del programa en donde soy yo el que está hablando, *ninguna otra persona puede saber lo que yo estaba pensando simultáneamente a lo que mi voz emitía, y mucho menos imaginarse 'varias capas' de ideas que se me fueron ocurriendo en paralelo*. Es por eso que para poder abrir juicio sobre cualquier trabajo que me involucre, necesitaría que haya pasado el suficiente tiempo como para poder olvidarme de las condiciones de contorno. Ciertamente, lo que pasó en 1983 ya me lo olvidé.

Antes de seguir, una breve anécdota que —creo— describe perfectamente lo que me pasaba o lo que pretendí describir con los párrafos anteriores. Corría el año 1999. Una pareja de amigos norteamericanos vino de visita a mi casa. Ambos habían nacido en Seattle, en la costa del Pacífico de los Estados Unidos. Ni Wayne ni su esposa Nancy tenían la menor idea de nuestro fútbol. Para ellos la palabra "fútbol" está ligada únicamente al fútbol norteamericano, y no se juega con los pies. En un momento determinado me preguntaron cuál era el video más antiguo que tenía grabado de *todo* lo que había hecho hasta entonces. Busqué uno cualquiera del año 1983 y nos pusimos juntos a mirarlo. Fui avanzando rápidamente hasta que aparecí yo, en un plano corto, haciendo la presentación de los goles de un partido que se había jugado por la tarde en Buenos Aires. Y en mi presentación, *muy muy serio*, como si estuviera a punto de reportar la *muerte* de alguna persona, empezaba así: "*Para que un equipo tenga éxito es necesario que se apoye en tres 'patas' imprescindibles: los jugadores, los técnicos y los dirigentes, que ofrecen el respaldo de una institución solvente*".

Allí mismo recuerdo que apreté el botón de 'pausa' y les dije a ambos: "*Esperen un poquito. Estoy tratando de recordar a quién me estaría refiriendo*". Y por más esfuerzos que hice, no podía localizar de qué club y/o institución estaría hablando. ¿Quién merecía que yo hiciera *semejante presentación*? Ninguno... al menos, ninguno que con el paso del tiempo hubiera quedado marcado como un club *modelo*. Tuve miedo de apretar el botón de 'play' para saber de quién hablaba, pero no me quedó más alternativa: lo *tuve* que hacer.

Comencé a transpirar cuando descubrí que, después de mi pausa, el nombre que salió de mi boca fue: "Argentinos Juniors"… ¡¿Argentinos Juniors?! ¿En serio? Bueno, no puedo avanzar mucho más con la historia, solo que me da un poco de pudor haberme expresado con semejante contundencia sobre una institución que, a diferencia de 'casi' todas las que participaban en el fútbol argentino, mereciera un trato privilegiado. El 'casi' está referido a Ferrocarril Oeste y Vélez. Del resto, mejor no hablar.

Pero conté esta historia tan larga para compartir con usted algo que es muy difícil de percibir, y es el discurso subyacente (o suprayecente, si usted prefiere) que está *sucediendo* mientras un periodista (o una persona cualquiera) está hablando frente a una cámara. Estoy absolutamente convencido de que usted tiene ejemplos *suyos* de *su propia vida cotidiana*, en donde tuvo que hablar con su mujer, su esposo, su jefe, su hija, su hermana, su padre, su compañera (o compañero), su madre, una amiga.... y usted no solo recuerda lo que dijo, sino que también recuerda *lo que* ***no*** dijo.

De eso se trata este libro también. Yo quiero hacer una selección de algunas de las historias que ya aparecieron antes, pero presentándolas ahora de otra forma, haciendo énfasis en el diseño de la estrategia, y buscando patrones que en otro momento no se me ocurrió buscar. No sé si lo voy a lograr, pero lo voy a intentar. Claro, la/lo necesito a usted como cómplice. Es una tarea conjunta: yo le voy proponiendo algunas historias, y usted aporta también lo suyo. Lo único que me gustaría pedirle: que piense junto conmigo.

Ahora sí, acá empieza el viaje.

CAPÍTULO 1

Teoría de Juegos - Estrategia (una definición)

Cuando me propuse escribir este libro, le dije a Glenda Vieites (la editora *estrella* de Penguin Random House):

—Quiero escribir un libro sobre 'estrategias' y mostrar cómo la matemática interviene fuertemente en su diseño. Voy a incluir material inédito, pero habrá algunas historias que presenté antes. La diferencia es que quiero agruparlas mostrando las herramientas que utilicé para encontrar las soluciones. Me cuesta trabajo 'hablarte en *abstracto*' y es por eso que quiero darte algunos ejemplos.

Glenda me interrumpió:

—Adrián, escribí sobre lo que quieras.

Y acá estoy, avanzando una vez más. Si puede y tiene ganas, acompáñeme y recorramos juntos este camino. Eso sí, abandóneme todas las veces que quiera, marque usted el ritmo y decida en qué momentos prefiere *pensar por su cuenta o pensar distinto*. Si yo pudiera lograr que usted solamente lea el planteo de cada historia y que eso funcione como *disparador de* ***sus propias ideas***, alcanzaría para sentirme profundamente satisfecho y con la sensación de 'tarea cumplida'. Pero no 'juego' solo: lo hacemos juntos, usted y yo. Empezamos acá.

La matemática tiene una rama que se llama 'Teoría de Juegos'. Sí: teoría de *juegos*. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece *juegos* en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes cuando están en el colegio?

Ahora bien: ¿de qué se trata esta teoría? Se trata de aprender y diseñar *estrategias* que algunas veces sirven para ganar (si uno está involucrado en algún tipo de competencia), pero que también son muy útiles para enfrentar situaciones de la vida cotidiana. Por supuesto, si usted está *jugando contra una o varias personas y la idea es* '*ganar*', nadie podrá asegurar su triunfo, aunque más no sea porque todos los participantes estarían en condiciones de leer el mismo libro (este, o cualquier otro). Pero de lo que *sí se trata* es de encontrar una manera *educada* de jugar a un juego, eventualmente induciendo al rival (o los rivales) a jugar como uno querría que jueguen y, de esa forma, beneficiar su posición.

Quiero empezar con lo que se llama *pensamiento estratégico*. Dos personas o grupos compiten para conseguir algo que está en juego. Puede ser, por ejemplo, una partida de ajedrez, un partido de fútbol, pero también una licitación que hace un gobierno para decidir qué empresa se hará cargo de las telecomunicaciones, o quiénes se harán cargo de proveer la electricidad o el gas. Pero también podría aplicarse ante un grupo de personas que están buscando conseguir un determinado empleo o trabajo.

Para simplificar, es *usted* y el *otro*. O si prefiere, *usted* y *los otros*. Para simplificar las ideas, digamos que es *uno contra uno*. Alguien está pujando con usted para ganar o para conseguir un objetivo. Ese *otro* (u *otra*, claro está) "*piensa igual que usted, al mismo tiempo que usted, tiene acceso a la misma bibliografía que usted, a los mismos recursos que usted*. En todo caso, se trata de decidir quién es capaz de *maximizar el retorno*".

Esencialmente se trata de diseñar una estrategia para enfrentar a sus oponentes, que deberá incluir, inexorablemente, cómo anticiparse a lo que ellos van a hacer, cómo contrarrestarlos, y cómo hacer para que *prevalezca su posición* o, si prefiere, cómo hacer para que *gane usted*.

Por supuesto, así como usted tiene que considerar qué es lo que el otro jugador está pensando, él a su vez tiene que considerar lo que piensa usted.

Justamente, la Teoría de Juegos es el área de la matemática que se ocupa de buscar cómo optimizar este tipo de *toma de decisiones*, y se basa en generar y estudiar modelos que *simulan* estas interacciones entre dos (o más) partes y en buscar la *estrategia* más adecuada para obtener un determinado objetivo.

Y acá entra en escena el comportamiento racional. ¿Qué quiere decir? Uno puede decir que actúa con racionalidad cuando:

- piensa cuidadosamente antes de actuar
- es consciente de sus objetivos y preferencias
- conoce sus limitaciones
- sabe cuáles son las restricciones que impone el contorno
- estima qué va a hacer su oponente de acuerdo con lo que usted cree que son sus virtudes y flaquezas
- puede pensar varias jugadas más adelante
- puede imaginar diferentes escenarios

La Teoría de Juegos agrega una nueva dimensión al comportamiento racional. Enseña a pensar, y en el camino uno aprende a tomar decisiones más elaboradas y que puede fundamentar. En consecuencia, son más rigurosas y educadas.

Sin embargo, como escribí, la Teoría de Juegos no propone que enseñará los secretos de cómo jugar 'a la perfección', o garantizará que usted nunca va a perder. Esto ni siquiera tendría sentido pensarlo, ya que, como ya dije, usted y su oponente podrían estar leyendo el mismo libro, y ambos no pueden ganar al mismo tiempo.

La mayoría de los juegos son lo suficientemente complejos y sutiles, e involucran decisiones basadas en la idiosincrasia de las personas o en elementos azarosos, y por lo tanto, ni la Teoría de Juegos (ni nada) puede ofrecer una receta segura para el éxito. Lo que *sí provee* es algunos principios generales para aprender a interactuar con una estrategia.

Uno tiene que suplementar estas ideas y métodos de cálculo con tantos detalles como le sean posible, de manera tal de dejar librado al azar, justamente, lo menos posible, y de esa forma ser capaz de diseñar lo que se llama 'la estrategia óptima'. Los mejores estrategas mezclan la ciencia que provee la Teoría de Juegos con su propia *experiencia*. Pero un análisis correcto de cualquier situación involucra también aprender y describir todas las limitaciones.

Tome cualquier juego donde haya interacción y apuestas entre los participantes. Por ejemplo, 'truco', 'tute' o 'poker', por nombrar solo algunos de los más comunes, pero lo que sigue se aplica en general. Parte de la estrategia es saber 'mentir'. Pero, otra vez, ¿qué quiere decir *saber* mentir, en este caso? Me explico: aunque parezca loco, se trata de que quien no tiene una buena mano o no tiene buenas cartas alguna vez sea descubierto por sus rivales. Lea de nuevo lo que dice: uno necesita que los oponentes lo descubran (a uno) mintiendo. ¿Por qué?

Sencillamente porque no es bueno para usted que se sepa de antemano que <u>siempre</u> que usted hace una apuesta o un desafío de cualquier tipo es porque tiene buenas cartas. Esto significaría que sus rivales tienen un dato que usted no querría que tengan, aunque más no sea porque usted no podría sacar mayores ventajas cuando <u>sí</u> tenga una buena mano. Un buen jugador se deja sorprender. Puede que pierda esa pequeña batalla, pero eso permite instalar una duda en su adversario, y le torna más difícil la decisión. Eso le permitirá, eventualmente, ganar cuando tiene buenas cartas, pero también le permitirá zafar cuando no sea así. Por ejemplo, para quienes juegan al 'truco', usted tiene que ser descubierto cantando "envido" aunque sus cartas no lo autoricen a pensar que va a ganar con ellas. Puede que pierda esa mano, pero esa inversión invitará a sus rivales a que 'acepten su envite' cuando tenga buenas cartas también. Y allí sacará las mayores ventajas.

La Teoría de Juegos trata de establecer *estrategias*, y termina siendo una buena mezcla entre matemática y una larga dosis de psicología.

Tomemos un ejemplo muy sencillo: 'Piedra, papel o tijera'. Este juego consiste en poner una mano detrás de la espalda[1], igual que su rival. Tienen que exhibirla simultáneamente con uno de estos tres gestos: la mano abierta representa el papel; el puño hacia adelante es el símbolo de una piedra; por último, si uno muestra dos dedos como si hiciera la letra V pero 'acostada', eso indica una tijera.

Como es sabido, la piedra 'rompe' la tijera, el papel 'envuelve' a la piedra y la tijera 'corta' el papel. Esto es un ejemplo de un juego en donde no hay una manera segura de 'ganar'. Depende no solo de lo que hace uno, sino de lo que haga el otro. ¿Hay entonces acaso una estrategia? Sí, hay, pero es sutil.

1. También se suele jugar agitando un puño cerrado varias veces y, a la tercera, exhibir lo que uno quiere apostar: piedra, papel o tijera. Piedra se representa con el puño cerrado, papel con la palma extendida y tijera con el dedo índice y el del medio extendidos en forma horizontal, como si uno estuviera a punto de 'cortar' algo.

Por ejemplo, si fuéramos a jugar a este juego y yo detectara que usted me muestra una piedra con una probabilidad mayor de *una vez en tres*, entonces yo empezaría a '*usar papel*' más frecuentemente. Si jugáramos suficiente tiempo, yo 'tendría una ventaja' sobre usted, porque me estaría mostrando un patrón en su forma de jugar. La estrategia *perfecta* para este juego es elegir *siempre al azar lo que va a exhibir*. Si los dos jugaran así, ninguno sacaría ventaja, porque se equipararían las posibilidades. Si alguno de los jugadores empezara a usar un '*patrón*', sea cual fuere, el otro jugador podría detectarlo e inmediatamente *tendría una ventaja*.

John Nash consiguió el Premio Nobel en Economía en 1994 por sus aportes a la Teoría de Juegos.[2] Por un lado, existen los juegos llamados de *suma cero*. Por ejemplo, si usted juega al póker con otras personas, todo lo que haya ganado será el resultado de lo que *otros perdieron*. La *suma* del dinero involucrado da *cero*.

---

2. Este campo apareció en 1944 con la Teoría de Juegos y Comportamiento Económico, de John von Neumann y Oskar Morgenstern, y luego ocupó el centro de la escena mundial cuando la usó la RAND Corporation para definir *estrategias nucleares*. Quien se hizo famoso por sus aportes a esta teoría fue el laureado John Nash (premio Nobel de Economía e inspirador de la novela y la película *Una mente brillante*). Él fue quien introdujo un concepto organizador de la teoría, conocido ahora como el "Equilibrio de Nash".

La Teoría de Juegos hoy es fuertemente usada, no solo en economía (su verdadero origen), sino también en biología, psicología, sociología, filosofía, ciencias políticas, en el campo militar (casi una obviedad), en inteligencia artificial y en cibernética. Y en la vida cotidiana, claro. Algunas referencias:

- *Game Theory: A Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy* (por Roger McCain)
- es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos
- *Game Theory* (por Drew Fudenberg y Jean Tirole)

Dicho de otra manera, *no aparece dinero nuevo*. Nadie puede ganar un dinero que otro no perdió (y viceversa).

El aporte de Nash fue considerar lo que llamó "los juegos que '*no suman cero*'". Cuando aún no había cumplido 30 años, desarrolló el concepto que hoy se conoce con el nombre de 'Equilibrio de Nash'. Esta es una definición muy interesante sobre lo que significa alcanzar una situación en la que *todos los participantes* se van a sentir contentos. Puede que alguno de ellos hubiera podido obtener algo 'mejor' si actuaba en forma individual, pero *colectivamente* es la mejor situación posible (para el grupo). Es decir, todos los participantes advierten que es mejor establecer una 'estrategia para todos' que una individual.

Así es muchas veces en el 'mundo real'. Cuando se trata de un juego de uno contra uno, el 'Equilibrio de Nash' se alcanza cuando nadie tiene nada para reclamar, en el sentido de que uno no variaría lo que hizo o está por hacer, *aun sabiendo lo que va a hacer el otro*. En un juego de cartas, sería como decidir qué carta uno va a jugar, aunque pudiera ver las cartas del otro.

Por ejemplo: supongamos que veinte personas van a comprar durante cierto mes del año un determinado modelo de auto. Quizás cada uno de ellos pueda negociar un precio que le convenga personalmente. Pero si se pusieran de acuerdo en *entrar* a la concesionaria todos juntos con una oferta para comprar veinte autos, es esperable que obtengan un mejor precio.

Es algo muy sencillo, pero nadie lo había podido sistematizar hasta que lo hizo Nash. Él no estaba tan interesado en cómo alcanzar un equilibrio en el sentido de que todo el mundo estuviera contento con su posición, pero sí en cómo deberían ser las *propiedades* que un *equilibrio debería tener*.

Una idea aproximada de lo que hizo Nash es lo siguiente: preguntarles a todos los integrantes de una mesa (de negociaciones, por ejemplo) 'si cambiarían lo que están haciendo sabiendo que todos los otros jugadores se mantendrán en la posición en la que están ahora equivaldría a preguntar si cada uno mantendría su posición *si supiera que todo el resto se mantendrá quieto*. Esta es la lógica que sirve para alcanzar el "Equilibrio de Nash".

Mucho tiempo después de que Nash escribiera su teoría del equilibrio en 1950, el mundo comenzó a usarla. De hecho, el mejor exponente fue cómo se empezó a tratar el tema de las 'licitaciones' o 'remates', y presento un ejemplo maravilloso: las reglas que gobiernan un remate son las mismas que gobiernan un 'juego'. En este caso, los 'apostadores' son los competidores del juego, las estrategias son 'su plan de acción' (la forma en la que va a apostar), y la ganancia consiste en decidir quién obtiene lo que se vendía y en minimizar lo que paga por lo que está en juego.

A los que trabajan en Teoría de Juegos este tipo de 'licitaciones' o 'remates' les permiten *predecir* lo que los jugadores van a hacer, aprovechando lo que saben del Equilibrio de Nash, y transforman reglas que podrían ser muy complicadas en algo 'analizable'. No solo eso: en este tipo de operaciones, cuando hay 'grandes licitaciones', cuando se habla de 'miles de millones de dólares', los apostadores saben bien qué hacer. Ellos saben que hay mucho dinero en juego; se pasan mucho tiempo pensando y contratan expertos para que les permitan mejorar sus posiciones.

Para fijar las ideas, uno puede pensar en 'licitaciones gubernamentales', en las que, por ejemplo, aparecen involucradas empresas de telefonía fija, o de telefonía celular o de internet.

En el pasado, este tipo de licitaciones se manejaban en forma arbitraria, algo así como un concurso de belleza. Como consecuencia, el resultado era que los gobiernos no conseguían que nadie pagara el verdadero valor de lo que estaba en juego, y eso sin hablar de la corrupción endémica de quienes negocian este tipo de contratos.

De hecho, con el aporte de Nash, los gobiernos tienen ahora una herramienta muy poderosa, que es la de que los interesados 'apuesten' para conseguir lo que quieren, y así obtener la mayor cantidad de dinero posible. En el año 2002, con la participación de matemáticos expertos en Teoría de Juegos, liderados por Ken Binmore, el gobierno inglés escribió sus reglas para otorgar la licencia para la *tercera generación de telefonía móvil*. Binmore y su equipo se pasaron dos años pensando en todas las licitaciones posibles (aunque esto suene exagerado). El resultado: el gobierno inglés consiguió 23 mil millones de libras esterlinas (algo así como 46 mil millones de dólares, al cambio de mediados del 2007). Y eso, por haber usado la teoría de Nash, quien empezó hace cincuenta años analizando los juegos de ajedrez y de póker, cuyas ideas ahora impactan en la economía global y son capaces de generar miles de millones de dólares para los gobiernos (si es que se deciden a usarlas).

Nash, en todo caso, hizo algo muy sencillo, que hasta parece increíble que nadie lo haya podido ver antes. Pero claro, los que también merecen reconocimiento son aquellos que 'miraron en el lugar hacia donde todos apuntaban pero *vieron* lo que nadie vio antes'. Quizás, ver lo obvio es tener una gran idea. Siempre hay una primera persona que lo ve.

La Teoría de Juegos estudia *cómo la gente toma decisiones cuando estas decisiones afectan a los demás y no solo a ellos*. Por ejemplo, si usted entra y compra un kilo de carne, eso no cambia el precio de la carne. En cambio, si una compañía que vende autos decide modificar el precio de uno de ellos para seducir a los consumidores, eso implica un cambio (eventual) en el precio de todos los autos similares. De hecho, cuando uno modifica el precio de la nafta, eso tiene un efecto dominó que afecta a diferentes sectores de la sociedad.

En algún sentido, uno puede pensar la Teoría de Juegos como el lenguaje matemático que describe cómo *interactúa* la gente.

Algunas personas actúan en forma más racional (o más irracional) que otras, y la Teoría de Juegos analiza también esas situaciones. Por ejemplo, en las subastas o remates en internet, hay gente que es más profesional y otros que son amateurs y apuestan para poder conseguir algo por primera vez. Los que 'regulan' el remate se ocupan de que la interacción sea *normal*, de manera tal que nadie corra ningún riesgo. Por eso son tan importantes las reglas de la subasta, por cómo afectan la conducta de la gente. Más aún: pequeñas modificaciones en estas reglas generan *grandes* modificaciones en el comportamiento de los usuarios.

Por ejemplo, podemos comparar las subastas de eBay con las de Yahoo y Amazon. La gente de eBay tiene una 'hora límite'. Es decir, ellos instituyen que a 'determinada hora' se termina la subasta. Amazon, en cambio, lo hace de otra forma. No es que no tenga un reloj, sino que el remate concluye *diez minutos después de que se hizo la última oferta*. Esto hace que se prolongue el tiempo del remate. Por ejemplo, si usted hace una oferta justo un segundo antes que el tiempo expire, el remate se prolongará otros diez minutos, *siempre y cuando no haya ninguna oferta en ese tiempo*. Si la hubiere, eso haría correr la finalización *otros diez minutos más*.

Esta variación en las reglas genera sorprendentes diferencias en la conducta de la gente. Los usuarios de eBay *acumulan o amontonan* sus apuestas a medida que se acerca el final, casi como si fueran francotiradores. En cambio, en Amazon uno no observa nada de esto.

Quiero terminar como empecé: es raro que de una ciencia (la matemática) que tiene una rama que se llama Teoría de Juegos se pueda decir que es aburrida, árida o que 'yo no nací para esto'. Si es así como yo lo pienso, los comunicadores/docentes debemos de estar haciendo algo mal. ¿Quién no jugó mientras fue niño? ¿Por qué no seguir haciéndolo ahora que somos adultos?

Subastas de Vickrey

¿Qué es lo que sabe usted sobre los remates o las subastas? Aclaro que yo muy poco, por no escribir casi nada. Sin embargo, hay por lo menos dos tipos que me parecen clásicos o, al menos, los más conocidos. Para fijar las ideas, supongamos que se va a rematar un cuadro; pero usted reemplace la palabra 'cuadro' por 'obra de arte', 'caballo', 'auto antiguo', 'escultura', en fin... *siguen las firmas*.

En el primer caso, los interesados se reúnen en algún recinto, se establece una *base* (o sea, una suerte de *precio mínimo*), y a partir de allí los presentes van haciendo sus ofertas (en general a 'viva voz') hasta que el rematador —quien dirige el evento— advierte que ya no hay lugar para más incrementos y lo da por terminado, adjudicando el cuadro a alguno de ellos. Lo que está claro en este tipo de remate es que todos los presentes escuchan las ofertas de todos. En ese sentido, el juego es 'abierto'. En todo caso, lo que uno no sabe es cuán profundo es el bolsillo de cada competidor.

También existen subastas a sobre cerrado. Cada interesado escribe una cantidad de dinero que representa su oferta por el cuadro, la mete en un sobre y la envía. Se establece un día para abrir los sobres y listo. Eso sí: la oferta es única. No hay posibilidades de modificarla una vez que se conocen públicamente. Una ventaja es que los oferentes no tienen que estar en el mismo lugar ni coincidir temporalmente.

Pero hay algo *extra* que no es necesariamente visible: ¿cuál es *la mejor estrategia que puede elegir una persona interesada si quiere optimizar sus chances de conseguir el cuadro*? Quiero mostrar acá abajo cómo la matemática en general y la Teoría de Juegos en particular tienen cosas para aportar.

Supongamos que es usted el interesado en el cuadro que se va a rematar y que está a punto de escribir su oferta en un papel, ponerlo en un sobre y enviarlo. Estuvo pensando un tiempo y llegó a la conclusión de que el valor del cuadro —para usted— es *mil pesos* (por poner un valor ficticio cualquiera). Es el número que lo hace sentir cómodo, y no quiere pagar más de mil pesos para obtenerlo.

Llegado a este punto, ¿qué le conviene hacer? ¿Le conviene escribir mil pesos, ofrecer más u ofrecer menos?

Acompáñeme por acá y verá que sucede algo curioso y, sin embargo, muy común: uno está tentado de *no escribir el número que cree que vale el cuadro* (los mil pesos). ¿Por qué? Fíjese lo que podría pasar. Suponga que usted escribió mil pesos. Llega el día en que se abren los sobres. Si usted pierde, no hay nada para decir: estaba dentro de las reglas del juego. Cada uno hacía su oferta, y como usted no estaba dispuesto a ofrecer más que mil, perdió y se terminó. En todo caso, tuvo que ver con su decisión de establecer *mil* como el mayor precio que estaba dispuesto a pagar, y había otra persona que estaba dispuesta a pagar más. No hay nada para protestar.

Sin embargo, supongamos que usted ofreció mil pesos y terminó ganando la subasta. En este caso, cuando se abrieron los sobres, usted pudo ver lo que habían ofrecido los otros, muy en particular cuál fue la *segunda* oferta. Eso le da tiempo para pensar: "¡Qué tonto! Podría haber ofrecido $ 900 y me quedaba con el cuadro igual". Y ni hablar si el segundo número ofrecido, el que le sigue al suyo, fue (digamos) *$ 500*. En este caso sería aun peor: usted terminó pagando el *doble* de lo que hubiera necesitado escribir. Habría bastado que pusiera $ 501 y el cuadro sería suyo.

Por lo tanto, cuando uno escribe el número que está dispuesto a pagar por el cuadro y cierra el sobre, en realidad *tiene que formar parte de su estrategia* tratar de 'adivinar' o 'estimar' cuánto estarán dispuestos a pagar *todos sus competidores* (que usualmente uno ni siquiera sabe quiénes son), y después escribir un número que sea *ligeramente* mayor que los de todos ellos. Pero la *moraleja* es que uno no termina escribiendo el verdadero valor que está dispuesto a pagar, sino un número que *cree* que será superior a la mayor oferta que hagan los otros[3].

Y aquí ha llegado el punto en el que yo quiero mostrarle una nueva variante, totalmente diferente e impensada: un cambio en las reglas. Como antes, todos los oferentes escriben el número que están dispuestos a pagar por el cuadro, pero el día en que se abren los sobres *vuelve a ganar quien hizo la oferta mayor pero <u>paga lo que ofreció el segundo</u>*. Lea de nuevo lo que acabo de escribir: el ganador sigue siendo el mismo (el que ofreció más), pero la diferencia es que, en lugar de pagar lo que ella (o él) escribió, paga el número que escribió quien hizo la <u>segunda</u> mejor oferta.

Interesante, ¿no? ¿La/lo descoloqué? Al menos eso fue lo que me pasó a mí cuando leí sobre este tipo de subastas: me sorpren-

3. Obviamente, uno tiene que suponer que la mayor oferta que hagan los 'otros' esté por 'debajo' de lo que uno esté dispuesto a apostar.

dió. Debo confesar que, salvo en fiestas familiares o reuniones sociales en donde aparecieron subastas o remates como variantes de algún juego, no recuerdo haber participado activamente (o como actor) de ningún remate. Sin embargo, siempre me atrapó la *lógica* que subyace en este tipo de transacciones.

Pero para variar, me desvié. Las preguntas naturales que me surgieron (y supongo que a usted también) son: ¿Y en qué mejora esto? Al utilizar estas reglas, ¿cómo se contribuye a *sincerar* el procedimiento? Veamos.

Supongamos que es usted quien está interesado en el cuadro. Mi propósito ahora es tratar de convencerla/o de que, en este nuevo contexto, la mejor estrategia para que usted pueda obtener el cuadro es escribir en el papel que va a poner en el sobre... *el valor que usted cree que el cuadro vale,* y no como hizo antes, cuando usted tenía que incluir en sus consideraciones lo que podrían estar pensando sus competidores. Es decir, lo que a usted le conviene hacer es poner el número *mil: ¡ni más, ni menos!* ¿Por qué?

Analicemos los dos casos posibles:

a) Hay por lo menos *una* oferta por *más* de mil pesos.
b) Todos los demás ofrecieron *menos* de mil pesos.

a) Si alguno (basta con uno solo) ofreció más de mil, seguro que usted no va a ganar la subasta, pero también es seguro que quien la gane tendrá que pagar *por lo menos mil pesos* para llevarse el cuadro. Pagará mil si la suya es la segunda mejor oferta. Si no, pagará más.
b) Si todos los demás ofrecieron *menos* de mil, usted ganará la subasta y pagará lo que ofreció el segundo en la lista, que *tuvo que haber sido menos de mil pesos, que es lo que usted estaba dispuesto a pagar.*

Con este ejemplo sencillo hemos descubierto que la mejor estrategia en este tipo de subastas es ofrecer el número que uno cree que vale el objeto que se remata. Si todos los oferentes usaran esta lógica, el cuadro se lo llevaría quien estuviera genuinamente dispuesto a pagar más entre todos los oferentes, independientemente de la valuación de los otros, y pagaría *igual* o menos de lo que estaba dispuesto a pagar. En algún sentido, es lo máximo a lo que uno puede aspirar, ¿no es así?

Un poco de historia

Este tipo de estrategias se le atribuye a William Vickrey, profesor de economía de la Universidad de Columbia, en el noroeste de Manhattan, Nueva York. En el año 1961, Vickrey condensó todo el material sobre subastas en el que había estado trabajando y lo publicó en un artículo que apareció en *The Journal of Finance*[4].

Sin embargo, no fue Vickrey quien inventó el procedimiento que lleva su nombre. El primer registro que se conoce de que 'el que mayor oferta hace gana pero paga lo que ofreció el segundo' data de fines del siglo XIX (1893, para ser más precisos). En ese momento, los coleccionistas de estampillas vendían todo o parte de lo que habían acumulado durante años en remates muy concurridos, pero resultaba *muy impráctico*, además de muy *caro*, trasladarse desde los Estados Unidos a Europa (y viceversa), y ni hablar desde Sudamérica o Asia. Enviar sobres lacrados con ofertas se transformó en un proceso expandido para la época, y el estudio de sus diferentes variantes tuvo ocupados a los matemáti-

4. El artículo original se puede leer acá: onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x/full

cos (y economistas), quienes no tenían todavía el sustento teórico que hoy ofrece la Teoría de Juegos y, en particular, la Teoría de Subastas[5].

Variantes de este tipo de subasta son utilizadas hoy por Google (para sus avisos), por eBay (muy popular en el hemisferio norte) y también por Alibaba, su equivalente asiático.

No se me escapa que el sistema tiene vulnerabilidades más o menos evidentes: algunas personas podrían ponerse de acuerdo en lo que van a escribir en los sobres y acordar de antemano quién va 'a ganar', o bien podría haber alguna persona que utilice diferentes nombres (o 'testaferros') para modificar los resultados, pero este tipo de *irregularidades* también son habituales o frecuentes en subastas de otros tipos, o sea que, si alguien está interesado en hacer fraude, la metodología aplicada no lo va a detener.

En todo caso, mi objetivo es mostrar cómo la matemática en general, la Teoría de Juegos en particular y la Teoría de Subastas en forma aun *más* específica ofrecen herramientas para resolver problemas que se plantean en la vida real. Las deformaciones se analizan en el 'aula' (o 'libro') de al lado.

5. Más material sobre la Teoría de Subastas se puede encontrar acá: sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/publicaciones/indata/Vol6_n2/pdf/subastas.pdf y en muchísimos libros en varios idiomas. En castellano, por ejemplo, hay vasta literatura al respecto, y en *todos* los cursos de Teoría de Juegos que se dictan suele haber un capítulo (o una práctica) dedicada a la Teoría de Subastas, de la cual soy un total neófito.

¿Quién jugó contra F el viernes?

Quiero presentarle un desafío interesante. Yo le voy a ofrecer una cantidad de datos que deberían ser suficientes para develar una suerte de 'misterio'. En el camino, usted verá si la información que tiene le alcanza para encontrar la respuesta, o incluso podría ser que necesite descubrir (y descartar) datos contradictorios. Si todo funciona como espero, la solución solamente depende de usar su capacidad para hilvanar argumentos lógicos. Y si no, la misma lógica le permitirá decir: ¡Este problema no tiene solución! Acá voy.

Haga de cuenta que se realizó un torneo de ajedrez en el que participaron ajedrecistas de todo el país. No se preocupe si no entiende nada de ajedrez: yo tampoco; todo lo que hace falta saber es que se juega entre dos personas, una contra otra.

Luego de múltiples eliminatorias, el cuadro general quedó reducido a nada más que seis jugadores: tres hombres y tres mujeres. Para no tener que recordar los nombres, les pongo 'letras' para identificarlos: A, B, C, D, E y F. Las tres primeras son las mujeres, pero usted verá que en este caso el sexo es irrelevante.

El torneo se llevó a cabo en la misma locación, empezando un lunes y terminando un viernes. Cada jugadora/jugador enfrentó a cada uno de los cinco rivales en días consecutivos y las tres partidas de cada día se jugaron en forma simultánea.

Se tienen nada más que cuatro datos:

1) El lunes, B le ganó a C.
2) El martes, B le ganó a D.
3) El miércoles, D le ganó a A.
4) El jueves, C le ganó a E.

Pregunta: ¿quién fue el rival de F el día viernes?

Parece raro, ¿no? Fíjese que sabiendo solamente los resultados de *cuatro partidas en cuatro días consecutivos*, la pregunta es si se puede determinar no quién ganó, sino quién ***jugó*** con F el viernes, el último día del torneo.

Ahora le toca a usted.

¿Quién jugó contra F el viernes?

Nunca como en este caso me importa decirle que *no lea lo que voy a escribir si* ***no*** *pensó nada*. Créame: es un problema totalmente irrelevante, como se advierte desde el principio, pero es una forma muy sencilla de 'hacer de detectives'. ¿Usted entraría al cine y aceptaría que le cuenten quién es el asesino en la primera escena?[6]

Por supuesto, hay múltiples maneras de abordar el problema. Yo voy a elegir la que me gustó a mí, pero es a la vez la que se me ocurrió ***a mí***, y por lo tanto no tiene por qué ni gustarle ni servirle a usted. La escribo solamente para que vea que EXISTE solución, que uno PUEDE contestar la pregunta y saber cuál de los otros cinco jugadores (A, B, C, D o E) ***tuvo que haber enfrentado a F el último día***.

---

6. No se me escapa que hay películas y/o libros en donde eso sucede, pero en este caso prefiero no ir por ese camino.

Voy a hacer una grilla de 6 × 6. Mi idea es representar en esa grilla a los seis participantes y ubicar en cada casilla un número. Ese número podrá ser cualquiera entre 1 y 5, e indicará qué rival enfrentó cada uno de ellos en los cinco días que duró la competencia.

	A	B	C	D	E	F
A	X			3		
B		X	1	2		
C		1	X		4	
D	3	2		X		
E			4		X	
F						X

Fíjese que en algunas casillas puse una **X** porque un(a) jugador/a no juega contra sí mismo/a. Por otro lado, el número 3 en la primera fila indica que A y D se enfrentaron el *tercer* día. Los números 1 y 2 en la segunda fila sirven para identificar que B jugó contra C y D el *primero* y el *segundo* día respectivamente, lo mismo que el número 4 que aparece en la tercera fila, para señalar que C jugó contra E el *cuarto día*. Por supuesto, el objetivo del problema es '*descubrir*' dónde ubicar el número 5 (el viernes) en la columna y fila que tiene a F como protagonista. El camino que yo elegí fue el de ir llenando este *fixture* o *programa de partidas* hasta llegar a deducir el rival de F ese quinto y último día.

¿Cómo hacer? Para empezar voy a empezar con la cuarta fila. Allí aparecen los rivales que tuvo D (igual que en la cuarta columna). Si usted se fija, verá que aparecen los números 2 y 3 (es decir, martes y miércoles, respectivamente). La ubicación de cada número indica que D jugó contra A el tercer día y contra B el segundo. Faltan conocer los rivales de D los días 1, 4 y 5, que tienen que surgir entre C, E y F (pues contra A y B ya jugó).

Ahora, mire lo que sucede en la cuarta fila y tercera columna. El número que vamos a poner allí será el día en que se enfrentaron D y C. Ya sabemos qué rivales tuvo D en los días 2 y 3, pero al mirar la columna que identifica a C, vemos que, los días 1 y 4, C ya estuvo ocupado jugando contra B y E. Luego, *la única alternativa que le queda a D para haber jugado contra C es el* ***quinto*** día. Este minianálisis permite deducir que en ese lugar hay que poner un número 5.

¿Se da cuenta de lo que estoy haciendo? Voy analizando contra quiénes pudo haber jugado cada uno teniendo en cuenta los rivales que ya enfrentó, los días que los enfrentó y lo que fue sucediendo con los otros jugadores en cada uno de los días. Sigo.

Continuemos con los rivales de D. Me falta ubicar cuándo jugó contra E y F, y me quedan disponibles los días 1 y 4. Pero el día 4 no pudo haber jugado contra E, porque ese día E estaba jugando contra C. ¿Qué dice esto? Que D jugó contra E el día 1. Si usted se fija, verá que la *única* alternativa que le queda a D para haber jugado con F es el día 4, y eso *completa* todos los rivales y todos los días que tuvo el competidor D. La grilla queda así:

	A	B	C	D	E	F
A	X			3		
B		X	1	2		
C		1	X	5	4	
D	3	2	5	X	1	4
E			4	1	X	
F				4		X

Fíjese ahora en la tercera fila, que contempla los rivales y los días en los que jugó C. Falta saber cuándo jugó con A y con F, y para eso nos quedan libres nada más que dos días: 2 y 3. Pero mirando a la columna 1, vemos que A estaba ocupado el día 3 jugando contra D. Luego, el 3 *no puede ir* en la tercera fila y primera columna: allí *forzosamente tiene que ir el número* 2. Para completar todos los rivales de C, contra F *tuvo que haber jugado el tercer día, porque es el* ***único*** que le quedaba disponible.

Pongo la grilla una vez más:

	A	B	C	D	E	F
A	X		2	**3**		
B		X	**1**	**2**		
C	2	**1**	X	5	**4**	3
D	**3**	**2**	5	X	1	4
E			**4**	1	X	
F			3	4		X

Creo que ahora usted comprendió qué es lo que estoy haciendo, y estoy convencido de que podría seguir por su cuenta (más aún, *le propongo* que lo haga... ya falta muy poco para encontrar la respuesta). Igualmente, sigo yo.

Le sugiero que concentre su atención ahora en la quinta columna, que identifica los rivales y los días en los que jugó E. Hace falta saber qué días jugó contra A, B y F, y para eso tengo disponibles los días 2, 3 y 5. Contra A no pudo haber jugado ni el segundo ni el tercer día, porque si usted mira la primera fila, esos días A estuvo jugando con C y con D respectivamente. Luego, *forzosamente* fue en el quinto día que E jugó con A, y allí tiene que ir el número 5. Para completar los rivales de E, faltan B y

F, y tenemos disponibles, una vez más, los días 2 y 3; pero como F jugó con C el día 3, obligadamente E tuvo que haber jugado contra B el día 3 y con F el día 2, y así termina el análisis de E.

En realidad, llegamos hasta acá con esta grilla, y si se fija *todavía* no sabemos contra quién jugó F el viernes. Vea si ahora puede avanzar sin mirar lo que escribí yo.

	A	B	C	D	E	F
A	**X**		2	**3**	5	
B		**X**	**1**	**2**	3	
C	2	**1**	**X**	5	**4**	3
D	**3**	**2**	5	**X**	1	4
E	5	3	**4**	1	**X**	2
F			3	4	2	**X**

Para terminar, la última fila, la que corresponde a F, tiene dos lugares vacíos: los días 1 y 5 en donde tuvo que haber jugado contra A o contra B. Pero como el *quinto día* A compitió con E, F tuvo que haber jugado contra A el primer día, y por lo tanto... ¡en el *quinto día* —que era el que nos importaba— el rival de F fue... B!

La grilla final es la siguiente (en donde ubiqué el número 4 en el partido que jugaron A y B):

	A	B	C	D	E	F
A	X	4	2	**3**	5	1
B	4	X	**1**	**2**	3	5
C	2	**1**	X	5	**4**	3
D	**3**	**2**	5	X	1	4
E	5	3	**4**	1	X	2
F	1	5	3	4	2	X

Moraleja

A esta altura, creo que está clara mi estrategia, pero si usted utilizó otra, independientemente de que haya sido más larga o más corta, ¡muchísimo mejor! ¿Por qué? Porque fue la que elaboró usted, es *suya*. ¿Podríamos haber llegado a dos rivales distintos para F? Es decir, ¿podría ser que existiera *otra configuración* de la grilla que diera por resultado que F jugó ese viernes contra otro rival? (¿Quiere pensar por su cuenta esta respuesta?)

No, no pudimos haber llegado a dos rivales diferentes, porque si usted relee lo que hicimos hasta acá, al tratar de llenar las filas y columnas estuvimos *obligados* a hacerlo de esa forma, que por lo tanto resulta única. El misterio está *develado*, y ojalá que haya disfrutado del análisis tanto como yo al escribirlo[7].

7. Este problema es una variación —muy menor— de otro que encontré en un libro de Bonnie Averbach y Orin Chein (*Problem Solving Through Recreational Mathematics*). Hay muchísimo material del estilo en libros de ese tipo y en internet. Elegí este porque me resultó más cómodo, pero fue solamente una preferencia personal.

El ancho del río[8]

El problema que sigue fue el que me acompañó más tiempo últimamente. En general, disfruto más de aquellos planteos que no tienen una solución inmediata y que 'llevo puestos en mi cabeza' durante varios días. Justamente, de eso se trata: de discutir internamente cómo abordar una situación, qué hacer o por dónde entrarle.

Pero lo que más me atrapó de este problema es que me parecía que no lo iba a poder resolver porque no me iban a alcanzar los datos. Es muy posible que quizás a usted, luego de leerlo y pensarlo un rato, se le ocurra una solución rápida y sencilla, y entonces lo que *no* pueda entender es cómo y por qué me llevó tanto tiempo a mí. Si es así, bárbaro. De todas formas, creo que vale la pena que lo piense, porque es muy fácil entenderlo y elaborar estrategias para resolverlo. Acá va.

Imagine que hay dos ciudades (A y B) que están ubicadas a orillas de un río que las separa. Cada una tiene un puerto que

8. Este problema fue publicado en el libro *Mathematical Quickies*, de Charles W. Trigg (decano emérito del Los Angeles City College). Pero el original apareció en la revista *American Mathematical Monthly*, en febrero de 1940, ¡hace setenta años! El autor que debe llevarse el crédito, entonces, es W. C. Rufus.

está ubicado exactamente enfrente del otro. De hecho, si uno pudiera trazar una línea entre ambos puertos, esa línea sería perpendicular al río (como se ve en la Figura 0).

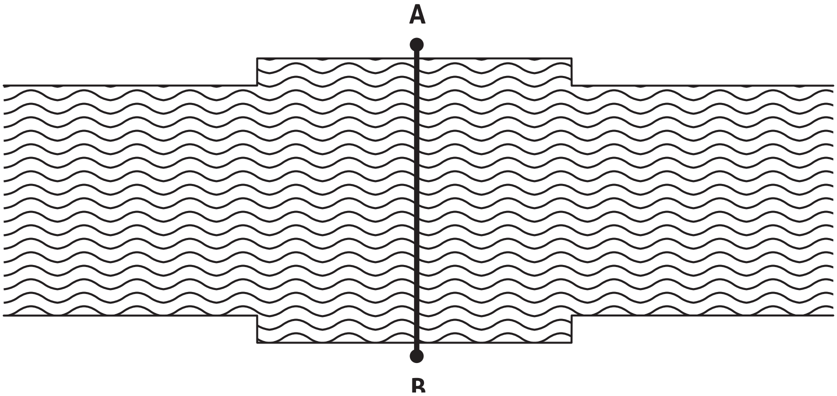


Figura 0

Hay dos barcos, uno en cada puerto, que van a salir en direcciones opuestas, apuntando a la ciudad que tienen enfrente. Cada uno de ellos cruzará el río a una *velocidad constante*, no necesariamente la misma *entre ellos*, pero cada barco mantiene siempre la misma velocidad a lo largo del trayecto.

Cuando un barco llega a la otra orilla, da vuelta inmediatamente sin detenerse y vuelve hacia el lugar de origen. Y repiten el proceso una y otra vez.

Algunos datos más:

a) Los dos barcos salen al mismo tiempo.
b) Cuando se encuentran por primera vez, están a 7 kilómetros de una de las costas. Como estaba previsto, continúan su trayecto.

c) Cuando los dos barcos se encuentran por segunda vez, ahora están a 4 kilómetros de la *otra* costa.

Pregunta: ¿cuál es el ancho del río?

Solución

No sé cómo le habrá ido a usted, pero a mí el problema me entretuvo mucho tiempo. No sabía cómo abordarlo e intenté acercarme por distintos lugares. Me preguntaba si no era necesario conocer la velocidad de cada uno, o al menos una de ellas, para así poder determinar el ancho del río.

Como sea, ocupó varios ratos de mis días, hasta que se me ocurrió una potencial solución. Estoy seguro de que no debe de ser la única; en todo caso es *una solución* que además incluye una forma de alcanzarla.

Quizás usted haya encontrado otra más breve, más rápida y/o más clara. Por supuesto, si así fue, debería hacerla (o hacerlo) sentir muy bien, como corresponde, porque en definitiva es ***su*** solución y para usted *tiene que ser la mejor de todas*. Por otro lado, si no se le ocurrió ninguna solución, tampoco pasa nada. ¿Acaso no disfrutó del camino que recorrió al pensarla?

En la Figura 1 aparecen los dos barcos en cada una de las costas. Los voy a llamar A y B.

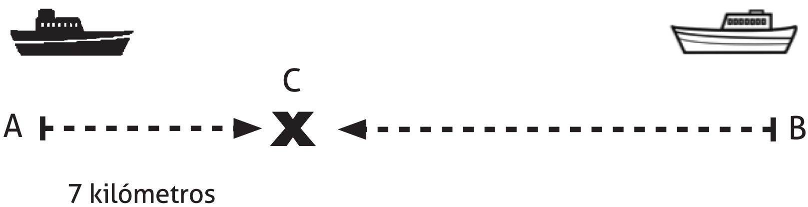


Figura 1

Cuando se encuentran por primera vez en el punto C, lo hacen a 7 kilómetros de una de las costas, digamos la izquierda, desde donde salió A.

Fíjese que A y B están en el mismo lugar (en C), cuando A ya recorrió 7 kilómetros desde que empezó su viaje. Se cruzan, pero siguen su marcha. En algún momento (no necesariamente el mismo) A llegará a la costa derecha, y B a la izquierda. Cuando cada uno llega a la otra orilla, da la vuelta sin perder tiempo y sale en dirección contraria.

Y ahora sabemos que cuando se encuentran otra vez, lo hacen en un punto D que está a 4 kilómetros pero de la costa derecha (Figura 2).

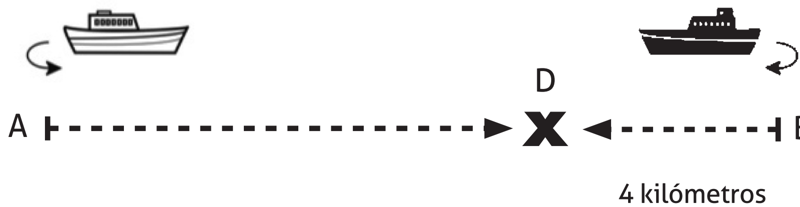


Figura 2

Ahora, quiero hacer una observación que me parece muy importante y conducente hacia la solución del problema: cuando los barcos se encontraron la primera vez, ***entre los dos*** recorrieron el ancho del río. Todavía no conocemos cuánto mide, pero sí que la suma de los dos tramos que navegaron entre ambos resulta ser el ancho total del río (que es el dato que estamos buscando)[9].

Independientemente de que, al haberse cruzado, la suma de las distancias que recorrieron es exactamente el ancho del río, cuando los dos hayan tocado la costa contraria, habrán recorrido el río dos veces: una vez A y otra vez B. El barco A lo recorrió de izquierda a derecha y el barco B en la otra dirección.

Y por último, piense lo siguiente: al tocar la costa contraria, dan la vuelta y se encuentran nuevamente en D, que está a 4 kilómetros del lado derecho del río. En ese momento, entre los dos recorrieron el ancho del río una tercera vez: la habían navegado dos veces cuando cada uno llegó del otro lado, y ahora tenemos que sumar las distancias recorridas por los dos cuando se encuentran en D.

Moraleja (hasta acá): al encontrarse en D, si uno suma las distancias que recorrieron los dos, el resultado es que navegaron tres veces el ancho del río.

9. Cada barco cruza el río manteniendo siempre la misma velocidad, pero no sabemos si alguno de los dos es más rápido que el otro o no.

Este es un dato no menor, invito a que lo revea/piense. Más aún: le propongo que no siga leyendo si cree que *no* entendió. Vuelva atrás tantas veces como le haga falta y, obviamente, piense usted si está de acuerdo con lo que escribí. Y hasta que no se convenza, no siga.

Ahora estamos de acuerdo en que entre los dos barcos recorrieron *tres* veces el ancho del río (sumados los tramos que hizo cada uno).

Quiero separar dos hechos:

a) Los dos barcos van a velocidad constante (no necesariamente la misma, pero constante).
b) Cuando el barco A se encuentra con B la primera vez, recorrió 7 kilómetros. Y en ese momento en que se encontró con B, entre los dos habían recorrido el ancho del río una vez.

En consecuencia, cada vez que entre los dos recorren el ancho del río, el barco A recorre 7 kilómetros.

Pero además, como lo recorrieron tres veces entre los dos, eso significa que el barco A recorrió 3 veces 7 kilómetros, o sea, 21 kilómetros. Por otro lado, cuando se encontró con B por segunda vez, estaba a 4 kilómetros de la otra costa. Es decir, como A salió de la otra costa (digamos la izquierda) y se encontró con B a 4 kilómetros de la derecha, eso significa que hizo 4 kilómetros más que el ancho del río.

Luego, el ancho del río es de 21 kilómetros *menos* 4 kilómetros. Por lo tanto, el *ancho* del río es:

$$(21 - 4) \text{ kilómetros} = 17 \text{ kilómetros}$$

Como ve, este problema es verdaderamente espectacular, porque más allá de lo que yo escribí, daba la sensación (al principio) de que con los datos que uno tenía no podría resolverlo. Sin embargo, no fue así.

Igualmente, lo más interesante de todo es que, más allá de haber llegado al resultado o no, el entrenamiento que uno adquiere al pensar este problema es verdaderamente impagable.

Absurdo

Una de las ciudades más bonitas del mundo es Cannes, en la Costa Azul, Francia. La razón por la que Cannes se destaca entre tantas otras que están junto al Mediterráneo es que todos los años se realiza allí el festival de cine. Obtener un premio en Cannes significa aparecer en el *mapa*... al menos, en *ese mapa*.

El otro día me plantearon un problema que me pareció muy interesante y que justamente involucra al festival y al gran número de películas que se presentan allí anualmente. Quiero compartir entonces la historia. Voy a *cambiar* algunos datos para que las cuentas sean más fáciles, pero esto no modificará nada conceptualmente.

Un grupo de cien amigos (entre ellos, no míos), que viven habitualmente en la Argentina, son cinéfilos a ultranza, casi *fanáticos*. Saben *todo:* nombres de películas, directores, actores, actrices (y no solamente los principales, sino los de reparto también), compositores de los temas musicales, diferentes versiones a lo largo de la historia... y no hace falta que agregue nada más. Supongo que a esta altura usted me entiende. Estos amigos estuvieron juntando dinero durante bastante tiempo para poder asistir al menos *una vez en sus vidas* al que ellos consideran el festival de cine más importante del mundo. Y al final, lo lograron.

Se fueron a Francia. Llegaron a París y contrataron un micro que los transportó hacia el Mediterráneo y que les sirvió para movilizarse durante toda la estadía. Bloquearon además 50 habitaciones en un pequeño hotel, y se decidieron a pasar los 'mejores días de sus vidas'.

El número de películas que se exhiben en Cannes varía todos los años, pero en esta oportunidad se presentarían 50. Los organizadores se propusieron que no hubiera películas que se ofrecieran en forma simultánea, y no habría repeticiones. Es decir, habría *una sola oportunidad para ver cada película*. El inconveniente mayor era tratar de conseguir entradas, y lo único que pudieron garantizar es que *cada película fuera vista por más de la mitad de los integrantes del grupo* (51). Es decir, para tener la mayor cantidad de opiniones posible, decidieron que, sea cual fuere la película, debía ser vista por más de la mitad del grupo, y de esa forma tener más variedad en el momento del análisis que habrían de hacer a su retorno. Entre sobreprecios y discusiones con las autoridades del festival, más algunos amigos en el mundo del 'cine', lograron finalmente su objetivo.

Después de varios días y experiencias intensas (y agotadoras), estaban recorriendo el aeropuerto de Charles De Gaulle y se reunieron por última vez en uno de los bares. Allí fue cuando Selva, una de las integrantes del grupo, de 16 años, hizo el siguiente comentario: "¿Se dieron cuenta de que, por la distribución que hicimos, por lo menos uno de nosotros (uno de los 100) *tuvo que haber visto más de la mitad de las películas* (*o sea, 26 o más*)?".

¿Será verdad lo que pensó Selva? Aquí le sugiero que continúe usted por su cuenta. Yo, mientras tanto, sigo más adelante.

Solución

El problema es interesante porque plantea una situación *al revés* de lo que se habían propuesto como grupo. Es decir: la idea que tenían era distribuirse de manera tal que cada película —de las 50 que había en exhibición— fuera vista por más de la mitad de los componentes (51 o más); pero, de acuerdo con lo que les sugirió pensar Selva, habrían obtenido un resultado extra, pues al menos *uno* de ellos tuvo que haber visto 26 películas (o más), o sea, más de la mitad de las películas. ¿Estará bien?

Le propongo pensar el problema de la siguiente forma. Hagamos de cuenta de que las únicas personas que iban al cine en ese festival de Cannes eran los componentes del grupo, ya que lo que sucedía con el resto de los espectadores no tiene ninguna relevancia para lo que tratamos de resolver.

Dicho esto, acompáñeme en estas dos observaciones:

1) De acuerdo con lo que se propusieron, cada película la habrían de ver por lo menos 51 de ellos (más de la mitad). Como en total se exhibían 50 películas, entre los integrantes del grupo hubo (50 × 51) = 2.550 espectadores **como mínimo**. ¿Por qué? Tome una película cualquiera: seguro que había *por lo menos 51 integrantes del grupo que estaban en la sala.* Como esto sucedió *con cada una de las 50 películas,* entonces entre las 50 funciones hubo (50 × 51) = 2.550 espectadores del grupo en esos cines... ¡como mínimo! ¿Por qué pongo *como mínimo*? Es que podría ser que a alguna de las películas hubieran podido ir los 100. Pero también pudo haber pasado que justamente en esas funciones particulares la demanda de entradas no les hubiera permitido ir a todos. La garantía que ellos tienen es que *siempre* hubo *por lo me-*

nos 51 de ellos en cada función; y como eran 50 películas, al multiplicar 51 por 50 se obtiene 2.550.

2) Supongamos que la observación de Selva fue equivocada, que NO FUERA CIERTO que hubo algún integrante del grupo que vio más de la mitad de las películas. ¿Qué quiere decir esto? Esto significa que cada uno de los 100 amigos que llegaron desde la Argentina vio A LO SUMO 25 películas (ya que si hubiera habido alguno que vio 26, listo... Selva habría tenido razón). Luego, si ninguno vio más de 25 películas, esto dice que entre los 100 integrantes del grupo no pudieron ser más de (100 × 25) = 2.500 personas en los cines. Es decir, **como máximo** entre los integrantes del grupo, no aportaron más de 2.500 espectadores.

Ahora le propongo que relea las dos observaciones que escribí. ¿Encuentra alguna contradicción? Fíjese que por la observación (1), el aporte de espectadores entre los miembros del grupo fue, como *mínimo*, de 2.550; pero, por otro lado, de acuerdo con la observación (2), si lo que dijo Selva fuera falso, se obtendría que como *máximo* aportaron 2.500. ¡Estos dos números no cierran! Hay algo que está mal.

Justamente, la contradicción se produce porque hemos supuesto que lo que dijo Selva era equivocado.... lo que demuestra que lo que ella dijo... ¡tiene que ser cierto!

Conclusión

Usted debe de haber escuchado muchas veces en su vida que *algo* en matemática se resuelve *por el absurdo*[10]. Estoy *seguro*

10. El nombre común y más conocido es el 'método de prueba por el ab-

(aunque no la/lo conozco) de que usted misma (o mismo) debe de haber demostrado la validez de algo que sostuvo en algún momento de su vida usando este método. Es *muy posible* que *nunca* lo haya llamado así, y ni siquiera se haya planteado ponerle un nombre.

Sin embargo, esta herramienta para hacer una demostración es muy sencilla y, al mismo tiempo, muy potente y muy útil. ¿Cómo funciona? A 'grandes rasgos', lo que uno quiere es probar que *algo* es cierto (como lo que sostuvo Selva). Empieza por suponer que no, que es *falso*. Avanza con la línea argumental hasta concluir que si *eso* fuera falso, entonces alguna otra *verdad conocida* ***terminaría siendo falsa también***. Es decir, uno supone que es falso lo que en realidad es cierto... Y por eso es, justamente, una demostración 'por el absurdo'.

surdo' o prueba de la contra-recíproca. Para aquellos que tengan un poco más de curiosidad matemática, y usando una nomenclatura más 'técnica', resulta equivalente probar una 'implicación' que la 'contra-recíproca'.

Modelo para embarcar

Usted llega a un aeropuerto. Se dispone a iniciar su vuelo pero ya sabe lo que le espera: largas colas (entre paréntesis, *todo lo que signifique 'hacer cola' es una falta de respeto...* ***siempre****, no importa ni la circunstancia ni la ocasión. Peor aún, aquellas personas que tienen mayor poder adquisitivo no hacen tanta cola como el común de los mortales*). Estas son algunas de las dificultades que puedo enumerar, pero siéntase libre de agregar las propias:

- Hacer cola para 'llegar' hasta el mostrador.
- Aunque los pasajes sean electrónicos, igualmente *ayuda* tener una copia en papel... ¡y la tarjeta de embarque!
- Presentar los documentos (no hay nada para decir al respecto).
- Despachar el equipaje. Para esto, hay que *pesarlo*, y uno sufre pensando que podría exceder el peso aceptable y, por lo tanto, tener que pagar más para transportar lo que compró.
- "Discutir" por un asiento. ¿No es curioso que *siempre*... en serio... *siempre* las filas de emergencia estén ocupadas?
- Hacer cola para presentar los documentos ante la policía de inmigraciones.

- Pasar por el escrutinio de los rayos X... o sortear los sistemas de seguridad.
- Ni hablar si uno tiene que declarar (antes o después) algún objeto electrónico para evitar pagar impuestos al retornar.

En fin: la lista podría ampliarse, pero creo que queda clara mi idea. Y una vez que uno ya superó *todos* estos escollos, todavía falta el más importante de todos: *¡embarcar!* En esos casos, uno *cree* que lleva el equipaje de mano adecuado. Es decir, uno *cree* que va a caber en el compartimento superior del asiento que tiene asignado, o en todo caso, *debajo de él.* Pero, claro... ¡los otros pasajeros tienen la misma idea que uno! Y peor aún: hay gente que trae un colchón de dos plazas listo para ubicarlo allí arriba (... es una broma... aunque a veces se acerca *bastante* a la realidad).

Desde ya, los pasajeros que viajan en primera o en clase ejecutiva entran primero al avión. Pagaron más, y eso los califica (en esta sociedad, el que paga más entra más rápido, el que paga más no hace cola, tiene privilegios. En algún sentido, el que paga más tiene *poder,* y esto que estoy describiendo es una manifestación de ese poder, justamente).

Y es aquí donde surge el problema: ¿qué hacer? ¿Qué pueden hacer las aerolíneas para minimizar el tiempo de embarque? Está claro (al menos para mí) que ellas también se verían favorecidas si lográramos encontrar alguna forma de embarcar que sea universalmente aceptada. De hecho, me resulta muy curioso que aún no se haya podido resolver el problema, aunque verá usted, si sigue leyendo, que hay ya algunas propuestas. De todas formas... *sigo.*

Hasta acá, cada compañía tiene libertad para utilizar *su propio método, su propia estrategia.* Depende del tipo de avión, del tamaño, del número de divisiones internas que tenga, de la cantidad de pasillos (los más grandes tienen dos pasillos, e incluso hay de dos pisos, como los jumbos).

Algunas prefieren hacer ingresar a los pasajeros de adelante hacia atrás (la peor de todas las opciones, pero la más utilizada). Otras, al revés: de atrás hacia adelante (que es solamente *un poquito mejor*). Otras dividen a los pasajeros en secciones de acuerdo con el dinero que costó el pasaje, aun en la clase más económica. De todas formas, los métodos usados hasta acá son pobres en cuanto a eficacia y resultados.

Una vez más, ¿qué hacer? A las compañías aéreas les debería interesar *optimizar* ese tiempo, no tanto porque estén preocupadas por nuestro bienestar sino porque cuanto más tiempo esté un avión en el aire, más rédito obtienen ellas.

Como muchas otras veces, conviene apelar a la matemática, o al menos consultarla. Claramente, en la práctica, uno *no puede experimentar* con todas las formas posibles de hacer ingresar pasajeros en un avión. De hecho, cualquier método que se elija tendrá siempre los inconvenientes que planteamos los humanos: viajar con chicos, con mucho equipaje de mano, o tener asientos en diferentes filas y pretender embarcar todos juntos (algo que es lógico si uno viaja con niños, por ejemplo), o simplemente no respetar ningún orden. Todo esto debe ser contemplado. De acuerdo... ¿pero cómo?

Más aún: se lo pregunto a usted. Sí, a usted. ¿Qué haría usted si tuviera que delinear una estrategia para embarcar pasajeros? No hace falta que le dedique mucho tiempo, pero sí que se detenga un rato a pensar, porque aunque usted *crea* que encontró la solución, ¿cómo haría para comprobarla?

Curiosamente, *ese es otro problema*. Suponiendo que cualquier persona diseñara una estrategia que considerara óptima, ¿cómo lo demostraría?

Es obvio que no podría probar con pasajeros y aviones *de verdad*, entre otras cosas porque ¿quién se los prestaría? Y por otro lado, ¿cuántas pruebas tendría que hacer? Para resolver este tipo de situaciones —entre otras cosas— sirve hacer un *modelo... ¡y hasta acá quería llegar!* Si uno logra un *modelo*, algo que sirva para 'replicar' la situación de la vida real y que se ajuste a ella lo más posible, entonces *sí*. Con un modelo teórico uno puede *practicar y probar*. Esto lo hace un programa que se 'corre' en una computadora. Usted planifica algo que, como decía antes, *simula* la vida real, le pide a un programador que lo traduzca al lenguaje de una computadora para que esta lo pueda entender y, luego, pone a prueba lo que pensó.

Lo bueno de usar un modelo es que —si *funciona*—, si en verdad se *ajusta a la realidad*, uno puede probar muchísimas veces en forma *virtual*, y puede decidir sobre su eficacia sin costo alguno (o con un costo infinitesimal).

En cambio, si el *modelo <u>no</u> funciona*, uno puede hacer los ajustes en forma teórica y probar nuevamente. En este caso, si quisiera comparar cuál método funciona mejor (el que a usted se le ocurra: embarcar por adelante hacia atrás o viceversa, ubicar primero a los pasajeros que se sienten al lado de una ventanilla, después a los del medio y finalmente a los de los pasillos), basta con que lo programe y lo apruebe. Después podrá agregar algunos *factores de corrección*. ¿Qué quiero decir con esto? Demoras por niños, personas mayores, personas que necesitan sillas de ruedas, o que traen paquetes muy grandes que no entran fácilmente en los compartimentos superiores, personas que se quedan conversando entre sí y obstruyen el paso en los pasillos... y muchos etcéteras más. Pero usted *necesita* incluir en el programa *todas* las posibles alternativas, y cuando se sienta confiado y tranquilo, hacer 'correr' el programa. Es decir, hacer que el programa *simule la realidad, como si tuviera pasajeros y aviones de verdad*. Es decir, estudia las modificaciones necesarias, anota, corrige... y después compara.

Un físico norteamericano, Jason H. Steffen[11], harto de padecer estos contratiempos (como todos los que tenemos el *privilegio* de volar en aviones frecuentemente), decidió utilizar un método matemático para *probar* las distintas variantes y ver si podía encontrarle una solución *científica* al problema.

Para empezar, Steffen empleó diferentes ideas. Simuló un avión con 120 pasajeros, con 6 asientos por fila y 20 filas en total. Agregó después una hipótesis extra: no habría ni primera clase ni clase ejecutiva: ¡todos iguales! Y por supuesto, supuso que el avión estaba completo. Claramente, estas no son las condiciones de todos los vuelos, todos los días, en todas las compañías pero... *tenía que comenzar de alguna forma, ¿no es así?*

Steffen escribió:

> Empezando con el orden inicial —escribió Steffen— tomé el tiempo que tardaban en embarcar y lo anoté. Después, tomé dos pasajeros al azar, cualesquiera, y les cambié el orden en el que entraban en el avión. Si lograba que de esa forma entraran igual o más rápido, aceptaba ese nuevo orden y cambiaba otros dos. En cambio, si una configuración aumentaba el tiempo, la rechazaba, volvía al paso anterior y modificaba <u>otros dos</u> pasajeros. Paré luego de ¡10.000! intentos, ya que cualquier otra modificación no alteraba los resultados.

---

11. Steffen publicó sus resultados en home.fnal.gov/~jsteffen/airplanes.html y en un artículo que publicó Philip Ball, en la revista *Nature*, en la edición de febrero del año 2008 (www.nature.com/news/2008/080227/full/4511040a.html). Para aquellos que estén más interesados aún, Steffen utilizó un algoritmo de *optimización*, que se conoce con el nombre de MCMC (“Markov Chain Monte Carlo”).

El modelo le asignaba a cada persona (además del asiento) un número al azar, entre 0 y 100, que indicaba el tiempo que tardaría en ubicar su equipaje de mano. Por supuesto, escapa a mi objetivo en este artículo explicitar *todos* los detalles, pero me interesa mostrar acá cuáles fueron *algunas* de sus conclusiones.

En principio, los mejores resultados se obtienen cuando la distancia que hay entre los pasajeros permite que varios *carguen su equipaje* en forma simultánea, y eso se da si esa distancia es de 12 filas. El tiempo de embarque aumenta considerablemente si los pasajeros que ingresan en el avión van a sentarse en la misma fila o en filas adyacentes. Con el modelo que usó Steffen podía haber un máximo de diez pasajeros acomodando su equipaje al mismo tiempo. Por supuesto, para implementar cualquier método, los pasajeros de todos los aviones tendrían que aceptar un *orden de entrada*. Como escribió el propio Steffen, siempre habrá una fracción de los pasajeros que no podrán cumplir con esto, porque son familiares, porque llevan niños o porque forman parte de otros grupos.

Pero lo ideal no es necesariamente posible. El autor propone, entonces, que haya *al menos* una fila libre, o bien adelante o bien atrás, en el momento de acomodar los equipajes 'de mano'. Como consecuencia de esto, la mejor distribución aparece cuando la mayor parte de los pasajeros tienen una fila vacía que los separa de los que ya entraron o de los que entrarán después. Es decir, lo que importa no es tanto *el lugar donde se van a sentar*, sino la *posición relativa* (los que ya están sentados y ubicados, o los que vendrán después).

Una vez más, la matemática aparece como la forma más eficiente para resolver un problema de la vida cotidiana, si es que, en definitiva, ubicar pasajeros en un avión en forma eficiente se puede considerar tal cosa.

Algunas notas sobre el modelo de Steffen

1) El modelo que usó Steffen supone que el tiempo que demora el embarque se debe al tiempo que ocupan los pasajeros en ubicar su equipaje de mano, ya sea debajo de los asientos que tienen adelante o en el compartimento superior. De hecho, el autor dice que si la gente *no pudiera llevar equipaje de mano*, el artículo <u>no existiría</u> porque no habría nada que analizar.
2) Ubicar a los pasajeros dentro del avión ocupa más tiempo que la recarga de combustible y el reaprovisionamiento de comida, bebida, y de todo lo que hace falta para consumo interno de las personas.
3) La intuición indica que la *peor* manera de abordar es de adelante hacia atrás (y el método usado por Steffen lo confirma, obviamente). Pero embarcar de atrás hacia adelante en bloques solo divide el tiempo a la mitad. Igualmente, el análisis demuestra que es la *segunda peor* de todas las opciones. En todo caso, mueve la fila de pasajeros que se amontonan hacia la parte trasera del avión, pero no mejora significativamente el proceso. Más aún: si bien hay muchos pasajeros *adentro del avión*, muy pocos ubican sus equipajes simultáneamente. Es más la gente que *espera* que los otros se ubiquen que la gente que está efectivamente acomodando el equipaje.
4) Hacer sentar primero a todos los que ocupan las ventanillas, luego los asientos del medio y finalmente los pasillos mejora las opciones anteriores, pero por muy poco, también.
5) Si uno dejara entrar a los pasajeros al azar, el tiempo que utilizarían se reduciría a la mitad de lo que es convencio-

nal hoy. Esto demuestra que subir al azar no es catastrófico, como uno podría suponer... ¿no es así?

6) Steffen plantea dos opciones: una, la que él llama *ideal*, y otra, que es la *mejor entre las posibles*. Digo así porque la *óptima* requeriría de una disciplina *inalcanzable* (*e inesperable*) tanto por parte de los pasajeros como de las compañías aéreas. Pero la *mejor* entre las posibles significaría disminuir el tiempo *por lo menos* a la cuarta parte, con posibilidades, en algunos casos extremos, de reducirlo... —lea bien— ¡a la décima parte!
7) La situación ideal se alcanza cuando pasajeros adyacentes (o sea, que entran juntos al avión) tienen asignados asientos con 12 filas de separación. Esta configuración permite tener el *máximo número de pasajeros acomodando sus equipajes de mano en forma simultánea*. Además, permite que entren 10 pasajeros al mismo tiempo. "*Entran diez. Se espera a que terminen. Entran otros diez. Y así siguiendo hasta que entran todos*." Esta estrategia permite embarcar a los pasajeros ocupando solo un 20% del tiempo que se utiliza hoy (en promedio).
8) Sin embargo, la *mejor de todas las posibles variantes* (y que no involucre que los pasajeros tengan que hacer un curso para entrar en un avión) es formar *bloques de personas que tengan asientos designados 'cada cinco filas' y hacerlos entrar respetando esos bloques*. Esto se obtiene (en el caso del avión de 120 lugares) con cinco bloques de 24 pasajeros cada uno.

La primera vez que escribí sobre este tema fue en el año 2007 (dentro de poco hará una década). Muchas cosas pasaron desde entonces, pero aún no hay **un método** o **una estrategia para**

embarcar que mejore la que existe desde siempre. ¿Es curioso, no? Lo que quiero proponer acá es mostrar *un* tipo de problema que la sociedad tiene todavía hoy y plantear que el diseño de una buena estrategia es la única forma de resolverlo. Diría entonces que, así como está, este es aún *un problema abierto*.

CAPÍTULO 2

¿Quién da menos?

Con la llegada de internet, las redes sociales como Facebook, Twitter, y los teléfonos inteligentes, el paisaje que nos rodea ha cambiado fuertemente en los últimos años. Y los acontecimientos se suceden tan rápido que no hay, virtualmente, lugar para respirar sin que aparezca algo nuevo. En una de las reuniones de producción de "Alterados por Pi", comentaba con Juan Pablo Pinasco, matemático, profesor en Exactas de la UBA, lo que había escuchado en la Universidad de Nueva York (NYU) a propósito de una forma sorprendente de realizar "subastas" o "remates". Juan Pablo, quien trabaja en el equipo de producción ofreciendo ideas extraordinarias para el programa, me dijo que no solo estaba informado sobre el tema, sino que me podía dar muchas fuentes para investigar. Más aún: me propuso que lo preparáramos para que yo pudiera presentarlo en alguna de las grabaciones que habríamos de hacer en alguna de las escuelas del interior del país. A partir de allí, me abrumó con datos, trabajos, antecedentes y recomendaciones. Me apuro a decir que, cuanto más leo sobre el tema, más sorprendido estoy de la forma en la que funciona.

El sistema tiene varios costados desde donde abordarlo: el económico (ya que es una forma diferente de tratar de comprar un objeto), el lúdico (porque hay azar y sin garantías de éxito) y el matemático (por la forma en la que interviene la Teoría de Juegos en la búsqueda de estrategias ganadoras). Si me permite la exageración, creo que es algo revolucionario. Le propongo que me siga por acá.

Un breve resumen. Cuando usted piensa en una subasta o en un remate, ¿qué es lo primero que se le ocurre? Creo que a todos nos pasa que imaginamos a una persona con una suerte de martillo que golpea en un atril con insistencia mientras habla en forma muy (muy) rápida. La idea es tratar de que los asistentes compitan entre ellos, elevando sus apuestas (u ofertas) en pos de conseguir el objeto que se remata. Todo termina con el martillero golpeando la mesa tres veces consecutivas, decretando una oferta ganadora, y a partir de ese momento queda definido quién se queda con un cuadro, con una escultura o incluso con un caballo o una casa...

¿Cómo podría alguien encontrar una variante a esto? Curiosamente sí hay una variante posible. Es que el mundo digital ofrece herramientas que antes no podíamos imaginar ni siquiera en uno de nuestros sueños más salvajes. Fíjese cómo funciona. Supongamos que se va a rematar un objeto cualquiera, digamos un televisor. En general, en los remates habituales las personas suelen estar sentadas en un mismo lugar geográfico, todas enfrentadas al "martillero", que es el que va conduciendo el remate y "azuzando" al público, estimulándolo para que vaya ofertando cada vez más.

En el caso que voy a describir, nada de esto tiene que suceder. Los oferentes no tienen por qué estar ni en ningún lugar en particular ni muchísimo menos todos juntos. La compañía dueña del televisor que se está por rematar hace un anuncio público del número de teléfono al que habrá que mandar un mensaje de texto con el dinero que uno está dispuesto a pagar por él. Por supuesto, cada mensaje de texto tiene un costo fijo (dinero que se reparte entre la empresa dueña del televisor y la compañía de teléfonos que presta el servicio).

Las ofertas pueden hacerse durante un tiempo determinado, por ejemplo, seis horas. Para fijar las ideas, supongamos que las ofertas se pueden hacer en incrementos de un peso, pero podrían ser en centavos o en cualquier denominación que se paute de antemano. Una vez delimitadas todas estas cuestiones "logísticas", aparecen las tres primeras preguntas: ¿cómo hace uno para ganar el televisor?, ¿cómo hace uno para saber qué es lo que están apostando los otros?, ¿cómo hace uno para superar la oferta de otro?

Las respuestas son sorprendentes: gana el televisor el que ofreció menos dinero. Sí, menos. Acá, la idea que uno tiene de superar la oferta de el o los otros funciona al revés: usted gana si ofrece menos dinero. Pero claro, falta un dato importante: la oferta tiene que ser única. ¿En qué sentido "única"? En el sentido de que no puede haber ninguna otra persona que haya ofrecido la misma cantidad de dinero que usted.

Me explico: supongamos que las ofertas tienen que hacerse en "saltos" de un peso. Por supuesto, recuerde que, independientemente del ofrecimiento que usted haga, siempre hay que pagar un canon por el mensaje de texto que se envía. Ahora bien: es razonable pensar que si va a ganar el televisor el que apueste menos, entonces todos van a apostar el menor valor posible, o sea, un peso. Pero en ese caso, si hay dos o más personas que ofrecieron un peso, entonces ninguno de ellos va a ganar, porque la oferta, si bien será la más baja, no será única.

Fíjese en el ejemplo que escribo acá abajo. Supongamos que, en un momento de la subasta, las ofertas estuvieran distribuidas así:

532 personas ofrecieron un peso
138 personas ofrecieron dos pesos
71 personas ofrecieron tres pesos
ninguna persona ofreció cuatro pesos
una persona ofreció cinco pesos
114 personas ofrecieron seis pesos
ninguno ofreció ni siete, ni ocho, ni nueve pesos
una persona ofreció diez pesos, etc.

Relea los datos y fíjese si puede decidir —con las reglas que escribí antes— quién ganaría el televisor.

Sigo yo. Hasta ese momento, la persona que ofreció cinco pesos sería la ganadora. ¿Por qué? Porque es la más baja de todas las ofertas en las que quien ofreció ese dinero (cinco pesos) no tuvo competencia: fue la única (o el único). Los que ofrecieron uno, dos y tres pesos ofrecieron menos dinero que cinco pesos, pero no están solos. Cuatro pesos no ofreció nadie, por lo tanto no hay quien gane con ese precio. El primero que está solo es quien ofreció los cinco pesos. Eso sí: si en el transcurrir de la subasta, alguna otra persona envía un mensaje de texto ofreciendo cinco pesos también, instantáneamente ya ninguno de los dos ganará el televisor (al menos ofreciendo cinco pesos). ¿Quién pasará a ser el ganador? Si se fija en la lista, la persona que ofreció 10 pesos pasaría a ser el ganador, porque es quien ofreció menos entre todos los que están en soledad. Pero puede ocurrir que, en el camino, alguien decida ofrecer cuatro pesos. Como advierte, esa persona pasará a ser la ganadora, ya que hasta entonces nadie había ofertado cuatro pesos, y si bien quien había ofrecido diez sigue estando solo, ahora su oferta perdió la categoría de ser la menor entre las únicas.

En resumen, el remate de la "menor oferta única" consiste en:

- Un objeto de alto valor se pone a disposición del público sin un precio "piso".
- Se determina de antemano si las ofertas tienen que ser en un número entero de pesos o si se aceptan centavos. De esa forma, se establece cuán cerca pueden estar dos ofertas.
- La "subasta" tiene un tiempo predeterminado.
- Cada ofrecimiento "paga" un precio por entrar en la competencia, que es el valor del mensaje de texto.
- Durante el período que dure la subasta, quien ofrece solamente sabe si está ganando o no con la oferta que hizo.
- Ninguno de los oferentes conoce el dinero ofrecido por otros, salvo al final del ciclo.
- Cada persona puede hacer tantas ofertas como quiera (aunque esto es variable, porque he visto casos en los que se limita a solo nueve ofertas alrededor de un cierto número).
- En el caso de que no haya ninguna oferta única, el primero en ofrecer "la menor" de todas es el ganador.

¿Cómo interviene la matemática en todo esto? Lanzados a la arena competitiva, la Teoría de Juegos cumple un rol también. Hay mucha gente dedicada ahora a investigar cuáles son las mejores estrategias para poder ganar. Es decir, se trata de identificar buenas estrategias que permitan incrementar las chances de ganar, limitando el riesgo.

Grupos de matemáticos, programadores, físicos e ingenieros han investigado miles de subastas para intentar descubrir los patrones con los que el público (nosotros, usted, yo) "jugamos". El objetivo es entender y poder predecir el comportamiento humano. Se trata de organizar la información de las ofertas incluyendo el precio ofrecido, cuándo fue ofrecido (respecto del tiempo límite para hacer ofertas) y cuántas apuestas por persona se hacen.

Hay ya muchísimos artículos publicados al respecto, pero quiero hacer referencia al que produjo el grupo que conduce Luis Amaral, profesor de ingeniería química y biológica. La pregunta que se hicieron es: ¿quién gana en estas subastas?, ¿el que participa usando una estrategia o el que tiene más suerte? La respuesta fue que gana el afortunado (¿no es siempre así?). Pero con un detalle: el afortunado que aplica algún tipo de estrategia. El estudio que realizaron involucra 600 subastas en las que intervinieron más de 10 mil participantes que hicieron más de 200 mil ofertas, especialmente en Australia y en Europa. "Mucha gente piensa (y con razón) que es 'inteligente' y que tiene una ventaja por serlo", dice Luis Amaral, uno de los autores del trabajo. "Pero lo que no advierte es que compite con personas que hacen lo mismo. La ventaja que tiene el uso de la estrategia se evapora entonces, y se transforma en un juego de azar." La Teoría de Juegos se especializa —entre otras cosas— en abordar situaciones en las que la ganancia de cada jugador no depende solamente de su comportamiento sino también de lo que hacen los otros. Este tipo de subasta es un problema clásico de la teoría en donde uno tiene cierta información y trata de descubrir o conjeturar lo que las otras personas van a hacer y, en función de esas conjeturas, elabora una estrategia supuestamente "ganadora".

Amaral y su equipo hicieron una simulación computarizada usando un programa que diseñaron a tales efectos y descubrieron que la mejor estrategia es la que involucra hacer ofertas con valores muy cercanos entre sí en una banda baja (de poco monto) y después pegar un "gran salto" hacia un lugar donde —uno conjetura— habrá poca actividad.

No solo eso, sino que la mejor forma de describir el comportamiento humano fue compararlo con lo que hacen las gallinas para alimentarse. Primero se concentran en una cierta zona, picoteando como pueden, pero después la competencia entre ellas las hace alejarse del resto y buscar en lugares no necesariamente cercanos, sino más bien alejados del inicial. Trasladado a este caso, los oferentes hacen sus apuestas en principio alrededor de valores muy bajos (digamos cercanos a los cinco o diez pesos), pero después se producen saltos hacia la zona de los cincuentas y sesentas, como imaginando que allí hay un terreno inexplorado y con altas posibilidades de ganar.

No sé si este sistema de subastas y/o remates tendrá éxito, ni si se expandirá hasta infiltrar nuestras costumbres cotidianas, pero acceder a comprar un televisor por cuatro pesos o un departamento por cuarenta es ciertamente una tentación. Para algunos, es irresistible. Para otros, es una nueva forma de timbear. “¿Quién da menos?”

Tablero infectado[12]

Suponga que tiene un tablero de ajedrez (de 8×8), pero en donde las casillas no están diferenciadas por color. O sea, son todas iguales y *blancas* (como se ve en la Figura 1).

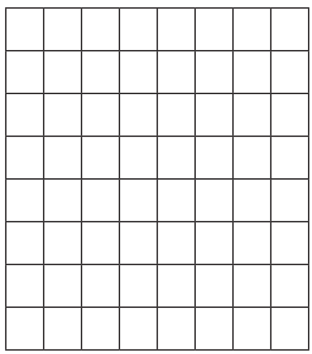


Figura 1

Vamos a *infectar* algunas de esas casillas, como si contuvieran alguna bacteria (o algo equivalente) que las transformara en peli-

12. El crédito por la existencia de este texto lo comparten la revista soviética (en ese momento) *Kvant*, una revista húngara (cuyo nombre no conozco) y Peter Winkler, quien lo propuso en un libro que se publicó en el año 2005, *Tribute to a Mathemagician*.

grosas. Voy a pintar de *negro* cada casillero donde *vive* alguna de estas bacterias (tal como se ve en la Figura 2).

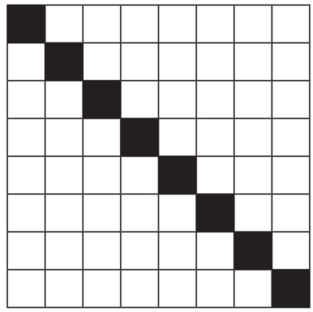


Figura 2

Es decir, algunas casillas estarán infectadas y otras no. Esa es la posición inicial. Ahora empezamos un proceso que —en cada paso— cumple la siguiente regla: si una casilla está en contacto (hacia alguno de los costados: derecho, izquierdo, arriba, abajo) con *dos* casillas que están infectadas, se infecta ella también en el movimiento siguiente.

Por ejemplo, si uno empieza con una distribución de casillas infectadas como la que aparece en el caso de la Figura 2, al avanzar la infección se tendrán (en el primer paso) algunas casillas infectadas más (que corresponden a la diagonal de arriba y a la de abajo de la que está infectada inicialmente) (Figura 3).

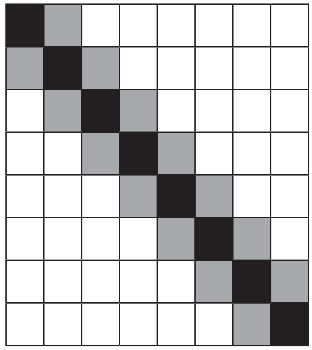


Figura 3

Como usted puede comprobar, si uno siguiera avanzando, infectando el tablero en sucesivos pasos, llegaría un momento en que todo el tablero quedaría infectado. La pregunta que quiero hacer es si es posible empezar con alguna configuración que contenga menos de ocho casilleros infectados pero que, sin embargo, termine infectando todo el tablero.

Le sugiero que se siente con paciencia y ganas de pensar. Empiece con algunos casos particulares y fíjese si puede infectar ***todo*** el tablero. Por ejemplo, fíjese qué sucedería si usted tuviera tableros de 3×3 o de 4×4.

Solución

Primera aproximación: ¿hará falta que haya una casilla infectada en cada fila y en cada columna para que al final quede *todo* el tablero infectado?

Intuitivamente, eso parece cierto (y le sugeriría que le dedique un tiempo a pensarlo, proponiéndose algunos ejemplos para decidir si usted está de acuerdo o no).

Sigo. Fíjese lo que sucede si la posición inicial de casillas infectadas es la siguiente:

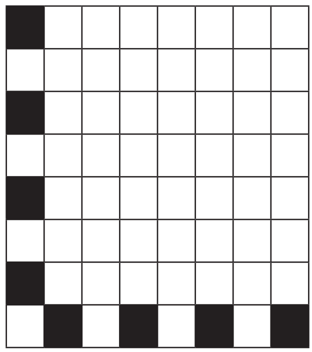


Figura 4

Avance usted empezando desde la Figura 4, y va a descubrir que queda <u>***todo***</u> el tablero infectado.

Moraleja: la conjetura *es falsa*. Hay muchísimas posiciones iniciales que, si bien no tienen al menos una casilla infectada por cada fila y columna, terminan con ***todo*** el tablero infectado.

Si me permite, le propongo que vea usted por su cuenta qué es lo que puede descubrir además de las configuraciones que se ven en las figuras 2 y 4, respectivamente.

Ahora, me parece pertinente formularle la siguiente pregunta: ¿se podrá empezar con *menos* de *ocho* casillas infectadas y, sin embargo, terminar *invadiendo* **todo todo** el tablero? No quiero escribir aún la respuesta. En todo caso, me gustaría *deducirlo* junto con usted.

Para hacerlo, quiero recurrir a un argumento que los matemáticos usamos mucho y que por eso me importaría exhibirlo acá. Pero necesito que usted me siga. Si no entiende algo, pare y vuelva para atrás… Créame, no hay nada que usted no pueda entender: si lo entiendo yo, lo tiene que poder entender usted también. Más aún: el placer de pensar estos problemas reside en *descubrir* tipos de argumentos que no solo sirvan para este ejemplo particular, sino que puedan funcionar en otros casos. De eso se trata.

Para empezar, me quiero poner de acuerdo con usted en algunos nombres. Por ejemplo, fíjese en la Figura 5. El área infectada hasta aquí es de tres casillas, y el perímetro (o sea, si uno suma todos los lados del área infectada) resulta ser 12. No me crea porque lo digo yo: haga la cuenta. Fíjese que si usted suma los lados de cada uno de los cuadraditos infectados, llega a 12. (Es que cada uno de los tres cuadraditos tiene cuatro lados, y como no tienen aristas comunes, el número total resulta ser 12).

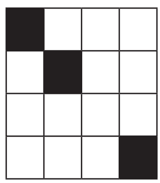


Figura 5

Ahora avanzo un paso más. De la Figura 5 pasamos a la Figura 6, donde aparecen otros casilleros infectados.

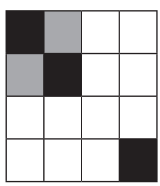


Figura 6

Claramente, el área aumentó: hay más casilleros infectados. Pero, ¿aumentó el perímetro? Haga la cuenta usted sola/solo primero.

Tal como usted advirtió (si es que se tomó el trabajo de hacerlo), el perímetro *no varió.* Sigue siendo 12.

Pensemos juntos: para *infectarse*, una casilla tiene que tener o bien dos, o tres o cuatro casillas a sus costados que ya estén infectadas. Si tiene dos casilleros infectados a sus costados, esos dos lados quedarán absorbidos en el área infectada, pero el perímetro *no aumentará.* Fíjese en las figuras 7 y 8.

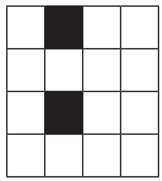


Figura 7

Aquí se ve que hay una casilla que está a punto de infectarse. Los dos lados (el de arriba y el de abajo), que forman parte del perímetro en este momento, van a ser reemplazados por los dos costados (derecho e izquierdo) de la nueva casilla infectada. Es decir, el perímetro, que antes de la infección es de ocho, seguirá siendo *ocho* cuando el proceso haya terminado, como se ve en la figura siguiente (lo invito a que cuente usted también por las suyas).

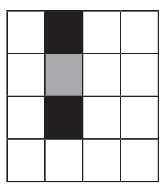


Figura 8

La moraleja es que el área aumentó, pero ¡el perímetro no! Sigue siendo *ocho*. Si, en cambio, hay una casilla que tiene tres o cuatro infectados a sus costados, el perímetro sí se va a modificar: *se va a reducir*. (Una vez más, en lugar de leer lo que sigue, intente usted primero.)

Vea este ejemplo de las Figuras 9 y 10:

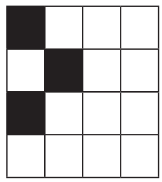


Figura 9

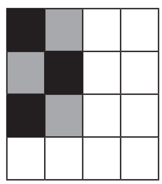


Figura 10

En este caso, en la Figura 9, el perímetro es 12, pero al infectar el tablero en el primer paso, el perímetro se reduce a 10. Es que la casilla de la segunda fila, segunda columna, tiene tres lados que forman parte del perímetro antes de la infección, pero una vez infectada, esos tres lados quedan absorbidos, y solo se agrega uno a la nueva área. Se pierden dos unidades y, entonces, en lugar de 12, el perímetro ahora es de 10 (Figura 10).

Por lo tanto, luego de estos ejemplos, la/lo invito a que deduzca conmigo lo siguiente: en cada paso del proceso infeccioso, el perímetro no puede aumentar. A lo sumo, puede que se reduzca, pero *lo que es* ***seguro es que ¡no aumentará!***

Falta poco para el final. Como vimos recién, el perímetro no puede aumentar, y al finalizar el proceso —cuando *todo* el tablero esté infectado— el perímetro será de 32 (el tablero es de 8×8, y si hace las cuentas verá que la suma de todos los lados del área infectada resulta ser 32).

Si uno empezara con menos de ocho casillas infectadas, por ejemplo, con siete, el perímetro a lo sumo será de 28[13]. Pero como uno pretende que al final quede todo el tablero infectado, ese perímetro tendrá que ser de 32. ¡Y eso no es posible! La única manera de terminar con 32 es empezar con ocho casillas infectadas… o más. ¡Pero nunca menos!

Y si uno empieza con ocho, tiene que procurar que no tengan lados comunes. Esto prueba lo que queríamos: ¡hacen falta por lo menos ocho casillas infectadas si uno quiere terminar con todo el tablero infectado!

Final, muy importante. Ese es el tipo de argumento que usamos mucho los matemáticos. Como usted advierte, si bien todas las posibles configuraciones con las que uno puede empezar son finitas… igualmente, son ¡muchísimas! Por lo tanto, vale la pena buscar algún otro tipo de argumento que sea convincente y que no requiera de *probar con todos los casos.* En este problema, lo que se puede usar entonces es *el perímetro del área infectada.* Ni bien uno advierte que en el proceso infeccioso ese perímetro ¡no puede aumentar!, ya tiene la batalla ganada, porque como uno quiere llegar a tener el tablero completo infectado, necesita que el perímetro termine siendo 32. Por lo tanto, no puede empezar con menos de 32. Y ese argumento lleva a la conclusión de que al principio tiene que haber ocho casillas infectadas, como queríamos demostrar.

---

13. Las siete casillas tienen que ser 'disjuntas', en el sentido de que no compartan ningún lado.

Y ahí reside la *belleza de la matemática*. Uno puede apelar a un argumento que en principio no parece tener nada que ver (en este caso, el perímetro del área infectada), pero que termina siendo un factor determinante en la demostración.

Podrá haber otras, pero concédame que la que acabo de presentar acá es verdaderamente *muy bonita*[14].

14. Carlos D'Andrea me preguntó: "¿Será verdad que si uno tiene una configuración inicial cualquiera, con ocho casillas infectadas 'disjuntas', entonces el tablero terminará *todo* infectado?". No sé la respuesta, y creo que es una buena oportunidad para poder avanzar un paso más con este problema.

Piratas

Quiero presentarle un juego que es conocido desde hace muchísimo tiempo con el nombre de "Juego de los Cinco Piratas". Yo elegí una de las múltiples variantes,[15] pero todas son esencialmente iguales: se trata de encontrar una estrategia que permita, cuando se cumplen ciertas reglas, '*ganar siempre*'.

Una vez conocido el 'reglamento' (por ponerle un nombre al protocolo que hay que seguir), el objetivo es que usted elabore un plan que sea óptimo. Claro, la pregunta que surge inmediatamente es: ¿qué quiere decir '*óptimo*' en este caso? Lo que significa es que si se presentara ante usted otra persona sugiriéndole que tiene una mejor estrategia, usted le mostraría que o bien es el mismo plan que el suyo, o bien que el suyo es mejor. Me explico.

Por supuesto, todo lo que sigue es *ficticio*, una historia creada ad hoc. Imagine que cinco piratas van en un barco navegando en alta mar con la idea de llegar hasta una isla en donde presumen que hay un tesoro.

15. La versión que elegí me la hizo llegar Billy Mosse, un estudiante de la Licenciatura en Matemática en Exactas (UBA). Mi gratitud hacia él y todo el grupo de personas que desde distintos lugares del mundo me ofrecen una fuente *inagotable* de problemas de este tipo. Apasionados, comprometidos, generosos… ¡gracias, Billy!

En el camino se tropiezan con otra embarcación. La asaltan y descubren que transportaba un cofre con 100 monedas de oro. Trasladan el cofre al barco de ellos y tienen que tomar una determinación: ¿cómo distribuirse las monedas?

Entre los piratas tienen establecido un 'orden' que depende de la antigüedad que lleva cada uno en su calidad de 'pirata'. Le voy a poner un número a cada uno: pirata 1, pirata 2, pirata 3, pirata 4 y pirata 5. Entre ellos saben que el pirata 1 es el de mayor experiencia, después sigue el pirata 2... y así hasta el pirata 5 (que sería el más 'nuevo').

El objetivo es encontrar una forma de dividir las 100 monedas entre los cinco pero *no* de cualquier forma, ni siquiera en forma equitativa. No. De lo que se trata es de que se cumplan estas reglas.

El pirata con mayor antigüedad (en principio, el pirata 1) es el primero en proponer una forma de distribuir las monedas. Esa propuesta es sometida a una votación. Si por lo menos el 50% de los votos la aprueba, se distribuyen las monedas tal como propuso ese pirata y listo.

Pero si esa propuesta *pierde la votación*, entonces el pirata que la formuló es 'tirado al agua por la borda', y ahora quien deberá formular una propuesta es el de mayor antigüedad entre los que quedaron. Y así seguirá el proceso, hasta que encuentren una estrategia que satisfaga *por lo menos* a la mitad de los piratas (¡incluyendo el voto del pirata que la formuló!).

Ahora, présteme atención a estos tres datos *muy importantes*:

a) La <u>primera prioridad</u> de cada pirata es permanecer vivo y arriba de la embarcación.
b) La <u>segunda prioridad</u> de cada uno es *maximizar* el número de monedas que reciba.
c) Por último, cada uno de ellos prefiere que haya la menor

cantidad de piratas posible arriba del barco, porque eso —en principio— le permitiría incrementar sus chances de recibir más monedas.

Con estas reglas, el primer pirata que tiene que formular una propuesta es el que lleva el número *uno*, ya que él es el más experimentado de todos.

Pregunta: Si tiene que cumplir con las reglas que describí, ¿cuál tuvo que haber sido el plan que diseñó y propuso para que fuera aprobado en la votación?

Le sugiero que relea *todas* las reglas y restricciones. Naturalmente, el pirata 1 será el primero en formular la propuesta, y si quiere sobrevivir, esta tendrá que ser votada por lo menos por la mitad de los piratas en el barco, ¡incluido él! Todos quieren sobrevivir y todos quieren conseguir la mayor cantidad de monedas posible.

Ahora sí, le toca a usted. Yo sigo acá abajo.

Antes de escribir una potencial solución, me interesaría ofrecerle algo para pensar. Supongamos que el pirata 1 hizo una propuesta y que cuando la puso a votación, perdió. Eso significa que lo tiraron del barco y que en él quedaron los piratas numerados del 2 al 5. Ahora, imaginemos que pasó lo mismo con las propuestas que hicieron tanto el pirata 2 como el pirata 3. Es decir, se llegaría a una situación en donde *quedarían solamente dos piratas arriba del barco: el cuatro y el cinco.*

¿Qué se le ocurre que ocurriría en este caso? (Y a los efectos de encontrar la solución del problema, le propongo que no avance en la lectura hasta no darse la oportunidad de pensar este caso particular.)

Fíjese que si quedaran los dos piratas con menor antigüedad, como el pirata 4 tiene mayor experiencia que el pirata 5, será él quien formule la propuesta. ¿Qué cree usted que va a proponer?

Lo que va a decir el pirata 4 es:

“La distribución que te propongo es que YO (pirata 4) me quedo con las cien monedas, y a vos no te doy nada”.

O sea, pirata 4 = 100, pirata 5 = 0.

¿Qué sucedería con esto? Cuando tengan que votar, claramente el pirata 4 va a votar por el SÍ y el pirata 5 va a votar por el NO, y eso hará *perder* al cinco, ya que en las reglas se establece que para que una propuesta sea aprobada tiene que conseguir *por lo menos la mitad de los votos*. Como son dos votos, y la mitad es uno solo, ese voto le garantizará al pirata 4 que su propuesta *tendrá que ser forzosamente aceptada*.

Ya sabemos entonces qué distribución habría en el caso de que en el barco hubiera nada más que dos piratas.

Ahora avancemos un paso más: supongamos que se llega a una situación en donde quedaron los piratas 3, 4 y 5 en el barco (lo que significa que las propuestas que oportunamente hicieron los piratas 1 y 2 fueron desechadas y que, como perdieron en las votaciones respectivas, fueron *expulsados* del barco y arrojados al agua).

Ahora bien: ¿qué tendría que proponer el pirata 3 para que su propuesta sea aceptada y no correr riesgo de que lo tiren al agua a él también? Como recién vimos que si quedaran los dos últimos al pirata 5 no le tocaría ninguna moneda, para que la propuesta que haga el pirata 3 tenga posibilidades de éxito, él necesitará que alguno de los otros dos (el pirata 4 o el pirata 5) le acepte su oferta.

Para lograrlo, lo que necesita es ofrecerle *una moneda* al pirata 5, y ya con eso se garantiza que el pirata 5 le dé el voto. ¿Por qué? Es que si los piratas 4 y 5 votan negativamente, entonces el pirata 5 sabe que, cuando queden ellos dos, el cuatro no le va a dar nada. Luego, ¡le conviene aceptar la propuesta del pirata 3 para tener, por lo menos, una moneda en el reparto!

La propuesta del pirata 3 entonces sería esta:

Pirata 3: 99 monedas. Pirata 4: 0 monedas. Pirata 5: 1 moneda.

De esta forma, el pirata 3 se garantiza el voto de 5, y listo.

Estoy seguro de que estos dos casos que planteé (si quedaran dos o tres piratas en el barco para tomar la decisión sobre las monedas) le da una idea de cómo elaborar la estrategia. Avancemos un paso más.

Supongamos que quedaran en el barco cuatro piratas. *Forzosamente tienen que ser* los piratas numerados desde el 2 hasta el 5. El pirata 1 tiene que haber hecho una propuesta que fue votada negativamente y, por lo tanto, fue arrojado del barco. ¿Qué tendría que proponer el pirata 2 para sobrevivir? (¿No tiene ganas de pensar usted por su lado y, en todo caso, *que revisemos juntos su respuesta un poco más adelante*?)

Los piratas 3, 4 y 5 *saben* cuál sería la distribución de las monedas en el caso de que quedaran ellos tres:

$$(99,0,1) \qquad (*)$$

(donde las 99 son para el pirata 3 y la restante para el pirata 5). Es decir, el pirata 4 sabe que si quedaran en el barco nada más que tres piratas, a él no le van a ofrecer nada.

Usando esta información, le tocaría al pirata 2 hacer su oferta. Para poder conseguir el voto que necesita, le alcanza con *convencer* a solamente uno de los otros tres (el 3, el 4 o el 5). ¿Por qué? Es que él necesita nada más que un voto entre esos tres, porque sumado al de él mismo ya tendría los dos que le hacen falta para llegar al 50%. ¿Qué tiene que hacer? Le basta con fijarse en la distribución (*) que quedaría si él no estuviera allí y ver cómo puede *seducir* a alguno de los otros tres para que le den el voto. El pirata 2 descubre que si él le ofreciera al pirata 4 ***una sola moneda*** eso debería ser suficiente para convencerlo de que le dé el voto. Es que si quedaran el 3, el 4 y el 5, en la distribución ideal, al pirata 4 no le tocaría nada. ¿Qué debería hacer el pirata 2, entonces? Ofrecer esta distribución:

(99,0,1,0)   (**)

donde el pirata 2 se queda con 99 de las 100 monedas y la restante se la ofrece al pirata 4. La conclusión es que si quedaran todos los piratas salvo el número *uno*, entonces la distribución (**) es la *ideal* u óptima (respetando las reglas preestablecidas, claro está)[16].

Dicho esto, ahora estamos en condiciones de abordar el caso 'final'. Creo que usted cuenta con las herramientas para poder encontrar ahora la propuesta que tiene que hacer el pirata 1, de manera tal que él obtenga la *mayor* cantidad de monedas posible y que su estrategia de distribución ¡sea votada por lo menos por el 50% de los participantes!

Para que eso suceda, necesita seducir a *dos* de los otros cuatro piratas. ¿Cómo hacer? Al mirar la distribución (**), él advierte

---

16. Uno podría preguntarse (como me observó Juan Sabia): ¿por qué tiene que ser la oferta del pirata 2 la que escribiste, y no esta: (99,0,0,1)? (y como siempre, le propongo que piense usted la respuesta, como Juan me hizo pensar a mí). Sigo: es que si así fuera, para que se cumpla la condición (c) escrita más arriba, el pirata 5 tendría que decir que no para forzar a que salte al agua el pirata 2 y queden menos piratas arriba del barco. Es decir: el pirata 5 se negaría no porque piense que conseguiría más monedas (de hecho, si quedaran 3, 4 y 5 a bordo, el pirata 5 obtendría igualmente una sola moneda), sino que está obligado a hacerlo para que se cumplan las reglas establecidas.

que a los piratas 3 y 5 no les tocaría ninguna moneda. Es decir, si el pirata 1 no estuviera en el barco, al pirata 3 y al pirata 5 no les correspondería nada. Lo que esto sugiere es que él debería ofrecerles una moneda a cada uno para que le den el voto y listo. De esa forma, conseguiría más del 50% de los votos que le hacen falta. Entonces, su propuesta es:

(98,0,1,0,1)

De esta forma, al pirata 1 le corresponderían 98 de las 100 monedas, y las otras dos se distribuirían entre el 3 y el 5.

Moraleja

Como usted advierte, si uno empezara directamente con cuál debería ser la propuesta del pirata 1, es muy poco probable que a uno se le ocurra el plan, aunque más no sea porque para llegar hasta él fue necesario recorrer todas las ***potenciales*** instancias intermedias. Al pensar qué pasaría si cada uno de los tres primeros piratas (1, 2 y 3) no estuvieran en el barco, e incrementar gradualmente el número de piratas, se termina poco menos que *forzando la estrategia necesaria* que garantiza que se cumplan las reglas: lograr ofrecer una distribución que los otros piratas *no puedan rehusar*, salvo que prefirieran no tener monedas.

Esto no solo resuelve el problema sino que muestra que la estrategia obtenida es la óptima. El mismo camino que usamos sirvió para los dos objetivos: encontrarla y verificar que era la mejor.

Un agregado

Antes de terminar —y para aprovechar estas ideas que quedaron escritas— trate de *generalizar* el problema. ¿Qué pretendo decir con 'generalizar'? Piense qué sucedería si en lugar de cinco piratas hubiera 10 o 15 o 20. En fin, elija usted qué dirección tomar y ofrézcase a usted misma/mismo la alternativa de seguir pensando. En todo caso, las ideas centrales están expuestas, y estoy seguro de que usted ya detectó el 'patrón' que servirá para encontrar cualquiera de estas respuestas.

Alicia en la Convención de Lógicos

El siguiente problema de lógica es una suerte de desafío intelectual, una invitación a vestirse de detective. Voy a hacer una descripción de las pruebas que usted encontrará en el momento de entrar en la 'habitación' virtual en donde se produjo el episodio, y usted tendrá que valerse de sus recursos intelectuales para descubrir lo que sucedió (o sucederá). Acá voy.

Hay una logia de personas dedicadas a la lógica que se reúne periódicamente. Son muchos. Algunas veces se juntan a la vista del público. Otras veces lo hacen en forma más discreta, privada, si usted quiere.

Justamente en una de estas reuniones a las que es imposible acceder salvo que uno tenga el título que lo valide, el Maestro de todos los maestros hace sentar a todos los concurrentes formando un círculo. Este mismo maestro le coloca una vincha en la cabeza a cada uno. Lo hace en forma discreta, de manera tal que, cuando haya terminado con el proceso, todos puedan ver el color de la vincha que tienen puesta los demás, *salvo* (como era esperable) el color de la propia.

Hasta acá, no tiene nada de novedoso. De hecho, usted debe de conocer múltiples variantes con sombreros, números, cartulinas, etc. Pero, espere: faltan las reglas, y verá que hay algunas cuestiones que son diferentes de las que ha leído hasta acá. Por lo menos eso fue lo que me ocurrió a mí. Lo que SÍ me interesa recalcar es que, como todos los concurrentes son lógicos, se supone que tienen la mente preparada como para que *todos los detalles sean muy cuidados*, y nadie diga nada que después no pueda respaldar. Es tal el nivel de tensión que se vive en el lugar que el Maestro les advierte: 'Una vez que les diga las reglas, cualquiera de ustedes (o sea, todos) debería poder resolver el problema que les voy a plantear. Es decir, ¡no hay nada que adivinar: todo se puede deducir!'.

Dicho esto, es fácil descubrir (simplemente mirando alrededor) que las vinchas eran de múltiples colores. No escribo acá ni el número de colores diferentes ni el número de participantes de la reunión porque resulta irrelevante a los efectos del problema. El Maestro les dice que periódicamente, una vez por minuto, se escuchará un timbre. Cuando uno de los participantes tenga suficientes elementos como para poder determinar qué color de vincha tiene, deberá esperar hasta el momento en el que suene de nuevo el timbre. En ese instante, deberá levantarse y retirarse del círculo en forma totalmente discreta, sin hacer ningún tipo de comentario. Como queda dicho: todo lo que tiene que hacer es levantarse e irse.

Naturalmente, nadie puede usar un espejo, ni cámara, ni nada que sirva para enviar un mensaje al resto de los participantes. Cada uno, cuando toma la decisión de irse, sabe que es *personal* y no involucra a nadie más que a sí mismo (o misma).

Por otro lado, si alguno de los concurrentes aun *pudiendo determinar qué color de vincha tiene* <u>*no*</u> *lo hiciere, será invitado a retirarse en el momento en que suene el timbre correspondiente y calificado como IMPOSTOR.* De la misma forma, si hubiera alguien que decidiera <u>retirarse antes de tiempo</u> tendrá impedido el camino y se la/lo invitará a que permanezca en el lugar hasta que las condiciones 'lógicas' hayan cambiado lo suficiente como para que pueda levantarse y salir del círculo.

Algo más (y esto es <u>muy</u> importante). Recuerde que el Maestro *les **aseguró** a todos que la distribución de colores que él había hecho le permitiría a cada uno **deducir** el color de la vincha que tenía puesta*.

Ahora le toca a usted. ¿Cómo puede ser que con estos datos *todos* puedan determinar qué color de vincha tienen puesto? ¿Cómo hicieron?

Idea para pensar la respuesta

Hay varias formas de abordar este problema, pero yo prefiero empezar por algo muy importante. Cuando el Maestro (de todos los maestros) les dijo que la distribución de los colores que él había hecho debería permitirles a *todos* poder determinar el color de la vincha propia, está diciendo algo en forma muy sutil. Suponga que hay *una sola vincha de color rojo* (por elegir un color cualquiera). Usted se da cuenta de que la persona que tiene ese color de vincha ¡no tiene manera de poder deducirlo! No importa lo que pase alrededor de él (o ella), no hay alternativa: nunca podrá saberlo. ¿Qué se deduce de esto? Si el Maestro les *aseguró* a todos que una persona que tenga capacidad lógica debería poder deducir el color que tiene, eso inmediatamente *fuerza* a que cada color aparezca *por lo menos* ***dos veces***.

¿Cómo utilizar estos datos? ¿No quiere pensar usted qué implicaciones trae este hecho? Fíjese que si usted estuviera sentado allí, mirando los colores de vincha de todos los que tiene alrededor, y de pronto descubriera que hay una sola persona que usa una vincha de color rojo, esto le permitiría a usted, sí, a usted, deducir que *su* color de vincha ***tiene que ser rojo también***, porque sabemos que no puede haber un color que aparezca una sola vez.

¿Qué más tiene que suceder, entonces? Si usted ve que hay una persona que tiene un determinado color y que es la única que lo usa, cuando llegue el momento de escuchar el próximo timbre, usted tendrá que levantarse e irse. ¡Pero no solamente usted! Porque la otra persona estará en la misma condición que usted, estará viendo que usted es el único que tiene ese color (que en el párrafo anterior propuse que fuera rojo). Es decir que, cuando suene el timbre, no se levantará usted solo, sino que el otro participante que tenga rojo *también se levantará y se irá*. ¡Se irán los dos!

¿Algo más? Sí. Uno sabe entonces que si hay un color que aparece *exactamente dos veces*, en el momento en el que suene el primer timbre se irán las dos personas que lo tienen. A partir de allí, *los colores de vincha que queden tienen que estar en la cabeza de* ***por lo menos*** *tres personas*. No pueden aparecer ni una ni dos veces.

¿Y ahora? Suponga que usted ve que dos personas tienen color 'rojo' (por poner un ejemplo cualquiera) y nada más. Es decir, hay solamente dos personas que tienen vinchas de color rojo. ¿Qué dice esto? Lo que dice es que ¡usted!, sí, usted tiene que tener vincha de color rojo. ¿Por qué? Porque si esas fueran las únicas dos personas que tienen vinchas de color rojo, ¡se tendrían que haber ido al escuchar el primer timbre! Si no se fueron, es porque tiene que haber alguien más que tenga vincha de color rojo, y como usted revisa los colores de todos los restantes y ***no puede encontrar al tercero***, eso significa que el tercero ¡es usted! Corolario: cuando se escuche el timbre por segunda vez, ustedes tres, los tres que tienen vinchas de color rojo, se levantarán y se irán. ¿Por qué los tres? Porque las otras dos personas que también tienen color rojo analizarán la situación igual que usted y, por lo tanto, se levantarán y se irán al sonar el próximo timbre.

A partir de ahora, entonces, los colores que pueden estar usando las personas que se quedaron tienen que estar —por lo menos— en las cabezas de cuatro participantes: no pueden ser ni uno, ni dos, ni tres... Si no, se hubieran tenido que ir al sonar el timbre la primera o la segunda vez.

Y ahora, fíjese lo que sucede si hubiera *exactamente cuatro* que tienen vinchas de color rojo. Supongamos que usted es uno de ellos. Usted *ve* que hay tres que tienen vinchas de color rojo. Usted sabe, entonces, que al sonar el segundo timbre los tres deberían levantarse e irse. Cuando eso no sucede, usted se pregunta: ¿por qué no se habrán ido si hay *nada más que tres vinchas de color rojo (que son las que ve usted)?* Bueno, no se fueron porque ¡hay una vincha roja más! Como usted no la ve, esa cuarta vincha roja ¡la tiene usted! Y en ese caso, al sonar el *tercer* timbre, los cuatro se levantan y se van.

De esta forma, yo podría continuar si hubiera cinco o más vinchas del mismo color. Cada persona esperará hasta que todas las personas de un determinado color se levanten y se vayan. Si se van, listo, pero si no se van, eso significa que alguien tiene ese mismo color, y al siguiente timbre se levantarán todos y se irán.

Para terminar, cuando usted vea que *quedan vinchas de un solo color,* usted *deducirá* que la suya *también* tiene que serlo. ¿Por qué? Porque, como habíamos visto al principio, no puede ser que haya una sola vincha de un único color. Luego, usted ¡tiene que tener el mismo color que el resto! Cuando suene el próximo timbre, se irán todos.

Moraleja

Esta historia no es nueva, ni me pertenece[17]. Pero me resulta fascinante tener que apelar a nuestra capacidad para hilvanar argumentos, pensar diferentes escenarios, releer las reglas y descartar los casos imposibles. Casi como la tarea de un detective.

17. Si usted leyó la historia, se debe de estar preguntando dónde aparece Alicia. Es que quise respetar el título original del problema. Hay muchísimas variantes en internet que podrá encontrar si lo 'googlea' con ese nombre. Una se puede consultar acá: web.mst.edu/~wjcharat/alice.pdf

Fuerte atentado a la intuición

La siguiente historia es verdaderamente fascinante y fuertemente *antiintuitiva*. Lea el planteo y piense qué es lo que haría usted. La voy a escribir como si fuera un cuento. Acá va.

> Es viernes. Usted acaba de comprar una casa y se comprometió a entregar el dinero en efectivo tres días después, el lunes. Para conseguirlo, ha intentado durante meses vender su propiedad y lo quiso hacer sin intermediarios. Pero ahora algo cambió. El aviso que puso en el diario la última semana dio resultado, y después de haber filtrado las diferentes ofertas se quedó con dos. Hay dos candidatos a comprar su casa que están a punto de hacerle una oferta. Voy a llamar A y B a las dos personas que son los potenciales compradores. Como era esperable, 'algo' tenía que pasar: el señor A le dijo que le haría una oferta al día siguiente (sábado), mientras que B le hablaría por teléfono el domingo. Eso no sería ningún problema: la dificultad se plantea porque <u>ninguno de los dos puede esperar</u>. El señor A le dijo que él también está presionado por el tiempo y que necesita tener decidido el tema de su casa lo más rápido posible. Por lo tanto, le confirmó que le haría la oferta el sábado, pero ¡quiere tener la respuesta el mismo día! Y lo notable es que B <u>también quiere lo mismo</u>, pero para el día domingo.

> Lo tienen acorralado. Usted ya hizo las investigaciones pertinentes, sabe que ambos son personas serias y siempre han cumplido con sus compromisos verbales. ¿Qué hacer entonces? Además, ambos tienen los fondos suficientes para concretar la operación en el acto. ¿Le convendrá aceptar directamente la oferta de A el sábado y ya no tener su casa disponible para siquiera escuchar a B? ¿Y si B hiciera una oferta mejor? Usted se la perdería… ¿Y si le dice que no a A suponiendo que B mejoraría el número de A, y después resulta que no?

Ahora, una pausa. A usted no se le escapa que, más allá del ejemplo de una casa, este es un dilema que se repite o se ha repetido muchísimas veces; puede que le haya pasado a usted o casi con seguridad usted conoce a alguien que tuvo que sortear un problema de ese tipo. ¿Qué hacer? En todo caso, me permito preguntarle: "¿Usted qué haría?".

Pareciera que a uno no le queda más alternativa que elegir basándose en el 'gusto' o en una 'corazonada'... algo así como dejar que sea el *azar* el que tome la decisión. Uno tiene el 50% de posibilidades de elegir la oferta más conveniente, o sea, la probabilidad de elegir la oferta más alta es ½.

Naturalmente, uno siempre tiene el recurso de tirar una moneda y elegir. O apelar a la intuición y confiar en las percepciones propias. Todo bien, pero, ¿no habrá alguna forma de *mejorar* este 50%? ¿No se podrá *mejorar* esta probabilidad de ½? A priori, pareciera que no... ¿A *usted qué le parece?*

Lo que voy a hacer ahora es mostrar que uno *puede hacer algo más*, algo que efectivamente *mejore* ese 50%, y es algo que de antemano parece verdaderamente increíble. Sígame por acá. Yo lo he probado con mis alumnos, mis amigos, incluso con mi familia, y nos hemos divertido muchísimo discutiendo caso por caso. De todas formas y antes de avanzar quiero darles el crédito a quienes escribieron los trabajos en los que me voy a basar: son dos matemáticos. Uno es belga, F. Thomas Bruss, de la Universidad Libre de Bruselas, y el otro, el norteamericano Thomas Cover, de la Universidad de Stanford. *Ellos* deberían ser los *autores* de este texto, y no yo. En todo caso, soy nada más que un *comunicador* de algunas de sus ideas.

Lo que Cover y Bruss hicieron fue elaborar una ***estrategia*** que —como prometí— mejora el 50%. Supongamos que *A* y *B* son los dos números que representan las ofertas que hicieron (o que van a hacer) las personas del mismo nombre. Digamos que A es quien iba a hacer la oferta el sábado y *B* la del domingo. Para fijar las ideas, supongamos que cada número está escrito en un papel distinto, pero que —obviamente— usted no los puede ver.

Acá es donde aparece *la novedad*. Lo que usted tiene que hacer es elegir un número cualquiera Z.

Usted se/me preguntará: ¿quién es Z? Bueno, Z debería ser el número que usted cree que vale su casa. Es decir: si alguien viniera y le pidiera que usted diga cuánto *cree* que vale su casa, *ese número particular* debería ser Z, pero en realidad, *a priori*, Z es un número cualquiera.

Ahora, cuando ya tiene el número Z elegido, da vuelta el cartón que contiene el número A. Si A es mayor (o igual) que el número Z que usted eligió, entonces se queda con la oferta de A. En cambio, si Z es mayor que A, entonces usted elige *B*.

Como se advierte, la estrategia es muy sencilla. En todo caso, lo que habría que demostrar es que esto *mejora* el 50% de posibilidades originales al elegir al azar (compruébelo leyendo lo que escribí con el título "*Demostración*").

Pongamos un ejemplo. Supongamos que $A = 70$ y $B = 90$. Claro, usted no lo sabe, porque no puede ver los números que figuran en los papeles (así como no podría conocer las ofertas que van a hacer por su casa).

Por supuesto, el número Z que usted eligió puede que:

a) sea menor o igual que 70;
b) sea mayor o igual que 90;
c) esté entre 70 y 90.

Estas son las tres posibles alternativas. Ahora, analicemos juntos lo que sucede en cada caso dependiendo de dónde *cayó* el número Z. Para hacer más fácil el análisis, voy a suponer que Z tomó uno de estos tres valores:

a) Z = 60
b) Z = 100
c) Z = 80

Como usted advierte, en el caso (a), Z es menor que 70. En el caso (b), Z es mayor que 90, y por último, en el caso (c), Z está entre 70 y 90. O sea, este ejemplo cubre todas las posibilidades.

Caso (a). Cuando Z = 60, de acuerdo con lo que indica la estrategia, usted tiene que *elegir* el número A, que es 70. En este caso, entonces, *¡usted se pierde la posibilidad de elegir un número más grande!* En el caso de la casa, sería equivalente a que usted hubiera elegido la oferta que A le hizo el sábado (70) sin esperar a la que le habría de hacer B (90) el domingo, que habría sido mayor. Cuando esto sucede, uno termina eligiendo lo que **no le conviene**.

Caso (b). Cuando Z = 100, al dar vuelta el número A (70) y comprobar que 100 es mayor que 70, uno elige la oferta B = 90. En este caso todo funciona bien porque usted se queda con la mejor de las dos ofertas. Sería equivalente a haber esperado la oferta del domingo y comprobar que lo que le habría de ofrecer B (90) era una cifra mayor que la que le ofreció A el sábado (70).

Caso (c). Cuando Z = 80, entonces usted *también elige* 90, o sea, se queda, una vez más, ¡con la mayor oferta de las dos! Es que como Z (80) fue mayor que A (70), la estrategia le indicó que usted debía quedarse con B. Al hacerlo, ¡ganó!

Una observación (que me parece importante): usted advierte que la estrategia le hubiera servido para elegir la mejor de las dos ofertas (sea la de A o la de B) si el número Z que usted eligió de antemano está 'entre' los dos (mayor o igual que uno y menor o igual que el otro).

Por supuesto, esto **no demuestra** que es mejor utilizar este método que elegir al azar (vea la demostración que sigue), pero sí da una idea de lo que conviene hacer. Entonces, cuando tenga que optar entre dos ofertas que aún no conoce, trate de imaginar un número que esté en el medio de dos posibilidades. Al azar, la probabilidad de que usted elija la mayor es de ½. Usando la *estrategia* que exhibí antes, esa probabilidad aumenta. No sabemos en cuánto, pero seguro que aumenta[18], y de esta forma usted incrementa sus posibilidades de elegir la más conveniente.

Por último, y me parece bien enfatizarlo una vez más, la matemática *ayuda* a mejorar lo que la intuición dicta. Es decir, uno elegiría de acuerdo con la impresión que uno tiene en el momento, una *corazonada*, o directamente al azar. Y lo que parecía/parece inalcanzable (darse a uno mismo una chance mayor al 50%), sin embargo, es posible.

---

18. Si A = B, entonces la probabilidad de elegir la mejor de las dos ofertas no mejora, sino que sigue siendo igual a ½.

Demostración

Esta es la demostración de que la estrategia mejora la probabilidad del 50% que se obtiene si uno elige al azar entre las dos ofertas.

Entre los dos números A y *B* habrá alguno de los dos que será el menor. Lo llamo *m*. De la misma forma, llamo *M* al mayor de los dos. Claramente *m* es más chico (o igual) que *M*. Pero ahora, cuando usted elija Z, ¿qué posibilidades habrá al comparar Z con los otros dos números? Pueden darse tres situaciones:

a)	m	M	Z
b)	Z	m	M
c)	m	Z	M

La estrategia dice que primero hay que dar vuelta el número A. Si es mayor que el Z que usted eligió, quédese con él. En cambio, si *A* es menor que Z, elija *B*. Así de fácil.

Analicemos ahora cada caso por separado.

Caso (a). Como el número Z es *mayor* que el máximo entre A y B, usted elegirá B, porque Z seguro que es mayor que A.

Caso (b). Como ahora Z es *menor* que el mínimo de los dos, usted tendrá que elegir A, porque cuando se conozca, *seguro* que es mayor que Z.

Caso (c). Aquí está la *clave.* Fíjese que Z es un número que está entre el *mínimo* y el *máximo* entre A y B. Suponga que A es el más chico de los dos. Por lo tanto m = A. Entonces, como su número Z es *mayor* que este mínimo (A), en el momento en que lo conozca, elegirá B y, por lo tanto, se quedará con el mayor de los dos. Si A fuera el *mayor* de los dos, entonces su número Z será *menor* que A y, por lo tanto, la estrategia le indica que ¡se tiene que quedar con A, porque es *mayor* que su número! Y hará muy bien, porque se quedará con el mayor de los dos números.

Resumen: En los casos (a) y (b), usted puede *ganar* o *perder*, pero como en el caso (c) usted gana siempre, podemos afirmar que es preferible usar esta estrategia a no tener ninguna y dejar que el azar decida.

Ahora exploremos juntos lo que pasa con las respectivas probabilidades, que voy a llamar *a*, *b* y *c*. Es decir,

- llamo "*a*" a la probabilidad de que el número Z que usted elija sea mayor o igual que M (y por lo tanto de m, ya que si es mayor o igual que el máximo entre los dos, también es mayor o igual que el mínimo entre ambos);
- llamo "*b*" a la probabilidad de que el número Z sea *menor o igual* que m (y, por lo tanto, también lo será de M);
- por último, llamo "*c*" a la probabilidad de que el número Z esté ubicado *entre* m y M[19].

Quiero hacer algunas observaciones junto con usted.

Por un lado, la *suma* de los tres números *a*, *b* y *c* ***tiene que ser uno*** (a + b + c) = 1, porque alguno de los tres casos *tiene* que suceder.

Por otro lado, quiero que estimemos la probabilidad de que

19. Como escribí antes, si los dos números A y B son iguales, entonces el mínimo *m* y el máximo *M* también lo son, y ese sería el único caso en el que *c = 0*.

usted *gane*, o sea, de que elija la *mayor* de las dos ofertas. Voy a llamar "*w*" a esa probabilidad. ¿Cómo la calculo? Así[20]:

$$w = (a/2) + (b/2) + c = (a+b+c)/2 + (c/2) = ½ + (c/2)$$

Y esto muestra que la probabilidad *w* es entonces *mayor o igual* que ½ (ya que no importa cuál sea el número *c*, siempre es mayor o igual que 0).

Por supuesto, uno elige un número que tenga alguna relación con el objeto en cuestión. O mejor dicho, puede elegir lo que quiera, pero sus posibilidades de mejorar su probabilidad aumentan cuanto mejor "lea" la situación.[21]

Para terminar, quiero exhibir otra forma de que se puede me-

---

20. La probabilidad se calcula así porque uno tiene:

a = probabilidad de que Z sea mayor o igual que A y B (ya que es mayor o igual que *M*)

b = probabilidad de que Z sea menor o igual que A y B (ya que es menor o igual que *m*)

c = probabilidad de que Z esté entre A y B

Por un lado, es claro que $a + b + c = 1$ (porque alguno de los tres casos tiene que suceder). Por otro lado, en los casos (a) y (b) uno tiene la mitad de las posibilidades de "acertar", dependiendo de si A es mayor que *B*, o al revés. Por eso, la probabilidad es la mitad en cada caso. Sin embargo, en el caso (c) uno *gana seguro*, porque elige *siempre* el mayor de los dos números.

21. Existen diversas referencias bibliográficas para esta demostración: F. Thomas Bruss, "Unerwartete Strategien", *Mitteilungen der Deutschen Mathematikery-Vereinigung*, Heft 3, 6-8, 1998; F. Thomas Bruss, "Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen", *Spektrum der Wissenschaft*, Juni-Heft, 106-107, 2000; Thomas M. Cover, "Problem 2.5: Pick the largest number", *Open Problems in Communication and Computation*, Springer Verlag, Nueva York, 1987; F. Thomas Bruss, *Playing a Trick on Uncertainty*, Université Libre de Bruxelles.

jorar la probabilidad sin necesidad de dar una explicación "tan matemática".

Si el número Z que elegí no está *entre* A y *B*, entonces la probabilidad al elegir cualquiera de las dos ofertas no varía; ¡sigue siendo ½! En cambio, si Z está *entre* los dos (entre A y *B*), entonces la estrategia me indica que elija la *mejor* de las dos ofertas, o sea, el número más grande entre A y *B*.

Esto es muy importante. Si usted tiene una buena *percepción* de lo que cree que es el valor de la casa (o cuál debería ser el número que la cuantifique), eso le va a permitir ubicarse cerca de los valores A y B. Si además usted logra ubicarse entre los dos (aunque no los conozca), ese *valor agregado*, *ese* **dato** que le agrega su percepción, le va a permitir también aumentar la probabilidad de elegir la mejor de las dos ofertas... ¡aunque no las conozca!

Salvo que los dos números (A y B) sean iguales, la probabilidad de que Z esté *efectivamente* entre los dos —que llamé *c*— *no es nula*, y de esa forma uno logra mejorar el número ½ con el que había empezado originalmente... ¡y eso era *exactamente* lo que queríamos!

El trabajo de Bruss y Cover fue muy comentado y, además, *reconocido*. Creo que ahora se entiende por qué: lograron elaborar una estrategia que *mejora* la que provee el azar. No es poco.

Cuatro mujeres, el puente y la única linterna

El problema que sigue requiere *planificar una estrategia*. No es difícil, pero tampoco trivial. Eso sí: no tiene *trampas*. Es un ejercicio muy conocido en el mundo de aquellos que *juegan* a planificar e inventar caminos donde en apariencia no los hay. Y tiene el atractivo extra de que permite *entrenar* al cerebro. Acá va:

Hay *cuatro* mujeres que necesitan cruzar un puente. Las cuatro empiezan *del mismo lado* del puente. Tienen solo 17 minutos para llegar al otro lado.

Es de noche y tienen *una sola linterna*. No pueden cruzar más de *dos de ellas* al mismo tiempo, y cada vez que hay una (o dos) que cruzan el puente, *necesitan llevar la linterna*. Siempre.

La linterna tiene que ser transportada por cada grupo que cruza en cualquier dirección. No se puede 'arrojar' de una costa hasta la otra. Eso sí: como las mujeres caminan a velocidades diferentes, cuando dos de ellas viajan juntas por el puente, lo hacen a la *velocidad de la que va más lento*.

Los datos que faltan son los siguientes:

Mujer 1: tarda 1 (un) minuto en cruzar
Mujer 2: tarda 2 (dos) minutos en cruzar

Mujer 3: tarda 5 (cinco) minutos en cruzar
Mujer 4: tarda 10 (diez) minutos en cruzar

Por ejemplo, si las mujeres 1 y 3 cruzaran de un lado al otro, tardarían 5 minutos en hacer el recorrido. Luego, si la mujer 3 retorna con la linterna, en total habían usado 10 minutos en el trayecto.

Con estos elementos, le propongo que elabore una *estrategia* que sirva para que las cuatro mujeres puedan cambiar de orilla usando exactamente los 17 minutos que están permitidos.

Solución

Me gustaría estar junto con usted para poder conversar sobre los distintos caminos y alternativas que fuimos usando ambos. Digo esto porque está claro que la respuesta no se me ocurrió de entrada, ni siquiera en poco tiempo. Me llevó un buen rato de 'prueba y error' hasta que, al intentar de tantas formas diferentes, llegué a un lugar en donde descubrí dos *claves*. Pero me estoy apurando. Acompáñeme por acá.

Si usted llegó a la respuesta por su cuenta, verá que *su* estrategia y la *mía* tienen que ser o bien la misma o 'muy' parecidas.

Si no pudo encontrar la forma de que crucen las cuatro en el tiempo estipulado (17 minutos), igualmente vale la pena que juntos reflexionemos sobre *dónde* están los mayores obstáculos.

Para empezar, quiero escribir *una* solución. A los efectos de que el relato resulte más sencillo, les voy a poner nombres a las mujeres: 1, 2, 5 y 10 (de manera tal que el 'número de minutos' que tardan en cruzar el puente sea la 'etiqueta' que sirva para identificarlas). Ahora sí, la estrategia:

Primer viaje de ida: van mujeres 1 y 2.
En total tardan 2 minutos.

Primer viaje de vuelta: vuelve la mujer 2 con la linterna.

Tiempo total consumido: 4 minutos (2 del viaje de ida más 2 del viaje de vuelta). Fíjese que vuelve 2, pero del otro lado del puente quedó 1… ¡lo cual terminará siendo clave!

Segundo viaje de ida: viajan las mujeres 5 y 10.

Tardan 10 minutos. Esto es importante también, porque al haber hecho viajar a 5 y 10 al mismo tiempo, estoy 'matando dos pájaros de un tiro': ya tengo a las dos mujeres que tardan más tiempo del otro lado del puente. Esto *también* será determinante en la estrategia que estamos elaborando.

Si sumamos el tiempo total consumido hasta ahora, da 14 minutos (10 de ahora, más 4 de antes).

Y acá es donde se usa el otro factor determinante para *minimizar* el tiempo de cruce: como del otro lado del puente quedó la mujer que tarda 1 minuto para cruzar, cuando 5 y 10 estén del otro lado, aprovecho a la mujer 1 para que no sume mucho tiempo al transporte de la linterna. Es decir…

Segundo viaje de vuelta: vuelve 1 con la linterna…

¿Cuánto tiempo llevamos hasta acá? A los 14 minutos que habíamos consumido, necesitamos agregar un minuto más. Estamos ahora en 15 minutos.

¿Cómo concluir?

Si usted se fija, verá que del lado inicial del puente quedaron dos mujeres: 1 y 2. Luego, el tiempo que tardarán en cruzar será de 2 minutos (la que tarda más tiempo), y al sumarlo a los 15 que teníamos hasta acá llegaremos a los 17 que pedía el enunciado del problema.

Algunas reflexiones más:

Ahora que ya tiene una solución, podrá comparar con lo que usted estuvo haciendo hasta acá. Si había elaborado alguna forma de cruzar que requería más de 17 minutos, podrá compararla con esta y ver dónde radicó la diferencia.

Si encontró *otra* solución, compárela con la que está escrita y verá que salvo el 'orden' en el que 1 y 2 vuelven con la linterna en alguno de los viajes de retorno, la estrategia tiene que ser *virtualmente* la misma.

Por supuesto, ahora que uno tiene la respuesta delante de los ojos, *todo* parece más sencillo.

Para terminar, tengo una pregunta más que me parece muy interesante contestar: ¿cómo sabemos que no hay alguna otra estrategia que permita que las cuatro mujeres crucen al otro lado del puente en *menos* de 17 minutos?

Le propongo que piense usted por su cuenta primero.

(Acá va una 'pausa' para que usted pueda pensar en soledad.)

Sigo yo. Observe que tienen que suceder todos estos hechos:

a) Hay que hacer por lo menos tres viajes de 'ida' (ya que no pueden ir más de dos mujeres por viaje, y como son cuatro y alguien tiene que volver con la linterna, son necesarios por lo menos tres cruces).
b) Tendrá que haber *por lo menos* dos viajes de 'vuelta' (para traer la linterna).
c) Uno de los tres viajes de 'ida' tendrá que servir para llevar a la mujer que tarda 10 minutos. Las otras dos tardan *por lo menos dos minutos*, ya que la que necesita nada más que *un minuto* para cruzar seguro que no irá sola.

d) Por otro lado, en el *mejor* de los casos, la mujer que tarda un minuto será la que use los dos viajes de 'vuelta'.

Hasta acá entonces se necesitan, por lo menos:

$$10 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16 \text{ minutos}$$

¿Podrán cruzar las cuatro mujeres en solamente 16 minutos? (Una vez más, le sugiero que piense por su cuenta primero.) Sigo yo: para que alcance con 16 minutos, hace falta que la mujer que tarda un minuto sea la que traiga la linterna en los dos viajes de 'vuelta'. Si eso tuviera que suceder, entonces la de 10 y la de 5 no podrían ir juntas en ningún viaje de 'ida' y, por lo tanto, sería imposible que tardaran *en total* 16 minutos, ya que al cruzar ambas en viajes distintos, la suma de esos dos tiempos ya obligan a invertir 15 minutos.

Moraleja

Como no es posible que crucen en 16 minutos, el número *mínimo* de minutos imprescindible para que crucen las cuatro mujeres es el que calculamos: ¡17! ¿No es notable este desarrollo?

El bar *antisocial*

Conozco mucha gente que está interesada en que publique tantos problemas como pueda en donde haya una suerte de *desafío*. La idea es tener que *pensar o*, mejor dicho, tener 'algo para pensar'. Siempre es posible agregarle una motivación 'extra', por ejemplo, que el problema haya sido propuesto en alguna entrevista de trabajo en donde se intenta medir la capacidad de adaptación a nuevas situaciones por parte de la candidata (o candidato). Pero tengo algo más para decir: cuando la compañía interesada es Apple o Google o Facebook, por poner algunos de los ejemplos más *salientes*, entonces el problema adquiere otra dimensión.

El problema tiene un enunciado muy sencillo. La solución está al alcance de todos, y una vez que tenga oportunidad de pensar el planteo se dará cuenta del desafío que presenta. Si puedo sugerirle algo, tómese tiempo.

Suponga que usted entra en un bar. En la barra hay 25 asientos, puestos en una fila (como se ve en la Figura 1).

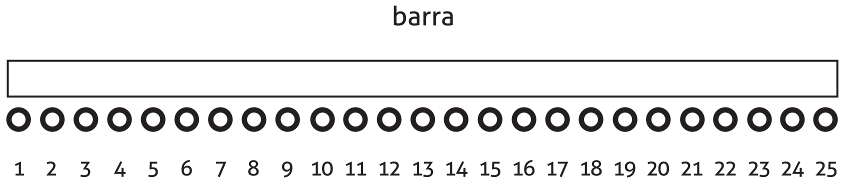


Figura 1

La curiosidad es que *todos* los clientes que tiene el bar (y que ha tenido históricamente) son *antisociables.* ¿Qué quiero decir? Es que cada vez que alguien entra en el bar, mira cuáles de los 25 asientos están disponibles y cumple la siguiente regla: si todos los asientos están vacíos, se sienta en cualquier parte; en ese caso, no hay restricciones. Pero si hay algún o algunos asientos ocupados, el nuevo cliente se sienta dejando la *máxima distancia posible* con los otros clientes. En particular, nadie se sienta 'al lado de nadie', en el sentido de que si un cliente advierte que su *única* alternativa para sentarse en la barra es tener alguna persona como vecina, entonces 'pega media vuelta' y se va.

Algo más transforma esta escena en algo bizarro: el barman, si pudiera, trataría de que —aun siguiendo la regla que se autoimpusieron— siempre hubiera la mayor cantidad de clientes posible (¿cuántos le parece que son?).

Ahora sí, tengo una pregunta para usted: si el barman pudiera determinar adónde sentar al *primer* cliente, ¿qué lugar debería elegir para poder alcanzar el máximo posible de clientes? Es decir (y esto es lo que quiero enfatizar): ¿cuál debería ser la *estrategia* del barman, de manera tal que los clientes ocupen la mayor cantidad de lugares?

Otra pregunta, y no tiene que ver con el problema propiamente dicho: *¿Por qué habrían de elegir Facebook, Google o Apple plantear situaciones de este tipo?*

Si yo tuviera que dar una respuesta diría que se valora *muchísimo* la capacidad de elaborar o establecer *estrategias*. No se mide necesariamente el 'volumen de conocimiento' sino la 'capacidad para inventar', para 'correrse de los lugares comunes'.

Ahora sí, le toca a usted.

Una forma de pensar el problema

Fíjese en la Figura 2. Yo me pongo en su lugar y me imagino que usted advierte que la *solución* al problema es lograr que se sienten como aparece allí. Es decir, uno debería lograr que los clientes se ubiquen en *todos los asientos que tienen un número impar*, dejando vacíos los asientos pares. De esa forma, se puede llegar al *máximo* de trece personas. Está claro que no puede haber más, porque cualquier otro que quisiera ocupar un lugar terminaría teniendo algún vecino, lo que está expresamente prohibido por las reglas que ellos mismos se impusieron. En consecuencia, el máximo posible de personas es *trece*, y estas *trece* tienen que estar distribuidas de esa forma.

Esto es interesante, porque tanto usted como yo conocemos el resultado final, sabemos hacia dónde apuntamos, sabemos cómo deberían terminar sentados... todo bien, pero... ¿cómo lo logramos? ¿Hay alguna estrategia que uno pueda elaborar de manera tal que terminen sentados de esa forma?

Fíjese en este caso: suponga que el primer cliente que llega cuando el bar está vacío tiene —como era esperable— la libertad de sentarse donde quiera. Supongamos que elige el asiento #1 o el #25 (el número 1 o el número 25). En este contexto, *todo* es simétrico, de manera tal que no hay ninguna diferencia si opta por uno o por otro. Supongamos entonces que eligió el #1. Llega el segundo cliente; para seguir con la regla, *tiene* que sentarse en el #25 y de esa forma estará alejado del #1 lo más posible. Hasta acá, todo bien. Ahora, llega un tercer cliente. ¿Dónde se sienta? En este caso, no hay opción: para quedar alejado de los dos que allí están, *el tercer cliente tiene que sentarse en el asiento #13*. De esta forma, hay 12 asientos hacia la derecha que están vacíos, y otros 12 asientos hacia la izquierda que *también* están vacíos.

Figura 2

Ahora llega el cuarto cliente. Ella va a ver que están ocupados los asientos #1, #13 y #25. Le quedan entonces dos posibilidades: o bien se sienta en el asiento #7 o, si no, en el #19. Lo interesante es que, elija lo que elija, cuando venga el próximo ocupará el que ella no ocupe ahora, o sea, cuando hayan llegado cinco clientes, los asientos ocupados serán: #1, #7, #13, #19 y #25.

¿Quiere pensar usted lo que sucederá cuando llegue el próximo cliente? Yo sigo.... lo curioso es que cuando llegue el próximo, ¡no le quedará más alternativa que sentarse en el asiento #4, #10, #16 o #22! Pero esto presenta un problema extra, porque habíamos quedado en que el objetivo era que se ocuparan todos los asientos impares, y si empezamos, como ya hice yo, ubicando al primero en el asiento #1 o en el #25, luego de algunos pasos inexorablemente tendrán que ocuparse algunos pares... ¡y no queríamos que esto pasara! ¿Qué hacer? ¿Habrá alguna forma de comenzar de manera tal que, al final, la configuración quede con todos los impares ocupados y los pares libres?

Acá es donde me gustaría volver a dejarla (o dejarlo) para que usted piense por su cuenta. Es que apareció una situación que no habíamos considerado: para llegar a la distribución ideal, es necesario (si es que se puede... porque no sabemos si se va a poder o no) *empezar* en alguna otra parte que no sea ni en el #1 ni en el #25. Lo que deducimos también es que *sentar al primer cliente es <u>determinante</u>.* En el momento en el que el primer cliente ocupó un asiento, esto va a determinar lo que suceda con *todos* los que vengan después. Ahora sí, le propongo que siga usted, pero antes de retirarme me gustaría sugerirle una idea: ¿por qué no empieza "*de atrás hacia adelante*"? Es decir, usted y yo sabemos cuál tiene que ser la configuración final. Le propongo que empiece por allí y evalúe qué pasos tuvieron que darse para lograrlo. Por ejemplo, si al final hubo alguien sentado en el #3, es porque *antes* tuvo que haber dos personas ocupando el #1 y el #5... esta es la *única forma* de que el #3 quede ocupado. ¿Y cómo puede ser que haya alguien que pudo ubicarse en el #5? Los asientos #1 y #9 debieron estar ocupados en algún paso anterior. Esto me fuerza a seguir con las preguntas: ¿cómo hacer para que alguien tuviera que sentarse en el #9? Para eso, *dos personas* debieron estar ocupando el #1 y el #17.

Y acá aparece un problema que no tuvimos antes. ¿Cuál? Si alguien ha *tenido que ocupar el #17*, había gente en el #1 y el #33. Todo bien, pero... ¡no existe el asiento #33! ¿Y entonces? En este punto pareciera que hemos llegado a un problema sin solución. ¿Cómo lograr que el asiento #17 esté ocupado? ¿Se le ocurre algo? *En este punto particular —creo— está la 'clave' de la solución.*

Recuerde cuál era la pregunta del problema. El barman... sí, el barman era quien tenía que tomar la decisión sobre dónde ubicar a la primera persona. Justamente acá es donde ha llegado el momento en el que él debe intervenir: invitará a la primera persona que llega a sentarse en el lugar #17. Como en el bar no hay nadie, hay total libertad de elegir dónde sentarse sin violar la regla (no escrita). La/lo invito a que comprobemos juntos a ver si ahora funciona todo como esperábamos.

El primero entonces ocupa el lugar #17. El segundo (como se ve en la Figura 2) se sienta lo más alejado posible de él o de ella, y para eso tiene que ocupar el #1. El cliente que sigue puede elegir sentarse en el #9 o en el #25. Los dos dejarían siete asientos vacíos. Digamos que elige el #25. Cuando llegue el próximo, tendrá que sentarse en el #9. Los siguientes ocuparán (verifíquelo usted, por favor) el #5, el #13 y el #21. Cada uno de ellos tiene *tres asientos* vacíos respecto del vecino.

Y al final, los siguientes seis clientes deberán ocupar los únicos lugares que no tengan ningún vecino: #3, #7, #11, #15, #19 y #23.

Moraleja

Me quiero apurar a escribir que el barman pudo haber elegido #9 en lugar del #17 y todo hubiera funcionado igual de bien. La simetría que tiene el problema así lo permite. Pero no quiero terminar sin hacer una observación más: elaborar una estrategia para llegar a un determinado destino es algo no menor. No siempre es fácil, no siempre es posible. Pero el espíritu investigador, el entrenamiento que requiere, permite distinguir a aquellas personas que disfrutan del placer de pensar. No hay fórmulas mágicas ni caminos *directos* o que sean *siempre conducentes*. Pero el placer de tener un problema no resuelto en la cabeza es una asignatura pendiente en nuestros colegios y escuelas. Permitámonos que '*algo no nos salga*'. ¡No pasa nada! Es bueno saber frustrarse y aprender a tener paciencia y a 'jugar en equipo'. Lo que no se le ocurre a uno se le ocurre a otro y, entre todos, es posible que podamos resolver el problema. No sé si servirá para trabajar en Google, Facebook, Apple o Microsoft, pero seguro que mejora nuestra calidad de vida.

Diez bolsas, diez monedas

Suponga que yo le entrego 10 bolsas numeradas del 1 al 10. Cada una de ellas tiene una etiqueta pegada con el número que la identifica. Dentro de cada bolsa hay monedas... muchas monedas.

En principio, parecen todas iguales. Lucen indistinguibles en apariencia y en peso. Sin embargo hay *una* excepción: las monedas de todas las bolsas pesan 10 gramos pero hay una bolsa particular que contiene monedas que pesan 11 gramos (un gramo más). Lo que *no se sabe* es cuál de las 10 bolsas es la que contiene las monedas que pesan más, y en eso consistirá el problema: poder encontrar cuál es *esa bolsa particular*.

Junto a las bolsas hay una balanza que tiene *un solo platillo*. Si uno quiere determinar el peso de un objeto, lo apoya en ese platillo y aparece un número (digamos en forma digital) que ofrece ese registro.

Y ahora, el problema. Hay que encontrar cuál es *la bolsa que contiene las monedas que pesan 11 gramos, pero se la puede usar ¡una sola vez!*

El objetivo entonces es elaborar una estrategia que permita resolver el problema. Me parece que lo mejor que puedo hacer ahora es retirarme y dejarla/o en soledad, o mejor dicho, con sus propias reflexiones. Yo sigo después.

Solución

En realidad, está *mal* que escriba 'solución'. Esta parte del capítulo debería decir: 'una' solución, o 'una potencial' solución. Si no, parecería que yo voy a proponer la *única* solución posible y eso es *decididamente falso*. Acá voy.

Me gustaría empezar escribiendo que me encantaría poder estar con usted en este momento. Eso nos permitiría poder pensar juntos; pero como eso no es posible, al menos quiero compartir con usted algunas de mis ideas.

Fíjese que el problema establece una sola restricción: *se puede hacer solamente* ***un*** *pesaje*. Ese es un dato *no menor*. Cuando yo me enfrenté con el problema la primera vez, pensé: ¿de qué bolsas voy a elegir las monedas para pesar? ¿Será suficiente sacar monedas de *algunas bolsas* pero no de todas?

Por supuesto, existen ejemplos extremos en donde no haría falta sacar monedas de todas las bolsas. Por caso, yo podría tener *suerte* y sacar monedas de una sola bolsa y que esa sea ***la*** bolsa (que tiene las monedas distintas).

Podría ser también que yo eligiera una moneda de cada bolsa, *salvo una*. Peso las nueve monedas, y supongamos que obtengo 90 gramos. En ese caso particular, yo sabría que la bolsa de la que *no* elegí es justo la que estoy buscando detectar.

Pero usted advierte que *la estrategia* que uno quiere diseñar *no puede depender de la 'suerte' en la elección de las bolsas*. Lo que uno pretende es elaborar un método de manera tal que cualquiera que lo implemente pueda determinar cuál es la bolsa que tiene las monedas más pesadas.

Eso es lo que voy a intentar ahora: voy a ofrecerle *una posible manera de abordar (y resolver) el problema*. Para hacerlo, voy a elegir monedas de *todas* las bolsas, pero *no* de cualquier forma.

Si eligiera una sola moneda de *todas* las bolsas y después las pesara, seguro que el total sería: 101 gramos. Es que nueve de las 10 monedas van a pesar 10 gramos, y la otra pesará 11. Luego, 90 + 11 = 101. Pero este camino no parece ser *conducente*. ¿Cómo distinguiría *esa* moneda particular? El punto *crítico* es encontrar *alguna* forma de hacer *resaltar* la bolsa que contiene esas monedas.

Entonces, hago lo siguiente: voy a elegir un número diferente de monedas de cada bolsa de la siguiente forma.

Elijo una moneda de la bolsa número *uno*, dos monedas de la bolsa número *dos*, tres monedas de la bolsa *tres*... y así hasta elegir *diez* monedas de la bolsa *diez*. ¿Para qué me serviría esta elección? ¿No prefiere seguir usted sola/solo y fijarse si esa idea la (o lo) ayuda?

Sigo yo. Para empezar, sumemos el total de monedas.

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 55 \text{ monedas}$$

Si *todas* las monedas pesaran 10 gramos, entonces en total tendríamos:

$$(55 \times 10) = 550 \text{ gramos}$$

Pero *sabemos* que esto no es así. Sabemos que hay monedas que pesan 11 gramos. De acuerdo... ¿pero de qué bolsa?

Fíjese que si la bolsa que contiene las monedas más pesadas es la número 1, entonces, como de esa bolsa elegí nada más que una moneda, en el total de gramos el **exceso** será **exactamente** un gramo. El peso total será de 551 gramos.

Por otro lado, si la bolsa *diferente* fuera la segunda, entonces, como de ella yo extraje *dos monedas*, el peso total ahora será de 552 gramos: un gramo más por cada una de las dos monedas que seleccioné de esa bolsa.

(Imagino que usted ya intuye hacia dónde voy…)

Por ejemplo (y me salteo algunos pasos), la bolsa que contiene las monedas más pesadas es la número 5, el peso total de las 55 monedas será ahora 555 gramos (un gramo más por cada una de las 5 monedas que elegí de esa bolsa).

Y creo que ahora está clara la idea. Al elegir las monedas de esa forma, cuando yo las pese, el número de gramos *que exceda los 550* indicará con precisión de qué bolsa provinieron... ¡y eso resuelve el problema!

Moraleja

No sé hasta dónde pudo pensar usted y, en realidad, quizás usted consiguió diseñar una estrategia mejor. No importa: si la que encontró usted funciona, *seguro que es mejor, aunque más no sea porque es SUYA*. Pero antes de terminar con esta parte: ¿no es notable que se hubiera podido contestar la pregunta haciendo ¡un solo pesaje!? En principio, parecía casi 'imposible', pero después, a medida que fuimos avanzando, encontramos formas de sortear todas las dificultades.

No sé lo que le pasó a usted, pero este problema, para mí, es un excelente ejemplo de lo que yo querría hacer con este libro: mostrar la potencia de la elaboración, y no del resultado propiamente dicho. Seguro, resolver el problema es esencial, pero el camino, el trayecto y poder detectar dónde están los obstáculos y encontrar formas para salvarlos es lo que más interesa (al menos es lo que más me interesa a mí).

Ojalá yo pudiera averiguar si usted coincide conmigo[22].

---

22. Como suele suceder cada vez que lee los problemas *antes* de que aparezcan publicados, Carlos D'Andrea me propuso que agregara las siguientes tres preguntas:

a) ¿Y si la moneda distinta pesa 12 o 13 gramos en lugar de 11?
b) ¿Y si todas las monedas pesan un cierto número de gramos *n*, salvo una sola de las ellas, que pesa un número *m*?
c) ¿Se podrá implementar alguna estrategia *general* que contemple *todos* los posibles casos?

Interruptores - Parte 1

Estaba cenando con mi familia en Buenos Aires, en uno de los "*carritos de la Costanera*". Hoy, como tales, no existen más. En un momento determinado, mi sobrina Lorena (que hoy es doctora en biología igual que su marido, egresados ambos de la UBA) me dijo que tenía un problema que no había sabido resolver y que me quería plantear. Recién habíamos pedido la comida, y éramos muchos. Mientras los chicos corrían por los alrededores, le pedí que me lo cuente, y sirvió para proveerme de uno de los más lindos problemas que involucran el 'pensamiento lateral'. Eso sí: estuve *toda la cena* pensando. Mucho tiempo. Lorena dijo haber *lamentado profundamente* habérmelo planteado *antes* de irnos, porque eso significó que yo nunca más estuve con ellos. Es decir, estuve, sí, pero solamente dejé mi cuerpo: mi mente estuvo en otro lado. Ah... el problema me salió, pero no durante esa noche; y encima, mucho tiempo más adelante, en el bar del pabellón uno de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Fernando Korenblit (que no tiene parentesco con Alberto Kornblihtt) redobló la apuesta y me contó una versión aun más general... pero a eso me voy a referir después. Acá va (la primera).

Se tiene una habitación vacía, con la sola excepción de una bombita de luz que está colgada mediante un cable que llega desde el techo. El interruptor que activa la luz se encuentra en la parte exterior de la habitación. Más aún: no solamente hay ***un interruptor***, sino que hay ***tres***. Los tres son iguales, indistinguibles uno de otro. Lo que *sí* se sabe es que solo una de esas 'llaves' activa la lamparita que está adentro de la pieza y, por supuesto, la lámpara no está quemada: todo funciona como corresponde.

No sé si hace falta pero, eventualmente, lo quiero escribir igual: ¡**ningún** problema de los que aparecen en este libro, como los que aparecieron en todos los anteriores o en los que potencialmente podrán seguir apareciendo, tiene **trampa**! Son todos problemas planteados en forma honesta (intelectualmente hablando), y siempre supongo que lo único que hay que usar para poder resolverlos es... ¡pensar! Nada más.

Dicho esto, sigo. Los tres interruptores están afuera y se sabe que uno solo de ellos es el que sirve para 'activar' la lamparita que está en la habitación. Por otro lado, la habitación tiene la puerta cerrada y *no se puede ver lo que sucede adentro*. No hay ventanas, no hay vidrios, no se puede ver por debajo de la puerta... ¡no hay trampas!

El problema entonces consiste en lo siguiente: usted tiene tiempo para 'jugar' con los interruptores tanto como quiera. ¿Qué quiere decir 'jugar'? Quiere decir que usted los puede poner hacia arriba o hacia abajo el tiempo que quiera. Puede hacerlo de a pares, los tres al mismo tiempo… en fin, tiene libertad para hacer lo que quiera. Eso sí: usted puede entrar en la habitación ¡solamente una vez! En el momento de salir, usted debe estar en condiciones de decir: "Esta es la llave que activa la luz". No se trata de adivinar ni de apelar a ningún tipo de probabilidad: al salir de la habitación uno tiene que poder decir *con certeza* cuál de los tres interruptores corresponde a la 'lamparita que está adentro'.

Al comienzo del problema, los tres interruptores están hacia ‘arriba’ y la lamparita está apagada. Una última cosa (que no agrega nada, pero espero que sirva para clarificar alguna potencial pregunta que usted tenga): mientras la puerta está cerrada y usted está afuera, podrá entretenerse con los interruptores tanto como quiera, pero habrá *un momento* en el que decidirá entrar en la habitación. No hay problema. Es más: ¡tiene que hacerlo! Pero cuando salga, tiene que poder contestar la pregunta de cuál de los tres interruptores es el que activa la lámpara. Ahora le toca a usted.

Solución

La *solución* a este problema requiere elaborar una estrategia, pero también del uso de lo que se llama ‘el pensamiento lateral’.

Antes de avanzar en esa dirección, quisiera convencerme (junto con usted) de que los caminos convencionales *no van a alcanzar.* ¿A qué me refiero? Fíjese en lo siguiente: uno podría activar *dos* de los interruptores (o sea, bajarlos, como si estuviéramos encendiendo una luz) y entrar después en la habitación. ¿Qué podría pasar? La luz podría estar apagada todavía, lo cual nos vendría muy bien, porque eso significaría que el interruptor que activa la luz es el que *no tocamos, el que no bajamos.* Pero eso dependería de la suerte. Si la luz estuviera encendida, no sabríamos cuál de los dos que bajamos es el que activa la bombita; podría ser cualquiera de los dos. En consecuencia, *bajar* dos de los interruptores no sirve.

Supongamos ahora que activamos solamente *uno* de los tres interruptores. Igual que antes, podríamos tener suerte y que al entrar en la habitación la luz ***sí*** esté encendida. En ese caso, ya sabremos cuál de los tres es el que sirve. Pero, ¿y si no está encendida? ¿Y si está apagada? En este caso, lo *único* que habremos aprendido es que el interruptor que activamos *no es el que sirve... ¡pero nada más!* No sabemos cuál de los dos restantes es el que sirve.

Este caso entonces *tampoco sirve*. Es decir: activar dos o activar uno solo, ¡no sirve para resolver el problema!

Por supuesto, activar los tres al mismo tiempo y entrar en la habitación, o dejar los tres como están y después entrar, tampoco sirve, porque no sabríamos nada nuevo. ¿Qué conclusión sacar de todo esto? Una conclusión posible es que yendo por los caminos convencionales (que ya agoté) no se puede llegar a la solución. ¿Entonces? ¿Qué hacer?

Como uno *sabe* que el problema tiene solución, hay que buscar por otro lado. De acuerdo, pero... ¿cuál otro lado? ¿Qué otra cosa puede uno hacer además de activar los interruptores? Bueno, lo que sucede es que, al entrar en la habitación, estamos contando con usar *solamente* ***uno*** *de nuestros sentidos... el de la* ***vista***. ¿Se le ocurre algún otro? (obviamente, a esta altura supongo que usted ya debe haber interpretado hacia qué lado estoy yendo... sí, hacia allí, hacia donde usted está pensando...).

Lo que uno podría hacer es usar *otro* sentido, además del de la vista. Podríamos usar el del *tacto*. Uno podría *'tocar' la lamparita*. Además de 'mirar' y ver si está encendida o no, podríamos tratar de 'tocarla' de manera tal de poder decidir, más allá de que esté encendida o no, si la lamparita ***estuvo*** encendida muy poquito tiempo antes, por ejemplo, si está *caliente*. ¿Y cómo usar este nuevo dato o esta nueva herramienta? ¿Cómo hacer para diseñar una estrategia que permita incorporar esto que hemos aprendido? (¿Quiere pensar usted?)

Sigo yo: fíjese que lo que uno puede hacer es activar cualquiera de los interruptores, como si estuviera convencido de que ***ese*** es el que activa la luz... y quedarse afuera esperando quince minutos (por ejemplo). Transcurrido ese tiempo, uno apaga ese interruptor y enciende uno de los dos restantes... ¡y entra rápido en la habitación!

Si la bombita está encendida, entonces fue el segundo interruptor que activó. Si la bombita está apagada.... ¡pero está caliente todavía....!, entonces fue el primero de los tres interruptores, el que usted tuvo encendido durante 15 minutos. Finalmente, si la lamparita está apagada y, al tocarla, está fría, eso significa que no fue el primero (el que tuvo encendido 15 minutos, porque, si no, estaría caliente), ni el segundo (porque, si no, estaría encendida), por lo que *la única alternativa es que sea el único que usted no tocó: el tercero*. Y esto termina con el problema.

¿No es fantástico que uno pueda apelar a algunas otras herramientas que no sabía que estaban a su disposición?

Interruptores - Parte 2

Como complemento del problema que planteé acá arriba, ¿qué le parece que pasaría si en lugar de tres interruptores hubiera cuatro? Las mismas condiciones que en el caso anterior, pero ahora, afuera, hay cuatro 'llaves' para activar. ¿Cómo hacer para determinar cuál de las cuatro es la que activa la lamparita?

Solución

La ventaja que tiene este caso es que recién vimos cómo se resuelve en el caso de tres. Por lo tanto, ya no hay más *sorpresa* con el pensamiento lateral. De acuerdo... pero igual, ¿qué estrategia usar?

La idea que se me ocurre es la siguiente. Voy a llamar a los cuatro interruptores con números: 1, 2, 3 y 4.

Empiezo bajando (activando) el 1 y el 2. Y espero 15 minutos (como habíamos hecho antes). Ahora, *subo el interruptor 1* (como si estuviera apagando la lamparita), bajo el número 3 (como si la estuviera encendiendo) y entro rápido en la habitación. ¿Qué puede pasar? (¿No le dan ganas de pensar a usted?)

Sigo. La lamparita puede estar en cuatro posiciones:

a) Apagada y fría.
b) Apagada y caliente.
c) Encendida y fría.
d) Encendida y caliente.

Supongo que le interesará a usted también determinar qué dice esto de cada uno de los interruptores.

En el caso (a), esto dice que el interruptor que sirve es el número 4, ya que es el *único* que usted no activó, y como la lamparita está por un lado apagada (o sea, no puede ser ni el 2 ni el 3 que quedaron bajados) y por otro está fría (no puede ser el 1), la única alternativa es que sea el número 4.

En el caso (b), si está apagada y caliente, no puede ser ni el 2 ni el 3 (porque estos dos quedaron 'bajados'), pero tampoco puede ser el 4 (que es el que usted no tocó), y como está caliente, *tuvo que haber sido el 1*, ya que ese estuvo activado durante 15 minutos y debe haber activado la bombita hasta dejarla caliente, ya que usted entró muy rápido en la habitación. Moraleja: en el caso (b), fue el interruptor número 1.

En el caso (c), como está encendida, tiene que ser el 2 o el 3 (ya que los dos están 'encendidos'), pero como la bombita está fría, tuvo que haber sido el último que usted activó antes de entrar en la habitación. Moraleja: en el caso (c), es el interruptor número 3.

Por último, en el caso (d), como está encendida tiene que ser —una vez más— el 2 o el 3. Como está caliente, tuvo que haber sido uno de los dos que estuvo encendido durante 15 minutos, y el 3 no puede ser porque usted recién lo acaba de activar. Moraleja: en el caso (d), es el interruptor número 2.

Y esto termina de resolver el problema. Fíjese que ya no se puede agregar un quinto interruptor, porque la bombita no 'resiste' más estados: tiene que ser uno de los cuatro que describí. Igualmente, si a usted se le ocurre cómo mejorar este problema, ¡siéntase libre y métale para adelante! No debe de haber nada más interesante que poder 'fabricar uno mismo' problemas para otros.

Cincuenta monedas en una fila

Suponga que yo ubico 50 monedas en una fila. Las monedas *no tienen* por qué ser del mismo valor, pero sí tienen que tener algún valor, estar en uso.

Hay dos personas que van a competir para llevarse la mayor cantidad de dinero posible. Para lograrlo tienen que elaborar una estrategia, ya que lo que se les pide es lo siguiente: empieza alguno de los dos (que se determinará por sorteo). El que inicia puede elegir cualquiera de las dos monedas que están en las puntas, y a partir de aquí se van alternando. El segundo jugador también tendrá que elegir de alguna de las dos puntas, y así hasta agotar las monedas.

Ahora, supongamos que yo le permito a usted elegir primero; es decir, usted podrá hacer el primer movimiento. ¿Se anima a diseñar una estrategia de antemano que le permita ***con seguridad*** saber que el otro jugador, haga lo que haga, *¡no se podrá quedar con más dinero que usted!?* Puede que se queden con la misma cantidad (por ejemplo, si todas las monedas fueran iguales), pero lo que es seguro es que el segundo competidor, el que elija segundo, no se podrá llevar más dinero que usted. Como decía, ¿podrá usted garantizar una estrategia que le garantice por lo menos la mitad del dinero que está en juego?

Es muy poco probable que uno tenga que enfrentarse con una situación de este tipo en la vida cotidiana, pero para lo que *sí sirve* es para imaginar potenciales *escenarios* en los cuales su aplicación quizás sí le sea de utilidad. Ahora me retiro y usted queda en soledad. Yo sigo más adelante.

Una estrategia posible

En principio, le propongo que *numeremos* los cincuenta lugares en donde están las monedas (como se ve en la Figura 1).

Figura 1

Ahora, imaginemos que hay una moneda en cada lugar. Le sugiero que *sume el valor de todas las monedas que están ubicadas en los lugares* ***pares***. Es decir, las monedas que están en las casillas 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14… 46, 48 y 50.

Esto resultará ser un cierto número que voy a llamar A.

Por otro lado, sume *el valor de todas las monedas que están ubicadas en los lugares impares... o sea, las que están en las casillas 1, 3, 5, 7… 43, 45, 47 y 49.*

A esta suma la voy a llamar B. Compare A con B. Puede que sean iguales... *o no.* Supongamos por un momento que A fuera *estrictamente mayor que B*, o lo que es decir que las monedas que están en las casillas pares suman *más dinero* que las que están en las *impares.* Como el que elige primero puede optar por llevarse la moneda que está en la casilla número 1 o en la casilla número 50, si las *pares* suman más, elige entonces la moneda que está en la casilla 50 (una de las pares). ¿Qué le queda al segundo? Para el que elige después, las únicas dos posibilidades son llevar o bien la moneda que está en el lugar número 1 o bien en el 49… ambas ¡impares! Cuando elija una de las dos, si se lleva la número 1, usted elegirá la moneda que está en la casilla 2 (que también es par), y al segundo competidor le quedarán la 3 y la 49 (las dos impares). Si el segundo competidor elegía la 49, usted tomaba la 48, y a él le quedaban la 1 y la 47 (ambas impares).

Como usted advierte, haga lo que haga quien elige segundo, usted lo fuerza a que elija siempre las monedas que están en las casillas impares, mientras usted elige *siempre* las que están en las pares. De esa forma, cuando hayan elegido las 25 monedas cada uno, usted se habrá quedado con las monedas que suman más... ¡y listo!

Lo que tiene de atractivo esta estrategia es que usted no tiene que tomar ninguna determinación en el medio de la elección. Usted ¡ya sabe lo que le va a pasar! Mientras tanto, el segundo competidor puede que no haya advertido que usted lo está llevando por el camino que quiere, independientemente de lo que vayan sumando las monedas que aparecen en el trayecto.

Cien bolitas. Cincuenta negras. Cincuenta rojas

Algunos problemas logran ‘viralizarse’. Es difícil entender *todas* las razones. Si no, sería muy fácil encapsularlas y reproducirlas cuando se necesite tener algún tipo de publicidad o fama. Me quiero referir acá a uno en particular, que fue propuesto por la gente de Microsoft en uno de los tantos tests que tienen que superar aquellas personas que aspiran a trabajar en la empresa. Son tantas las fuentes que sostienen que el problema apareció allí por primera vez, que lo asumo como un hecho, pero en todo caso resulta totalmente irrelevante cuándo hizo su debut. Sería más interesante averiguar quién fue el que propuso el problema, a quién se le ocurrió. Digo esto porque muchísimas veces (y con razón) el crédito se lo queda la persona que lo resuelve, o en plural, si son varios, pero por otro lado no es sencillo *inventar* problemas de este tipo, que sirvan para medir la capacidad de elaboración y la creatividad de un postulante. Y lo mismo sucede con un examen. Muchísimas veces en mi vida tuve que elegir problemas para evaluar alumnos en alguna materia de la facultad[23], ya sea para un examen parcial o final. Acépteme que no es una tarea

23. Y estoy seguro de que eso le pasa y le ha pasado a todos los que son o han sido docentes, en el momento en el que tienen que decidir cómo evaluar ‘en otros’ (los alumnos) la tarea que hicieron ellos (nosotros).

fácil. Algunos problemas son muy lindos, con una solución potencialmente muy elegante, pero esa no es precisamente la idea con la que uno rastrea problemas. No se trata de encontrar algo o bien muy bonito o de solución muy creativa (únicamente), porque uno entrena a los estudiantes para que salten determinadas vallas, y después termina 'corriéndoles el arco', o pidiéndoles que resuelvan un problema para el que no los preparamos....

De hecho, varias veces, en exámenes finales de Análisis 1 o Álgebra 1 en Exactas (UBA), mi propuesta era que el alumno elabore un grupo de problemas que sirvieran como exámenes parciales de esa materia. Es decir: si el alumno fuera quien tuviera que producir un examen parcial para evaluar a alguien como él (o como ella), ¿qué incluiría?, ¿qué problemas propondría?, ¿dónde haría énfasis?

Fueron experiencias extraordinarias, y no tengo suficientes datos como para sacar conclusiones que pueda ofrecer en forma rigurosa, pero si en algún momento de su vida usted tuviera la oportunidad de hacerlo, hágalo y verá en cuánto mejora su percepción como examinador.

Una sugerencia antes de proponer el problema propiamente dicho: me gustaría encontrar algún argumento lo suficientemente poderoso para convencerla/o de 'no mirar la respuesta'. En definitiva, ¿cuántas veces en la vida le van a pedir que usted planifique una estrategia para resolver una situación que otra persona le va a plantear? Más aún: supongamos que, después de haber pensado mucho tiempo, su respuesta no es la 'mejor' o la 'óptima'... ¿Y entonces qué? ¿Qué pasaría? ¿Sería acaso desdoroso para usted? ¿Pasaría acaso a integrar un grupo de personas '*indeseables*'?

Puesto en estos términos, resulta hasta insultante que alguien siquiera piense que uno es *peor persona* porque no pudo resolver algo o no llegó a encontrar 'la solución ideal', pero si usted dedicó parte de su tiempo a pensar en algo distinto, le sirvió para entretenerse y encima pudo darse el gusto de elaborar o diseñar un modelo para resolver un problema, creo que ya *todo* valió la pena, ¿no le parece? Ahora sí, este es el problema.

Se tienen 100 bolitas, de las cuales la mitad son rojas y la otra mitad son negras. Sobre una mesa hay además dos frascos iguales, opacos (o sea, no se puede ver lo que contienen). Digamos además que no se podría decidir nada por el *peso* de cada uno. Usted tendrá la tarea de distribuir las cien bolitas entre los dos frascos de la forma que quiera, pero con una restricción que explicaré después.

Como yo no voy a ver la distribución que usted hizo, no tengo idea de cuántas bolitas hay en cada frasco ni de qué colores: nada. Me voy a acercar a los dos frascos, voy a elegir uno arbitrariamente, lo voy a abrir, voy a meter una mano (sin mirar) y voy a tomar una bolita cualquiera.

¿Qué estrategia puede diseñar usted para distribuir las bolitas de manera tal que la probabilidad de que yo haya sacado una bolita roja sea la máxima posible?

Ahora le toca a usted, pero antes de *abandonarla/o por un rato*, permítame hacer un par de observaciones.

Está claro que para resolver el problema habrá que hacer algunas cuentas. Supongo que no le estoy diciendo nada *nuevo*. Es *esperable que esto suceda*, aunque más no sea porque uno tiene que probar varias distribuciones posibles hasta convencerse de que encontró la *óptima*. En todo caso, le pido que no se amilane (o sea, 'no se asuste') por las fórmulas: ¡son nada más que multiplicaciones y sumas! En todo caso, si decide abandonar acá, se perderá usted la oportunidad de pensar algo entretenido. Créame: vale la pena.

Quiero empezar con un par de ejemplos que aspiro a que sirvan para aclarar algunas cosas.

Ejemplo 1

Si usted ubicara *todas* las bolitas rojas en un frasco (digamos '*frasco 1*') y *todas* las bolitas negras en el otro (en el '*frasco* 2'), ¿cómo calcularía la probabilidad de que yo saque una roja? Se hace así:

En principio, hay que calcular la probabilidad de que yo elija uno de los dos frascos. Esa probabilidad es ½, ya que no hay diferencia entre uno y otro, y yo voy a seleccionar uno de los dos en forma arbitraria.

Una vez que haya elegido el frasco, entonces tendré que calcular la probabilidad de que la bolita que yo extraiga sea de color rojo.

En el ejemplo en donde *todas las rojas* están ahora en el frasco 1, cuando meta la mano, la probabilidad de que elija una roja es *uno* (o en un 100% de los casos), y la probabilidad de que sea roja será *cero* si el frasco que elegí es el otro, el frasco 2.

Entonces, la probabilidad de que sea roja se calcula así:

[(probabilidad de que elija frasco 1) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 1)] + [probabilidad de que elija frasco 2) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 2)] = (*)

{(½) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 1)} + {(½) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 2)} =

$$= \{(½) \times (50/50)\} + \{(½) \times (0/50)\} = \{(½) \times 1\} + \{(½) \times 0\} = ½$$

En este caso, entonces, descubrimos que la probabilidad de que saque una bolilla roja es ½. ¿Me entiende el porqué de todos estos 'numeritos'? El factor ½ aparece siempre porque eso indica la probabilidad de haber elegido el frasco 1 o el frasco 2. Por otro lado, (50/50) indica que tengo para elegir 50 rojas sobre un total de 50 bolitas, y el número (0/50) marca que no hay bolitas rojas (de ahí el número *cero)* entre las 50 que hay en el frasco 2.

Ejemplo 2

Ahora distribuya las bolitas por igual en ambos frascos. Es decir, en el frasco 1, ponga 25 rojas y 25 negras, y en el frasco 2, lo mismo: 25 negras y 25 rojas. Antes de leer lo que voy a escribir yo acá abajo, ¿por qué no lo intenta usted por su cuenta y después cotejamos los resultados? Mientras tanto, yo sigo...

Como antes, la probabilidad de que yo elija un frasco u otro es la misma: ½.

Una vez que haya elegido cualquiera de los dos frascos, la probabilidad de que la bolita que elija sea roja será *también* ½. ¿Por qué? Es que en el frasco 1, los casos favorables son 25 (rojas) sobre 50 posibles. Y lo mismo con el frasco 2. Al usar la fórmula que figura en (*), se tiene:

[(probabilidad de que elija frasco 1) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 1)] + [probabilidad de que elija frasco 2) × (probabilidad de que elija una bolilla roja dentro del frasco 2)] =

$$= \{(½) \times (25/50)\} + \{(½) \times (25/50)\} =$$

$$= \{(½) \times (½)\} + \{(½) \times (½)\} = ¼ + ¼ = ½$$

Lo interesante entonces es que, tanto en la distribución del ejemplo 1 como en la del ejemplo 2, la probabilidad de que yo saque una bolita roja es ½ en ambos casos. De todas formas, a usted no se le escapa que estos son *solamente* dos casos de todas las distribuciones posibles. Creo que ahora llegó el momento en el que usted, con *todos* los datos que tiene ahora, pueda sentarse a pensar en soledad, *probar con distintas alternativas* (incrementando el número de rojas de un lado, por ejemplo, para determinar cómo se va modificando la probabilidad que buscamos). En todo caso, ahora le toca a usted.

Ideas

Creo que el cambio cualitativo se produce cuando uno puede permitirse pensar que *no tiene por qué haber la misma cantidad de bolitas en cada frasco*. Fijémonos qué sucede con esta distribución:

Frasco 1: 10 rojas y 30 negras
Frasco 2: 40 rojas y 20 negras

La probabilidad de sacar una bolita roja del frasco 1 es ahora de 10/40 = ¼ (ya que hay 10 rojas sobre 40 posibles), y la probabilidad de sacar una roja del frasco 2 es 40/60 = 2/3 (ya que hay 40 rojas sobre 60 bolitas posibles).

Por otro lado, como las chances de elegir cualquiera de los dos frascos es la misma (50% en cada caso), en términos de probabilidades eso quiere decir que la probabilidad de elegir el frasco 1 y el frasco 2 es la misma: ½.

Con estos datos, ¿cuál es la probabilidad *total* de sacar una bolita roja con esta distribución? Vuelvo a usar la fórmula que aparece en (*) y el resultado ahora es:

$$(\text{Probabilidad de sacar una bolita roja}) =$$
$$= \{(½) \times (¼)\} + \{(½) \times (2/3)\} = 1/8 + 1/3 = 11/24 = 0{,}458333\ldots$$

Ahora tengo otra idea para proponerle: ¿qué pasaría si *todas* las bolitas estuvieran en un solo frasco? (No se apure a contestar, porque la primera tentación es decir ½, y esa respuesta es equivocada...)

El resultado ½ estaría bien si hubiera *un solo frasco*. Entonces sí, las 100 bolitas estarían en un único frasco, y como hay 100 bolitas y 50 de ellas son rojas, la probabilidad de sacar una roja sería 50/100 = ½. Pero, como queda claro, no hay un frasco sino dos. ¿Quiere calcular entonces la probabilidad de sacar una roja?

$$(½) \times (50/100) + (½) \times 0 = ½ \times ½ = ¼$$

En este resultado (¼) se advierte la incidencia que tiene un dato importante, y es que uno no sabe, a priori, cuál de los dos frascos voy a elegir. Por eso, la probabilidad *total* de sacar una bolita *roja* en el caso en que *todas* estén en el frasco 1 es ¼, y no ½, como uno podría suponer en principio.

Última propuesta

Antes de llegar a la respuesta, me gustaría proponerle *una última idea*. ¿Qué pasaría si pusiéramos 25 bolitas rojas en el frasco 1 y el resto de las bolitas (las 75 restantes) en el frasco 2?

Esto significaría que, si el frasco que yo eligiera fuera el número 1, la bolita elegida sería roja (porque son *todas* rojas). En cambio, si el frasco que yo eligiera fuera el frasco 2, a diferencia de lo que sucedía antes, *¡ahora aparecerían posibilidades de que la bolita sea **roja** también!*

En este caso, la probabilidad *total* de que sea roja se calcula así:

$$\{(½) \times (25/25)\} + \{(½) \times (25/75)\} =$$
$$= \{(½) \times 1\} + \{(½) \times (1/3)\} = ½ + 1/6 = 2/3$$

Este dato es *muy interesante*, porque ahora con esta distribución hemos llegado a los 2/3, que es aproximadamente 0,66666… o sea, casi un 66,67% de posibilidades, lo cual es una mejora muy fuerte respecto del 50% al que habíamos llegado con algunos de los ejemplos anteriores.

Pero lo que esta distribución también enseña es que uno no solo puede *mejorar* el 50% de posibilidades que tenía originalmente, sino que vale la pena preguntarse: ¿y para qué necesito que haya 25 bolitas en el frasco 1? ¿Me hacen falta *tantas*? ¿Por qué no dejo *menos bolitas rojas* en el frasco 1? Si disminuyo las bolitas rojas del frasco 1, no voy a afectar la probabilidad de que al elegir una de allí siga siendo roja; pero si agrego muchas bolitas rojas al frasco 2, voy a incrementar mucho la probabilidad de que saque una roja cuando elija una bolita del frasco 2... ¿no es así?

Ahora sí, creo que solo falta la *puntada final*...

Final

Está todo preparado como para que la distribución que elijamos ahora sea la siguiente: dejemos *¡nada más que una bolita roja en el frasco 1!* Y pongamos *todas* las otras bolitas que quedan, las 99 restantes, en el frasco 2. ¿Cuál es la probabilidad *total* de que sea roja la bolita que yo saque al azar al elegir uno de los dos frascos?

Una vez más, la probabilidad se calcula así:

$$\{(½) \times 1\} + \{(½) \times (49/99)\} = 0,5 + 0,2474747\ldots = 0,747474\ldots$$

Esto representa un poco más del 74,74% de las posibilidades. Esta es la *mejor estrategia posible*[24].

Permítame reflexionar algo con usted: ¿estamos de acuerdo en que la *belleza* del problema no reside en la solución propiamente dicha sino en el *trayecto*? Lo disfrutable es haber podido *pensar* una estrategia que sirviera para mejorar lo que teníamos de antemano. Parecía que uno no podría mejorar el 50%, y sin embargo no solo no fue así, sino que finalmente llegamos a *casi* un 75% de posibilidades, lo cual es *muchísimo más* que ese 50%.

Y justamente de *eso* se trataba: disfrutar del recorrido y poder *elaborar una estrategia que resolviera el problema*. Y como ya escribí: esto es algo que uno hace constantemente en la vida cotidiana, solo que no lo advierte... ¿O sí?

---

24. Es posible que haya diferentes maneras de comprobarlo, pero la única que yo conozco me la ofreció Carlos D'Andrea. Carlos escribió un programa usando Mathematica, que analiza todas las posibles distribuciones de las 100 monedas en los dos frascos y calcula las probabilidades asociadas. Este análisis muestra que la estrategia que describí para distribuir las bolitas es la que permite alcanzar una probabilidad de 0,747474... Por supuesto, sería muy interesante que usted pudiera encontrar otra forma que no requiriera del uso de una computadora.

Cien monedas, diez 'caras': el desafío

Corría el año 1999. El primer sábado de cada mes, un grupo de amigos nos encontrábamos para cenar y conversar. Hasta acá, no tiene nada de particular: es lo que *todo el mundo hace, ¿no es así?* Sin embargo, teníamos otro objetivo. En el grupo había periodistas, psicoanalistas, arquitectos, biólogos, físicos, matemáticos, médicos, abogados, periodistas gráficos, psicólogos, jueces, ministros del gobierno, y seguramente me olvido de algunas profesiones... Decía, los encuentros eran muy *ricos* para poder intercambiar ideas con personas que mirábamos la realidad desde distintos lugares. Y se notaba. Pero además, nos daba la chance de poder preguntarle a gente que estaba *en la frontera del conocimiento* cuáles eran los temas de investigación más relevantes del momento, en qué estaba trabajando cada uno, además del análisis esperable de la realidad argentina y mundial. Una vez más, como ya escribí, nada diferente de lo que sucede en múltiples lugares, solo que las personas que participábamos teníamos una exposición pública mayor. Y nada más.

En varias ocasiones, aparecieron problemas para pensar entre todos, y el que quiero contar acá tuvo la particularidad de que lo propuse yo, y tuvo a *todo el mundo* interesado, pero con una excepción: yo. Es decir, como nadie conocía el enunciado, se formaron distintos subgrupos para pensarlo, pero claro, como yo sí sabía la solución, me quedé afuera *toda la noche... de todo*. Solo pude escuchar lo que cada uno iba exponiendo, pero no pude participar en forma activa. Lo que sí recuerdo también es que cuando uno de ellos (Juan Pablo Paz) gritó: "¡Adrián, ya tenemos la solución!", fue algo así como una explosión de júbilo colectivo, algo así como haber gritado: "¡Tarea cumplida!", y encima, lo hicieron/pensaron entre todos. Es decir, más allá de sentirme excluido, sentí al final la satisfacción de ver a un grupo de mis amigos aunando todos sus esfuerzos para encontrar la respuesta.

Pasaron entonces más de diecisiete años, y acá estoy, con la idea de compartir ese momento con usted, a quien no conozco personalmente, pero que es como si nos conociéramos. No es la primera vez que lo voy a plantear, pero sí es la primera vez que cuento esta anécdota, que cualquier integrante de ese grupo (que ya no existe más, al menos como grupo) podría atestiguar. Un dato más: estábamos en la casa de Osvaldo Uchitel, en la provincia de Buenos Aires. Y listo. Ahora sí, el problema.

La (o lo) invito a que me acompañe hasta una mesa en donde yo distribuí 100 monedas, todas del mismo tipo (digamos monedas de *un* peso). De ellas, 10 están puestas en posición de 'cara'. Las otras 90, obviamente, son 'cecas'. Yo le voy a tapar los ojos con un pañuelo para que usted no vea lo que voy a hacer. Una vez que estoy convencido de que usted ya no ve lo que hago, revuelvo las monedas para que usted no pueda recordar dónde estaban las 'caras' ni las 'cecas'. No cambié caras por cecas, ni viceversa: en ese sentido, las monedas quedaron en la misma posición. Pero lo que *sí* hice fue cambiarlas de lugar, agruparlas de manera diferente para que usted no pueda rastrearlas de acuerdo con la posición en la que las vio originalmente.

Lo que yo le pido que haga es lo siguiente: fíjese si es capaz de diseñar una estrategia, de manera tal que usted pueda separar las monedas en dos grupos (no necesariamente de la misma cantidad de monedas), pero procurando que quede el mismo número de 'caras' en los dos grupos. Antes de que me lo pregunte, usted ***sí*** puede dar vuelta las monedas y transformar caras en cecas y viceversa, pero lo que tiene que quedar al finalizar su 'redistribución' son dos grupos de monedas con el mismo número de 'caras' en cada uno de ellos.

La solución no surge en forma inmediata, o por lo menos no me pasó a mí, ni pasó en ese 'grupo de los sábados', ni en muchísimos otros grupos de personas a quienes propuse el problema, tanto en la Argentina como en otros lugares del mundo. Pero por supuesto, la solución no tiene ni trampas ni artilugios que a uno no se le puedan ocurrir: se basa en una cuestión lógica y, créame, usted está más que capacitada/o para poder idear una estrategia que lo resuelva. Ahora, su turno.

Una estrategia posible

Si me permite, antes de escribir una posible solución me gustaría hacer una reflexión con usted. Los matemáticos utilizamos una herramienta que —creo— es muy poderosa. Obviamente, no se me ocurrió a mí, sino que es subproducto de la experiencia que surge a lo largo de los años. Cuando uno tiene un problema de las características del que está planteado acá arriba, la tentación es abordarlo así como está. Y uno puede hacerlo, si quiere, pero lo que suele ser muy útil es *reducir* el número de monedas (en este caso son monedas, pero podría ser cualquier otro objeto en donde el número es en principio muy grande) y fijarse si uno está en condiciones de resolver el problema en ese caso. Se trata de estudiar 'casos particulares', más pequeños. Si uno lo logra, después intentará adaptar la solución al ampliar el número, pero ese es —suele ser— un problema más sencillo. Veamos.

Le propongo que lo intente primero con cuatro monedas de las cuales *una sola* esté en posición de ‘cara’ o con *seis* monedas de las cuales *dos* estén en posición de ‘cara’. En todo caso, fíjese si abordar estos casos menores la/lo ayuda. Si no, si está dispuesta/o a explotar o a *romper el libro*, entonces siga leyendo. Voy a ofrecerle una potencial solución. No creo que sea la única, pero fue la que se me ocurrió en ese momento y aún hoy, después de tanto tiempo, es la *única* que me sigue acompañando.

De las 100 monedas que están arriba de la mesa, separe ‘de cualquier forma’ *diez* de ellas. Para esto, solamente necesita *contar*. Es decir, con los ojos tapados, uno cuenta *diez* de las monedas y las separa. Del otro lado, entonces, tuvieron que quedar las 90 restantes.

Suponga por un momento que entre las 10 monedas que usted eligió había *tres* caras. Las otras *siete* quedaron del otro lado. Claramente usted no tiene idea de lo que pasó, porque no puede ver cuántas son caras y cuántas son cecas. Lo único que usted sabe es que son *diez monedas*.

Dicho esto, ahora, *dé vuelta las 10 monedas*. Sí, delas vuelta a todas. Las que están caras se transformarán en cecas, y viceversa. Usted sigue sin ver nada, pero antes de continuar me gustaría hacerle una pregunta. ¿Recuerda el número de ‘caras’ que había en el grupo de 10 que usted eligió? Eran tres, ¿no? Lea el párrafo anterior y verá que yo había tomado, a manera de ejemplo, que cuando usted seleccionó las diez monedas quedaron *tres* caras, lo que significa que las restantes *siete* están en el otro grupo, el de las 90.

Cuando usted *da vuelta* ***todas*** *las monedas de su grupo de 10, las tres caras que estaban en su grupo se transforman en cecas,* *pero —y esto es muy importante— las* ***siete que eran cecas ahora se transformaron en 'caras'***. O sea, gracias a esta transformación que usted hizo (al dar vuelta *todas* las monedas), logró que ahora en el grupo de diez monedas que usted seleccionó *siete* de ellas sean caras. ¿Recuerda cuántas *caras* había en el grupo de 90? Sí... ¡siete!

Es decir que, al haber dado vuelta *todas* las monedas de su grupo de diez, usted logró que el número de caras que tiene ahora sea ¡el mismo número que tiene en el grupo de 90! ¡Y eso era justamente lo que queríamos hacer!

¿Habrá dependido de que fueran *tres* caras de un lado y *siete* del otro? ¡No! Fíjese en lo siguiente: si al separar 10 monedas hubiera nada más que *una* cara, eso querría decir que del otro lado (de las 90) quedaron las *nueve restantes*. Cuando usted dé vuelta las 10 monedas, la que tiene cara se transformará en ceca, pero a usted eso no le importa. Lo que *sí* le importa... y mucho, es que las *nueve* monedas que estaban en posición de *ceca*, al darlas vuelta, se transformarán en *caras*, y justamente, del otro lado ¡había nueve caras también!

Reflexión final: si quiere, haga la prueba con todos los casos posibles. Es decir, usando la estrategia de *dar vuelta todas las monedas en el grupo de 10 que seleccionó*, usted transforma las *cecas* en *caras*... ¡y ese es el número de caras que quedaron del otro lado!

¿Es antiintuitivo? No sé, no creo. Lo que a uno le pasa es que internamente *pelea* originalmente con la noción de que el problema no tiene solución y, por lo tanto, se *resiste* a pensar, a estar abierto, pero no me parece que sea antiintuitivo.

Por otro lado, la solución está *ahí*, enfrente de nuestra nariz, pero como uno intuye que la estrategia que tiene que elaborar tiene que ser *muy complicada*, entonces está más dispuesto a abandonar que a seguir pensando. El ejemplo que conté de ese grupo de amigos de hace tanto tiempo lo introduje porque fue una lección para mí también. Fue muy interesante escucharlos discutir, debatir y plantearse cuestiones que uno podría sospechar que no les servirían para llegar a la estrategia final... sin embargo, ***todos*** los caminos que exploraron formaron parte de la solución, aunque más no sea para poder descartarlos. Así es como funciona la vida: prueba y error, con ideas que no surgen de la nada sino que aparecen cuando uno se desafía a uno mismo o es desafiado por otros y, sobre todo, cuando uno *tolera coexistir con la frustración de tener un problema en la cabeza y no encontrarle la solución... al menos por ahora.*

Estrategia con dos candados

Muchísimas escuelas reciben alumnos en dos o hasta tres turnos: mañana, tarde y —eventualmente— noche. Esto hace que la cantidad de estudiantes que recibe el establecimiento sea muy grande. De todas formas, cada estudiante tiene su propio 'armario' o 'casillero' al que puede agregarle un candado para mantener seguras sus pertenencias.

La cuestión es que un alumno A que concurre al turno mañana le quiere dejar un reloj a otro estudiante B que concurre a la noche. La idea de A es poner el reloj dentro de su propio armario (el de A), pero lo que *no quiere hacer* es dejar las llaves de su candado a una tercera persona por temor a que esa llave sea luego 'copiada' y/o utilizada en otro momento. ¿Qué estrategia idear para que A le pueda dejar el reloj a B en su propio casillero sin tener que dejarle la llave a nadie y manteniendo la seguridad que es habitual?

Antes de dejarla/o en paz para que pueda pensar: siéntase libre de usar el candado que tiene B para elaborar su estrategia, pero lo que debería evitar es que intervenga otra persona: los dos únicos involucrados tienen que ser A y B. Ahora sí, su turno.

Me imagino que debe de haber varias formas de resolver este problema y varias estrategias posibles. Yo voy a proponer una, pero *estoy seguro de que si a usted se le ocurri*ó cualquier otra, tiene que ser mejor. ¿Sabe por qué? Porque es *suya*, es la que pensó usted y eso termina siendo impagable.

Acá voy. El estudiante A pone el reloj en su casillero y lo cierra con el candado que usa siempre. Cuando a la noche llega B, está claro que no puede abrir el armario de A porque no tiene la llave, pero lo que *sí* puede hacer es *agregarle un candado* (que voy a llamar candado B), cerrarlo y llevarse la llave. El armario queda cerrado por *dos candados:* el de A y el de B.

A la mañana siguiente, cuando A llega al colegio ahora no puede abrir su propio casillero. El reloj (como el resto de los objetos que allí guarda A) está protegido ahora por esos dos candados y A tiene solamente la llave de uno de ellos. ¿Qué hacer? Bueno... A usa *su* llave, abre su candado y deja el casillero custodiado solamente por el candado B, pero no puede acceder a lo que hay guardado allí adentro ahora.

Pero quien *sí* va a poder abrirlo es B. Cuando B llegue a la noche junto con sus compañeras y compañeros de turno, él tiene la llave que hace falta para abrir el candado que cerró la noche anterior.

Uno podría terminar acá el problema original. Sin embargo, como el candado que habitualmente usa A no está (ni cerrado ni abierto... directamente *no está)*, entonces, ¿cómo hacer para que los otros objetos que A tenga en el armario no queden expuestos y sin protección?

(Intuyo que a esta altura usted ya debe haber pensado una respuesta, pero igualmente, acá va la mía):

B cierra el armario con ***su*** candado. Cuando llegue la mañana siguiente, A no lo puede abrir (porque no tiene la llave de B). Pero lo que *sí* puede hacer es volver a usar *su* candado y dejar el armario cerrado con dos candados otra vez.

A la noche, B usa su llave para abrir su candado, y todos los objetos de A quedan asegurados y protegidos únicamente por el candado que habitualmente usa A.

Con esta idea, el problema *ahora sí* termina a la mañana siguiente. Cuando A llega a la escuela, usa ***su*** llave para abrir el candado y listo.

Esta idea sirve/sirvió para resolver el problema original: sin tener que entregarle la llave a una tercera persona, A y B pudieron diseñar una estrategia que permitió a A entregarle el reloj a B tal como se había propuesto y, en el camino, *no dejar nunca el armario abierto*.

Por último: si bien el problema que yo planteé tiene que ver con un reloj, dos candados y un armario, la misma estrategia se puede utilizar para enviar un mensaje: lo codifica A para que no lo pueda leer nadie que no tenga la 'llave' (para decodificarlo) y se lo envía a B. Cuando B lo recibe, lo *codifica también*. Es decir, ahora el mensaje tiene *dos codificaciones: la de* A *y la de* B. Ahora B se lo reenvía a A. Cuando A lo recibe, lo decodifica con su 'clave' y se lo vuelve a mandar a B. Esta última versión tiene solamente la codificación de B, y B tiene su propia clave para leerlo. Y listo.[25]

25. Yo terminé esta historia sobre los candados y escribí (como usted acaba de leer): "Y *listo*". Carlos Sarraute pensó que podía aportar algo más, y de hecho sirvió para *educarme* en algo que no solo no sabía sino que no advertí. Acá va.

Respecto del último párrafo sobre codificación de mensajes:

Llamemos E_A la función para encriptar de A, y D_A a su función para desencriptar. Se cumple que D_A(E_A(m)) = m

De la misma manera, E_B y D_B son las funciones para encriptar y desencriptar de B.

Lo que vos proponés es:

* A manda E_A(m)
* B le responde E_B(E_A(m))
* A lo recibe y responde D_A(E_B(E_A(m)))
* Finalmente, B calcula D_B(D_A(E_B(E_A(m))))

Para que esto funcione, se tiene que cumplir una condición muy exigente: que se pueda intercambiar el orden de las funciones de encripción, o sea que:

E_B(E_A(m)) = E_A(E_B(m))

Hay sistemas criptográficos que cumplen esa propiedad, pero tienen que haber sido diseñados específicamente con ese objetivo. En la práctica, lo que se usa para mensajes son los sistemas de clave pública y privada.

Encuesta con pregunta prohibida

Corría el año 2004 cuando uno de mis mejores amigos, Claudio Pustelnik, tuvo una idea: concretar un encuentro masivo en la Ciudad de Buenos Aires en donde la *universidad saliera a la calle*. Crear vasos comunicantes entre quienes producen ciencia y la sociedad. Exhibir cómo se hace ciencia, cómo se formulan preguntas, cómo se avanza, quiénes participan, qué interrelaciones hay, en qué áreas somos más fuertes, en qué áreas necesitamos más gente, en dónde hay desempleo cero y en dónde hay superabundancia. También, mostrar cuáles son las preguntas que están en la *frontera del conocimiento*, o sea, preguntas que están tratando de ser contestadas hoy por la ciencia en el mundo, y cuál es la participación argentina en estos desarrollos.

En ese marco, se hicieron algunos encuentros 'extraordinarios', en donde algunos de los participantes, científicos argentinos que vivían en ese momento en el exterior, vinieron hasta la Capital para dar charlas en el teatro Avenida. En uno de esos encuentros, en lo que se llamó el "Primer Festival de Ciencias", Alicia Dickenstein me comentó un problema que ella había escuchado de parte de Eduardo Cattani. Los dos son matemáticos, Alicia y Eduardo. Están fuertemente ligados con mi vida personal, ya que Eduardo fue mi primer ayudante 'alumno', en el año

1965, de la materia Álgebra 1, y Alicia fue una de las más destacadas alumnas que tuve en mi vida y terminó convirtiéndose en una de las mejores matemáticas argentinas de la historia, hoy vicepresidenta de la Unión Matemática Internacional. Eduardo se acaba de jubilar y es hoy profesor emérito en la Universidad de Massachusetts, en Amherst, y también hizo una carrera sencillamente excepcional.

Quise poner en contexto la charla que derivó en el problema que quiero comentar acá, y verá usted que se trata de la utilización de la matemática para sortear un problema muy sensible. Más aún, se trata de una manera *sutil* de evitar un problema.

Supongamos que uno quiere encuestar a un grupo de personas sobre un tema crítico, delicado. Por ejemplo, supongamos que quiere averiguar el porcentaje de jóvenes que consumieron alguna droga mientras fueron estudiantes de secundaria. Es muy posible que la mayoría se sienta incómoda si tuviera que contestar que sí, y de esa forma arruinaría el valor de verdad de la encuesta. ¿Cómo hacer para elaborar una estrategia que permita 'circunvalar' el obstáculo que presenta el pudor o la 'molestia' que genera la pregunta misma?

En el ejemplo que quiero poner acá, el entrevistador le quiere preguntar a cada alumno si consumió alguna droga mientras recibía su educación secundaria, pero el método que va a utilizar es el siguiente.

La alumna (o alumno) entrará en una suerte de 'cuarto oscuro', como si fuera a votar, y una vez que esté allí adentro arrojará una moneda al aire. Nadie está presente, nadie ve lo que ella (o él) está por hacer; lo *único* que se le pide es que sea honesto intelectualmente y respetuoso de las reglas:

1) Si al tirar la moneda salió ‘cara’, entonces tiene que responder que SÍ (cualquiera sea la respuesta verdadera). Es decir, contestará que SÍ, que consumió alguna vez alguna droga.
2) Si sale ‘ceca’, *tiene* que responder la verdad.

En cualquier caso, hay una sola persona que es testigo de lo que ella o él conteste: ella o él. Nadie más.

Con este método, se espera al menos un 50% de respuestas positivas (que son las que provienen de que uno ‘estime’ que la moneda salió cara la mitad de las veces). Es decir, en principio, es *esperable* que la mitad de los encuestados contesten que SÍ, sencillamente porque uno *espera* que la mitad de las veces que tiren la moneda va a salir ‘cara’.

En cambio, cuando uno responda que NO, es porque la respuesta *verdadera* es que NO. Es decir, la o el joven que está siendo encuestado ¡no utilizó ninguna sustancia ilegal!

Ahora, supongamos que un 70% de las personas contestó que SÍ. ¿Qué dice este número, este porcentaje? ¿No tiene la tentación de ver si usted puede interpretar qué aprendemos al conocer este dato? Le sugiero que piense por su cuenta, sin la distracción que ofrece leer lo que estoy escribiendo.

Sigo... El número de respuestas positivas que uno *esperaba de antemano* es de un 50%. Esto se produce porque uno supone que, como la moneda no está cargada, la mitad de las veces tendría que salir ‘cara’, pero como el número final fue de un 70%, hay un 20% más de respuestas que son *afirmativas* y *no provienen del hecho de que la moneda salió cara.* ¿Cómo interpretar este dato?

El hecho es que esto está diciendo que, de las veces que salió ceca (la otra *mitad* de las veces, al menos en teoría), un 20% de los alumnos dijo que SÍ, que había consumido alguna sustancia prohibida. En consecuencia, uno podría inferir que al menos un 40% de los alumnos probó alguna droga. ¿Por qué un 40%? Es que del 50% restante, el 20% contestó que SÍ, y justamente el 20% de ese 50% implica un 40% del total de las personas (fíjese bien si me siguió en lo último que escribí): si el 20% del 50% dijo que SÍ, significa que el 40% del total, de *todos* los alumnos encuestados, contestó afirmativamente.

Este sistema evita 'señalar' a quien contesta que SÍ y exponerla/o a una situación embarazosa, pero al mismo tiempo mantiene viva la posibilidad de averiguar lo que uno pretende. Y esto se pudo hacer gracias a una aplicación sencilla de una *idea*... que proveyó, una vez más, la matemática.

Apéndice

Si usted tiene algo más de formación matemática, seguramente escuchó hablar de lo que se llama la *probabilidad condicional*. En ese caso puedo agregar algunas fórmulas.

Voy a llamar x a la probabilidad de responder que SÍ a la pregunta. Entonces:

$$x = \text{P(salga 'cara')} \times \text{P("SÍ"| si salió 'cara')} + \text{P(salga 'ceca')} \times \text{P("SÍ"|si salió 'ceca')}$$

donde estoy usando la siguiente notación:

P(salga 'cara') = Probabilidad de que la moneda salga 'cara'.
P("SÍ"| si salió 'cara') = Probabilidad de que el estudiante diga que SÍ, habiendo salido 'cara' al tirar la moneda.
P(salga 'ceca') = Probabilidad de que la moneda salga 'ceca'.

P(“SÍ”|si salió ‘ceca’) = Probabilidad de que el estudiante diga que SÍ, habiendo salido ‘ceca’ al tirar la moneda.

Por otro lado:

$$P(\text{cara}) = P(\text{ceca}) = \tfrac{1}{2}$$

$$P(\text{“SÍ”}|\ \text{si salió ‘cara’}) = 1$$

P(“SÍ”| si salió ‘ceca’) = Probabilidad de que el estudiante hubiera consumido alguna droga verdaderamente.

ESTA es justamente la probabilidad que queremos calcular. La voy a llamar **P.**

Luego,

$$x = \tfrac{1}{2}\,1 + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}$$

Por lo tanto, como el objetivo es *evaluar **P***, *despejamos y se tiene:*

$$\mathbf{P} = 2\,(x - \tfrac{1}{2}) \qquad (^{*})$$

Por ejemplo, si el porcentaje de respuestas positivas hubiera sido de un 75%, o sea ¾ partes del total, reemplazo x por ¾ en la fórmula (*):

$$\mathbf{P} = 2\,((\tfrac{3}{4}) - \tfrac{1}{2}) = 2\,(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

En este caso, esto significaría que la *mitad* de la población estudiantil consumió alguna sustancia prohibida durante los cuatro o cinco años en los que estuvo en algún colegio secundario.

Los peces en una laguna

El que sigue es un problema fantástico. Ojalá sea capaz de lograr que lo seduzca tanto como a mí la primera vez que lo vi o supe de él. Verá usted lo que puede la matemática cuando se trata de elaborar una estrategia para averiguar algo que —a priori— parece decididamente imposible. Acompáñeme por acá.

Suponga que estamos los dos, usted y yo, sentados a la vera de una laguna. Creo que yo debo del haber ido a pescar dos veces en mi vida, y quizás exagero. De una me acuerdo, pero debe de haber habido alguna otra. No importa. Hay mucha gente (y tengo muchos amigos) a quienes les *encanta* pescar. No es mi caso, y por múltiples razones. Primero, porque hay que dedicarle mucho tiempo, y yo no puedo verme a mí mismo dedicándoselo a tratar de capturar un animal. Puede que en otra época del desarrollo de la especie humana, si yo hubiera *necesitado* pescar para comer, la historia habría sido distinta, pero hoy, así como están las cosas, ¡no!

Por otro lado, yo no soy muy afecto al pescado en general, salvo algunos muy particulares: atún, salmón... y por favor, no sé cuál es de agua dulce, de mar, nada... Bueno, pero me desvié, como me suele pasar. Decía, usted y yo estamos al borde de una laguna. Vemos que hay gente pescando y a mí se me ocurre preguntar: ¿cuántos peces habrá en esta laguna?

Así planteada, es una pregunta que no puede tener una respuesta *exacta.* Tampoco la espero, pero ¿cómo hacer para *estimar* ese número? Uno de los déficits de nuestra educación en matemática es que en las escuelas no se presta atención suficiente al desarrollo de nuestra capacidad para estimar. ¿Cuántas manzanas tiene una ciudad? ¿Cuántas hojas tiene un árbol? ¿Cuántos ladrillos tiene un edificio? ¿Cuántos días vive en promedio una persona? ¿Cuánto mide un río? ¿Cuántas personas usan transporte público en una determinada ciudad? ¿Cuántos camiones de basura necesita una ciudad para funcionar apropiadamente? Y la lista es enorme... Yo puse *algunas preguntas,* pero estoy absolutamente convencido de que usted puede elaborar la suya... pero, decididamente, es algo a lo que convendría dedicarle *algún* tiempo. Si uno quiere proteger una especie y necesita saber si está en peligro de extinción, por ejemplo, necesita tener alguna forma de estimar la población actual y, por supuesto, la velocidad de reproducción y muerte... En fin, aspiro a que con estos ejemplos haya llamado su atención.

¿Cómo hacer para determinar cuántos peces hay en una laguna? (y este caso después, como usted verá, se puede generalizar y aplicar a *otras* situaciones). Supongamos que la laguna tiene proporciones razonables, de manera tal que tenga sentido siquiera *hacerse* la pregunta. Me interesa aclarar algo más: *estimar* no significa *contar.* Se trata de tener una aproximación, una *idea* de la respuesta. Nadie aspira a tener una respuesta exacta, porque además, no tendría ni sentido ni utilidad práctica. La idea es que uno *no* conteste que hay mil peces pero que tampoco crea que hay doscientos mil millones. Una *estimación, una aproximación.* ¿Cómo hacer?

Conseguimos una red prestada por los pescadores de la zona y nos aprovechamos de la ayuda de ellos para lograr *capturar* *(vivos)* ***<u>mil</u>*** *peces*[26]. Escribí 'vivos' porque la idea es devolverlos al agua en algún momento. Una vez que los tiene a disposición, los *pinta de algún color que no se borre con el agua o les pone una marca indeleble*, o al menos una que lo sea durante cierto tiempo. Para fijar las ideas, digamos que los pintamos de 'amarillo fosforescente'. Cualquier otra sugerencia que se le ocurra a usted será bienvenida también.

Ahora sí, una vez que los vamos pintando, los vamos devolviendo al agua y esperamos un tiempo razonable. Naturalmente, la pregunta es: "¿qué quiere decir 'razonable'? ¿Por qué no *define* lo que usted entiende por *razonable*?". Bueno, por razonable entiendo el tiempo necesario para estar convencidos de que tuvieron oportunidad de volver a mezclarse con los otros, con los que *<u>no habíamos pescado</u>*.

Una vez que uno está seguro (o *tan seguro como le sea posible*), vuelve a pedir la cooperación de los pescadores, y de nuevo les pide que capturen mil peces otra vez. Como es esperable, algunos de ellos estarán pintados y otros no. Para hacer los cálculos más sencillos, voy a suponer que entre estos mil que los pescadores consiguieron ahora aparecen nada más que *diez* que están pintados del amarillo que usamos previamente. ¿Qué está pensando usted? No sabe cuánto daría en este momento para estar en el mismo lugar que usted, pensando juntos... sobre todo si usted nunca escuchó hablar de este problema o de este tipo de estrategia.

---

26. Sería *deseable* que la manera de capturar estos peces sea lo más aleatoria posible, y no concentrar el esfuerzo en una única zona del lago. Si no, se corre el riesgo de que uno los pesque en un mismo sitio y que al devolverlos al agua se queden viviendo en el lugar, y entonces la estimación que uno intenta hacer no se ajustará a la 'realidad'.

Sigo yo. En realidad, entonces, hemos encontrado que *diez* de los *mil* peces están pintados, es decir, la *proporción de peces **pintados** que hay en la laguna es de **diez sobre mil***. (Le pediría que no avance si no se siente cómoda o cómoda con lo que leyó. Relea el texto hasta convencerse de que está de acuerdo conmigo.)

De hecho, lo que hice después de pintarlos es tirar los mil peces de nuevo a la laguna y darles tiempo para que se entremezclen con los que había antes... algo así como darles suficiente tiempo para que todo vuelva a la *normalidad*, a la situación que había *antes* de que yo pescara esos mil. Después, cuando pesque otros mil, lo haré *ignorando* que algunos podrían estar pintados, como si empezara todo de nuevo.

Una vez que tengo estos mil peces, *me fijo* cuántos de ellos están pintados de amarillo y descubro que son *diez*. Y acá llega el momento más interesante de todo lo que escribí: si bien nosotros ***no sabemos*** cuántos peces hay en la laguna (de hecho, estoy haciendo todo este procedimiento para ver si podemos *inferirlo)*, lo que ***sí sabemos*** es cuántos pintados hay: ¡mil! Pero entonces, si cada mil hay diez pintados (o sea, *uno de cada cien)*, y en la laguna *sabemos* que hay mil pintados y que los pintados representan el *uno por ciento* del *total* de peces... entonces, concluimos que *el uno por ciento de los peces que hay en la laguna es **mil***. Luego, en la laguna, ¡tiene que haber cien mil peces!

Como decía, el método está *lejos de proveer un número exacto*, sin embargo permite tener una *estimación, ¡no una certeza!* Pero en la medida que no podemos contar todos los peces que hay, es preferible tener una *idea* que no tener nada.

Para terminar: aunque parezca ingenuo y muy sencillo, este procedimiento se usa *muchísimo* en situaciones equivalentes, y hay también *muchísimo material* en internet con múltiples ejemplos. Creo que convendría dedicar un poco más de tiempo en la escuela a aprender métodos de este tipo, llamados de 'marca y recaptura', para estimar poblaciones, algo que de otra forma sería virtualmente imposible.[27]

Apéndice

Además del ejemplo de los peces en la laguna, hay otro caso de la vida real en donde las estimaciones que se consiguieron fueron verdaderamente espectaculares.

Durante el transcurso de la segunda guerra mundial, los aliados pretendían tener una idea del arsenal con el que contaban los alemanes. En una época en donde no existían las posibilidades que tenemos hoy de tomar fotografías aéreas de alta precisión que permitieran relevar datos de las fábricas en donde se producían los tanques, un grupo de matemáticos e ingenieros diseñó una estrategia que resultó ser de increíble utilidad[28].

Cuando los aliados capturaban tanques alemanes, tomaban nota de los números de serie de las partes o componentes de cada uno. Cuanta más información juntaban mejor podían predecir

---

27. Algunas sugerencias para quienes estén interesados:

a) en.wikipedia.org/wiki/Mark_and_recapture
b) www.biologycorner.com/worksheets/estimating_population_size. html
c) www.radford.edu/~jkell/mark_rec103.pdf
d) www.biologycorner.com/worksheets/random_sampling_key.html

28. "An Empirical Approach to Economic Intelligence in World War II" ("Un abordaje empírico a la inteligencia económica durante la Segunda Guerra Mundial" (es mi traducción del título en inglés). El trabajo fue escrito por Richard Ruggles y Henry Brodie, y apareció en el *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 42, No. 237 (marzo de 1947), págs. 72-91.

el ritmo y la frecuencia de producción, e iban ofreciendo datos a los militares que estaban al frente y tomaban decisiones en el 'día a día'.

Por otro lado, los *espías* de los países aliados hacían sus propias estimaciones. Al terminar la guerra, la pregunta natural era: ¿Quiénes predijeron mejor: los espías o los científicos?

En la siguiente tabla aparecen los datos que corresponden a tres momentos específicos de la guerra: junio de 1940, junio de 1941 y agosto de 1942. Le recuerdo que son estimaciones sobre el número de tanques fabricados por año por los alemanes. En la primera columna están los números estimados por los científicos. En la segunda, las que ofrecieron los *espías*. En la tercera (y última), los *verdaderos* datos obtenidos cuando terminó la guerra. Creo que le será sencillo determinar cuál método fue más confiable.

Fecha	Estimación usando número de serie	Estimación de los espías	Dato real
Junio, 1940	169	1.000	122
Junio, 1941	244	1.550	271
Agosto, 1942	327	1.550	342

Como se ve, las estimaciones hechas 'a ojo' fueron realmente *muy malas*. Claro, uno podría decir que es preferible tener 'alguna aproximación' a no tener *ninguna*, pero fíjese cuánto se mejora ni bien uno usa los datos que ofrecían los números de serie.

La niña que no sabía jugar al ajedrez

La primera vez que vi esta historia fue en uno de los libros que publicó Maurice Kraitchick, mundialmente conocido por sus aportes a la matemática recreativa. Este problema particular apareció en la primera edición del libro *Recreational Mathematics,* de 1953... hace bastante tiempo ya.

Cuando terminé de leer sus notas pensé —una vez más— cómo puede ser que la matemática *haya tenido* tan mala prensa durante tantos años. Espero que usted coincida conmigo, y verá cómo un simple recurso de lógica permite obtener un resultado *práctico*, y todo se debe a la elaboración de una estrategia espectacular. Acá voy.

Violeta (mantengo el nombre Violeta, que fue el nombre que eligió Kraitchick en la versión original) era una niña de 12 años que virtualmente no sabía nada sobre ajedrez. Sin embargo, vio que su padre perdió dos partidas seguidas con sus amigos Alberto y Marcelo. Se acerca y le dice:

—Papá, te aseguro que yo podría hacer un mejor papel que vos frente a ellos. Yo no sé mucho de ajedrez, pero me atrevo a jugarles a los dos, incluso en forma simultánea, y estoy segura de que al menos *no voy a perder las dos partidas como vos*. Es decir: no te puedo decir que voy a ganar las dos, pero te puedo *garantizar* que seguro voy a hacer un mejor papel que vos.

El padre la miró sorprendido y sin poder entender muy bien lo que le decía Violeta. Así que la niña aprovechó y se ocupó de 'subir la apuesta'. Le dijo:

—Te propongo más, papá. Como yo sé que Alberto se considera peor jugador que Marcelo, decile que yo lo invito a que él juegue con piezas blancas; pero frente a Marcelo, las blancas las quiero usar yo. En todo caso, les ofrezco que juguemos las dos partidas en forma simultánea: ¡los enfrento a los dos al mismo tiempo!

Y exactamente eso fue lo que pasó. La pregunta que tengo yo para usted es la siguiente: ¿Por qué podría Violeta asegurar con tanta confianza que ella tendría mejores resultados que su padre? ¿Qué estrategia tenía pensada? ¿Se le ocurre algo a usted?

Antes de darle la libertad para que se tome tiempo para pensar, resumo la situación:

a) Violeta habría de jugar dos partidas simultáneas.
b) Con Marcelo, uno de los amigos del padre, Violeta llevaría las piezas blancas.
c) Mientras tanto, para enfrentar a Alberto, Violeta llevaría las piezas negras.

Piense usted si se le ocurre qué se podría hacer. Yo continúo después.

Una estrategia posible

Cuando Alberto y Marcelo estuvieron dispuestos a empezar las respectivas partidas, Violeta esperó que Alberto hiciera la primera movida. Esto tenía que suceder así porque quien 'lleva las piezas blancas' es quien efectúa la primera movida.

Una vez que Alberto empezó el juego, Violeta *replicó la mo-*

vida de Alberto en el otro tablero, el que utilizaba ella en su partida con Marcelo. Esto está bien, porque en esta otra partida era Violeta quien llevaba las piezas blancas. Entonces a esta altura se produjeron dos movidas: la primera de Alberto en el tablero 1 y la de Violeta en el tablero 2.

Antes de contestar en el tablero 1, Violeta espera que Marcelo conteste en el tablero 2. Ni bien lo hace, Violeta *vuelve a replicar la movida,* pero ahora, la que hizo Marcelo con las piezas negras. Ella traslada esa movida al tablero 1 y le contesta a Alberto.

De esta forma, Violeta va *siempre* replicando las movidas de uno y otro, alternando los tableros: cada movida de las piezas blancas que efectúa Alberto ella la va reproduciendo en el tablero 2 con Marcelo, y las respuestas de este en el tablero 2 Violeta las replica en el tablero 1 con Alberto.

¿Qué es lo que va a suceder? Si empata una partida, también empatará la otra, y si Alberto le gana la partida que están jugando en el tablero 1, ella obligatoriamente le ganará a Marcelo la partida que juegan entre ellos. Y también vale la recíproca; es decir, si es Marcelo quien gana su partida contra Violeta, entonces ella le ganará a Alberto.

En cualquier caso, lo seguro es que Violeta no va a perder las dos partidas, como le sucedió a su padre, y justamente en este contexto es lo único que importa, ya que ella se había *comprometido* a hacer un mejor papel que el padre.

Ah, una última observación: para aquellos que juegan bien al ajedrez, les pido la generosidad de comprender que se trata de un ejemplo, que en todo caso es una solución al problema planteado. No pretendo que ni usted (que está leyendo estas líneas) ni nadie.... considere esta estrategia como una *regla* sobre qué es lo que conviene hacer en una partida de ajedrez cualquiera.

¿Quién tiene el caballo más lento?

Este problema es verdaderamente interesante: sencillo, fácil de entender y, al mismo tiempo, ofrece la oportunidad de diseñar una estrategia que no necesariamente resulta *obvia*. Acompáñeme por acá y dígame qué le parece a usted. Bueno, en realidad usted no me va a poder decir nada, pero créame que me encantaría saber qué impacto le produce. En fin... sigo.

Suponga que usted y yo tenemos dos caballos de carrera. En realidad, yo no monto a caballo desde que era joven, y eso sucedió hace tanto tiempo que la Tierra aún estaba caliente, y la gente no tenía más remedio que estar '*saltando*' para no quemarse. De todas formas, a los efectos del problema, tanto usted como yo tenemos un caballo de carrera.

Lo que suele pasar es que las personas 'normales' compiten para decidir cuál de los dos caballos es el más *rápido*, y no creo que se plantee muchas veces dirimir la otra alternativa. Sin embargo, mientras estoy escribiendo estas líneas pienso: si decidiéramos cuál de los dos caballos es el más rápido corriendo una carrera de las que se usan en los hipódromos, sabríamos *también* cuál de los dos es más lento: ¡el otro!

Ahora bien, supongamos que hay alguna cantidad de dinero en juego (o cualquier apuesta que sirva para *incentivar* a sacar una conclusión honesta). Si yo tratara de exhibir que mi caballo es el más lento, arrancaría la carrera e inmediatamente me detendría, o iría más despacio a propósito. Me bajaría del caballo para preguntarle si es 'feliz', o cosas equivalentes. Es decir, correr una carrera de las habituales... ¡no va a servir! ¿Se le ocurre a usted alguna *otra* idea? De hecho, ¿habrá alguna forma de hacerlos correr una carrera que permita determinar cuál de los dos es el caballo más lento?

La (o lo) dejo en soledad. Yo 'reaparezco' luego.

Una idea

Antes de escribir la estrategia que quiero compartir con usted, se me acaba de ocurrir que uno podría hacer así: podríamos contratar a un jockey cada uno, no decirle a ninguno de ellos lo que está en juego, y esperar el resultado. Como ellos no sabrían que hay una apuesta *en sentido contrario* a lo que suele suceder, la carrera se correría en los términos habituales, y quien resultara *segundo* sería considerado 'el ganador', supongo que ante el estupor de los que estuvieron 'arriba' de los caballos.

Pero una vez que pensé esto, se me ocurrió *otra* idea. ¿Y si, en lugar de *contratar* dos jockeys, intercambiamos los roles? Me explico: ¿qué pasaría si usted corre con *mi* caballo y yo corro con el suyo? ¿Quiere pensar?

Si hiciéramos así, entonces yo trataría de que su caballo gane, o sea, intentaría hacer el mejor esfuerzo posible para hacerlo llegar primero. Al mismo tiempo, usted, que estaría montando *mi* caballo, trataría de hacer lo mismo. En definitiva, *los dos estaríamos intentando <u>genuinamente</u> ganar la carrera.* Al terminar, el que salga segundo sería *verdaderamente* el más lento de los dos. ¡Y listo!

De paso, nos sirve para ahorrarnos el costo de contratar a los jockeys. ¿Usted qué piensa?

Doce amigos y las siete pizzas

La situación es la siguiente: usted invita a su casa a 11 amigos. Incluyéndolo a usted, son 12. Van a ver un partido del seleccionado argentino de fútbol. Hace un cálculo aproximado de cuántas pizzas van a necesitar, y pensando que además de pizzas comerían empanadas, decide que va a pedir siete. ¿Por qué *siete*? Es algo que usted no va a poder explicar: le pareció que con siete serían suficientes, que no todos comen la misma cantidad, que hay otros a quienes les gustan más las empanadas... El hecho es que no sabe por qué, pero pidió *siete pizzas*.

Llega el momento en que las van a buscar (la pizzería queda *al lado* de su casa), las suben y ahora están las siete cajas esparcidas por la cocina. Como si se hubieran contagiado, esa noche en particular *¡todos quieren pizza!*

De acuerdo: en todo caso, siempre pueden pedir más, pero usted quiere ser justo: quiere dividir las pizzas de manera tal que *todos* coman la misma cantidad. ¿Cómo hacer? Es que a usted no se le escapa que cortar cada pizza en *doce porciones* es muy complicado. Le facilita el trabajo que las siete pizzas sean todas iguales, pero... ¿cómo hace para cortar cada pizza en 12 porciones?

Es acá en donde interviene la matemática para ofrecer alguna estrategia diferente a la que ya se les ocurrió a todos (cortarla en 12). ¿Se le ocurre a usted alguna otra variante?

Mientras tanto, yo sigo acá.

Una idea posible

La tentación inicial es ciertamente la de cortar las pizzas en 12 porciones iguales cada una, pero ya nos pusimos de acuerdo (espero) en que esa es una solución *impráctica*. Otra posibilidad, entonces, es la que aparece en la Figura 1.

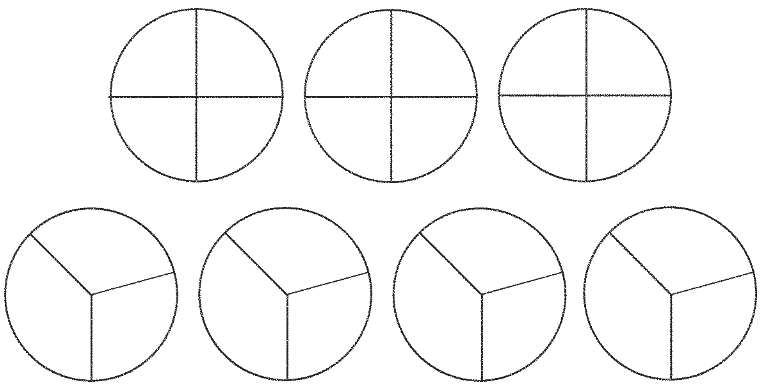


Figura 1

Una vez que cortó tres de ellas en cuatro porciones iguales cada una, y las otras cuatro en tres porciones iguales, las siete pizzas quedaron divididas —en total— en 24 porciones. El problema es que *estas 24 porciones <u>no son todas iguales</u>*, pero esto no importa, porque hay 12 que son iguales entre sí, y otras 12 que también lo son. Todo lo que usted tiene que hacer es darle a cada uno una porción de las 12 que se obtienen al haber divido tres de las pizzas en cuatro porciones iguales cada una, y otra porción de las 12 que aparecen al haber cortado cuatro de las pizzas en tres porciones iguales. ¡Y listo!

Parece una pavada, y de hecho lo es, pero cortando las pizzas con esta estrategia resuelve el problema sin tener que ser un 'mago' con el cuchillo.

Estrategia para elegir dos equipos de fútbol

Como —casi— todos los niños que nacimos en la Argentina, en algún momento estamos expuestos a jugar algún partido de fútbol. Muchos de nosotros hemos jugado mucho, pero también hay muchos otros que no. En la época en la que yo nací, y en los barrios en los que yo viví mi infancia (Chacarita, Colegiales, Villa Crespo), había algunas calles que aún eran de tierra o empedradas, o había vías por donde pasaba el tranvía. Jugar 'a la pelota' tenía sus atractivos e inconvenientes. Tengo varias anécdotas para contar, pero nunca creí que merecieran una nota. Sin embargo, varios de mis amigos me impulsaron a que las compartiera con aquellos que quizás las vivieron como yo, aunque más no sea porque nacimos en la misma época. El primer nombre que se me ocurre es el de Alejandro Dolina. No sé qué edad tiene Alejandro, pero he leído tantas cosas de él que me han representado a lo largo de los años que me permiten sospechar que él debe de conocer muchas más historias que yo y, por supuesto, las podría contar *muchísimo* mejor que yo. De todas formas, tengo un par que quiero compartir.

Éramos todos chicos, y como dije, jugábamos en algún 'campito' (canchas había muy pocas, al menos, para poder jugar en forma más organizada), y si no, directamente en la calle. Había algunas reglas nunca escritas pero siempre respetadas: al primer grito de '¡AUTO!', se suspendía la acción como si nos hubiéramos quedado petrificados. La otra palabra que también recuerdo que nos hacía detener el juego era ¡GENTE!, es decir, mientras se jugaba había que atender a lo que sucedía en el entorno. Pero lo que nunca entendí —hasta llegar a 'muy mayor'— es algo de lo que si usted nunca escuchó hablar va a pensar que estábamos todos locos. La situación era así. Estaba por empezar un partido cualquiera (amateur, claro está.... nunca supe si esto sucedía entre los profesionales, pero lo dudo). El equipo que *empezaba* el juego necesitaba tener dentro del 'círculo central' (ficticio o real) a dos jugadores. Uno de ellos (el 'centroforward') era quien tocaba la pelota hacia adelante, y una vez que daba una vuelta a toda su circunferencia, sabíamos que había empezado el partido. Hasta que eso no sucediera, los rivales tenían que estar 'afuera' de ese círculo (imaginario o no). Pero lo notable es que, antes de empezar el juego, el jugador que habría de tocar la pelota por primera vez miraba a alguno de los rivales y le decía: "¡Aurieli!" (*sic*). Alguno de los jugadores del equipo contrario era el encargado de contestar: "¡Diez!" (también *sic*). Es decir, el partido no empezaba hasta que se cumplía con esta rutina. Y este *ritual* (por llamarlo de alguna forma) estaba extendido por todos lados. No dependía del lugar del país en donde jugáramos, porque yo recuerdo haber ido a jugar a muchísimas partes y en todos lados se repetía lo mismo. Durante muchísimos años, más de cuarenta... o quizás cincuenta, no entendí qué era lo que hacíamos. Nunca. O mejor dicho, debería decir que no entendía qué objetivo se cumplía. Hasta que no hace mucho tiempo (y lamento no recordar cómo fue que lo supe) hubo una persona del fútbol que me lo explicó y, de pronto, me sirvió para iluminarme: pasé de *no entender a comprender qué era lo que había pasado durante tanto* *tiempo*. Lo extraordinario es que como el fútbol es un juego de origen inglés, fueron ellos quienes lo trajeron a nuestras tierras. El clásico 'fair play' se exhibía también en el fútbol y, por lo tanto, las dos palabras que yo nunca había logrado entender resultaban ser dos adaptaciones 'fonéticas' a lo que escuchábamos de los europeos. En realidad, 'aurieli' era nuestra interpretación de "Are you ready?", que en inglés significa "¿Están listos?"; y naturalmente, si el otro equipo *estaba listo*, debía contestar que ¡sí!, solo que en lugar de entender que lo que se decía era "¡Yes!", se replicaba "¡Diez!"[29].

A propósito, algo menor que quiero destacar: como yo jugué mucho de chico, dependiendo de las edades de mis compañeros de equipo, me dejaban (o no) patear los penales. Curiosamente, cuando jugaba con los más grandes me los dejaban patear a mí, pero cuando jugaba con los chicos de mi edad, no. Pero no es esto a lo que me quiero referir, sino que cuando alguien pateaba un penal (yo o cualquier otro), si convertía el gol, ¡no lo gritaba! Uno se pegaba media vuelta y se volvía para el círculo central a reanudar el partido. Hubiera sido visto como una 'afrenta' o una 'falta de respeto' al rival 'gritarle un gol de penal'...

Y hay algo mucho más reciente que me sorprendió porque no puedo entender cómo no se me/nos ocurrió antes, y de paso, me dio una excusa para elegir el título de esta nota. En esos mismos 'campitos' o en la calle, nos juntábamos para 'jugar a la pelota'. Nadie iba a 'jugar al fútbol': jugábamos 'a la pelota'.

---

29. Hace unos días, enterado de esta historia, fue Manu Ginóbili quien me advirtió que él ya la había leído en un artículo escrito por Rolando Hanglin en el diario *La Nación*, aunque Rolando la cuenta con 'Aurieri' y yo la recuerdo como "Aurieli", pero a los efectos prácticos es exactamente lo mismo. Yo le creería más a Rolando que a mí, pero igualmente, como yo no estaba enterado de esa nota, lo tomo como una 'validación' más de mi recuerdo.

Cuando estábamos todos reunidos, había que elegir cómo distribuirnos, quién jugaba con quién. Y hacíamos así: primero, *por consenso no explícito*, había dos jugadores que eran tácitamente reconocidos por sus pares (nosotros) como los dos mejores que habrían de participar del partido. Ahora sí que puedo afirmar rotundamente que yo nunca tuve el privilegio de ser uno de esos dos. Supongo que, mirado desde afuera, suena a que había dos 'caciques' más que dos 'capitanes'. Una vez que se sabía quiénes liderarían cada bando, había que determinar cómo nos habríamos de distribuir. Estos dos jugadores se situaban a una distancia aproximada de unos diez o quince metros (no tome muy 'literalmente' estos números porque en realidad no me acuerdo, pero poco importa para lo que quiero contar acá). Una vez que esto sucedía, cada uno iba dando un paso en dirección al otro, apoyando primero un pie y, cuando le tocaba avanzar otra vez, el segundo pie de manera tal que la punta del que ya estaba en el piso tocara el talón del que tendría por delante. El primero que llegaba con la punta de su zapatilla/botín/zapato (o lo que fuere, porque algunas veces jugábamos descalzos), el primero que llegaba a 'tocar' la punta del pie del otro, ese tenía garantizado que iniciaría la elección. No se le escapa a usted que quien tuviera ese privilegio tenía la oportunidad de elegir 'al mejor de todos los jugadores que no era ninguno de ellos dos', o sea, el mejor del 'resto'. A partir de allí, se iban alternando hasta agotar los jugadores.

Varias cosas que la/lo invito a que piense conmigo:

a) Ser uno de los dos 'capitanes' era un privilegio muy particular, y mucho más si ni siquiera había que 'decidir' quiénes lo serían. Era *tal* el peso específico de los dos mejores que no había discusión ni votación ni debate: era así ¡y listo!

b) Los peores 'iban al arco'. Otra verdad que nunca se discutía. O los más gordos o los menos atléticos, pero esencialmente quedaba establecido que los que peor jugaban terminarían arrumbados 'lejos del juego'.
c) Por último: ¿se imagina quedar uno de los últimos para ser elegido? De la misma forma que los capitanes no se elegían, llegado el instante final de la distribución de los 'peores', estar en ese grupo (del que *formé parte... muchas más veces de las que me hubiera gustado*) era bochornoso. Y ni hablar de que al final, cuando ya la selección no tendría mayor incidencia en cada equipo, y tratando de exhibir su 'generosidad' para con el otro, uno de los dos capitanes se podía permitir: "Bueno, quedate vos con los dos. Jueguen ustedes con uno más, ¡no importa!".

No quiero arrancar en la dirección del impacto psicológico que eso tenía (y estoy seguro de que *aún hoy tiene)*, sino que quiero ir para 'otro lado', algo así como aportar un agregado del siglo XXI. Nunca presté atención al hecho de que esa forma de elegir no es tan equitativa como parece.

Es decir, está todo bien hasta el momento de decidir quién elige primero. No importa cuál sea el método, alguno de los dos capitanes *tiene que elegir*, pero lo que nunca pensé es que 'la alternancia' no es el método más justo. Se pueden proponer mejores, y me llama mucho la atención que nunca escuché —entre nosotros— ninguna discusión o que alguien haya dudado del procedimiento.

Fíjese ahora en esto que se podría hacer: llamemos A y B a los dos capitanes. Uno de los dos empezará eligiendo, digamos "A". Ahora bien, después de A tiene que elegir B, y hasta acá está todo bien también. Pero mi propuesta es que después ¡vuelva a elegir B!

De esta forma, se compensaría/equilibraría el hecho de que A eligió primero. Eso le dio la alternativa de elegir el mejor jugador de todos los que estaban disponibles para el juego, pero entonces B tendría que elegir en el lugar 2 y 3 también, y A debería volver a elegir recién en el cuarto lugar. De hecho, la secuencia tendría que ser así:

A-B-B-A-B-A-A-B... (*)

Y de haber ganado B 'al pisar', entonces, la selección debería ser:

B-A-A-B-A-B-B-A[30] (**)

Esta forma de elegir tiene su origen en lo que se llama la sucesión de 'Thue-Morse'. Es decir, no se me ocurrió a mí, pero lo que sí me parece es que se podría adaptar esa idea en el caso de tener que seleccionar dos equipos (de fútbol o de lo que sea)[31].

---

30. Si hay más de ocho jugadores, la sucesión continúa repitiendo el mismo patrón que con los primeros ocho, como si empezara a elegir de nuevo. Es decir: ABBABAABABBABAABABBABAAB...

31. Una curiosidad (quizás solo para quienes tienen algún gusto particular por la matemática). Fíjese que (si hubiera ocho jugadores nada más) lo que estoy proponiendo es que los lugares en los que elige A son: 1, 4, 6 y 7 (*), y los lugares donde elige B son: 2, 3, 5 y 8.

Un hecho notable, que serviría para *justificar aún más* la igualdad de fuerzas que se consigue con esta forma de elegir, es si uno 'suma' los lugares en los que elige cada uno. Fíjese que para A (al elegir en los lugares 1, 4, 6 y 7) esa suma es: 1 + 4 + 6 + 7 = 18, mientras que para B (al sumar los lugares 2, 3, 5 y 8) da el número: 2 + 3 + 5 + 8, que ¡también es igual a 18! Pero aun más:

Una observación final: no quiero decir que 'antes' éramos mejores porque no gritábamos los goles de penal o porque éramos más 'caballeros' porque les preguntábamos a los rivales si estaban listos para empezar: ¡no! Más aún, ni siquiera sabíamos que eso era lo que hacíamos, de manera tal que no puedo proponer que nos quedemos con el crédito de algo que no elegíamos hacer con esa idea. Cada uno de nosotros vivió una época distinta, ni mejor ni peor: distinta. Yo disfruté de la que me tocó vivir en aquel momento y hoy cambió, y lo que sí puedo decir (que ya es muchísimo más opinable) es que estoy convencido de que cambió para mejor. Sí, ya sé: usted no está de acuerdo, ¿no es así? No importa, muchas veces yo tampoco estoy de acuerdo conmigo mismo, pero en este caso... sí.

---

si uno 'eleva al cuadrado' los números que indican la posición en la que elige cada uno, y después los suma, fíjese lo que sucede:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 1 + 16 + 36 + 49 = 102$$

y, por otro lado,

$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 4 + 9 + 25 + 64 = 102$$

lo cual le da aun más fuerza a la paridad que se logra.

Parejas estables

El siguiente problema[32] es fascinante. Tuvo a muchísima gente intrigada en la búsqueda de una solución que finalmente fue aportada por dos científicos norteamericanos, Alvin Roth y Lloyd Shapley. Tal fue el impacto que produjo que ambos recibieron el premio Nobel de Economía en 2012.

Voy a presentar una versión sencilla y aplicada a un caso particular, pero usted entenderá luego de leer el texto la importancia que tiene el algoritmo que ambos encontraron para resolver problemas muchísimo más complejos, a los que voy a hacer mención sobre el final. Acá va.

Se supone que hay dos grupos de personas, hombres y mujeres. Hay la misma cantidad de unos que de otros. La idea es tratar de formar parejas de la mejor manera posible para asistir a un baile[33].

32. En matemática y economía, el problema es conocido como "El Problema del Matrimonio Estable" (SMP, por sus iniciales en inglés: "Stable Marriage Problem").

33. Me siento incómodo por tener que hacer la aclaración, pues en realidad cada persona tiene derecho de elegir su compañero/a de baile como le dé la gana, incluso salir a bailar sola/o... pero, a los efectos del problema que estoy planteando, permita que me tome la licencia de haber tenido que

Por supuesto, la definición de mejor es muy vidriosa, porque ¿quién puede saber cuál es la mejor elección que cada individuo pueda hacer? Con todo, me permito algunas licencias y avanzo con la idea.

Para presentar el caso, voy a suponer que en total hay cinco hombres y cinco mujeres, y que cada uno de ellos intenta formar una pareja con alguien del otro sexo para asistir a la fiesta.

Se pide a cada uno que haga un orden de preferencias. Es decir: cada hombre tendrá que escribir cuál sería su primera opción, luego la segunda, la tercera, la cuarta y la última. Naturalmente, las mujeres harán exactamente lo mismo: cada una ordenará a los hombres de acuerdo con cuál de los cinco le gustaría bailar esa noche, después su segunda opción y así hasta la quinta.

Hay varios objetivos que cumplir.

El primero es que todas las personas involucradas terminen en pareja. Esto no es tan difícil de lograr, teniendo en cuenta que tanto las mujeres como los hombres habrán establecido un orden de preferencias, pero eso debe incluir a las cinco personas del otro sexo. Por lo tanto, todos saben que lo peor que les podría pasar es que terminen yendo al baile con el quinto o la quinta en sus respectivas listas, pero aun así todos tendrán una pareja asignada.

Ahora bien: lo ideal sería que todos terminaran en pareja con la persona que pusieron primero en el orden que establecieron. Usted advierte —sin embargo— que no hay procedimiento que pueda garantizar que eso suceda, ya que, por ejemplo, bien podría pasar que todas las mujeres tuvieran al mismo hombre como

---

'distinguir' el caso particular en donde las parejas estaban integradas por una mujer y un hombre.

primer candidato, y por lo tanto no hay ninguna estrategia que se pueda diseñar que permita satisfacer los deseos de todas las mujeres.

Con todo, si bien ese objetivo es inalcanzable, uno podría aspirar a algo mucho más razonable: vamos a decir que todas las parejas son estables si no existen un hombre y una mujer que se hayan elegido mutuamente antes de las personas con las que terminaron formando pareja.

Es decir, uno querría evitar que haya un hombre H y una mujer M que se tenían mutuamente más arriba en sus respectivas listas que las personas con las que terminaron apareados. O sea, terminaron ambos con parejas no deseadas cuando hubieran podido formar una pareja entre ellos.

Este objetivo es un poco más sutil pero no imposible, y usted verá que termina siendo una consecuencia del procedimiento que voy a proponer ahora.

El proceso se realiza en varias etapas. Voy a suponer que son cinco hombres y cinco mujeres, pero todo funciona de la misma manera mientras haya igual cantidad de personas de cada lado.

Antes de empezar con la distribución de las personas, tanto los hombres como las mujeres establecen un orden de preferencia exhaustivo. Cuando escribo 'exhaustivo' quiero decir que todos los hombres tienen que figurar en cada lista que presenten las mujeres, y todas las mujeres tienen que aparecer en cada lista que presenten los hombres. Ahora sí, estos son los pasos a seguir.

El proceso

Cada hombre le ofrece formar pareja a la mujer que aparece primera en su lista.

Una vez recibidas todas las propuestas por parte de los hombres, cada mujer revisa los ofrecimientos que tiene. Si tiene uno solo, se queda con esa oferta. Si no tiene ninguno, espera a una futura etapa (que inexorablemente tendrá que llegar, como ya se verá en el procedimiento), y si tiene dos o más ofertas, elige la oferta del hombre que está más arriba en su orden de preferencias.

Quedan conformadas entonces algunas parejas[34]. Estas parejas son temporarias y no necesariamente definitivas.

En todo caso, lo que SÍ importa señalar es que los hombres que fueron rechazados por la mujer a la que le hicieron una oferta ya no podrán volver a invitarla. Solo podrán invitar a mujeres que están por debajo en su orden de preferencias. Es decir, en la ronda siguiente, cada hombre descartado por una mujer deberá ofrecerle formar pareja a la mujer que le sigue en su lista respectiva.

Y el proceso sigue así: como ya dije, cada hombre que todavía no está en pareja le ofrece formar pareja a la primera mujer de su lista a la que todavía no había invitado hasta allí, incluso a aquellas mujeres que ya están en pareja (temporaria). No importa: ellos tienen que invitarlas igual.

A su vez, una vez recibidas las nuevas propuestas, cada mujer evalúa sus nuevos oferentes, y responde de acuerdo con estas reglas:

1. Si ya estaba en pareja con otro hombre y no le llega ninguna oferta nueva, se queda con el que estaba (al menos en esta ronda).

34. Técnicamente, podría ser que quedara formada nada más que una pareja, y eso sucedería si todos los hombres tuvieran a la misma mujer en el primer lugar. En ese caso, esta mujer elegirá al hombre que tiene como primero en su lista, y los otros cuatro quedarán descartados para salir con ella.

2. Si ya estaba en pareja con otro hombre, pero le llega una oferta de un hombre que ella tenía más arriba en su lista, entonces descarta al acompañante que tenía hasta allí y se queda con el nuevo.
3. Si no tenía pareja hasta allí y tiene uno o más oferentes ahora, elige el que está más arriba.

Una vez que se cumplió con esta etapa, podría pasar que las cinco parejas hayan quedado constituidas y, por lo tanto, no haya ningún hombre (y por ende ninguna mujer) que hubiera quedado 'libre'. Si es así, terminó la distribución. Si no, se reanuda el proceso con los hombres que aún quedaron sin pareja.

Creo que ha llegado el momento de elaborar (juntos) un ejemplo. Supongamos que llamamos A, B, C, D y E al grupo de hombres, y 1, 2, 3, 4 y 5 a cada una de las mujeres.

Cada hombre presentó esta lista:

A: 3 - 2 - 5 - 1 - 4
B: 3 - 1 - 2 - 4 - 5
C: 1 - 5 - 2 - 3 - 4 (*)
D: 4 - 1 - 5 - 3 - 2
E: 1 - 2 - 3 - 4 - 5

Mientras tanto, las mujeres elevaron estos cinco órdenes de preferencia:

1: B - C - D - A - E
2: B - C - A - D - E
3: B - C - D - E - A (**)
4: A - C - E - B - D
5: A - C - D - B - E

Le sugiero que usted se siente en soledad y trate de seguir las reglas que escribí antes y vea a qué parejas llega. Yo voy a hacer lo mismo.

Primera etapa:

A le ofrece a 3
B le ofrece a 3
C le ofrece a 1
D le ofrece a 4
E le ofrece a 1

Como resultado de estas propuestas, esta es la situación que enfrentan las mujeres:

La mujer 1 recibió ofertas de C y de E. Como ella tiene a C por encima de E (ver (*)), entonces, por el momento, acepta la oferta de C, descarta a E (que ya no la podrá invitar en ninguna etapa futura), y por lo tanto queda conformada la siguiente pareja:

1C

La mujer 2 (igual que la mujer 5) no recibió ninguna oferta.

La mujer 3 recibió dos ofertas: de A y de B. Como ella tiene a B mejor conceptuado que a A, entonces elige a B, descarta a A (que ya no podrá invitarla en futuras etapas) y se forma una nueva pareja:

3B

La mujer 4 recibió una sola oferta (de parte de D) y, por lo tanto, como es la única, queda integrada la pareja

4D

Y ahora comienza una nueva etapa. Los hombres que quedaron sin pareja aún son E y A (que fueron descartados por las mujeres 1 y 3, respectivamente).

E había ofrecido originalmente a 1 (la primera en su lista). Ahora, descartado que fue por ella, le ofrece a la siguiente mujer en su lista: la número 2.

Por su parte A, descartado en su primera propuesta por 3, ahora le ofrece a la siguiente mujer en su lista (con independencia de si él la ve momentáneamente en pareja o no): la número 2, también.

Ahora, como la mujer número 2 no había tenido originalmente ninguna oferta, opta por la propuesta de A, ya que lo tiene por encima de E en sus preferencias (como se ve en (**)). Elige a A y descarta a E.

Luego, queda formada una nueva pareja:

2A

El único hombre que queda sin pareja (por ahora) es E (quien ya fue descartado por 1 y por 2). Entonces, para seguir con el procedimiento establecido, hace una oferta a la siguiente mujer que tiene en su lista después de 1 y 2: le ofrece a 3.

Pero 3, que ya está formando pareja con B, evalúa si su nuevo oferente (E) está mejor o peor ubicado que quien ella tiene asignado. Como 3 tiene preferencia por B que por E, se queda con quien estaba, y rechaza a E.

E, ya mortificado porque avanzan las rondas y todavía no encontró pareja, recurre a su cuarta opción: la mujer 4. Hasta acá, la mujer 4 está en pareja (provisoria) con D. Cuando 4 recibe la oferta de E, tiene que compararla con la de D. Como ella tiene a E por encima de D, descarta a la pareja que tenía hasta allí (D) y se queda con E. Luego, ahora quedó conformada una nueva pareja:

4E

y el hombre que no tiene pareja ahora es D. Hasta acá, D había hecho una sola oferta (la de 4) y se había quedado con ella en todas estas etapas. Por lo tanto, descartado que fue por 4, empieza el rumbo de ofrecerse como candidato a la mujer que le sigue a 4 en su lista. En este caso, le propone a 1. Como 1 está (por ahora) en pareja con C, y C está por encima de D en su lista, descarta la oferta de D y se queda con C.

Entonces D sigue para abajo en su lista de preferencias: luego de 4 y 1, le ofrece a 5.

Como hasta acá 5 no había recibido ninguna oferta, acepta la oferta de D, queda conformada la última pareja:

5D

y el proceso termina acá. Las parejas resultantes son:

1C, 2A, 3B, 4E y 5D

Con este ejemplo como base, quiero hacer algunas observaciones finales.

Primero, creo que está claro que ninguna persona (independientemente del sexo) quedará libre cuando finalice el procedimiento. Lo peor que le podría pasar a cada uno es que en la asignación de pareja le toque su última elección.

Pero lo más importante es descubrir que todas las parejas son estables, en el sentido que ya describí. ¿Por qué siempre ocurrirá esto?

Supongamos que un hombre H y una mujer M terminaron con parejas no deseadas cuando hubieran preferido quedar apareados entre ellos (H y M). Veamos que esto no puede ocurrir. ¿Por qué? Si H prefiriera a M antes que a la mujer con la que terminó asignado, es porque la tiene más arriba en su orden de preferencias. Por lo tanto, tuvo que poder ofrecerle a M antes que a la mujer que venía más abajo y que terminó formando una pareja con él. Si no fue así, fue porque M lo rechazó en algún momento, y eso solo pudo haber ocurrido si M estaba en pareja con alguien que figuraba por encima de H (y no por debajo). Luego, no se pudo haber llegado nunca a esa situación.

Moraleja: todo el mundo termina en pareja, y nadie debería protestar. Se cumplen, en algún sentido, las condiciones ideales para hacer la asignación.

Final

No creo que ningún grupo de personas en su sano juicio utilice este sistema y/o algoritmo para decidir cómo establecer parejas para casarse, por ejemplo. Sin embargo, si uno tuviera una lista de médicos que aspiran a cubrir cargos en distintos hospitales, uno bien podría comparar con el caso de apareamiento que figura más arriba[35]. Es decir, los candidatos prefieren los mejores hospitales, y los hospitales quieren a los mejores médicos (con el mejor currículum). ¿Cómo *decidir* es parte del problema? ¿Toma un hospital a un médico al que no prefiere, porque el que prefiere todavía no aplicó para incorporarse a él? O bien, ¿toma un médico la decisión de presentarse a un hospital cuando sabe que hay otros médicos que están en mejores condiciones que él para aspirar al cargo?[36]

Todas estas decisiones se pueden resolver con algoritmos del tipo que figura más arriba. Lo mismo podría suceder en un grupo de clubes de fútbol, por ejemplo, que reclutar niños para que jueguen para ellos en sus categorías menores. Los niños quieren jugar en los mejores clubes, y los clubes quieren tener a los mejores jugadores. Pero todo no resulta posible. Sin embargo, si cada aspirante (y cada club) estableciera un orden de prioridades como el que figura más arriba, estaría más cerca de minimizar la cantidad de frustraciones que involucra cualquier criterio de selección que uno elija. De hecho, toda elección implica una pérdida: la pérdida de lo que uno no eligió. Saber frustrarse forma parte de un proceso de maduración, pero mejorar las condiciones para decidir significa que esas frustraciones serán

35. Roth utilizó el algoritmo que diseñaron con Shapley para asignar colegios secundarios en la ciudad de Nueva York a estudiantes que egresaban de la primaria durante el año 2003. Y, con algunas variaciones, lo aplicó después en Boston.

36. Roth y otros colegas mejoraron también la forma en la que se asignaban riñones aportados por donantes a quienes los requerían para mejorar su calidad de vida, atendiendo las necesidades de compatibilidad que surgen por los potenciales rechazos e incompatibilidades de grupos sanguíneos.

las menores posible, y forma parte del aprendizaje a convivir en sociedad, donde no siempre lo (que uno cree que es lo) mejor es lo posible[37].

37. No lo agrego en el texto principal, pero me interesa enfatizar que el proceso 'termina' en algún momento y uno no puede entrar en una suerte de círculo o ciclo que continúa indefinidamente. De hecho, una mujer no puede ser elegida nunca dos veces por el mismo hombre y eso garantiza que haya un final en donde todos los hombres tengan asignada una mujer y viceversa.

Solitario búlgaro

Tome un grupo de 45 cartas (de un mazo de 52, por ejemplo).

Divida este grupo en tantas pilas de cartas como quiera, incluso de una carta cada una, como prefiera. Ahora, siga este procedimiento:

1) Tome una carta de cada pila y forme con ellas una pila nueva.
2) Tome esta nueva pila y agréguela a las pilas que le quedaron (con una carta menos cada una, ya que usted fue 'sacando' una de cada una).
3) Ahora repita los dos pasos anteriores.

¿Qué pasará a medida que uno va avanzando con este proceso?

Voy a tomar un ejemplo cualquiera (usted, prepárese el suyo y vaya comparando con lo que yo hago acá).

Yo las voy a separar así:

(35, 2, 3, 1, 4)

Esta notación significa que tengo cinco pilas que tienen —respectivamente— 35, 2, 3, 1 y 4 cartas cada una.

Ahora retiro una carta de cada pila y entonces me quedan:

(34, 1, 2, 0, 3, 5)

En realidad, en donde puse el número 'cero' ahora ya no habrá más una pila, pero apareció una nueva con cinco cartas (que fueron las cinco que construí retirando una de cada una de las pilas originales). O sea:

(34, 1, 2, 3, 5)

Sigo una vez más. Ahora tengo:

(33, 0, 1, 2, 4, 5)... o sea, (33, 1, 2, 4, 5)

Próximo paso:

(32, 0, 1, 3, 4, 5)... o sea, (32, 1, 3, 4, 5)

Y ahora, anoto acá los pasos que siguen (le pido que usted monitoree mis resultados), o mejor aún, ¿por qué no hace las cuentas usted y después cotejamos lo que le dio a usted con lo que me dio —o me fue dando— a mí en cada uno de los pasos?

(32, 1, 3, 4, 5)...
(31, 2, 3, 4, 5)...
(30, 1, 2, 3, 4, 5)...
(29, 1, 2, 3, 4, 6)...
(28, 1, 2, 3, 5, 6)...
(27, 1, 2, 4, 5, 6)...
(26, 1, 3, 4, 5, 6)...

(25, 2, 3, 4, 5, 6)...
(24, 1, 2, 3, 4, 5, 6)...
(23, 1, 2, 3, 4, 5, 7)...
(22, 1, 2, 3, 4, 6, 7)...
(21, 1, 2, 3, 5, 6, 7)...
(20, 1, 2, 4, 5, 6, 7)...
(19, 1, 3, 4, 5, 6, 7)...
(18, 2, 3, 4, 5, 6, 7)...
(17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)...
(16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8)...
(15, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)...
(14, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8)...
(13, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)...
(12, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8)...
(11, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)...
(10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)...
(9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)...
(8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9)...
(7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9)...
(6, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9)...
(5, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9)...
(4, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9)...

Ahora, en este punto y antes de seguir me permito hacer una observación: note que es la primera vez que aparecen *TODOS* los números entre 1 y 9 y que la SUMA de estos números es justamente 45, el número de cartas que usted había elegido originalmente. De por sí, ya es notable que hayamos obtenido todos los dígitos desde el uno hasta el nueve habiendo empezado con una distribución cualquiera: (35, 2, 3, 1, 4). Como usted intuye, una pregunta que queda pendiente es saber si, 'independientemente de la distribución de las 45 cartas que originalmente elegí, *siempre* habríamos llegado a la configuración (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9); pero antes de abordar ese problema, le propongo que sigamos desde donde llegamos y veamos qué sucede.

(4, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9). Las voy a reordenar, dado que el orden en el que están las pilas no afecta lo que estamos haciendo. Empiezo entonces desde (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Ni bien quiero formar una nueva pila usando el método que venimos siguiendo, uno descubre de inmediato que obtiene *NUEVAMENTE* el mismo número de pilas y el mismo número de cartas en cada una. Es decir, volvemos a obtener: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). No tiene sentido seguir, entonces: hemos entrado en lo que se conoce con el nombre de 'lazo', ya que al pretender avanzar uno sigue en el mismo lugar.

Le propongo que tomemos *menos* cartas, en lugar de 45. Empecemos con 10. Usted elija tantas pilas como quiera y ponga el número de cartas que prefiera en cada una de ellas. Yo elijo así:

(2, 4, 2, 2)
(1, 3, 1, 1, 4)
(2, 3, 5)
(1, 2, 4, 3)... y listo: una vez más, igual que en el ejemplo de las 45 cartas, hemos llegado a un 'lazo'. Aunque pretenda avanzar desde acá, *siempre* voy a obtener: (1, 2, 3, 4).

Como desde acá 'no veo' lo que hizo usted, estoy seguro de que le pasó lo mismo. Ahora bien, quiero hacer algunas observaciones 'no casuales'.

En principio, esto que hemos verificado son NADA MÁS que dos ejemplos. Pretender sacar de ellos una conclusión general es cuanto menos bastante osado. Sin embargo, la única manera de poder conjeturar resultados que tengan mayor validez es apoyarse en lo que sucede con los casos particulares y ver si uno puede ‘detectar’ algún patrón.

Fíjese que cuando empezamos con 45 cartas, el resultado al que llegábamos al final era (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), y cuando empecé con 10 llegamos a (1, 2, 3, 4). Si usted hace la suma de cada uno de los números que aparecen entre paréntesis, en el primer caso (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 45 y en el segundo (1 + 2 + 3 + 4) = 10. Es decir, en el primer caso obtenemos <u>nueve</u> pilas con números que van creciendo desde el *uno* hasta el *nueve*, mientras que en el segundo caso obtenemos <u>cuatro</u> pilas que van creciendo desde el *uno* hasta el *cuatro*. Quiero escribir acá dos preguntas que me surgieron a mí (quizás a usted se le ocurrieron antes, y eso estaría muy bien):

a) Si distribuye las 45 o las 10 cartas en diferente número de pilas, ¿siempre llega a la misma distribución (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y (1, 2, 3, 4)? Si uno empieza con más (o menos) pilas o con otro número de cartas en cada una de ellas, ¿llega al mismo ciclo?
b) Como observé recién, la suma de los números entre paréntesis *reproduce* el número de cartas con las que empecé, pero si empiezo con otro número de cartas (digamos ocho), está claro que *nunca* voy a llegar a una distribución como las que hay más arriba, ya que la suma de los primeros números naturales va dando (a medida que hago crecer el número final):

    a. 1
    b. 1 + 2 = 3
    c. 1 + 2 + 3 = 6

d. 1 + 2 + 3 + 4= 10
e. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
f. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6= 21
g. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7= 28
h. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8= 36
i. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9= 45

Si me permite, quiero *presentar* a estos números que hemos obtenido recién: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45... y así siguiendo. Se llaman *números triangulares*. Son los números que aparecen en la distribución de los *bolos* cuando uno está jugando al bowling. Si usted nunca prestó atención a este hecho, le sugiero que lo haga la próxima vez que vea la distribución de los 'palos' en la pista. Pero, para variar, me desvié y quiero volver. Ahora que ya 'tenemos entre nosotros' a los números triangulares, está claro que son ellos 'los únicos' que podrían aspirar a tener la propiedad de que, si uno elige ese número de cartas para determinar las pilas con las cuales va a 'jugar a este solitario búlgaro', entonces es posible que al final termine con una distribución que involucre a todos los números naturales en forma creciente (hasta que la suma de todos llegue a ser el número final de cartas). Pero si yo empiezo con *nueve* cartas, eso no puede suceder, ya que si sumo los primeros cuatro naturales (1 + 2 + 3 + 4 = 10) *supero* al número nueve, y si 'paro' antes (1 + 2 + 3 = 6) no me alcanza para llegar (hasta el nueve).

Entonces, otro par de observaciones:

1) Si uno elige un número de cartas que coincida con alguno de los números triangulares (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + *n)*, entonces, 'sea cual fuere la configuración inicial', *siempre*

se llega a tener *n* pilas con 1, 2, 3, 4, 5, ..., *n* cartas en cada una. Por ejemplo, si uno empezara con 55 cartas, luego de un número de pasos inexorablemente llegará a tener diez pilas con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 cartas respectivamente en cada una.

2) ¿Y qué pasa si uno empieza con un número de cartas que **no** se corresponda con un número triangular? Está claro que no podemos aspirar a que se repita un patrón como los de antes, pero como el número de cartas en cada paso del proceso se mantiene constante (o sea, si uno empieza con *nueve* cartas, la suma de las cartas en cada paso sigue siendo *nueve*). Esto significa que en algún momento 'alguna configuración' se 'tiene' que repetir, y así se entra en una suerte de 'ciclo'.

   Por ejemplo, empecemos con tres pilas: (5, 3, 1). El proceso sigue así: (4, 3, 2), después (3, 3, 2, 1), (4, 2, 2, 1), (4, 3, 1, 1) y vuelve a (4, 3, 2) (Le sugiero que usted se ocupe de verificar que lo que yo hice está bien, ya que de paso le va a servir para entender un poco más el problema). Es decir, en este caso, cuando uno llega a tener tres pilas con dos, tres y cuatro cartas cada una, esa configuración será 'estable', en el sentido de que si sigo con el proceso, voy a dar vueltas y vueltas, pero inexorablemente voy a volver al caso (4, 3, 2), y por eso se dice que hemos entrado en un 'ciclo'. La conjetura acá sería: ¿será verdad que si uno empieza con un número *no triangular* —como fue el caso de *nueve* cartas que escribí antes— entonces uno llega a un ciclo bien determinado? Es decir, cuando empecé con las nueve cartas distribuidas (5, 3, 1), descubrí que el ciclo empezaba en (4, 3, 2). Si distribuyo las nueve cartas de otra forma, ¿siempre se llegará al (4, 3, 2)?

La respuesta es que si uno tiene la aspiración a que eso suceda en general con números que *no* sean triangulares, lamentablemente eso no sucede, como lo demuestra el siguiente caso: empiece con *ocho* cartas y distribúyalas de estas dos formas: por un lado, (3, 3, 1, 1) y por otro (3, 2, 2, 1). Hagamos juntos el desarrollo.

En el primer caso, esta es la secuencia: (3, 3, 1, 1) (4, 2, 2) y volvemos a (3, 3, 1, 1).

En el segundo caso, (3, 2, 2, 1) (4, 2, 1, 1) (4, 3, 1) (3, 3, 2) y uno vuelve a (3, 2, 2, 1).

Es decir, este ejemplo sirve para mostrar que si uno quería encontrar que para números no triangulares se llega siempre al mismo ciclo, debería abandonar la idea porque eso no es cierto.

Como moraleja: está siempre 'abierta' la oportunidad de pensar en diferentes ideas[38]. Nosotros hemos dado juntos los primeros pasos. A esta altura usted ya no necesita a nadie más que a usted mismo. Permítase pensar en soledad y descubrir nuevos caminos por su cuenta. Si son conocidos o no, resultará irrelevante porque, en definitiva, ¡serán descubrimientos suyos!

Nota final: en en.wikipedia.org/wiki/Category:Recrea-_tional_mathematics hay varias referencias sobre el tema, pero esencialmente hay dos conclusiones de las que ya hablé:

a) Si n es un número triangular, o sea, si $n = 1 + 2 + 3 + \dots + k$, para algún número natural k, entonces 'se sabe' que el

38. Si a usted le interesa el tema y quiere seguir avanzando, le sugiero un artículo publicado en *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92, No. 4 (abril de 1985), págs. 237-250.

Solitario Búlgaro alcanzará una configuración estable, en donde el número de cartas en cada pila será: 1, 2, 3, 4..., k. A este estado se llega en *a lo sumo* ($k^2 - k$) pasos.

b) En cambio si *n* no es triangular, no existe una configuración en la que se estabilice; lo más que se puede afirmar es que en algún momento se entrará en un 'ciclo'.

Cuatro parejas invitadas a una fiesta y la dueña de casa

El siguiente problema es verdaderamente extraordinario. Quiero contar brevemente la historia de cómo me tropecé con él. En febrero del año 2009, en el marco de las conferencias TED, en California, uno de los expositores fue Dan Ariely. Ariely es profesor en el MIT (Instituto de Tecnología de Massachusetts, en Cambridge, muy cerca de Boston). Había leído su último libro (*Predictably Irrational*, o sea, “Predeciblemente Irracional”) y me despertaba mucha curiosidad escucharlo hablar. No solo no defraudó en los 18 minutos que tuvo para exponer, sino que fue uno de los más aplaudidos luego de su charla.

Poco tiempo después, revisando su página web y la historia de Ariely, encontré el problema que quiero contar acá y que me pareció extraordinario. Ahora bien: ¿por qué habría de escribir *extraordinario*? ¿Qué lo transforma en *tal*? Bueno, creo que cuando uno se encuentra con un problema y, luego de leer el planteo, le parece *imposible* que con los datos ofrecidos pueda encontrar la solución… creo que eso solo lo pone en una categoría distinta que la mayoría de las cosas que uno piensa habitualmente.

Es decir, puede que un problema cualquiera sea *muy difícil*, con solución esquiva o potencialmente imposible de encontrar.

Pero eso solo habla de que algunas veces no tenemos el entrenamiento suficiente para abordarlo.

Diferente es el caso de un problema en el cual uno está convencido de que los datos que le dieron *no serán suficientes* para encontrar la respuesta. Eso lo pone en una categoría distinta. Y justamente este problema pertenece a un departamento diferente.

No sé si el autor original es Ariely; sinceramente, no lo sé. Más aún: no lo creo. Pero es irrelevante. Yo lo vi allí por primera vez y luego no encontré un lugar en donde refiriera a quien lo planteó por primera vez, pero igualmente acá va. Eso sí: léalo con atención (es verdaderamente sencillo… al menos de leer), y después se transforma en algo entretenidísimo para pensar.

Una pareja se muda a una nueva ciudad en donde no conocen a nadie. Con la idea de relacionarse y conseguir amigos, decide poner un aviso en el diario local, invitando a parejas (como ellos, de edades parecidas, entre 20 y 40 años de edad) a que se presenten el viernes siguiente a las 8 de la noche en la casa de ellos. Y allí habría una fiesta a la que estas parejas estarían invitadas.

Llegó el día viernes, y a las 8 de la noche, tal como estaba previsto, se presentaron *cuatro* matrimonios. De esta forma, entre los dueños de casa y los visitantes había 10 personas. Nadie conocía a nadie (salvo los miembros de cada pareja entre sí). El dueño de casa les pidió a todos los participantes (nueve, porque se excluyó él) que se acercaran a las personas *que no conocían*, se presentaran y se dieran la mano (por supuesto, con la excepción del marido y/o mujer de su propia pareja).

Después de unos pocos minutos, el dueño de casa intervino otra vez y les pidió a todos que se detuvieran por un instante. Que no se saludaran más, ya que él quería preguntar a cada uno a *cuántas personas había saludado hasta ese momento* (estrechándole la mano, se entiende).

Obtuvo 9 (nueve) respuestas diferentes entre sí: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, entendiendo que la persona que contestó *cero* lo hizo porque todavía no había alcanzado a saludar a nadie.

Otra le dijo: "Yo saludé *exactamente* a una persona".

Otra: "Yo saludé *exactamente* a *dos* personas", y así hasta que la última le contestó que había saludado *exactamente a ocho personas* (que corresponderían, justamente, a los integrantes de las otras cuatro parejas).

Una última observación: el dueño de casa *sí* saludó a sus visitantes pero, como queda dicho, *no* estrechó la mano de su propia mujer.

Ahora sí estoy en condiciones de hacer la pregunta que da origen a este problema: ¿cuántas manos estrechó la dueña de casa? O sea, ¿a cuántas personas saludó la mujer del anfitrión?

Ya sé, parece imposible que uno pueda contestar esta pregunta, pero créame que *sí se puede*.

Ahora es su turno.

Respuesta

Antes de avanzar con el problema propiamente dicho, quiero hacer una observación: en principio, parecería que no hay forma de contestar la pregunta. ¿Cómo habría uno de saber a cuántas personas les estrechó la mano la dueña de casa?

Pero, justamente, esto me ofrece una oportunidad para proponerle algo mucho más general: cuando uno se tropieza con un problema de este tipo, suele ser muy útil *reducir el número de personas involucradas*. En este caso, sería equivalente a *reducir el número de parejas*. ¿Se podrá encontrar la respuesta si en lugar de *cuatro* parejas invitadas hubiera *nada más que una?*

No digo que sirva *siempre*, pero muchas veces si uno resuelve un caso particular, un caso *más pequeño*, las ideas que recoge de allí suelen ser suficientes para poder abordar el caso general. Me explico.

Le propongo entonces que reduzcamos el número de parejas que llegaron a la fiesta y veamos juntos qué sucede.

Pensemos que en lugar de *cuatro parejas* se presentó nada más que *una* (además de los dueños de casa, claro está). En este caso, cuando el dueño invitó a que todos se saludaran y después los detuvo, obtuvo estas respuestas:

1) Yo no saludé a nadie todavía (*cero* saludos).
2) Yo saludé exactamente a *una* persona (*un* saludo).
3) Yo saludé exactamente a *dos* personas (*dos* saludos).

¿Se puede ahora contestar *a cuántos saludó* la dueña de casa?

Veamos. Le propongo que pensemos *qué posibilidades hay de que la mujer del anfitrión haya dado alguna de las tres respuestas posibles: 0, 1 o 2 saludos.*

a) Supongamos que la señora contestó: 'yo no saludé a nadie'. Si fue así, entonces, ¿quién pudo haber dicho que saludó a *dos* personas? Nadie. Porque ni el hombre ni la mujer de la otra pareja se pudieron saludar entre ellos, por lo que quien contestó *dos* ¡tuvo que haber saludado a los *dos* dueños de casa! Pero, entonces, la anfitriona *no pudo haber dicho que ella no saludó a nadie.* Moraleja: No sabemos qué contestó ella todavía, pero ¡seguro que tuvo que haber saludado a alguien!
b) Lo interesante ahora es que —por las mismas razones— ella ¡tampoco pudo haber contestado que saludó a dos per-

sonas! ¿Por qué? Es que si ella hubiera dicho que saludó a dos, estas dos personas *tuvieron que ser los dos integrantes de la pareja que llegó por la invitación del diario.* Si así fue, entonces, ¿quién pudo haber dicho que no saludó a nadie? Ciertamente, ninguno de los dos integrantes de la pareja invitada. Moraleja: la dueña de casa ¡no pudo haber saludado a dos personas!

¿Qué alternativa queda? Esa que usted advierte ahora: la única posibilidad es que ella haya contestado que saludó a *una sola persona.* ¡Y esa es la respuesta en el caso de que hubiera habido una sola pareja que se presentó por el aviso del diario!

Y eso resuelve el problema. (Si quiere pensar un poquito más, uno de los integrantes de la pareja invitada saludó a dos personas, que debieron haber sido los dueños de casa, mientras que el otro integrante de la pareja invitada *no saludó a nadie.)*

Hasta acá, entonces, hemos resuelto el problema en el caso de *una sola pareja.*

¿Qué pasa ahora si en lugar de *una* pareja invitada vienen *dos*? ¿Se puede contestar la pregunta?

Fíjese que las respuestas que obtuvo el dueño de casa ahora son: 0, 1, 2, 3 y 4. Es decir, una persona que no saludó a nadie, otra que saludó *exactamente* a una persona, otra *exactamente* a dos… hasta llegar a una de ellas que saludó *exactamente* a 4 personas. ¿A cuántas tuvo que haber saludado la mujer?

Como hice antes, le sugiero que piense usted por su lado y en todo caso nos reencontramos más adelante. Eso sí: trate de ver si puede relacionar el caso de las *dos parejas* con el caso anterior. Usted ya conoce la solución si hubiera una sola pareja invitada.

Antes de seguir, le pido que preste atención a un hecho importante: cuando yo aborde el caso de *dos* parejas en lugar de *una,* usted verá que los argumentos que voy a usar son *exactamente los mismos que usé recién.* Es por eso que me permito proponerle que avance por su cuenta analizando los distintos casos posibles, y verá que puede llegar a la respuesta sin leer lo que escribo yo.

Ahora sí: supongamos que las respuestas que obtuvo el dueño de casa fueron 0, 1, 2, 3 y 4. ¿Quién podría haber dicho que *no saludó a nadie*? Sabemos que la dueña de casa no saludó a su marido, pero si *ella no saludó a nadie* entonces alguna persona de las otras dos parejas tuvo que haber saludado a 4 personas: ¿cómo hizo? Si a *su* propia pareja no la pudo saludar y a la dueña de casa tampoco, ¡no le quedan 4 personas para haber saludado! Conclusión: la dueña de casa, *igual que en el caso anterior,* no pudo haber contestado que no saludó a nadie.

Ahora bien: ¿pudo la anfitriona contestar que ella saludó a 4? Si así fue, entonces saludó a los cuatro integrantes de las dos parejas que vinieron de visita. Pero si este es el caso, entonces, ¿quién pudo haber dicho que no saludó a nadie? No puede ser, porque todos los que llegaron *tuvieron que haber saludado a la dueña de casa.* Nuevamente, la conclusión es que la anfitriona ¡no pudo haber dicho que ella saludó a 4 personas!

Resumiendo hasta acá:

a) La dueña de casa ni saludó a 4 ni pudo haber dicho que no saludó a nadie; tuvo que haber saludado a 1, 2 o 3 personas.
b) Ahora, quiero convencerla/o de que los que dijeron 0 y 4 fueron los integrantes de una *misma* pareja. ¿Por qué? Llamo A a la persona que dijo que saludó a 4 personas. ¿Cómo hizo para llegar a saludar a esos cuatro? Tuvo que haber saludado a la anfitriona y a su marido, y además a los integrantes de la otra pareja. Luego *todas estas personas* saludaron a *alguien.* La *única alternativa* para quien dijo

cero es que sea la pareja de quien dijo que saludó a 4. A esa persona la voy a llamar B (es decir, A y B forman una de las parejas que concurrió respondiendo al aviso del diario).

Me gustaría remarcar que este hecho es *muy importante*. No lo parece, pero ahora verá por qué. Quitémoslos a ambos de la escena, a los dos integrantes de la pareja A-B.

Ahora quedaron los dueños de casa y los integrantes de la otra pareja. No solamente eso: cuando el anfitrión escuchó las respuestas de todos (respecto del número de saludos que habían dado), obtuvo: 0, 1, 2, 3 y 4. Como ahora retiré a A y a B, entonces también retiro a 0 y a 4 (ya que ese era el número de personas que habían saludado A y B). Pero claro, si ahora el dueño de casa reformulara la pregunta y le pidiera a cada uno que ignorara haber saludado a A y que le dijera a cuántas personas saludó, ¿qué pasaría?

Pasaría que quien dijo que saludó a 1 diría 0, el que dijo 2 diría 1, y el que dijo 3 diría 2 (todos ellos *tienen que restar el saludo que le hicieron a* A, *que ahora hacemos de cuenta que no está).*

Por lo tanto, hemos convertido el problema de dos parejas invitadas en el de ¡una pareja invitada! Y ese problema ya sabemos cómo resolverlo (lo hicimos, ¿recuerda?). En ese caso, la anfitriona tenía que haber saludado a *una* persona, pero ahora, volviendo al caso de las *dos* parejas, le agregamos *un saludo más* (que es el que le tuvo que haber hecho a A), y de esa forma estamos en condiciones de contestar la pregunta otra vez: ¡la dueña de casa tuvo que haber saludado a ***dos*** personas!

Es decir, el razonamiento que hicimos juntos nos permitió convertir el problema de ***dos parejas invitadas en el de UNA pareja invitada***, pero ESE particular problema ya lo sabemos resolver (la anfitriona saludó a una persona). Si ahora le sumamos un saludo más, la respuesta es que la dueña de casa saludó a dos personas.

A esta altura, entonces, estoy seguro de que usted entiende de qué se trata el caso más general. Si ahora, en lugar de dos parejas invitadas, hubieran respondido tres parejas al aviso, ¿qué haría usted? Las respuestas que obtuvo el anfitrión tuvieron que haber sido: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Usando ***exactamente las mismas ideas que antes,*** la dueña de casa no pudo haber contestado ni cero ni seis. ¿Por qué? (fíjese en lo que hicimos antes y obtendrá la respuesta). Es que si hubiera contestado seis, significaría que saludó a los seis integrantes de las tres parejas, pero si así fue, ¿quién pudo haber contestado *cero?* ¡Nadie!

De la misma forma, ella ¡no puede contestar cero! Porque, entonces, ¿quién pudo haber contestado *seis* si entre los miembros de cada pareja no se pueden saludar? Esto prueba que la anfitriona no pudo haber dicho ni cero ni seis. Pero aun más: como vimos en el caso de dos parejas en lugar de tres, las dos personas que contestaron 0 y 6 tuvieron que haber sido los integrantes de la misma pareja. ¿Por qué? Igual que antes, quien contestó 6 tuvo que haber saludado a los dos dueños de casa y a los cuatro integrantes de las otras dos parejas. Todo bien, pero entonces, ¿quién pudo haber contestado *cero?* Únicamente *la pareja de quien contestó seis,* porque todos los otros saludaron por lo menos a uno (quien saludó a los 6).

Igual que antes, entonces, excluimos a los integrantes de esta pareja (A y B) que saludaron a cero y seis personas, y nos quedamos con una pareja menos. Quedan dos parejas, y en este caso sabemos que la dueña de casa saludó a *dos* personas. Incluimos nuevamente a A y a B, y resulta que la anfitriona tuvo que haber saludado a *tres* personas.

Conviene hacer una breve observación acá: en el caso de ***una*** pareja, la mujer saludó a ***una*** persona. En el caso de ***dos*** parejas, a ***dos*** personas. En el caso de ***tres*** parejas invitadas, a ***tres*** personas. La idea general es que, en el caso de ***cuatro*** parejas, la mujer debió haber dicho ***cuatro*** *saludos.*

Y este caso, el de las cuatro parejas, se puede generalizar a tantas parejas como uno quiera. Si hubieran aceptado la invitación ***veinte*** parejas, y si cada uno de ellos hubiera contestado (invitados por el dueño de casa) que saludaron a: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 38, entonces la dueña de casa habría saludado a ***20*** personas.

Si le interesa avanzar un paso más, le sugiero que piense lo siguiente: la dueña de casa saluda a *un integrante de cada pareja y al otro no.*

Este procedimiento se conoce como de *recursión*, y consiste en reducir un caso más complejo a otro más sencillo y aprovechar lo que uno aprende en esa situación para luego *obtener una fórmula general* que conteste todos los casos.

Reflexión final: si estuviera con usted, le propondría que pensáramos juntos que cuando le conté el problema por primera vez parecía *totalmente inaccesible.* ¿Cómo habría uno de poder descubrir a cuántas personas saludó la dueña de casa? Ahora, con el análisis que hicimos, todo es distinto: se hizo la luz en donde había total oscuridad. Si usted está de acuerdo con esto, será un gran *premio* para los dos, porque mi idea es *siempre* mostrar cuán poderosa es la matemática, y en este caso uno se preguntaría: ¿por qué no proponemos que en las escuelas y/o colegios uno tenga la alternativa de poder pensar más de esto y *menos* de lo 'otro'? (Sí, ya sé: ¿qué es 'esto' y qué es 'lo otro'? No sé: le dejo a usted las definiciones.)

Autitos[39]

Tengo un problema interesantísimo para plantearle. En general, los problemas de este tipo parecen no estar ligados con la matemática, pero en realidad no solo no es así, sino que forman una parte central de su estructura. Me apuro a escribir que el problema es entretenido, divertido, accesible y tiene el atractivo extra de que yo le voy a dar una parte de la solución. Si me permite sugerirle algo, no trate de resolverlo inmediatamente. Permítase pensarlo durante un tiempo. No hay apuro. Más aún: si usted logra describir 'alguna' estrategia, no importa si es la óptima, verá que se va a sentir muy bien.

Por otro lado, en la vida cotidiana uno tiene pocas oportunidades de resolver este tipo de problemas, y cuando se enfrenta con uno de ellos pareciera como que uno está 'jugando' o 'perdiendo el tiempo', y en realidad no solo no es así, sino que es una verdadera lástima que se interpreten de esa forma. Pensarlos (y resolverlos) es 'hacer matemática', y en el mundo en que vivimos hoy, las personas que son capaces de diseñar soluciones a este tipo de problemas son fuertemente valoradas y muy buscadas en el mercado laboral.

---

39. Este problema lo conocí a través de Juan Pablo Pinasco. Lo propuse en varias escuelas públicas del país, y también el 25 de octubre en una reunión en Tecnópolis.

Bueno, basta de prolegómenos. Acá voy.

Suponga que usted tiene 25 autitos de carrera. Necesita seleccionar los tres más rápidos. Tiene una pista para hacerlos correr pero no tiene cronómetro. Eso no sería un problema si usted pudiera hacerlos correr a todos al mismo tiempo. Bastaría con hacerlos dar vueltas a una pista (digamos, 10 vueltas) y quedarse con los tres que lleguen primero. Pero acá es donde aparece la primera dificultad: la pista solo 'tolera' cinco autitos por carrera. Es decir, en la pista no puede haber más de cinco autos por vez.

Y acá llega el punto crítico. Uno podría preguntarse: ¿cuántas carreras tengo que hacerlos correr para poder encontrar los tres más rápidos? Si uno no tuviera tiempo y recursos ilimitados, estoy seguro de que usted podría diseñar múltiples alternativas para determinar los tres más rápidos, pero ¿qué pasaría si yo le dijera que solamente puede usar la pista siete veces? Como usted advierte, ahora el problema adquiere otra dimensión. ¿Cómo hacer? ¿Cómo elegir los autitos que tienen que correr esas siete carreras?

Resumo: uno tiene 25 autitos y una pista para hacerlos dar vueltas. Solamente se permiten cinco autos por carrera. No hay un cronómetro para determinar los tiempos. Todo lo que se puede hacer al terminar una carrera es disponerlos según el orden de llegada. Se trata entonces de elegir los tres más rápidos usando *nada más* que *siete carreras*.

Como se ve, el problema consiste en diseñar una estrategia para seleccionar los autitos para cada carrera. Esa es la parte que le corresponde a usted. Yo ya lo 'ayudé' cuando le dije que con siete carreras alcanza. Ahora se queda usted con la chance de pensar.

Solución

Yo voy a proponer acá una estrategia posible. Estoy seguro de que debe haber otras. En todo caso, si usted encontró alguna, fíjese si coincide con la que figura más adelante. Si así no fuere, nadie dice que la suya sea peor ni mejor que la mía. Serán dos formas diferentes de resolver el mismo problema.

Las primeras cinco carreras servirán para determinar 'algún' orden entre los 25 autitos. Digamos que terminan ordenados así:

A1, A2, A3, A4, A5

(donde A1 es el más rápido entre estos cinco y A5 es el más lento).

De la misma forma, se obtienen estos otros resultados:

B1, B2, B3, B4, B5
C1, C2, C3, C4, C5
D1, D2, D3, D4, D5
E1, E2, E3, E4, E5

Antes de avanzar, fíjese que estas carreras solo determinan un orden entre los cinco que estaban en la pista, pero no se puede sacar ninguna conclusión si uno los mezcla. ¿Qué quiero decir con esto? Es que el auto C5 pudo haber sido el más lento cuando se enfrentó con C1, C2, C3 y C4, pero quizás habría sido el más rápido si yo lo hubiera hecho correr con A1, A2, A3 y A4.

Entonces ahora, para la sexta carrera, voy a tratar de relacionar a todos los competidores de alguna forma. Para eso, hago correr a los ganadores de las cinco carreras. Es decir, hago correr a A1, B1, C1, D1 y E1.

Supongamos que el resultado de esa competencia fue este:

A1, B1, C1, D1 y E1.

¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas seis carreras? Este sería el momento en el que usted, si llegó hasta acá, debería detenerse y pensar qué hacer para poder concluir cuáles son los tres más rápidos —entre los veinticinco—, pero ahora, ¡solamente nos queda una carrera para realizar! Yo voy a seguir acá abajo, aunque le sugeriría que no lea lo que viene sin haberle dedicado un rato a pensar en soledad. Créame que vale la pena.

Sigo. Ahora voy a sacar —junto con usted— algunas conclusiones de las seis carreras que hubo hasta acá.

De las cinco primeras carreras se obtienen estas dos conclusiones:

1) Los autitos A4 y A5 quedan eliminados, porque tienen por delante de ellos a tres que son más rápidos: A1, A2 y A3.
2) Los autitos B4, B5, C4, C5, D4, D5, E4 y E5 quedan eliminados por la misma razón: todos tienen tres autitos más rápidos.

Luego, ya hemos eliminado 10 autitos. Nos quedan 15. ¿Qué se puede inferir ahora con la sexta carrera, que relaciona a los ganadores de las cinco primeras?

Fíjese que como el orden en esa sexta carrera fue A1, B1, C1, D1 y E1, quedan eliminados D1 y E1, porque tienen tres autos por delante: A1, B1 y C1.

Pero si D1 y E1 están eliminados, entonces también lo están todos los que corren con las letras D y E, porque si los dos más rápidos quedaron afuera, con más razón los que vinieron por detrás.

Hasta acá entonces quedaron afuera, por distintas razones (y fíjese si usted está de acuerdo): A4, A5, B4, B5, C4, C5 y *todos* los que corrieron con las letras D y E. Esto significa que hemos eliminado 16 autos. Nos quedan nueve.

Ahora acompáñeme a pensar por este lado. Fíjese que la sexta carrera dice que C1 tiene dos autos por delante: A1 y B1. Luego, C2 y C3 tienen *tres o más autos que son más rápidos* que ellos, y por lo tanto quedan eliminados también. Esto permite afirmar que, de los coches que llevan la letra C, el *único* que tiene posibilidades de estar entre los tres más rápidos es C1, y se quedan afuera C2 y C3.

Por su parte, como B3 tiene por delante a B1 y B2 (por la carrera entre ellos) y además (por la sexta carrera) A1 es más rápido que B1, y por lo tanto que B2. Esto dice que B3 se queda afuera porque están por delante de él A1, B1 y B2.

Yo sé que todo esto se parece a una 'sopa de letras', pero si usted me siguió hasta acá, habrá descubierto que quedaron estos autos como candidatos:

A1, A2, A3, B1, B2 y C1 (*)

¿Y entonces? Tenemos seis autos para seleccionar los tres más rápidos, pero no los podemos hacer correr a todos porque solo entran cinco en la pista. Nos queda una sola carrera para usar. ¿Qué hacer?

Y la respuesta es que sí, que se puede hacer algo. Más aún: lo que le propongo hacer es pensar con una idea diferente. Fíjese que el auto A1, al haber ganado la sexta carrera, demostró ser el más rápido de los 25 autos: ganó su serie (con todos los autos que llevaban la letra A), pero además les ganó a todos los ganadores de las otras carreras. Luego, el auto A1 ***seguro*** que está entre los tres más rápidos. Tanto es así que es él mismo el más rápido de todos. Luego, no hace falta que lo haga correr con los otros que quedaron entre los que figuran en (*). Lo que puedo hacer, entonces, es que corran los otros cinco (A2, A3, B1, B2 y C1) y quedarme con los ***dos más rápidos***. ¿Se entiende la diferencia? Ahora no necesito seleccionar los tres más rápidos entre los cinco que quedan, sino los **dos más rápidos.** De esta forma, estos dos autos más el A1 serán los tres más rápidos que estaba buscando, y para descubrirlos utilicé ***solamente siete carreras***.

Moraleja

Como describí, aunque no lo parezca, esto es ‘hacer matemática’. Más aún: los matemáticos, o los programadores, detectarían que hay algunas variaciones que se pueden hacer al problema original y luego buscar diferentes estrategias para resolverlos. Sígame por acá.

1) Uno podría modificar el número de autos. No tienen por qué ser 25. ¿Cómo cambiará la estrategia si en lugar de haber 25 autos hubiera 10? ¿Y si hubiera 30? ¿O cien? Esto ya muestra que, quizás, siete carreras no alcanzarán (o sobrarán, dependiendo el caso).
2) Otra variable a considerar es el número de autos que entran por carrera. Si en lugar de entrar cinco entraran 25, por ejemplo, entonces en el problema que planteé alcanzaría con una sola carrera: corren todos y listo. Me quedo con los tres más rápidos. Pero si uno permitiera solo seis autos, ¿cómo habría que modificar lo que hicimos? ¿Y si se permitieran siete autos por carrera? ¿O diez? Luego, el número de autos por carrera también es una variable a considerar.
3) ¿Y si en lugar de elegir los tres más rápidos hubiera que elegir los cuatro más rápidos? ¿O los dos más rápidos? Es

decir, *el número de autos a seleccionar es* ***también*** *una variable a tener en cuenta.*

Como se ve, reducir el problema a 25 autos, en donde pueden correr cinco por carrera y hay que elegir los tres más rápidos, es solo un caso particular entre los infinitos posibles. Elaborar estrategias que permitan resolver todos los problemas al mismo tiempo no es algo sencillo ni mucho menos, pero, como usted detecta, el problema original, que parecía un juego, se puede transformar en algo muchísimo más complicado y muchísimo más útil. Es solo cuestión de aprender a diseñar estrategias que minimicen el esfuerzo, optimicen los recursos y maximicen los resultados. Algo parecido a lo que sucede en la vida cotidiana, ¿no es así?

CAPÍTULO *3*

128 tenistas

En un torneo de tenis se inscriben 128 participantes. Como es bien sabido en campeonatos de este tipo, se juega por simple eliminación. Es decir: el jugador que pierde un partido queda eliminado. La pregunta es: ¿cuántos partidos se jugaron *en total* hasta definir el campeón?

No se me escapa que uno puede sentarse con una lapicera y un papel, y empezar a contar. Sin embargo, mi idea al incluir este problema acá es invitarlo a que piense *otra forma* de encararlo, buscando una estrategia que permita contestar la pregunta sobre cuántos partidos se jugaron en total, sin necesidad de ir contándolos todos.

Naturalmente, uno puede hacer lo siguiente: como hay 128 participantes, en la primera ronda se jugarán 64 partidos. Como quedarán eliminados la mitad de ellos (en el tenis no hay empate), en la segunda ronda habrá 32 partidos. Otra vez, quedarán eliminados la mitad. Y así siguiendo hasta llegar al partido final que determinará el campeón. Lo que quiero ahora es proponerle una forma *distinta* de abordar el problema.

Fíjese que al finalizar el torneo, cuando ya sepamos quién es el campeón, *todos los otros participantes habrán quedado eliminados.* ¿Cuántos son? Sí... son 127. Los restantes jugadores tuvieron que haber perdido alguna vez algún partido. Más aún: no es que *tuvieron* que perder *alguna vez* <u>*algún*</u> partido: perdieron ***exactamente*** un partido, y con eso fue suficiente para quedar fuera del torneo. ¿Y entonces? ¿Qué deducción puede sacar usted?

Si en total había 128 participantes, y solamente *uno* no perdió ningún partido (el campeón), los 127 restantes perdieron exactamente uno. Luego, en total, hubo que jugar 127 partidos para que esos jugadores quedaran eliminados... ¡y eso contesta la pregunta! En un torneo con 128 jugadores, se juegan 127 hasta determinar el campeón.

De la misma forma, y sin tener que hacer más cuentas, si en un torneo por eliminación simple de cualquier deporte participan 100.000 jugadores, cuando uno de ellos gane el campeonato en total se habrán jugado 99.999 partidos. Y si hay *n* participantes, entonces se juegan *(n-1)* partidos. ¿No es una forma muy <u>bonita</u> de abordar el problema?

Un apéndice

Conozco este problema desde hace muchísimos años. Lo he planteado no solo en el primer libro que escribí hace más de diez años, sino en charlas en diferentes partes del mundo, en columnas en diarios y revistas, en programas de televisión y de radio, para jóvenes, adultos... audiencias múltiples. ¿Por qué escribo todo esto ahora? Es que por primera vez hubo alguien (Carlos D'Andrea) que me hizo una observación que me llevó a pensar el problema de forma totalmente diferente. Me explico.

Cuando uno lee la presentación que yo hice/hago, y piensa en un torneo de tenis (o de cualquier otro deporte en donde no haya posibilidades de empate y cada partido *tenga* que tener un ganador), uno da por 'sentado' que los 128 participantes se dividen en 64 parejas que jugarán entre sí. Los ganadores seguirán, los perdedores quedarán eliminados. Esos 32 ganadores volverán a ser distribuidos en parejas (esta vez en 16) y así siguiendo.

Pero lo *notable* de lo que me hizo pensar Carlos es que en realidad, en la premisa del problema, EN NINGÚN MOMENTO está escrito que los 128 tenistas se habrían de dividir en 64 parejas. Fíjese que uno podría 'aislar' las dos reglas importantes como las siguientes:

a) Todo jugador tiene que jugar *al menos* un partido... Si no, nunca tendría chance de ser campeón.
b) El ganador de cada partido que se juegue sigue en el torneo. El perdedor queda eliminado.

Con estas dos premisas, si uno tiene los 128 tenistas, la pregunta queda formulada: ¿cuántos partidos se habrán jugado *en total* hasta definir el campeón?

Y lo extraordinario es que el razonamiento que escribí sigue teniendo validez jueguen de la forma que jueguen el torneo. Por ejemplo, supongamos que elijo dos jugadores cualesquiera. Los llamo 1 y 2 y los hago jugar entre ellos. Supongamos que gana 1. En ese caso, 1 sigue y 2 queda eliminado. Ahora 1 juega contra 3. Si gana 1 sigue él, y 3 queda eliminado. Supongamos que eso sucede siempre: es decir, 1 va jugando contra los otros 127 jugadores y les gana a todos. Decididamente 1 resultará campeón, y en total *todos* los otros habrán jugado *un solo partido*... que terminaron perdiendo. Pero a los efectos del problema, *¡se jugaron en total 127 partidos!* Es decir, el número de partidos que se jugaron en total para definir al campeón ¡sigue siendo 127!

Claro, el torneo tarda mucho más tiempo si se juega así, porque podría darse el caso extremo de que el jugador 1 tenga que jugar todos los días con un rival diferente, al que terminará ganándole; pero el torneo requerirá de 127 días para culminar, o sea, más de 4 meses. No es lo ideal, pero el problema sigue teniendo la misma solución.

Por otro lado, podría suceder que el jugador número 1 gane sus primeros 126 partidos (y elimine a 126 de sus rivales), pero *justo pierda* el último partido que le quedaba, cuando enfrente al jugador número 128. En ese caso, este último, el 128, será el campeón habiendo jugado *nada más que un partido* (el que le ganó a '1'), mientras que el jugador 1 habrá jugado los 127 partidos, de los cuales ganó 126 y perdió uno.

Un paso más: si en lugar de 128 tenistas son 100.000, *no es necesario que sean divididos en parejas, ni ninguna otra regla por el estilo.* Sea cual fuere la organización del programa de partidos, en total se habrán jugado 99.999 partidos para definir al campeón. ¿No es notable?

La historia más conocida sobre Carl Friedrich Gauss

La primera vez que escuché la historia que voy a contar fue en una de mis clases de Álgebra I, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. El profesor era Enzo Gentile, quien me dejó una huella muy profunda. Gentile, Luis Santaló y Gregorio Klimovsky fueron los tres docentes que más me impactaron, cada uno por diferentes razones, pero Gentile fue ciertamente el primero.

Falleció hace muchos años ya, pero lo recuerdo caminando por los pasillos del segundo piso del pabellón 1, cantando alguna ópera mientras iba para el baño. Su entusiasmo y su pasión por la matemática lo pusieron siempre por encima del resto, y si yo tuviera que poner el dedo y señalar a *una persona* como *prototipo* de lo que yo aspiraría a que fuera un docente, elegiría a Enzo sin ninguna duda. Alguna vez voy a tratar de escribir un poco más sobre las anécdotas que tenemos juntos. Pero, para variar, me desvié. Esta es la historia que contó en ese primer curso de Álgebra.

Todo sucedió en Brunswick, Alemania, alrededor de 1784. Una maestra de segundo grado de la escuela primaria (de nombre Buttner, aunque los datos afirman que estaba acompañada por un asistente, Martin Bartels) estaba cansada del 'lío' que hacían los chicos, y para tenerlos ocupados un poco les dio el siguiente problema: “Calculen la suma de los primeros cien números”.

La idea era tenerlos callados durante un rato. Como no había ni calculadoras, ni computadoras, ni siquiera electricidad, los alumnos debían apelar a cálculos manuales. Sin embargo, un niño levantó la mano ‘casi’ inmediatamente, sin siquiera darle tiempo a la maestra para que terminara de acomodarse en su silla.

—¿Sí? —preguntó la maestra mirando al niño.

—Ya está, señorita —respondió el pequeño—. El resultado es 5.050.

La maestra no podía creer lo que había escuchado, no porque la respuesta estuviera equivocada, que no lo estaba, sino porque estaba desconcertada por la rapidez.

—¿Ya lo habías hecho antes? —preguntó.

—No, lo acabo de hacer.

Mientras tanto los otros niños recién habían llegado a escribir en el papel los primeros dígitos y no entendían el intercambio entre su compañero y la maestra.

—Pasá al frente y contanos a todos cómo lo hiciste.

El niño se levantó de su asiento y, sin llevar siquiera el papel que tenía adelante, se acercó humildemente hasta el pizarrón y comenzó a escribir los números:

$$1+ 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 95 + 96 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

—Bien —siguió el jovencito—. Lo que hice fue sumar el primero y el último número (o sea, el 1 y el 100). Esa suma da 101. Después, seguí con el segundo y el penúltimo (el 2 y el 99). Esta suma vuelve a dar 101. Luego, separé el tercero y el antepenúltimo (el 3 y el 98). Sumando estos dos, vuelve a dar 101. De esta forma, “apareando” los números así y sumándolos, se tienen 50 pares de números cuyas sumas resultan 101. Luego, multiplicando 50 por 101 se obtiene el resultado que le dije: 5.050, que es lo que usted quería, ¿no es así?

La anécdota termina acá. El jovencito se llamaba Carl Friedrich Gauss, quien había nacido en Brunswick el 30 de abril de 1777 y murió en 1855 en Gottingen, Hanover, Alemania. Gauss es considerado el “príncipe de la matemática” y fue uno de los que más impacto produjo dentro de la matemática toda. Sus aportes modificaron para siempre la historia de esta ciencia.

De todas formas, no importa aquí cuán famoso terminó siendo el niño; lo que yo quiero enfatizar es que en general uno tiende a pensar de una determinada manera, como si *esa* fuera la forma ‘*natural*’.

Muchas veces en la vida solemos decirles a los jóvenes que lo que están pensando está *mal*, simplemente porque no lo están pensando como lo habíamos pensado nosotros antes. De esta forma, les enviamos un mensaje enloquecedor, equivalente al que les damos cuando les enseñamos a hablar y caminar en los primeros doce meses de vida, para pedirles que se queden callados y quietos en los siguientes doce años.

No quisiera que el mensaje que se desprende de esta historia sea que uno tiene que ser algo así como ‘el príncipe de la matemática’ o ser ‘Gauss’ para que se te ocurra el método que él utilizó para resolver el problema. No. En definitiva, le pido que vuelva a leer nuevamente la solución que él encontró para el problema y honestamente se conteste esta pregunta: “¿hace falta ser un ‘genio’ para que a uno se le ocurra hacerlo *así*?”.

En otro lugar y en otro momento, me gustaría elaborar un poco también sobre lo que significa ser un ‘genio’, una suerte de lugar *sobrevalorado* en nuestra sociedad, pero esa es *otra* historia.

De hecho, lo que me importa acá es mostrar que uno puede abordar un problema con 'total ingenuidad' y elaborar una estrategia que otros no vieron, pero que está 'ahí'. ¿Por qué no permitir que cada uno piense como quiera? Justamente, la tendencia en algunos colegios y escuelas (e incluso sucede con muchos padres) es atentar contra la libertad que se toman los niños para pensar alternativas con total ingenuidad. Esa frescura, inocencia y creatividad es la que les permite estar —a veces— mucho más cerca de encontrar solución a problemas que los adultos no hemos sabido abordar. "Domarlos" es quitarles frescura, espontaneidad, creatividad. Suena criminal, ¿no?

Naturalmente, a los adultos nos ofrece muchas más seguridades lograr que todos vayan por el camino que ya está 'hecho' o 'recorrido', pero, como decía, eso termina por limitar la capacidad creativa de quienes todavía tienen virgen parte de la película de la vida... tienen aún 'casi todo' por vivir... Dejémoslos libres para pensar como quieran... Esa es *mi* idea.

El problema del palomar

Si yo le preguntara: “¿Cuántas personas tiene que haber en un cine o en un teatro para estar seguros de que dos de ellas cumplen años el mismo día?”, ¿usted qué contestaría?

Observe que no digo que hubieran nacido el mismo año, sino que cumplan años el mismo día.

Si puedo sugerirle algo, tal como vengo haciendo cada vez que propongo un problema, es que lo piense usted en soledad (o compartiéndolo con gente que esté en las mismas condiciones que usted, es decir, que no sepa la solución). De hecho, fíjese que hay una “red” abajo: *la respuesta*. Esa respuesta está escrita más adelante. ¿Qué tiene para perder? Y encima, nadie está mirando lo que usted hace: no se pueden pedir mejores condiciones de privacidad.

Ahora sigo yo.

Empiezo con un ejemplo: si hubiera dos personas, obviamente no habría garantías de que los dos cumplan años el mismo día. Lo más probable es que no sea así. Pero más allá de “probable” o “improbable”, el hecho es que estamos buscando “seguridades”. Y habiendo “dos personas” en la sala, nunca podríamos estar seguros de que los dos nacieron el mismo día.

Lo mismo sucedería si hubiera tres personas. O incluso diez.

O cincuenta. ¿No? O cien. O doscientos. O incluso trescientos. ¿Por qué? Bueno, porque, si bien, habiendo trescientas personas dentro de una sala, es muy probable que haya dos que celebren sus cumpleaños respectivos el mismo día, todavía no podemos asegurar o garantizar que sea cierto lo que queremos. Es que podríamos tener la "mala" suerte de que todos hubieran nacido en diferentes días del año.

Préstele atención a este dato: con 300 personas, *todavía* no tenemos la certeza de que de haya dos que cumplan años el mismo día, pero, sin embargo, nos vamos acercando a un punto interesante (y estoy seguro de que usted ya se dio cuenta de lo que voy a escribir ahora).

Porque aun si hubiera 365 personas en la sala, todavía no estaríamos *seguros* de que dos que cumplan años el mismo día. Podría suceder que todos hubieran nacido en todos los posibles días de un año. Peor aún: ni siquiera con 366 personas podemos asegurarlo (por los años bisiestos). Podría ser que justo las 366 personas que tenemos en la sala cubrieran exactamente todos los posibles días de un año sin repetición, si además este fuera bisiesto.

Sin embargo, hay un argumento categórico: si en la sala hay 367 personas, no hay manera de que se escapen: al menos dos tienen que haber nacido el mismo día del año.

Claro: uno no sabe cuáles son esas personas (pero esa no era la pregunta), ni tampoco si hay nada más que dos que cumplen con la propiedad pedida. Puede ser que haya más, muchos más, pero eso no interesa. La garantía es que con 367 resolvemos el problema.

Ahora, teniendo en cuenta esta idea que acabo de escribir, le propongo otro problema: ¿qué argumento podría encontrar usted para demostrar que en la ciudad de Tucumán o en Córdoba o en Mendoza[40] (por poner algunos ejemplos) hay, por lo menos, dos personas con el mismo número de pelos[41] en la cabeza?

Claramente, la pregunta se podría contestar rápido apelando a la gente "pelada". Seguro que en Córdoba (o en cualquiera de las otras ciudades que mencioné) hay dos personas que no tienen pelo y, por lo tanto, tienen ¡cero pelos! De acuerdo. Pero permítame obviar estos casos.

Le propongo que busque un argumento que sirva para convencer a quien preguntó cómo se puede *demostrar* que en una ciudad de esas características *tiene que haber dos personas que tengan el mismo número de pelos en su cabeza.*

Antes de que yo escriba aquí la respuesta, una posibilidad es imaginar que si estoy proponiendo este problema en este lugar, inmediatamente después de haber discutido el problema de los cumpleaños, es que alguna relación debe haber entre ambos. Escribo esto porque aspiro a que las ideas que usé me/le sirvan ahora para deducir la solución.

Un dato que me ayudó a mí. Tengo una pregunta para hacerle: "*¿Cuántos pelos supone que tiene una persona (en promedio) en la cabeza?*".

¿Se lo preguntó alguna vez? En cualquier caso, ¿qué le parece? Por supuesto, la gente sigue con su vida normalmente *sin haberse cuestionado cuánto cabello tiene*, pero si usted tuviera que hacer una estimación, ¿qué diría?

Si uno tiene en cuenta el grosor de un pelo y la superficie del

40. No hace falta que sea ninguna de estas tres ciudades, obviamente. Basta usar el ejemplo con cualquier ciudad que tenga más de 200.000 habitantes.

41. ¿Se puede decir 'pelos', si se trata de un humano, o tendría que usar *siempre* la palabra *cabello*? Carlos D'Andrea me apunta que a él le enseñaron que *pelo* tienen los animales y que nosotros, los humanos, tenemos *cabellos*... (usted dirá).

cuero cabelludo de cualquier persona, el resultado es que no hay manera de que nadie tenga más de 200.000 pelos. Y eso sería ya en el caso de King Kong o algo así. Es imposible imaginar una persona con 200.000 pelos (en el cuero cabelludo), pero de todas formas sigo con la idea.

Ahora, con este nuevo dato, ¿para qué me serviría a mí (o a usted) saber que no hay ninguna persona que tenga más de 200.000 pelos en su cabeza? ¿Qué se le ocurre?

Y una observación más: ¿cuántas personas supone usted que viven en Córdoba o Mendoza o Tucumán? ¿Habrá más de 200.000 personas en cada una de ellas? Antes de que se proponga averiguar con mucho detalle, permítame darle yo la respuesta: sí, en cada una de ellas viven más de 200.000 personas. ¿Entonces?

Creo que a esta altura usted tiene *todos* los datos que le hacen falta para poder contestar la pregunta original del problema. ¿Por qué? ¿Por qué este problema es el mismo que el de los cumpleaños? ¿Podrían tener, acaso, *todos l*os habitantes de Córdoba o de Tucumán o de Mendoza un diferente número de pelos en la cabeza?

Creo que la respuesta está clara. Juntando todos los elementos que tenemos (el del número máximo de pelos que una persona puede tener en su cabeza y el del número de habitantes de cada una de las ciudades), se deduce que inexorablemente se tiene que repetir el número de pelos entre personas. Y no solo una vez, sino muchas muchas veces. Pero esto ya no nos importa tampoco. Lo que me interesa es haberla/o motivado a pensar que usted estaba en condiciones de contestar la pregunta *simplemente juntando dos datos:*

a) En cada una de las tres ciudades viven más de 200.000 personas.

b) Una persona *no puede tener* más de 200.000 pelos en su cabeza.

Con esa información, *seguro que uno puede concluir que* **tiene** que haber al menos dos personas que tengan el mismo número de pelos en cada una de esas ciudades.

Moraleja: Lo que *más me interesa* concluir de estos ejemplos es que usando *el mismo principio* pudimos (usted y yo) sacar dos conclusiones.

Tanto en el problema del cumpleaños como en el de los pelos hay algo en común: es como si uno tuviera un número de agujeritos y un número de bolitas. Si uno tiene 366 agujeritos y 367 bolitas, y las tiene que distribuir todas, es inexorable que tenga que haber por lo menos un agujerito que tiene que alojar dos bolitas.

Por otro lado, si uno tiene 200.000 agujeritos y casi tres millones de bolitas, se reproduce el mismo escenario: seguro que hay agujeritos con más de una bolita.

Esto se conoce con el nombre de "Principio del Palomar" (o "Pigeon Hole Principle").

Si uno tiene un número de nidos (digamos "*n*") y un número de palomas (digamos "*m*"), si el número *m* es mayor que el número n, entonces tiene que haber por lo menos dos palomas en algún nido.

Una de las cosas que hacen (hacemos) los matemáticos es buscar "patrones". Es decir, buscar situaciones que se repitan, que se asemejen. Algo así como buscar peculiaridades o propiedades que varios objetos o situaciones tengan en común.

Cuando uno cree que encontró una, trata de reproducir las condiciones en las que sospecha que se generaron y busca sacar algunas conclusiones (que llamamos teoremas). Los *teoremas* son los que permiten deducir que ante ciertos antecedentes (que llamamos hipótesis) se producen ciertos consecuentes (que llamamos tesis). Justamente, el Principio del Palomar sirvió para demostrar, por un lado, que con 367 personas *seguro* que al menos *dos* tienen que cumplir años el mismo día y, por otro, que en cualquier ciudad en donde haya más de 200.000 habitantes *seguro* que al menos dos tienen el mismo número de pelos.

¿No tiene ganas de pensar *otros problemas* en donde se pueda usar el mismo principio?

Una última observación, que me parece esencial. El Principio del Palomar es tan útil que aún hoy se sigue utilizando para resolver importantes problemas de la matemática. Parece sencillo (en realidad lo es, por eso lo *parece*), pero en determinadas circunstancias se transforma en una herramienta *poderosísima*.[42]

42. Le propongo que googlee "Principio del Palomar", en castellano: se tropezará con una cantidad *enorme* de aplicaciones. En inglés, conocido con el nombre de Pigeonhole Principle, es posible encontrar múltiples referencias acá: en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle.

El desafío de los 23 alfiles

El que sigue no es un problema más. Es que tiene una historia detrás a la que me gustaría referirme cuando terminen los detalles estrictamente matemáticos. Es decir, en principio voy a hacer como hice en el resto del libro: plantear un problema, darle tiempo suficiente para que usted pueda pensarlo y, sobre el final, contar una *posible solución*.

Hasta acá, todo bien. Sería igual a lo que hice con todos los otros problemas. Sin embargo, si usted se queda conmigo hasta el final (y le pediría que *no se saltee el problema propiamente dicho, ya que, si no, se privará de disfrutar la historia subyacente*), escribí los detalles de algo que fue sucediendo a medida que el problema fue evolucionando. Pero como siempre, me distraje. Acá va el problema.

Primera parte

Suponga que yo traigo un tablero de ajedrez y 23 alfiles. No se preocupe, no hace falta que sepa *nada* de ajedrez, salvo que los alfiles se mueven únicamente a lo largo de las diagonales. Dicho esto, quiero plantearle un *desafío*.

Tome los 23 alfiles y distribúyalos como quiera en el tablero (que, como siempre, es de 8 × 8). El desafío consiste en lo siguiente: no importa cómo o cuál haya sido la distribución que usted hizo, ¡seguro que yo puedo encontrar ***cuatro*** *que no se 'atacan' entre sí!*

Como usted advierte, para que dos alfiles *no se ataquen entre ellos,* deben no estar apoyados sobre una misma diagonal. Cuando yo le aseguro que podré encontrar cuatro (entre los 23 que usted tenía que distribuir) que ***no se atacan entre sí,*** es porque yo le voy a mostrar que, por más esfuerzos que usted haya hecho para que eso no suceda, ***tiene que haber cuatro en alguna parte del tablero de los cuales por lo menos dos están en la misma diagonal***.

Como suele suceder con casi todos los problemas de este libro (o de *todos* los libros que precedieron a este), la idea es no solo leer el enunciado y eventualmente la solución, sino que mi objetivo es ofrecerle algo para que usted pueda pensar, discutir con usted misma/o o con las personas que usted tiene alrededor y con quienes está compartiendo estos textos.

Una posible solución

Le quiero hacer una pregunta, aunque no esté junto a usted para escuchar la respuesta. En cualquier caso, hagamos de cuenta que le estoy proponiendo que usted se pregunte lo siguiente: elija una columna cualquiera del tablero. Como usted ve, tiene ocho casillas. Si usted apoyara un alfil en cada una de ellas, ¿se atacarán entre sí? (tómese un instante para pensar la respuesta).

Sigo. La respuesta es que no. Como los ocho alfiles están en diagonales distintas, esos ocho *no se 'atacan' entre ellos.* Ahora bien, usted advierte que *antes* de distribuir los 23 alfiles *no puede ubicar más de tres alfiles en* ***ninguna columna*** porque, si no, su distribución seguro que ya contiene cuatro que no se atacan entre sí. O sea, el número *máximo* de alfiles que puede haber por columna es *tres alfiles*. Ya sé… ya sé... me imagino lo que está pensando: ¿y las filas? Bueno, con las filas pasa lo mismo. No solo que en su distribución *no puede haber más de tres alfiles por columna, sino que **tampoco** puede haber más de tres alfiles por fila*.

O sea, si usted cree que mi desafío es equivocado y supone que podrá encontrar alguna distribución de los 23 alfiles en el tablero sin que haya cuatro que no se ataquen mutuamente, *seguro* que no puede poner más de tres en cada fila y en cada columna. Pero además de tomar esa precaución, ¿habrá alguna forma de hacerlo?

Acá es donde le quiero proponer que hagamos —juntos— algo totalmente diferente. Le pido que me siga porque verá que es un argumento precioso (y no es mío, sino que después va a figurar la persona que se va a quedar con todo el crédito de este problema, a él le corresponde todo). Decía, voy a agrupar las 64 casillas del tablero y las voy a poner (simbólicamente) dentro de cajas. ¿Qué particularidad va a tener cada caja? *Todas* las casillas que estén dentro de una caja son casillas que si contuvieran alfiles ellos *no se atacarían mutuamente*. Por ejemplo, si yo tomara *todas las casillas de la primera columna*, a todas ellas podría agruparlas dentro de una caja (que voy a llamar A).

Supongamos que ya ubiqué *todas las casillas* de la primera columna en la caja A. ¿Habrá alguna otra casilla que también podría poner en la misma caja? (Tómese usted el tiempo que necesite para poder contestar.)

Respuesta. Sí, hay más casillas que se pueden poner allí. Si se fija, *todas* las casillas de la última fila, salvo la primera y la última, *también las puedo poner dentro de* A. ¿Por qué? En principio, si están todas dentro de la misma columna, seguro que entre ellas no se atacan, pero el problema es que, además de las casillas de la última columna, tengo que considerar que dentro de A tengo todas las casillas de la *primera* columna. En ese caso, la casilla que está arriba de todo en la primera columna ATACARÍA a la casilla que está última en la última columna... Por lo tanto, si en la caja A están *todas* las casillas de la primera columna, puedo agregar las casillas de la última fila pero con el cuidado de excluir la primera y la última. Como usted advierte, en total hay 14 casillas dentro de la caja A.

A							
A							A
A							A
A							A
A							A
A							A
A							A
A							

Figura 1

Si usted siguió el razonamiento hasta acá —y no hay *ninguna razón para que no hubiera podido*— estoy seguro de que usted advirtió que *no se puede agregar ninguna otra casilla a la caja* A. Cualquier otra que yo incorpore *seguro* hará que la caja pase a tener por lo menos dos casillas que se atacan entre ellas, y justamente lo que queríamos hacer era *dividir el tablero* agrupando (de alguna manera) las casillas que no se atacan entre sí.

Ahora llegó el momento de elegir casillas para *otra caja*. Esa nueva caja se llamará B. Allí aparecerán (por ejemplo) todas las casillas de la primera fila (con el cuidado de excluir la primera de la izquierda, la que está en la primera columna, porque esa casilla está ya dentro de la caja A). De esa forma tenemos siete casillas en B. Pero hay más. De la misma forma, puedo agregar la última fila, *excluyendo* también la que está en la primera columna. Estas representan *otras siete* casillas más. En total, en B habrá también 14 casillas.

A	B	B	B	B	B	B	B
A							A
A							A
A							A
A							A
A							A
A							A
A	B	B	B	B	B	B	B

Figura 2

Al mirar la Figura 2 (la que está acá arriba), descubrimos que hemos puesto en dos cajas (A y B) 28 casillas, que son justamente las de la primera y la última fila, y las de la primera y la última columna. Más adentro, un tablero más chico, de 6 × 6. ¿Qué hacer? Lo mismo que hicimos cuando teníamos el tablero de 8 × 8. Ahora construimos las cajas C y D, como si fuera una réplica de lo que hicimos para las casillas A y B. En lugar de tener 14 casillas por caja, ahora tenemos 10 casillas por caja.

A	B	B	B	B	B	B	B
A	C	D	D	D	D	D	A
A	C					C	A
A	C					C	A
A	C					C	A
A	C					C	A
A	C	D	D	D	D	D	A
A	B	B	B	B	B	B	B

Figura 3

A esta altura, creo que usted detectó el *patrón* que estoy utilizando. Queda un nuevo minitablero de 4 × 4. Creamos dos cajas más (E y F) que tienen 6 casillas cada una, y para el final quedan dos cajas más (las dos últimas, G y H) que tienen nada más que dos casillas cada una.

En resumen, hemos dividido el tablero en ocho cajas: A, B, C, D, E, F, G y H.

A y B tienen 14 casillas cada una
C y D tienen 10 casillas cada una
E y F tienen 6 casillas cada una
G y H tienen 2 casillas cada una

A	B	B	B	B	B	B	B
A	C	D	D	D	D	D	A
A	C	E	F	F	F	C	A
A	C	E	G	H	E	C	A
A	C	E	G	H	E	C	A
A	C	E	F	F	F	C	A
A	C	D	D	D	D	D	A
A	B	B	B	B	B	B	B

Figura 4

¿Y ahora?

Ahora llegó el momento crucial. Ha llegado el momento de empezar a distribuir los alfiles. Por supuesto, la idea sigue siendo la de poder distribuir los 23 alfiles arriba del tablero de manera tal que no haya una cuaterna de alfiles que *no* se ataquen mutuamente. ¿Se podrá?

La construcción que hicimos de las ocho cajas nos permite deducir que todos los alfiles que estén dentro de una caja tienen la particularidad de que *no se atacan entre ellos*. Como yo quiero que entre los 23 alfiles que ubique en mi distribución no haya una cuaterna en donde ninguno de ellos se ataca entre sí, lo que tengo que EVITAR ¡es que haya una caja que tenga cuatro alfiles! O sea, el *máximo* de alfiles que puedo poner en una caja es TRES.

Empecemos por las cajas más chicas. Suponga que en las cajas G y H ponemos tantos alfiles como podamos. Como allí solamente caben dos alfiles por caja, en total hemos usado CUA-

TRO alfiles. Nos quedan 19 para distribuir en seis cajas: A, B, C, D, E y F.

Pero acá aparece el problema: si usted pusiera *nada más que tres alfiles por caja*, entonces, como hay seis cajas, en total usted podría ubicar 18 alfiles... Y el 19, ¿dónde lo pone?

Justamente, *no hay lugar para ubicar ese último alfil sin violar la regla que usted misma/mismo se autoimpuso:* ¡no puede haber cuatro alfiles en ninguna caja!

Bien, inexorablemente *tendrá que haber cuatro alfiles en alguna* porque, si no, le faltará alguna casilla para poner algún alfil.

Estos argumentos terminan la prueba que yo buscaba... Pero hay algo más.

Otra pregunta

La pregunta *natural* es: ¿y si tuviera 22 alfiles? ¿Se podrá en ese caso, o tampoco?

Como siempre, le propongo que piense usted por su lado. Yo sigo acá abajo con un dibujo que le pediría que *no mire* hasta que no le haya dedicado un tiempo razonable.

Sigo.

Fíjese en la siguiente figura. ¿Qué conclusión sacaría?

A	A						
A	A	A					
	A	A	A				
		A	A	A			
			A	A	A		
				A	A	A	
					A	A	A
						A	A

Figura 5

La conclusión que sacamos es que en este caso hay 22 alfiles distribuidos como aparecen en la Figura 4. Fíjese que *todos* los alfiles están en tres diagonales. Si uno elige cualquier *cuaterna* (cuatro alfiles), *inexorablemente tiene que haber —por lo menos— dos de ellos que estén en la misma diagonal. Y listo.*

Es decir que si uno tiene 22 alfiles, no es cierto que *siempre* se puedan encontrar *cuatro* que no se estén atacando, y la distribución de la Figura 4 muestra un ejemplo posible.

Entonces, juntando lo que hicimos en el caso de 23 alfiles más arriba y de 22 alfiles acá, ¿qué conclusión podemos sacar?

Lo que uno deduce es que si tiene 22 alfiles, existen configuraciones en donde toda cuaterna que uno elija contiene alfiles que se están atacando, mientras que si en lugar de 22 hay 23, no importa cuál sea la distribución, *siempre* se puede encontrar por lo menos una cuaterna en donde esos cuatro alfiles no se atacan entre sí, y por lo tanto, 23 es el número *MÍNIMO* de alfiles que cumplen con esa condición.

Final

Como escribí al principio, este problema tiene una historia por detrás. La primera persona que me lo contó fue Juan Pablo Pinasco, de quien ya he hablado muchísimo en todos los libros que hemos publicado en esta editorial, y también una de las personas que más ha contribuido a los programas de "Alterados por Pi" en el canal Encuentro. Cuando Juan Pablo me habló del problema, se refería a 25 alfiles.

Me propuse escribir una demostración de él, y se la mandé (como siempre) a todos los *betatesters* de los libros: Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Carlos Sarraute, Manu Ginóbili, Claudio Martínez, Alicia Dickenstein, Gerry Garbulsky, solo por poner algunos ejemplos, ya que a lo largo de los años son varias (y varios). El hecho es que en una de las devoluciones con observaciones, críticas, comentarios, agregados, Juan Sabia me dijo que él no estaba convencido de que la demostración que yo había hecho estuviera bien. Más aún: él pensaba que estaba mal.

Comenzó una larga cadena de mails en donde él me mostraba una y otra vez que había puntos oscuros, exhibiendo *todos los errores de mis razonamientos.*

Pero lo que cambió el rumbo fue en el momento en que me dijo que lo que yo estaba tratando de hacer (buscar una distribución de 24 en donde en toda cuaterna hubiera alfiles que se atacaran entre ellos)... decía, Juan me escribió: ¡lo que vos buscás me parece que no existe… no vas a poder!

Yo había incluido un ejemplo que él se encargó de mostrarme que era equivocado, y agregó: "*Dame un poco de tiempo para pensar, pero estoy —casi— seguro de que lo que vos querés encontrar no existe*".

Él se ocupó por su lado, y yo por el mío. En un momento, me escribió otro mail diciéndome que después de haber intentado de diversas formas él creía que ni siquiera habría ejemplo con 23...

Allí sí que se me quemaron todos los papeles. ¿Entonces? ¿Qué hacer?

Después de unos días, principios de julio del 2016, finalmente 'se hizo la luz'. Juan me escribió la demostración que figura más arriba: no solo la distribución en cajas de las casillas de un tablero (un verdadero hallazgo por la simpleza y la contundencia), sino también porque encontró que con 22 alfiles ¡sí se podía, pero con 23 no!

Escribí esta parte del texto para mostrar —una vez más— que en matemática, si alguien afirma algo... ¡tiene que poder demostrarlo! Si no, es nada más que una conjetura... y si bien algunas conjeturas terminan siendo ciertas (después de haber sido validadas por alguna demostración), muchas otras terminan siendo falsas. Juan se encargó de poner las cosas en su lugar.

Alguna vez les tocó a los Carlos (D'Andrea o Sarraute), en otros momentos fue Alicia o Manu, o incluso Gerry Garbulsky o el propio Claudio... Todos, en algún lugar, aportaron su granito de arena para que las afirmaciones que aparecen en cada libro sean ciertas. Eso sí: los aciertos corren por cuenta de ellos; los errores, póngalos en mi cuenta.

Moneda cargada

Cada vez que hay una disputa sobre algo y hay que tomar una decisión entre dos posibilidades, lo primero que a uno se le ocurre es: “*tiremos una moneda*”. Naturalmente, sin necesidad de explicitarlo cada vez, está claro que uno acepta (sin comprobación alguna) que la moneda *no está ‘cargada’*. De hecho, si alguien me pidiera que yo fuera un poco más específico sobre lo que significa esto, debería contestar que no sé cómo se hace para ‘cargarla’ de manera tal que salga más veces de un lado que de otro. ¿Usted sabe? De todas formas, aunque la moneda *estuviera cargada*, si ninguno de los dos posibles beneficiarios lo sabe, no marcaría ninguna diferencia, ya que la ignorancia *igualaría* las posibilidades.

Lo que uno acepta en la vida cotidiana es que la probabilidad de que salga ‘cara’ o ‘ceca’ es la misma: ½. Es decir, al arrojarla al aire, las posibilidades de que salga de un lado o del otro son las mismas: la mitad de las veces.

Ahora, le quiero proponer una modificación. Igual que antes, *vamos a decidir una disputa que requiere de un ganador (o ganadora)*. Una vez más, vamos a usar una moneda, pero la diferencia es que ahora *sabemos* que la moneda está cargada, y los dos competidores *también* lo van a saber. No solo eso, sino que en lugar de que la probabilidad sea ½ para 'cara' o 'ceca', en este caso va a ser diferente.

A la probabilidad de que salga 'cara' la voy a llamar p, mientras que a la probabilidad de que salga 'ceca' la voy a llamar q. Justamente, el caso en el que $p = q$ corresponderá al caso 'habitual', pero para no limitarnos a ese caso particular dejamos la libertad para que p y q sean dos números cualesquiera. Bueno... ¡un momento! No está bien que escriba 'dos números cualesquiera', porque tienen que cumplir con un par de propiedades que describiré:

1) Tanto p como q tienen que ser dos números *mayores o iguales a* ***cero*** pero a la vez, *menores o iguales a* ***uno***.
2) La suma de p y q tiene que dar ***uno.*** Es decir: $(p + q) = 1$.
3) Por último, queremos que los dos números (p y q) no sean cero.

¿Por qué estas 'restricciones'?

Por un lado, la probabilidad de que un evento cualquiera *suceda* es *siempre* un número que está entre 0 y 1. Esta probabilidad es igual a *cero* si el evento no tiene posibilidades de ocurrir, y la probabilidad es igual a *uno* si el evento sucede *siempre*.

Por otro lado, como al tirar una moneda hay dos resultados posibles ('cara' o 'ceca', ya que excluimos como 'imposible' el caso de que caiga de 'canto'), entonces, si adjudicamos una probabilidad a cada uno de los dos lados (p y q), la *suma* de los dos números *tiene que resultar* ***uno***. De hecho, sería equivalente a decir que la probabilidad de que salga o bien cara o bien ceca es ***uno***, o bien que las chances son de un 100 por ciento de que salga cara o ceca. Es por eso que se cumple la restricción (2).

Por último, el punto (3) garantiza que la moneda no está cargada de tal manera que *siempre salga cara o siempre salga ceca.*

Por lo tanto, y para resumir, tenemos una moneda 'cargada', con probabilidad p de que salga cara y probabilidad q de que salga ceca. Dos personas que se disputan un objeto (por poner un ejemplo) tienen a disposición una moneda de estas características. Quieren diseñar una estrategia que les permita usar la moneda para poder decidir, de manera tal que les garantice que ambos tendrán la misma probabilidad de quedárselo. ¿Se le ocurre alguna forma de hacerlo?

Solución

Quiero empezar con una pregunta: si usted tira la moneda dos veces seguidas, ¿cuáles son los resultados posibles?

1) cara-cara
2) cara-ceca (*)
3) ceca-cara
4) ceca-ceca

Escribí primero el resultado que se puede obtener al tirar la primera moneda, y después, la segunda moneda. Como usted ve, hay cuatro resultados posibles.

¿Cuál es la probabilidad de que suceda la posibilidad (1), o sea, cara-cara? La probabilidad será igual a

$$p \times p = p^2$$

¿Por qué? Es que ya sabemos que la probabilidad de que salga cara la primera vez es p, y si ahora repetimos el proceso, la probabilidad de que *vuelva a salir cara* sigue siendo p. Como usted está tirando la moneda dos veces seguidas, las probabilidades se multiplican, y resulta $(p \times p) = p^2$

Ahora, le propongo que hagamos lo mismo con los cuatro resultados posibles que figuran en (*):

a) Probabilidad de que salga cara-cara = p^2
b) Probabilidad de que salga cara-ceca = $p \times q$
c) Probabilidad de que salga ceca-cara = $q \times p$
d) Probabilidad de que salga ceca-ceca = q^2

¿Qué sugieren estas cuatro probabilidades? ¿Se le ocurre alguna manera de decidir? Es decir, fíjese que las probabilidades de los casos (b) y (c) son iguales, ya que $p.q = q.p$. ¿Qué dice esto? Que la probabilidad de que salga cara-ceca es igual a la de que salga ceca-cara...

Con esto, creo, estamos muy cerca de resolver el problema: si tenemos una moneda que está 'cargada' (o no sabemos si lo está), lo que podemos hacer es decir: "Vamos a tirar la moneda dos veces. Si sale primero 'cara' y después 'ceca', gana el participante A. En cambio, si sale primero 'ceca' y después 'cara', entonces gana el participante B".

Naturalmente, me imagino su cara diciendo: ¡un momento! ¿Y si sale dos veces seguidas 'cara' o dos veces seguidas 'ceca'? ¿Qué hacemos?

(¿Qué se le ocurre que podemos hacer?)

Sigo yo. Lo que podemos hacer es decir que si sale dos veces seguidas del mismo lado, empezamos de nuevo y la volvemos a tirar dos veces hasta que salga dos veces de lados distintos.

Esta estrategia funciona. Independientemente de que la moneda esté 'cargada' o no, ninguno de los dos candidatos se ve beneficiado. Y punto final.

Seis personas en una fiesta

Le quiero plantear ahora una situación que es equivalente a una suerte de *desafío*. Yo voy a escribir una afirmación, y usted (si tiene ganas, naturalmente) trate de determinar si es cierta o falsa. Antes de avanzar 'en abstracto', permítame escribirla:

"En una reunión de seis personas, seguro que tiene que haber <u>tres</u> que se conocieron allí o <u>tres</u> que se conocían de antes." (*)

¿Qué hacer con este enunciado? Así planteado es conocido como una versión del *Teorema de Ramsey*. En el año 1928, el matemático inglés Frank Plumpton Ramsey publicó su trabajo "On a Problem of Formal Logic"[43] ("Sobre un Problema en Lógica Formal") en el que probó lo que terminaría siendo el comienzo de lo que hoy se conoce con el nombre de Teoría de Ramsey. A partir de allí, se abrió un espectro muy grande de problemas en Teoría de Grafos, y Ramsey ha recibido un fuerte reconocimiento por sus aportes.

Pero vuelvo al problema que figura en (*). ¿Será verdad? En realidad, el resultado *es* cierto (y de allí que reciba el nombre

43. F. Ramsey, "On a Problem of Formal Logic", *Proc. London Math. Soc.* 30 (1928), p. 264-286.

de Teorema de Ramsey), pero la pregunta apunta a otro lugar: ¿cómo se demuestra?

Lo interesante de la comprobación que voy a escribir acá, que ciertamente no es mía, se apoya en ideas que son muy originales. Verá usted que la estrategia que utilizó Ramsey para probar que su enunciado es verdadero es realmente *distinta* de lo que uno está acostumbrado a utilizar. Acompáñeme por acá.

En principio, marquemos seis puntos sobre una hoja de papel. Esos puntos serán las *seis* personas que están en la reunión.

Ahora, trace segmentos que *unan* esos seis puntos. Cuando termine de hacerlo, verá que le quedaron dibujados 15 segmentos. Voy a hacer lo siguiente: voy a pintar los segmentos de dos colores: negro y gris. ¿Para qué cada color? Cuando terminemos con este modelo, el color de cada segmento indicará si las dos personas que figuran en las puntas se conocían de antes o no, pero dejemos esa interpretación para el final. Por ahora, tenemos los 15 segmentos coloreados o bien de negro o bien de gris.

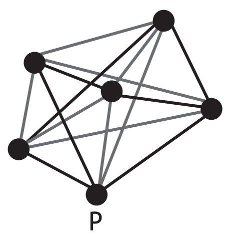


Figura 1

Elija un vértice cualquiera y llamémoslo *P*. Este 'punto' *P* representará a alguna de las seis personas. En la reunión hay cinco personas más; por lo tanto, desde *P* tienen que salir cinco segmentos. Como cada uno de estos cinco segmentos tiene que estar pintado de alguno de los dos colores, eso fuerza a que tiene que haber <u>*por lo menos* ***tres***</u> de esos segmentos que sean del mismo color, no importa si hay tres negros o tres grises, pero por lo menos tiene que haber tres de un mismo color. ¿Por qué? ¿Cuál podría ser el *peor* de los casos? Que tuviéramos dos segmentos pintados de gris y dos pintados de negro. De acuerdo. Pero eso suma *cuatro segmentos*. ¿Y el quinto? Ese quinto segmento *tiene* que ser negro o gris y, por lo tanto, quedarán pintados tres del mismo color.

Por supuesto, no hace falta que haya *exactamente tres* de un mismo color. Podrían ser *todos* de un color. Lo que afirmé es que *seguro* tiene que haber tres de un color.

Ahora tomemos esos tres segmentos que salen de P y que son del mismo color, digamos que son los tres *negros*. Llamemos A, B y C a los tres vértices a los que llegan esos segmentos.

Fíjese en la Figura 2.

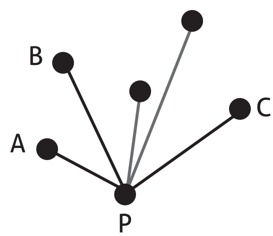


Figura 2

Quiero considerar ahora *otros tres segmentos: AB, AC y BC*.

¿Qué podría pasar? Digo, ¿de qué colores pueden ser estos tres segmentos? En principio, no sabemos nada, pero si por ejemplo el AB fuera de color negro, entonces uno podría marcar un *triángulo con vértices P*, A y *B*.

Este triángulo tendría los tres lados coloreados de negro.

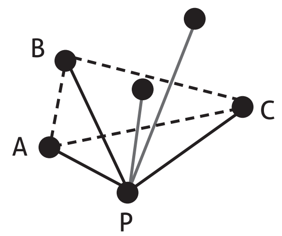


Figura 3

Si en cambio el lado AB es gris, entonces me fijo en el lado AC. Si este segmento fuera negro, entonces el triángulo *P*, *A* y *C* tendría los tres lados pintados de negro.

Pero como antes, bien podría pasar que AC fuera *gris* también, igual que AB. ¿Qué alternativa nos queda? Miremos el segmento BC.

Si BC fuera negro, igual que antes, el triángulo *P*, *B* y *C* tendría los tres lados negros, y habría encontrado lo que estoy buscando.

Pero, una vez más, *podría que no*. Podría suceder que BC *también* fuera *gris*. ¿Y entonces?

Y bueno, si así fuera, quedaríamos en la situación en donde AB, AC y BC son los tres *grises... ¡y eso nos viene bien también!* ¿Por qué? Porque considerando el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, tendríamos un triángulo en donde los tres lados son del mismo color (ver Figura 4).

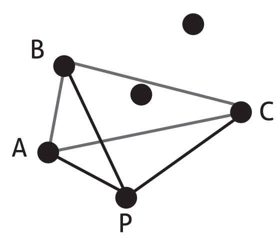


Figura 4

Ahora, una pequeña pausa: ¿qué fui capaz de comprobar? Si usted relee lo que escribí más arriba, lo que hicimos juntos (sí, usted y yo) fue demostrar que independientemente del color que tuvieran los segmentos (negros o grises) podemos encontrar *siempre* un triángulo que tenga los *tres* lados del mismo color (negro o gris, no importa). ¿Y por qué esto es tan importante para lo que estábamos haciendo?

Lo es porque ahora podríamos ponernos de acuerdo y decir lo siguiente: tome dos vértices cualesquiera (elegidos entre los seis puntos que están en la hoja de papel). Si esas dos personas se conocían de antes, pinto el segmento que los une de color gris. En cambio, si no se conocían, entonces lo pinto de negro. Y lo mismo hago con todos los segmentos que aparecen en la figura.

Sea como sea, siempre es posible encontrar un triángulo que tenga los tres lados del mismo color, y eso es ¡exactamente lo que necesitábamos! ¿Por qué? Porque acabamos de mostrar que *siempre hay tres personas que se conocen de antes* (si hay un triángulo cuyos lados son todos 'grises'), o bien *siempre hay tres personas que se conocieron allí* (si el triángulo que encontramos tiene sus lados todos 'negros').

Pero lo interesante es que con 'este modelo' fuimos capaces de *demostrar que la afirmación que escribimos más arriba es cierta*. ¿No es notable que hubiéramos podido hacer esto? Usando el 'modelo' de los vértices, los segmentos y los dos diferentes colores, hemos logrado establecer una estrategia que permite demostrar algo que —en principio— no tiene nada que ver con esto, y sí con relaciones humanas.

Y este ejemplo es una razón más que sirve para exhibir cómo se puede 'hacer matemática' aun en lugares que parecen totalmente desconectados de ella, y que los modelos y las estrategias sirven para resolver problemas que se plantean en sociología. En todo caso, la pregunta que me hago es: ¿en dónde *no* se puede usar matemática?

¿Cómo pesar con una balanza desbalanceada?

Mucha gente cree que tiene mala suerte y lo expresa de distintas maneras. Por ejemplo: "El día que llueva sopa, yo voy a estar con un tenedor en la mano". O algo equivalente. El hecho es que si Murphy[44] viviera, diría que uno siempre tiene un destornillador cuando necesita un martillo (o al revés). Pero con el tiempo y con paciencia, al final nos ingeniamos para salir del paso.

Es posible que usted *nunca* tenga que enfrentar el problema que viene a continuación. Sin embargo, estoy seguro de que el haber pensado en cómo resolverlo *la (o lo) ayudará a tener una llave extra en su arsenal*, que uno *nunca sabe* cuándo le vendrá bien tenerla.

Suponga que usted necesita pesar *exactamente diez kilos de azúcar.* Para lograrlo, tiene dos pesas de cinco kilos cada una y una balanza con dos platillos Hasta acá, *todo normal.* Pero la dificultad aparece cuando yo le digo que la balanza está *desbalanceada.* En este caso, ¿qué quiere decir *desbalanceada?* ¿Qué es lo que usted tiene que interpretar? Para fijar las ideas, supongamos que, aunque no haya nada ubicado en ninguno de los dos platillos, hay *uno* que está más arriba que el otro. ¿Cómo hacer

44. Al escribir Murphy, estoy pensando en quien dio origen a la Ley de Murphy, según la cual si hay algo que *puede* salir mal, entonces *saldrá* mal.

entonces? ¿Qué estrategia usar? O en todo caso, ¿hay algo que se pueda hacer?

Ahora, le toca a usted. Ah, si le sirve, le diría que el problema SÍ tiene solución, aunque no lo parezca... pero esa es otra historia.

Mientras tanto, yo sigo más adelante.

Solución

Esta es la estrategia que tengo para proponerle... pero le pido que *no me crea por una cuestión de 'supuesta' autoridad.* Revise lo que va a leer hasta convencerse de que entiende lo que está escrito o, si no, prepárese para convencer a otras personas de que usted tiene razón y de que lo que está impreso está equivocado. Acá voy.

Primero, ponga las dos pesas (5 kilos + 5 kilos) sobre *uno* de los dos platillos. De esta forma, usted se asegura que de uno de los dos lados hay *exactamente diez kilos.* Ahora, ponga azúcar en el otro hasta que los dos platillos queden a la misma altura.

Si la balanza fuera una balanza normal, esto terminaría de resolver el problema, pero usted sabe que, para que esto sea cierto, los dos platillos tendrían que estar a la misma altura si no hubiera nada arriba de ellos. Es decir, aunque hayan quedado con las alturas equiparadas, ¡por ahora esto no dice que haya diez kilos de azúcar del otro lado!

Pero cuando llegue a este punto, ***retire las dos pesas*** y reemplácelas por azúcar hasta que los platillos queden otra vez a la misma altura.

¿Qué consiguió ahora? (¿Quiere pensar usted por su cuenta, primero?)

Lo que usted logró es que en el platillo donde estaban las dos pesas que sumaban 10 kilos ahora haya azúcar que reemplazó ***exactamente ese peso***. Y eso es lo que queríamos, ¿no es así?

Entonces, hemos elaborado juntos una estrategia que permite pesar los diez kilos *sin necesitar saber* si la balanza pesa correctamente.

Nota adicional: como decía más arriba, si la balanza fuera una balanza normal, cuando usted reemplazara las dos pesas por azúcar, en los dos platillos habría ahora la misma cantidad de azúcar: diez kilos.

La soga que unía los dos postes

Lo que sigue es una propuesta para desafiar su intuición. Yo voy a plantear una situación hipotética y usted tendrá que decidir cuál de las respuestas que voy a ofrecerle (en una suerte de *multiple choice*) es la que más se aproxima a la verdad. Acá voy.

No sé si alguna vez se fijó en las medidas de una cancha de fútbol. Si no lo hizo, no tiene importancia: las escribo yo acá. El largo tiene que oscilar entre 90 y 120 metros, y el ancho reglamentario tiene que estar entre 45 y 90 metros

A los efectos del problema, voy a suponer que estamos en una cancha que mide exactamente 100 metros de largo. Yo traigo una soga que justo mide 100 metros y la ato a uno de los postes verticales de uno de los dos arcos. Comienzo a caminar desplegando la soga hasta que llego al otro lado, al otro arco, y con la soga bien tirante[45], la ato al poste que está exactamente enfrentado con el que elegí antes.

De hecho, como la soga tiene 100 metros de largo y la cancha también, debería suceder que la soga esté virtualmente pegada al césped a lo largo de todo el trayecto.

---

45. Concédame la licencia de que la soga tenga algunos centímetros más como para que yo pueda atar cada extremo en cada uno de los postes, pero de tal forma que la parte que queda horizontal mida exactamente 100 metros.

Hasta acá, todo bien. Sin embargo, hay algo que usted (que me está acompañando en el experimento) y yo advertimos: la soga está '*muy tirante*'. Sería conveniente agregarle unos centímetros para darle un poco más de flexibilidad. Nos ponemos de acuerdo en agregarle 20 centímetros en total. O sea, ahora la soga mide 100,20 metros y nos deja un poco más satisfechos.

Acá es donde llega la pregunta que quiero hacerle: si caminamos hasta la mitad de la cancha y levantamos la soga '*tanto como nos sea posible*', ¿qué cree que va a pasar?

a) La soga se levantará apenas unos centímetros del césped, tanto como para que quepa una mano abierta.
b) La soga se levantará lo suficiente como para que usted pueda agacharse y deslizarse (o arrastrarse) por debajo de ella con su cuerpo pegado al pasto.
c) La soga se levantará tanto que usted podrá caminar por debajo de ella sin esfuerzo.
d) La soga se levantará tanto que usted podría venir con su auto y pasar por debajo.

Como ve, las cuatro alternativas son diferentes. No son exactas porque no sé bien ni cuánto mide usted, ni cuánto mide su auto (si es que tiene auto), ni cuál es la medida de su cuerpo si se estuviera arrastrando por el suelo; pero si usted me concede la flexibilidad suficiente para interpretar el problema, verá que cada una de las variantes encuadra una situación diferente.

Dicho esto, y sin necesidad de hacer ninguna cuenta (al menos al principio), ¿cuál de las cuatro posibilidades le parece que se acerca más a la respuesta correcta? En todo caso, ¿qué es lo que le dice su intuición?

Yo voy a seguir más adelante, pero créame (como no me canso de decir): leer la respuesta es algo que usted *siempre puede hacer*. En cambio, poder medirse a uno mismo, saber cuán bien entrenada tiene la intuición, es algo que solamente lo puede hacer en soledad. No hay nadie que mire, no hay nadie que juzgue: solamente usted. ¿Qué tiene para perder? Por eso le digo: "Ahora le toca a usted".

Solución

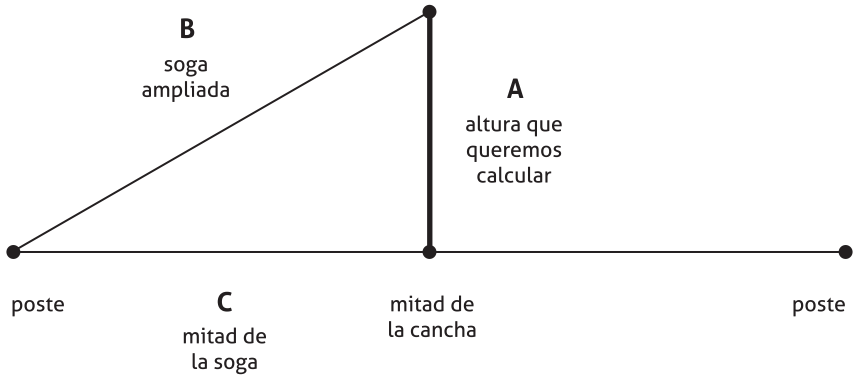
Me encantaría poder estar en este momento pensando juntos. Podríamos compartir lo que le pasó (o le está pasando a usted) y lo que me pasó a mí la primera vez que me tropecé con este problema. Fue hace muchísimos años y tenía que ver con un ejemplo sobre la utilización del teorema de Pitágoras. Ya sé: si yo hablo de la *necesidad* de utilizar un teorema para *explicar la solución*, se produce un efecto inmediato: "¡Esto no es para mí!".

No crea. Es muy posible que *sí* sea para usted, aunque más no sea porque le va a permitir *mejorar su capacidad para intuir*. ¿No sería suficiente este hecho, en todo caso, para querer *averiguar qué es lo que me estoy perdiendo*?

Como se imagina, puedo escribir acá y ahora cuál de las respuestas es la que más se acerca a la realidad, pero... ¿cuál fue la que eligió? ¿Y por qué?

Le cuento lo que me pasó a mí originalmente. Agregar ¡20 centímetros! a una soga de 100 metros parece algo insignificante. De hecho '*lo parece porque lo **es***'. Esto va a hacer que la soga no esté 'tan tirante', tal como era el objetivo.

Ahora, vayamos hasta la mitad de la cancha y comencemos a levantarla. ¿Se podrá levantar mucho? Fíjese en el siguiente dibujo, el que aparece en la Figura 1. Como se ve, hice un esquema que sirve para graficar la situación. En principio, dibujé un triángulo de manera tal que cada lado represente una *parte* del problema.



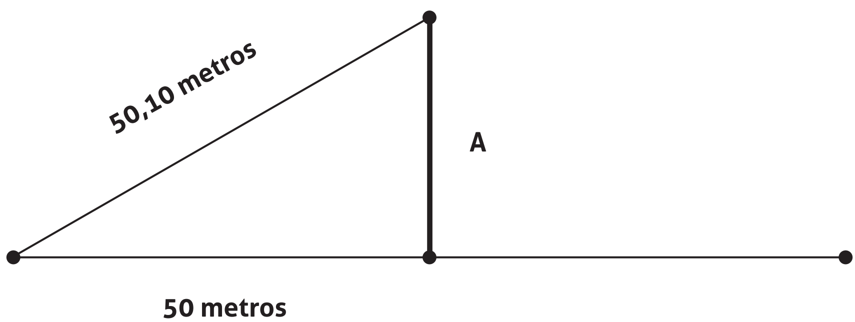


Figura 1

El lado horizontal (C) corresponde a lo que mide la mitad de la cancha: 50 metros.

El lado que aparece 'inclinado' (B) es el que correspondería a la soga después de haberle agregado 10 centímetros. Usted pensará: ¿cómo 10 centímetros? ¿No habíamos agregado 20 centímetros? Sí, es verdad, pero 20 centímetros fue lo que agregamos *al total de la soga*, y por lo tanto, si estamos parados en la mitad de la cancha, la soga queda ampliada en la mitad de esos 20 centímetros, y por eso el lado de la izquierda mide 50,10 metros, o sea, 50 metros más 10 centímetros.

Por último, el lado vertical corresponde a la altura máxima, que es la que queremos calcular. Es la altura a la que llegaríamos si tomáramos la soga que está atada a los dos postes y alguien pudiera 'levantarla desde arriba'. Ese número que llamé A (por altura), y que dio origen al problema.

Ahora bien: ¿cuánto mide A? Si usted se fija con cuidado, verá que el triángulo que quedó formado es un triángulo *particular*. ¿En qué sentido es *particular*? Es que uno de los ángulos mide 90 grados... ¿lo ve? Es el que forman A y C. Justamente, hicimos todo para poder levantar la soga lo más alto posible, y ahora queremos *medir* cuál es la distancia que hay desde ese punto 'más alto' hasta el césped. Hemos descubierto entonces que el triángulo que nos ocupa es lo que se llama un triángulo *rectángulo*.

¿Y? ¿Qué agrega ese dato? Bueno, agrega algo *muy importante*. Agrega un dato que nos permite, a usted y a mí, usar el teorema de Pitágoras. ¿Por qué? Porque el teorema de Pitágoras dice justamente cómo están relacionados los tres lados del triángulo. Es decir, establece una conexión entre esos tres números (las medidas de los lados), pero esta fórmula (que usted debe de haber escuchado hasta el hartazgo[46]) *no vale para cualquier triángulo, sino que solamente se puede aplicar a triángulos que tengan un ángulo* ***recto***. Lo bueno de esto es que *justamente* estamos en

46. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (B) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (A y C, en este caso), o sea: $B^2 = A^2 + C^2$. Esa es la forma en la que están relacionados esos tres números. Si usted conoce dos de ellos, puede averiguar el tercero.

presencia de un triángulo rectángulo que *tiene* un ángulo recto (y que por eso se llama rectángulo).

Usando la fórmula, cuando uno conoce *dos* de los tres lados, puede deducir el tercero:

$$B^2 = A^2 + C^2 \qquad (*)$$

Ahora, mire la Figura 2 en donde aparece otra vez el triángulo. El lado horizontal C mide 50 metros y el lado B (que lleva el nombre de 'hipotenusa') mide la 'soga ampliada' (50,10) metros. Esto quiere decir que B = 50,10 metros y C = 50 metros. Reemplacemos la igualdad (*) con los números correspondientes, y le recuerdo que el *número que no sabemos es el que llamé* A (que es la altura). Se tiene entonces:

$$(50{,}10)^2 = A^2 + (50)^2$$

$$A^2 = (50{,}10)^2 - (50)^2$$

$$A^2 = 2510{,}01 - 2500 = 10{,}01$$

Y estamos a punto de terminar el cálculo. Ya sabemos entonces cuánto mide *el cuadrado* de A (o sea, A^2). Para poder calcular A, lo que necesitamos es extraer *la raíz cuadrada del número (10,01)*, muy fácil si uno tiene una calculadora a mano. Si no, escribo yo lo que da (aproximadamente): 3,16.

Es decir, el lado A mide (increíblemente, al menos para mí) más de 3,15 metros, lo que ofrece lugar suficiente no solo para poner una mano, o arrastrarse por el césped o incluso caminar por abajo, sino hasta para poder traer un auto y manejarlo por debajo de la soga levantada.

¿Atenta esto contra la intuición? Creo que sí, pero me es fácil sacar conclusiones mientras yo estoy solo y sin contar con su presencia. A usted, ¿qué le pasó? ¿Valió la pena hacer el cálculo? ¿Qué aprendió al pensar el problema? Usted dirá.

El problema de la montaña

No todos los problemas son iguales. ¿Cómo distinguirlos? Supongo que depende fuertemente de la persona a quien uno se los presenta, pero más allá de la interlocutora (o el interlocutor) también para mí tienen un significado distinto. Hay problemas que me parecen fascinantes porque me tienen mucho tiempo pensando, y después culmina todo bien si es que puedo encontrar una solución. Hay otros que no: les dedico mucho tiempo, y después no se me ocurre nada 'conducente', pero igual me sirvieron, porque disfruté mucho del trayecto. No suelo darme por vencido 'fácilmente', pero algunas veces me frustro porque me parece que ya no se me va a ocurrir nada nuevo.

Algunas veces surge alguna idea que no tuve antes, o varios días después pienso en algo que no se me había ocurrido antes, y de pronto se hace 'la luz'. Son esos momentos de '¡Ajá!' que compensan todo el tiempo invertido. Por supuesto, es difícil decir que los que más me interesaron a mí o que pertenecen a esa categoría son los que le van a producir lo mismo a usted, o al revés; pero el que quiero contar en este espacio tiene un 'asterisco' en esa suerte de "catálogo personal" que llevo yo, y estoy seguro de que a usted también le pasará. Es uno de esos problemas o momentos de la vida que se transforman en 'memorables'. Acá va.

Suponga que hay una persona que está parada al borde de una montaña. Esta montaña tiene *un solo camino hacia la cumbre*. El señor decide escalarla y parte exactamente a las cero horas de un día lunes (o sea, a la medianoche del domingo). Fíjese en este detalle: no importa la velocidad a la que asciende ni lo que hace en el trayecto. Puede que pare para descansar, o que vuelva para atrás por un tiempo... nada importa. O mejor dicho, sí, ¡hay algo que importa! Cuando es la medianoche de ese lunes (o sea, cuando se cumplen exactamente 24 horas desde que empezó a subir), el señor está arriba de todo. Puede que haya llegado antes y que incluso decidiera bajar y después volver a subir, no interesa. Lo que *sí* importa es que a las 12 de la noche del lunes él ¡está arriba!

Hasta acá, todo bien. Supongamos que el señor se queda en la cima de la montaña (ya que se llevó suficientes provisiones) como para estar allí durante —digamos— seis días. Justamente, a las *cero horas del siguiente lunes*, o sea, a la medianoche del domingo siguiente, *comienza el descenso*. Igual que antes, no importa de qué forma camina hacia abajo (eso sí, por la *única* ruta que existe) y, como sucediera la semana anterior, tiene total libertad para hacer el camino hacia abajo de la forma que quiera, pero con la misma condición que al subir (que ahora se tiene que cumplir al bajar): a las 12 de la noche de ese lunes, el señor *tiene que estar abajo*.

Hasta acá, supongo que tiene que estar todo claro: inicia el ascenso a las cero horas de un lunes, a las 24 horas *tiene* que estar arriba; se queda seis días; a las cero horas del siguiente lunes inicia el descenso, y a las 24 horas de ese lunes seguro que está abajo. Ahora bien, usted se debe de estar preguntando: ¿Y cuál es el problema?

Bueno, el problema consiste en que pueda comprobar lo siguiente: tiene que haber al menos *un lugar* de la montaña en el que el señor estuvo a la misma hora tanto al subir como al bajar. ¿Me entiende?

Lo digo de otra forma: la idea es que usted me pueda convencer de que, no importa cómo haya hecho para subir o para bajar, tiene que haber habido al menos *un lugar en el camino que une la base con la cima* por el que el señor pasó en el mismo horario tanto a la ida como a la vuelta.

Por ejemplo, si el señor recorre la mitad del trayecto en 12 horas, eso significa que a las 12 del mediodía estará en el mismo lugar al subir que al bajar. Obviamente, este es solo un ejemplo, ya que como escribí más arriba él tiene total libertad para subir y bajar como quiera, y no tiene por qué recorrer la mitad del trayecto en 12 horas... Ahora le toca a usted.

Una forma de pensar el problema

¿Cómo abordar el problema? ¿Qué hacer? En principio, uno *no sabe qué hizo el hombre ni al subir ni al bajar* (ya que pudo haberse quedado descansando horas, subir, bajar, volver a subir, volver a bajar, etc.). ¿Cómo puede uno contestar el problema de forma tal que sirva *para **todos*** los casos? Fíjese en las siguientes tres figuras:

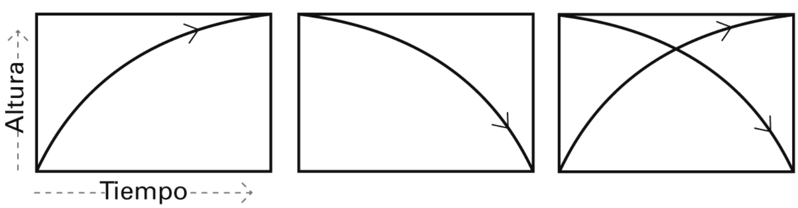


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Me imagino que usted debe de estar mirando estos gráficos y pensando: ¿qué tienen que ver estos dibujos con el problema de la montaña? Más aún: uno tiene derecho a cuestionarse qué tienen que ver estos dibujos con la matemática o con el diseño de una estrategia. Sígame por acá y, después de leerme un rato, fíjese si puedo ayudar a 'echar un poco de luz'.

Le propongo algo distinto a lo que estamos acostumbrados a hacer (y de paso, es una idea que uno puede usar en otros problemas de la vida). Voy a *cambiar* el problema... pero solamente *un poco*. Supongamos que, en lugar de haber *un solo señor*, hay <u>*dos*</u> *señores ahora*. Uno sale desde abajo hacia arriba, y el otro, al revés: de arriba hacia abajo.

En la Figura 1 se ve al primero, y en la Figura 2, al segundo. Lo que está representado, por un lado, es el tiempo que van recorriendo (en el segmento horizontal de cada rectángulo), y por el otro, la altura en la que se encuentran en cada momento (segmento vertical).

Supongamos que ambos salen a las cero horas *del* ***mismo*** *lunes* y llegan a destino (uno arriba y otro abajo) a las 24 horas de haber salido. Eso sí: como los dos *usan el mismo camino*, como usted advierte... en algún momento del recorrido *¡se van a tener que encontrar!* (y eso es lo que muestra la Figura 3). Es que más allá de lo que hagan durante el trayecto (descansar un poco, subir, bajar, quedarse en un lugar durante mucho o poco tiempo... no importa), como uno sube y el otro baja, tiene que haber al menos un lugar de la montaña en el que se tropiezan uno con otro. ¡Y eso es lo que necesitábamos!

¿Por qué? ¿Cómo usar este modelo para el problema original? Recién suponía que había *dos señores*, uno que subía y otro que bajaba, pero la diferencia era que lo hacían *el mismo día*. En este caso resulta muy evidente que se tienen que cruzar en algún momento del día. Más aún, puede que eso ocurra varias veces si deciden subir y bajar, detenerse, etc. De lo que estamos seguros es de que se tienen que cruzar. ¿Cómo hacer para usar este modelo en el caso de *nuestro problema*?

Si pudiera, le propondría lo siguiente: en lugar de que haya *dos hombres* que hacen sus respectivas trayectorias el mismo día, imagine que usted *superpone* la trayectoria del mismo hombre al haber ido hacia arriba con la trayectoria de cuando fue hacia abajo. Haga como si estuviera mirando primero el mapa del recorrido del hombre cuando fue hacia arriba y, en lugar de tener un segundo hombre, tome al mismo señor pero en el mapa que quedó dibujado cuando fue hacia abajo. En este caso, que sea el mismo señor o no resulta irrelevante. Lo que importa es que, al superponer las trayectorias, igual que antes... ¡tiene que haber al menos ***una altura*** en donde pasó a ***la misma hora*** al ir hacia arriba y al ir hacia abajo! ¡Y eso era justamente lo que queríamos demostrar!

Si usted prefiere independizarse de los dibujos y de las figuras que yo propuse más arriba, siéntase libre de hacerlo. Los puse como una referencia. De hecho, piense que en lugar de haber dos señores hay uno solo, e imaginariamente trasládese a un mundo hipotético en donde él mismo pudiera estar subiendo por un lado, mientras estuviera bajando por el otro. Justamente, tuve que poner *dos días diferentes* porque el señor no puede dividirse en dos; pero lo que queda claro es que si tomamos dos días diferentes, y nos aseguramos de que a las cero horas de uno de los días está abajo y de que a las 24 del mismo día está arriba (y al revés, a las cero horas de un día está arriba, y a las 24 de ese mismo día está abajo), entonces ¡tiene que haber ocurrido que estuviera a la misma altura y a la misma hora **por lo menos una vez**!

Una de las moralejas de este problema es que si bien el original parece complicado y difícil de pensar, presentado con el modelo que escribí más arriba termina pareciendo lo contrario: muy fácil. Fíjese si yo lo hubiera planteado así: "En una montaña en donde hay un solo camino para subir y/o bajar, hay dos personas de manera tal que uno está abajo y el otro está arriba. Empiezan a caminar a la misma hora y en 24 horas cambiarán de lugar: el que estaba abajo llegará arriba y el que estaba arriba llegará abajo. ¿Se podrá demostrar que en algún momento van a estar a la misma altura?

La pregunta resulta tonta, porque es como preguntar si en algún momento se cruzan. Sí, se cruzan. Puede que varias veces, si deciden no ir constantemente en la misma dirección (hacia arriba uno, y hacia abajo el otro), pero SEGURO que se cruzan... Puesto en estos términos, el problema 'casi' carece de sentido. Sin embargo, este modelo permite resolver el *otro* problema, que ya no es ni tan sencillo ni tan evidente.

Apéndice

Cuando terminé de escribir este texto, se me ocurrió que podía hacer un agregado, y quizás sirva para que se entienda todo un poco más; pero si el texto anterior le alcanzó, puede saltear esta última parte. De todas formas, para quien aún prefiere tener algo más para entretenerse, fíjese en lo siguiente:

En cada momento del día, digamos cada hora, yo escribo la altura a la que estaba el señor 1 (el que subía). Si la montaña tuviera mil metros, uno podría tener una tabla de este tipo:

0 horas	0 metros
1:00 AM	135 metros
2:00 AM	212 metros
3:00 AM	212 metros

4:00 AM	535 metros
5:00 AM	720 metros
6:00 AM	720 metros
7:00 AM	720 metros
8:00 AM	720 metros
9:00 AM	720 metros
10:00 AM	720 metros
11:00 AM	720 metros
12:00 PM	535 metros
1:00 PM	300 metros
2:00 PM	470 metros
3:00 PM	650 metros
4:00 PM	780 metros
5:00 PM	650 metros
6:00 PM	850 metros
7:00 PM	1.000 metros
8:00 PM	1.000 metros
9:00 PM	1.000 metros
10:00 PM	1.000 metros
11:00 PM	1.000 metros
medianoche	1.000 metros

Como se puede apreciar acá, a las cero horas estaba abajo. Después comenzó a subir, y cuando a las 2 de la mañana llegó a 212 metros de altura, se quedó allí por lo menos una hora... Después siguió subiendo hasta que llegó a las 5 de la mañana a los 720 metros. Quizás llegó antes, pero lo que queda claro (ya que estamos marcando nada más que las horas) es que a las 5 de la mañana estaba ya a 720 metros. ¡Y allí se quedó hasta pasadas las 11 de la mañana, como se ve en la tabla! (mírela, por favor, para certificar que está de acuerdo conmigo). Después, lo curioso es que volvió a bajar, hasta que a la 1 de la tarde estaba en 300 metros. ¿Qué le habrá interesado por allí? Y después, a las 2 de la tarde ya estaba subiendo, hasta que llegó, a las 7 de la tarde (o antes), al tope de la montaña... y allí se quedó.

Este es un ejemplo cualquiera. Usted puede fabricarse el suyo.

Ahora bien. Yo podría fabricarme una columna equivalente que sirva para describir las alturas del *otro* señor, del que venía bajando. Mirado de esta forma, supongo que es más fácil detectar que, *en algún momento del día*, las alturas tuvieron que coincidir. Puede que haya sido más veces, y no solamente un momento. Por ejemplo, si el otro señor hubiera decidido también quedarse en los 720 metros, se hubiera cruzado con usted durante varias horas, y no solo un instante.

Lo interesante es que ahora lo que usted puede hacer es volver al problema original y escribir las columnas que llevó *usted mismo, en su viaje de ida y en su viaje de vuelta*. Ahora *no hay dos señores, sino uno solo (¡usted!)*, pero lo interesante es que el *mismo argumento* que servía para poder descubrir que los dos tienen que cruzarse también sirve para demostrar que usted tuvo que haberse cruzado con usted mismo, como si imaginariamente hubiera ido subiendo y bajando durante el mismo día. ¿Qué prueba eso? Prueba que, al menos *una vez* en el día, usted estuvo a la misma altura yendo hacia arriba como cuando iba hacia abajo. ¡Y eso era lo que queríamos demostrar!

Espero que este apéndice haya servido para que se entienda todo un poco mejor… ¿habrá sido así?

La mosca y los dos trenes

En la matemática pasa lo mismo que en el arte: la calidad perdura, los clásicos sostienen el paso del tiempo, la belleza resiste cualquier embate de lo coyuntural. Digo esto porque hay ciertos problemas que se mantienen a lo largo de los años. Aparecen otros, muchos otros que van quedando desubicados u olvidados; pero en la música, por ejemplo, *La Traviata* y *Aída* quedan, así como en la pintura *La Gioconda* y el *Guernica* trascienden las generaciones.

El siguiente es un problema que tiene una larga historia. No sé cuándo fue presentado en sociedad, pero puedo afirmar que es uno de los problemas más famosos que existen dentro de la matemática *recreativa*.

El enunciado es sencillo (como la mayoría de los problemas trascendentes dentro de esta área), y la solución, también.

Mi experiencia me sugiere ofrecerle tres visiones:

1. Si usted elige el camino adecuado para pensarlo, y por lo tanto encuentra la solución muy rápidamente, no entenderá por qué hago esta presentación. Es más: le parecerá 'un problema más'.
2. Si usted tiene que invertir una buena porción de su tiempo para resolverlo pero luego encuentra la autopista que lo lle-

va al resultado, sentirá la satisfacción de aquel que hizo un esfuerzo placentero y valioso. Es más: seguro que disfrutará del trayecto.

3. Si en cambio usted invirtió una buena porción de su tiempo para pensarlo pero *no pudo arribar a la solución por sus propios medios*, permítame sugerirle algo: no abandone. Como siempre, le queda el recurso de leer la solución que figura más adelante, pero usted sabe que esa herramienta la tiene a mano para usarla cuando quiera. En todo caso, si 'espía', se priva de pensarlo… y en definitiva: ¿qué sentido tendría? ¿Qué gracia pueden tener estos problemas que no sea la satisfacción que da el 'pensarlos', no tanto 'resolverlos'?

Por último, antes de enunciar el problema, una observación: no hay *forma de que en su vida* usted se tropiece con la dificultad que sigue. Cero. Nunca le va a pasar. Pero lo que *sí* puede pasarle es que el camino que recorrerá para pensar la respuesta lo tenga que usar nuevamente, aunque usted mismo nunca lo advierta. Son los caminos que se abren en la mente, ángulos para pensar que uno no sabía que existían… hasta que los construye.

Ahora sí, el problema[47]: suponga que hay dos trenes que están a punto de recorrer un camino de 100 kilómetros. Lo curioso es que ambos están sobre la misma vía… de manera tal que inexorablemente en algún momento van a chocar de frente. Ambos trenes andan a 50 kilómetros por hora.

Por otro lado, hay una mosca situada en la locomotora de uno de los trenes. Esta mosca es muy particular: tiene la habilidad de volar muy rápidamente. Lo hace a 75 kilómetros por hora. Más aún:

---

47. Hay muchísimas versiones del problema. Yo elegí una cualquiera, donde las 'cuentas' fueran sencillas, para no desviar la atención de lo esencial.

cuando los trenes se pongan en marcha *simultáneamente*, la mosca también empezará a recorrer la distancia que va entre un tren y otro. Ni bien llegue a la locomotora del que viene de frente, dará la vuelta instantáneamente y se dirigirá ahora hacia el otro tren.

El proceso se repite hasta el momento en el que los dos trenes chocan (con la mosca en el medio).

La pregunta es: ¿cuántos kilómetros recorrió la mosca (antes de morir aplastada entre las dos locomotoras)?

Respuesta

Este problema, como la mayoría de los que trato de presentar, tiene múltiples lecturas. Hay un intento de solución que es típico y que aparece virtualmente en *todas* las personas con las que he hablado sobre este tema. Se trata de empezar a sumar las distancias que va recorriendo la mosca en cada 'pequeño trayecto' que va entre cada una de las dos locomotoras. Los segmentos que va recorriendo son cada vez más pequeños, y en principio no hay ninguna razón para no intentar hacer ese cálculo. De hecho, lo incluí como una nota al pie[48].

---

48. La mosca viaja a 75 km/h, lo que significa que, en un tiempo T, recorrió

$$((75 \text{ km/h}) \times \text{T}) \text{ km}$$

Por ejemplo, si T = 2 horas, entonces la mosca recorre (75 km/h) × (2 h) = 150 kilómetros. De la misma forma, dado cualquier tiempo T, cada tren recorre (50 km/h) × T kilómetros. ¿Qué *distancia* recorre la mosca desde que empieza el experimento hasta que se encuentra con el segundo tren? Para encontrar este número bastaría que yo halle el *tiempo* que tarda la mosca en chocar con el otro tren, ya que si calculo *ese tiempo*, entonces, lo multiplico por 75 y tengo la distancia que recorrió. Ese tiempo t se calcula así:

$$75\ t = 100 - 50\ t \qquad (^*)$$

¿Por qué? Porque el término de la izquierda indica la distancia que recorre la mosca en un tiempo *t*, y el término de la derecha es la distancia que recorrió el segundo tren desde que salió a 100 kilómetros de la mosca, y viajando a una velocidad de 50 km/h. Quiero hallar el número *t* que haga que ambos se encuentren, y de allí la igualdad que figura en (*). Despejando en (*), se obtiene que 125 t = 100, por lo que uno deduce que t = 4/5 (de hora). Luego, para calcular la distancia que recorrió la mosca en 4/5 de hora, multiplico ese valor por 75 (que es la velocidad de la mosca) y se tiene: $75 \times (4/5) = 60$ kilómetros, y esa es la distancia que recorrió la mosca *la primera vez que se encuentra* con el segundo tren. Allí, instantáneamente da vuelta y arranca en sentido contrario. Ahora, quiero calcular cuánto recorre hasta encontrarse con el primer tren. Por lo tanto, igual que recién, me alcanzará con encontrar el tiempo que tiene que volar hasta tropezarse con el primer tren, e igualarlo con el tiempo que usa el primer tren hasta encontrarse con la mosca.

O sea, hay que encontrar el valor de *t* que hace que esta igualdad valga:

$$60 - 75\ t = 40 + 50\ t \qquad (^{**})$$

¿Por qué? A la izquierda, estoy calculando la distancia que recorre la mosca desde el kilómetro 60 (donde se encontró con el segundo tren), a una velocidad de 75 km/h, hasta que se encuentra con el primer tren. Y en el término de la derecha, el número '40' indica los kilómetros que iba recorriendo el primer tren cuando la mosca se encontró con el segundo tren. Es que como la mosca había usado 4/5 de hora, entonces, en 4/5 de hora, el primer tren recorrió: $(4/5) \times 50 = 40$ km. Entonces, de la igualdad (**) se deduce:

$$\begin{gathered} 60 - 75\ t = 40 + 50\ t \\ 20 = 125\ t \\ t = 4/25 = 4/5^2 \end{gathered}$$

Luego, la mosca, en tiempo $(4/5^2)$ recorrió: $(4/5^2) \times 75$.

Pero *otra* manera de pensar este problema es la siguiente: si uno calcula el tiempo que tardan los dos trenes en chocar entre sí, eso indica el tiempo que la mosca estuvo volando entre uno y otro (tren). Es decir: basta con saber cuánto tiempo pasó para que los dos trenes chocaran de frente, para saber el tiempo que la mosca pasó en el aire yendo y viniendo. Pero como los dos trenes marchan a 50 km/h, y salen a una distancia de 100 km entre uno y otro, en el momento en que recorrieron 50 kilómetros (o sea, a mitad de camino) chocan inexorablemente. Y como la velocidad a la que circulan es de (justamente) 50 km/h, eso indica que en *una hora* recorrieron 50 kilómetros. Lo único que falta es que deduzca qué distancia recorrió la mosca en ¡una hora! Y eso es fácil de contestar: la mosca recorrió 75 kilómetros en una hora (ya que vuela a 75 km/h). Y eso termina por resolver el problema.[49]

Si uno sigue con este procedimiento, advierte que lo que tiene que hacer para calcular la distancia que recorrió la mosca hasta que los dos trenes chocan de frente es sumar

$$75 \times [(4/5) + (4/5^2) + (4/5^3) + (4/5^4) \ \dots + (4/5^n) + \dots] = 75$$

Para todos aquellos que hayan tropezado alguna vez en sus vidas con series numéricas, todo lo que hay que hacer es sumar la serie geométrica de razón 1/5, empezando desde el segundo término. De allí el resultado (75 kilómetros). Corolario: la mosca recorrió 75 kilómetros hasta el momento en el que *muere* aplastada entre los dos trenes.

49. Hay una anécdota muy famosa (de dudosa veracidad) que indica que cuando le plantearon este problema al célebre matemático húngaro-norteamericano John Von Neumann, el padre de la Teoría de Juegos y uno de los que participó en el Manhattan Project que construyó las bombas atómicas que fueron arrojadas en Hiroshima y Nagasaki, él contestó: "75 kilómetros". Su interlocutor lo miró y le dijo: "Es extraño que usted lo hubiera resuelto tan rápido, ya que la mayoría de la gente trata de calcular la suma de la serie".

Moraleja: si uno *arranca* a pensar el problema de esta forma, *nunca comprenderá* por qué hay *semejante historia* alrededor de él. Pero como decía más arriba, justamente la *historia* de este problema está construida de los que —como yo— tratamos de sumar los 'infinitos' segmentos que va recorriendo en cada pequeño tramo, en lugar de aproximarme/nos al problema, pensándolo en forma directa.

Von Neumann le respondió: "¿Por qué dice 'extraño'? ¡Eso es exactamente lo que yo hice!".

PRIMERA PAUSA

Aquí me quiero detener un instante e invitarla (o invitarlo) a una reflexión. Voy a escribir acá abajo algunos problemas que tienen *un hilo conductor*. Es decir: usted los puede mirar, pensar o ignorar individualmente, pero lo que le sugiero es que los mire con otra perspectiva, como si tratara de descubrir *algo extra*, algo que no está necesariamente explícito, algo que los *distinga*, los *caracterice*.

Los problemas a los que me refiero son:

- Tablero de ajedrez recortado
- El viaje del caballo
- ¿Se puede o no salir de un laberinto?
- El Juego del 15
- ¿Qué tendrán que ver un juego con pelotas y la paridad?
- Miranda y el partido de tenis
- Estrategia para cambiar de bancos

CAPÍTULO 4

Tablero de ajedrez recortado

No se preocupe: no hace falta saber jugar al ajedrez. Todo lo que se necesita es un tablero. Ah, y también algunas fichas de dominó. En realidad, necesita 32 fichas de dominó. No es que haga falta *físicamente* tener el tablero, podemos usar incluso un dibujo en una hoja de papel, y lo mismo con las fichas de dominó.

Si usted cuenta las casillas, verá que en total hay 64, ya que hay ocho filas y ocho columnas. Los colores se van alternando, por lo que en realidad la mitad de las casillas es de color blanco y la otra mitad, negro.

Le propongo ahora que tome una ficha de dominó cualquiera y la apoye en el tablero de manera tal de cubrir una casilla. En realidad, no solo puede cubrir *una* casilla, sino que si la pone en forma horizontal (y lo mismo si la ubica en forma vertical), la ficha de dominó *tapa* dos casillas del tablero de ajedrez (si no resulta *exacto*, concédame la licencia como si lo fuera... es decir, como si cada ficha de dominó cubriera exactamente dos casillas del tablero de ajedrez).

Ahora bien: como hay 64 casillas, y cada ficha de dominó cubre exactamente dos (independientemente de que las ponga en forma vertical u horizontal), entonces necesitamos 32 fichas. Es fácil comprobar que hay muchas formas de cubrir el tablero, pero ahora quiero hacer una modificación. Voy a quitar dos casillas del tablero hasta dejarlo en 62 casillas, pero *no* dos cualesquiera sino la casilla del extremo inferior izquierdo y la que está en el extremo superior derecho. El tablero quedará con este aspecto:

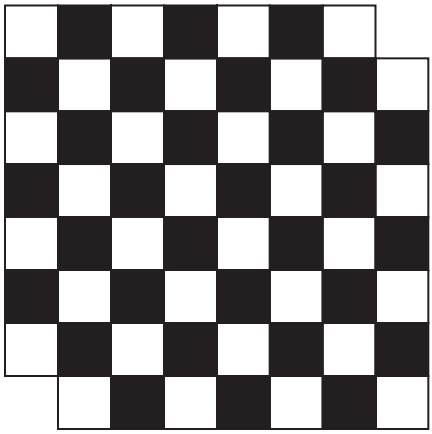


Figura 1

Si ahora quisiéramos cubrir el tablero con las mismas fichas de dominó, nos sobraría una, ya que con 31 podemos *tapar* 62 casillas: ¡hay una de más! Dicho esto, le propongo que elabore una estrategia para distribuir esas 31 fichas de manera tal que todas las casillas del tablero queden cubiertas. Antes, cuando el tablero estaba intacto y uno tenía las 32 fichas, nos dimos cuenta fácilmente de que hay muchísimas formas de cubrirlas todas. Ahora, le pido que trate de hacer lo mismo pero con dos casillas menos. Mientras tanto, mientras usted lo intenta, yo la/lo espero acá.

¿Cómo le fue? ¿Pudo? Es muy posible que no haya podido, ¿no es así? ¿Cómo podría yo saber desde acá que no fue posible?

Es decir, tiene que haber *algo* que lo impida, para que yo, aunque no esté cerca suyo, *sepa con absoluta certeza* que usted no pudo. Más aún: no es que *usted* no pudo. ¡Nadie podría! Y es que en realidad ¡no se puede por más que uno lo intente!

Todo bien, pero ¿por qué no se puede? ¿Por qué se podía con 64 casillas y 32 fichas, y ahora, con dos casillas menos y una ficha menos, no se puede?

Antes de escribir la respuesta (o <u>una</u> respuesta) prefiero hacer una observación. Fíjese que las dos casillas que desaparecieron del tablero original son del mismo color. Sí: cuando yo le pedí que recortara dos casillas, le dije que excluyera las que están en el extremo inferior izquierdo y el extremo superior derecho, y justamente las dos son del mismo color. ¿Cómo incidirá este hecho?

Incide *mucho*. ¿Por qué? Fíjese que cuando usted apoya una ficha de dominó en el tablero, esta ficha cubre dos casilleros, pero de diferente color. Es decir, la ponga en forma vertical u horizontal, tapa una de color blanco y otra de color negro. Si excluimos dos casillas del mismo color (al recortar el tablero), de las 62 casillas que quedaron, hay 32 negras y 30 blancas (o al revés). ¿Y entonces? Bueno, este es el paso previo a concluir que no vamos a poder cubrirlo con las 31 fichas, porque, como cada ficha tapa una casilla de cada color, si ahora no queda la misma cantidad de casillas blancas que de casillas negras, entonces el tablero que resultó ya no es *simétrico*. Las fichas que yo tengo no las puedo *cortar* y, por lo tanto, inexorablemente me va a sobrar una casilla de color negro que no voy a poder tapar, y ¡eso demuestra que no importa cómo las quiera ubicar usted no va a poder!

El poder de la matemática está en la contundencia de esa frase. Obviamente, el argumento que acabo de escribir demuestra que no es usted el que está fallando o a quien no se le ocurre cómo hacer: no va a poder ni usted ni nadie. Y a eso me quiero referir: el razonamiento es tan poderoso que no necesita de casos particulares ni de pruebas con ejemplos: sucede siempre.

Reflexión final: en este caso, la idea es comprobar que si uno está a la búsqueda de la estrategia, conviene suspender el intento. *'Tal'* estrategia no existe... y determinarlo no es un hecho menor.

El viaje del caballo

El siguiente problema involucra un tablero de ajedrez y un caballo. Pero espere: no hace falta saber 'casi nada' de ajedrez, o sea, no se deje intimidar. Es una propuesta muy bonita para tratar de elaborar una estrategia, y en función de lo que usted piense poder dar una respuesta positiva o negativa. Dese una chance antes de decir 'esto no es para mí'. Lo único que hace falta es saber cómo 'mueve' un caballo en el ajedrez. Si nunca prestó atención, un caballo puede hacer los siguientes movimientos:

a) Dos casillas hacia adelante y una hacia la derecha.
b) Dos casillas hacia adelante y una hacia la izquierda.
c) Dos casillas hacia atrás y una hacia la derecha.
d) Dos casillas hacia atrás y una hacia la izquierda.

Por supuesto, se trata de que el caballo no se 'salga' del tablero, o sea, si en alguno de esos movimientos 'potenciales' el caballo se 'cae', entonces ese movimiento no está permitido. Sé que es una obviedad, me interesa puntualizarlo. Pero hay más: faltan otros cuatro movimientos.

a) Una casilla hacia adelante y *dos* hacia la derecha.
b) Una casilla hacia adelante y *dos* hacia la izquierda.
c) Una casilla hacia atrás y *dos* hacia la derecha.
d) Una casilla hacia atrás y *dos* hacia la izquierda.

Como se ve, es todo muy *simétrico*. Por último, antes de plantear el problema, quiero dibujar acá abajo un tablero de ajedrez. Se trata de una grilla de 8 × 8 casillas (o sea, comprende 64 cuadrados).

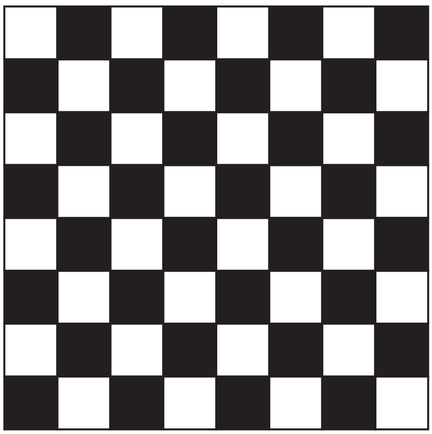


Figura 1

La idea ahora es tratar de contestar esta pregunta: suponga que usted tiene un caballo puesto en este tablero ubicado en el extremo inferior izquierdo. ¿Se puede llevar el caballo desde este lugar hasta el extremo superior derecho pasando por *cada casilla del tablero exactamente una sola vez?*

Antes de avanzar: se trata de llegar con movimientos típicos de un caballo de ajedrez —como los que ya describí— desde la casilla que ocupa el extremo inferior izquierdo hasta la que está en el extremo superior derecho, pasando POR TODAS las casillas pero UNA SOLA VEZ.

Como se ve, no es un problema complicado. El enunciado es muy sencillo de entender (creo). Lo único que espero de usted es que no *renuncie* a pensar el problema muy rápido, dese una oportunidad. Todo lo que hay que hacer es dedicarle un rato y tropezarse con las preguntas que le irán surgiendo a medida que lo vaya pensando.

¿Se podrá? Digo, ¿se podrá elaborar un camino para que el caballo pueda llegar de una punta a la otra del tablero pasando por *todos* los casilleros una sola vez?

Quiero dejar de escribir para que usted avance en soledad. Nos reencontramos más adelante.

Respuesta

Antes de avanzar, quiero proponerle que se fije una vez más en el tablero. Olvídese del caballo por ahora, mire el color de las casillas. La inferior izquierda es de color negro. La superior derecha es *también* de color negro. ¿Por qué quiero hacerla/hacerlo pensar en esto? Porque no quiero escribir la solución tan rápido, sino que prefiero elaborar algo junto con usted. Si no tiene ganas y/o paciencia, lea el último párrafo de este artículo, que allí está todo explicado en forma resumida, pero créame que vale la pena que acepte la propuesta.

Algunas preguntas:

a) Cuando el caballo hace un movimiento, de una casilla hacia otra, ¿qué pasa con el color de las casillas inicial y final?
b) ¿Sucede siempre? Es decir, sin importar si la casilla de inicio es blanca o negra, ¿sucede siempre lo que usted descubrió recién?

Con este dato que ahora tenemos[50], fíjese en el color de la casilla inicial del problema y en el del casillero final. Como usted advierte, son ambas de color negro. Recuerde este dato.

Otras reflexiones más. Si la idea es tratar de ver si es posible elaborar un camino que cumpla con ir desde la casilla inferior izquierda hasta la superior derecha pero pasando *solamente una vez* por cada casilla, ¿cuántas movidas tiene permitido hacer el caballo? Es decir, como en total el tablero tiene 64 casillas, y el caballo ya está parado en una de ellas (la inferior izquierda), cada movimiento que haga tiene que llevarlo a un casillero distinto. Como no puede repetir casilleros, ¿cuántos movimientos terminará dando el caballo? Le propongo que piense usted la respuesta.

Como usted descubre, el caballo tendrá que hacer entonces *exactamente* 63 movidas. Cada movida debería llevarlo a una casilla distinta.

Ahora bien: cuando el caballo hace la primera movida (la movida *uno*) pasa de una casilla de color negro a una de color blanco (no importa cuál sea la movida). Y cuando haga la movida *dos*, pasará de una blanca a una negra otra vez. Y cuando haga la movida *tres*, pasará a una blanca. Y cuando haga la *cuatro*, pasará a una negra. Y así siguiendo: cada vez que hace una movida *par*, termina en una casilla de color *negro*, y cuando hace una movida *impar*, termina en una casilla de color *blanco*. Este dato *también* es importante.

¿Cómo hacer ahora para usar todo lo que averiguamos? ¿Re-

50. El color de la casilla siempre cambia: si el caballo empieza en una casilla de color blanco, cualquiera sea el movimiento —permitido— que haga, terminará en una negra. Y al revés: si empieza en una negra, terminará en una blanca.

cuerda cuántas movidas tenía que hacer el caballo si quería cumplir con el objetivo? Eran 63. O sea, un número *impar* de movidas. Pero como acabamos de ver recién, cada vez que hace una movida *impar* termina en una casilla de color *blanco*. ¿Y de qué color es la casilla que está en el extremo derecho? Es de color negro. Por lo tanto, ¿cuál es la conclusión?

La conclusión es que el camino que uno quisiera poder diseñar para que el caballo pueda unir el extremo inferior izquierdo con el superior derecho ¡no puede existir! Inexorablemente tendrá que utilizar un número *par* de movimientos para llegar a una casilla de color negro. Pero si hace 62 no llegará a cubrir todo el tablero, y si hace 64 movimientos estará forzado a repetir alguna casilla.

La moraleja entonces es que el camino que uno quería elaborar no existe.

La matemática involucrada es muy sencilla. Todo lo que hay que hacer es observar lo que sucede con los movimientos de orden par o impar, y fijarse el color de la casilla en la que termina esa movida; pero lo extraordinario es que con este análisis uno está seguro de que no es que usted y/o yo no pudimos encontrar el camino pero podría venir alguna otra persona y *sí* encontrarlo. No. El camino ¡no existe! O mejor dicho, ¡no puede existir!

Y de eso se trata muchas veces. En lugar de estar penando y golpeándose la cabeza pensando en que es uno el que no puede encontrar la solución a un problema, un análisis de este tipo permite concluir que no depende ni de usted ni de mí: nadie va a poder. Bonito, ¿no? Ah, y antes de que me olvide: esto *también* es hacer matemática[51].

---

51. Carlos D'Andrea me propone que incluya la siguiente pregunta: "Y si el tablero fuera de 8 × 7, ¿se podría?". ¿Usted qué dice?

¿Se puede o no salir de un laberinto?

Imagine que usted está parado frente a la puerta de un edificio que tiene 64 habitaciones en la planta baja (Figura 1). Son todas iguales en tamaño: miden 2 m × 2 m (o sea, 4 m^2):

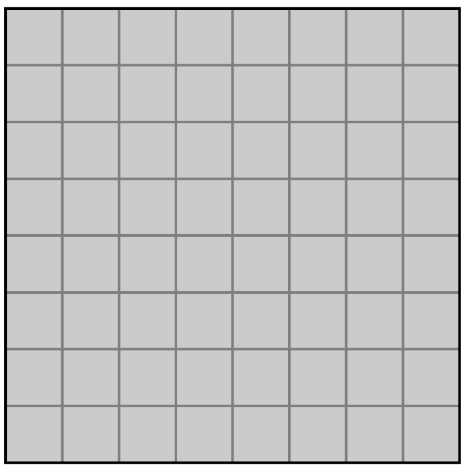


Figura 1

Además, todas tienen una puerta en cada pared, como se ve en la Figura 2. La única particularidad es que hay algunas habitaciones que *no necesitan* tener tantas puertas ya que, si no, uno se *saldría del edificio.*

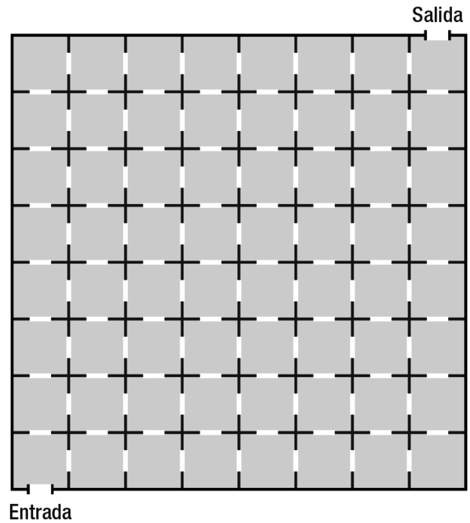


Figura 2

En todo caso, la distribución es la de una grilla o un tablero de ajedrez de 8 × 8.

Una salvedad: hay una puerta de entrada al edificio que está en el extremo inferior izquierdo y otra de salida que está en el extremo superior derecho.

La pregunta que quiero hacerle es la siguiente: ¿es posible entrar en el edificio (por la puerta de *Entrada*) y salir (por la puerta de *Salida*) recorriendo todas las habitaciones pero pasando solamente una vez por cada una?

Solución

Usted (o yo) podríamos pensar que esto va a ser *imposible* de contestar. ¿Cómo voy a hacer para intentar *todos* los posibles caminos? Uno se da cuenta de que son *finitos*, aunque más no sea porque la grilla tiene un número finito de casilleros, pero, ¿quién se anima a intentar *todas* las posibilidades?

Es aquí donde uno piensa que debe (o debería) haber algún otro método, alguna *idea* que reemplace a la *fuerza bruta*.

Una forma posible es la siguiente. Inténtelo usted y vea qué le sugiere: "*pinte los casilleros como si replicara un tablero de ajedrez*" (Figura 3).

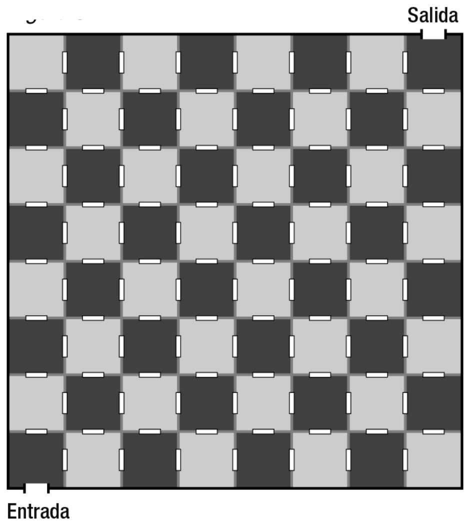


Figura 3

Ahora, ¿no tiene ganas de intentar nuevamente? Al haber coloreado las habitaciones de esa forma, ahora podría emerger *alguna* otra forma de abordar el problema.

Sigo. Fíjese que ahora, cada vez que usted está en una habitación cualquiera y quiere salir por cualquiera de las puertas que lo habilitan, *siempre* cambia de color de habitación. Por lo tanto, no importa qué camino usted elija (o vaya eligiendo), lo que *seguro* va a pasar es que va a terminar *alternando* entre los dos diferentes colores. ¡Eso ya es un avance!

Algunas observaciones que quiero compartir con usted.

a) Al entrar por la puerta que dice "*Entrada*", uno se instala en una habitación de color negro.
b) No importa qué dirección tome, inexorablemente pasará a una habitación de color blanco.
c) A partir de allí, tampoco importa qué camino usted elija, volverá a una de color negro... y así siguiendo: uno va alternando de color a medida que pasa de una habitación a otra. Recuerde este hecho porque va a terminar resultando *muy importante*. Ya verá.
d) Por otro lado, como hay *ocho filas* y *ocho columnas*, en total hay 64 habitaciones, una cantidad par.
e) Después del *primer paso*, uno aparece en una habitación *negra*. Luego del segundo, pasa a una *blanca*. Después, a una *negra*, y así siguiendo: alternando negras con blancas. Pero lo notable es que, si usted presta atención, *después de cada paso impar* (después del primero, el tercero, el quinto, etc.), uno termina en una habitación *negra*, y después de los *pasos pares* (segundo, cuarto, sexto, etc.), en una *blanca*.
f) Como escribí más arriba, en total hay 64 habitaciones. Por lo tanto, si pretende recorrer *todas las habitaciones* y además *pasar por cada una de ellas* ***una sola vez***, entonces necesitará en total dar 64 pasos.
g) Tengo la convicción de que en este momento usted ya se dio cuenta de lo que pasa (o va a pasar): si los pasos que tengo que dar son 64, y la última habitación (por la que tengo que salir, donde está escrita la palabra *Salida)* es *negra también*, entonces ***¡no va a existir el tal recorrido!*** Es

> que la casilla inicial y la final son del mismo color: negro, y a las habitaciones negras se llega después de un número *impar* de pasos.

En definitiva, y a esto quería llegar, con el simple hecho de haber pintado (imaginariamente, claro está) las paredes de cada habitación de dos colores distintos, uno puede concluir que el laberinto no puede ser recorrido pasando por todas ellas una sola vez.

Una última cosa antes de cambiar de tema: para probar que *tal* camino para salir del laberinto no puede existir, fue *esencial* usar la paridad[52]. Es decir, la alternancia de colores y la paridad del número de habitaciones.

Uno podría pensar que esto sucedió en este *único caso aislado* y *con esta elaboración* que elegí para resolverlo, pero espero que usted ya haya detectado que hay algo más en todas estas demostraciones y que *subyace* en todas las historias.

---

52. Debería decir que 'en mi razonamiento' el uso de la *paridad fue esencial.* Quizás una computadora podría intentar evaluar *todos* los caminos posibles y llegar a la misma conclusión. No lo sé. En todo caso, lo que *sí sé* es que de esta forma la solución resulta rápida y elegante.

El Juego del 15

Uno de los juegos que más adeptos tuvo en la historia de la humanidad es el que se conoce con el nombre de 'Juego del 15'.

Consiste en lo siguiente. Se tiene un cuadrado de 4 × 4 (dividido en casillas, como se indica en la Figura 1), en el que están dispuestos los primeros 15 números (del 1 al 15) de la siguiente manera:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 1

Es decir, cuando uno compraba el juego original, obtenía en la caja ese 'cuadrado' de madera con quince piezas móviles y un lugar vacío (el que correspondería al número 'dieciséis').

Uno 'desarreglaba' el original hasta llevarlo a una posición lo suficientemente complicada para que otra persona pudiera rastrear lo que hizo, y lo desafiaba a que 'ordenara' los cuadrados como estaban al principio.

Antes de avanzar, un poco de historia.

Este problema fue 'inventado' por Samuel Loyd (conocido como Sam Loyd) (1841-1911), uno de los más grandes creadores de 'entretenimientos con ligazón matemática' que se conoce. El Juego del 15 o el Dilema del 15 apareció recién en 1914 en un libro que publicó el hijo de Loyd después de que muriera su padre. En realidad, él ya lo había diseñado en 1878.

En general, mucha gente, con un poco de paciencia, podía resolver los problemas que surgían al 'desordenar' la distribución original. Pero la *novedad* la impuso el propio Loyd cuando ofreció ***mil dólares*** a quien pudiera volver a la posición inicial la siguiente configuración (obviamente, con movimientos 'legales', es decir, deslizando los *cuadraditos en forma horizontal o vertical, ocupando alternativamente el que está vacío*.

Y el cuadrado que propuso Loyd fue el siguiente:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 2

Si uno *mira bien*, descubre que la *única modificación respecto del original* es que los cuadrados 15 y 14 están *permutados*.

Pasaba el tiempo y *nadie* podía reclamar el premio; por supuesto, se cuentan las historias más increíbles de gente que le dedicaba todo el tiempo y dejaba de concurrir a sus trabajos, gente que no dormía, desesperada buscando la solución… y el dinero de la recompensa.

Loyd sabía por qué estaba dispuesto a arriesgar esa cifra: este problema tiene raíces muy profundas en la matemática, *¡y no tiene solución!*

Para poder entender un poco *por qué no se puede resolver*, voy a mostrar, con un ejemplo más sencillo, dónde residen las dificultades insalvables. Aquí va.

Supongamos que, en lugar de tener un cuadrado de 4 × 4 como el que teníamos más arriba, tenemos uno de 2 × 2, que replica el Juego del 15, aunque esta vez se debería llamar ‘el problema del 3’, porque si uno reduce las dimensiones queda así:

1	2
3	

Figura 3

Es decir, el juego original con solo tres cuadraditos tiene *esta distribución*. A los efectos de ilustrar lo que sigue, voy a *evitar* ***dibujar*** los cuadraditos. Simplemente voy a poner

1 2
3

A esta la voy a llamar *posición inicial*. Para reproducir la pregunta que hizo Loyd, uno se pregunta si se puede llegar a la siguiente distribución:

2 1
3 (*)

Yo quiero dejarlo/a un ratito solo/a con su conciencia, papel, tiempo y lapicera. Y ganas de pensar. Cuando decida que ya fue suficiente, siga conmigo.

La respuesta es que *no se puede*. Pero, ¿por qué no se puede?

Generemos *todos los posibles movimientos a partir de la posición inicial*.

Se obtienen:

1	2	1	2		2	2		2	3	2	3
3			3	1	3	1	3	1			1
	3	3		3	1	3	1		1	1	
2	1	2	1	2			2	3	2	3	2

Es decir, en *total* se tienen ***doce posibles configuraciones. Y no hay más.***

Ahora, fíjese en lo siguiente: si uno se para en el *número 1*, y recorre los cuadraditos en *el sentido de las agujas del reloj* (eventualmente salteando el lugar vacío), se tiene la configuración (1, 2, 3). Inténtelo usted y verá que *siempre* se obtiene la misma terna: (1, 2, 3).

Lo que uno deduce entonces es que *el orden relativo entre los números 1, 2 y 3... ¡no se altera!*

Muy bien. Vaya ahora a la distribución a la que le puse el 'asterisco' (*):

2	1
3	

Si hacemos lo mismo (empezando en el número 1, por ejemplo, pero se puede empezar en cualquiera de los números), se obtiene *siempre* esta otra terna: (1, 3, 2).

¿Qué le sugiere esto? En las 12 que obtuvimos antes, *todas* terminaban en (1, 2, 3), en cambio, si uno empieza en (*), llega a (1, 3, 2). Luego, la posición (*) ¡no se puede alcanzar desde la posición inicial! Compruébelo usted, no me acepte lo que yo le digo. Empiece en la configuración que aparece en (*) y verá que obtiene otras 12 (ver Figura 1), pero *ninguna* es la que había antes.

2	1	2	1		1	1		1	3	1	3
3			3	2	3	2	3	2			2
	3	3		3	2	3	2		2	2	
1	2	1	2	1			1	3	1	3	1

Una vez más, le sugiero *fuertemente* que las escriba usted y verá que estas 12 son todas diferentes de las primeras 12.

Más aún: si uno recorre en sentido horario cualquiera de estas últimas 12 empezando en el número 1 otra vez, la configuración que se tiene ahora es *siempre* (1, 3, 2). Notable, ¿no?

Creo que estamos en condiciones ahora de sacar algunas conclusiones que quiero resumir junto con usted.

Si se tienen *tres números* y un cuadrado de 2 × 2, entonces hay en total ***24 configuraciones posibles***. Lo interesante es que estas 24 se pueden dividir en dos grupos de 12 (que voy a llamar ***órbitas***). ¿Cómo identificar cada órbita? (estoy convencido de que usted podría ponerles una etiqueta para identificar cada una). Una órbita es la que —al recorrerla— tiene la configuración (1, 2, 3), mientras que la otra órbita es la que —al recorrerla también— tiene la configuración (1, 3, 2). Y con esto se agotan *todas* las posibilidades.

Y acá llegamos al punto ***central***. Le pido que me preste atención, ya que quiero hacerle una pregunta: ¿se puede pasar de una órbita a la otra? Si yo le diera una configuración que es una de las 12 que pertenecen a una órbita, ¿se podría pasar a una configuración que pertenezca a la *otra* órbita?

Me apuro a responder yo: ¡no, no se puede!

Por ejemplo, las configuraciones (1, 2, 3) y (3, 1, 2) están en la misma órbita, ya que el *orden relativo de los números es el mismo*. En cambio (3, 1, 2) y (1, 3, 2) no lo están. Si necesita más argumentos para convencerse, empiece en el número 1 de esta: (1, 3, 2). El orden en el que aparecen los números no es correlativo, como en el caso de (1, 2, 3). ¡Y listo!

Ahora bien: supongamos que yo pongo dos ternas cualesquiera, digamos (3, 1, 2) y (1, 3, 2). ¿Cómo hago para saber si *están o no están* en la misma órbita? La primera reacción es decir: 'Déjeme mirar lo que escribimos antes y le contesto'. Por supuesto, esta respuesta está muy bien.

Pero quiero mostrarle otra, para no tener que revisar las 12 de una órbita y las 12 de la otra para ver si están o no en la misma.

Tomemos (3, 1, 2), por ejemplo, y contemos juntos ***cuántas veces hay un número mayor seguido de un número menor*** (y lo voy a llamar una *inversión*). Me explico.

En la terna (3, 1, 2) uno descubre que el 3 aparece antes que el 1 (y esto ya representa *una inversión)*, y por otro lado, el 3 aparece *también* antes que el 2 (por lo que hay una *segunda inversión)*. Después, el 1 está en el lugar correcto, en la medida que aparece *antes* que el número 2, como corresponde. En resumen, la terna (3, 1, 2) *tiene* ***dos*** inversiones (un número *par* de inversiones).

Ahora, concentrémonos en la otra terna, en (1, 3, 2). Contemos juntos: el número 1 no presenta problemas porque está antes que el 3 y que el 2, pero el 3 sí, porque aparece *antes* que el 2 (y debería ser al revés). ¿Cuál es la moraleja? Lo que se deduce es que la terna (1, 3, 2) tiene ***solamente una inversión*** (un número *impar* de inversiones).

En consecuencia, estas dos ternas ¡no pertenecen a la misma órbita! Si usted revisa las 12 configuraciones de la órbita (1, 2, 3), verá que el número de inversiones es un número *par,* mientras que en las 12 configuraciones de la otra órbita (1, 3, 2) tienen todas un número *impar* de inversiones. Y eso es también una manera de deducir que las ternas (3, 1, 2) y (1, 3, 2) no pertenecen a la misma órbita. La ***paridad*** de las inversiones que haya en cada terna ***sirve para etiquetar a cada órbita.***

Esto último es tan importante que uno puede determinar entonces si dos configuraciones están o no en la misma órbita *contando las inversiones que hay en cada una y fijándose si ambas tienen la misma paridad: o las dos tienen un número PAR de inversiones, o las dos tienen un número IMPAR de inversiones.*

Por otro lado, vimos más arriba que ***no se puede pasar de una órbita a la otra,*** y esto queda corroborado por el hecho de que si se pudiera, significaría que hemos logrado *cambiar* la paridad del número de inversiones, y eso es imposible.

Gran final, gran

Y esto soluciona el caso original que planteó Loyd. Si uno mira el ejemplo que él propuso (el que tenía el 14 y el 15 invertidos), verá que el número de inversiones es *uno* (ya que el único número *mayor* que uno *menor es el 15, que está antes que el 14*).

En cambio, en la configuración *original* **no hay inversiones.** Luego, la primera tiene un número *impar* de inversiones (una) y la original tiene un número *par* de inversiones (cero). Luego, el problema que planteó originalmente Loyd ¡no tiene solución!

No se puede pasar de una a otra, y por eso es que pudo ofrecer mil dólares o un millón de dólares a quien pudiera. Justamente, Loyd sabía que no había riesgo.

Fíjese que lo notable es que pudimos *detectar* un elemento (las inversiones) cuyo número puede ser *par* o *impar*, y justamente, al haber etiquetado todas las posibles configuraciones de acuerdo con su número de inversiones, *evitamos tener que apelar a la fuerza bruta para saber que no se habría de poder, que no se podría encontrar una forma de llevar la configuración que propuso Loyd a la original.*

Ah, y como siempre, me da mucho gusto decir que esto es hacer matemática… una vez más.

¿Qué tendrán que ver un juego con pelotas y la paridad?

En lugar de un problema quiero proponerle un juego. Ubique a ocho personas en un círculo. Las voy a llamar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Usted ubíquese en el centro del círculo y consígase una bolsa con muchas pelotas de tenis o de ping-pong... en fin, de lo que quiera, pero la idea es que pueda sostener suficiente cantidad para poder jugar.

Cuando empiece el juego, los participantes pueden *pedirle* que les dé un número cualquiera de pelotas; pero si usted accede, tendrá que darle la misma cantidad a alguno de los dos participantes que este tiene al lado.

Por ejemplo, si el participante número 4 le pide tres pelotas, usted tiene que darle las tres pelotas al número 4, pero también debe entregarle tres pelotas o bien al 5 o bien al 3.

Y lo mismo al revés: si en algún momento del juego algún participante quiere darle pelotas a usted (que está en el centro), solo lo puede hacer si consigue que alguno de los dos que tiene al lado (a la izquierda y/o a la derecha) le entregue ese número de pelotas a usted también. Por ejemplo, si el participante 1 le quiere entregar cuatro pelotas a usted que está en el centro, tiene que convencer o bien al 8 o bien al 2 para que *también* se desprendan de cuatro pelotas.

Esas son las únicas reglas. Ahora bien, para empezar el juego, los únicos que tienen una pelota cada uno son el participante 3 y el 7. Los demás no tienen ninguna.

Pregunta: ¿será posible que en algún momento del juego *todos* los participantes (los ocho) tengan el mismo número de pelotas?

Es decir, ¿es posible diseñar una estrategia, siguiendo las reglas que figuran más arriba, de manera tal que en algún momento del juego todos tengan la misma cantidad de pelotas?

Ahora le toca a usted.

Idea para la solución

Mi primera propuesta sería que usted *intente* jugando. Aunque no pueda encontrar ocho amigos o familiares que quieran acompañarlo, siéntese un rato con un papel y un lápiz (qué antiguo, ¿no?). En cualquier caso, vea qué sucede si usted *trata* de forzar que todos tengan el mismo número de pelotas.

Lo que yo escriba ahora servirá para contestar la pregunta, pero creo que no lo ayudará a mejorar su capacidad para pensar salvo que usted intente por su lado. ¿Cómo hace usted para descubrir *dónde* está la dificultad? ¿Se podrá o no se podrá lograr que todos tengan el mismo número de pelotas?

Y si usted no pudo hasta acá, ¿será porque no podrá nadie o será solamente porque a usted —todavía— no se le ocurrió una forma que lo conduzca a la respuesta?

Dicho de otra manera, ¿uno no encuentra la respuesta por problemas circunstanciales, o el problema tendrá alguna dificultad intrínseca que lo hace ‘insolucionable’?

Antes de avanzar, permítame decir algo más: la única gracia que tiene este tipo de problemas es motivarlo para bucear por algún otro lugar de su cerebro, llevarla/lo —eventualmente— por lugares que usted no exploró. Si únicamente lee lo que escribo yo, solo le servirá para conocerme a mí un poco mejor, nada más. La idea final debería ser otra: mejorar ***su*** capacidad para razonar y elaborar estrategias.

Ahora sí, avancemos juntos por acá.

Primera observación: cada vez que uno intente darle una o cualquier número de pelotas a un jugador cualquiera, sabe que está 'agregando' ese número de pelotas a uno de los dos que tiene al lado. El problema se va a plantear con los jugadores 3 y 7. Si esos jugadores no tuvieran ninguna pelota, entonces no habría nada que hacer, ya que ya tendrían todos la misma cantidad: cero pelotas.

Pero esa *no es la posición inicial*. Los jugadores 3 y 7 tienen una pelota cada uno. Yo podría darles pelotas a 1 y a 2, por ejemplo (una pelota a cada uno), y a 4 y a 5, pero ni bien quiera darle una pelota a 6, entonces o bien le agrego una pelota a 7 (y no quiero hacer esto), o bien le agrego una pelota a 5 (y tampoco quiero hacer esto). Y lo mismo ocurriría con 8.

Por supuesto, el hecho de que no haya podido resolverlo de entrada no significa que no vaya a poder. Solo quiero mostrarle alguno de los lugares en donde uno puede tropezar con una dificultad.

También podría encarar el problema de otra forma, entregándoles muchas pelotas a los de alrededor de 3 y de 7, y buscando alguna manera de retirárselas usando a los dos que tienen al lado cada uno de ellos.

Es por eso que le sugería recién que esta parte del problema no puedo hacerla por usted. En realidad, es una de las partes *más importantes* de cualquier problema: ¡descubrir en dónde está la dificultad!

Eso es algo que nadie puede hacer por usted. Quizás sospeche dónde está el problema, pero *nada* se compara con detectar uno mismo cuál es la valla que hay que saltar.

Bueno, pero estoy evadiéndome de abordar el problema propiamente dicho.

En un momento determinado habrá que tomar alguna decisión: o bien usted está convencido de que *se puede encontrar una estrategia que permita que todos tengan el mismo número de pelotas*, o bien habrá que convencerse (después de haber intentado múltiples veces) de que eso no será posible y de que lo que se trata entonces es de ***demostrar*** que 'tal estrategia' ¡no existe! No importa quién venga, ni lo que haga, no habrá forma de encontrarla.

Yo voy a tratar entonces de convencerlo/la de que ese es el caso: no se puede.

Ahora bien: ¿por qué?

Hay algo que uno empieza a sospechar en la medida que va intentando elaborar esa estrategia en alguno de los casos fallidos, y es que hay 'algo' que siempre 'molesta'... y si bien uno —al principio— no lo puede poner en palabras, pareciera que tiene que ver con 'la paridad'. ¿Tendrá algo que ver el hecho de que los dos participantes que tienen una pelota sean el número 3 y el número 7? Digo esto porque si en lugar de ser el 3 y el 7 fueran el 3 y el 4 los que empiezan con dos pelotas, entonces *no habría dudas de que el problema* ***sí*** tiene solución. Bastaría —por ejemplo— con darles una pelota a 1, 2, 5, 6, 7 y 8. En ese caso, *todos* tendrían una pelota, y problema resuelto.

¿Y si en lugar de 3 y 4 les diera una pelota a 3 y a 6? ¿Se podrá ahora? (confío en que usted está intentando en cada caso investigar por su cuenta). Fíjese que sí, que también se puede: bastaría con darles una pelota a 1, 2, 4, 5, 7 y 8, y terminarían todos con una pelota otra vez.

Como última sugerencia antes de escribir la respuesta definitiva, le propongo que se fije que, así como en los casos en los que les doy una pelota a 3 y a 4, o a 3 y a 6, el problema tendría solución, lo mismo pasaría si les diera una pelota a 5 y a 6, o a 2 y a 5, o a 3 y a 8... Estoy seguro de que a esta altura usted ya debe haber encontrado otros pares de números con los que funciona.

Si usted revisa los ejemplos que yo puse en donde *sí* funciona (más los que quizás encontró usted), podrá descubrir algo muy interesante: pareciera que siempre *se puede si los números de los dos jugadores que tienen una pelota de entrada son uno par y el otro impar*. Pero, en el caso original, los números de los participantes que empezaron con una pelota son el 3 y el 7, que son dos impares. ¡Aquí sí me parece que estamos muy cerca de *entender* en dónde está la *clave* del problema! Y aquí quería llegar: una vez más, el tema central es ¡la paridad!

Ahora bien: ¿qué hacer? ¿Cómo *aislar* el problema de manera tal de poder *explicar* que por esa razón no vamos a lograr elaborar la estrategia? ¿Cómo hacemos ahora para *traducir* esto que *parece que descubrimos en una demostración convincente* de que si los números de los dos participantes que tienen una pelota son 3 y 7, entonces ¡no se va a poder encontrar una estrategia que permita que ***todos*** *terminen con el mismo número de pelotas*!?

Fíjese en lo siguiente: por las características del juego, si uno agrega pelotas a un participante, las agrega a alguno de los dos de al lado (y lo mismo si le quita pelotas, pero ahora no necesito analizar ese caso). Por lo tanto, le propongo que se fije qué sucedería si yo sumara y restara las pelotas que tienen cada uno de los participantes, así:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 \quad (*)$$

¿Cómo interpretar lo que escribí acá?

Estoy tratando de hacer lo siguiente: supongamos que yo le doy *cuatro* pelotas al número 5. Le tengo que dar entonces cuatro pelotas también o al número 4 o al número 6, ¿de acuerdo? Pero cuando yo haga la suma que figura en (*), no se va a notar. ¿Por qué? Porque si yo le doy cuatro pelotas a 5, el total aumentará en cuatro, pero al mismo tiempo, como tanto las pelotas que tiene 4 como las que tiene 6 aparecen 'restadas', voy a tener que 'restar' las cuatro pelotas que le di a alguno de ellos dos. ¿Me entiende…? Espero que sí. Si no, *relea el texto* hasta convencerse de que me pudo seguir.

Con el número que figura en (*), cada vez que yo entrego un número cualquiera de pelotas a cualquier participante y, por las reglas del juego, tengo que agregarle pelotas también a alguno de los dos que tiene al lado, el número que figura en (*) ¡no se va a modificar! Es que estoy sumando y restando el mismo número. En este caso, el número (*) permanece INVARIANTE.

De la misma forma, si yo le *pidiera* —digamos— diez pelotas al número 3, las tendría que restar de (*), pero al mismo tiempo, como las que figuran tanto en 2 como en 4 aparecen con un signo 'menos', les agregaría diez pelotas a alguno de ellos, y por lo tanto el número (*) seguiría 'inalterado'.

¿Qué estoy tratando de hacer con esto? Estoy tratando de convencerla/lo de que el número (*) permanece INVARIANTE cada vez que usted entrega o retira pelotas siguiendo las reglas.

¿Y para qué sirve esto? ¿Qué piensa usted?

Lo extraordinario es que el hecho de que este número (*) permanezca INVARIANTE cada vez que agregamos o retiramos pelotas sirve para demostrar que el problema original no tiene solución. ¿Por qué?

Si en algún momento pudiéramos encontrar una estrategia que permitiera que todos los participantes tuvieran el mismo número de pelotas, en ese caso el número (*) ¡sería cero! Es que al hacer la operación que figura en (*), como todos tienen el mismo número, se van sumando y restando hasta llegar a cero.

¿Y entonces? ¿Por qué digo que esto prueba que el problema no tiene solución? ¿No tiene ganas de pensar usted?

Es que al empezar el problema, *antes de empezar a repartir pelotas*, el número (*) es igual a 2... Convénzase usted mismo/a: haga la cuenta y verá que es igual a 2.

Pero lo notable es que, como vimos, el número (*) permanece INVARIANTE al avanzar en el juego. Sea lo que fuere al principio, seguirá siéndolo hasta que decidamos parar.

Por lo tanto, como al principio es igual a *dos*, cuando lleguemos a cualquier estadio del juego, seguirá siendo *siempre* dos y nunca será *cero*. Pero si nunca llegamos a que sea *cero*, es porque no hemos logrado nunca llegar a que *todos tengan el mismo número de pelotas*.

¡Y esa es la conclusión! Usando este argumento (que se llama de 'paridad') uno puede concluir que, haga lo haga, *nunca llegará a lograr que todos los participantes tengan el mismo número de pelotas*.

Moraleja 1

Como usted advierte, este argumento se puede convertir en algo mucho más general. ¿Qué quiero decir con esto? Si en lugar de ser los participantes 3 y 7 quienes tienen una pelota cada uno fueran cualesquiera otros dos (ambos pares o impares), el problema no tendría solución tampoco. Y ni siquiera es necesario que tengan una pelota cada uno. Alcanza con que esos dos jugadores tengan *el mismo número* de pelotas inicialmente.[53]

Moraleja 2

De todos los problemas de este libro, este juego, que parece tan inocente (y de hecho lo es), permite encontrar su solución (o mejor dicho, demostrar que ***no existe solución***) usando un argumento de ***paridad*** a través de un número que es *invariante* (o que no se modifica) a medida que vamos avanzando en el juego[54].

Eso es lo que provee la matemática también: la capacidad de aportar un argumento tan sólido, impactante y contundente que permita resolver un problema que —a priori— parece de difícil solución.

Espero haber sido capaz de transmitir la potencia de una herramienta de estas características, porque se la merece.

53. Un caso aun más general: el problema no tendrá solución si la suma del número de pelotas que tienen los participantes con números pares es diferente de la suma del número de pelotas que tienen los participantes con números impares.

54. En realidad, el *invariante* que aparece en la suma alternada es el siguiente: si uno suma todas las pelotas que tienen los *pares* y los pone en una columna, y luego pone la suma de todos los *impares* en otra columna, esa diferencia no cambia nunca. Así que si no comienzan 'emparejados', nunca van a ser iguales. Lo interesante es que alcanza con saber esto (si tienen la misma cantidad de cada lado) para concluir que se podrá (o no) *resolver* el juego.

Miranda y el partido de tenis (versión 2016)

Hace muchos años, escribí sobre un problema que conocí en uno de los libros de Martin Gardner. Apareció publicado en el tercer libro de la serie *Matemática... ¿estás ahí?*[55]. Un tiempo más adelante, el 24 de enero del año 2010, una versión ligeramente modificada salió en la contratapa de *Página/12*.[56]

Ahora quiero hacer una revisión de ese mismo problema y proponer una solución *totalmente diferente*.

Todos los problemas que agrupé acá tienen que ver con la *paridad*. Con toda razón, usted se estará preguntando: "*¿de qué paridad me habla?*". Bueno, si usted analiza cada uno de ellos, va a descubrir cómo la *paridad* de algún factor es determinante para poder encontrar una solución o bien decir que no la tiene. Me explico.

El problema del que hablé tiene que ver con un partido de tenis. No se preocupe: no hace falta saber nada de tenis[57], solo que

55. *Matemática... ¿estás ahí? Episodio 3,14*, pág. 110.

56. www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-138950-2010-01-24.html

57. Para aquellos que no saben nada de tenis —y no hay razones para suponer que uno *sí* sabe— escribo acá que se entiende que una jugadora *gana* un *set* cuando llega a obtener *seis puntos* (olvidándome de *tie-breaks*, etc.). Para el problema, solo hace falta saber que el que llega primero a ganar *seis*

un/a jugador/a gana un set cuando llega a obtener seis puntos. En este caso, estaban jugando Miranda y Rosemary (respeto los nombres que eligió Martin Gardner por respeto a él también).

Estos son los datos:

a) Se sabe que Miranda ganó el set 6-3.

b) Se sabe que, *en total*, se quebraron el saque *cinco veces*.

¿Quién sacó primero?

Esa es la pregunta que hay que contestar (y fundamentar). Si pudiera, le propondría que leyera la versión original publicada en múltiples lugares, no solo en los que yo indiqué más arriba, pero en cualquier caso le sugeriría que se detenga un rato a pensar qué pudo (o tuvo) que haber pasado.

Ahora, la solución.

Para empezar, voy a llamar M a Miranda y R a Rosemary.

Al analizar los posibles casos uno *sabe* que el número de puntos que ganó cada jugadora permanecerá estable: M ganó 6 y R ganó 3.

Si *nunca* se hubieran quebrado los saques, el set no se habría terminado aún, porque la jugadora que empezó sacando estaría adelante 5-4 y todavía estarían jugando.

Por lo tanto, como el set terminó y M ganó 6-3, ¡tuvo que haber quiebres de saque seguro!

Ahora, le pido que me preste atención, porque esto será *clave* para lo que siga. Elijamos juntos a una jugadora cualquiera, diga-

---

juegos es quien gana el *set*. Por otro lado, cada jugador es quien *saca* hasta que se define el punto. Se entiende que el jugador que *saca* tiene una ventaja, por lo que se supone que debería *ganar* ese juego. Cuando esto no sucede, se dice que el rival *le quebró el saque*. De ahí la pregunta del problema.

mos M. Como el número de puntos que ganó M (seis) permanece constante, cada vez que M *pierde un punto con su saque* (un quiebre de R), tiene que *recuperar ese punto quebrándole el saque a R también.* Si no, cambiaría el número de puntos que obtuvo al final. Y lo mismo sucede cada vez que R pierde un punto con su saque (un quiebre de M); R lo tiene que recuperar quebrando el saque de M. ¿Cuál es la moraleja?

"Los quiebres aumentan de a **<u>dos</u>**. Si una jugadora quebró, la otra tuvo que haber quebrado también. Si no, cambiaría el número de puntos que logró cada una". (*)

Ahora, algunos datos para tener en cuenta.

Como el resultado final del set fue 6-3, eso significa que en total se jugaron *nueve* puntos. Tuvo que darse una de estas dos situaciones:

a) R sacó 5 veces y M sacó 4, o al revés.
b) M sacó 5 veces y R sacó 4.

Empecemos por el caso (a).
Sabemos que M obtuvo 6 puntos en total.
¿Qué situaciones pudieron haberse dado?

- Si M no perdió nunca su saque (si ganó los cuatro), entonces necesitó <u>dos</u> puntos más (para llegar a seis), y para obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R <u>dos</u> veces. Es decir: (quiebres de M) = 2; (quiebres de R) = 0. La suma es igual a *dos.*
- Si M perdió una vez con su saque (y ganó los otros tres), entonces necesitó <u>tres</u> puntos más (para llegar a seis), y para

obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R tres veces. Es decir: (quiebres de M) = 3; (quiebres de R) = 1. Ahora, la suma es igual a *cuatro*.

- Si M perdió dos veces con su saque (y ganó los otros dos), entonces necesitó cuatro puntos más (para llegar a seis), y para obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R cuatro veces. Es decir: (quiebres de M) = 4; (quiebres de R) = 2. Ahora, la suma de quiebres es igual a *seis*.

Como usted advierte, si *suma* los quiebres de cada una, como vimos en (*), estos aumentan de a dos. Luego, ¡nunca se va a llegar a *cinco*, como pedía el problema!

En consecuencia, lo que se deduce es que *R no pudo haber empezado sacando*. Esto no prueba que sacó M por primera vez en el partido, sino que sirvió para comprobar que *seguro* que no fue R.

Ahora, analicemos el caso (b).

- Si M no perdió nunca su saque (si ganó los cinco), entonces necesitó un punto más (para llegar a seis), y para obtenerlo tuvo que haber quebrado el saque de R una vez. Es decir: (quiebres de M) = 1; (quiebres de R) = 0. La suma es igual a *uno*.
- Si M perdió su saque una vez (y ganó los otros cuatro), entonces necesitó dos puntos más (para llegar a seis), y para obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R dos veces. Es decir: (quiebres de M) = 2; (quiebres de R) = 1. La suma es igual a *tres*.
- Si M perdió su saque dos veces (y ganó los otros tres), entonces necesitó tres puntos más (para llegar a seis), y para obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R tres ve-

ces. Es decir: (quiebres de M) = 3; (quiebres de R) = 2. La suma es ahora igual a ***cinco***. ESTE ES UN CASO QUE CUMPLE CON TODO LO QUE SE PIDE.

- Avanzo un paso más: si M perdió su saque <u>tres</u> veces (y ganó los otros dos), entonces necesitó <u>cuatro</u> puntos más (para llegar a seis), y para obtenerlos tuvo que haber quebrado el saque de R <u>cuatro</u> veces. Es decir: (quiebres de M) = 4; (quiebres de R) = 3. La suma es ahora igual a <u>siete</u>.

Y paro acá, porque hemos encontrado la solución.
La respuesta es que *empezó sacando M*.
Y siguió así.

- En total, M sacó cinco veces. Ganó tres veces con su saque y perdió dos (que cuentan como 'quiebres' de R).
- Para llegar a los seis puntos, *le quebró <u>tres</u> veces el saque a R*.
- Por su parte R, que sacó cuatro veces, ganó una vez y perdió tres (que le quebró M). Para llegar a los tres puntos, le quebró el saque a M en dos oportunidades.
- Si usted *suma* los 'quiebres' que se produjeron, esa suma da *cinco*, como decía el problema.

¡Y listo! La *clave* acá fue descubrir que los quiebres aumentan en un número *par* (dos), y por lo tanto, si uno empieza el análisis suponiendo que alguna de las dos no perdió nunca con su saque, quiere decir que la suma de los quiebres empezó siendo dos, y al aumentar en un número par, nunca podía llegar a ser cinco. Y eso fue determinante para descubrir que M fue quien tuvo que haber empezado el partido.

A esta altura, podría escribir una versión mucho más corta del problema, pero no quiero hacerlo porque me parece que están *todas* las explicaciones necesarias para que pueda transmitir mi entusiasmo: la *paridad* es una herramienta muy útil cuando uno quiere determinar si un problema tiene o no solución, y en caso de tenerla, determinar cuál es.

Estrategia para cambiar de bancos

Suponga que en una escuela hay un grupo de 81 alumnos. Todos son estudiantes del mismo grado y están sentados en bancos individuales que forman nueve filas y nueve columnas (o sea, una grilla de 9 × 9). Los bancos están *todos* ocupados.

El maestro les dice que se pongan de acuerdo y que elaboren una estrategia que les permita hacer lo siguiente: cuando él haga sonar un timbre, *todos* tienen que cambiar de lugar, pero *no* de cualquier forma, sino que cada uno debe ocupar un banco vecino al que está ocupando (hacia la derecha, la izquierda, hacia atrás o hacia adelante)[58].

Les da el tiempo suficiente para pensar, y hace sonar el timbre. ¿Qué estrategia elaboraría usted? ¿Cuántas estrategias distintas podría ofrecer?

Es *su* turno... sí, el suyo. La respuesta la escribo más adelante.

Le sugiero que pensemos juntos una 'posible' estrategia. No sé qué fue lo que pensó usted hasta acá, pero yo estuve un rato tratando de imaginarme qué debería hacer cada uno. Llegó un momento en el que sentí que me estaba frustrando, porque cada vez

58. Para evitar confusiones, los movimientos no pueden ser en diagonal. Hay cuatro alternativas (salvo en los bordes): adelante, atrás, a la derecha o a la izquierda.

que creía tener 'resuelto' el problema, *aparecía* alguna dificultad en otro lado, algo así como lo que se conoce con el nombre de la 'frazada corta' o 'manta corta'. ¿A qué me refiero? A que si la frazada no es lo suficientemente larga, si me tapo la cabeza me destapo los pies o viceversa.

Tanto tiempo de intentar sin poder avanzar me hizo sospechar en un momento si sería posible que el problema *no tuviera solución.* Es decir, empecé a pensar que quizás no podía encontrar 'tal' estrategia porque quizás... ¡no existe estrategia!

Pero aun así, ¿cómo hacer para demostrar que no es que *yo no pude encontrarle la vuelta sino que* ***nadie*** *nunca va a poder?* A partir de ahí, dediqué mi esfuerzo a buscar alguna forma de convencerme de que el problema no tiene solución; no solo eso; no solo quería demostrármelo a mí, sino que me dediqué a buscar alguna forma de convencer a cualquier persona que lea estas líneas de que no va a poder. Al final, se me ocurrió una idea que quiero compartir acá.

Le propongo lo siguiente: piense en un 'tablero de ajedrez' que en lugar de ser de 8 × 8 (como los verdaderos) sea un 'tablero de 9 × 9'. De esa forma, estoy 'modelando' el aula. Pero un tablero que sirve para jugar al ajedrez, aunque sea más grande o más chico, tiene una característica que quiero conservar (y observar): si usted pinta cada 'cuadradito' de blanco o de negro, se obtiene un tablero como el que aparece en la Figura 1:

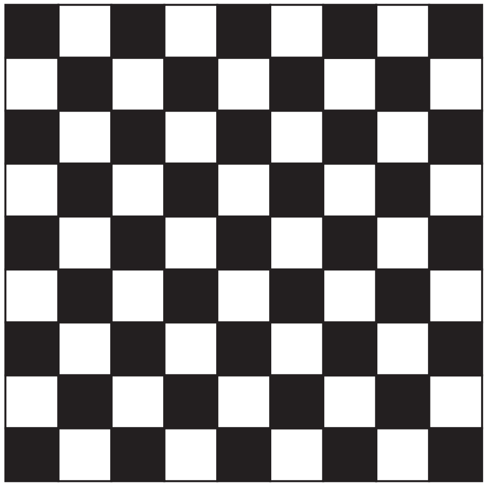


Figura 1

Fíjese que ahora es una grilla de 9 × 9, por lo que en lugar de tener 64 'cuadraditos', como un tablero de ajedrez clásico, hay 81 cuadraditos. ¿Por qué quiero que se note la diferencia? No solo por el tamaño, sino porque mientras en un tablero convencional el número de cuadrados (64) es un número par, ahora, en un 'tablero' de 9 × 9, hay 81 cuadraditos, que es un número *impar*.

Esto tendrá una consecuencia que al principio me pareció *impensada*. ¿Por qué? Es que como hay 81 cuadraditos, ahora uno podría pintar 40 de blanco y 41 de negro, o al revés: 41 de blanco y 40 de negro. Lo importante es que ahora el número de cuadrados negros y blancos... ¡***no es el mismo***!

¿Cómo utilizar este dato? (¿Quiere tomarse un 'ratito' y pensar usted por su cuenta?) Sigo yo.

Fíjese en lo siguiente: suponga que usted está sentado en un banco que está pintado de blanco. Cuando usted tenga que cambiarse de banco, tendrá que terminar en un banco de color negro, y eso sucede porque los cuatro 'vecinos' que tiene usted son *todos negros*.

De la misma forma, si usted estuviera sentado en un banco pintado de color *negro*, cuando tenga que cambiar de banco terminará en un banco pintado de *blanco*. ¿Y entonces?

Bueno, esto es muy importante, porque cuando el maestro haga sonar el timbre y todos los alumnos tengan que cambiarse de banco, los que estén sentados en bancos 'blancos' tendrán que sentarse en 'negros'... ¡y viceversa! ¡Pero esto no es posible! ¿Por qué? Porque, como ya escribí, el número de 'blancos' y 'negros' no es el mismo. Luego, si hay 41 blancos y 40 negros, *al menos uno de los blancos no va a tener dónde sentarse, ya que el número de negros no alcanza*. De la misma forma, si hubiera 41 negros y 40 blancos, *al menos uno de los negros no va a tener dónde sentarse ahora porque el número de blancos no va a alcanzar*.

Lo extraordinario es que sin tener que intentar con TODAS LAS POSIBLES ESTRATEGIAS, este argumento *prueba que el problema no tiene solución*. Lo que pidió el maestro es imposible, y se pudo hacer con este argumento de *paridad* que contesta la pregunta. ¿No es notable?

SEGUNDA PAUSA: UNA REFLEXIÓN

Acá quiero detenerme otra vez. Le propongo que hagamos juntos una reflexión.

Un poco antes le advertí que los siete problemas que habrían de seguir tendrían 'algo' en común. Supongo que usted ya debe tener idea de lo que estoy escribiendo, sobre todo si los fue leyendo 'en orden de aparición'.

De hecho, fuimos contestando las preguntas planteadas una tras otra, usando —de diferentes maneras— la *misma herramienta: la paridad.* De esa forma, supimos que no se puede cubrir el tablero con 31 fichas de dominó si le quitamos dos casillas de las puntas (enfrentadas en diagonal), vimos que el caballo *no puede hacer su viaje con movimientos legales* pasando por todos los casilleros sin repetir. Lo mismo sucedió con el laberinto, descubrimos que *no se puede salir cumpliendo con las reglas pedidas.*

Por otro lado, sirvió para entender que el 'Juego del 15' no tenía solución (a pesar de haber tenido a media *Francia* pensando durante mucho tiempo), y por otro lado, usando *también* un argumento de paridad, pudimos descubrir quién tuvo 'el saque' en el partido de tenis entre Miranda y Rosemary, y por qué no habría de ser posible lo que el maestro les pidió a los alumnos: cambiar todos de banco yendo hacia alguno adyacente (adelante, atrás o alguno de los dos costados).

Me permito entonces sugerirle que 'relea brevemente' cada uno de los siete últimos problemas; verá que en principio no parece que estén conectados. Sin embargo, la solución presentada en cada caso invita a pensar algo distinto.

Más aún: si usted se tropezara con un problema cualquiera en donde aparecen involucrados números naturales (si no, no tiene sentido plantearse estudiar la *paridad)*, le convendría tener guardada la herramienta de 'la paridad' en alguna neurona y preguntarse si se puede usar o no. ¿Servirá *siempre*? ¡Seguro que no! Pero que no se pueda usar *siempre* no significa que no se pueda usar *nunca*, y es preferible poder contar con ella que no tenerla disponible o no haber escuchado hablar de ella.

En todo caso, si le hace falta algún argumento más para convencerse, intente demostrar —usando simplemente la *fuerza bruta*— que no existe ningún camino que el caballo pueda encontrar, de manera tal que lo lleve desde el extremo inferior izquierdo del tablero hasta el superior derecho, sin repetir ninguna casilla pero pasando por todas. No digo que no se pueda, solo que me parece *muchísimo más difícil.*

CAPÍTULO 5

Problema con monedas

El siguiente es un problema *típico* para un mago. De hecho, usted mismo podría leer lo que hay que hacer y '*destacarse*' en una fiesta por sus cualidades de 'adivinador' (o algo equivalente). Lo quiero incluir en este lugar porque apela —nuevamente— a cuestiones que tienen que ver con la *paridad*. Verá que es muy sencillo y muy sorprendente también.

Voy a tomar un caso particular pero, en realidad, usted advertirá que todo se puede *generalizar* sin problemas. En principio entonces voy a suponer que usted y yo colocamos arriba de una mesa diez monedas. Yo le pido que las ubique como caras o cecas, como le dé la gana. Una vez que usted decide de qué lado van a estar, yo me doy vuelta y a partir de ese momento ya no puedo ver lo que usted hace. Eso sí: tendremos que seguir algunas reglas —todas muy sencillas— para que yo pueda practicar '*el truco*'. Acá voy.

Como decía, suponga que las diez monedas ya están dispuestas: algunas serán caras, otras cecas... cualquier distribución vale, incluso todas de un mismo lado.

Una vez que nos pusimos de acuerdo y usted no hará *más movimientos salvo los que convengamos a partir de ese momento*, yo me doy vuelta y le pido que diga en voz alta un número entre 0 y

10. Mientras yo pienso (y enseguida verá qué tengo que pensar), usted tiene otra tarea: *dar vuelta tantas monedas como el número que eligió y que me hizo escuchar a mí.*

Por ejemplo: si usted eligió el número 7, entonces tendrá que cambiar de posición *siete veces* las monedas que tiene adelante. ¿Qué quiere decir 'cambiarlas de posición'? Un *cambio* es dar vuelta una moneda que está en posición de 'cara' y ponerla en posición de 'ceca', o al revés. No hace falta que lo haga con siete monedas diferentes. Puede elegir una y darla vuelta cuatro veces, y después elegir otra y darla vuelta tres veces, pero lo que tiene que estar claro es que *los cambios de posición tienen que sumar siete.* De hecho, el caso extremo sería tomar una sola moneda e ir dándola vuelta hasta completar siete cambios. Es fácil darse cuenta de que si —por ejemplo— usted toma una moneda que está como 'cara' y la da vuelta siete veces, al final termina quedando 'ceca', ¿de acuerdo?

Vuelvo al problema. Una vez que usted hizo los siete cambios, elige *una moneda cualquiera*, la tapa con una de sus manos para que yo no pueda ver en qué posición está y me avisa que terminó con el proceso. Yo me doy vuelta otra vez, y simplemente 'mirando' las nueve monedas que quedaron 'al descubierto' en la mesa, le puedo decir si la que tapó es 'cara' o 'ceca'.

Pregunta, entonces: ¿Por qué? ¿Cómo se hace? ¿En qué consiste el 'truco'?

Ahora, le toca a usted.

Solución

De entrada, quiero exhibir un ejemplo que creo que le va a servir para entender todo el proceso. Solo para hacer más sencillo todo, supongamos que antes de que yo me dé vuelta usted puso *ocho* caras y *dos* cecas. Como se imagina, *cualquier distribución que hayamos elegido sirve*; elijo esta para mostrarle cómo funciona en un caso particular, y después todo será muy sencillo de ‘generalizar’. Sigo. Ahora hay ocho 8 caras y 2 cecas.

Cuando yo me doy vuelta, usted elige el número *tres* y lo dice en voz alta.

Ahora, de acuerdo con las reglas, ¿qué tiene que hacer usted?

Lo que tiene que hacer es *cambiar tres monedas de la posición en la que yo las dejé cuando me di vuelta.*

No se me escapa que *hay muchas formas de hacer tres cambios.* Son estas:

a) Dar vuelta tres monedas distintas.
b) Dar vuelta una moneda dos veces y luego dar vuelta *otra* cualquiera (*).
c) Dar vuelta una sola moneda tres veces.

Antes de que yo avance, ¿no se le están ocurriendo algunas ideas?

Por ejemplo: si usted da vuelta una moneda dos veces, es como si no hubiera hecho nada, es como haberla dejado en el mismo lugar en el que estaba. Más aún: si usted toma una sola moneda y la da vuelta un número *par* de veces, es como si no hiciera nada con ella (la deja en la misma posición que estaba), y si la da vuelta un número *impar* de veces, es como si la hubiera dado vuelta ¡una sola vez!

Esto, que parece tan inocente, va a tener una papel muy importante en lo que estoy tratando de hacer. Ya verá por qué.

Por otro lado, cuando usted da vuelta una moneda cualquiera, y la cambia de ‘cara’ a ‘ceca’ (o al revés), ¿qué produce en el número ***total*** de caras y de cecas?

(Si estuviera con usted, le diría que no siga leyendo más; dedíquese a usted el tiempo suficiente para *descubrir* cómo y por qué funciona el 'truco' que estoy tratando de hacer... Pero claro, no estoy con usted y no puedo incidir sobre lo que hace, más allá de pedirle que lo haga. Mientras tanto, sigo...)

Decía: si uno da vuelta una 'cara' y la transforma en 'ceca', se producen varias cosas. En principio, una cosa obvia, ya que aumenta en *uno* el número de cecas, pero también *disminuye en* ***uno*** el número de caras. Pero algo más: ¿qué pasa con la paridad del número *TOTAL* de caras y de cecas? Fíjese que originalmente había 8 caras y 2 cecas, pero ahora quedan 7 caras y 3 cecas. Es decir, antes de mover nada, había un número par de caras y cecas, pero cuando di vuelta *una sola moneda*, ahora ¡los dos números cambiaron la paridad! Ahora hay un número impar de caras (siete) y un número impar de cecas (tres). Y eso pasó por el simple hecho de haber dado vuelta *una sola moneda*.

Mire lo que habría pasado si hubiéramos empezado con 5 caras y 5 cecas. En ese caso, al dar vuelta una cara y ponerla 'ceca', tendríamos 4 caras y 6 cecas.... y tanto 4 como 6 son dos números ¡pares!

Resumen: al dar vuelta de posición '*una sola moneda*', *cambia la paridad del número total de caras* ***pero también el número TOTAL de cecas***.

¿Cómo seguir?

Fíjese en las tres alternativas que figuran en (*).

a) Si usted elige dar vuelta tres monedas diferentes, cuando da vuelta la primera moneda, en lugar de 8 caras y 2 cecas (dos números pares), quedarán 9 caras y 1 ceca (si usted transformó una ceca en cara) o 7 caras y 3 cecas (si usted transformó una cara en ceca). En cualquiera de los dos casos, los dos números que miden el número total de caras y cecas pasaron de ser *ambos pares a —ahora— ser ambos* ***impares***. Cuando usted dé vuelta la segunda moneda, transformará —una vez más— el total de caras y cecas en dos números que ahora volverán a ser ***pares*** (los dos), y cuando, por último, usted dé vuelta la *tercera* moneda, una vez más, los totales de caras y de cecas serán dos números *impares*. Moraleja: si usted da vuelta tres monedas distintas, los dos 'numeritos' que miden el total de caras y cecas pasan de ser ambos pares a ser ambos impares.

b) Si usted decide dar vuelta una moneda dos veces y después modificar la posición de alguna *otra moneda*... ¿cambiará en algo respecto de lo que hicimos en la parte (a)? (¿Quiere pensar usted por su cuenta un instante?) Sigo yo: ¡no! Porque al cambiar *dos veces* de posición una misma moneda, usted volverá a tener 8 caras y 2 cecas, como si no hubiera hecho nada. Pero cuando cambie la *segunda moneda* de lugar, entonces SÍ cambiará la *paridad* de los dos números. Ahora, habrá dos *números impares midiendo la cantidad de caras y de cecas*.
c) Por último, si usted diera vuelta una sola moneda tres veces, es como si la hubiera dado vuelta *una sola vez*. Por lo tanto, una vez más, los dos números que miden el total de caras y de cecas ¡serán los dos impares, otra vez!

Y a esto quería llegar: no importa cómo decida usted hacer los tres cambios (ya que había elegido el número *tres*, ¿recuerda?). Lo IMPORTANTE es que como *tres* es un número impar, es como cambiar la paridad de los dos números que miden el total de caras y de cecas, que pasó de ser 8 y 2 (ambos pares) a dos números que ahora no conozco, pero ¡SEGURO son los dos impares! Y en esto reside la *clave de todo*. ¿Por qué?

Al haber llegado hasta acá, usted tiene que *tapar una de las monedas y no dejármela ver*. Yo me doy vuelta, y como usted había elegido el número *tres*, eso significa que tiene que haber cambiado el número de caras y cecas de dos números pares a dos números impares, y eso es lo que yo *esperaría que pase si usted no tapara nada*. Me doy vuelta y tendría que ver un número *impar de caras y de cecas*. Pero resulta que si usted tapó una cara (por poner un ejemplo), entonces yo voy a ver un número ¡par de caras!... y esto no está bien. O mejor dicho, lo que me dice esto es que la moneda que usted tiene tapada ¡está en la posición de cara! Al revés: si usted tapó una ceca, cuando yo me dé vuelta y espere ver un número *impar* de cecas, voy a ver un número *par* (ya que usted tiene escondida una ceca). Allí yo me voy a dar cuenta y le voy a decir que la que tapó está en esa posición (ceca).

Y esto resuelve el problema, al menos en el caso de 10 monedas y donde 8 hayan estado en posición de cara y 2 en posición de ceca. Pero me permito preguntarle: ¿no le parece que usted estaría en condiciones de *replicar* lo que yo hice si cambiáramos el ejemplo? Es decir, si en lugar de haber *ocho* caras y *dos* cecas, hubiera 7 cecas y 3 caras, y eligiendo el número *cuatro*.

Como cuatro es un número par, si usted no tapara nada, yo esperaría encontrarme con un número *impar* de cecas y de caras (porque usted eligió un número *par, el* **cuatro**). Si la que usted tapó es una cara, yo voy a ver un número *par* de caras y me voy a dar cuenta de que 'falta una cara'. Si usted tapó una ceca, lo mismo: yo esperaré un número impar pero veré un número par. La que falta es la que usted tiene tapada.

Y esto sirve para resolver el problema en general. Si usted quisiera avanzar un poco más, le propongo que piense cómo hacer si en lugar de 10 monedas hubiera 100 o 5.000... no importa (pero sí importa que sea un número par de monedas), y después usted podrá pedirle a quien esté jugando con usted que elija un número ya no entre 0 y 10 sino entre 0 y 100, o entre 0 y 5.000. Cambiarán los números, pero *conceptualmente es todo igual*.

La paridad, una vez más, tiene un papel *esencial* en la solución de este 'truco'. Con esta idea, estoy seguro de que usted podría pensar *otros problemas* en donde sea la paridad la que le permita 'descubrir' lo que hizo la otra persona cuando usted se dio vuelta, y de esa forma sorprender a su interlocutora (o interlocutor).

Los dos problemas que siguen fueron propuestos por John Allen Paulos.[59] El mérito de los contenidos le corresponde *todo* a él. Yo simplemente soy un *comunicador*. Los titulé así:

a) La suma tiene que dar 2016.
b) Sumas y restas.

59. John Allen Paulos no solo es profesor titular en la Universidad de Temple, en Filadelfia, estado de Pensilvania, sino que con los años se ha transformado en un extraordinario comunicador, haciendo grandes aportes a la matemática recreativa. Su libro inicial, *Innumeracy* (en castellano, *El hombre anumérico*), fue un éxito mundial, aunque en general todos sus trabajos son altamente recomendables.

La suma tiene que dar 2016

Suponga que tiene una *resma* de papel, es decir, 500 hojas. Las hojas están en blanco. Yo le pido que las numere de los dos lados, es decir, empezando con una hoja que tendrá el número *uno* de un lado y el *dos* del otro, después otra que tendrá el *tres* de un lado y el *cuatro* del otro, y así siguiendo hasta completar las 500. De esta forma, usted tendrá que haber utilizado todos los números desde el 1 hasta el 1.000.

La pregunta es la siguiente: ¿habrá alguna manera de elegir 25 hojas cualesquiera (de las 500 que usted acaba de numerar) de tal forma que si uno *suma* los números que usted escribió en cada lado, ese número sea 2016?

Respuesta: No, es imposible, porque elija las hojas con la estrategia que quiera, al sumar los números de cada lado, siempre resulta un número *impar* (ya que son dos números consecutivos). Por lo tanto, como yo le pedí que se fijara si es posible seleccionar 25 de manera tal que cuando uno sume los números se obtenga el número 2016, eso será imposible, porque al sumar 25 números impares se obtendrá un número impar, y el número 2016, como todos sabemos, es par.

Reflexión

Este resultó un problema sencillo, sobre todo después de ver la *solución*. Pero la reflexión que yo quiero hacer con usted es la siguiente: ¿se imagina si uno tuviera que tratar de *probar* todas las posibles combinaciones de 25 hojas para *descubrir* si algunas de esas sumas da 2016 o no? ¿No es *notable* cómo un argumento tan *elemental* provee una respuesta inmediata y ya no hace falta buscar más?

Este es un ejemplo *extraordinario* de la potencia de esta herramienta, y por eso lo enfatizo de esta forma.

Sumas y restas

Suponga que usted tiene la suma de los primeros diez números:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Una pregunta: ¿habrá alguna forma de *cambiar* alguno (o algunos) de los símbolos de *suma* (+) y reemplazarlos por símbolos de *resta* (–) de manera tal que al hacer las cuentas ahora uno obtenga el número *cero*?

Por ejemplo, si yo hiciera los reemplazos siguientes:

$$1 + 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 7 - 8 + 9 + 10 = 3$$

Como se ve, cambié cinco símbolos de suma y los reemplacé por los de resta. Ahora, el resultado es el número *tres*. La pregunta, entonces, es: ¿se podrá encontrar alguna combinación equivalente pero cuyo resultado sea *cero*?

Respuesta

La respuesta es que *no* se puede. ¿Por qué? ¿Hará falta analizar *todas* las posibles combinaciones? Lo interesante es que *no*, no hace falta, si uno hace las siguientes observaciones:

a) La suma original, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55. Es decir, es un número impar.
b) Ahora, présteme atención a este detalle: si uno cambia el símbolo que está delante del número *cinco*, por poner un ejemplo cualquiera, y en lugar de *sumar cinco* ahora uno *resta cinco*, fíjese que el resultado final se modifica en ¡diez! Es decir, uno no solo *deja* de aportarle *cinco* a la suma final, sino que le *quita cinco*. Luego, el cambio que se produce en el resultado es de *diez*. Y lo mismo sucede con cualquier número. Si usted modifica el símbolo que está delante del número *dos*, entonces no solo ya no *suma* los dos que tenía originalmente, sino que *además* le resta *dos*. El resultado final se ve modificado en ¡cuatro! Es decir, cada *cambio* de un símbolo *más* por un símbolo *menos* afecta al resultado final en un número par (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20, respectivamente).

Con estos datos, fíjese lo que sucede. Como el número original (55) es un número impar y uno le va restando —con cada cambio— un número par, el resultado final será *siempre* un número impar (número *impar* menos número *par* siempre resulta *impar*). Luego, como la pregunta era si se podían hacer modificaciones para llegar a que resulte *cero*, la respuesta es que no va a ser posible, ya que *cero es ¡un número par!*

Sombreros ('a la Gerry')

El siguiente problema parece convencional. Es decir: cualquiera que haya pensado en algún momento alguno que involucre sombreros (blancos y negros) distribuidos entre grupos de personas creerá que este es *uno más*.

No. O mejor dicho: sí, es uno más, pero con un ingrediente extra. La solución que yo conozco involucra un aspecto de la matemática que se usa poco (en este tipo de planteos), pero que es decididamente muy útil.

De todas formas, no imagine usted que le hace falta *saber* algo y que si no lo sabe no podrá resolverlo. Al contrario: la idea, en todo caso, es *descubrir* que uno lo puede resolver sola o solo sin necesidad de haber *estudiado* matemática… Lo atractivo es que uno detectará después que uno *estuvo haciendo matemática todo el tiempo*, mientras pensaba la solución… *pero no se dio cuenta*.

Basta de prolegómenos. Acá va.

Se tienen 20 personas dispuestas en una fila (como si uno estuviera haciendo la 'cola' para comprar entradas en un cine o para entrar a un partido de fútbol). Para fijar las ideas, digamos que cada persona puede *ver* a las que tiene adelante, pero *no* a las que tiene detrás. Cada una de ellas tiene puesto sobre su cabeza un sombrero que, como es de esperar, puede ser blanco (B) o negro (N).

El que está en el lugar 20, entonces, puede ver los sombreros que tienen *todos* los que están adelante de él, pero no el propio. El que está ubicado en el lugar 19 ve los colores de los sombreros de *todos* los que tiene adelante (del 1 al 18), salvo el propio y el del vigésimo (que está por detrás de él). Y así siguiendo. De hecho, el primero de la cola *no ve ningún sombrero*, ni siquiera el propio.

Voy a preguntarle a cada uno de los que están en la fila (empezando por la que está en el lugar 20) de qué color es su sombrero.

A medida que cada uno conteste, le preguntaré al siguiente, hasta llegar al que está primero. Mientras tanto, yo no haré ninguna indicación sobre si la respuesta de cada uno es correcta o incorrecta, pero *todos escuchan todas las respuestas*.

El problema consiste en lo siguiente: las veinte personas tienen que diseñar una estrategia que les permita decidir *qué color de sombrero tienen*… ¡y solo se les permite errar, a lo sumo, **una vez**!

Es decir: antes de formar la fila, deben elegir un método (conocido y acordado por todos) de manera tal que cuando yo les pregunte qué color de sombrero tiene cada uno de ellos puedan contestar acertadamente, admitiéndose *solo un error en el trayecto*.

¿Se anima?

Es momento de dejarlo pensando a usted. Yo me retiro hasta la página de soluciones, pero hágame caso: no venga rápido. Tiene tiempo. De hecho, si lee la respuesta sin haberlo pensado, se pierde una oportunidad de entrenar el cerebro un rato. ¿Por qué habría de hacerlo?

Solución

¿Cómo hacer? Todos saben que, en total, se pueden equivocar solo una vez.

¿Cuáles son los datos que puede usar cada uno?

Lo que *ve* es solo el color de los sombreros que tiene adelante.

En cambio, *todos* escuchan lo que van diciendo los que están ubicados detrás (y también lo que dicen los de adelante, pero eso ya no tiene incidencia porque para entonces uno ya dio su respuesta).

Se trata entonces de usar estos datos de manera tal que cada uno tenga suficiente información para deducir de qué color es su sombrero cuando le toque el turno de decirlo.

Yo voy a proponer acá una estrategia. Podría asegurar que no es la única, pero en todo caso es *una* que usted podrá comprobar que sirve. Pero si usted pensó otra que también resuelve el problema, *seguro* que es mucho mejor que la que voy a plantear acá abajo por una sencilla razón: ¡es suya! Sigo.

El que está en el lugar 20 *no tiene manera de saber qué color tiene*. Ese va a ser el único que se dará el lujo de errar. Sin embargo, la persona que ocupe el lugar 20 *usará su turno para 'pasar' información al resto de los integrantes de la fila*. De todas formas, lo *único* que puede decir es Blanco o Negro, pero como usted va a ver inmediatamente, lo que diga será esencial para lo que digan los siguientes.

Acompáñeme con esta idea. El que está en el lugar 20, si bien no sabe qué color de sombrero tiene, lo que *sí* puede hacer es *contar el número de* ***sombreros negros*** que tiene delante de él.[60]

---

60. Por supuesto, puede contar los sombreros blancos también, pero elijo los negros para esta estrategia particular. Como usted podrá comprobar al

Lo seguro es que ese número será un número entre 0 y 19. Ese número, entonces, puede ser *par* (0, 2, 4, 6,...16, 18) o *impar* (1, 3, 5, 7,... 17, 19). Este dato será *clave* para la solución.

Como escribí más arriba, *uno solo de ellos puede errar*, y en este caso, quien ocupe el lugar 20 no estará tan interesado en acertar el color de su sombrero como en *pasar alguna información a los 19 restantes*. Y entonces hará lo siguiente: si el número de sombreros NEGROS que ve delante de él es un número *par*, dice: NEGRO.

En cambio, si cuando cuenta el número de sombreros negros ve que es un número *impar*, dice: BLANCO.

Los 19 integrantes de la fila, al escuchar lo que dice el 20, toman nota (mental). A partir de acá, *todos ellos saben que el número 20 ve un número PAR de sombreros negros*.

Ahora, piense conmigo: si el número 19 tiene un sombrero negro, eso quiere decir que él tiene por delante un número impar de sombreros negros. ¿Por qué? Es que si el 20 vio un número par y ahora el 19 ve un número impar, ¿cómo pudo haber cambiado la *paridad* de ese número? Solamente si el color del sombrero de 19 es negro. Si el color del sombrero del número 19 fuera blanco, entonces tanto el 20 como el 19 verían el *mismo número de sombreros negros*, pero más importante aún es que *la paridad sería la misma: si al empezar era un número par, ahora lo sigue siendo. Y si al empezar era un número impar, ahora lo sigue siendo*. ¿Qué se concluye? Esto dice que el color del sombrero del número 19 ¡tiene que ser blanco!

Primera conclusión: si la *paridad* del número de sombreros negros que ven el número 20 y el número 19 es la misma, en-

terminar de leer la solución, la estrategia podría basarse en el número de sombreros blancos y nada cambiaría.

tonces el número 19 tiene un sombrero blanco. Si en cambio, la paridad *cambia*, eso quiere decir que el número 19 tiene un sombrero negro.

Sigo. Para fijar las ideas, supongamos que el número 20 dijo NEGRO. Eso quiere decir que él ve un número par de sombreros negros. Si el número 19 ve *también* un número par, entonces él dice BLANCO, porque la paridad no cambió.

Si, en cambio, el número 19 ve un número impar de sombreros negros, esto solamente puede suceder porque él tiene un sombrero negro. Entonces, lo dice: NEGRO.

Supongamos entonces que 20 dijo NEGRO y 19 dijo BLANCO. El número 18 escuchó ambas respuestas y deduce dos cosas:

a) 20 ve una cantidad PAR de sombreros negros.
b) 19 tiene un sombrero blanco, y por lo tanto el número de sombreros negros que está viendo 19 (igual que 20) es un número PAR.

¿Cómo seguir desde acá? Si 18 ve que sigue habiendo un número par de sombreros negros, eso significa que él tiene un sombrero blanco. Si no, él tendría que ver uno menos (de los negros) y cambiaría la paridad: pasaría de ser un número par a ser un número impar. Es decir que si el 18 ve una cantidad par de sombreros negros, entonces él dirá Blanco también. En cambio, si él ve una cantidad *impar* de sombreros negros, es porque él mismo tiene que tener negro, y lo dirá. Pongamos entonces que sí, que 18 vio un número *impar* de sombreros negros. La cadena hasta acá tendría que ser así:

> 20 = dice sombrero Negro porque ve un número par de sombreros negros adelante de él.

19 = dice sombrero Blanco porque ve (como 20) que el número de sombreros negros delante de él sigue siendo par.
18 = dice sombrero Negro porque, ahora, a diferencia de 19, él ve un número *impar* de sombreros negros, y como la paridad cambió, entonces eso tuvo que haber sucedido ***únicamente*** si él tenía un sombrero negro, y lo dice: NEGRO.

¿Qué podría pasarle al 17? De acuerdo con los datos que él fue recolectando, él sabe que originalmente había un número par de negros (cuando habló el 20), siguió habiendo una cantidad par cuando habló el 19 (porque dijo Blanco), pero cuando el 18 habló dijo Negro, lo que indica que ahora el 18 ve un número impar de sombreros negros. Si el 17 viera un número *par* de sombreros negros, entonces él tiene un sombrero negro (ya que habría cambiado la paridad). En cambio, si él contara también un número impar de sombreros negros (igual que 18), entonces él tendría que tener un sombrero blanco.

No voy a seguir porque creo que la idea está clara, pero la quiero resumir en estas líneas.

a) El número 20 le indica a todo el resto si el número de sombreros negros que hay entre el 1 y el 19 es par o no. Si es un número par, dice NEGRO. Si es un número impar, dice BLANCO. Supongamos que empieza con negro.
b) El número 19 mira lo que sucede delante de él. Si sigue habiendo una cantidad par, entonces dice BLANCO. Si no, si la paridad cambió, dice Negro.
c) El número 18 presta atención a lo que dijeron sus dos predecesores. Si el 19 dijo Blanco, la paridad sigue como la veía el 20. Si no, es porque cambió, lo cual le indica al 18 que él tiene sombrero Negro.

d) Cada integrante de la fila va llevando la cuenta 'mental' de la paridad que originalmente estaba establecida por 20. Si alguien dice Blanco, esa paridad no cambia. Si alguien dice Negro, entonces sí.
e) Esa cuenta 'mental' sumada a la paridad del número de sombreros negros que quedan por delante es lo que indica con CERTEZA el color del sombrero de cada uno.

De esta forma, esta *estrategia* basada en la paridad de lo que había y de lo que queda resulta esencial para determinar el color del sombrero de cada uno, con la excepción del primero de todos (o el número 20): ese es el único que no puede saber qué color tiene puesto, pero con el resto, sí.

Por último, quiero poner acá abajo un ejemplo (que le sugiero que revise sin leer la respuesta) para saber si la estrategia le resulta —ahora— un poco más familiar.

Suponga que en lugar de 20 sombreros hay 7, y que están distribuidos así:

7 = B
6 = B
5 = N
4 = N
3 = N
2 = B
1 = N

¿Qué pasaría en este caso?

1) El número 7 dice NEGRO (y se equivoca, pero esto poco importa). Lo que SÍ interesa es que le está anunciando a los

6 de adelante que hay un número *par* de sombreros negros entre ellos.

2) El número 6 dice BLANCO (y dice bien), pero ¿por qué? Porque cuando 6 cuenta el número de sombreros negros ve cuatro (el 5, el 4, el 3 y el 1), que es un número par. Como 7 veía *también* un número par (y por eso dijo negro), entonces el número 6 SABE que tiene blanco.
3) El número 5 escuchó Blanco, lo que indica que la paridad del número de sombreros negros que había visto 7 también la vio 6, y por eso dijo blanco. Pero como 7 había dicho negro, entonces el número de negros era *par*, y ahora 5 ve un número *impar* (el 4, el 3 y el 1). Luego, como *cambió* la paridad, él (el 5) tiene un sombrero negro. Y lo dice: NEGRO.

Antes de seguir: cada vez que alguien dice Blanco, es porque la paridad del número de sombreros negros no cambia. Si alguien dice Negro, entonces sí. Como el 7 dijo negro, venimos de un número par. Como 6 dice blanco, sigue en par. Cuando 5 dice negro, entonces ahora sí cambió, y pasó a ser impar.

4) El número 4 escuchó que el 5 dijo Negro, lo que le indica que —siguiendo el proceso— el número 5 ve una cantidad *impar* de sombreros negros. Pero 4 ve una cantidad par (el 3 y el 1). Una vez más, para que la paridad cambie, él mismo, el número 4, debe tener un sombrero negro. Y lo dice: NEGRO.
5) El número 3, al escuchar negro, sabe que la paridad cambió otra vez (y ahora es un número *par*). Pero él, el número 3, ve solamente *un* sombrero negro, el del número 1. Una vez más, la paridad cambia, y eso puede pasar solamente

porque 3 tiene un sombrero negro. Y lo dice: NEGRO. Esto le indica al número 2 que el 3 está viendo una cantidad impar de sombreros negros.

6) El número 2 también ve una cantidad impar: uno solo, que lleva el número 1. Luego, como la paridad no cambia, el número 2 dice BLANCO.
7) El número 1, al escuchar al 2 decir Blanco, entiende que hay un número *impar* de sombreros negros. La única posibilidad de que esto suceda es que el propio número 1 tenga un sombrero negro. Y lo dice.

Como se ve, con esta estrategia, SALVO EL PRIMERO, todos los demás dicen (deducen) correctamente su color de sombrero, y se termina por resolver el problema.

Una última observación: el hecho de que yo hubiera elegido 20 jugadores es totalmente irrelevante. La estrategia sirve independientemente del número de personas y sombreros. Es posible extenderla a *cualquier número* de participantes. Haber resuelto este caso particular permite generalizarlo a un número n cualquiera de participantes, y de ahí la belleza del ejemplo.[61]

61. Este problema me lo contó (como tantos otros) Gerardo Garbulsky. Si disfrutó al pensarlo, el crédito entonces es para él.

Matadores y pacifistas

Lawrence Potter es un matemático inglés que trabajó varios años en Centroamérica, en Rumania y en Ruanda, enseñando no precisamente en las mejores condiciones, pero con un entusiasmo extraordinario. Escribió varios libros de divulgación a pesar de ser aún muy joven (30 años en 2013), pero seguramente el más famoso es el que se llama *Mathematics Minus Fear* ("Matemáticas menos miedo"). De ese libro extraje una historia que me parece atractiva para poder compartir acá. Dice así.

> En un pueblo muy pequeño hay 101 personas denominadas 'matadores' (M) y otras 101 personas denominadas 'pacifistas' (P). Cuando un P se encuentra con otro P en la calle, no pasa nada. Siguen caminando como si no se hubieran visto. Si un M se encuentra con un P, el M 'mata' al P. Y finalmente, si se encuentran dos M, mueren ambos, se matan mutuamente.
> Todas las personas del pueblo (las 202) van caminando por las calles sin parar. Los encuentros se suceden únicamente de a dos, de a pares. Es decir, suponemos que idealmente cada vez que una persona se encuentra con otra, nunca hay otras alrededor. Los encuentros son —además— totalmente aleatorios.
> Una mañana, con las reglas establecidas más arriba, **todos** (los 202 habitantes del pueblo) salen a caminar. Y no dejarán de caminar

> independientemente de lo que vaya sucediendo con los que vayan perdiendo la vida en el camino.
> Justo en ese momento en donde todos salen a la calle y empiezan a recorrer el pueblo, a usted (sí, a usted) le piden que se incorpore a la caminata junto con ellos y cumpla las mismas reglas que ellos como si nada sucediera a su alrededor. Eso sí: le dan la chance de que elija ser o bien un M o bien un P. ¿Qué es lo que más le convendría ser: un 'matador' (M) o un 'pacifista' (P)? ¿Cuál de las dos chances le da una mayor probabilidad de sobrevida?

Más allá de que siempre me provoca cierto 'escozor' escribir sobre 'matadores', muertes, etc., espero que quede claro que se trata de un juego que solo involucra usar un poco de lógica. Dicho esto, ubíquese en el lugar (desafortunado, claro está) y piense a cuál de los dos grupos le convendría más pertenecer: ¿P o M?

Por otro lado, ¿se podrá elaborar alguna *estrategia* que permita incrementar las chances de sobrevida?

Ahora le toca a usted.

Solución

Como las personas tienen que seguir caminando indefinidamente, las muertes van a continuar hasta que no se pueda seguir más. Por ejemplo, si los sobrevivientes fueran todos pacifistas, allí mismo terminarían las matanzas. Ahora bien, ¿qué posibilidades hay de que eso suceda?

En principio, cuando dos P se encuentran, no sucede nada significativo. Siguen adelante como si fueran transparentes. Pero inexorablemente, como la caminata de cada persona es totalmente aleatoria, en algún momento *todo* pacifista se terminará encontrando con algún M. Sin embargo, usted podría pensar: "No, eso no tendría por qué ser cierto. Podría suceder que todos los M se destruyeran entre sí, y que yo, si fuera un P, tuviera la suerte de no encontrarme nunca con ninguno de los M". Pero, ¿será posible esto?

Fíjese. Los M, además de matar a los P, se matan entre ellos. O sea, que cuando muere uno de los M, también tuvo que haber muerto otro M. Es decir, **los M mueren de a dos**. Los P no. Ellos van muriendo de a uno, pero los M mueren de a dos. Este es un dato *muy importante* porque va a ser el que permita contestar la pregunta original ("¿qué conviene ser: M o P?". Ya verá).

Acá es también donde la matemática tiene algo para decir. Como en principio hay 101 personas identificadas como M, y todos ellos van a ir muriendo de a pares, llegará un momento en que quedará *un solo M vivo*. ¿Por qué? Es que como 101 es un número impar, restando de a dos, en algún momento se llegará a la situación en la que quedará un solo M que todavía no murió (y eso sucedió porque cada vez que se encontró con gente en la calle han sido todos P).

Como usted se da cuenta, los P van a ir muriendo todos también, aunque más no sea porque en algún momento de sus caminatas inexorablemente se encontrarán con un M y morirán en el instante. Es decir que si usted se incorpora al contingente de personas que habitan el pueblo, si es un P, morirá inexorablemente: su probabilidad de sobrevida ¡es nula!

¿Qué posibilidades de sobrevida hay si usted eligiera ser un M en el momento de empezar a caminar?

Si usted fuera un M iría matando a todos los P con los que se fuera encontrando en el camino. Si tiene la suerte de *nunca* encontrarse con ningún M, entonces quedará vivo hasta el final, pero allí sí, *inexorablemente*, se tropezará en algún momento con el *otro M* que tuvo que haber quedado vivo también (porque los M se mueren de a dos). Y allí sí, morirán los dos: él, sí, pero *también usted*.

Moraleja: no importa lo que usted elija ser al principio: sea un P o un M, sus posibilidades de sobrevida no existen.

Puentes de Königsberg

Todo transcurría a mediados del siglo XVIII, en Königsberg, una ciudad prusiana (devenida luego Kaliningrado, hoy Rusia). La ciudad era atravesada por un río, el Pregel. Además, en el medio del río había dos islas. Los pobladores habían construido siete puentes para cruzar de una orilla a la otra, pasando por alguna de las islas. La distribución es la que se ve en la Figura 1:

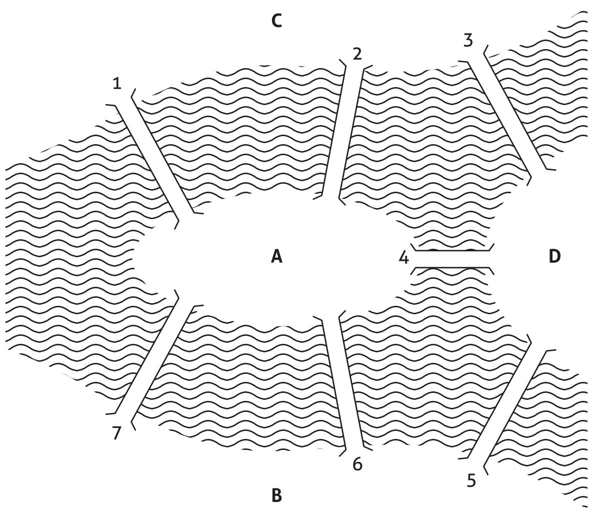


Figura 1

Hay cuatro sectores de tierra, A, B, C y D, y siete puentes.

La pregunta es la siguiente: empezando en cualquier parte de la geografía, ¿es posible recorrer los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo? Es decir, uno se para en cualquier lugar (incluso en cualquiera de las dos islas) e intenta cruzar los siete puentes sin repetir. ¿Se puede?

Por supuesto, la tentación mía es escribir la respuesta aquí mismo. La tentación suya es leer la respuesta "sin pensar" más que un minuto. ¿Y si lo intenta solo/a? Quizá se entretenga y valore el desafío, aunque en principio (o "en final") no le salga. Es solo una sugerencia...

Respuesta: El problema no tiene solución. Es decir, no sé cuánto tiempo le dedicó usted, pero en lo que sigue voy a tratar de explicar por qué no hay manera de recorrer los siete puentes sin repetir ninguno. Pero antes, quiero contarle una breve historia.

Le pido que me acompañe con esta idea. Mire el siguiente dibujo:

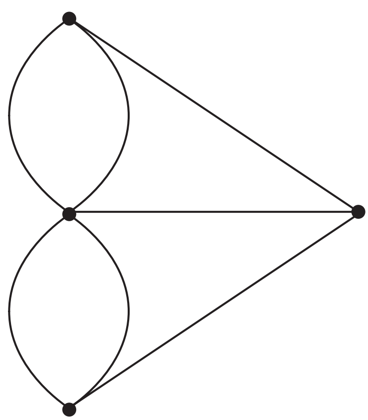


Figura 2

¿Puede relacionarlo con el problema anterior? Es verdad que ahora ya no hay más islas ni puentes. Ahora hay puntos o vértices que hacen el papel de la tierra firme en el gráfico original, y los arcos que los unen son los que antes, en la Figura 1, hacían el papel de puentes.

Como se ve, el problema no cambió. El gráfico sí, pero en esencia todo sigue igual. ¿Cuál sería ahora la nueva formulación del problema? Piénselo solo, si prefiere. Si no, uno podría intentar así: "Dada la siguiente configuración o el siguiente dibujo (Figura 2), ¿se puede empezar en cualquier punto o vértice y recorrerlo sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo arco?

Si lo piensa un instante, se dará cuenta de que no hay diferencia conceptual. Es el mismo problema planteado de dos formas diferentes. Una vez aceptado esto, pensemos juntos por qué no se puede.

Los vértices, entonces, se llaman A, B, C y D. Contemos juntos el número de arcos que salen (o entran) de cada vértice.

Al vértice A llegan (o salen) tres arcos.

Al vértice B llegan (o salen) cinco arcos.

Al vértice C llegan (o salen) tres arcos.

Al vértice D llegan (o salen) tres arcos.

Es decir, en todos los casos entra (o bien sale, pero es lo mismo) un número impar de arcos.

Ahora le sugiero que pensemos lo siguiente. Supongamos que usted ya comenzó su camino en alguna parte, salió de algún vértice y cayó en otro que no es ni el inicial ni el final. Si es así, entonces a ese vértice usted llegó por un arco y tendrá que salir por otro. Tuvo que haber usado un arco para llegar, porque usted sabe que ese no es el inicial, y sabe que tiene que usar un arco para salir, porque sabe que ese no es el final. Por favor, antes de avanzar, piense en lo que escribí recién, pero piénselo solo, eventualmente haciendo un dibujo.

¿Cuál es la moraleja de esto? Una posible moraleja es que si uno cae en algún vértice en el recorrido, que no es ni el inicial ni el final, entonces el número de arcos que salen (o entran) tiene que ser par. ¿Por qué? Porque uno necesita llegar por uno y salir por otro. Luego, necesita que el número de arcos que llegan y salen a ese vértice sea par.

Ahora bien. Si eso es cierto, ¿cuántos vértices pueden, en principio, tener un número de arcos que entran o salen que sea impar? (Piense la respuesta.... Si quiere, claro.)

La respuesta es que hay solo dos vértices que pueden tener un número impar de arcos que llegan o salen, y estos son, eventualmente, el vértice inicial (que es el que uno elige para empezar el recorrido) y el vértice final (que es el que uno eligió como final del recorrido).

Una vez entendido esto, lo que queda por hacer es volver a mirar en el dibujo original y contar cuántos arcos entran o salen de cada vértice.

Como sabemos (porque ya hicimos la cuenta más arriba) que a todos los vértices llega o sale un número impar de arcos, entonces el problema NO TIENE SOLUCIÓN. Porque de acuerdo con lo que hemos visto, a lo sumo dos de los vértices pueden tener un número impar de arcos que llegan. Y en el caso nuestro (el de los Puentes de Königsberg), todos tienen un número impar.

Varias observaciones finales:

a) Proponer un modelo como el que transformó el problema original (el de los siete puentes) en un gráfico como el de la Figura 2 es hacer matemática.

b) Este problema fue uno de los primeros que inauguró una rama de la matemática que se llama Teoría de Grafos. Y también la topología. Uno de los primeros nombres que tuvo la Teoría de Grafos fue el de "geometría de posición". Con el ejemplo de los puentes de Königsberg, se advierte que no interesan ni tamaños ni formas, sino posiciones relativas de los objetos.
c) El problema es ingenuo, pero el análisis de por qué no se puede requiere pensar un rato. El primero que lo pensó y lo resolvió (ya que muchos fracasaron) fue un suizo, Leonhard Euler (1707-1783), uno de los matemáticos más grandes de la historia. A él se le ocurrió la demostración del teorema que prueba que no importa qué camino uno recorra, nunca tendrá éxito. Entender que hace falta un teorema que demuestre algo general, para cualquier grafo (o dibujo), también es hacer matemática. Es obvio que una vez que uno tropezó con un problema de estas características se pregunta cuándo se puede y cuándo no se puede encontrar un camino. Euler dio una respuesta que no solamente sirvió para este caso, sino que mostró que estudiando *la paridad* se puede determinar cuándo hay solución... y cuándo no.

La princesa, el rey que la tenía escondida y el caballero que quería encontrarla

El que sigue es un problema espectacular. Hay muchas versiones circulando desde hace muchísimos años pero elijo la que me sugirió Juan Pablo Pinasco (que fue el primero que me advirtió de su existencia).

Lo voy a escribir como si fuera un cuento. En un pueblo del Medioevo, había un rey que quería casar a su hija,[62] pero quería que quien se casara con ella tuviera algún tipo de destreza *lógica*. Había remodelado un ala del castillo en donde vivían y preparado un largo pasillo (como si fuera un hotel) con 17 puertas. Estas puertas permitían el acceso a 17 habitaciones, pero lo curioso es que estaban todas del mismo lado: el derecho. En la puerta de cada una de estas habitaciones había una placa con un número que la identificaba, del *uno* al *diecisiete*.

Cada habitación tenía tres puertas. Una que comunicaba al

62. Qué locura es esto, ¿no? Yo lo escribo, usted lo lee como tantas otras veces en la vida en los libros de cuentos y toma con total naturalidad —o casi— algo *tremendo: las vidas de las personas eran* ***decididas*** *por otras*. Y no es que sucedía esporádicamente. No. Sucedía mucho, y no solo con reyes y princesas, sino en las vidas cotidianas cuando 'alguien' (el pretendiente) tenía que pedir la 'mano' de una dama, y otro (el padre) tenía el (abuso de) poder de 'entregarla'... No. Pero claramente me desvié del tema.

pasillo (al exterior) y otras dos que comunicaban con las piezas vecinas. Por ejemplo, la número *siete* tenía una puerta que la comunicaba con la *seis* y otra con la número *ocho*. Por supuesto, la primera y la última habitación solamente tenían dos puertas: la que las comunicaba con el pasillo y la que les permitía acceder a la 'única' adyacente.

Ahora llega el momento del planteo. El rey le pide a la princesa que se mude a esa parte del castillo en donde están las 17 habitaciones. Las preparó como para que ella nunca tuviera que salir de allí: lucen espléndidas y tienen todo lo que él cree que a ella le hará falta para cubrir todas sus necesidades. Le pide que ingrese a la habitación número *uno* y que siga las siguientes reglas: durante un año ella tiene que cambiar de pieza ***todos*** los días. No se puede quedar en la que está. Pero algo más: no puede ir a cualquiera sino a alguna de las dos vecinas (salvo cuando esté en la 1 o en la 17, ya que en ese caso solamente podrá ir a la 2 o a la 16).

En el momento en el que se cumple exactamente un año desde que la princesa ingresó a la habitación número *uno*, ella tuvo que haber hecho exactamente 365 cambios de habitación. Ese mismo día, el rey lleva al pretendiente hasta una punta del pasillo y le cuenta lo que le pidió a su hija que hiciera. Le muestra las 17 habitaciones numeradas y le dice que si se quiere casar con ella tendrá que encontrar en qué habitación está. Así dicho, parece fácil: bastará con que el candidato abra puerta por puerta hasta descubrirla. Pero no; el rey tiene otras ideas. Le explica: "Usted elija el número de habitación que quiera. Si entra y la encuentra, listo: yo le concedo su mano. Demostrará que es una persona con mucha suerte. Sin embargo, si no está allí, puede repetir el proceso al día siguiente eligiendo la habitación que quiera". Sin embargo, el rey agrega: "Me doy cuenta de que si yo le permitiera hacer esto indefinidamente, usted terminaría encontrándola, pero no es así. Usted tiene 15 días **consecutivos empezando hoy** para encontrarla. Mi hija va a seguir moviéndose con estas reglas. Trate usted de diseñar una estrategia que le permita descubrirla en ese plazo".

Ahora le toca a usted... Sí, a usted. ¿Se puede o no se puede?

Respuesta

Como hago habitualmente, le sugeriría que no empiece leyendo lo que yo voy a escribir en las próximas líneas. Es decir, si quiere hágalo, pero no se robe a usted misma/o la oportunidad de descubrir dónde está la dificultad. Dedíquele un rato, permítase disfrutar de pensar qué hacer aunque no se le ocurra nada *conducente* al principio.

Sigo. ¿Qué podría hacer el pretendiente? En algún lugar va a tener que empezar, pero, ¿dará lo mismo abrir cualquier puerta? Por supuesto, puede confiar en su suerte y elegir una puerta cualquiera, abrirla y 'vivir con los resultados'. Pero, ¿será racional hacerlo de esta forma? Digo, porque si la encuentra, todo bien, pero ¿y si no? ¿Cómo sigue? ¿Para qué lado arranca?

Por ejemplo: ¿tendrá sentido que empiece en la habitación número *uno*? En realidad, a simple vista pareciera como que no hay ninguna diferencia, empiece en el lugar que empiece, porque la princesa tuvo tanto tiempo para ir y venir en 365 días que podría estar en cualquier habitación. Sin embargo, esto último *no es **tan cierto***. ¿Por qué? Fíjese que si ella empezó en la habitación número *uno*, al día siguiente, el día que hizo *el primer cambio*, tuvo que haber terminado en la habitación número *dos* (que es un número *par)*. Al segundo día, cuando hace el *segundo cambio*, podrá volver a la número *uno o entrar en la número tres.* ¿Le sugiere algo este dato?

Me permito observarle que los números *uno* y *tres* son números *impares*. Cuando haga el tercer cambio, como estaba en las habitaciones uno o tres, tendrá que pasar o a la dos o a la cuatro. No sabemos cuál, pero lo que *sí* sabemos es que es una habitación que tiene un número *par*. Si me siguió hasta acá, le sugiero que haga lo siguiente: siéntese con un papel y una lapicera y fíjese si puede encontrar algún tipo de *patrón*. ¿Qué quiero decir con esto? Es que cada vez que pasa un número ***impar*** de días desde que la princesa empezó el proceso, ella está en una habitación ***par***. Y al revés: cuando pasa un número ***par*** de días, está en una habitación con un número ***impar*** en la puerta.

Tendría que haber alguna forma de usar estos datos. Si pudiera, le haría nuevamente la pregunta que formulé: ¿tendrá sentido que el pretendiente empiece abriendo la puerta número ***uno***? O más aún: ¿tendrá sentido que empiece en alguna habitación que tenga un número ***impar*** en la puerta que da al pasillo? La respuesta es que ***no***, porque seguro que no la va a encontrar. Como la princesa realizó 365 cambios, cuando el caballero va a ingresar en una habitación, él ya sabe que ella ¡tiene que estar en una habitación con un número *par*! Si él entrara en la habitación con el número *uno*, terminaría desperdiciando una de las pocas alternativas que tiene para encontrarla directamente. Moraleja: cuando empiece, decididamente le conviene elegir una habitación cualquiera que tenga un número ***par***.

El pretendiente puede empezar entonces abriendo la puerta número *dos*. Por supuesto, si la princesa está allí, listo; se termina la historia. Pero si no está, entonces se deduce que ni está en la uno ni en la dos (en la uno no podía estar porque ese día tenía que estar en una habitación *par)*. Al día siguiente (o sea, al segundo día de haber empezado), el caballero sabe que la princesa ahora *tiene que estar en una habitación impar*. Decide entonces abrir la puerta número *tres*. Como antes, si la princesa está allí, se termina todo, pero si no está, entonces el pretendiente sabe que no solo no está en la habitación tres, sino que no está ni en la dos ni en la uno. ¿Por qué? En la dos no puede estar porque hoy le tocaba estar en número impar, pero en la uno no puede estar tampoco, porque, si no, el día anterior (cuando él empezó el recorrido), ella tenía que haber estado en la número dos... pero no estaba. Moraleja: luego del *segundo día* (de los 15 que puede usar), el caballero sabe que la princesa no está ni en la uno, ni en la dos ni tampoco en la tres.

Pero quiero hacer una observación más. De acuerdo a lo que venimos haciendo en los últimos párrafos, ya sabemos que la princesa, en ese segundo día, debe estar en una habitación impar. Pero ahora sabemos, *además*, que mientras el caballero está en la habitación *tres*, ella no está ni en la *uno* ni en la *tres*, y por lo tanto le quedan estas posibilidades: 5, 7, 9, 11, 13, 15 o 17. Esta idea me parece importante, porque, como supongo que usted intuye, este proceso empieza a *empujar*[63] a la princesa hacia las habitaciones con números cada vez más grandes. Sigo.

Al día siguiente (al tercer día) ahora la princesa tiene que estar en una habitación *par*, pero el caballero sabe que no puede ser la dos (porque, si no, tendría que haber estado en la uno o en la tres el día anterior, y no estaba). Luego, abre la puerta 4. Una vez más: si la encuentra, se termina el problema. Pero si no la encuentra, entonces la princesa (después del tercer día) puede estar solamente en las habitaciones 6, 8, 10, 12, 14 y 16. Es decir, el pretendiente no solo va descartando habitaciones, sino que además está casi 'arrinconando' a la princesa hacia las habitaciones del fondo.

63. *Empujar* al 'lugar' en el que *puede* estar la princesa.

La *estrategia* para los 15 días es la siguiente (en donde escribo el número de habitación que el caballero tiene que ir abriendo):

2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16

Si usted cuenta, descubrirá que son exactamente *quince* habitaciones que abre en 15 días consecutivos. ¿Por qué la encuentra *seguro*?

Primer día: el caballero abre la puerta 2. Ella está en una habitación par. Si la encuentra, listo. Si no, la princesa tiene que estar en la 4, 6, 8, 10, 12, 14 o 16 (no puede estar ni en la *uno* ni en ninguna otra impar).

Segundo día: ella está en una habitación impar, pero no puede ser la *uno* porque el día anterior no estaba en la *dos*. El caballero abre la puerta *tres*. Si la encuentra, termina todo. Si no, ella tiene que estar en la 5, 7, 9, 11, 13, 15 o 17. Fíjese que la princesa ***no puede estar en ninguna habitación que lleve un número MENOR que tres.***

Tercer día: ella está en una habitación par, pero no puede ser la *dos* porque el día anterior no estaba ni en la *uno* ni en la *tres*. El caballero abre la *cuatro*. Como antes, si la encuentra, listo. Si no, está en la 6, 8, 10, 12, 14 o 16. Como antes, ahora que el caballero está en la *cuatro*, se deduce además que la princesa no está ***en ninguna habitación que tenga un número MENOR que cuatro.***

Cuarto día: ella está en una habitación *impar*. Él abre la puerta *cinco*. Si la encuentra, todo termina allí. Si no, está en la 7, 9, 11, 13, 15 o 17 (y no puede estar en las anteriores por las razones que ya expuse).

Y continuamos hasta el día 15. La princesa está en una habitación *par*, pero no puede ser ninguna de las anteriores porque siempre estuvo en un número mayor en *dos* al que él abrió, y entonces solamente puede estar en la habitación 16... ¡que es justo la habitación en la que entra el caballero!

Esta estrategia permite encontrar a la princesa inexorablemente, no importa dónde hubiera estado al principio: el caballero la encuentra en el proceso o, en el peor de los casos, en el día 15 la encuentra en la habitación 16.

Conclusión

Como usted advierte, la estrategia está basada en hacer un uso adecuado de la paridad de *todos* los números involucrados:

- La paridad del número de la habitación en donde *puede* estar la princesa en cada paso del proceso.
- La paridad del número de días que pasaron desde que la princesa empezó a circular por el castillo.
- La paridad del número de días desde que el caballero empezó a buscarla.

Juntando todos estos datos, y como era esperable en un cuento de princesas, reyes y caballeros, hay un final feliz.

La última bolita

Este problema tiene dos partes. Ambas son atractivas y muy ilustrativas. Hay varias formas de abordarlas, pero prefiero contar los enunciados primero y después invitarla/lo a hacer algunas reflexiones.

1) Suponga que se tienen 100 bolitas negras y 50 blancas en una urna. Además, arriba de una mesa hay bolitas negras y blancas a su disposición por si las fuera a necesitar. Ya verá cuándo y por qué. En el momento en que suena un timbre, usted empieza a realizar la siguiente operación: mete la mano en la urna y saca dos bolitas. Si son del mismo color, pone una bolita negra adentro de la urna. Si son de diferente color, repone la blanca. Como usted advierte, en cada paso hay una bolita menos dentro de la urna. Por lo tanto, en algún momento, quedará una única bolita. ¿Será siempre del mismo color, o dependerá de la forma en la que usted fue sacando y reponiendo las bolitas?
2) Si ahora se tienen inicialmente 100 bolitas negras y 49 blancas dentro de la urna, ¿qué puede decir ahora sobre la última bolita: será siempre del mismo color, o dependerá de la forma en la que usted fue sacando y reponiendo las bolitas?

Como usted ve, el problema es de sencillo enunciado. Todo lo que hay que hacer es ir retirando bolitas de a dos y, de acuerdo con los colores, reponer de un color o de otro: negra, si las dos eran del mismo color, y blanca si eran de colores distintos. Por supuesto, en el caso que usted retire dos bolitas blancas, para reponer una negra podría ser que usted necesite usar alguna de las bolitas negras que usted tenía a su disposición, pero aun así el proceso terminará, porque, en cada paso, dentro de la urna va quedando una bolita menos.

Ahora le toca a usted.

Respuesta

Antes de analizar cada caso por separado, quiero que nos pongamos de acuerdo en algunos hechos:

- En cada paso, el número de bolitas decrece en uno. Esto es cierto porque, sean las dos bolitas que retire del mismo o distinto color, retiro dos y repongo una.
- En cada paso, el número de bolitas negras cambia la paridad. Es decir, si había una cantidad par, pasa a impar, y al revés, si había una cantidad impar, ahora hay una cantidad par. ¿Por qué? Inicialmente, hay 100 bolitas negras. Si usted toma dos bolitas blancas de entrada, como son del mismo color necesita reponer una negra. Por lo tanto, tiene que usar alguna de las bolitas que había afuera de la urna. Pero lo que importa es que ahora hay 101 bolitas negras. Si en cambio retira dos bolitas negras, usted repone una de las negras dentro de la urna. Entonces, ahora quedan 99 negras. Y si usted retira dos bolitas de diferente color, repone la blanca, con lo cual el número de bolitas blancas no se

afecta, y el número de bolitas negras decrece en uno: ahora hay 99. Una vez que usted haya entendido este ejemplo, lo que importa es que el número de bolitas negras baja o sube en uno, y por lo tanto, en cualquier paso del proceso, el número de bolitas negras pasa de par a impar, o al revés. Este hecho es lo que se conoce con el nombre de 'cambiar la paridad'.

- En cada paso del proceso, el número de bolitas blancas no cambia la paridad. Es que si uno retira dos bolitas de diferentes colores, blanca y negra, repone la blanca. Luego, el número de bolitas que había, si era par, sigue siendo par, y si era impar, sigue siendo impar. Y en el caso en que usted extraiga dos bolitas del mismo color, las deja afuera y repone una negra. O sea, el número de bolitas blancas permanece inalterado (si eran dos negras), o bien se reduce en dos (si eran dos blancas). Moraleja: la paridad de las bolitas blancas no se altera en cada paso.

Si ahora usted entendió estas dos observaciones, ¿estará en condiciones de contestar las dos preguntas? ¿No le dan ganas de pensar el problema en soledad?

Mientras tanto, sigo yo. Avancemos en cada caso por separado.

1) En el primer caso, hay 100 negras y 50 blancas. En cada paso, la paridad de las blancas no cambia, y la de las negras se va alterando paso por paso. En cada paso, el número de bolitas blancas permanece estable, o se reduce en dos. O sea, al principio, o bien se queda en 50, o bien pasa a 48. En el siguiente paso, sucede lo mismo. El número de blancas será: 50, 48 o 46. Y así siguiendo. Como de entrada hay un número par de bolitas blancas, independientemente de

cómo vayamos sacando las bolitas de la urna, esa paridad no se altera. Por lo tanto, cuando quede una última bolita, esta sola será un número impar (uno). Y la única manera de que haya un número impar de bolitas dentro de la urna es que sean negras. Entonces, la última bolita tiene que ser negra.

2) En este caso, el número inicial de bolitas blancas es impar. Como en el proceso la paridad no cambia, cuando quede una sola bolita (que es un número impar) tendrá que ser blanca.

Moraleja: estudiar la paridad es determinante. Dependiendo de las condiciones iniciales, la última bolita será negra o blanca. Y es un dato verdaderamente curioso que utilizando el mismo mecanismo, si originalmente hay 150 bolitas (100 y 50), al final tiene que quedar una negra, pero si hay 149 (100 y 49), entonces la última tiene que ser blanca. ¿No es interesante?

El aporte de 'alguien' que piensa distinto: Carlos Sarraute

Cuando Carlos Sarraute vio este problema, antes de ver la solución que yo planteaba, me escribió inmediatamente este texto:

> ¡Lindo problema! Te cuento cómo lo pensé: con mi pensamiento más de programador, dije "¡Ah, es un XOR!". Cambiando bolita negra por 0, y bolita blanca por 1, la operación sobre las bolitas es el XOR (el OR exclusivo), que es lo mismo que la suma módulo 2, y es una de las operaciones más básicas de la informática.
>
> $$0 + 0 = 0$$
> $$0 + 1 = 1$$
> $$1 + 0 = 1$$
> $$1 + 1 = 0$$

Entonces yo le contesté (el 24 de junio del 2013):

Bueno, me parece muy bien, pero me vas a tener que contar un poco mejor para que lo pueda incluir. Así como lo escribiste es muy ‘críptico’ para el público ‘lego’. Necesito algo un poco más detallado. Si lo podés hacer, creo que no te va a costar demasiado, trato de incluirlo en el libro. Avisame. Un abrazo y gracias.

Dos horas después, Carlos me volvió a escribir, y esta es la versión final. De paso, sirve para que aprendamos yo y todos los que están interesados en pensarse como futuros programadores.

Adrián, aquí va un intento de explicación más detallada. ¡Me doy cuenta de que queda un guiño un poco largo!
Representemos cada bolita negra con un 0, y cada bolita blanca con un 1. La operación que realizamos sobre las bolitas se puede pensar entonces como una operación sobre bits (números que valen 0 o 1), una operación con dos entradas (las bolitas que sacamos de la urna) y una salida (la bolita que ponemos en la urna). Los bits son las unidades más pequeñas de información en una computadora, y se pueden implementar físicamente como algo prendido (1) o apagado (0).
Dados dos bits de entrada, generamos el bit de salida comparando las dos entradas. Si solo uno de los dos bits vale 1, entonces la salida es 1. Si no, la salida es 0. Esto corresponde exactamente a lo que hacemos en el problema: si solo una de las bolitas es blanca (1), entonces ponemos una bolita blanca (1), si no ponemos una negra (0).
Esta operación en informática se llama XOR (del inglés “eXclusive OR”). El nombre se debe a que “a XOR b” vale 1 si a o b vale 1 (pero no los dos). La tabla de valores del XOR es:

0 XOR 0 = 0
0 XOR 1 = 1

$$1 \text{ XOR } 0 = 1$$
$$1 \text{ XOR } 1 = 0$$

Esta es una de las operaciones básicas de la informática. Tiene muchas propiedades, y las que nos interesan para este problema son: la conmutativa (0 XOR 1 = 1 XOR 0) y la asociativa. Por ejemplo:

$$(1 \text{ XOR } 0) \text{ XOR } 1 = 1 \text{ XOR } (0 \text{ XOR } 1) = 0$$

Esto quiere decir que, dado un conjunto de bits, podemos ir realizando las operaciones XOR en cualquier orden y obtener siempre el mismo resultado (el XOR de todos los bits). Dicho en términos del problema, podemos sacar las bolitas en cualquier orden, sin que eso afecte el resultado.

¿Y cuál es el XOR de un conjunto de bits? Depende de la cantidad de unos: si es par, el resultado es 0, y si es impar, el resultado es 1. O sea que llegamos por otro camino a la misma solución: depende de la paridad de bolitas blancas (unos).

Otra moraleja. Como usted puede apreciar, mi forma de pensar y la de Carlos difieren. Sin embargo, yo quiero rescatar el valor que tiene su forma de 'acercarse' a un problema. Él piensa cómo una computadora puede ayudarlo a encontrar una solución al problema, y entonces *escribe él mismo un programa para que esa computadora ejecute y le dé el resultado que busca*. Yo, por el contrario, pienso en términos distintos, no sé si llamarlo más abstractos. La idea de haber incluido estas dos formas de abordar un problema es justamente invitarla/o a usted a que no solo elija su propio camino, sino que lo elabore con sus propias ideas.

Para terminar, quiero mostrar cómo una estrategia 'comercial' se basó en el uso de la matemática. Acompáñeme por acá.

Schlitz y la distribución binomial

¿Escuchó usted hablar de Schlitz? Posiblemente no. Sin embargo, Schlitz Beer en un momento determinado fue la marca de cerveza ¡más vendida en el mundo! Claro, eso ocurría en la primera mitad del siglo XX y, por lo tanto, ¿quién se acuerda? Era tal la dominación que Schlitz tenía sobre la competencia que su *slogan* era algo así como: "*Si usted se quedó sin Schlitz es porque se quedó sin cerveza*".

Corría el año 1981. A Schlitz le habían *crecido* muchísimos competidores. No solo eso: habían *nacido, crecido y la estaban por dejar afuera de carrera.* Michelob, Miller, Budweiser eran otras marcas de cerveza que empezaban a pisar fuerte, y en todo caso ellas eran las tres que movían el amperímetro y dejaban poco lugar para quien había sido la estrella indiscutida durante tanto tiempo. A punto de 'desaparecer' del podio, contrataron los servicios de una de las agencias de publicidad más importantes (aún hoy): Walter Thompson. Los creativos de la empresa propusieron varias ideas. Esto fue lo que pasó.

Usted debe de haber escuchado hablar del Super Bowl. Es el partido *final* del torneo norteamericano de fútbol (norteamericano, claro está). Lo interesante es que, en la transmisión de televisión, el ciudadano promedio está *tan interesado en el partido* *propiamente dicho* como en los comerciales que se ofrecen en el entretiempo. Un aviso de 30 segundos costó este año (2015) *cuatro millones y medio de dólares*. Esto significa 150.000 dólares ¡por segundo! Si usted está interesado en la *evolución* del precio, el año pasado hubo que pagar *cuatro millones* por el mismo medio minuto, y casi 50 años atrás, en 1967, cuando se concretó el matrimonio tripartito de fútbol/televisión/avisos comerciales, los treinta segundos se cotizaron a 42.000 dólares. Quizás sirva esto último para entender qué inflación 'brutal' hay y hubo en todo el mundo, no solo en la Argentina.

Vuelvo a la historia central: en el año 1981 había pocos acontecimientos en el planeta que garantizaran al menos 100 millones de televidentes simultáneos. Dentro de esa categoría se podían incluir la final de un campeonato mundial de 'nuestro fútbol', alguna pelea en Las Vegas o la final olímpica de los 100 metros llanos en atletismo. Seguro que se me escapa algún otro, pero ciertamente el Super Bowl era uno de los que podían atraer ese número de espectadores. Quizás por eso es que la agencia de publicidad que manejaba la cuenta de Schlitz convenció a la compañía de dar una suerte de 'salto al vacío', tratando de 'seducir' a la audiencia de volver a Schlitz como la cerveza favorita.

Prepararon una campaña publicitaria agresiva que desarrollaron a lo largo de los *playoffs* y que culminaría en el entretiempo del Super Bowl. El total que invirtieron fue de 1.700.000 dólares, y no olvide que esta cantidad de dinero fue invertida hace 'casi' 35 años. Como Michelob era la cerveza que más se vendía, dejaron para ese día una confrontación 'mano a mano'. Eligieron a 100 personas a las que se les presentaría la opción de probar dos vasos llenos de cerveza: uno de ellos contenía Michelob y el otro Schlitz. Cada participante ignoraba 'a priori' cuál era cuál y debía determinar la que prefería. Es decir, era una competencia 'a ciegas'. Usted se debe(ría) estar preguntando: ¿y dónde está la *gran idea? ¿Eso fue todo lo que se les ocurrió*? Es que uno sospecha que si no les salía bien o si los resultados no eran los que esperaban, entonces grababan de nuevo el aviso o bien no lo pasaban directamente.

Sí, todo bien, pero hay algo más que —adrede— omití escribir hasta acá: los avisos *no eran grabados, sino <u>en vivo</u>*. Es decir, la empresa se jugaba su *credibilidad* y ciertamente *su futuro*. ¿Qué habría de pasar con la compañía si la gente elegía mayoritariamente alguna *otra* de las cervezas y no la que ellos querían promocionar/vender?

Creo que ahora se advierte la *gran diferencia* entre una estrategia (grabar y elegir) y la otra, que consistía en hacer el aviso *en vivo* y aceptar las consecuencias. Pero espere; hay más.

Llegó el día esperado, el 25 de enero de 1981. En New Orleans (la ciudad que años después sería devastada por el huracán Katrina) se habría de disputar el partido entre los Oakland Raiders y los Filadelfia Eagles. Lo que *todos* los que están en el negocio de estos tipos de cerveza *saben* pero casi ninguno *dice*, al menos públicamente, es que las diferencias entre ellas son virtualmente inexistentes. Elegir una sobre otra es 'casi' como optar entre cara y ceca al tirar una moneda al aire.

¿Y entonces? La agencia de publicidad hizo dos cosas importantes: una, en términos creativos, y la otra, en términos estadísticos. La *idea más importante* fue la forma en la que eligió a los 100 participantes el día del aviso en vivo. Los competidores se manifestaron *abiertamente 'fanáticos' de Michelob*. Todos habían expresado enfáticamente que *solamente tomaban Michelob*.

Este es un dato no menor. Fíjese que, en el momento de la competencia, Schlitz no arriesgaba que ninguno de sus seguidores optara por cualquier otra cerveza. En el comercial *no había* *seguidores de Schlitz*. Al revés: cierta cantidad (a determinar) entre los seguidores de *la otra marca* habrían de exhibirse ante ‘el mundo’ que, si bien preferían a Michelob, cuando se les daba la oportunidad de testear Schlitz, decidían cambiar.

Me apuro a escribir que esa estrategia ya es una *manipulación flagrante* y que no debería servir para medir nada. En lugar de hacer la competencia en forma honesta y elegir a los participantes al azar y dejar que cada uno decidiera a gusto, *la muestra* estaba *fuertemente teñida de subjetividad*.

Pero al margen de esta deficiencia, la agencia de publicidad debe haber tenido muy buenos asesores en matemática y especialistas en estadística. Ellos los deben haber ayudado a hacer algunas cuentas y convencerlos de que ¡no arriesgaban casi nada!

Usted se estará preguntando: “¿Qué cuentas?”. Bueno, las cuentas que servían para estimar a qué se exponía la empresa. ¿Qué arriesgaba la gente de Schlitz? ¿Cuál era la probabilidad de que —por ejemplo— los 100 participantes del aviso eligieran a Michelob? ¿No podría haber pasado eso? Y sí... como poder, podría. Pero sígame con algunos cálculos.

Primero, necesito que nos pongamos de acuerdo en algo que ellos sabían y que nosotros no. Cuando digo ‘nosotros’, me refiero a usted, a mí y seguramente a los 100 competidores: como escribí antes, las *diferencias* entre ese tipo de cervezas son imperceptibles: son tan *malas* o tan *buenas* las dos. Elegir una sobre otra es como acertar a ‘cara o ceca’.

Se sabe que el resultado del evento que estaba a punto de suceder con las 100 personas, sigue lo que se llama “una distribución *binomial*”. No se asuste, es solo un nombre, pero a los matemáticos nos sirve *clasificar* el experimento, *encasillarlo*, y si podemos ubicarlo en algún lugar conocido, entonces *todas las conclusiones que se sacaron antes se pueden utilizar en este caso particular*.

Ahora, fíjese qué condiciones se tienen que cumplir para que se pueda decir que estamos ante un caso de distribución 'binomial'.

a) Tiene que haber un número fijo de experimentos (en este caso, son las 100 personas que habrían de probar cerveza de los dos vasos y decidir cuál preferían).
b) Tiene que haber solamente dos resultados posibles (en este caso, Schlitz o Michelob).
c) La probabilidad de que suceda algo 'favorable' (que salga Schlitz) tiene que ser la misma para cada participante del experimento. En el caso que nos ocupa, esa probabilidad era de ½ para cada una de las dos cervezas, ya que había las mismas chances de que eligieran una u otra cerveza. Pero, en una situación cualquiera, la probabilidad de que ocurra algo 'favorable' puede ser cualquier número (entre 0 y 1). Por ejemplo, podría ser que la probabilidad de que suceda algo 'favorable' sea de ¾ (que es equivalente a un 75 por ciento de posibilidades) o de 1/5, que significa un 20 por ciento de chances. Lo relevante no es *cuál* es esa probabilidad, sino que se mantenga constante para todos los que participen en la encuesta.
d) Cada acontecimiento tiene que suceder en forma independiente. Es decir, el resultado de cada competidor no afecta la decisión de ningún otro, ni viceversa.

Cuando todas estas condiciones se cumplen, uno puede decir que el experimento sigue una *distribución binomial (o de Bernoulli)*.

Ahora, sígame con algo extraordinario. La matemática permite contestar este tipo de preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 37 elijan Schlitz y 63 elijan Michelob?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 14 elijan Michelob y 86 elijan Schlitz?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 40 elijan Schlitz?

Y así podría seguir. Uno puede elegir cómo dividir los gustos de las 100 personas entre las dos marcas y yo le puedo decir cuál es la probabilidad de que eso suceda. ¿No es maravilloso? Como herramienta de *estimación*, es fabulosa. Dicho esto, vea lo que sucedió.[64]

En principio, de las 100 personas que votaron, increíblemente, la mitad eligió Schlitz. Digo 'increíblemente' porque se dio *con exactitud lo que idealmente uno supone que va a pasar: va a tirar 100 veces una moneda y saldrá cara (o ceca) la mitad de las veces.* Pero el impacto fue otro: de los cien que participaron, todos autodefinidos 'fanáticos' de Michelob, la mitad optó por Schlitz por encima de su marca preferida. Esto le permitió a la agencia de publicidad sacar la siguiente conclusión: "Si uno les da la chance de probar Schlitz, la mitad de los más fieles y seguidores de Michelob *cambian*"[65].

Por otro lado, la pregunta central es la siguiente: ¿qué arriesgó Schlitz? ¿Cuál habría sido el *peor* escenario posible? Que las 100 personas hubieran elegido Michelob. Bien, pero ¿cuál es esa probabilidad? Dos formas de contestar:

a) Es la misma probabilidad de tirar cien veces una moneda que no esté cargada, y que ¡salga 100 veces cara!

---

64. El aviso se puede ver acá: adland.tv/commercials/schlitz-schlitz-vs-michelob-live-1981-060-usa

65. El inconveniente que tuvo todo ese experimento es que fue burdamente manipulado y, por lo tanto, *falso*.

b) O tengo otra forma para proponerle que lo piense: elija 1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.375 nombres distintos. Sí, ya sé: no está seguro de conocer tantos, ¿no? Bueno, suponga que sí, que conoce esa cantidad de nombres. Anote cada uno en un papel distinto. Métalos dentro de una caja (tendrá que ser bastante grande para que quepan todos). Ahora, agregue el suyo. Mezcle bien... pero bien *en serio*. Ahora, pídale a una persona neutral que meta la mano en la caja y que elija un nombre al azar. La probabilidad de que salga el suyo es la misma que había de que las 100 personas eligieran a Michelob.

Supongo que esto es bastante convincente, pero hay algo más que 'intuyo' que usted está pensando: "No hace falta que *todos* hubieran elegido Michelob. ¿Para qué pedir tanto? Bastaría con que hubiera habido *muchos* que eligieran Michelob". De acuerdo, entonces quiero escribir acá otro par de datos que quizás le sirvan:

a) La chance de que *por lo menos 40* de los 100 hubieran elegido Schlitz era más de un **98 por ciento**.
b) Y de que *por lo menos 45* de los 100 hubieran elegido Schlitz era de casi un 86 por ciento.

Es decir, la agencia de publicidad había hecho *muy bien los deberes*. Ellos *sabían* que arriesgaban muy poco, hicieran el comercial en vivo o grabado. Lo que pasa es que *nosotros*, usted y yo, no estamos prestando atención y nos creímos que el riesgo era grande. Por eso yo escribí más arriba que habían decidido 'dar un salto al vacío'. ¡Nunca hubo ningún salto! Estaba todo contemplado.

Moraleja final (que no me voy a cansar de escribir): "*Alfabetizar el país fue una necesidad que venimos encarando desde la época de Sarmiento. Pero la definición de lo que significa ser alfabeto ha ido cambiando con el tiempo, es dinámica. Hay que saber programar, aunque sea las cuestiones más elementales, y también hay que saber comunicarse en otros idiomas. Si uno es capaz de usar una computadora con programas que escribieron otros, es como si uno supiera leer, sí, pero sin poder escribir. ¿Se imagina un mundo donde usted supiera leer pero no supiera escribir? Piénselo por un instante...*

Y para terminar, quiero reproducir una frase que leí el otro día y que por lo tanto no es mía: "*Es muy posible que uno pueda mentir manipulando estadísticas, pero lo que es imposible es decir toda la verdad sin usarlas*".

Final

Cada vez que termino de escribir un libro, pienso: ¡este fue el último! Pero ya van doce años, once libros y, por ahora, esto no ha sucedido. Está claro que alguna vez sucederá, y quizás sea esta la primera (y última).

En cualquier caso, si usted volviera atrás y leyera la introducción, vería que allí dice: *"Yo disfruté al escribirlo. Ojalá que usted disfrute al leerlo"*.

Y esta frase me representa fuertemente. Cada vez que me siento y escribo algo, lo hago pensando que tengo a alguna persona enfrente y que estamos compartiendo algo que nos interesa a los dos. Yo me crié en la facultad, en Exactas (UBA), en donde *se discutía todo, pasábamos muchísimo tiempo juntos con compañeros, con otros estudiantes o con los ayudantes de cada materia, con docentes de distinto rango y jerarquía... ¡pensando... pensando problemas entre todos*! Allí sí que no había autoridad que valiera: en general, en la ciencia no existe el principio de autoridad (o no debería existir). Si una persona *afirma algo*, ***tiene*** que poder demostrarlo, convencernos a todos de que lo que dijo es cierto. No importa cuántos años tenga, ni la experiencia que traiga (siempre respetable, claro está), si uno sostiene que *algo* es cierto, *necesita* poder demostrarlo.

En algún lugar, eso va creando una estructura, una 'cultura'.

Pero pocas cosas me hacen sentir mejor que estar con una persona con quien hemos recorrido —o estamos recorriendo— un camino, un camino que *conduce a la comprensión*, un camino que permite *entender algo*.

Hay ***un*** momento 'mágico', un momento donde se produce el 'ajá'. Ese momento particular es impagable. Ver la transformación, el paso de 'no entender' a 'sí entender', es algo maravilloso, y poder experimentarlo (en cualquiera de las dos direcciones) provee uno de los momentos más gratificantes de la vida. En todo caso, es una 'medicina' que recomiendo fuertemente.

Cuando estoy sentado frente a mi computadora, como ahora, y escribo sobre una forma de *abordar* y/o *resolver* un problema, me sirve para *disfrutar* lo que le debe de estar pasando 'al otro'... a 'la otra' persona. Es allí cuando pienso *cuánto daría por estar compartiendo con usted ese momento*.

Ahora sí, punto final (o no…).

Índice